Megyei matematikaverseny 2012.

9. évfolyam
2. forduló

1. Mennyi a tizenkilencedik prím és a tizenkilencedik összetett szám szorzata?

(A) 2010 (B) 2011 (C) 2012 (D) 2014
(E) Az előző válaszok egyike sem helyes.

Válasz: (A) 2010
Megoldás: A 67 és 30 szorzata 2010.

2. Az $1000+2\cdot(1+2+3+\ldots+999)$ szám értéke négyzetszám. Melyik számnak a négyzete?

(A) 999 (B) 1000 (C) 1002 (D) 1200 (E) 2000

Válasz: (B) 1000

Megoldás:
$$1000+2\cdot(1+2+3+\ldots+999)=1000+2\cdot\frac{999\cdot 1000}{2}=$$
$$=1000+999\cdot 1000=(1+999)\cdot 1000=1000\cdot 1000=1000^2$$

3. Ha $5x+7y=9$ és $7x+5y=63,$ akkor mennyi $x+y$ értéke?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Válasz: (E) 6
Megoldás. $(5x+7y)+(7x+5y)=12(x+y),$ azaz $9+63=12(x+y),$ $72=12(x+y),$ ezért $x+y=6.$

4. $\dfrac{2011^2+2009}{2010}=?$

(A) 2009 (B) 2010 (C) 2011 (D) 2012 (E) 2013

Válasz: (E) 2013
Megoldás. Az $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ azonosságot használjuk:
$$\frac{2011^2+2009}{2010}=\frac{2011^2-1+2010}{2010}=\frac{2011^2-1}{2010}+1=\frac{(2011-1)(2011+1)}{2010}+1=$$
$$=\frac{2010\cdot 2012}{2010}+1=2012+1=2013.$$

5. Anikó, Benedek, Csaba, Dani és Elemér közül mindenki választ az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokból kettőt, mindenki más számokat választ, így mind a tíz szám kiválasztásra kerül. Mindenki kiszámolja, mennyi a választott két szám összege. Anikó összege 4, Benedeké 18, Csabáé 12, Danié 13, Elemér összege pedig 8. A számok közül ki választotta a 2-t?

(A) Anikó (B) Benedek (C) Csaba (D) Dani (E) Elemér

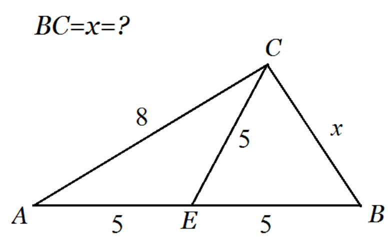
Válasz: (E) Elemér
Megoldás: Anikó számai 1 és 3, Benedeké 10 és 8, Csabáé csak 5 és 7 lehet, Dani számai 9 és 4, Elemér a 2 és 6 számokat választotta.

6. Egy osztályban a félév folyamán 16, 10, 7, 6 és 4 tanuló kapott rendre legalább egy, legalább kettő, legalább három, legalább négy és legalább öt jeles osztályzatot matematikából. Az is kiderült, hogy ötnél több jeles osztályzatot senki sem kapott. Hány jelest osztottak ki matematikából a félév folyamán?

(A) 43 (B) 44 (C) 45 (D) 46 (E) 47

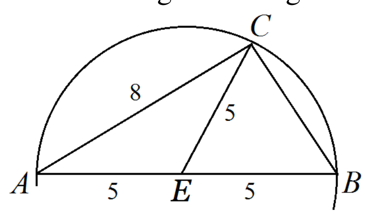
Válasz: (A) 43
Megoldás: Pontosan 1 db 5-öse 16–10=6 diáknak van, pontosan 2 db 5-öse 10–7=3 tanulónak van, pontosan 3 db 5-öse 7–6=1 tanulónak van, pontosan 4 db 5-öse 6–4=2 diáknak van, pontosan 5 db 5-öse 4 tanulónak van.
Az 5-ösök száma: $1\cdot 6+2\cdot 3+3\cdot 1+4\cdot 2+5\cdot 4=43$.

7. Az ABC háromszög AB oldalának egy pontja E, és $AE=EB=5$, $AC=8$, $CE=5$. Mekkora az x-szel jelölt BC szakasz?



(A) 4 (B) 5 (C) 5,5 (D) 6 (E) 7

Válasz: (D) 6
Megoldás. Az AB oldal fölé rajzolt 5 egység sugarú (az E középpontú) körön van a C csúcs, ezért a *Thalész-tétel* miatt az ABC háromszög derékszögű háromszög.



