Függvényegyenletek 9-10. osztályban

Győry Ákos
Földes Ferenc Gimnázium
Miskolc

Az alábbi záródolgozatot az „Országosan kiemelkedő középiskolai matematikai tehetségek fejlesztésének lehetőségei és gyakorlati megvalósítása” elnevezésű továbbképzési tanfolyam (alapítási engedély nyilvántartási száma: 100 004/285/2011) miatt készítettem.

A témaválasztást az motiválta, hogy a hazai középiskolai matematikai versenyeken, valamint a Középiskolai Matematikai Lapok (KöMaL) pontversenyeiben gyakran fordulnak elő függvényekkel kapcsolatos feladatok. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak állandó résztvevői a függvényegyenletek, függvényegyenlőtlenségek.

A szerepeltetett feladatok között lesznek egyszerűbbek, de igyekeztem nehezebbeket is válogatni közéjük. A feladatokat több helyről gyűjtöttem, az adott feladat után mindig meg fogom adni a forrást.

A feladatok megoldásai nem feltételeznek komolyabb algebrai és analízisbeli tudást, így a 9. és a 10. évfolyam legjobbjai számára szakköri kereteken belül nyugodtan taníthatók.

1. Feladatok

1. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre teljesül, hogy minden x-re

$$2f(x+2) + f(4-x) = 2x + 7.$$

(Schultz János: 111 algebra feladat)

2. feladat. Az f függvényre tetszőleges x valós szám esetén teljesül, hogy

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

Milyen pozitív egész számokra igaz, hogy

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = 19n?$$

(NMMV, 2003, Némethy Katalin (Budapest))

3. feladat. Keressük meg azt az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre:

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

4. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre:

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

(András Szilárd, Kovács Lajos: Függvényegyenletek)

5. feladat. Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre érvényes az

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$$

összefüggés.

6. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely teljesíti az

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 2 - 2x$$

összefüggést.
(KöMaL, **B. 4567.**, Kovács Béla (Szatmárnémeti) feladata)

7. feladat. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az alábbi függvényegyenletet:

$$f\left(x + f(y)\right) + f\left(f(x) + y\right) = 2x + 2y.$$

Bizonyítsuk be, hogy minden x valós számra $f(2x) = 2f(x)$.
(KöMaL, **A. 450.**)

8. feladat. Oldjuk meg az alábbi - úgynevezett *Cauchy-féle* - függvény-egyenletet a racionális számok halmazán:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

9. feladat. Az $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ függvény olyan, hogy bármely x, y racionális számok esetén

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 80xy.$$

Adjuk meg az összes ilyen f függvényt.
(Schultz János: 111 algebra feladat)

10. feladat. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, mely teljesíti az alábbi egyenletet:

$$f(x + y) = f^2(x) + f^2(y).$$

11. feladat. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kielégíti az

$$f(x + y) = f(x)f(a - y) + f(y)f(a - x)$$

egyenletet (a egy rögzített valós szám). Bizonyítsuk be, hogy ha $f(0) = \frac{1}{2}$, akkor f konstans függvény.
(IV. Balkán Olimpia, 1987, Athén; András Szilárd, Kovács Lajos: Függvény-egyenletek) Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, mely kielégíti az alábbi egyenletet:

$$f(x + y) = f^2(x) + f^2(y).$$

12. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ injektív függvényt, amire tetszőleges a, b, c egészekre, amelyekre $a + b + c = 0$ teljesül, fennáll az

$$f^2(a) + f^2(b) + f^2(c) = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

egyenlőség.
(IMO, 2012, 4. feladat egy gyengített verziója)

13. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektív, nem folytonos függvényt, melyre minden x-re teljesül, hogy

$$f\left(x^{2012}\right) = x^{2013}.$$

2. Feladatok megoldásokkal

Az első három feladat a függvényegyenletek megoldásának egyik alapvető trükkjét, az alkalmas helyettesítést mutatja be, más eszközt nem igényelnek.

1. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre teljesül, hogy minden x-re

$$2f(x+2) + f(4-x) = 2x + 7.$$

(Schultz János: 111 algebra feladat)

Megoldás. Írjunk az egyenletbe x helyére először $(u-2)$-t:

$$2f(u) + f(6-u) = 2u + 3,$$

majd ebbe az egyenletbe u helyére $(6-v)$-t:

$$2f(6-v) + f(v) = 15 - 2v.$$

Így az alábbi egyenletrendszerhez jutottunk:

$$\left.\begin{aligned} 2f(x) + f(6-x) &= 2x + 3 \\ 2f(6-x) + f(x) &= 15 - 2x \end{aligned}\right\}.$$

Innen pár lépésben kapjuk, hogy:

$$f(x) = 2x - 3,$$

ami - behelyettesítés után látható módon - valóban megoldása a függvényegyenletnek.

