**9. évfolyam**
**2. forduló**

**1.** 12 különböző pozitív egész szám átlaga 12. Legfeljebb mekkora lehet ezen számok közül a legnagyobb?

(A) 12 (B) 18 (C) 19 (D) 78 (E) 144

**Válasz:** (D) 78
**Megoldás:** Ha a 12 szám átlaga 12, akkor összegük $12 \cdot 12 = 144$. A 12 szám összege 144, így közülük az egyik akkor a legnagyobb, ha a többi értéke a lehető legkisebb, vagyis 1, 2, …, 11. Ennek a 11 számnak az összege 66, a tizenkettedik szám $144 - 66 = 78$.

**2.** $2010^2 - 2009^2 + 2008^2 - 2007^2 + ... + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 =$

(A) $2011^2$ (B) 2021055 (C) 2020050 (D) $2010^2$ (E) $2011^2 - 1$

**Válasz:** (B) 2021055
**Megoldás:** Az $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ azonosságot alkalmazva

$$2010^2 - 2009^2 + ... + 2^2 - 1^2 = 2010 + 2009 + \ldots + 2 + 1 = \frac{2010 \cdot 2011}{2} = 2021055.$$

**3.** Mennyi az 1591 prímosztóinak összege?

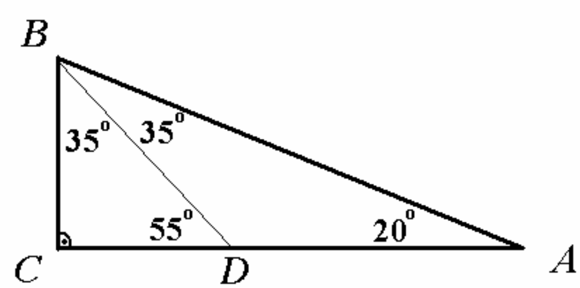
(A) 70 (B) 80 (C) 90 (D) 100 (E) 110

**Válasz:** (B) 80
**Megoldás:** $1591 = 1600 - 9 = 40^2 - 3^2 = (40-3)(40+3) = 37 \cdot 43$, továbbá a 37 és 43 számok prímek, így az 1591 szám prímosztóinak összege 80.

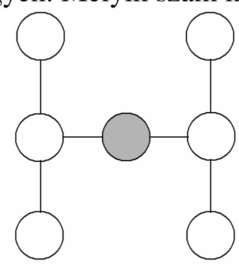
**4.** Az *ABC* derékszögű háromszög derékszögű csúcsa *C*, az *A* csúcsnál levő szög 20°-os. A *B* csúcsból induló belső szögfelező az *AC* oldalt *D*-ben metszi. Mekkora a *CDB* szög?

(A) 40° (B) 45° (C) 55° (D) 60° (E) 70°

**Válasz:** (C) 55°
**Megoldás:** Az ábráról leolvasható a megoldás.

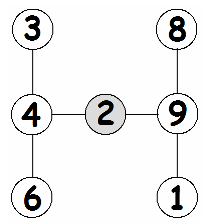


**5.** Írd be a körökbe az 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 számokat úgy, hogy mindegyik egyenesen az ott álló három szám szorzata ugyanannyi legyen. Melyik szám kerül a befestett körbe?



(A) 1 (B) 2 (C) 6 (D) 8 (E) 9

**Válasz:** (B) 2 **Megoldás:** A két függőleges egyenesen lévő számok szorzatának négyzetszámnak kell lenni a feltételek alapján. Az adott számok törzstényezős alakjából megállapítható, hogy a szorzat csak 72 lehet, és a befestett mezőben a 2-esnek kell állnia.




**6.** Egy háromszög oldalhosszai: 5; 12; 13. Mekkora a háromszög legrövidebb magasságának hossza?

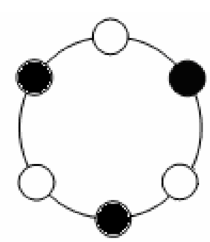
(A) $\frac{60}{13}$ (B) 5 (C) 12 (D) 4 (E) $\frac{30}{13}$

**Válasz:** (A) $\frac{60}{13}$ **Megoldás:** $5^2 + 12^2 = 13^2$, így Pitagorasz-tétele miatt a háromszög derékszögű. Jelölje a háromszög területét *T*. $T = \frac{5 \cdot 12}{2} = \frac{13 \cdot m}{2}$, tehát a 13 hosszú átfogóhoz tartozó *m* magasság $m = \frac{60}{13}$, és ez a háromszög legrövidebb magassága.

**7.** Artúr király kerekasztalánál hatan ülnek. A szomszédos lovagok haragszanak egymásra, a nem szomszédosak barátságban vannak. A kerekasztal lovagjai közül hányféleképpen lehet kiválasztani 2 lovagot, akik barátságban vannak?

