Nagy András

Számelméleti feladatgyűjtemény

2009.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Annak ellenére, hogy a számelmélet csak a XVII-XVIII. században vált önálló kutatási területté, mégis azt kell mondani, hogy ez a matematika egyik legrégebbi ága.

Eredete a világ minden részén visszanyúlik a számmisztikába. Pitagorasz és tanítványai a világ örök igazságait a számok közötti törvényekben vélték felfedezni. Szerintük maga a természeti világ a számoknak köszönheti létrejöttét és létezését is. Ezért kezdték el tanulmányozni a számokat, ezzel megalapítva a matematika egyik legszebb ágát. Az ókori matematikusok is, mint például Eukleidész vagy Eratoszthenész is foglalkoztak számelméleti problémákkal. A mai számelmélet lényegében a számokról és számolásról szerzett évszázados tapasztalatok tudományos eredménye.

A számelmélet az egész számok tulajdonságaival, szabályszerűségeivel vagy néha pont a szabályszerűségek hiányával foglalkozik.

Az számelméleti feladatok és megoldási módszereik nagyon sokfélék, változatosak. Az egyszerű feladatok szinte játékos módon megoldhatók, ugyanakkor sok feladat megoldásához előre nem adható algoritmus, találékonyságra, ötletekre van szükség a probléma magoldásához. Így egyes területei jól ismertek, míg mások olyan problémákat tartalmaznak, melyek ma is feladatot adnak a matematikusoknak.

Erdős Pál: *„A számelmélet azért is érdekes fejezete a matematikának, mert olyan problémákat fogalmaz meg, amit egy csecsemő is képes megérteni, de még a legnagyobb matematikus sem tud megoldani.”*

A fenti idézet is jól mutatja a számelmélet „kettősségét”, ami annak könnyű és egyúttal nehéz oldalára utal.

A könnyebb feladatok megoldása viszonylag kevés előismeretre épül, megoldási módszerük egyszerű. Ezek megoldásához elég lehet az alapműveletek, oszthatósági szabályok ismerete. Tárgya a kézzelfogható egész (természetes) számok, sok esetben nem kíván komolyabb elvonatkoztatást. „Olyan nagy számokról is tudok valami biztosat állítani, amivel számolni sem tudok”.

A feladatgyűjtemény összeállításakor elsődleges célom az volt, hogy segítse a középszintű érettségire való felkészülést. Adhat ötleteket diáknak és tanárnak egyaránt, de arra is alkalmas, hogy a diákok önállóan használják.

Ez utóbbi célt szolgálja a részletesen kidolgozott megoldásokat tartalmazó rész.

1. Feladatok

1.1. Természetes számok

1.1.1. Írjuk fel a három darab

a) kettes; b) hármas; c) ötös;

számjegy segítségével felírható legnagyobb természetes számot!

1.1.2. Szorozzuk össze az első

a) 10; b) 20; c) 50; d) 100;

pozitív természetes számot. Hány nulla áll a szorzat végén?

1.1.3. Az 1000! végén hány 0 áll?

1.1.4. Írjuk fel azon számok általános alakját, amelyek

a) 6-tal osztva 5-öt adnak maradékul;

b) 7-tel osztva 3-at adnak maradékul;

c) 15-tel osztva 8-at adnak maradékul;

d) 11-gyel oszthatók;

e) 19-cel osztva 10-et adnak maradékul;

f) páratlan számok.

1.1.5. Írjunk fel általános alakban öt egymást követő

a) természetes számot;

b) páros számot;

c) páratlan számot.

1.1.6. Írjunk fel általános alakban három egymást követő számot, melyek

a) a három többszörösei;

b) ötös maradéka 2;

c) héttel osztva 4-et adnak maradékul.

1.1.7. Soroljuk fel az összes olyan természetes számot, melyre két egymást követő természetes szám szorzata végződhet!

1.1.8. Bizonyítsuk be, hogy

a) $4n^2+1$;

b) $3n^3+2n^2+n+1$

egyetlen $n \in \mathbb{N}$ esetén sem lesz két egymást követő természetes szám szorzata!

1.1.9. Az alábbi kifejezések közül melyek párosak és melyek páratlanok, ha a kifejezésekben szereplő betűk természetes számok?

a) $4a+6$; b) $10a–9$; c) $2a–4b$; d) $4a+2b+5$;

e) $2006a+6b–2009$; f) $(a+b)^2+a^2–b^2$; g) $(2a-b)^2–b(b+2)$; h) $(4a+1)^2+(4a-1)^2$.

1.1.10. Páros vagy páratlan számot kapunk, ha az első száz prímszámot

a) összeszorozzuk;

b) összeadjuk?

1.2. Oszthatóság

1.2.1. A következő számok közül melyek oszthatók 2-vel, 3-mal, 5-tel, 6-tal illetve 11-gyel?

a) 352; b) 187565; c) 32346714;

d) 3300540; e) 2342625; f) 177147.

1.2.2. A következő számok közül melyek oszthatók 4-gyel, 8-cal, 9-cel, 12-vel illetve 25-tel?

a) 93366; b) 28400; c) 50820;

d) 4782969; e) 19800; f) 64512.

1.2.3. Határozzuk meg az alábbi példákban szereplő ismeretlen számjegyeket úgy, hogy a feltételek teljesüljenek:

a) $9|\overline{2a3}$; b) $3|\overline{5b31}$; c) $6|\overline{6b42}$; d) $5|\overline{4x3y}$;

e) $12|\overline{5x3y4}$; f) $45|\overline{6x53y}$; g) $30|\overline{52x3y}$; h) $15|\overline{3x4y}$.

1.2.4. Írjunk az x helyére 20-nál kisebb természetes számot úgy, hogy az oszthatóság teljesüljön!

a) $3|x+531$; b) $12|420-x$; c) $3|19+x$;

d) $6|421+x$; e) $20|749-x$; f) $9|5439-x$;

1.2.5. Ha $45|A = \overline{3a72b}$ és $36|B = \overline{3c72d}$, akkor lehetséges-e, hogy $A = B$?

1.2.6. Milyen számjegyeket írhatunk x helyére, hogy a 137 és a $\overline{34x}$ számok összege osztható legyen 9-cel?

1.2.7. Melyek azok a kétjegyű $\overline{ab}$ számok, melyekre:

a) $\overline{ab}+\overline{ba} = 88$;

b) $\overline{ab}-\overline{ba} = 72$?

1.2.8. Határozzuk meg az alábbi számok 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 9-cel vett osztási maradékait!

a) 7; b) 14; c) 216; d) 1848;

e) 2009; f) 521966; g) 123456; h) 654321.

1.2.9. Legyen a=234567, b=5032 és c=12345. Határozzuk meg a következő számok 2-es, 3-as, 5-ös és 11-es maradékait, a műveletek elvégzése nélkül!

a) $a+b$; b) $a+b+c$; c) $c-b$;

d) $3\cdot b$; e) $a\cdot b$; f) $b\cdot c$.