A *Pitagorasz-tétellel* számolható a BC befogó, $BC^2=10^2-8^2=36$, $BC=6$.

8. Egy matematikaverseny döntőjén a lányok száma a versenyzők számának több mint 23%-a, és kevesebb mint 24%-a. Hányan vannak a lányok, ha a versenyzők száma 17-nél kevesebb?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Válasz: (C) 3
Megoldás: Legyen a versenyzők száma a, a lányok száma x. Ekkor $23a < 100x < 24a$. Keressük a 24 valahányszorosát, mely nagyobb egy 100-zal osztható számnál, és ennél kisebb a 23-nak az ugyanennyiszerese.
Azokat az eseteket kell nézni, amikor a $24a$ átlépi a 100-at, 200-at, 300-at, …
$5 \cdot 24 > 100$, azonban $5 \cdot 23 > 100$. Ugyanígy nem megoldás $9 \cdot 24 > 200$, mert $9 \cdot 23 > 200$. Azonban $13 \cdot 24 > 300$, $13 \cdot 23 < 300$, tehát megtaláltuk az alkalmas értékeket: $a = 13$, $x = 3$.

9. $a_1 = 7$, $a_{n+1} = \sqrt{|a_n^2 - 16|}$, ahol n pozitív egész szám. $a_{80} = ?$

(A) 1 (B) 7 (C) $\sqrt{15}$ (D) $\sqrt{17}$ (E) $\sqrt{33}$

Válasz: (A) 1
Megoldás: A sorozat tagjai: $7, \sqrt{33}, \sqrt{17}, 1, \sqrt{15}, 1, \sqrt{15}, \ldots$ $a_{80} = 1$.

10. Mennyi $a + b + c + d + e$ értéke, ha

$$\left.\begin{aligned} 3a + 2b + 4d &= 10 \\ 6a + 5b + 4c + 3d + 2e &= 8 \\ a + b + 2c + 5e &= 3 \\ 2c + 3d + 3e &= 4 \\ a + 2b + 3c + d &= 7 \end{aligned}\right\}$$

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Válasz: (A) 4
Megoldás: Adjuk össze az első, a harmadik és az ötödik egyenletet:
$5a + 5b + 5c + 5d + 5e = 20$, így $a + b + c + d + e = 4$.

11. Egy számot nevezzünk páratlan kitevőjűnek, ha prímtényezős felbontásában minden kitevő páratlan. Ilyenek például $13 = 13^1$, $54 = 2 \cdot 3^3$. Legtöbb hány egymást követő páratlan kitevőjű számot lehet megadni?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Válasz: (D) 7
Megoldás: 7 számot lehet: 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35.
8 számot nem lehet, mert van közöttük $8k + 4 = 4 \cdot (2k + 1) = 2^2 \cdot (2k + 1)$ alakú szám, és ez nem páratlan kitevőjű.

12. Az 1, 2, 3, …, 98, 99 számokból kiválasztottunk 50 számot úgy, hogy semelyik kettő összege sem 99, sem 100. Mennyi a kiválasztott számok összege?

(A) 2250 (B) 2275 (C) 2500 (D) 3550 (E) 3725

Válasz: (E) 3725

Megoldás: 49 számpár van, amelyben a számok összege 100, és az 50-nek nincs párja. Ha kiválasztottunk 50 számot, akkor mindegyik párból egy számot választunk, és választjuk az 50-et is. Két szám összege nem lehet 99, és $50+49=99$, ezért a 49-et nem választhattuk, így annak a párját, az 51-et vettük ki. $51+48=99$, ezért a 48-at nem választhattuk, így annak a párját, az 52-t vettük ki. A 47-et nem választhatjuk, így a párját, az 53-at vesszük ki. Tovább válogatva, a kiválasztott 50 szám csak az 50, 51, 52, …, 99 lehet. Ezek összege 3725.

Megyei matematikaverseny 2012.

10. évfolyam
2. forduló

1. Hány olyan kétjegyű szám van, amelynek az 1-en és a 3-an kívül nincs páratlan osztója, és ezek (az 1 és a 3) osztói is a számnak?

(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Válasz: (C) 4
Megoldás: A keresett számnak a 3 prímosztója, és más prímosztója csak a 2 lehet. Ezek a számok 2-hatványok 3-szorosai: 3, 6, 12, 24, 48, 96, közöttük négy kétjegyű szám van.

