A CAUCHY-FÜGGVÉNYEGYENLET ÉS NÉHÁNY ROKON PROBLÉMA

2. rész

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

Az [1] cikkben megismerkedhettünk a Cauchy-alapegyenlettel és néhány hasznos rokon egyenlettel. Rendszerezve ezeket, tulajdonképpen négy típusú Cauchy-egyenlet van ([2]):

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ (I. típusú Cauchy-egyenlet), megoldása: $f(x)=ax$;
$f(x+y)=f(x)f(y)$ (II. típusú Cauchy-egyenlet), megoldása: $f(x)=e^{ax}$;
$f(xy)=f(x)+f(y)$ (III. típusú Cauchy-egyenlet), megoldása: $f(x)=a\ln x$;
$f(xy)=f(x)f(y)$ (IV. típusú Cauchy-egyenlet), megoldása: $f(x)=x^a$.

Láttuk, hogy az utóbbi három egyenlet visszavezethető az I. típusú alapegyenletre. Továbbá a Cauchy-egyenletek egy általánosítását a Pexider-egyenletek képezik, két változó esetén ezek a következők:

$f(x+y)=g(x)+h(y)$ (I. típusú Pexider-egyenlet)
megoldása: $f(x)=ax+b$, $g(x)=ax+c$, $h(x)=ax+d$;

$f(x+y)=g(x)\cdot h(y)$ (II. típusú Pexider-egyenlet)
megoldása: $f(x)=abe^{cx}$, $g(x)=ae^{cx}$, $h(x)=be^{cx}$;

$f(xy)=g(x)+h(y)$ (III. típusú Pexider-egyenlet)
megoldása: $f(x)=a\ln x+b$, $g(x)=a\ln x+c$, $h(x)=a\ln x+d$;

$f(xy)=g(x)h(y)$ (IV. típusú Pexider-egyenlet)
megoldása: $f(x)=mx^a$, $g(x)=nx^a$, $h(x)=px^a$.

Azt is láttuk, hogy ezen Pexider-egyenletek megoldása szintén visszavezethető az I. típusú Cauchy-egyenlet megoldására. Minden esetben csak folytonos megoldásokat kerestünk.

Az [1]-ben olyan függvényegyenleteket oldottunk meg, amelyek kiváltképpen az I. típusú Cauchy-egyenletre vezethetők vissza. A továbbiakban az előző Cauchy- és Pexider-egyenletekre, vagy más ismert egyenletekre visszavezethető feladatokat mutatunk be.

1. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y)=\dfrac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$ egyenletet, minden $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ esetén?

Megoldás: Vezessük be a $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ változócserét, ekkor $g(x+y)=g(x)+g(y)$, amelynek a megoldása $g(x)=ax$, ezért $f(x)=\dfrac{1}{ax}$.

2. Példa: Melyek azok az $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)$ egyenletet, minden $x,y\in\mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Vezessük be az $x+y=u$, $x-y=v$ változócserét, így $x=\dfrac{u+v}{2}$ és az $f\left(\dfrac{u+v}{2}\right)=\dfrac{f(u)+f(v)}{2}$ egyenletet kapjuk, amely a Jensen-féle függvényegyenlet, és a megoldása $f(x)=ax+b$ ([1], 11. példa).

3. Példa: Melyek azok az $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x)+f(x+2y)=2f(x+y)$ egyenletet, minden $x,y\in\mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Legyen $x = u$, $x + 2y = v$, így $x + y = \dfrac{u+v}{2}$, ezért $\dfrac{f(u)+f(v)}{2} = f\left(\dfrac{u+v}{2}\right)$, ami a Jensen-függvényegyenlet, és ennek a megoldása $f(x) = ax + b$. ([1], 11. példa).

4. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f\left(\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\right) = \sqrt{\dfrac{[f(x)]^2+[f(y)]^2}{2}}$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Belátható, hogy $\sqrt{\dfrac{[f(x)]^2+[f(y)]^2}{2}} = f\left(\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\right) = \sqrt{\dfrac{[f(-x)]^2+[f(y)]^2}{2}}$, ahonnan $[f(-x)]^2 = [f(x)]^2$, vagyis $(f(-x)+f(x))(f(-x)-f(x)) = 0$, tehát $f(-x) = f(x)$, ami azt jelenti, hogy f páros kell legyen. Ezért vezessük be a $g(x) = [f(\sqrt{x})]^2$ jelölést minden $x \geq 0$ esetben, így a $g\left(\dfrac{u+v}{2}\right) = \dfrac{g(u)+g(v)}{2}$ Jensen-típusú egyenletet kapjuk, ahol $u = x^2$, $v = y^2$, amelynek a megoldása $g(u) = au + b$ ([1], 11. példa), ezért $f(x) = \sqrt{ax^2+b}$.

5. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Legyen $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, így $g\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{g(x)+g(y)}{2}$, amelynek a megoldása $g(x) = ax + b$ ([1], 11. példa), ezért $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$, ahol $a > 0$, $b \geq 0$.

6. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f\left(\dfrac{2xy}{x+y}\right) = \dfrac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Legyen $g(x) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$, így $g\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{g(x)+g(y)}{2}$, amelynek a megoldása $g(x) = ax + b$ ([1], 11. példa), ezért $f(x) = \dfrac{x}{ax+b}$, ahol $a > 0$, $b \geq 0$.

7. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x^y) = [f(x)]^{f(y)}$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén?

Megoldás: Az $f(x) = 1$ bármely $x \in \mathbb{R}_+$ esetén, a függvény teljesíti a feladatot. Legyen $a \in \mathbb{R}_+$ úgy, hogy $f(a) \neq 1$. Ekkor felírható, hogy: $[f(a)]^{f(xy)} = f(a^{xy}) = f\left((a^x)^y\right) = [f(a^x)]^{f(y)} = [f(a)]^{f(x)f(y)}$, ahonnan $f(xy) = f(x)f(y)$ Cauchy-egyenletet kapjuk, így $f(x) = x$.

8. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Vezessük be a $g(x) = f(x) + 1$ változócserét, így $g(x+y) = g(x)g(y)$, amelynek a megoldása $g(x) = 0$ vagy $g(x) = b^x$ $(b > 0)$. Ezért $f(x) = -1$ vagy $f(x) = b^x - 1$.

9. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)f(y)$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén? (Gauss-egyenlet).

Megoldás: Nyilvánvaló, hogy az f azonosan állandó függvény teljesíti az egyenletet. Keressük a nem állandó f függvényt. Legyen x_0 olyan érték, amelyre $f(x_0) \neq 0$. Ekkor $f(x_0)f(-y) = f\left(\sqrt{x_0^2+y^2}\right) = f(x_0)f(y)$, vagyis $f(-y) = f(y)$, tehát az f páros függvény. Vezessük be a $g(x) = f(\sqrt{x})$ változócserét minden $x \geq 0$ esetén. Ekkor kapjuk, hogy $g(u+v) = g(u)g(v)$, ahol $u = x^2$, $v = y^2$, amelynek a megoldása $g(u) = a^u$, tehát $f(x) = a^{x^2}$.

10. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x^2+y^2) = f(x^2-y^2) + f(2xy)$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén? (Románia, MO, 1997).

Megoldás: Ha $x = y = 0$, akkor $f(0) = 0$. Ha csak $x = 0$, akkor $f(y^2) = f(-y^2)$, vagyis az f függvény páros. Legyen most $u = x^2 - y^2$ és $v = 2xy$. Ekkor $u^2 + v^2 = (x^2+y^2)^2$, így az egyenlet $f(\sqrt{u^2+v^2}) = f(u) + f(v)$, és ennek a megoldása $f(x) = ax^2$ ([1], 13. példa).

11. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x^2-y^2) = xf(x) - yf(y)$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén? (USA, MO 2002).

Megoldás: Ha $y = 0$, akkor $f(x^2) = xf(x)$, így $yf(y) = f(y^2)$, és behelyettesítve ezeket $f(x^2-y^2) = f(x^2) - f(y^2)$. Legyen $x^2 = u + v$, $y^2 = v$, ekkor $f(u+v) = f(u) + f(v)$, amelynek a megoldása $f(x) = ax$.

12. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y) = x^2y + xy^2 - 2xy + f(x) + f(y)$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Vezessük be a $g(x) = f(x) - \dfrac{x^3}{3} + x^2$ változócserét. Így a $g(x+y) = g(x) + g(y)$ Cauchy-egyenletet kapjuk, amelynek a megoldása $g(x) = ax$, ezért $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + ax$.

13. példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $[f(x)]^2 = f(x+y)f(x-y)$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén? (Lobacsevszki-függvényegyenlet)

1. *Megoldás*: Legyen $u = x+y$, $v = x-y$, ekkor $x = \dfrac{u+v}{2}$ és az egyenlet $\left[f\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\right]^2 = f(u)f(v)$, amelynek a megoldása $f(x) = f(0)\cdot a^x$ ([1], 12. példa).

