Az indukció

A logikában indukciónak nevezzük azt a következtetési módot, amelyek segítségével valamely osztályon belül az egyes esetekből az általánosra következtetünk.

Például: 20, 112, 804, 76, 48 mind oszthatóak kettővel. Ezért minden olyan természetes szám amelyik 0, 2, 4, 6, vagy 8-ban végződik, osztható 2-vel?

A gondolkodás irányát illetően az indukció és a dedukció ellentétes irányú bizonyítási módszerek. Az indukció a megfigyelt tényekről törvényekre „emelkedik föl". Más szóval az indukció a megfigyelések mögött szabályszerűséget és összefüggést tár fel.

A parciális indukció az a módszer, amely során az általános szabályszerűséget csupán néhány megfigyelés után próbáljuk levonni. Ez a módszer gyerekes és kockázatos, hiszen végtelen halmazok esetén – ha a lényeges jegyeket ragadtuk meg és így általánosítottunk – legfeljebb megsejthetjük a szabályszerűséget, ezt azonban a matematikára jellemző precíz dedukcióval bizonyítanunk kell.

A teljes indukció módszerén azt a következtetési módot értjük, amely során az adott szituációban előforduló minden egyes eset, illetve minden egyes rész megvizsgálása alapján mondunk ki állításokat. Az így nyert állítások – mivel minden esetet megvizsgáltunk – bizonyítottnak tekinthetők.

<u>1. példa</u>: Figyeljük meg: $1\times2\times3\times4+1=5^2$, $2\times3\times4\times5+1=11^2$, $3\times4\times5\times6+1=19^2$. Folytassuk a megfigyelt szabályt! Mivel egyenlő $2011\times2012\times2013\times2014+1=?$ Fogalmazzuk és bizonyítsunk általános érvényű állítást!

Megoldás: Figyeljük meg, hogy $1\times2\times3\times4+1= 5^2= (1\times4+1)^2 = (2\times3-1)^2$; $2\times3\times4\times5+1=11^2= (2\times5+1)^2= (3\times4-1)^2$; $3\times4\times5\times6+1=19^2 =(3\times6+1)^2= (4\times5-1)^2$ és így tovább. Ezen sajátos megfigyelések alapján felírható, hogy:

$$\mathbf{n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1= (n(n+3)+1)^2=((n+1)\times(n+2)-1)^2= (n^2+3n+1)^2}$$

Ezt ellenőrizzük is: $n(n+3)=n^2+3n$, $(n+1)(n+2)=n^2+3n+2$ ahonnan

$$(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2$$

Vegyük észre, hogy az előbbiekben nem csak általánosítottuk az összefüggést, nem csak sejtést alakítottunk ki, **hanem algebrailag be is bizonyítottuk** azt, amit sejtettünk.

<u>2. példa</u>: Figyeljük meg: $1= 1^2$; $1+3= 2^2$; $1+3+5= 3^2$; $1+3+5+7= 4^2$; $1+3+5+7+9= 5^5$.

Mivel egyenlő $1+3+5+\ldots+2011+2013=?$ Fogalmazzuk meg és bizonyítsunk általános érvényű szabályt!

Megoldás: Figyeljük meg, hogy $2^2= [(3+1):2]^2$; $3^2= [(5+1):2]^2$; $4^2= [(7+1):2]^2$ és így tovább. Tehát a megfigyeléseink azt diktálják, hogy:

$$1+3+5+\ldots+2011+2013=[(1+2013):2]^2= 1007^2$$

Próbáljuk általánosítani: $\mathbf{1+3+5+\ldots+(2n-3) +(2n-1)= [(1+2n-1):2]^2= n^2}$ **(*)**

Azáltal, hogy ezt az összefüggést felírtuk, **ezúttal nem bizonyítottuk, ez csak sejtés**!

A (*) összefüggés tehát nem föltétlenül következik az előző számolásokból. A (*) összefüggést **csak akkor fogadhatjuk el, ha be is bizonyítjuk**!

Erre a teljes indukciót, vagyis a matematikai indukciót használjuk!

A teljes indukció megtalálható a természetes számot értelmező öt Peano-féle axióma között, éspedig az utolsó axióma, miszerint:

„Ha a 0 rendelkezik valamely T tulajdonsággal, és a tulajdonság átöröklődik az n természetes számról az n' (n'=n+1) rákövetkezőjére, akkor minden természetes szám rendelkezik a T tulajdonsággal".