1.2.10. Az n természetes szám 7-tel osztva 5 maradékot ad. A k természetes szám 7-tel osztva 3 maradékot ad. Mennyi maradékot ad 7-tel osztva:

a) $n+k$; b) $n-k$; c) $2\cdot n+3\cdot k$;

d) $5\cdot n-4\cdot k$; e) $n\cdot k$; f) $n\cdot(k+3)$.

1.2.11. Mennyi maradékot kapunk, ha az alábbi számokat elosztjuk 3-mal, ha a kifejezésben szereplő betűk természetes számok?

a) $3\cdot a+12$; b) $6\cdot a+20$; c) $9\cdot a+3\cdot b+2$;

d) $6\cdot a+3\cdot b-1$; e) $(3\cdot a+b)^2-b(b+12)$; f) $(2\cdot a+3\cdot b)^2+a(2\cdot a-3)$.

1.2.12. Mi az utolsó számjegye az alábbi számoknak?

a) 2^{100}; b) 3^{100}; c) 4^{112}; d) 5^{2009};

e) 6^{123}; f) 7^{844}; g) 8^{421} h) 9^{127}.

1.2.13. Mi az utolsó számjegye az alábbi összegeknek?

a) $2^{20}+3^{20}$; b) $4^{12}+5^{12}+6^{12}$;

c) $11^{11}+22^{22}+33^{33}$; d) $123^{123}+124^{124}+125^{125}$;

e) $1234^{4321}+4321^{1234}$.

1.2.14. Bizonyítsuk be, hogy:

a) $10|37^{37}-23^{23}$;

b) $10|1526^{19}+2^{58}$!

1.2.15. Igaz-e, hogy:

a) $9|10^{2009}+8$; b) $3|10^{2009}-1$;

c) $6|10^{31}+2$; d) $25|10^{11}-5^2$;

e) $10^{52}+8$ osztható 6-tal, 8-cal, 9-cel, 24-gyel és 72-vel?

1.2.16. Az alábbi természetes számok közül melyek a prímek?

a) 1;	b) 2;	c) 121;	d) 203;	e) 361;	f) 348;
g) 897;	h) 991;	i) 1109;	j) 1237;	k) 1526;	l) 1703;
m) 1849;	n) 2009;	o) 3673;	p) 7741;	q) 12563;	r) 26657.

1.2.17. Keressük meg a 100-nál nem nagyobb természetes számok között a prímszámokat!

1.2.18. Bizonyítsuk be, hogy $2009^{2008}+24$ összetett szám!

1.2.19. Bizonyítsuk be, hogy $5^{2009}+7$ nem prímszám!

1.2.20. Igaz-e, hogy a $10^{2009}+11$ prímszám?

1.2.21. Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, melyre a $\frac{p^2-1}{p-1}$ tört értéke is prímszám!

1.2.22. Igazoljuk, hogy

a) $8|(2k+1)^2-1$, ha $k\in \mathbb{N}$;

b) $133|11^{n+2}+12^{2n+1}$, ha $n\in \mathbb{N}$.

1.2.23. Igazoljuk, hogy négy, egymást követő természetes szám összege páros szám!

1.2.24. Bizonyítsuk be, hogy

a) három egymást követő pozitív egész szám szorzata osztható 6-tal;

b) négy egymást követő pozitív egész szám szorzata osztható 24-gyel.

1.2.25. Bizonyítsuk be, hogy két egymás utáni páros szám szorzata osztható 8-cal.

1.2.26. Bontsuk prímtényezőkre az alábbi számokat!

a) 340; b) 353; c) 2009; d) 2048; e) 2310;
f) 2401; g) 2539; h) 3400; i) 6912; j) 10000;
k) 8505; l) 12465; m) 32316; n) 99999; o) 1 millió.

1.2.27. Hogyan dönthető el egy természetes szám prímtényezős alakjából, hogy osztható-e:

a) 8-cal; b) 9-cel; c) 10-zel; d) 15-tel?

1.2.28. Igaz-e egy $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}^+$ esetén, hogy:

a) ha n osztója k^2-nek, akkor n osztója k-nak is;
b) ha n osztója k-nak, akkor osztója k^2-nek is;
c) ha n osztója k-nak, akkor osztója k^m-nek is, ahol $m \in \mathbb{N}^+$?

1.2.29. Az A és B számok prímtényezős felbontása: $A = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^3$ és $B = 2^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13$. Adjuk meg $A \cdot B$ prímtényezős felbontását!

1.2.30. Tudjuk, hogy $A = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot x$ és $5|A$.

a) Mi állhat az x helyén?
b) Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik biztosan igaz, melyik lehetséges és melyik nem lehetséges:

i) $6|A$; ii) $15|A$; iii) $50|A$; iv) $55|A$.

1.2.31. Tudjuk, hogy $B = 2 \cdot 3^x \cdot 52 \cdot 11$ és $9|B$.

a) Mi állhat az x helyén?
b) Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik biztosan igaz, melyik lehetséges és melyik nem lehetséges:

i) $18|B$; ii) $27|B$; iii) $36|B$; iv) $99|B$.

1.3. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

1.3.1. Határozzuk meg a következő számpárok (kifejezések) legnagyobb közös osztóit, ahol a betűk prímszámokat jelölnek!

a) (55;75); b) (125;225); c) (36;96); d) (128;512);

e) (576;1053); f) (629;799); g) (3660;1999); h) (2006;2009);

i) $(2^3\cdot 3^2;2\cdot 3^5)$; j) $(2\cdot 5^3\cdot 7^3;2^7\cdot 5^2\cdot 7)$; k) $(5^3\cdot 7;5^5\cdot 11^2)$; l) $(11^{11};7\cdot 13^7)$;

m) $(p^3q^2;pq^4)$; n) $(pqr^3;p^3q^2r)$; o) $(p^2r^3;p^3q^2)$; p) $(p^{11};qr^7)$.

1.3.2. Mit jelent, ha $(a;b) = b$, például (11;187) = 11?

1.3.3. Határozzuk meg a következő számhármasok (kifejezések) legnagyobb közös osztóit, ahol a betűk prímszámokat jelölnek!

a) (24;45;55); b) (100;325;725); c) (17;34;263);

d) (187;323;391); e) (12;50;56); f) (8;24;56);

g) $(2^3\cdot 3^4\cdot 11;3^2\cdot 11^2;3^7\cdot 7)$; h) $(2\cdot 3\cdot 5;3\cdot 5\cdot 7;5\cdot 7\cdot 11)$; i) $(7^2\cdot 13^2;13^9\cdot 17;3^4\cdot 7)$;

j) $(p^3q;pq^2;pqr^2)$; k) $(q^3r^4;pq^2r;q^2r^2)$; l) $(pq^4;p^2q^2;p^2qr)$.

1.3.4. Írjunk olyan számpárokat, ahol:

a) $(a;b) = 60$; b) $(a;b) = 19$; c) $(a;b) = 2^2\cdot 3\cdot 5^3$.