2. *Megoldás*: Logaritmálva mind a két oldalt, és bevezetve a $g(x) = \ln f(x)$ változócserét, kapjuk, hogy $g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)$. Legyen $x + y = u$, $x - y = v$, ekkor $x = \dfrac{u+v}{2}$, így az egyenlet $\dfrac{g(u)+g(v)}{2} = g\left(\dfrac{u+v}{2}\right)$, ami Jensen-egyenlet, ennek megoldása $g(x) = ax + b$ ([1], 11. példa), ezért $f(x) = e^{ax+b}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

14. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $[f(x+y)]^2 = f(x)f(x+2y)$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Helyettesítsük az x-et $(x-y)$-nal, ekkor az $[f(x)]^2 = f(x+y)f(x-y)$ Lobacsevszki-egyenletet kapjuk, amelynek a megoldása $f(x) = f(0)a^x$.

15. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(x)f(y)$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Vezessük be a $g(x) = 1 - f(x)$ változócserét, így $g(x+y) = g(x)g(y)$, amelynek a megoldása $g(x) = e^{ax}$, ahonnan $f(x) = 1 - e^{ax}$, illetve $f(x) = 1$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

16. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y) = f(x) + f(y) + a(1-b^x)(1-b^y)$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$?

Megoldás: Vezessük be a $g(x) = f(x) - a(b^x - 1)$ változócserét, így a $g(x+y) = g(x) + g(y)$ egyenletet kapjuk, amelynek megoldása $g(x) = cx$, ezért $f(x) = a(b^x-1) + cx$.

17. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y+a) + b = f(x) + f(y)$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $a, b \in \mathbb{R}$?

Megoldás: Vezessük be a $g(x) = f(x-a) - b$ változócserét. Ekkor $g(x+y+2a) = g(x+a) + g(y+a)$, vagyis $g(u+v) = g(u) + g(v)$, ahol $u = x + a$, $v = y + a$. Ennek a megoldása $g(u) = cu$, ezért $f(x) = c(x+a) + b$.

18. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y) = f(x) + f(y) - xy$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Az egyenlet megfelelő oldalaihoz hozzáadva az $\dfrac{(x+y)^2}{2} = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + xy$ összefüggést, azt kapjuk, hogy $f(x+y) + \dfrac{(x+y)^2}{2} = f(x) + \dfrac{x^2}{2} + f(y) + \dfrac{y^2}{2}$, így a $g(x) = f(x) + \dfrac{x^2}{2}$ változócserével $g(x+y) = g(x) + g(y)$, amelynek a megoldása $g(x) = ax$, így $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + ax$.

19. Példa: Melyek azok az $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x) + f(y) = f(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Legyen $x = \sin u$, $y = \sin v$, így $f(\sin u) + f(\sin v) = f(\sin(u+v))$. Ha $f(\sin x) = F(x)$, akkor $F(u+v) = F(u) + F(v)$, így $F(x) = ax$, ezért $f(x) = a \cdot \arcsin x$.

20. Példa: Melyek azok az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x + 2f(y)) = f(x) + f(y) + y$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Legyen $x = y - 2f(y)$, akkor $f(y - 2f(y)) = -y$. Az eredeti egyenletbe az y értékét $y - 2f(y)$ értékkel helyettesítve kapjuk, hogy $f(x - 2y) = f(x) - 2f(y) \quad (*)$. Ekkor ha $x = y = 0$, akkor $f(0) = 0$, ha $x = 2y$, akkor $f(2y) = 2f(y)$, így a $(*)$ alapján $f(x-2y) = f(x) - f(2y)$, ezért ha ebben az x helyett $(x+y)$ értéket, az y helyett $\dfrac{y}{2}$ értéket helyettesítjük, akkor $f(x+y) = f(x) + f(y)$, ahonnan $f(x) = ax$. Ezt visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe $a = 1$ vagy $a = -\dfrac{1}{2}$.

21. Példa: Melyek azok az $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{g(x) + h(y)}{2}$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén? (A Jensen-függvényegyenlet általánosítása.)

Megoldás: Ha $F(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$, akkor az $F(x+y) = g(x) + h(y)$ Pexider-egyenletet kapjuk, amelynek a megoldása $f(x) = ax + \dfrac{b+c}{2}$, $g(x) = ax + b$, $h(x) = ax + c$.