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 9 (E) 12

**Válasz:** (D) 9 **Megoldás:** Választhatunk a fehér lovagok közül kettőt, vagy a fekete lovagok közül kettőt. Ha a 3 fehér lovag közül 2-t kiválasztunk, akkor egy fehér lovagot nem választunk. Ez a fehér lovag 3-féle lehet. Ugyanígy 3-féleképp választhatunk két fekete lovagot. Választhatunk még két szemközt ülő lovagot is (ők is barátságban vannak!), ez is 3-féleképp tehető meg. A két lovag kiválasztása 3+3+3=9-féleképp történhet.



**8.** Ha $xy = a,\ xz = b,\ yz = c$ és $xyz \neq 0$, akkor $x^2 + y^2 + z^2 =$

(A) $\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$ (B) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ (C) $\dfrac{(a+b+c)^2}{abc}$

(D) $\dfrac{(ab+bc+ca)^2}{abc}$ (E) $\dfrac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{abc}$

**Válasz:** (E) $\dfrac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{abc}$

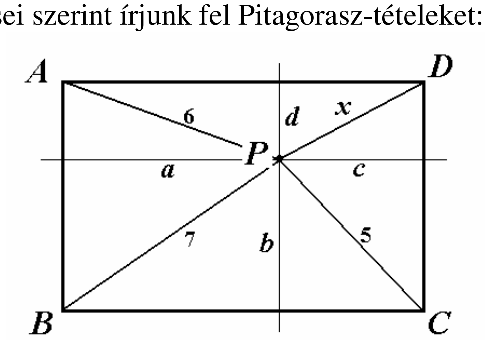
**Megoldás:** $x^2 = \dfrac{(xy)(xz)}{yz} = \dfrac{ab}{c}$, és ugyanígy kapjuk, hogy $y^2 = \dfrac{ac}{b}$, $z^2 = \dfrac{bc}{a}$.

$x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{ab}{c} + \dfrac{ac}{b} + \dfrac{bc}{a} = \dfrac{(ab)^2}{abc} + \dfrac{(ac)^2}{abc} + \dfrac{(bc)^2}{abc} = \dfrac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{abc}$.

**9.** Az $ABCD$ téglalap $P$ belső pontjára teljesülnek a következők: $PA = 6, PB = 7, PC = 5$. Milyen hosszú a $PD$ szakasz?

(A) $\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 4 (D) 8 (E) nem határozható meg egyértelműen

**Válasz:** (B) $2\sqrt{3}$
**Megoldás:** Az ábra jelölései szerint írjunk fel Pitagorasz-tételeket:




$a^2 + d^2 = 6^2$, $c^2 + b^2 = 5^2$, $a^2 + b^2 = 7^2$, $d^2 + c^2 = x^2$. Adjuk össze az első kettő, illetve az utolsó kettő egyenlőséget: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 6^2 + 5^2 = 7^2 + x^2$.
Innen $x^2 = (36+25) - 49 = 12,\ x = 2\sqrt{3}$.

**10.** Az *a, b, c* oldalú háromszög oldalaira $1 \le a \le 2 \le b \le 3 \le c \le 4$ teljesül. Legfeljebb mekkora lehet a háromszög területe?

(A) 2,5 (B) 3 (C) 3,5 (D) 4 (E) 4,5

**Válasz:** (B) 3

**Megoldás:** A háromszög területe $t = \frac{a \cdot m}{2} \le \frac{a \cdot b}{2} \le \frac{2 \cdot 3}{2} = 3.$ A terület nagysága lehet 3, ha $a = 2,\ b = 3,$ és ez a két oldal derékszöget zár be egymással. Ekkor teljesül a *c* oldalra az elvárt $3 \le c \le 4$ egyenlőtlenség.

**11.** Legyen $x_1 = 23,\ x_2 = \frac{2}{x_1},\ x_3 = \frac{3}{x_2},\ x_4 = \frac{4}{x_3},\ x_5 = \frac{5}{x_4},\ x_6 = \frac{6}{x_5}.$

Mennyi $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$ értéke?

(A) 23 (B) 48 (C) 64 (D) 1104 (E) 16560

**Válasz:** (B) 48

**Megoldás:** $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 = \left(x_1 \cdot \frac{2}{x_1}\right) \cdot \left(x_3 \cdot \frac{4}{x_3}\right) \cdot \left(x_5 \cdot \frac{6}{x_5}\right) = 48.$

**12.** Egy téglatest egyik csúcsából induló lapátlóinak hossza $\sqrt{34},\ \sqrt{58}$ és $\sqrt{74}.$ Mekkora a téglatest térfogata?