2. Ha $a+\frac{1}{a}=3,$ akkor mennyi $\left|a-\frac{1}{a}\right|$ értéke?

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 1,5 (D) 2 (E) $\sqrt[3]{3}$

Válasz: (A) $\sqrt{5}$

Megoldás: Ha $a+\frac{1}{a}=3,$ akkor $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=9,$ $a^2+2+\frac{1}{a^2}=9$, tehát $a^2-2+\frac{1}{a^2}=5,$ azaz $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=5,$ $\left|a-\frac{1}{a}\right|=\sqrt{5}.$

3. Mennyi $\frac{7!+6!}{5!}$ értéke?

(A) 6 (B) 13 (C) 48 (D) 60 (E) 120

Válasz: (C) 48

Megoldás. $\frac{7!+6!}{5!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5!+6\cdot 5!}{5!}=\frac{(7\cdot 6+6)\cdot 5!}{5!}=7\cdot 6+6=48.$

4. Hány olyan *n* pozitív egész szám van, amelyre n^3+2n^2+9n+8 értéke köbszám?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4
(E) végtelen sok

Válasz: (B) 1
Megoldás: Mivel $n^3<n^3+2n^2+9n+8<(n+2)^3$, így $n^3+2n^2+9n+8=(n+1)^3$ kell legyen. $n^2=6n+7,$ azaz $n=7.$

5. Ha x és y valós számok, akkor mennyi $|1000-x|+|x-y|+|y-2011|$ legkisebb értéke?

(A) 1000 (B) 1011 (C) 2011 (D) 3011 (E) 4022

Válasz: (B) 1011
Megoldás: A $|1000-x|+|x-y|+|y-2011|$ kifejezés három távolság összegét jelenti: az 1000 és az x, az x és az y, valamint az y és 2011 számpárok távolságainak összegét. Ha x és y 1000 és 2011 között van, akkor a távolságok összege $|2011-1000|=1011$, ha x és y közül akárcsak az egyik is kisebb 1000-nél, vagy nagyobb 2011-nél, akkor a távolságok összege nagyobb 1011-nél. A távolságok összegének minimuma 1011.

6. Hány megoldása van az $|x-1|\cdot|x+2|=|x+1|\cdot|x-2|$ egyenletnek a valós számok körében?

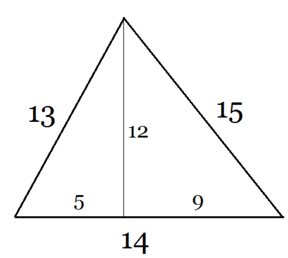
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Válasz: (D) 3
Megoldás: Szorzat abszolút értéke egyenlő a tényezőinek abszolút értékéből képezett szorzattal, és fordítva, tehát az $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$ és $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$ szorzatok abszolút értéke egyenlő. Ez kétféleképpen teljesülhet: a két szorzat egyenlő, és így a különbségük 0, vagy egymás negatívja, ezért az összegük 0. Az első esetben $x=0$. A második esetben $x^2+x-2=-(x^2-x-2)$, azaz $x^2=2$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$. Az egyenletnek három gyöke van.

7. Egy háromszög oldalainak hossza 13, 14 és 15 egység. Mekkora a háromszög területe?

(A) 80 (B) 82 (C) 84 (D) 86 (E) 88

Válasz: (C) 84
Megoldás: A háromszög két jól ismert derékszögű háromszögből áll össze.



Ha ezt észrevettük, azután már könnyű számolni a területet: $\frac{14\cdot 12}{2}=84$.

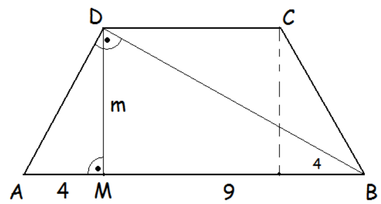
Számolhatunk a *Héron-képlettel* is: $T=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=\sqrt{7^2\cdot 3^2\cdot 4^2}=84$.

8. Az $ABCD$ húrtrapéz D-ből induló magasságának talppontja az AB alapon M. Tudjuk, hogy $AM = 4$, $MB = 9$ és $ADB \sphericalangle = 90^o$. Mekkora a trapéz területe?

(A) 42 (B) 48 (C) 54 (D) 60 (E) 66

Válasz: (C) 54

Megoldás: Az ABD derékszögű háromszögben a magasságtétel alapján: $m = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$.



A C pont merőleges vetülete az AB alapból lemetsz egy 4 hosszú darabot (a trapéz szimmetriája miatt), emiatt a DC szakasz vetülete az AB-n $9-4=5$ hosszú, $DC=5$.