1.3.5. Mit írhatunk a betűk helyére, hogy az állítás igaz legyen?

$a = 2^3\cdot 3^5\cdot 5\cdot 7\cdot 11^2$, $b = 2^x\cdot 3^y\cdot 5^z\cdot 7^u\cdot 11^v$, $(a;b) = 2^3\cdot 3^2\cdot 7^1$.

1.3.6. Írjuk fel egy lépésben a tört tovább nem egyszerűsíthető alakját!

a) $\frac{840}{1800}$; b) $\frac{535}{1819}$; c) $\frac{3857}{6061}$; d) $\frac{7395}{9860}$; e) $\frac{45}{56}$.

1.3.7. A következő számok között keressünk relatív prímpárokat!

3; 4; 6; 10; 15; 21; 28; 35; 42; 63.

1.3.8. Írjunk fel olyan számpárokat, melyek relatív prímek!

1.3.9. Az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis?

a) Ha egy számpár tagjai különböző prímszámok, akkor relatív prímek is.

b) Ha egy számpár tagjai különböző összetett számok, akkor relatív prímek is.

c) Ha egy számpár egyik tagja prím, másik tagja összetett, akkor relatív prímek.

1.3.10. Döntsük el a következő számhármasokról, hogy melyek relatív prímek!

a) (11;22;33); b) (258;124;73); c) (1024;256;487).

1.3.11. Írjunk fel három olyan számot, melyek relatív prímek, de páronként nem relatív prímek!

1.3.12. Határozzuk meg a következő számpárok (kifejezések) legkisebb közös többszöröseit, ahol a betűk prímszámokat jelölnek!

a) [8;28]; b) [45;150]; c) [105;180]; d) [348;476];

e) [475;570]; f) [1840;3400]; g) [2000;2010]; h) [2006;2009];

i) $[2^3\cdot3^2;2\cdot3^5]$; j) $[2\cdot5^3\cdot7^3;2^7\cdot5^2\cdot7]$; k) $[5^3\cdot7;5^5\cdot11^2]$; l) $[11^{11};7\cdot13^7]$;

m) $[p^3q^2;pq^4]$; n) $[pqr^3;p^3q^2r]$; o) $[p^2r^3;p^3q^2]$; p) $[p^{11};qr^7]$.

1.3.13. Mit jelent, ha $[a;b] = b$, például [11;187] = 187?

1.3.14. Írjunk olyan számpárokat, ahol:

a) $[a;b] = 30$; b) $[a;b] = 29$; c) $[a;b] = 2^2\cdot5\cdot7^2$.

1.3.15. Mit írhatunk a betűk helyére, hogy az állítás igaz legyen?

$a = 2^3\cdot3^2\cdot7\cdot11$, $b = 2^x\cdot3^y\cdot5^z\cdot7^u\cdot11^v$, $[a;b] = 2^3\cdot3^4\cdot5^2\cdot7^2\cdot11^4$.

1.3.16. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\frac{1}{24}+\frac{1}{72}$; b) $\frac{1}{7920}+\frac{1}{6300}$; c) $\frac{1}{840}+\frac{1}{1575}-\frac{1}{1400}$

1.3.17. Határozzuk meg b értékét, ha $a = 720$, $(a;b) = 60$ és $[a;b] = 2160$!

1.3.18. Határozzuk meg b prímtényezős alakját, ha $a = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3$, $(a;b) = 2^3 \cdot 5^2$ és $[a;b] = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$!

1.3.19. Adjuk meg az összes olyan háromjegyű számot, melyek oszthatók 20-szal és 18-cal is!

1.3.20. Melyik lehet az a négyjegyű természetes szám, amely 5-tel osztva 4-et, 6-tal osztva 5-öt, 7-tel osztva 6-ot 8-cal osztva 7-et és 9-cel osztva 8-cat ad maradékul?

1.3.21. Egy országút egyik oldalát fasor szegélyezi. A fák 12 méterenként állnak. Az út másik oldalán villanyoszlopok állnak, 75 méterenként. Egy bizonyos helyen egymással szemben áll egy fa és egy oszlop. Milyen távolságban lesz ismét egymással szemben egy fa és egy oszlop?

1.3.22. Egy buszmegállóban 8 óra 20 perckor áll meg az A jelű és a B jelű busz. Az A jelű 12 percenként, míg a B jelű 20 percenként közlekedik. Hány órakor lesz ismét mindkét busz a megállóban? A délelőtt folyamán ez még hányszor fordul elő?

1.3.23. Egy kikötőben 2009. január 3-án együtt van három hajó. Az első hajó négyhetenként, a második nyolchetenként, a harmadik tizenkéthetenként tér vissza a kikötőbe. Találkoznak-e még mind a hárman ebben az évben a kikötőben? Mennyi időnként lesz mindhárom hajó a kikötőben?

1.3.24. Egy iskolának 1000-nél kevesebb tanulója van. Ha hatosával, hetesével, nyolcasával vagy tízesével állnak sorba, akkor az utolsó sorban minden esetben 3 tanuló áll. Hány diák jár az iskolába?

1.3.25. Matrózok, akik jó barátok voltak, egy szigeten kincset találtak: 48 egyforma ezüst tálkát, 72 egyforma ezüst hamutartót és 100 egyforma igazgyöngyöt. Nagy szerencséjük volt, mert éppen annyian voltak, hogy mind a háromféle ajándékon igazságosan tudtak osztozni. Hányan lehettek?

1.4. Diofantoszi problémák

1.4.1. Oldjuk meg a következő egyenleteket, ha az alaphalmaz a $\mathbb{Z}$!

a) $7x = 8$; b) $3x = 21$; c) $7x-14 = 0$;

d) $16x+320 = 0$; e) $16x-30 = 0$; f) $5-9x = -13$.

1.4.2. Oldjuk meg a következő diofantoszi egyenleteket!

a) $2x+3y = 13$; b) $3x+7y = 21$; c) $8x-14y = 21$;

d) $3x+6y = 12$; e) $2(3x-y) = 0$.

1.4.3. Egy országban csak 5 Ft-os és 9 Ft-os érmék vannak.

a) Kerülhet-e egy termék 101 forintba?

b) Hányféleképp fizethető ki az a termék?

c) Létezik-e olyan termék, melynek az ára természetes szám, és nem fizethető ki e kétféle pénzérmével?

1.4.4. Melyek azok a 3-mal osztható természetes számok, melyek 11-gyel osztva 2 maradékot adnak?

1.4.5. Melyek azok a természetes számok, melyek hármas maradéka 2 és ötös maradéka 4?

1.4.6. Melyek azok a természetes számok, melyek négyes maradéka 3 és hatos maradéka szintén 3?

1.4.7. Melyek azok a természetes számok, melyek négyes maradéka 3 és tízes maradéka 2?

1.4.8. Két egész szám összege 8.

a) Melyek ezek a számok?

b) Hogyan változik a megoldás, ha csak a természetes számok között vizsgálódunk?