■ ■ ■

2. feladat. Az f függvényre tetszőleges x valós szám esetén teljesül, hogy

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

Milyen pozitív egész számokra igaz, hogy

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = 19n?$$

(NMMV, 2003, Némethy Katalin (Budapest))

Megoldás. Végezzük el az $x = 1-u$ helyettesítést:

$$2f(1-u) + f(u) = (1-u)^2,$$

ahonnan kapjuk, hogy (u helyett visszatérve x-re):

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^2 - f(x)}{2}.$$

Ezt írjuk be az eredeti függvényegyenletbe:

$$2f(x) + \frac{(1-x)^2 - f(x)}{2} = x^2 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \frac{x^2+2x-1}{3}.$$

Behelyettesítéssel könnyen adódik, hogy ez valóban megoldása a függvény-egyenletnek.
Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned} & f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \\ &= \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2+2(1+2+\ldots+n)-n}{3} \\ &= \frac{2n^2+9n+1}{18} \cdot n \overset{\text{feltétel}}{=} 19n \quad \overset{n\neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad 2n^2+9n-341=0. \end{aligned}$$

Ennek megoldásai a 11 és a -15,5, de csak a 11 felel meg a feltételnek.

■ ■ ■

3. feladat. Keressük meg azt az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre:

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

Megoldás. Ha $u := \frac{x+1}{x}$ $(u \neq 1)$, akkor $x = \frac{1}{u-1}$, s így

$$f(u) = \frac{\left(\frac{1}{u-1}\right)^2 + 1}{\left(\frac{1}{u-1}\right)^2} + \frac{1}{\frac{1}{u-1}} = u^2 - u + 1,$$

vagyis a függvényegyenlet megoldása:

$$f(x) = x^2 - x + 1,$$

ahol $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, amiről behelyettesítéssel könnyen meg is győződhetünk.

■ ■ ■

Az alábbi példa az értelmezési tartomány fontosságára hívja fel a figyelmet, amit ha figyelmen kívül hagyunk, könnyen téves megoldáshoz juthatunk.

4. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre:

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

(András Szilárd, Kovács Lajos: Függvényegyenletek)

Megoldás. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $u := x + \frac{1}{x}$, akkor $x^3 + \frac{1}{x^3} = u^3 - 3u$. Így a függvényegyenlet a következő alakot ölti:

$$f(u) = u^3 - 3u,$$

amivel részben meg is oldottuk a problémát. Azért mondjuk, hogy részben, mert nem szabad megfeledkezni arról, hogy

$$u = x + \frac{1}{x} \in \left]-\infty; -2\right] \cup \left[2; \infty\right[,$$

vagyis a függvényegyenlet megoldása csak ezen a halmazon egyételmű, míg a $\left]-2; 2\right[\setminus \{0\}$ intervallumon nem meghatározott.
A teljes megoldás tehát:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & \text{ha } x \in \left]-\infty; -2\right] \cup \left[2; \infty\right[; \\ g(x), & \text{ha } x \in \left]-2; 2\right[\setminus \{0\}, \end{cases}$$

ahol $g : \left]-2; 2\right[\setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Az ellenőrzés könnyű rutinfeladat.

■ ■ ■

A következő feladat tanulsága, hogy az előforduló összes esetet pontosan meg kell vizsgálni, és alaposan ki kell fejteni.

5. feladat. Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre érvényes az

$$x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$$

összefüggés.