A trapéz területe: $t = \dfrac{13+5}{2} \cdot 6 = 54.$

9. Mennyi az $x^2 - 4x + 1 = 0$ egyenlet gyökei köbének összege?

(A) 48 (B) 52 (C) 56 (D) 60 (E) 64

Válasz: (B) 52

Megoldás: A gyökök és együtthatók közti összefüggéseket használjuk. Az egyenlet gyökei x_1, x_2. (Van két valós gyök, mert a diszkrimináns pozitív.) $x_1 + x_2 = 4$, és $x_1 \cdot x_2 = 1$. Az egyenlet gyökei köbének összege: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 64 - 3 \cdot 4 = 52.$

10. Hány olyan ötjegyű 6-ra végződő szám van, amely osztható 6-tal?

(A) 1296 (B) 1500 (C) 2401 (D) 3000 (E) 4500

Válasz: (D) 3000

Megoldás: Ha egy 6-ra végződő 3-mal osztható ötjegyű szám utolsó jegyét, a 6-ost elhagyjuk, egy 3-mal osztható 4-jegyű számot kapunk. Ha egy 3-mal osztható négyjegyű szám után 6-ost írunk, akkor egy 6-ra végződő 3-mal osztható ötjegyű számot kapunk. Mivel 6-ra végződik, így 2-vel is osztható ez a 3-mal osztható szám, tehát 6-tal is osztható.

Tehát annyi 6-ra végződő 6-tal osztható ötjegyű szám van, mint ahány 3-mal osztható négyjegyű szám. A négyjegyű számok száma 9000, ezek közül minden harmadik osztható 3-mal, így a 3-mal osztható négyjegyű számok száma $\dfrac{9000}{3} = 3000$.

11. Jelölje p_i az i-edik prímszámot. Hány olyan pozitív egész n és k számpár van, amelyre

$$\prod_{i=1}^{n} p_i = k^2 - 1$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
(E) Végtelen sok.

Válasz: (A) 0
Megoldás: A bal oldal osztható 2-vel, de 4-gyel nem. A jobb oldal 4-gyel osztva 0 és 3 maradékot adhat. Ezek miatt az egyenletnek nincs megoldása.

12. Az $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 100\}$ halmaznak kiválasztottuk két részhalmazát, A-t és B-t úgy, hogy $|A| = |B|$ és $|A \cap B| = 0$, továbbá ha $n \in A$, akkor $2n + 2 \in B$. Mekkora $|A \cup B|$ maximuma?

(A) 62 (B) 66 (C) 68 (D) 70 (E) 74

Válasz: (B) 66
Megoldás: Előbb belátjuk, hogy $|A \cup B| \le 66$, azaz $|A| \le 33$. Megmutatjuk, ha az A részhalmaza az $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$ halmaznak, és A-nak van 34 eleme, akkor van olyan $n \in A$, hogy ekkor $2n + 2 \in A$.
Az $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$ halmazt felosztjuk 33 részhalmazra:

$\{1, 4\}, \{3, 8\}, \{5, 12\}, \{7, 16\}, \ldots, \{23, 48\}$ – ez 12 részhalmaz.
$\{2, 6\}, \{10, 22\}, \{14, 30\}, \{18, 38\}$ – ez 4 részhalmaz.
$\{25\}, \{27\}, \{29\}, \ldots, \{49\}$ – ez 13 részhalmaz.
$\{26\}, \{34\}, \{42\}, \{46\}$ – ez 4 részhalmaz.

Ha az $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$ halmazból választunk 34 számot, akkor az előbbi 33 részhalmaz valamelyikéből két számot veszünk, és erre a két számra teljesül, hogy az egyik n, a másik $2n + 2$.
Tehát $|A| \le 33$, és mint a következő példa mutatja az $|A| = 33$ elérhető.
Az $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 47, 49, 2, 10, 14, 18, 26, 34, 42, 46\}$ halmaz, és az ebből az $n \in A$, akkor $2n + 2 \in B$ szabállyal generálható B halmaz teljesíti a feltételeket, és ekkor $|A \cup B| = 66$.

Megyei matematikaverseny 2012.

11. évfolyam
2. forduló

1. Hány olyan prímszám van 100 és 300 között, amelyben a számjegyek összege 15?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Válasz: (A) 0
Megoldás. Ha egy szám jegyeinek összege 15, akkor a szám osztható 3-mal (hiszen a számjegyek összege osztható 3-mal), ezért ez a szám egy 3-mal osztható összetett szám (ugyanis nagyobb 3-nál).