1.4.9. Egy jármű kiállításon személygépkocsikat és motorkerékpárokat mutattak be. Egy látogató összesen 302 darab kereket számolt meg. Hány motorkerékpárt állítottak ki?

1.4.10. Egy zsák búza 72 kg, egy zsák árpa 56 kg, van 752 kg gabonánk, ebből hány zsák a búza és hány zsák az árpa?

1.4.11. Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek oldalai cm-ben mérve egész számok és egyik befogója:

a) 12 cm; b) 13 cm; c) 14 cm?

1.4.12. Van-e olyan derékszögű háromszög, melynek oldalai egész számok, két oldala páratlan és egy oldala páros?

1.4.13. Van-e olyan derékszögű háromszög, melynek oldalai egész számok, két oldala páros és harmadik oldala páratlan?

1.4.14. Van-e olyan derékszögű háromszög, melynek mindhárom oldala páratlan szám?

1.4.15. Van-e olyan derékszögű háromszög, melynek mindhárom oldala páros szám?

1.4.16. Hány olyan egymással nem egybevágó téglalap van, melynek oldalainak mérőszáma centiméterben mérve egész szám és

a) kerülete 30 cm; b) területe 30 cm^2?

1.4.17. Van-e olyan konvex sokszög, melynek

a) 172 átlója van?

b) 252 átlója van?

c) 102-vel több átlója van, mint oldala?

d) 119-cel több átlója van, mint oldala?

e) ugyanannyi oldala van, mint átlója?

f) átlói számának és oldalai számának szorzata 98?

1.5. Számrendszerek

1.5.1. Írjuk át tízes számrendszerbe az alábbi számokat!

a) 1011101_2; b) 10101_2; c) 1000_2; d) 1111_2;

e) 1203_4; f) 12321_4; g) 1000_4; h) 3333_4;

i) 1302_5; j) 4210_5; k) 1000_5; l) 4444_5;

m) 5602_8; n) 4760_8; o) 1000_8; p) 7777_8;

q) 457_{16}; r) $B41_{16}$; s) 1000_{16}; t) $FFFF_{16}$.

1.5.2. Írjuk át kettes, hármas, négyes és hetes számrendszerbe a következő számokat!

a) 12; b) 64; c) 100; d) 321.

1.5.3. Írjuk fel négyes, nyolcas, tizenhatos számrendszerben a következő számokat!

a) 1111_2; b) 100110_2; c) 1110011101_2.

1.5.4. Írjuk fel kettes és tizenhatos számrendszerben a következő számokat!

a) 1111_4; b) 3021_4; c) 2103_4.

1.5.5. Írjuk fel kettes és négyes számrendszerben a következő számokat!

a) $A02_{16}$; b) 35_{16}; c) 213_{16}.

1.5.6. Írjuk fel kilences számrendszerben a következő számokat!

a) 21012_3; b) 1111_3; c) 22_3.

1.5.7. Írjuk fel hármas számrendszerben a következő számokat!

a) 78_9; b) 111_9; c) 22_9.

1.5.8. A kettes számrendszerben melyik a

a) legkisebb kétjegyű szám;

b) legnagyobb kétjegyű szám;

c) legnagyobb háromjegyű szám? Írjuk föl ezeket tízes számrendszerben!

1.5.9. A kettes számrendszerben hány

a) kétjegyű szám van;

b) háromjegyű szám van;

c) négyjegyű szám van?

1.5.10. Melyik szám a nagyobb, mennyivel?

a) 7^7 vagy $6\cdot 7^6+6\cdot 7^5+6\cdot 7^4+6\cdot 7^3+6\cdot 7^2+6\cdot 7+6$;

b) 32014_5 vagy 100000_5?

1.5.11.

a) Írjuk fel az 1101011_2-nél 1-gyel nagyobb számot!

b) Írjuk fel az 1101011_2-nél 11_2-gyel nagyobb számot!

c) Írjuk fel az 1101011_2 kétszeresét!

d) Írjuk fel az 1101011_2 négyszeresét!

1.5.12. Készítsük el a négyes számrendszerbeli összeadó és szorzótáblát, majd ezek segítségével végezzük el a következő műveleteket:

a) 2131_4+2011_4; b) $10023_4+13211_4$; c) $3201_4\cdot 32_4$.

1.5.13. Melyik páros szám?

a) 123_4; b) 111111_2; c) 111111_3; d) 4210_6;

e) 1357_9; f) 101010_2; g) 1000_5; h) 12345_7.

1.5.14. Melyik számítás a helyes?

a) $23\cdot 12 = 276$; b) $23_8\cdot 12_8 = 276_8$; c) $23_9\cdot 12_9 = 276_9$; d) $23_{16}\cdot 12_{16} = 276_{16}$.

1.5.15. Egy mérés során 1 kg-os, 2 kg-os, 4 kg-os, 8 kg-os, és 16 kg-os tömegek állnak rendelkezésünkre és egy kétkarú mérleg. Milyen tömegű tárgyakat tudunk megmérni, ha az ismert tömegeket az egyik serpenyőbe tehetjük?

1.5.16. Egy csirketelepen a következő módon csomagolják a tojásokat. Hat tojást tesznek egy tojástartóba, majd hat tojástartót egy fehér színű dobozba. A fehér dobozokból hat darabot csomagolnak egy nagyobb, színes dobozba. Ha 8000 db. tojást kell becsomagolni, akkor melyik csomagolóanyagból hány darab kell? Lesz-e kimaradó tojás (hiányos tojástartót nem csomagolnak be)?

1.6. Egyszerűbb számelméleti függvények

Tekintsük a *d* = *d(n)* pozitív természetes számok halmazán értelmezett függvényt, amely minden pozitív természetes számhoz hozzárendeli pozitív osztóinak a számát. Pl.: $d(6) = 4$, mert a 6 pozitív osztói 1; 2; 3; 6.

1.6.1. Mennyivel egyenlő

a) $d(1)$; b) $d(5)$; c) $d(9)$;
d) $d(10)$; e) $d(100)$; f) $d(625)$;
g) $d(90)$; h) $d(4851)$; i) $d(1024)$?

1.6.2. Adjunk meg olyan természetes számokat, melyek osztóinak száma:

a) 2; b) 3; c) 8;
d) 10, e) 12; f) 90.

1.6.3. Egy sporteseményen 72 versenyző vesz részt. A megnyitón téglalap alakú alakzatban vonulnak fel. (1x72; 72x1; 2x36; 36x2 …)

a) Hány különbözőalakzatban vonulhatnak fel?
b) Hány különbözőalakzatban vonulhatnak fel, ha az indulók száma 81?
c) Hány versenyzőnek kell indulnia, hogy négyzet alakzatban is felvonulhassanak?

1.6.4. Melyek azok a számok, melyek osztóinak száma páros és melyek azok, melyek osztóinak száma páratlan?

1.6.5. Az alábbi számok közül melyek négyzetszámok (a kifejezésekben szereplő betűk prímszámokat jelölnek)?

a) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2$; b) $2^6 \cdot 5^4 \cdot 11^{10}$; c) $3^2 \cdot 19^5 \cdot 23^3$;
d) $p^4 \cdot q^{12}$; e) $p^2 \cdot q^3 \cdot r^4$; f) $p^9 \cdot q^{11} \cdot r^{13}$.