Megoldás. Bevezetve az $u := 1 - x$ jelölést kapjuk, hogy:

$$(1 - u)^2 f(1 - u) + f(u) = 2(1 - u) - (1 - u)^4. \qquad (*)$$

A feltétel értelmében

$$f(1-u) = 2u - u^4 - u^2 f(u),$$

amit írjunk be $(*)$-ba:

$$(1-u)^2 \left(2u - u^4 - u^2 f(u)\right) + f(u) = 2(1-u) - (1-u)^4.$$

Innen átrendezéssel az alábbi egyenlethez jutunk:

$$f(u)\left(u^2 - u + 1\right)\left(-u^2 + u + 1\right) = \left(1 - u^2\right)\left(u^2 - u + 1\right)\left(-u^2 + u + 1\right).$$

Mivel $u^2 - u + 1 > 0$ minden $u \in \mathbb{R}$ esetén, így egyszerűsíthetünk vele:

$$f(u)\left(-u^2 + u + 1\right) = \left(1 - u^2\right)\left(-u^2 + u + 1\right). \qquad (**)$$

A $-u^2 + u + 1$ polinom gyökei:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ha tehát $x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, akkor a függvényegyenlet megoldása:

$$f(x) = 1 - x^2.$$

Ellenkező esetben (azaz, ha a változó értéke $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vagy $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$), akkor $(**)$ automatikusan teljesül, vagyis f-re semmilyen feltételt nem szab, így ezt az esetet külön meg kell vizsgálnunk. Vegyük észre, hogy

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1,$$

azaz ha x az egyik, $1-x$ a másik. Mindez azt jelenti, hogy ha az egyik helyen felvett helyettesítési értéket önkényesen megválasztjuk (megtehetjük, hiszen $(**)$ nem ad rá feltételt), akkor a másik helyen felvett helyettesítési érték már egyértelműen meghatározott az eredeti függvényegyenlet szerint. Tegyük fel tehát, hogy

$$a := f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Ezt helyettesítsük be a feladatban megfogalmazott egyenletbe:

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + a = 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4,$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{-\sqrt{5}-5}{2}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot a$$

A függvényegyenlet megoldása tehát összefoglalva:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, \quad \text{ha } x\neq \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}; \\ a\in\mathbb{R}, \quad \text{ha } x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \\ \dfrac{-\sqrt{5}-5}{2}-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot a, \quad \text{ha } x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

■ ■ ■

Megjegyzés. Érdemes megvizsgálni, hogy mikor lesz a megoldás folytonos. Nyilván ez csakis akkor teljesülhet, ha a kapott $f(x)=1-x^2$ miatt:

$$a=1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Könnyű számolással leellenőrizhetjük, hogy ekkor a függvény az $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ helyen is folytonos lesz.

6. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{R}\setminus\{0;1\}\to\mathbb{R}$ függvényt, amely teljesíti az

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2-2x$$

összefüggést.
(KöMaL, **B. 4567.**, Kovács Béla (Szatmárnémeti) feladata)

Megoldás. Jelöljük el $\frac{x-1}{x}$-et u-val ($u\neq 0;1$). Ekkor egyrészt $\frac{1}{1-x}=\frac{u-1}{u}$, másrészt $x=\frac{1}{1-u}$, így a függvényegyenletünk átírt alakja:

$$f(u)+f\left(\frac{u-1}{u}\right)=\frac{2u}{u-1}.$$

Ha pedig $v:=\frac{1}{1-x}$ ($v\neq 0;1$), akkor $\frac{x-1}{x}=\frac{1}{1-v}$, illetve $x=\frac{v-1}{v}$, s ezáltal:

$$f\left(\frac{1}{1-v}\right)+f(v)=\frac{2}{v}.$$

A következő egyenletrendszerhez jutottunk tehát:

$$\left.\begin{aligned} f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)&=\frac{2x}{x-1} \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)&=\frac{2}{x} \end{aligned}\right\}.$$

Adjuk össze a két egyenletet:

$$2f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2x}{x-1}+\frac{2}{x},$$

ahonnan - felhasználva az eredeti függvényegyenletet - kapjuk, hogy

$$2f(x)+2-2x=\frac{2x}{x-1}+\frac{2}{x}.$$

Innen gyors átrendezéssel adódik, hogy a függvényegyenlet megoldása:

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1},$$

amiről behelyettesítéssel könnyen meg is győződhetünk.