2. A 2^{100} szám d jegyű szám. Hány jegyű a d szám?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Válasz: (B) 2
Megoldás: *Vázlatosan*: $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, $2^{100} = \left(2^{10}\right)^{10} \approx \left(10^3\right)^{10} = 10^{30}$, tehát a 2^{100} szám legalább 31-jegyű, és a 31 szám 2-jegyű szám.
Megoldás: $10^3 < 2^{10} = 1024 < 2000 = 2 \cdot 10^3$, azaz $10^3 < 2^{10} < 2 \cdot 10^3$. Mindegyik számot tizedik hatványra emelve: $10^{30} = \left(10^3\right)^{10} < \left(2^{10}\right)^{10} < \left(2 \cdot 10^3\right)^{10} = 2^{10} \cdot 10^{30} < 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{30} = 2 \cdot 10^{33}$, tehát $10^{30} < 2^{100} < 2 \cdot 10^{33}$, ami azt jelenti, hogy a 2^{100} szám legalább 31-jegyű, és legfeljebb 34-jegyű szám. Ám a 31 is, és a 34 is 2-jegyű szám.

3. Melyik az a legkisebb n természetes szám, amelyre $\frac{10!}{n}$ értéke négyzetszám?

(A) 6 (B) 7 (C) 14 (D) 21 (E) 42

Válasz: (B) 7
Megoldás: Egy négyzetszám prímtényezős alakjában a kitevők páros számok, ezért $n = 7$ a legkisebb szám, amellyel a $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ számot elosztva négyzetszámot kapunk.

4. Legtöbb hány darab egymást követő szám adható meg úgy, hogy a számok mindegyike két különböző prímszám szorzata legyen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Válasz: (C) 3
Megoldás: Négy egymást követő szám egyike osztható 4-gyel, és az a szám már nem két különböző prímszám szorzata. Legfeljebb három egymás utáni számot lehet megadni a feltételek szerint. Ha ilyeneket keresünk, azok között nem lehet 4-gyel osztható szám, így a következő számhármasokat kell megvizsgálnunk: (1, 2, 3), (5, 6, 7), (9, 10, 11), (13, 14, 15), (17, 18, 19), (21, 22, 23), (25, 26, 27), (29, 30, 31), (33, 34, 35), …A 33, 34 és 35 mindegyike két különböző prím szorzata, tehát a keresett válasz: 3.

5. Mennyi az $x^2 + y^2 + x - y + xy + 2$ kifejezés legkisebb értéke?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Válasz: (B) 1

Megoldás: $2(x^2 + y^2 + x - y + xy + 1) = (x+1)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2 \geq 0$, a 0 értéket felveszi a kifejezés, ha $x = -1$, $y = 1$. Így $x^2 + y^2 + x - y + xy + 1 \geq 0$, $x^2 + y^2 + x - y + xy + 2 \geq 1$.

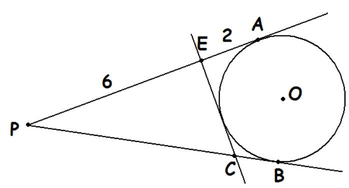
6. Hány olyan pozitív egész *n* érték van, amelyre $n^3 - n^2 + n - 1$ értéke prímszám?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Válasz: (B) 1

Megoldás: $n^3 - n^2 + n - 1 = n^2(n-1) + (n-1) = (n^2+1)(n-1)$. Ha ez a szorzat prímszám, akkor a két tényezőből a kisebbik értéke 1. Tehát $n = 2$, ekkor $n^3 - n^2 + n - 1$ értéke valóban prímszám, ez az érték 5.

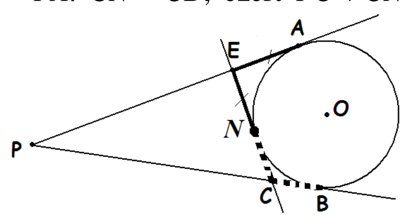
7. Az *O* középpontú kör érintői a *PA*, *PB* és *EC* egyenesek. Ha $PE = 6$, $EA = 2$, akkor mekkora a *PEC* háromszög kerülete?



(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

Válasz: (B) 16

Megoldás. Azt használjuk, hogy egy körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők. $EA = EN$, ezért $PE + EN = PA$. $CN = CB$, ezért $PC + CN = PB$.



A *PEC* háromszög kerülete $= PA + PB = 8 + 8 = 16$.