Belátható, hogy ezzel az „öröklődéssel" bizonyítható lenne a (*) összefüggés.

A teljes (matematikai) indukció módszere:
Legyen P(n) egy olyan predikátum amely az n> 0 természetes számtól függ.

1. lépés: Ellenőrizzük a P(n) állítást n=1, n=2 értékekre vagyis, hogy a P(1) és P(2) állítások igazak-e.

2. lépés: Feltételezzük, hogy a P(k) állítás igaz minden k> 0 természetes számra.

3. lépés: Bizonyítjuk, hogy a P(k+1) állítás is igaz, ezzel beláttuk, hogy a $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ implikáció is igaz.

Így a „dominóeffektus" mintájára, a P(k) predikátum igaz minden k> 0 természetes szám esetén, és ezt be is bizonyítottuk.

A 2. példa bizonyítása teljes indukcióval:

1. lépés: P(1): $1=1^2$ nyilvánvaló. P(2): $1+3=2^2$ szintén nyilvánvaló.

2. lépés: feltételezzük, hogy P(k): $\mathbf{1+3+5+\ldots+(2k-3)+(2k-1)=k^2}$ igaz minden k> 0 természetes számra!

3. lépés: Bizonyítjuk, hogy P(k+1): $\mathbf{1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2}$ is igaz, minden n>0 esetén. Ez könnyen belátható, hiszen $\mathbf{k^2+(2k+1)=(k+1)^2}$.
Ezzel a bizonyításunk véget ért.

<u>3. példa</u>: Figyeljük meg: $1^2=1^3$; $(1+2)^2=1^3+2^3$; $(1+2+3)^2=1^3+2^3+3^3$; $(1+2+3+4)^2=1^3+2^3+3^3+4^3$. Általánosítsuk az észrevételeinket és bizonyítsunk is.

Bizonyítás: Igazoljuk, hogy $\mathbf{(1+2+3+\ldots+n)^2=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}$ **(*)**

1. **lépés**: P(1): $1^2=1^3$; P(2): $(1+2)^2=1^3+2^3$ mindkettő igaz.
2. **lépés**: Feltételezzük, hogy P(k) igaz, vagyis a (*) igaz
3. **lépés**: Igazoljuk, hogy P(k+1): $\mathbf{(1+2+3+\ldots+k+(k+1))^2=1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3}$

Bizonyítás: $\mathbf{(1+2+3+\ldots+k)^2+2(k+1)(1+2+3+\ldots+k)+(k+1)^2=1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3}$ vagyis $\mathbf{1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+2(k+1)(1+2+3+\ldots+k)+(k+1)^2=1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3}$ ahonnan $\mathbf{2(k+1)(1+2+3+\ldots+k)+(k+1)^2=(k+1)^3}$ és innen $\mathbf{1+2+3+\ldots+k=}\ \dfrac{k(k+1)}{2}$ amit szintén indukcióval bizonyítunk.

Megjegyzés: A feladat egyenlősége alapján: $\mathbf{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=}\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ami egyébként indukcióval is bizonyítható.

A teljes (matematikai) indukció módszerének 2. változata:
Legyen P(n) egy olyan predikátum amely az n> 0 természetes számtól függ.

1. lépés: Ellenőrizzük a P(n) állítást n=1, n=2 értékekre vagyis, hogy a P(1) és P(2) állítások igazak-e.

2. lépés: Feltételezzük, hogy a P(1), P(2),…,P(k) állítások mindegyike igaz

3. lépés: Bizonyítjuk, hogy a P(k+1) állítás is igaz, ezzel beláttuk, hogy a $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ implikáció is igaz.

4. **<u>példa</u>**: Ha $a,b\in R$ úgy, hogy $\boldsymbol{ab\in Z}$ és $\boldsymbol{a+b\in Z}$ akkor $\boldsymbol{a^n+b^n\in Z}$ minden $n\in N$ esetén.

Bizonyítás: P(1): $a^1+b^1\in Z$ adott, P(2): $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\in Z$ is igaz. Feltételezzük,hogy

a P(1), P(2),…,P(k) állítások mindegyike igaz. Bizonyítsuk **P(k+1):** $a^{k+1}+b^{k+1}\in Z$.
Számolásokkal ellenőrizhetjük, hogy $a^{k+1}+b^{k+1}=(a+b)(a^k+b^k)-ab(a^{k-1}+b^{k-1})\in Z$ mert a P(1), P(k-1) és P(k) mind igaz.

