Vektorok a síkban

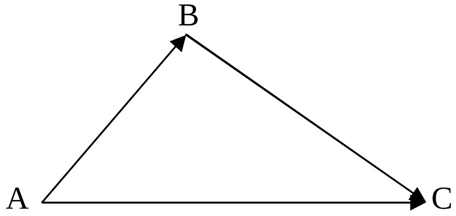
1) Kötöttvektor: $\overrightarrow{AB}$ vagy $\overline{AB}$. Jellemzői: kezdőpont (A), végpont (B), nagyság, hosszúság, modulus vagy norma ($\left|\overrightarrow{AB}\right|$ vagy $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$), irány, irányítás, tartóegyenes. Tulajdonság: $\overline{AB} = -\overline{BA}$ vagyis $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{0}$.

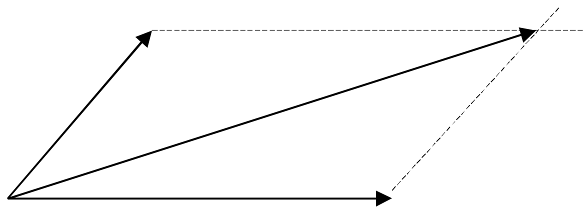
2) Szabadvektor: $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c},\dots$. Jellemzői: hosszúság, irány, irányítás.

3) Vektor szorzása skalárral: Az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ kollineárisak, ha létezik olyan $k \neq 0$ szám amelyre $\overline{AB} = k \cdot \overline{CD}$. Tehát $\overline{v}$ és $k \cdot \overline{v}$ kollineáris vektorok.

4) Két vektor összeadása: háromszögszabállyal vagy paralelogramma szabállyal.

Háromszögszabály: $\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}}$ Paralelogramma szabály:

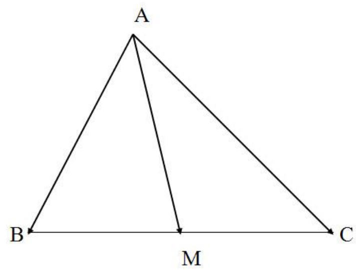




5) Oldalfelező tétel vektorokra:

Ha $M \in [BC]$ és $|BM| = |MC|$ akkor

$$\boxed{\overline{AM} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}}$$



6) Két vektor skaláris szorzata: $\boxed{\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos x}$ ahol *x* a két vektor által bezárt szög mértéke.

7) Két vektor vektoriális szorzata: $\boxed{\overline{a} \times \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin x \cdot \overline{n_0}}$ ahol *x* a két vektor által bezárt szög, és $\overline{n_0}$ a két vektor síkjára merőleges vektor (normálvektor)

8) Az $(O, \overline{i}, \overline{j})$ **ortonormált bázisvektorok**, ha $\overline{i} \perp \overline{j}$ és $|\overline{i}| = |\overline{j}| = 1$ vagyis

$$\boxed{\overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{j} \cdot \overline{i} = 0 \text{ és } \overline{i} \cdot \overline{i} = \overline{j} \cdot \overline{j} = 1}$$

9) A vektor koordinátákkal a bázisban: $\boxed{\overline{v} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j}}$

Ha *O(0,0)* és *M(x,y)* akkor $\overline{OM} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j}$ ahol *(x, y)* a vektor koordinátái az ortonormált bázisban. Tehát $\boxed{M(x,y) \Leftrightarrow \overline{OM}(x,y) \Leftrightarrow \overline{OM} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j}}$.

10) Kötöttvektor koordinátái: ha $A(x_1, y_1)$ és $B(x_2, y_2)$ akkor

$$\boxed{\overline{AB} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} \Leftrightarrow \overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$

11) Szabadvektor hossza: ha $\boxed{\overline{v} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j}}$ akkor $\boxed{|\overline{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

12) Kötöttvektor hossza: ha $A(x_1, y_1)$ és $B(x_2, y_2)$ akkor

$$\boxed{\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

13) Két vektor összege és különbsége: ha $\overline{v_1} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j}$ és $\overline{v_2} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j}$ akkor

$\boxed{\overline{v_1} + \overline{v_2} = (x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j}}$ illetve $\boxed{\overline{v_1} - \overline{v_2} = (x_1 - x_2)\bar{i} + (y_1 - y_2)\bar{j}}$

14) Skalár és vektor szorzata: ha $\bar{v} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}$ akkor $\boxed{k \cdot \bar{v} = kx \cdot \bar{i} + ky \cdot \bar{j}}$

Következmény: A $\overline{v_1} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j}$ és $\overline{v_2} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j}$ <u>kollineárisak</u>, ha létezik olyan $k \neq 0$ valós szám amelyre $x_1 = k \cdot x_2$ és $y_1 = k \cdot y_2$ vagyis $\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}}$