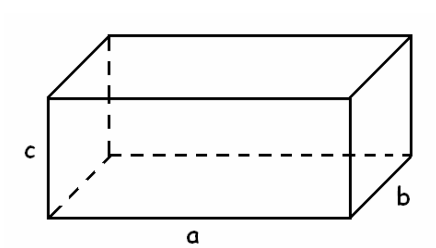
(A) 105 (B) 162 (C) 225 (D) 315 (E) 498

**Válasz:** (A) 105

**Megoldás:** A téglatest élei legyenek *a, b* és *c*. Ekkor a Pitagorasz-tétel miatt:

$a^2 + b^2 = 34,\ b^2 + c^2 = 58,\ c^2 + a^2 = 74.$ Ezek összegének fele: $a^2 + b^2 + c^2 = 83.$

Ezt az eredményt rendre összehasonlítva az előző három egyenlettel kapjuk, hogy $c^2 = 49,\ a^2 = 25,\ b^2 = 9.$ Tehát: $a = 5,\ b = 3,\ c = 7.\ V = abc = 5 \cdot 3 \cdot 7 = 105.$



## 10. évfolyam
## 2. forduló

**1.** Az *A* szám négyzetszám (egy egész szám négyzete). Ha *B* is négyzetszám úgy, hogy $A<B$, valamint *A* és *B* között nincs másik négyzetszám, akkor $B =$

(A) $A^2+1$ (B) $A+1$ (C) $(A+1)^2$ (D) $A+2\sqrt{A}+1$ (E) $A^2+A$

**Válasz:** (D) $A+2\sqrt{A}+1$

**2.** Mennyi $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ értéke?

(A) 8 (B) 5 (C) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (E) 7

**Válasz:** (A) 8
**Megoldás:** Az

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{5-2\sqrt{15}+3}{2}+\frac{5+2\sqrt{15}+3}{2}=8.$$

**3.** Az $\overline{abc}\cdot\overline{cba}=100147$ szorzásban azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek. Mennyi $a+b+c$ értéke?

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

**Válasz:** (A) 11
**Megoldás:** Az utolsó jegyek szorzata 7-re végződik, ez a két számjegy lehet 1 és 7, vagy 3 és 9. Ez utóbbi nem lehet, mert akkor a két háromjegyű szám szorzata nagyobb lenne 200 ezernél. Tehát $\overline{1b7}\cdot\overline{7b1}=100147$. A középső számjegyet néhány próbálkozás után megtaláljuk. $137\cdot 731=100147$.

**4.** Hány olyan pozitív egészekből álló (*x*; *y*) rendezett számpár van, amelyre $x^2-y^2=275$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

**Válasz:** (C) 3
**Megoldás:** Az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ azonosságot alkalmazva $(x-y)(x+y)=275=11\cdot 25$. Az $(x-y,\ x+y)$ számpárok lehetséges értékei: $(1,\ 275)$, $(5,\ 55)$, $(11,\ 25)$. Ezért három olyan pozitív egészekből álló (*x*; *y*) rendezett számpár van, amely megoldása az egyenletnek.

**5.** Adott két szám, az első és a második. A harmadik szám az első és a második összege. A negyedik szám a második és a harmadik szám összege, az ötödik a harmadik és a negyedik összege, a hatodik a negyedik és az ötödik szám összege. Ennek a hat számnak az összege 1000. Mekkora az ötödik szám?

(A) 250 (B) 280 (C) 300 (D) 350

(E) Nem határozható meg egyértelműen.

**Válasz:** (A) 250

**Megoldás:** Az első szám *a*, a második *b*. A harmadik $a+b$, a negyedik $a+2b$, az ötödik $2a+3b$, a hatodik $3a+5b$. Ennek a hat számnak az összege: $8a+12b$. Az ötödik szám ennek a negyede, azaz 250.

**6.** Hány olyan 50-nél kisebb természetes szám van, amely számnak pontosan 4 osztója van?

(A) 2 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

**Válasz:** (D) 15

**Megoldás:** A $p \cdot q$ és a $p^3$ alakú számoknak (*p* és *q* különböző prímek) van 4 osztója. A $p \cdot q$ alakú számok: 6, 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46, 15, 21, 33, 39, 35. Ez 13 szám.

A $p^3$ alakú számok a 8 és a 27, azaz 2 ilyen szám van. Összesen $13+2=15$ ilyen szám van.

**7.** Az $(m+1)x^2+2mx+m-1=0$ egyenletnek az *m* valós értékű paraméter mely értékeire lesz két különböző valós gyöke?

(A) Bármely *m* valós számra. (B) Bármely $m \neq -1$ valós számra.

(C) Bármely $m \neq 0$ valós számra. (D) Bármely $m \geq 0$ valós számra.

(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

**Válasz:** (B) Bármely $m \neq -1$ valós számra.

**Megoldás:** Egy másodfokú egyenletnek akkor van két különböző valós gyöke, ha a diszkriminánsa pozitív. $D=(2m)^2-4(m+1)(m-1)=4>0$. Tehát a diszkrimináns mindig pozitív. Azonban van még egy feltétel, amellyel törődni kell, hogy az egyenlet másodfokú legyen, azaz $m+1 \neq 0$. Így egy kikötést kell teljesíteni *m*-nek: $m \neq -1$.