A teljes (matematikai) indukció módszerének 3. változata:

Legyen P(n) egy olyan predikátum amely az n> 0 természetes számtól függ.

1. lépés: Ellenőrizzük a P(n) állítást n=1, n=2, …,n=m értékekre vagyis, hogy a P(1), P(2),…, P(m) állítások igazak-e.

2. lépés: Feltételezzük, hogy a P(1), P(2),…,P(k) állítások mindegyike igaz

3. lépés: Bizonyítjuk, hogy a P(k+m) állítás is igaz, ezzel beláttuk, hogy a $P(k)\Rightarrow P(k+m)$ implikáció is igaz, ahol m adott pozitív egész szám.

5. **<u>példa</u>**: Igaz-e, hogy bármely $n\in N^*$ esetén létezik a ± előjeleknek egy olyan megválasztás és olyan $m\in N^*$, amelyre $n=\pm 1^2\pm 2^2\pm 3^2\pm\ldots\pm m^2$ legyen?

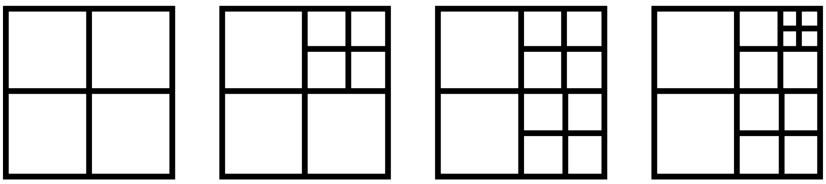
Bizonyítás: Ellenőrizzük le az első 4 sajátos esetet:

$0=1^2+2^2-3^2+4^2-5^2-6^2+7^2$, $1=1^2$, $2=-1^2-2^2-3^2+4^2$, $3=-1^2+2^2$

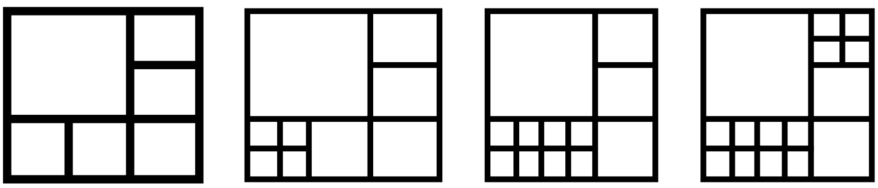
Feltételezzük, hogy n=k felírható a kért alakban és bizonyítjuk, hogy n= k+4 is felírható ugyanúgy. Vegyük észre, hogy $(m+1)^2-(m+2)^2-(m+3)^2+(m+4)^2=4$, ezért felírható, hogy $k+4=\pm 1^2\pm 2^2\pm 3^2\pm\ldots\pm m^2+[(m+1)^2-(m+2)^2-(m+3)^2+(m+4)^2]$. Ezzel igazoltuk a P(k+4)-et vagyis, hogy k+4 is felírható a kért alakban.

6. **<u>példa</u>**: Osszunk fel egy négyzetet rendre 4, 6, 7, 8, 9, 10, 2013 darab kisnégyzetre. Igazoljuk, hogy bármely négyzet felosztható $n\geq 6$ darab kisnégyzetre!

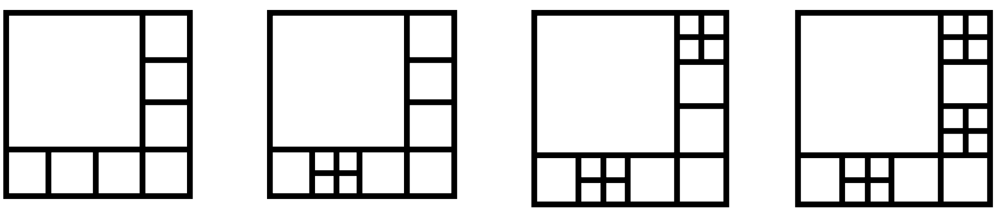
Előbb osszuk fel 4 részre, majd ismét 4 részre, és így tovább:



Ezzel az eljárással feloszthatjuk a négyzetet **4, 7, 10, 13, 16, …** (1) kisnégyzetre.
Próbálkozzunk a négyzetet 6 kisnégyzetre osztani. Ezután ismételten osszuk 4 részre a kisnégyzeteket:



Ezzel az eljárással feloszthatjuk a négyzetet **6, 9, 12, 15,…**(2) kisnégyzetre. Próbálkozzunk most felosztani a négyzetet 8 kisnégyzetre. Majd ezt ismételten 4 kisnégyzetre.