15) Két vektor skalásris szorzata: ha $\overline{v_1} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j}$ és $\overline{v_2} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j}$ akkor

$$\boxed{\overline{v_1} \cdot \overline{v_2} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}$$

Következmény: Ha $\bar{v} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}$ akkor $\boxed{\bar{v}^2 = \bar{v} \cdot \bar{v} = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \left|\bar{v}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

16) Két vektor hajlásszöge: ha $\overline{v_1} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j}$ és $\overline{v_2} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j}$ akkor

$\overline{v_1} \cdot \overline{v_2} = |v_1| \cdot |v_2| \cdot \cos x \Rightarrow \boxed{\cos x = \frac{\overline{v_1} \cdot \overline{v_2}}{|v_1| \cdot |v_2|}}$ vagy $\boxed{\cos x = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}}$

17) Két vektor kölcsönös helyzete:

a) Egyenlő vektorok: ha $\overline{v_1} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j}$ és $\overline{v_2} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j}$ akkor

$$\boxed{\overline{v_1} = \overline{v_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ és } y_2 = y_2}$$

b) Párhuzamos (kollineáris vagy egybeeső) vektorok: ha $\overline{v_1} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j}$ és

$\overline{v_2} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j}$ akkor $\boxed{\overline{v_1} \parallel \overline{v_2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}}$

c) Merőleges vektorok: ha $\overline{v_1} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j}$ és $\overline{v_2} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j}$ akkor

$$\boxed{\overline{v_1} \perp \overline{v_2} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0}$$

18) Három pont kollinearítása: ha $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$ akkor

$$\boxed{A_1, A_2, A_3 \text{ kollineárisak } \Leftrightarrow \overline{A_1A_3} = k \cdot \overline{A_1A_2} \Leftrightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}}$$

19) Nevezetes pontok koordinátái:

a) Oldalfelező pont koordinátái: ha $\overline{AM} = \overline{MB}$ és $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x, y)$ akkor

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ és } y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

b) Adott szakaszt k arányba osztó pont koordinátái: ha $\overline{AM} = k \cdot \overline{MB}$ és $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),\ M(x, y)$ akkor

$$\boxed{x = \frac{x_1 + k \cdot x_2}{2} \text{ és } y = \frac{y_1 + k \cdot y_2}{2}}$$

c) Háromszög súlypontjának koordinátái: ha $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), G(x, y)$ és G súlypont, akkor $\boxed{x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ és } y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}}$

20) Helyzetvektorok és tulajdonságok:

Minden M síkbeli pontra az $\overline{OM}$ vektort az M pont helyzetvektorának nevezzük, és $\overline{r_M}$ - al jelöljük, tehát $\boxed{\overline{r_M} = \overline{OM}}$

a) Ha $M(x,y)$ akkor $\boxed{\overline{r_M} = \overline{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}}$ az $(\bar{i}, \bar{j})$ bázisvektorokra vonatkozó analitikus reprezentálás vagy rövidebben $\boxed{\overline{r_M} = (x, y)}$

b) Ha $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ akkor $\boxed{\overline{r_1} = \overline{r_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ és } y_1 = y_2}$

c) Ha $\overline{r_A} = (x_A, y_A)$ és $\overline{r_B} = (x_B, y_B)$ akkor

$$\boxed{\overline{r_A} + \overline{r_B} = (x_A + x_B) \cdot \bar{i} + (y_A + y_B) \cdot \bar{j} = (x_A + x_B, y_A + y_B)}$$

d) Ha $\overline{r_A} = (x_A, y_A)$ és $k \in R$ akkor $\boxed{k \cdot \overline{r_A} = k \cdot x_A \cdot \bar{i} + k \cdot y_A \cdot \bar{j} = (k \cdot x_A, k \cdot y_A)}$

e) Ha $\overline{AM} = \overline{MB}$ és $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x, y)$ akkor az M felezőpont helyzetvektora:

$$\boxed{\overline{r_M} = \frac{\overline{r_A} + \overline{r_B}}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \bar{i} + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \bar{j} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)}$$

f) Ha $\overline{AM} = k \cdot \overline{MB}$ és $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x, y)$ akkor az M pont helyzetvektora:

$$\boxed{\overline{r_M} = \frac{\overline{r_A} + k \cdot \overline{r_B}}{1+k} = \frac{x_1 + k \cdot x_2}{1+k} \cdot \bar{i} + \frac{y_1 + k \cdot y_2}{1+k} \cdot \bar{j} = \left(\frac{x_1 + k \cdot x_2}{1+k}, \frac{y_1 + k \cdot y_2}{1+k} \right)}$$

g) Ha $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), G(x, y)$ akkor a G súlypont helyzetvektora:

$$\boxed{\overline{r_G} = \frac{\overline{r_A} + \overline{r_B} + \overline{r_C}}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \cdot \bar{i} + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \cdot \bar{j} = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)}$$