1.6.6. Legalább mennyivel kell szorozni a következő számokat, hogy négyzetszámok legyenek (a kifejezésekben szereplő betűk prímszámokat jelölnek)?

a) 346; b) 128; c) 1008;
d) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; e) $2^4 \cdot 3^5 \cdot 11^6$; f) $p^2 \cdot q^9 \cdot r$;

g) q^{100}; h) $p^{12} \cdot q^{10} \cdot r^{11}$; i) $2 \cdot 9 \cdot r^2$.

1.6.7. Keressük meg az alábbi számok közül azokat, amelyek valamely szám harmadik hatványai, azaz köbszámok (a kifejezésekben szereplő betűk prímszámokat jelölnek)! Van-e közöttük négyzetszám?

a) 8; b) 9; c) 125;
d) 216; e) $2^9 \cdot 5^3$; f) $2^6 \cdot 3^6$;
g) $3^4 \cdot p^6$; h) $p^{12} \cdot q^{15} \cdot r^{18}$; i) $2 \cdot 9 \cdot r^3$.

1.6.8. Legalább mennyivel kell szorozni a következő számokat, hogy köbszámok legyenek (a kifejezésekben szereplő betűk prímszámokat jelölnek)?

a) 125; b) 3600; c) 504;
d) $2^9 \cdot 5^2 \cdot 7^7$; e) $p^3 \cdot q^6 \cdot r^9$; f) $p^4 \cdot q$;
g) $100 \cdot p^3 \cdot q$; h) $8 \cdot q^2$; i) $p^{99} \cdot q^{66} \cdot r^{33}$.

1.6.9. Fogalmazzuk meg az előző feladatok alapján, hogy egy szám mikor lesz egy másik szám negyedik hatványa, *n*-dik hatványa?

1.6.10. Legyen $A = 2^x \cdot 3^4 \cdot 7$ és $B = 2^3 \cdot 3^y \cdot 7^2$. A osztóinak száma 30, B-nek 24 osztója van. Hány osztója van az $A \cdot B$-nek?

1.6.11. Legyen $A = 3^x \cdot 5^2 \cdot 7^3$ és $B = 3^2 \cdot 5^y \cdot 7^2$. A osztóinak száma 36, B-nek 18 osztója van. Hány osztója van az $\frac{A}{B}$-nek?

Tekintsük az $S = S(n)$ pozitív természetes számok halmazán értelmezett függvényt, amely minden pozitív természetes számhoz hozzárendeli pozitív osztóinak az összegét. Pl.: $S(4) = 7$, mert a 4 pozitív osztói 1; 2; 4 és 1+2+4 = 7.

1.6.12. Határozzuk meg a következő számok pozitív osztóinak összegét!

a) $S(1)$; b) $S(5)$; c) $S(18)$;
d) $S(25)$; e) $S(30)$; f) $S(225)$;

g) $S(90)$; h) $S(504)$; i) $S(1000)$.

1.6.13. Határozzuk meg a következő kifejezések pozitív osztóinak összegét! A kifejezésekben szereplő betűk prímszámokat jelölnek.

a) $S(2^8)$; b) $S(3^4 \cdot 5)$; c) $S(3 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$;

d) $S(p)$; e) $S(p \cdot q)$; f) $S(p^2 \cdot q \cdot r^3)$;

g) $S(3 \cdot p^2)$; h) $S(5^2 \cdot p \cdot q^3)$; i) $S(1000 \cdot q)$.

Tökéletes számnak nevezzük azokat a természetes számokat, melyek osztóinak összege egyenlő a szám kétszeresével, azaz $S(n) = 2n$. Például a 6, mert $S(6) = 1+2+3+6 = 2 \cdot 6$.

1.6.14. Igazoljuk, hogy a következő számok tökéletes számok:

a) 28; b) 176; c) 496; d) 8128.

1.6.15. Lehet-e egy prímszám tökéletes szám? Állításunkat igazoljuk!

2. Megoldások

2.1. Természetes számok

2.1.1. a) 2^{22}; b) 3^{33}; c) 5^{5^5}.

2.1.2. Egy szorzat végén annyi 0 lesz, ahány 5-ös prímtényező előfordul a szorzat prímtényezős felbontásában, ugyanis 2·5 = 10, és 2-es tényező mindegyik esetben több lesz, mint 5-ös.

a) Az első tíz pozitív természetes szám közül az 5 és a 10 osztható 5-tel, így az 5-ös prímtényező kétszer fordul elő, tehát a szorzat végén kettő nulla áll.

b) Az első húsz pozitív természetes szám között négy szám osztható 5-tel, tehát a szorzat végén négy nulla áll.

c) Az első ötven pozitív természetes szám között vannak olyanok is, amelyek 5^2 = 25-tel is oszthatók. Tíz szám 5-tel, közülük kettő - a 25 és az 50 - 25-tel is osztható, így a szorzat felbontásában tizenkettő darab 5-ös szerepel, ami azt jelenti, hogy a szorzat végén tizenkettő nulla áll.

d) Az előzőhöz hasonlóan: húsz szám 5-tel, közülük négy 25-tel is osztható, így a szorzat felbontásában huszonnégy darab 5-ös szerepel, ami azt jelenti, hogy a szorzat végén huszonnégy nulla áll.

2.1.3. A tényezők között kettőszáz darab van, amely osztható 5-tel (1000:5 = 200). Negyven darab van, amely 25-tel is osztható (1000:25 = 40). A 125-tel is osztatók száma nyolc (1000:12 = 8). Egy szám van, amely osztható 625-tel. A szorzatban 200+40+8+1 = 249 darab 5-ös prímtényező van, ennél több 2-es prímtényező. A szorzat végén 249 darab 0 áll.

2.1.4. A számok felírása a maradékos osztás alapján:

a) $6{\cdot}n+5$; b) $7{\cdot}n+3$; c) $15{\cdot}n+8$;

d) $11{\cdot}n$; e) $19{\cdot}n+10$; f) $2{\cdot}n+1$. ($n\in \mathbb{N}$)

2.1.5. a) n; $(n+1)$; $(n+2)$; $(n+3)$; $(n+4)$ vagy $(n-2)$; $(n-1)$; n; $(n+1)$; $(n+2)$;

b) $2n$; $(2n+2)$; $(2n+4)$; $(2n+6)$; $(2n+8)$ vagy $(2n-4)$; $(2n-2)$; $2n$; $(2n-2)$; $(2n-4)$;

c) $(2n+1)$; $(2n+3)$; $(2n+5)$; $(2n+7)$; $(2n+9)$ vagy

$(2n-3)$; $(2n-1)$; $(2n+1)$; $(2n+3)$; $(2n+5)$, ahol $n\in \mathbb{N}$.