8. Mennyi $\sqrt{x^2 - y^2}$ értéke, ha $x + y + \sqrt{x+y} = 72$ és $x - y - \sqrt{x-y} = 30$?

(A) 24 (B) 30 (C) 48 (D) 72

(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

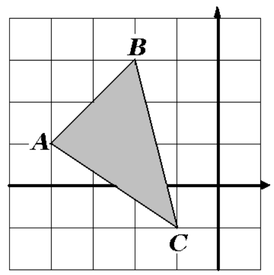
Válasz: (C) 48

Megoldás: Az első egyenlet $a^2 + a = 72$ alakú, ennek a pozitív megoldása 8, így $\sqrt{x+y} = 8$.
A második egyenlet $b^2 - b = 30$ alakú, $\sqrt{x-y} = 6$. $\sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x-y} = 8 \cdot 6 = 48$.

9. Az x, y valós számokra $\left.\begin{array}{r} y-x\le 5 \\ y+4x\le -5 \\ 3y+2x\ge -5 \end{array}\right\}$ teljesül. Mekkora x^2+y^2 legnagyobb értéke?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

Válasz: (E) 17
Megoldás. Az egyenlőtlenségeket teljesítő $(x;\ y)$ számpárok az ABC háromszögben levő pontok koordinátái, ahol $A(-4;1)$, $B(-2;3)$, $C(-1;-1)$.



x^2+y^2 értéke az $(x;\ y)$ pont origótól mért távolságának négyzete.
Az ABC háromszög pontjai közül az A csúcs van legtávolabb az origótól.
Ezért x^2+y^2 legnagyobb értéke $4^2+1^2=17$.

10. Hány valós gyöke van az $x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=(x+3)^3$ egyenletnek?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Válasz: (B) 1
Megoldás: Összevonások után $2x^3-12x-18=2(x-3)(x^2+x+3)=0$, és az $x^2+x+3=0$ egyenlet diszkriminánsa negatív, így csak az $x=3$ megoldás.

11. Hány olyan $\overline{abc}$ háromjegyű szám van, melyre $b<a$, $b<c$?

(A) 171 (B) 252 (C) 285 (D) 385 (E) 450

Válasz: (C) 285
Megoldás: Ha $b=0$, akkor a értéke és c értéke is az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számok bármelyike lehet. Ez $9\cdot 9=81$ lehetőség, azaz 81 db háromjegyű szám.
Ha $b=1$, akkor a értéke és c értéke is a $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számok bármelyike lehet. Ez $8\cdot 8=64$ lehetőség, azaz 64 db háromjegyű szám.
Az esetek vizsgálatát így folytatva rendre 49, 36, 25, 16, 9, 4, 1 db háromjegyű számot találunk. Ez összesen 285 szám.

12. Melyik az a legkisebb n pozitív egész szám, amelyre n^n nem osztója 2010!-nak?

(A) 45 (B) 46 (C) 47 (D) 48 (E) 49

Válasz: (C) 47

Megoldás: Ha $n^2 \le 2010$, akkor n^n osztója 2010!-nak, ugyanis a 2010!-ban tényezőként szerepel a következő n db szám: n, $2n$, $3n$, $\ldots$, $n \cdot n$. Mivel $1936 = 44^2 < 2010 < 45^2 = 2025$, így a keresett n számra $n \ge 45$ teljesül.

A $45, 2\cdot 45, 3\cdot 45, \ldots, 44\cdot 45 = 1980, 3, 15$ számok szorzata osztható 45^{45}-nel, és ez a szorzat osztója 2010!-nak. Tehát a 45 is kizárható.

A $46, 2\cdot 46, 3\cdot 46, \ldots, 43\cdot 46 = 1978, 23, 3\cdot 23, 5\cdot 23, 7\cdot 23, 16$ számok szorzata osztható 46^{46}-nal, és ez a szorzat osztója 2010!-nak. Tehát a 46 is kizárható.

A 47 prímszám, és $\left[\frac{2010}{47}\right] = 42$, ezért 2010! osztható 47^{42}-nel, de nem osztható 47^{43}-nal.

Megyei matematikaverseny 2012.