**8.** Hány valós megoldása van a $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$ egyenletnek?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

**Válasz:** (C) 2

**Megoldás:** Legyen $y=x+\frac{1}{x}$. Ekkor az $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$ egyenlet

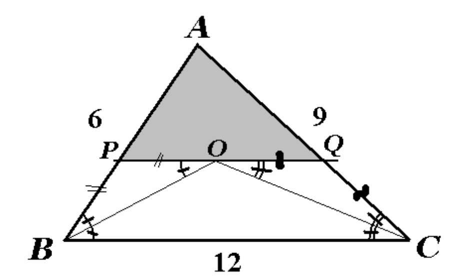
$7y-2(y^2-2)=9$ alakba írható. A $2y^2-7y+5=0$ egyenlet gyökei: $y_1=\frac{5}{2},\ y_2=1.$

Ha $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},$ akkor $x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2}.$ Ha $x+\frac{1}{x}=1,$ akkor nem találunk megoldást.

**9.** Az $ABC$ háromszögben $AB = 6$, $BC = 12$, $AC = 9$. A háromszög beírható körének középpontjára illeszkedő, a $BC$ oldallal párhuzamos egyenes az $AB$ oldalt $P$-ben, a $BC$ oldalt $Q$-ban metszi. Mekkora az $APQ$ háromszög kerülete?

(A) 18 (B) $\frac{33}{2}$ (C) 15 (D) 21 (E) 19,5

**Válasz:** (C) 15
**Megoldás:** A beírható kör középpontját a szögfelezők metszik ki. Az ábrán az azonos módon jelölt szögek egyenlők. Ezért a $BOP$ és a $COQ$ háromszögek egyenlő szárúak.

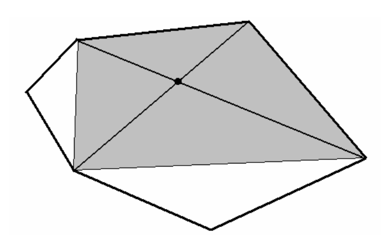



$$K_{APQ} = AP + PQ + AQ = AP + PO + OQ + AQ = AP + PB + QC + AQ = AB + AC = 6 + 9 = 15.$$

**10.** Egy konvex hatszög átlói legfeljebb hány különböző metszéspontot határozhatnak meg a hatszög belsejében?

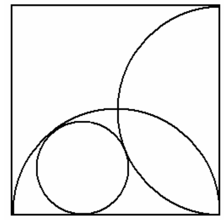
(A) 6 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 30

**Válasz:** (C) 15
**Megoldás:** Két átló metszéspontjához rendeljük hozzá a két átló végpontjait, azaz egy konvex négyszöget. Ez a hozzárendelés fordítva is működik: ha kiválasztjuk a hatszög 4 csúcsát, akkor az általuk meghatározott konvex négyszögben az átlók adnak egy metszéspontot.



Annyi metszéspontja lehet a konvex hatszög átlóinak, amennyi négyszöget tudunk választani a hatszög csúcsaiból. Ha 6 pontból 4-et választunk, akkor 2 pont megmarad. A 2 kimaradó pontot $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$-féle módon választhatjuk.

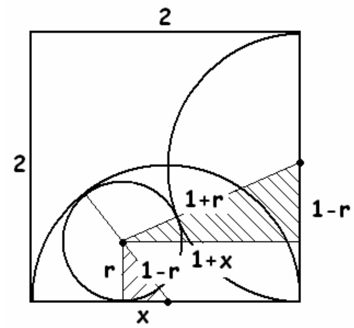
**11.** Egy 2 egység oldalú négyzet két szomszédos oldala, mint átmérő fölé befele félköröket rajzolunk. Határozd meg az egyik félkört és a négyzetet belülről, a másik félkört kívülről érintő kör sugarát.



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{5}$

**Válasz:** (C) $\frac{4}{9}$

**Megoldás:** Az ábra szerint kössük össze a körök középpontjait. A vonalkázott derékszögű háromszögek oldalaira írjuk fel a Pitagorasz-tételt.




$x^2 + r^2 = (1-r)^2$, azaz $2r = 1 - x^2$

$(1+x)^2 + (1-r)^2 = (1+r)^2$, ebből: $1 + 2x + x^2 = 4r$. Előbbi eredményt felhasználva: $1 + 2x + x^2 = 2(1 - x^2)$. A másodfokú egyenlet pozitív gyöke $x = \frac{1}{3}$. Ez alapján $r = \frac{4}{9}$.

**12.** Mennyi az $f(x) = (x-5)^2 + (x-7)^2 - (x-4)^2 - (x-8)^2 + (x-3)^2 + (x-9)^2$ polinom legkisebb értéke?

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14

(E) Előzőek egyike sem helyes.