■ ■ ■

7. feladat. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény teljesíti az alábbi függvényegyenletet:

$$f\left(x+f(y)\right)+f\left(f(x)+y\right)=2x+2y.$$

Bizonyítsuk be, hogy minden x valós számra $f(2x)=2f(x)$.
(KöMaL, **A. 450.**)

Megoldás. Írjunk y helyére x-et:

$$f\left(x+f(x)\right)+f\left(f(x)+x\right)=4x \quad\Longrightarrow\quad f\left(x+f(x)\right)=2x. \qquad (*)$$

Ide pedig x helyére helyettesítsünk először 0-t:

$$f\left(0+f(0)\right)=0\Longrightarrow f\left(f(0)\right)=0,$$

majd $f(0)$-t, és használjuk kétszer egymás után a nyert $f\left(f(0)\right)=0$ összefüggést:

$$f\left(f(0)+f\left(f(0)\right)\right)=2f(0) \quad\Longrightarrow\quad f\left(f(0)\right)=2f(0) \quad\Longrightarrow\quad f(0)=0. \qquad (**)$$

Célszerű ezek után az eredeti függvényegyenletben y helyére 0-t írunk:

$$f(x + f(0)) + f(f(x) + 0) = 2x \quad \stackrel{(**)}{\Longrightarrow} \quad f(x) + f(f(x)) = 2x.$$

Ezt az összefüggést jól tudjuk kamatoztatni, ha $(*)$-ban x-et $f(x)$-szel helyettesítjük:

$$f(f(x) + f(f(x))) = 2f(x) \quad \Longrightarrow \quad f(2x) = 2f(x),$$

amit éppen bizonyítani akartunk.

■ ■ ■

A következő két példa szorosan egymásra épül. Az elsőnek a megoldását érdemes megjegyezni, mert - mint látni fogjuk - Arany Dániel Matematikaversenyen is tűztek már ki olyan feladatot, melyet ennek ismeretében könnyű megoldani.

8. feladat. Oldjuk meg az alábbi - úgynevezett *Cauchy-féle* - függvényegyenletet a racionális számok halmazán:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Megoldás. Legyen először $x = y = 0$:

$$f(0) = 2 \cdot f(0) \quad \Longrightarrow \quad f(0) = 0.$$

Majd $y := -x$:

$$0 = f(0) = f(x) + f(-x) \quad \Longrightarrow \quad f(-x) = -f(x),$$

ami azt jelenti, hogy a keresett függvény *páratlan*.
Teljes indukcióval gyorsan igazolható, hogy

$$f(n \cdot x) = n \cdot f(x),$$

ahol $n \in \mathbb{N}$. Sőt, felhasználva a függvény páratlanságát:

$$f(z \cdot x) = z \cdot f(x), \tag{$*$}$$

ahol $z \in \mathbb{Z}$.
Eddig még nem használtuk ki azt a tényt, hogy x racionális. Legyen először $x = \frac{1}{k}$ alakú, ahol $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$f(1) = f\left(k \cdot \frac{1}{k}\right) \stackrel{(*)}{=} k \cdot f\left(\frac{1}{k}\right) \quad \Longrightarrow \quad f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} \cdot f(1). \tag{$**$}$$

Majd végezetül legyen $x = \frac{m}{n}$ alakú, ahol $m \in Z$, $n \in \mathbb{N}^+$:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) \stackrel{(*)}{=} m \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) \stackrel{(**)}{=} \frac{m}{n} \cdot f(1),$$

vagyis a függvényegyenlet általános megoldása:

$$f(x) = f(1) \cdot x$$

ahol $x \in \mathbb{Q}$. Az ellenőrzés pillanatok alatt megy.

■ ■ ■

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy ha a Cauchy-féle függvényegyenletnek $\mathbb{R}$ fölött keressük a megoldását a folytonos függvények körében, akkor az ugyanaz lesz, mint azt láttuk a fentiekben. Ám ha elhagyjuk a folytonossági kívánalmat, akkor további megoldások is vannak, aminek a bizonyítása komolyabb matematikai alapokat feltételez.

9. feladat. Az $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ függvény olyan, hogy bármely x, y racionális számok esetén

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 80xy.$$

Adjuk meg az összes ilyen f függvényt.
(Schultz János: 111 algebra feladat)

Megoldás. Vegyük észre, hogy az egyenlet egy - ún. *partikuláris* - megoldása:

$$f_0(x) := 40x^2.$$

Valóban megoldás, hiszen:

$$f_0(x + y) \stackrel{\text{def}}{=} 40(x + y)^2 = 40x^2 + 40y^2 + 80xy \stackrel{\text{def}}{=} f_0(x) + f_0(y) + 80xy.$$