2.1.6. a) $3n$; $3n+3$; $3n+6$ vagy $3n$-3; $3n$; $3n+3$;

b) $5n+2$; $5n+7$; $5n+12$ vagy $5n$-3; $5n+2$; $5n+7$;

c) $7n+4$; $7n+11$; $7n+18$, vagy $7\mathrm{n}-3$; $7\mathrm{n}+4$; $7\mathrm{n}+ 11$, ahol $n\in \mathbb{N}$.

2.1.7. A tényezők lehetséges utolsó számjegyeinek összeszorzásával megállapíthatjuk az utolsó számjegyet: 0, 2, 6.

2.1.8. Két egymást követő természetes szám szorzata biztosan páros.

a) A $4n^2$ páros szám, ehhez 1-et adva az összeg páratlan.

b) Ha n páratlan, akkor $2n^2$ páros, a többi tag páratlan és három páratlan és egy páros szám összege páratlan.

Ha n páros, akkor három páros és egy páratlan szám összege lesz, ami szintén páratlan.

2.1.9.

a) két páros szám összege: páros;

b) páros és páratlan szám különbsége: páratlan;

c) két páros szám különbsége: páros;

d) két páros és egy páratlan szám összege: páros;

e) két páros szám összegéből elvéve egy páratlant: páratlan;

f) $(a+b)^2+a^2-b^2 = a^2+2ab+b^2+a^2-b^2 = 2a^2+2ab$; két páros szám összege: páros;

g) $(2a-b)^2-b(b+2) = 4a^2-4ab+b^2-b^2-2b = 2\cdot(2a^2-2ab-b)$; kettővel szorozva a szorzat mindig páros;

h) $(4a+1)^2+(4a-1)^2 = 16a^2+8a+1+16a^2-8a+1 = 32a^2+2$; két páros szám összege: páros.

2.1.10.

a) Mivel az első prímszám a 2, a szorzat páros lesz.

b) Mivel a 2 az egyetlen páros prím, ezért egy páros és kilencvenkilenc páratlan számot adunk össze, tehát az összeg páratlan lesz.

2.2. Oszthatóság

2.2.1. A feladat megoldható maradékos osztás elvégzésével is, de az oszthatósági szabályok alkalmazása gyorsabban vezet eredményre.

Kettővel oszthatók: 352, 32346714, 3300540;

Hárommal oszthatók: 32346714, 3300540, 2342625, 177147;

Öttel oszthatók: 187565, 3300540, 2342625;

Hattal oszthatók: 32346714, 3300540;

Tizeneggyel osztható: 352.

2.2.2.

Néggyel oszthatók: 28400, 50820, 19800, 64512;

Nyolccal oszthatók: 28400, 19800, 64512;

Kilenccel oszthatók: 93366, 4782969, 19800, 64512;

Tizenkettővel oszthatók: 50820, 19800, 64512;

Huszonöttel oszthatók: 28400, 19800.

2.2.3.

a) $a = 4$;

b) $b = 0, 3, 6, 9$;

c) $b = 0, 3, 6, 9$;

d) $y = 0{,}5$; x = tetszőleges;

e) $y = 0$, $x = 0, 3, 6, 9$, vagy $y = 2$, $x = 1, 4, 7$, vagy $y = 4$, $x = 2, 5, 8$, vagy $y = 6$, $x = 0, 3, 6, 9$, vagy $y = 8$, $x = 1, 4, 7$;

f) $y = 5$, $x = 8$ vagy $y = 0$, $x = 4$;

g) $y = 0$, $x = 2, 5, 8$;

h) $y = 0$, $x = 2, 5, 8$, vagy $y = 5$, $x = 0, 3, 6, 9$.

2.2.4.

a) Az 531 hármas maradéka 0, tehát x hármas maradéka is 0 kell legyen: $x = 0, 3, 6, \ldots 15, 18$;

b) A 420 tizenkettes maradéka 0, tehát $12|x$ kell legyen: $x = 0, 12$;

c) A 19 hármas maradéka 1, tehát x hármas maradéka 2 kell legyen: x = 2, 5, …17;

d) A 421 hatos maradéka 1, tehát x hatos maradéka 5 kell legyen: x = 5, 11, 17;

e) A 749 húszas maradéka 9, tehát x húszas maradéka 9 kell legyen: x = 9;

f) Az 5439 kilences maradéka 3, tehát x kilences maradéka 3 kell legyen: x = 3, 12.

2.2.5.

A $45|A=\overline{3a72b}$ feltétel miatt $b = 0$ és $a = 6$ vagy $b = 5$ és $a = 1$.

A $36|B=\overline{3c72d}$ feltétel miatt $d = 0$ és $c = 6$ vagy $d = 4$ és c = 3 vagy $d = 8$ és $c = 7$.

Az $A = B$ eset akkor teljesül, ha $b = d = 0$ és $a = c = 6$, tehát a keresett szám 36720.

2.2.6. $9|(137+\overline{34x}) \Rightarrow 9|(1+3+7+3+4+x) \Rightarrow x = 0$ vagy $x = 9$.

2.2.7. a) A lehetséges számok: 17+71 = 26+62 = 35+53 = 44+44 = 88.

b) A keresett számpár: 91−19 = 72.

2.2.8. A maradékok az osztások elvégzése nélkül is megállapíthatók:

Egy szám 3-as maradéka megegyezik számjegyei összegének 3-as maradékával;

Egy szám 4-es maradéka megegyezik két utolsó számjegyének 4-es maradékával;

Egy szám 5-ös maradéka megegyezik utolsó számjegyének 5-ös maradékával;

Egy szám 9-es maradéka megegyezik számjegyei összegének 9-es maradékával.

	3-mal	**4-gyel**	**5-tel**	**9-cel**
7	1	3	2	7
14	2	2	4	5
216	0	0	1	0
1848	0	0	3	3
2009	2	1	4	2
521966	2	2	1	2
123456	0	0	1	3
654321	0	1	1	3

2.2.9.

Egy összeg n-es maradéka megegyezik a tagok n-es maradékainak összegével, illetve az összeg n-es maradékával.

Egy szorzat *n*-es maradéka megegyezik a tényezők *n*-es maradékainak szorzatával, illetve a szorzat *n*-es maradékával.

Pl.: a) kettes maradék:

234567 + 5032

maradék: 1 + 0 = 1 $\Rightarrow$ kettes maradék 1.

b) kettes maradék:

234567 + 5032 + 12345

maradék: 1 + 0 + 1 = 2 $\Rightarrow$ kettes maradék 0.

c) tizenegyes maradék:

12345 – 5032

maradék: 3 – 5 = -2 $\Rightarrow$ tizenegyes maradék 9.

d) ötös maradék:

3·5032

maradék: 3 · 2 = 6 $\Rightarrow$ ötös maradék 1.