12. évfolyam
2. forduló

1. Ha x. y és $y-\frac{1}{x}$ egyike sem nulla, akkor mennyi $\dfrac{x-\frac{1}{y}}{y-\frac{1}{x}}$ értéke?

(A) 1 (B) $\frac{x}{y}$ (C) $\frac{y}{x}$ (D) $xy-\frac{1}{xy}$

(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

Válasz: (B) $\frac{x}{y}$ **Megoldás:** $\dfrac{x-\frac{1}{y}}{y-\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{xy-1}{y}}{\frac{xy-1}{x}}=\dfrac{xy-1}{y}\cdot\dfrac{x}{xy-1}=\dfrac{x}{y}$

2. Leírtam egy sorba öt nemnegatív valós számot. Közülük bármely két szomszédos szám összege legfeljebb 1. Legfeljebb mennyi lehet ennek az öt számnak az összege?

(A) 3 (B) 3,5 (C) 4 (D) 4,5 (E) 5

Válasz: (A) 3
Megoldás: Az öt egymás után írt szám: a, b, c, d, e.
Összegük $a+b+c+d+e=(a+b)+(c+d)+(d+e)-d\le 3$, és az egyenlőség elérhető, például ha az öt szám 1, 0, 1, 0, 1.
Tehát az öt szám lehetséges legnagyobb értéke 3.

3. Az 1, 2, 3, …, 9, 10 számokból hányféleképpen lehet három különböző számot kiválasztani úgy, hogy azok számtani sorozatot alkossanak?

(A) 10 (B) 15 (C) 18 (D) 20 (E) 22

Válasz: (D) 20
Megoldás: Ha az első tag 1, a második lehet 2, 3, 4, 5 (ez 4 lehetőség); ha az első tag 2, a második lehet 3, 4, 5, 6 (ez 4 lehetőség), … A lehetőségek száma összesen 4+4+3+3+2+2+1+1=20.

4. Az x, y, z pozitív számokra $x(x+y+z)=26$, $y(x+y+z)=27$, $z(x+y+z)=28$ teljesül. Mennyi $x+y+z$ értéke?

(A) 8 (B) 9 (C) 12 (D) 13 (E) 14

Válasz: (B) 9
Megoldás: Adjuk össze a három egyenlőtlenséget, így az $(x+y+z)^2=81$ egyenlőséget kapjuk, azaz $x+y+z=9$.

5. $\log_6 10 \cdot \lg \sqrt[10]{216} = ?$

(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{10}{3}$ (C) $-\frac{3}{10}$ (D) $-\frac{10}{3}$

(E) Az előző válaszok egyike sem helyes.

Válasz: (A) $\frac{3}{10}$

Megoldás: $\log_6 10 \cdot \lg \sqrt[10]{216} = \frac{\lg 10}{\lg 6} \cdot \frac{\lg 216}{10} = \frac{1}{\lg 6} \cdot \frac{3 \cdot \lg 6}{10} = \frac{3}{10}$.

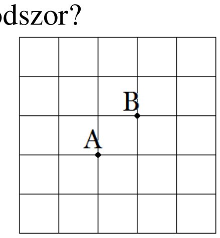
6. Melyik az a legnagyobb x egész szám, amelyre $3^{20} > 32^x$ teljesül?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Válasz: (C) 6

Megoldás: $3^{20} > 32^x = 2^{5x}$, azaz $3^4 > 2^x$, és $128 = 2^7 > 3^4 = 81 > 2^6 = 64$, így $x = 6$.

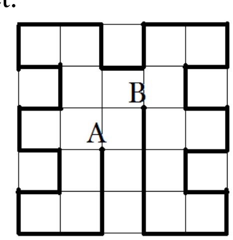
7. Az Öreg Város térképét látjuk, az utcák hálózatát. A térképen 6 utca vízszintes irányú, és 6 utca függőleges. A szomszédos utcasarkok távolsága 100 méter. Egy kíváncsi turista az A-val megjelölt téren lévő szállodából indul a vasútállomásra, amely a B-vel jelölt téren van. Hány méteres a leghosszabb útvonal a város utcáin a hoteltől a vasútállomásig, ha egyik térre (útkereszteződésre) sem megy vissza másodszor?

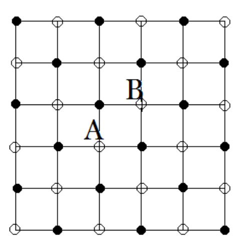


(A) 3300 (B) 3400 (C) 3500 (D) 3600 (E) 3700

Válasz: (B) 3400

Megoldás: Az útvonalon a „fehér” és a „fekete” terek váltakozva követik egymást. Fehér térről indul az útvonal és fehér téren ér véget, és a fehér terek száma 18. Ezért az útvonal legfeljebb 3400 méter lehet.





Az első ábra mutat egy olyan útvonalat, melynek hossza 3400 méter.

