Komplex számok

1) Algebrai alak: $z = a + b \cdot i$ ahol $a = \operatorname{Re} z \in R$ és $b = \operatorname{Im} z \in R$ és $i = \sqrt{-1}$
2) Konjugált komplex szám: $\overline{z} = a - b \cdot i$
3) Az i hatványai: $i^2 = -1$ továbbá $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$
4) A modulus és tulajdonságai: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
5) Konjugált és modulus tulajdonságai:

$|z| = |\overline{z}|$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $|z|^n = |z^n|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$,

$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \Leftrightarrow (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2$

6) A komplex szám redukált argumentuma: $t^* = \arg z = arctg \frac{b}{a}$
7) A komplex szám argumentuma: $t = Argz = \arg z + k\pi = arctg \frac{b}{a} + k\pi$
8) A komplex szám trigonometriai alakja: $z = r \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)$
9) Konjugált trigonometriai alak: $\overline{z} = r \cdot (\cos t - i \cdot \sin t)$
10). Átalakítás algebrai alakból trigonometriai alakba:

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ és $t = arctg \frac{b}{a} + k\pi \Rightarrow z = r \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)$

11) Négy fontos komplex szám trigonometriai alakja:

$1 = \cos 0 + i \sin 0$, $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$,

$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$, $-i = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

12) Műveletek komplex számokkal:

a) Szorzás: ha $z_1 = r_1 \cdot (\cos t_1 + i \cdot \sin t_1)$ és $z_2 = r_2 \cdot (\cos t_2 + i \cdot \sin t_2)$ akkor

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2))$$

b) Hatványozás: ha $z = r \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)$ illetve $\overline{z} = r \cdot (\cos t - i \cdot \sin t)$ akkor

$$z^n = r^n \cdot (\cos nt + i \cdot \sin nt) \text{ illetve } \left(\overline{z}\right)^n = r^n \cdot (\cos nt - i \cdot \sin nt)$$

Moivre képlete: $(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt$

c) Osztás: ha $z_1 = r_1 \cdot (\cos t_1 + i \cdot \sin t_1)$ és $z_2 = r_2 \cdot (\cos t_2 + i \cdot \sin t_2)$ akkor

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2))$$

d) Gyökvonás: ha $z = r \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)$ akkor

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n}) \text{ ahol } k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

13) A binom-egyenlet megoldása: $z^n = a,\ a \in C$ megoldása a C halmazon:

$z_k = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n})$ ahol $a = r \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)$ és

$k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$