

## Megyei matematikaverseny 2011.

### 9. évfolyam

### 2. forduló

1. 12 különböző pozitív egész szám átlaga 12. Legfeljebb mekkora lehet ezen számok közül a legnagyobb?

- (A) 12                      (B) 18                      (C) 19                      (D) 78                      (E) 144

2.  $2010^2 - 2009^2 + 2008^2 - 2007^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 =$

- (A)  $2011^2$                       (B) 2021055                      (C) 2020050                      (D)  $2010^2$                       (E)  $2011^2 - 1$

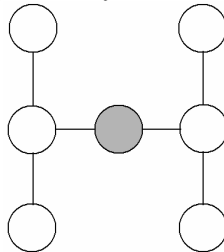
3. Mennyi az 1591 prímosztóinak összege?

- (A) 70                      (B) 80                      (C) 90                      (D) 100                      (E) 110

4. Az  $ABC$  derékszögű háromszög derékszögű csúcsa  $C$ , az  $A$  csúcsnál levő szög  $20^\circ$ -os. A  $B$  csúcsból induló belső szögfelező az  $AC$  oldalt  $D$ -ben metszi. Mekkora a  $CDB$  szög?

- (A)  $40^\circ$                       (B)  $45^\circ$                       (C)  $55^\circ$                       (D)  $60^\circ$                       (E)  $70^\circ$

5. Írd be a körökbe az 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 számokat úgy, hogy mindegyik egyenesen az ott álló három szám szorzata ugyanannyi legyen. Melyik szám kerül a befestett körbe?



- (A) 1                      (B) 2                      (C) 6                      (D) 8                      (E) 9

6. Egy háromszög oldalhosszai: 5; 12; 13. Mekkora a háromszög legrövidebb magasságának hossza?

- (A)  $\frac{60}{13}$                       (B) 5                      (C) 12                      (D) 4                      (E)  $\frac{30}{13}$

7. Artúr király kerekasztalánál hatan ülnek. A szomszédos lovagok haragszanak egymásra, a nem szomszédosak barátságban vannak. A kerekasztal lovagjai közül hányféleképpen lehet kiválasztani 2 lovagot, akik barátságban vannak?

- (A) 2                      (B) 3                      (C) 6                      (D) 9                      (E) 12

8. Ha  $xy = a$ ,  $xz = b$ ,  $yz = c$  és  $xyz \neq 0$ , akkor  $x^2 + y^2 + z^2 =$

- (A)  $\frac{ab+bc+ca}{abc}$       (B)  $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$       (C)  $\frac{(a+b+c)^2}{abc}$   
(D)  $\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc}$       (E)  $\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{abc}$

9. Az  $ABCD$  téglalap  $P$  belső pontjára teljesülnek a következők:  $PA = 6$ ,  $PB = 7$ ,  $PC = 5$ . Milyen hosszú a  $PD$  szakasz?

- (A)  $\sqrt{3}$       (B)  $2\sqrt{3}$       (C) 4      (D) 8      (E) nem határozható meg egyértelműen

10. Az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  oldalú háromszög oldalaira  $1 \leq a \leq 2 \leq b \leq 3 \leq c \leq 4$  teljesül. Legfeljebb mekkora lehet a háromszög területe?

- (A) 2,5      (B) 3      (C) 3,5      (D) 4      (E) 4,5

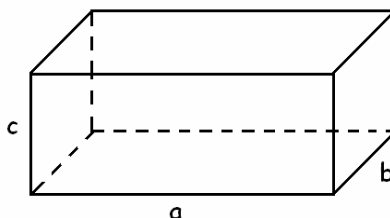
11. Legyen  $x_1 = 23$ ,  $x_2 = \frac{2}{x_1}$ ,  $x_3 = \frac{3}{x_2}$ ,  $x_4 = \frac{4}{x_3}$ ,  $x_5 = \frac{5}{x_4}$ ,  $x_6 = \frac{6}{x_5}$ .