22. Példa: Melyek azok az $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y) = \dfrac{g(x) + h(y)}{1 - \dfrac{g(x)h(x)}{c^2}}$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ és $c =$ állandó esetén? (NMO, 1977)

Megoldás: Vezessük be az $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ folytonos függvényeket a következőképpen: $f(x) = c \cdot \operatorname{tg} F(x)$, $g(x) = c \cdot \operatorname{tg} G(x)$, $h(x) = c \cdot \operatorname{tg} H(x)$. Ekkor kapjuk, hogy $\operatorname{tg}(F(x+y)) = \operatorname{tg} G(x) + \operatorname{tg} H(y)$, így az új függvényegyenlet $F(x+y) = G(x) + H(y) + m\pi$, ahol $m \in \mathbb{Z}$. Vagyis $F(x+y) - m\pi = [G(x) - m\pi] + [H(y) - m\pi]$, amely Pexider-egyenlet, a megoldása $F(x) = kx + a + b + m\pi$, $G(x) = kx + a + m\pi$, $H(x) = kx + b + m\pi$. Tehát a feladat megoldása $f(x) = c \cdot \operatorname{tg}(kx + a + b)$, $g(x) = c \cdot \operatorname{tg}(kx + a)$, $h(x) = c \cdot \operatorname{tg}(kx + b)$.

23. Példa: Melyek azok az $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f\left(\sqrt[n]{x^n + y^n}\right) = g(x)h(y)$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Ha $y = 0$, akkor $f(x) = g(x)h(0)$, és ha $h(0) = 0$, akkor f identikusan nulla függvény és g tetszőleges. Ha ellenben $x = 0$, akkor $f(y) = g(0)h(y)$ és $g(0) = 0$, akkor f identikusan nulla, és h tetszőleges. Más esetekben legyenek $F(u) = f(\sqrt[n]{u})$, $G(u) = g(\sqrt[n]{u})$,

$H(u)=h(\sqrt[n]{u})$, ekkor $F(u+v)=G(u)H(v)$, amelynek a megoldása $F(u)=abc^u$, $G(u)=ac^u$, $H(u)=bc^u$, ezért az eredeti egyenlet megoldása $f(x)=abc^{x^n}$, $g(x)=ac^{x^n}$, $h(x)=bc^{x^n}$.

24. Példa: Melyek azok az $f,g\colon \mathbb{R}\to(0,+\infty)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{g(x)g(y)}$ egyenletet, minden $x,y\in\mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Helyettesítsük x-et $(x+y)$-nal, így kapjuk, hogy $f\left(\frac{x+2y}{2}\right)=\sqrt{g(x+y)g(y)}$. Legyen $y=0$, ezért $f\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{g(x)g(0)}$, majd helyettesítsük az x-et $(x+y)$-nal, így $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{g(x+y)g(0)}$, ahonnan felírható, hogy $f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)=g(x+y)g(0)=g(x)g(y)$. Logaritmálva kapjuk, hogy $\ln[g(x+y)g(0)]=\ln[g(x)g(y)]$, vagyis $\ln g(x+y)+\ln g(0)=$ $=\ln g(x)+\ln g(y)$, ahol bevezetve a $G(x)=\ln g(x)-\ln g(0)$ változócserét $G(x+y)=$ $=G(x)+G(y)$, így $G(x)=ax$, ezért $\frac{g(x)}{g(0)}=e^{ax}$, ahonnan $g(x)=\alpha\cdot e^{ax}$, ahol $\alpha=g(0)$ és $a=\ln g(1)-\ln g(0)$.

25. Példa: Melyek azok az $f,g,h\colon(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik a $g(x)+h(y)=f\left[(x^n+y^n)^{\frac{1}{n}}\right]$ egyenletet, minden $x,y\in\mathbb{R}_+$ és $n\in\mathbb{N}$ esetén?

Megoldás: Az $n=1$ esetén visszakapjuk a Pexider-függvényegyenletet, amelynek a megoldása $f(x)=ax+b$, $g(x)=ax+c$, $h(x)=ax+d$. Legyen $n\geq 2$. Helyettesítsük x-et $\sqrt[n]{x}$-el és y-t $\sqrt[n]{y}$-nal. Ekkor felírható, hogy $g(\sqrt[n]{x})+h(\sqrt[n]{y})=f(\sqrt[n]{x+y})$. Vezessük be a $F(x)=f(\sqrt[n]{x})$, $G(x)=g(\sqrt[n]{x})$, $H(x)=h(\sqrt[n]{x})$ változócserét. Ekkor kapjuk, hogy $F(x+y)=G(x)+H(y)$, amelynek a megoldása $F(x)=ax+b$, $G(x)=ax+c$, $H(x)=ax+d$, ezért $f(x)=ax^n+b$, $g(x)=ax^n+c$, $h(x)=ax^n+d$.

Szakirodalom

[1] Tuzson Zoltán: A Cauchy-függvényegyenlet és néhány rokon probléma, *Matlap* 2017/9
[2] http://www.msri.org/people/staff/levy/files/MCL/Efthimiou/100914book.pdf
[3] http://zeus.nyf.hu/ mattan/faliujsag/lajko/Main.pdf
[4] Mihai Onucu Drimbe: 200 *de ecuaţii funcţionale pe* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, Editura Gil, 2003