Ezek után definiáljuk a következő függvényt:

$$g(x) := f(x) - f_0(x) = f(x) - 40x^2.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} g(x + y) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x + y) - 40(x + y)^2 \stackrel{\text{feltétel}}{=} \\ &= f(x) + f(y) + 80xy - 40x^2 - 40y^2 - 80xy \\ &= f(x) - 40x^2 + f(y) - 40y^2 \stackrel{\text{def}}{=} g(x) + g(y), \end{aligned}$$

azaz $g(x)$-re fennáll a

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

Cauchy-egyenlet, aminek a megoldása az előző feladat alapján:

$$g(x) = g(1) \cdot x. \tag{$*$}$$

Figyelembe véve $g(x)$ definícióját ez $f(x)$-re nézve a következőket jelenti:

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} g(x) + 40x^2 \overset{(*)}{=} g(1) \cdot x + 40x^2 \overset{\text{def}}{=} (f(1) - 40)\, x + 40x^2,$$

vagyis a függvényegyenlet megoldása:

$$f(x) = (f(1) - 40)\, x + 40x^2,$$

amit gyors számolással ellenőrizhetünk.

■ ■ ■

Megjegyzés. Az előző feladat alapján már könnyedén megoldható az alábbi feladat, melyet az Arany Dániel Matematikai Tanulóversenyen tűztek ki (2011/2012, kezdők, III. kategória, döntő):
„Legyen f a racionális számok halmazán értelmezett, valós értékű függvény. Tudjuk, hogy tetszőleges x, y racionális számokra teljesül az

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$$

egyenlőség. Adjuk meg az összes ilyen tulajdonságú f függvényt!"

A következő példa látszólag hasonlatos a Cauchy-féle függvényegyenlethez, sőt első körben nehezebbnek tűnik annál, de mint látni fogjuk, ebben nagyot tévedünk.

10. feladat. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, mely teljesíti az alábbi egyenletet:

$$f(x + y) = f^2(x) + f^2(y).$$

Megoldás. Tegyük fel, hogy $x = y = 0$. Ekkor:

$$f(0) = 2f^2(0) \quad \Longrightarrow \quad f(0)\,(2f(0) - 1) = 0,$$

ahonnan azt kapjuk, hogy $f(0) = 0$ vagy $f(0) = \frac{1}{2}$.
1. eset: $f(0) = 0$. Válasszuk y-t nullának:

$$f(x) = f^2(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x)\,(f(x) - 1) = 0,$$

azaz $f(x)$ értéke minden valós x-re vagy 0 vagy 1. Amennyiben valamely x_0-ra $f(x_0) = 1$ lenne, akkor $x = y = x_0$ választással élve a következőt kapnánk:

$$f(2x_0) = 2f^2(x_0) = 2,$$

ami ellentmond annak, hogy f értékkészlete a $\{0; 1\}$ halmaz, mint azt láttuk. Ekkor tahát a függvényegyenlet megoldása:

$$f(x) = 0$$

minden valós x-re.
2. eset: $f(0) = \frac{1}{2}$. Éljünk ismét az $y = 0$ választással:

$$f(x) = f^2(x) + \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}$$

bármely $x \in \mathbb{R}$-re.
Mindkét megoldás jó, ami azonnal adódik behelyettesítés után.

■ ■ ■

Az alábbi feladat nem csak amiatt hasznos, mert maga a megoldása sem túl egyszerű, hanem azért is, mert alkalmat ad arra, hogy a benne szereplő feltételt megvizsgálva általánosítsunk.

11. feladat. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kielégíti az

$$f(x + y) = f(x)f(a - y) + f(y)f(a - x)$$

egyenletet (a egy rögzített valós szám). Bizonyítsuk be, hogy ha $f(0) = \frac{1}{2}$, akkor f konstans függvény.
(IV. Balkán Olimpia, 1987, Athén; András Szilárd, Kovács Lajos: Függvényegyenletek)

Megoldás. Feltéve, hogy $x = y = 0$:

$$f(0) = f(0)f(a) + f(0) + f(a) = 2f(0)f(a) \quad \stackrel{f(0)\neq 0}{\Longrightarrow} \quad f(a) = \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Legyen ezek után $y = a - x$:

$$f(a) = f^2(x) + f^2(a - x) \quad \stackrel{(*)}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{2} = f^2(x) + f^2(a - x). \qquad (**)$$

Majd $y := 0$ helyettesítéssel:

$$f(x) = f(x)f(a) + f(0)f(a - x) \quad \stackrel{(*)+\text{feltétel}}{\Longrightarrow} \quad f(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(a - x),$$

ahonnan azt kapjuk, hogy

$$f(x) = f(a - x). \qquad (***)$$

Ezt összevetve $(**)$-gal az alábbi eredményre jutunk:

$$\frac{1}{2} = 2f^2(x) \quad \Longrightarrow \quad f^2(x) = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \pm\frac{1}{2}. \qquad (****)$$