Az adott számok maradékai:

	2-es	**3-as**	**5-ös**	**11-es**
a = 234567	1	0	2	3
b = 5032	0	1	2	5
c = 12345	1	0	0	3

		2-es	**3-as**	**5-ös**	**11-es**
a)	**234567+5032**	1	1	4	8
b)	**234567+5032+12345**	0	1	4	0
c)	**12345−5032**	1	2	3	9
d)	**3·5032**	0	0	1	4
e)	**234567·5032**	0	0	4	4
f)	**5032·12345**	0	0	0	4

2.2.10. A természetes számokkal elvégzett műveletek maradékai megegyeznek a maradékokkal végzett műveletek maradékaival.

a) $n+k$ hetes maradéka: 5+3 = 8 $\Rightarrow$ hetes maradék 1;

b) $n–k$; hetes maradéka: 5–3 = 2 $\Rightarrow$ hetes maradék 2;

c) $2·n+3·k$ hetes maradéka: 2·5+3·3 = 19 $\Rightarrow$ hetes maradék 5;

d) $5·n–4·k$ hetes maradéka: 5·5–4·3 = 13 $\Rightarrow$ hetes maradék 6;

e) $n \cdot k$ hetes maradéka: $5 \cdot 3 = 15 \Rightarrow$ hetes maradék 1;

f) $n \cdot (k+3)$ hetes maradéka: $5 \cdot (3+3) = 30 \Rightarrow$ hetes maradék 2.

2.2.11. A műveletek hármas maradékai:

a) $0 \cdot a+0 = \mathbf{0}$; b) $0 \cdot a+2 = \mathbf{2}$; c) $0 \cdot a+0 \cdot b+2 = \mathbf{2}$;

d) $0 \cdot a+0 \cdot b-1 = -1 \equiv \mathbf{2}$;

e) $(0 \cdot a+b)^2-b(b+0) = b^2-b^2 = \mathbf{0}$;

f) $(2 \cdot a+0 \cdot b)^2+a(2 \cdot a-0) = 4 \cdot a^2+2 \cdot a^2-0 \cdot a = 6 \cdot a^2 \equiv 0 \cdot a^2 = \mathbf{0}$.

2.2.12. A alábbi táblázat a természetes számok hatványainak utolsó számjegyeit tartalmazza. Az 1-re, 5-re és 6-ra végződő számok mindegyik hatványának az utolsó jegye azonos. A 4-re és 9-re végződő számok hatványainak utolsó jegye kétféle lehet, a 2-re, 3-ra, 7-re és 8-ra végződő számok hatványainak utolsó jegye négyféle lehet. E szabályszerűségek miatt elegendő a kitevő kettes illetve négyes maradékait vizsgálni és ezek alapján a táblázatból leolvasható a hatvány utolsó jegye.

	utolsó számjegy								
kitevő	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	4	9	6	5	6	9	4	1
3	1	8	7	4	5	6	3	2	9
4	1	6	1	6	5	6	1	6	1
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	1	4	9	6	5	6	9	4	1
7	1	8	7	4	5	6	3	2	9
8	1	6	1	6	5	6	1	6	1
⋮									

a) 6; b) 1; c) 6; d) 5; e) 6; f) 1; g) 8; h) 9.

2.2.13. Az előző feladat során használt táblázat alapján oldjuk meg a feladatot.

a) 6+1 = 7, utolsó jegy 7; b) 6+5+6 = 17, utolsó jegy 7;

c) 1+4+3 = 8, utolsó jegy 8; d) 7+6+5 = 18, utolsó jegy 8;

e) 4+1 = 5, utolsó jegy 5.

2.2.14.

a) A 37 kitevő négyes maradéka 1, tehát a 37^{37} utolsó jegye 7. A 23 négyes maradéka 3, tehát a 23^{23} utolsó jegye 7, a különbség utolsó jegye 0, azaz valóban osztható 10-zel a 37^{37}-23^{23}.

b) Az 1526^{19} utolsó jegye 6, mert minden hatványának utolsó jegye 6. A 2^{58} utolsó jegye 4, mert az 58 négyes maradéka 2. Az összeg utolsó jegye a tagok utolsó jegyeinek összege, ami 0, tehát valóban osztható 10-zel.

2.2.15. a) A 10-nek minden hatványa az 1 számjeggyel kezdődik és annyi 0-t tartalmaz, amennyi a kitevő. A 10^{2009} hatvány 1-gyel kezdődik és 2009 darab 0-ra végződik, ehhez 8-at adva a szám alakja: 1000…..008 lesz. Így számjegyeinek összege 9, ami azt jelenti, hogy a szám 9-cel osztható.

b) A 10^{2009} hatvány 1-gyel kezdődik és 2009 darab 0-ra végződik, ebből 1-et elvéve alakja: $\underbrace{9999...999}_{2009\text{ db}}$ lesz. Így minden számjegye osztható 3-mal és az számjegyek összege is, ami azt jelenti, hogy a szám osztható 3-mal.

c) $10^{31}+2$ alakja: 1000…002. Számjegyeinek összege 3 és a szám páros, tehát 6-tal osztható.

d) $10^{11}–52$ alakja: 9999…975. Utolsó két jegyéből képzett szám osztható 25-tel, tehát a szám is osztható 25-tel.

e) $10^{52}+8$ alakja: 1000…008. Osztható 2-vel és 3-mal, tehát $2 \cdot 3 = 6$-tal is. Utolsó három jegyéből képzett szám osztható 8-cal, tehát a szám is osztható 8-cal. Számjegyeinek összege 9, tehát osztható 9-cel. Osztható 8-cal és 3-mal, tehát $8 \cdot 3 = 24$-gyel is. Osztható 8-cal és 9-cel, tehát $8 \cdot 9 = 72$-vel.

2.2.16. Azok a természetes számok a prímszámok, melyeknek pontosan két pozitív osztójuk van. Oldjuk meg a feladatokat osztópárok keresésével. Ehhez jól használhatók az oszthatósági szabályok. Elegendő a vizsgálódást az adott szám négyzetgyökéig végezni.

Prímek: b) 2; e) 361; h) 991; i) 1109; j) 1237; o) 3673; p) 7741.

2.2.17. Prímszámok kiválasztása eratoszthenészi szita segítségével 2-től *n*-ig.

A 2 prímszám, a valódi többszöröseit, azaz minden második számot húzzuk át. A következő prímszám a 3, valódi többszöröseit, azaz minden harmadik számot húzzuk át. Ezután megtalált prím az 5, valódi többszöröseit áthúzzuk. A fenti „szitálást” tovább folytatjuk addig, amíg a következő át nem húzott szám $\sqrt{n}$ -nél nagyobb nem lesz. A megmaradt számok adják az összes pozitív prímszámot *n*-ig.

A prímszámok 2-től 100-ig:

	2	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

2.2.18. A 2009^{2008} utolsó jegye 1. Ehhez 24-et adva az összeg utolsó jegye 5, azaz osztható 5-tel és $2009^{2008}+24 > 5$, ezért összetett szám.

2.2.19. Az 5 minden hatványának utolsó számjegye 5, így az 5^{2009} hatványé is. Egy ilyen számhoz 7-et adva az összeg utolsó jegye 2, tehát páros szám, azaz 2-vel osztható. Mivel az egyetlen páros prímszám a 2 és $5^{2009}+7 > 2$, ezért biztosan összetett szám.