Mennyi  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$  értéke?

- (A) 23      (B) 48      (C) 64      (D) 1104      (E) 16560

12. Egy téglatest egyik csúcsából induló lapátlóinak hossza  $\sqrt{34}$ ,  $\sqrt{58}$  és  $\sqrt{74}$ . Mekkora a téglatest térfogata?

- (A) 105      (B) 162      (C) 225      (D) 315      (E) 498



## Megyei matematikaverseny 2011.

### 10. évfolyam 2. forduló

1. Az  $A$  szám négyzetszám (egy egész szám négyzete). Ha  $B$  is négyzetszám úgy, hogy  $A < B$ , valamint  $A$  és  $B$  között nincs másik négyzetszám, akkor  $B =$

- (A)  $A^2 + 1$       (B)  $A + 1$       (C)  $(A + 1)^2$       (D)  $A + 2\sqrt{A} + 1$       (E)  $A^2 + A$

2. Mennyi  $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$  értéke?

- (A) 8      (B) 5      (C)  $\sqrt{5} + \sqrt{3}$       (D)  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$       (E) 7

3. Az  $\overline{abc} \cdot \overline{cba} = 100147$  szorzásban azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek. Mennyi  $a + b + c$  értéke?

- (A) 11      (B) 12      (C) 13      (D) 14      (E) 15

4. Hány olyan pozitív egészezből álló  $(x; y)$  rendezett számpár van, amelyre  $x^2 - y^2 = 275$ ?

- (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4      (E) 5

5. Adott két szám, az első és a második. A harmadik szám az első és a második összege. A negyedik szám a második és a harmadik szám összege, az ötödik a harmadik és a negyedik összege, a hatodik a negyedik és az ötödik szám összege. Ennek a hat számnak az összege 1000. Mekkora az ötödik szám?

- (A) 250      (B) 280      (C) 300      (D) 350  
(E) Nem határozható meg egyértelműen.

6. Hány olyan 50-nél kisebb természetes szám van, amely számnak pontosan 4 osztója van?

- (A) 2      (B) 13      (C) 14      (D) 15      (E) 16

7. Az  $(m + 1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$  egyenletnek az  $m$  valós értékű paraméter mely értékeire lesz két különböző valós gyöke?

- (A) Bármely  $m$  valós számra.      (B) Bármely  $m \neq -1$  valós számra.  
(C) Bármely  $m \neq 0$  valós számra.      (D) Bármely  $m \geq 0$  valós számra.  
(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

8. Hány valós megoldása van a  $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$  egyenletnek?

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 4  
(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

9. Az  $ABC$  háromszögben  $AB = 6$ ,  $BC = 12$ ,  $AC = 9$ . A háromszög beírható körének középpontjára illeszkedő, a  $BC$  oldallal párhuzamos egyenes az  $AB$  oldalt  $P$ -ben, a  $BC$  oldalt  $Q$ -ban metszi. Mekkora az  $APQ$  háromszög kerülete?

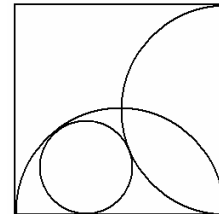
- (A) 18                      (B)  $\frac{33}{2}$                       (C) 15                      (D) 21                      (E) 19,5

10. Egy konvex hatszög átlói legfeljebb hány különböző metszéspontot határozhatnak meg a hatszög belsejében?

- (A) 6                      (B) 12                      (C) 15                      (D) 18                      (E) 30

11. Egy 2 egység oldalú négyzet két szomszédos oldala, mint átmérő fölé befele félköröket rajzolunk. Határozd meg az egyik félkört és a négyzetet belülről, a másik félkört kívülről érintő kör sugarát.

