Komplex függvények deriválása

Egy f komlex függvény deriválható a z_0 helyen, ha az

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \tag{1}$$

határérték létezik. Ilyenkor az $f'(z_0)$ komplex számot a f függvény z_0-pontbeli deriváltjának nevezzük.

Tétel: Legyen $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ egy komplex függvény. f pontosan akkor deriválható a $z_0 = x_0 + iy_0$ helyen, ha az (x_0, y_0) pontban u és v kielégíti a következő parciális differenciálegyenleteket:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{(Cauchy-Riemann egyenletek).}$$

Ha f deriválható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban, akkor

$$f'(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0).$$

Feladatok:

1. Írjuk fel a következő komplex függvényeket $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ alakban. Melyik hol deriválható, ott mi a derivált?

   a.) $f(z) = z^2$ b.) $f(z) = |z|$ c.) $f(z) = \bar{z}$ d.) $f(z) = e^z$

2. Válasszuk meg a $v(x,y)$ függvényeket úgy, hogy a követekező f függvények deriválhatóak legyenek:

   a.) $f(x+iy) = x + iv(x,y)$ b.) $f(x+iy) = 2xy + iv(x,y)$
   c.) $f(x+iy) = x^2 - y^2 + iv(x,y)$ d.) $f(x+iy) = e^x \sin y + iv(x,y)$

3. Válasszuk meg a $u(x,y)$ függvényeket úgy, hogy a követekező f függvények deriválhatóak legyenek:

   a.) $f(x+iy) = u(x,y) + 2ixy$ b.) $f(x+iy) = u(x,y) + e^x \sin(y)i$
   c.) $f(x+iy) = u(x,y) + (3x^2y - y^3)i$ d.) $f(x+iy) = u(x,y) + 3x^2yi$

Megoldások:

1. a.) $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$, f mindenhol deriválható $f'(z) = 2z$
   b.) $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y) = 0$, f sehol sem deriválható
   c.) $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$ f sehol sem deriválható
   d.) $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$ f mindenhol deriválható $f'(z) = e^z$

2. a.) $v(x,y) = y$ b.) $v(x,y) = y^2 - x^2$ c.) $v(x,y) = 2xy$ d.) $v(x,y) = e^x \cos y$

3. a.) $u(x,y) = x^2 - y^2$ b.) $u(x,y) = -e^x \cos(y)$ c.) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ d.) nincs ilyen $u(x,y)$.