**Válasz:** (C) 12

**Megoldás:** Az $f(x)$ polinomban a másodfokú tag együtthatója 2, tehát a függvény képe egy olyan parabola, melynek a szárai felfele mutatnak. Vegyük észre, hogy a függvény szimmetrikus $x = 6$-ra: $f(6+x) = f(6-x)$. Ezért a függvény a legkisebb értékét az $x = 6$ helyen veszi fel. $f(6) = 1 + 1 - 4 - 4 + 9 + 9 = 2(1 + 9 - 4) = 12.$

<u>*Másképp:*</u> A négyzetre emeléseket és az összevonásokat elvégezve egy másodfokú polinomot kapunk, amelynek a minimumát rutinfeladat meghatározni.

## 11. évfolyam
## 2. forduló

**1.** Ha $x<0$, akkor $\left|x-\sqrt{(x-1)^2}\right|=$

(A) 1 (B) $1-2x$ (C) $1+2x$ (D) $2x-1$
(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

**Válasz:** (B) $1-2x$
**Megoldás:** $\left|x-\sqrt{(x-1)^2}\right|=\left|x-|x-1|\right|=\left|x-(1-x)\right|=|2x-1|=1-2x.$

**2.** Ha $x+\dfrac{1}{x}=5$, akkor $x^3+\dfrac{1}{x^3}=$

(A) 125 (B) 120 (C) 225 (D) 1000 (E) 110

**Válasz:** (E) 110
**Megoldás:** $125=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3=x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\cdot 5$, így $x^3+\dfrac{1}{x^3}=110.$

**3.** Egy osztály létszáma 24. Az osztályban három nyelvet tanulnak: angolt, németet és franciát. Minden tanuló tanul legalább egy nyelvet. Angolul 14-en, németül 15-en, franciául 5-en tanulnak. Pontosan két nyelvet összesen 4 diák tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

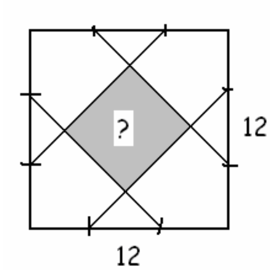
**Válasz:** (B) 3
**Megoldás:** Az osztálylétszám: $24=14+15+5-4-2x$, ahol $x$ a mindhárom nyelvet tanulók száma. Az egyenlet megoldása: $x=3$.

**4.** Az 1, 2, 3, …, 25 számokból legfeljebb hány számot választhatunk úgy, hogy a kiválasztottak között ne legyen kettő, melyek szorzata négyzetszám?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

**Válasz:** (D) 16
**Megoldás.** 16 szám kiválasztható: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23.
Ha 17 számot választunk, azok között lesz kettő, melyek szorzata négyzetszám. Tekintsük a következő 16 számhalmazt: {1, 4, 9, 16, 25}, {2, 8, 18}, {3, 12}, {5, 20}, {6, 24}, {7}, {10}, {11}, {13}, {14}, {15}, {17}, {19}, {21}, {22}, {23}. Ha 17 számot választunk, akkor valamelyik számhalmazból kiválasztunk kettőt, és ennek a kettőnek a szorzata négyzetszám.

**5.** Egy 12 egység oldalhosszú négyzet oldalainak harmadolópontjait az ábra szerint összekötöttük.

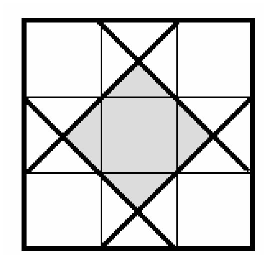



Mekkora a befestett terület nagysága?

(A) 30 (B) 32 (C) 36 (D) 40 (E) 48

**Válasz:** (B) 32

**Megoldás:** Kössük össze a szemközti harmadolópontokat. Így a négyzetet 9 egybevágó kis négyzetre daraboltuk. A festett terület egy egész kis négyzet, és még négy olyan háromszög, melyekből összerakható egy második kis négyzet.



Tehát a festett terület a négyzet területének 2/9-ed része, azaz $144 \cdot \frac{2}{9} = 32$.

**6.** Az $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$ egyenlet két gyöke 2 és 3. Mennyi $a - b$ értéke?

(A) –5 (B) –1 (C) 1 (D) 5 (E) 11

**Válasz:** (A) –5

**Megoldás:** Helyettesítsük az $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$ egyenletbe a 2 és a 3 számokat. $8 + 4a + 2b + 6 = 0,\ 27 + 9a + 3b + 6 = 0.$ Az első egyenlőség kétszereséből vonjuk ki a második egyenlőséget: $-11 - a + b + 6 = 0,$ azaz $b - a = 5$.