- (A)  $\frac{1}{3}$                       (B)  $\frac{2}{3}$                       (C)  $\frac{4}{9}$                       (D)  $\frac{1}{2}$                       (E)  $\frac{2}{5}$



12. Mennyi az  $f(x) = (x-5)^2 + (x-7)^2 - (x-4)^2 - (x-8)^2 + (x-3)^2 + (x-9)^2$  polinom legkisebb értéke?

- (A) 8                      (B) 10                      (C) 12                      (D) 14  
(E) Előzőek egyike sem helyes.

## Megyei matematikaverseny 2011.

### 11. évfolyam 2. forduló

1. Ha  $x < 0$ , akkor  $\left| x - \sqrt{(x-1)^2} \right| =$

- (A) 1                      (B)  $1 - 2x$                       (C)  $1 + 2x$                       (D)  $2x - 1$   
(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

2. Ha  $x + \frac{1}{x} = 5$ , akkor  $x^3 + \frac{1}{x^3} =$

- (A) 125                      (B) 120                      (C) 225                      (D) 1000                      (E) 110

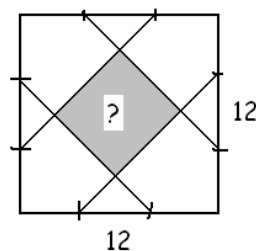
3. Egy osztály létszáma 24. Az osztályban három nyelvet tanulnak: angolt, németet és franciát. Minden tanuló tanul legalább egy nyelvet. Angolul 14-en, németül 15-en, franciául 5-en tanulnak. Pontosan két nyelvet összesen 4 diák tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

- (A) 2                      (B) 3                      (C) 4                      (D) 5                      (E) 6

4. Az 1, 2, 3, ..., 25 számokból legfeljebb hány számot választhatunk úgy, hogy a kiválasztottak között ne legyen kettő, melyek szorzata négyzetszám?

- (A) 13                      (B) 14                      (C) 15                      (D) 16                      (E) 17

5. Egy 12 egység oldalhosszú négyzet oldalainak harmadolópontjait az ábra szerint összeköttöttük.



Mekkora a befestett terület nagysága?

- (A) 30                      (B) 32                      (C) 36                      (D) 40                      (E) 48

6. Az  $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$  egyenlet két gyöke 2 és 3. Mennyi  $a - b$  értéke?

- (A) -5                      (B) -1                      (C) 1                      (D) 5                      (E) 11

7. A  $3x^2 - 7x + 1 = 0$  másodfokú egyenlet gyökei  $x_1$  és  $x_2$ . Ekkor  $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 =$

- (A)  $\frac{49}{27}$                       (B)  $-\frac{16}{9}$                       (C)  $\frac{43}{27}$                       (D)  $\frac{\sqrt{37}}{27}$

(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

8. Az 1000-nél kisebb páratlan természetes számok szorzata melyik műveletsorral egyezik meg?

- (A)  $\frac{1000!}{(500!)^2}$                       (B)  $\frac{1000!}{2^{500}}$                       (C)  $\frac{999!}{2^{500}}$                       (D)  $\frac{1000!}{2^{500} \cdot 500!}$                       (E)  $\frac{500!}{2^{500}}$

9. Az  $a, b, c, d$  egész számokra  $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c+d}$  teljesül. Mennyi lehet  $a \cdot b \cdot c \cdot d$  értéke?

- (A) 2010                      (B) 2011                      (C) 2020                      (D) 2025                      (E) 2030

10. Egy téglalapnak levágtuk az egyik sarkát, és az így kapott ötszög oldalainak hossza (valamilyen sorrendben) 8, 10, 13, 15, 20. Mekkora az ötszög területe?

- (A) 225                      (B) 250                      (C) 270                      (D) 275                      (E) 280

11. Egy téglalap csúcsainak koordinátái:  $(0;0)$ ,  $(6;0)$ ,  $(6;4)$ ,  $(0;4)$ . Mi annak az egyenesnek az egyenlete, amely párhuzamos az  $y = 3x + 1$  egyenessel és felezi a téglalap területét?