Az eredeti függvényegyenlet $(***)$ miatt az alábbi alakot ölti:

$$f(x + y) = 2f(x)f(y).$$

Tegyük fel, hogy $x = y$, s vezessük be az $u := 2x = 2y$ jelölést, így:

$$f(u) = 2f^2\left(\frac{u}{2}\right) \overset{(****)}{\Longrightarrow} f(u) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

azaz a függvényegyenlet megoldása:

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, amit behelyettesítve azonnal ellenőrizhetünk.

■ ■ ■

Megjegyzés. Érdemes megvizsgálni a feladat feltételét. Amennyiben nem írjuk elő, hogy $f(0) = \frac{1}{2}$, hanem általánosan mondjuk $f(0) =: b \in \mathbb{R}$, úgy a következő a helyzet:

- ha $b \neq 0$, akkor be lehet látni, hogy b *értéke szükségképpen* $\frac{1}{2}$, és innentől a megoldás már ismert;
- ha $b = 0$, akkor megmutatható, hogy *végtelen sok megoldása van a függvényegyenletnek.*

12. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ injektív függvényt, amire tetszőleges a, b, c egészekre, amelyekre $a + b = c$ teljesül, fennáll az

$$f^2(a) + f^2(b) + f^2(c) = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

egyenlőség.
(IMO, 2012, 4. feladat egy gyengített verziója)

Megoldás. (Nagy Róbert megoldása nyomán) Éljünk pár helyettesítéssel:

- $a = b = c = 0$:

$$3f^2(0) = 6f^2(0) \quad \Longrightarrow \quad f(0) = 0.$$

- $a = b = 1$, $c = 2$:

$$2f^2(1) + f^2(2) = 2f^2(1) + 4f(1)f(2) \quad \Longrightarrow \quad f(2)\left(f(2) - 4f(1)\right) = 0,$$

ahonnan az injektivitás miatt kapjuk, hogy

$$f(2) = 4f(1).$$

- $a = b = 2$, $c = 4$:

$$\begin{aligned} &2f^2(2) + f^2(4) = 2f^2(2) + 4f(2)f(4) \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad f(4)\left(f(4) - 4f(2)\right) = 0 \quad \stackrel{\text{injektivitás}}{\Longrightarrow} \\ &\Longrightarrow \quad f(4) = 4f(2) \quad \Longrightarrow \quad f(4) = 16f(1). \end{aligned}$$

- $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$:

$$\begin{aligned} &f^2(1) + f^2(2) + f^2(3) = 2f(1)f(2) + 2f(2)f(3) + 2f(3)f(1) \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad \left(f(3) - f(1)\right)\left(f(3) - 9f(1)\right) = 0 \quad \stackrel{\text{injektivitás}}{\Longrightarrow} \quad f(3) = 9f(1). \end{aligned}$$

Foglaljuk össze, hogy mit kaptunk:

$$f(0) = 0^2 \cdot f(1), \quad f(2) = 2^2 \cdot f(1), \quad f(3) = 3^2 \cdot f(1).$$

Ezek alapján a sejtésünk:

$$f(n) = n^2 \cdot f(1) \quad (\text{ahol } n \in \mathbb{N}),$$

és $f(1) \neq 0$. Ez valóban így van, amiről teljes indukcióval meg is győződhetünk, ami kb. egyoldalas számolást, de semmiféle trükköt nem igényel.

■ ■ ■

És legvégül - levezetésképpen - nézzünk meg egy első látásra bonyolult, de - mint azt látni fogjuk - roppant egyszerű feladatot. Ez megtanít arra, hogy ne essünk ész nélkül neki a megoldásnak.

13. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektív, nem folytonos függvényt, melyre minden x-re teljesül, hogy

$$f\left(x^{2012}\right) = x^{2013}.$$

Megoldás. Ha $x = 1$, akkor az $f(1) = 1$, ha pedig $x = -1$, akkor az $f(1) = -1$ összefüggést kapjuk, ami azt jelenti, hogy f nem lenne egyértelmű, azaz ilyen függvény nem létezik. A megkötések nyilván a figyelem elterelésére szolgáltak.

■ ■ ■

Miskolc, 2014. május 3.

Győry Ákos