**7.** A $3x^2 - 7x + 1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei $x_1$ és $x_2$. Ekkor $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 =$

(A) $\frac{49}{27}$ (B) $-\frac{16}{9}$ (C) $\frac{43}{27}$ (D) $\frac{\sqrt{37}}{27}$

(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

**Válasz:** (C) $\frac{43}{27}$

**Megoldás:** $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = x_1 x_2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) = x_1 x_2 \left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2\right) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{43}{27}$

**8.** Az 1000-nél kisebb páratlan természetes számok szorzata melyik műveletsorral egyezik meg?

(A) $\frac{1000!}{(500!)^2}$ (B) $\frac{1000!}{2^{500}}$ (C) $\frac{999!}{2^{500}}$ (D) $\frac{1000!}{2^{500}\cdot 500!}$ (E) $\frac{500!}{2^{500}}$

**Válasz:** (D) $\frac{1000!}{2^{500}\cdot 500!}$

**Megoldás:**

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 997\cdot 999=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 999\cdot 1000}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 998\cdot 1000}=\frac{1000!}{2^{500}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 499\cdot 500}=\frac{1000!}{2^{500}\cdot 500!}$$

**9.** Az $a,b,c,d$ egész számokra $\frac{a-b}{c-d}=\frac{a+b}{c+d}$ teljesül. Mennyi lehet $a\cdot b\cdot c\cdot d$ értéke?

(A) 2010 (B) 2011 (C) 2020 (D) 2025 (E) 2030

**Válasz:** (D) 2025

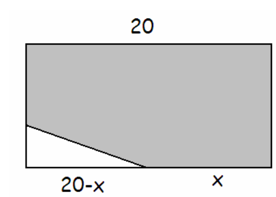
**Megoldás:** Átrendezés után $ad=bc$, ezért $a\cdot b\cdot c\cdot d$ értéke négyzetszám, és az öt szám között csak egy négyzetszám van, a 2025. Ha $a=3,\ b=5,\ c=9,\ d=15$, akkor a feltétel teljesül, és a szorzat 2025.

**10.** Egy téglalapnak levágtuk az egyik sarkát, és az így kapott ötszög oldalaink hossza (valamilyen sorrendben) 8, 10, 13, 15, 20. Mekkora az ötszög területe?

(A) 225 (B) 250 (C) 270 (D) 275 (E) 280

**Válasz:** (C) 270

**Megoldás:** A téglalap egyik oldala 20 egység. A levágott derékszögű háromszög oldalai egész számok, az egyik befogó (20-$x$) hossza 5, 7, 10 vagy 12; a másik befogó 8, 10, 13 vagy 15. Az átfogó 13 vagy 15. Két egész oldalú derékszögű háromszög van ilyen átfogóval: {5, 12, 13} és {9, 12, 15}. Utóbbit a lehetséges oldalhosszakból nem tudjuk összerakni. Marad az 5, 12, 13 oldalú háromszög. A téglalap oldalai 20 és 15, az ötszög területe: $20\cdot 15-\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 5=270$.




**11.** Egy téglalap csúcsainak koordinátái: $(0;0)$, $(6;0)$, $(6;4)$, $(0;4)$. Mi annak az egyenesnek az egyenlete, amely párhuzamos az $y=3x+1$ egyenessel és felezi a téglalap területét?

(A) $y=3x-4$ (B) $y=3x-5$ (C) $y=3x-6$ (D) $y=3x-7$ (E) $y=3x-8$

**Válasz:** (D) $y=3x-7$

**Megoldás:** A téglalap területét felező egyenesek átmennek a téglalap középpontján, a $(3;2)$ ponton. Az $y=3x+1$ egyenessel párhuzamos és a középponton átmenő egyenes egyenlete: $y=3x-7$.

**12.** Az *a, b, c* pozitív számokra $\log_a b + \log_b c + \log_c a = 0$.
Mennyi $(\log_a b)^3 + (\log_b c)^3 + (\log_c a)^3$ értéke?

(A) $-1$ (B) 0 (C) 1 (D) 3 (E) 6

**Válasz:** (D) 3

**Megoldás.** $x = \log_a b$, $y = \log_b c$, ekkor $\log_c a = -(x+y)$.
Ki kell számolnunk $x^3 + y^3 - (x+y)^3$ értékét. $x^3 + y^3 - (x+y)^3 = -3xy(x+y)$.
Mivel $-3xy(x+y) = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$, így a válasz 3.

# 12. évfolyam
## 2. forduló

**1.** Melyik az a legkisebb pozitív egész $n$, amelyre $\dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+2n}=\dfrac{2010}{2011}$?

(A) 2010 (B) 2011 (C) 2012 (D) 4021 (E) Nincs ilyen $n$.

**Válasz:** (A) 2010
**Megoldás:** $\dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+2n}=\dfrac{n^2}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{2010}{2011}$, $n=2010$.