- (A)  $y = 3x - 4$                       (B)  $y = 3x - 5$                       (C)  $y = 3x - 6$                       (D)  $y = 3x - 7$                       (E)  $y = 3x - 8$

12. Az  $a, b, c$  pozitív számokra  $\log_a b + \log_b c + \log_c a = 0$ .

Mennyi  $(\log_a b)^3 + (\log_b c)^3 + (\log_c a)^3$  értéke?

- (A)  $-1$                       (B)  $0$                       (C)  $1$                       (D)  $3$                       (E)  $6$

## Megyei matematikaverseny 2011.

### 12. évfolyam 2. forduló

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész  $n$ , amelyre  $\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2+4+6+\dots+2n} = \frac{2010}{2011}$ ?

- (A) 2010            (B) 2011            (C) 2012            (D) 4021            (E) Nincs ilyen  $n$ .

2. Mennyi  $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ + \sin^2 90^\circ$  értéke?

- (A) 4            (B) 5            (C) 5,5            (D) 6            (E) 9

3. A 2, 3, 4, ..., 999 számok közül töröljük a 2 többszöröseit, majd a megmaradtak közül a 3 többszöröseit, ezután az 5, a 7, a 11, a 13, a 17, a 19 és a 23 többszöröseit. Mennyi a megmaradt összetett számok összege?

- (A) 1740            (B) 2701            (C) 4096            (D) 4196  
(E) A törlések után nem maradt szám.

4. Az  $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$  egyenlet egyik gyöke  $2 - \sqrt{3}$ . Mennyi a másik két gyök összege?

- (A)  $-3 - \sqrt{3}$             (B)  $3 + \sqrt{3}$             (C)  $3 - \sqrt{3}$             (D) 5  
(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

5. A 8x8-as sakktabla fekete mezőire hányféleképp lehet feltenni 8 bástyát úgy, hogy azok ne üssék egymást?

- (A) 24            (B) 64            (C) 512            (D) 576            (E) 720

6. Legfeljebb hány nullára végződhet a tízes számrendszerben felírt  $N$  szám, ha  $N = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ , ahol  $n$  tetszőleges pozitív egész szám?

- (A) 1            (B) 2            (C) 3            (D) 4            (E) 5

7. Az  $n, n+3, n+4, n+5, n+6, n+8, n+10, n+12, n+15$  számok mediánja 10. Mennyi a számok átlaga?

- (A) 4            (B) 6            (C) 7            (D) 10            (E) 11

8. Ha  $xy + x = 5$  és  $y^2 + 2y = 19$ , akkor mennyi  $\frac{x}{y+1}$  értéke?

- (A)  $\frac{1}{4}$                       (B)  $\frac{1}{2}$                       (C) 1                      (D) 2                      (E) 4

9. Egy számtani sorozatban az első tíz elem összege 100, az első száz elem összege 10. Mennyi az első százötz elem összege?

- (A) -100                      (B) 90                      (C) 110                      (D) -90                      (E) -110

10. Az  $ABC$  háromszögben  $AB = 8$ ,  $AC = 3$ ,  $BAC \leq 60^\circ$ , és az  $A$  csúcsból induló szögfelező a szemközti oldalt a  $D$  pontban metszi. Mekkora a  $CD$  szakasz?

- (A)  $\frac{7}{11}$                       (B) 1                      (C) 2                      (D)  $\frac{21}{11}$                       (E)  $\frac{24}{11}$

11. Melyik az egyenlete az  $x^2 + y^2 = -4x$  és az  $x^2 + y^2 = 4y$  körök közös húrja egyenletének?

- (A)  $y = x$                       (B)  $y = -x$                       (C)  $y = 2x$                       (D)  $y = -2x$                       (E)  $y = 2$

12. Mekkora az  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 + (e-f)^2 + (f-a)^2$  kifejezés legkisebb értéke, ha  $a, b, c, d, e$  és  $f$  különböző egész számok?

- (A) 16                      (B) 18                      (C) 20                      (D) 24                      (E) 30