8. Mi az $\log_x\left(2x^2+x-1\right)>\log_x 2-1$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a valós számok körében?

(A) $\frac{1}{2}<x<1$ (B) $x>\frac{1}{2}$ és $x\neq 1$ (C) $x>1$

(D) $0<x<1$ (E) $\frac{1}{2}<x$

Válasz: (B) $x>\frac{1}{2}$ és $x\neq 1$

Megoldás: A kifejezések akkor értelmezhetők, ha $x>0$, $x\neq 1$, $2x^2+x-1>0$, azaz $x>\frac{1}{2}$, $x\neq 1$.
Az $\log_x\left(2x^2+x-1\right)>\log_x 2-1$ egyenlőtlenség az $\log_x\left(2x^3+x^2-x\right)>\log_x 2$ egyenlőtlenséget jelenti. Két eset van.
Ha $0<x<1$, akkor $2x^3+x^2-x<2$, azaz $2x^3+x^2-x-2<0$.
Mivel $2x^3+x^2-x-2=(x-1)\cdot\left(2x^2+3x+2\right)$, és $2x^2+3x+2$ mindig pozitív, így ebben az esetben $0<x<1$ a megoldáshalmaz.
Másik eset, ha $x>1$, akkor $2x^3+x^2-x>2$, azaz $2x^3+x^2-x-2>0$. Ezek az egyenlőtlenségek $x>1$ esetén teljesülnek.
Ezeket egybevetve az értelmezési tartománnyal, a megoldás $x>\frac{1}{2}$ és $x\neq 1$.

9. Legtöbb hány egymást követő számot lehet úgy megadni, hogy ne legyen közöttük $a^2\cdot b$ alakú szám, ahol $(a,b)=1$ és $a>1$?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

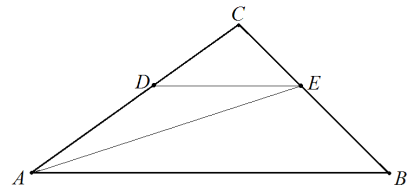
Válasz: (D) 7
Megoldás: 7 számot lehet: 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27.
8 számot nem lehet, mert van közöttük $8k+4=4\cdot(2k+1)=2^2\cdot(2k+1)$ alakú szám.

10. Egy 80 elemű számsorozatról tudjuk, hogy bármely közbülső eleme egyenlő szomszédainak szorzatával. Továbbá az első 40 elem szorzata is 8, valamint összes elemének szorzata is 8. Határozzuk meg a sorozat második elemét.

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Válasz: (A) 4
Megoldás: A sorozat elemeinek szorzata 8, így a 0 nem eleme a sorozatnak. Ha a sorozat első két eleme *a* és *b*, akkor felírhatók a sorozat elemei: $a,\ b,\ \frac{b}{a},\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{a}{b},\ a,\ b,\ \ldots$ Tehát a sorozat első hat eleme periodikusan ismétlődik. Egy-egy periódusban az elemek szorzata 1. Az első 40 elem szorzata: $a\cdot b\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{a}=\frac{b^2}{a}=8$, az első 80 elem szorzata: $a\cdot b=8$. Ezt a két egyenletet összeszorozva: $b^3=64$, azaz $b=4$, $a=2$. A sorozat második eleme 4.

11. Az ABC háromszögben az A-ból induló szögfelező a szemközti oldalt az E pontban metszi. Az AC oldal egy pontja D, és $DE \parallel AB$, $CD = 16$, $CE = 12$, $DE = 24$. Mekkora az EB szakasz?



(A) 12 (B) 15 (C) 16 (D) 18 (E) 24

Válasz: (D) 18

Megoldás: A DEC háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, így $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DE} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$. A háromszög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, ezért $\frac{2}{3} = \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{EB} = \frac{12}{EB}$, $EB = 18$.

12. Hány olyan rendezett $\{a, b, c, d\}$ számnégyes van, melyre $b < a$, $b < c$, $d < c$, ahol a, b, c, d különböző pozitív egyjegyű számok?

(A) 126 (B) 378 (C) 630 (D) 882 (E) 1134

Válasz: (C) 630

Megoldás: A $p < q < r < s$ számokat az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ számokból $\binom{9}{4}$-féleképp választhatjuk. Ennek a négy számnak 5-féle olyan sorrendje van, mely teljesíti a feltételeket: $qpsr$, $rpsq$, $rqsp$, $sprq$, $sqrp$. Tehát az alkalmas $\{a, b, c, d\}$ számnégyesek száma $5 \cdot \binom{9}{4} = 630$.