**2.** Mennyi $\sin^2 10^o+\sin^2 20^o+\sin^2 30^o+\ldots+\sin^2 80^o+\sin^2 90^o$ értéke?

(A) 4 (B) 5 (C) 5,5 (D) 6 (E) 9

**Válasz:** (B) 5
**Megoldás:** $\sin^2 10^o+\sin^2 80^o=\sin^2 10^o+\cos^2 10^o=1$, és hasonlóan $\sin^2 20^o+\sin^2 70^o=1$, $\sin^2 30^o+\sin^2 60^o=1$, $\sin^2 40^o+\sin^2 50^o=1$, és $\sin^2 90^o=1$, így az összeg értéke 5.

**3.** A 2, 3, 4, …, 999 számok közül töröljük a 2 többszöröseit, majd a megmaradtak közül a 3 többszöröseit, ezután az 5, a 7, a 11, a 13, a 17, a 19 és a 23 többszöröseit. Mennyi a megmaradt összetett számok összege?

(A) 1740 (B) 2701 (C) 4096 (D) 4196
(E) A törlések után nem maradt szám.

**Válasz:** (B) 2701
**Megoldás:** A megmaradó számoknak 29-nél kisebb prímosztója nem lehet. Ezért a megmaradó számok: $29\cdot 29=841$, $31\cdot 31=961$, $29\cdot 31=899$. Ezek összege 2701.

**4.** Az $x^3-5x^2+5x-1=0$ egyenlet egyik gyöke $2-\sqrt{3}$. Mennyi a másik két gyök összege?

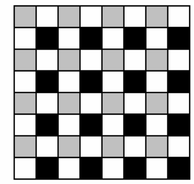
(A) $-3-\sqrt{3}$ (B) $3+\sqrt{3}$ (C) $3-\sqrt{3}$ (D) 5
(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

**Válasz:** (B) $3+\sqrt{3}$
**Megoldás:** A gyökök és együtthatók közti összefüggés alapján a gyökök összege 5. Tehát $(2-\sqrt{3})+x_2+x_3=5$, $x_2+x_3=3+\sqrt{3}$.

**5.** A $8x8$-as sakktábla fekete mezőire hányféleképp lehet feltenni 8 bástyát úgy, hogy azok ne üssék egymást?

(A) 24 (B) 64 (C) 512 (D) 576 (E) 720

**Válasz:** (D) 576



**Megoldás:** A tábla szürkére festett $4x4$ mezőjére 4 bástya $4! = 24$-féleképp helyezhető úgy, hogy ne üssék egymást. A tábla feketére festett $4x4$ mezőjére 4 bástya ugyancsak $4! = 24$-féleképp helyezhető úgy, hogy ne üssék egymást.
A 8 bástya a kívánt feltételek szerint $24 \cdot 24 = 576$-féle módon helyezhető el.

**6.** Legfeljebb hány nullára végződhet a tízes számrendszerben felírt $N$ szám, ha $N = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$, ahol $n$ tetszőleges pozitív egész szám?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

**Válasz:** (B) 2
**Megoldás:** Ha $n = 1$, akkor $N = 10$; ha $n = 2$, akkor $N = 30$; ha $n = 3$, akkor $N = 100$. Tehát $N$ értéke 2 nullára végződhet. 3 nullára nem végződhet, mert $N$ nem osztható 8-cal.

**7.** Az $n, n+3,\ n+4,\ n+5,\ n+6,\ n+8,\ n+10,\ n+12,\ n+15$ számok mediánja 10. Mennyi a számok átlaga?
(A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 10 (E) 11

**Válasz:** (E) 11
**Megoldás:** A kilenc szám közül a listán a középső $n+6$, ennek értéke 10, így $n = 4$. A számok összege $9n + 63 = 9 \cdot 4 + 63 = 99$. A kilenc szám átlaga $99/9 = 11$.

**8.** Ha $xy + x = 5$ és $y^2 + 2y = 19$, akkor mennyi $\frac{x}{y+1}$ értéke?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 (E) 4

**Válasz:** (A) $\frac{1}{4}$

**Megoldás.** Az első egyenletből: $y + 1 = \frac{5}{x}$. A második egyenletből: $(y+1)^2 = 20$, tehát $y + 1 = \frac{20}{y+1}$. Az eddigi két eredmény alapján $y + 1 = \frac{5}{x} = \frac{20}{y+1}$, tehát $\frac{5}{20} = \frac{x}{y+1}$.

**9.** Egy számtani sorozatban az első tíz elem összege 100, az első száz elem összege 10. Mennyi az első száztíz elem összege?