Ezzel az eljárással feloszthatjuk a négyzetet **8, 11, 14, 17,…**(3) kisnégyzetre. Vegyük észre, hogy az **(1)-ben az n=3k+1, a (2)-ben az n= 3k és a (3)-ban a 3k+2** alakú számokra látunk felosztásokat. Mivel 2013:3= 671 ezért a 2013-ra való felosztás a (2)-es sorozathoz tartozik.

Vegyük észre, hogy az előbbiekben amikor egy négyzetet 4 részre osztottunk, akkor megszűnt 1 négyzet és keletkezett 4 négyzet, tehát a négyzetek száma mindenesetben 3-mal nőtt. Ezen megfigyelés alapján ha feltételezzük, hogy P(k) igaz, vagyis egy négyzet felosztható k kisnégyzetre, akkor ebből egyet 4 részre osztva k+3 négyzetünk lesz, vagyis bizonyítottuk a P(k+3)-at.

Megjegyezzük, hogy indukcióval **egyenlőtlenségek és oszthatóságok** is bizonyíthatók. Lássunk példákat ezekre is!

7. **<u>példa</u>**: Igazoljuk, hogy minden n $\geq$1 esetén $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Bizonyítás: P(1): $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$ igaz, P(2): $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}<\frac{1}{\sqrt{5}}$ szintén igaz. Feltételezzük, hogy P(k) igaz, vagyis $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ (*).Igazolni fogjuk, hogy P(k+1) is igaz, vagyis $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$ (**). A (*) mindkét oldalát szorozzuk meg $\frac{2k+1}{2k+2}$-vel. Ekkor kapjuk, hogy: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{2k+1}{2k+2}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$. A (**) igazolása végett elegendő belátni, hogy: $\frac{2k+1}{2k+2}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$ vagyis (2k+1)$\sqrt{2k+3}\leq$ (2k+2)$\sqrt{2k+1}$ ami négyzetre emeléssel nyilvánvaló lesz.

8. <u>példa</u>: Igazoljuk, hogy minden n $\geq$ 1 esetén $\mathbf{4^n + 15n - 1}$ osztható **9**-cel!

Bizonyítás: Igazolni fogjuk, hogy az adott kifejezés többszöröse 9-nek vagyis, létezik olyan **M** természetes szám amelyre $\mathbf{4^n + 15n - 1 = 9M.}$ **(*)**

Ellenőrizzük az első két esetet: P(1): 4+15-1=18=9M; P(2): 16+30-1=45=9M. Feltételezzük, hogy a (*) állítás igaz n=k értékre. Igazoljuk, hogy P(k+1): 4^{k+1} + 15(k+1) -1= 9M`.

A feltevés alapján: $\mathbf{4^k + 15k - 1 = 9M}$ ahonnan $\mathbf{4^k = 9M - 15k + 1.}$

Ezért $\mathbf{4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4(9M - 15k + 1) + 15(k+1) - 1 = 36M - 45k + 18 = 9M`}$

9. <u>példa</u>: Igazoljuk, hogy minden n $\geq$1 esetén $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1$.

Bizonyítás: A feladatot azért nehezebb igazolni, mert az első tag is függ az n-től és a jobboldalon pedig egy n-től független érték van, egy szám. Ellenőrizzük, hogy P(1): $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$ igaz, mert $\frac{13}{12}>1$. Továbbá P(2): $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}>1$ is igaz.

Feltételezzük, hogy P(k): $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{3k+1}>1$ (*) igaz. Bizonyítjuk, hogy P(k+1): $\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{3k+4}>1$ is igaz (**). A (*) mindkét oldalából vonjunk ki $\frac{1}{k+1}$-et, és adjunk hozzá $\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\right)$-at, ezt kapjuk:

$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{3k+4}>1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$. Elegendő igazolni, hogy ez utóbbi ≥ 1.

Ehhez azt kell bizonyítani, hogy $\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}\geq 0$ vagyis $\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}>\frac{1}{k+1}-\frac{1}{3(k+1)}$ ahonnan $\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}>\frac{2}{3k+3}$. Közös nevezőre hozással kapjuk, hogy $18k^2+36k+18>18k^2+36k+16$, ami nyilvánvaló.

Indukcióval sok más típusú feladat is megoldható, a matematika legkülönbözőbb területeiről.