(A) –100 (B) 90 (C) 110 (D) –90 (E) –110

**Válasz:** (E) –110

**Megoldás:** $10 \cdot (2a_1 + 9d) = 200,\ 100 \cdot (2a_1 + 99d) = 20$.

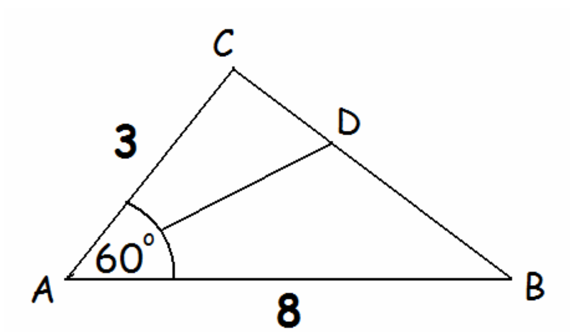
Ezek különbsége $90 \cdot (2a_1 + 109d) = -180.$ Tehát $2a_1 + 109d = -2,$ ezért $2 \cdot S_{110} = 110 \cdot (2a_1 + 109d) = -220,\ S_{110} = -110.$

**10.** Az $ABC$ háromszögben $AB = 8,\ AC = 3,\ BAC \sphericalangle = 60^o$, és az $A$ csúcsból induló szögfelező a szemközti oldalt a $D$ pontban metszi. Mekkora a $CD$ szakasz?

(A) $\frac{7}{11}$ (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{21}{11}$ (E) $\frac{24}{11}$

**Válasz:** (D) $\frac{21}{11}$

**Megoldás:** A koszinusz-tétellel számolva $BC = 7.$ A szögfelező-tétel miatt $\frac{CD}{DB} = \frac{3}{8},$ így $CD = \frac{3}{11} BC = \frac{3}{11} \cdot 7 = \frac{21}{11}$.




**11.** Melyik az egyenlete az $x^2 + y^2 = -4x$ és az $x^2 + y^2 = 4y$ körök közös húrja egyenletének?

(A) $y = x$ (B) $y = -x$ (C) $y = 2x$ (D) $y = -2x$ (E) $y = 2$

**Válasz:** (B) $y = -x$

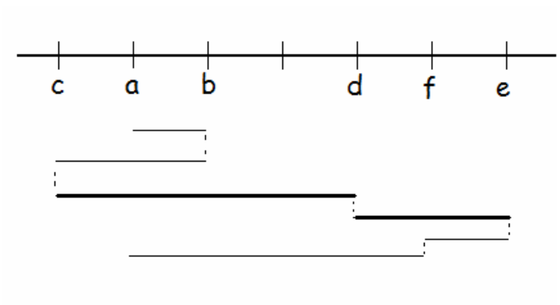
**Megoldás:** A két egyenletben a bal oldalak megegyeznek, ezért a jobb oldalak is egyenlők. $x = -y$, ezért $2x^2 = -4x$, így $x = 0$, vagy $x = -2.$ A két kör metszéspontjai: $(0;\ 0)$ és $(-2;\ 2)$. A közös húr ezt a két pontot köti össze, ennek egyenlete: $y = -x$ .

**12.** Mekkora az $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 + (e-f)^2 + (f-a)^2$ kifejezés legkisebb értéke, ha *a, b, c, d, e* és *f* különböző egész számok?

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 24 (E) 30

**Válasz:** (B) 18

**Megoldás.** A hat különböző egész szám közül a legnagyobb és a legkisebb különbsége legalább 5.




Ezért az $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-d|$, $|d-e|$, $|e-f|$, $|f-a|$ különbségek közül néhány egymás utáninak az összege is legalább 5, és a többi különbség összege is legalább 5. Továbbá az abszolút értékek összege páros szám.

Ha van olyan különbség, amely legalább 5, akkor a négyzetösszeg 25-nél nagyobb. (Ha a hat szám 1, 2, 3, 4, 5, 6, akkor a négyzetösszeg: $1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+5^2=30$.)

Nézzük az abszolút értékek néhány lehetséges sorozatát.

Ha van közöttük 2 és 3, akkor a többi legalább 1, 1, 1, 1 lenne, ám az abszolút értékek összege páros, tehát ez a négy különbség legalább 1, 1, 1, 2. Ekkor a négyzetösszeg legalább 20.

Ha a különbségek 4 és 1, ekkor a többi – tekintettel a párosságra is – legalább 1, 1, 1, 2. Ezek négyzetösszege 24.

Ha négy egymás utáni különbség 2, 1, 1, 1, akkor a maradék két különbség is legalább 5, jobb esetben ezek 2 és 3. Ekkor a négyzetösszeg 20.

A 2, 2, 1 különbségekhez a 2, 2, 1 társul. Itt a négyzetösszeg 18.

Legyen a hat szám 0, 1, 3, 5, 4, 2. A négyzetösszeg: $1^2+2^2+2^2+1^2+2^2+2^2=18$.

**Megjegyzés.** Általános esetben $(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_4)^2+\ldots+(a_n-a_1)^2\geq 4n-6$.
A feladat más utakon is megoldható.