2.2.20. A 10^{2009} hatvány 1-gyel kezdődik és 2009 darab 0-ra végződik, ehhez 11-et adva a szám alakja: 10000…..0011 lesz. Így számjegyeinek összege 3, ami azt jelenti, hogy a szám 3-mal osztható, tehát összetett szám.

2.2.21. $\frac{p^2-1}{p-1} = \frac{(p-1)\cdot(p+1)}{p-1} = p+1$. Mivel a 2-nél nagyobb prímek páratlanok, ezért *p* páros kell hogy legyen. Az egyetlen páros prím a 2, tehát $p = 2$.

2.2.22. a) $(2k+1)^2–1 = 4k^2+4k+1–1 = 4k^2+4k = 4k(k+1)$. A szám szorzatalakjából látható, hogy az egyik tényező osztható 4-gyel. Mivel $k(k+1)$ két szomszédos szám szorzata, ezért biztos, hogy az egyik szám páros, a másik páratlan. Így az eredeti szám olyan szorzat, mely egyik tényezője osztható 4-gyel, másik tényezője osztható 2-vel, azaz a szám osztható 8-cal.

b) A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

$n = 0$ esetén: $11^2+12^1 = 133 \Rightarrow$ az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás $n = k$ esetén is igaz, azaz $133|11^{k+2}+12^{2k+1}$.

Igazolni kell, hogy $n = k+1$ esetén is igaz az állítás. Ekkor a kifejezésünk: $11^{k+3}+12^{2k+3} = 11\cdot 11^{k+2}+12^2\cdot 12^{2k+1} = 11\cdot 11^{k+2}+11\cdot 12^{2k+1}+133\cdot 12^{2k+1} =$

$$= 11\cdot\underbrace{(11^{k+2}+11\cdot 12^{2k+1})}_{\substack{\text{az indukciós feltevés}\\ \text{miatt osztható 133-mal}}}+\underbrace{133\cdot 12^{2k+1}}_{\text{osztható 133-mal}}.$$

$\Rightarrow$ az összeg osztható 133-mal.

2.2.23. Négy, egymást követő szám közül pontosan kettő páratlan és kettő páros van. Két páratlan szám összege mindig páros és ehhez újabb párosakat adva az összeg is páros marad.

2.2.24. a) Három egymást követő egész szám között van páros és valamelyik 3-mal is osztható, tehát a szorzat osztható 2-vel és 3-mal, azaz osztható 6-tal.

b) Négy egymást követő pozitív egész között biztosan van 3-mal osztható és kettő darab páros. E két páros szám közül az egyik nemcsak 2-vel, de 4-gyel is osztható, így a szorzat biztosan osztható $3\cdot 2\cdot 4 = 24$-gyel.

2.2.25. A két páros szám közül az egyik nemcsak 2-vel, de 4-gyel is osztható, így a szorzat biztosan osztható $2\cdot 4 = 8$-cal.

2.2.26.

a) $340 = 2^2\cdot 5\cdot 17$;	b) $353 = 353$, prímszám;	c) $2009 = 7^2\cdot 41$;
d) $2048 = 2^{11}$;	e) $2310 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$;	f) $2401 = 7^4$;
g) $2539 = 2539$, prímszám;	h) $3400 = 2^3\cdot 5^2\cdot 17$;	i) $6912 = 2^8\cdot 3^3$;
j) $10000 = 2^4\cdot 5^4$;	k) $8505 = 3^5\cdot 5\cdot 7$;	l) $12465 = 3^2\cdot 5\cdot 277$;

m) $32316 = 2^2\cdot 3\cdot 2693$; n) $99999 = 3^2\cdot 41\cdot 271$; o) 1 millió = $2^6\cdot 5^6$.

2.2.27.

a) 8-cal akkor osztható, ha a prímtényezős felbontásban a 2 kitevője legalább 3.

b) 9-cel akkor osztható, ha a prímtényezős felbontásban a 3 kitevője legalább 2.

c) 10-zel akkor osztható, ha prímtényezői között van 2 és 5, legalább az első hatványon.

d) 15-tel akkor osztható, ha prímtényezői között van 3 és 5, legalább az első hatványon.

2.2.28. a) Nem, például: 9 osztója $6^2 = 36$-nak, de 9 nem osztója 6-nak.

b) Igen, mert a k^2 egyik tényezőjét osztja n (igaz, hogy mindkettő tényezőjét is osztja), így a szorzatot is osztja.

c) Igen, mert a k^m egyik tényezőjét osztja n (igaz, hogy mindegyik tényezőjét is osztja), így a szorzatot is osztja.

2.2.29. $A\cdot B = 2^5\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 11^3\cdot 13$.

2.2.30. a) x legalább 5^1.

b)

i) $6|A$ biztosan igaz, mert az A prímtényezői között szerepel a 2·3.;

ii) $15|A$ biztosan igaz, mert az A prímtényezői között szerepel a 2·5;

iii) $50|A$ csak akkor igaz, ha az 5 hatványkitevője legalább 2;

iv) $55|A$ hamis, mert $55 = 5\cdot 11$, és a 11 nem szerepel a prímtényezők között.

2.2.31. a) x legalább 2.

b)

i) $18|B$ biztosan igaz, mert az B prímtényezői között szerepel a $2\cdot 3^2$;

ii) $27|B$ csak akkor igaz, ha az x legalább 3;

iii) $36|B$ hamis, mert $36 = 2^2\cdot 3^2$, a B prímtényezői között csak 2^1 szerepel;

iv) $99|B$ biztosan igaz, mert az B prímtényezői között szerepel a $3^2\cdot 11$.

2.3. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

2.3.1. A legnagyobb közös osztót megkereshetjük a számok prímtényezős alakjaiból.

a) (55;75) = 5; b) (125;225) = 25; c) (36;96) = 12;

d) (128;512) = 128; e) (576;1053) = 81; f) (629;799) = 17;

g) (3660;1999) = 1; h) (2006;2009) = 1; i) $(2^3\cdot 3^2;2\cdot 3^5) = 2\cdot 3^2$;

j) $(2\cdot 5^3\cdot 7^3;2^7\cdot 5^2\cdot 7) = 2\cdot 5^2\cdot 7$; k) $(5^3\cdot 7;5^5\cdot 11^2) = 5^3$; l) $(11^{11};7\cdot 13^7) = 1$;

m) $(p^3q^2;pq^4) = pq^2$; n) $(pqr^3;p^3q^2r) = pqr$; o) $(p^2r^3;p^3q^2) = p^2$;

p) $(p^{11};qr^7) = 1$.

Meghatározhatjuk két szám legnagyobb közös osztóját euklédeszi-algoritmussal is, például:

75:55 = 1, maradék 20

55:20 = 2, maradék 15

20:15 = 1, maradék 5

15:5 = 3, maradék 0. Az utolsó nem nulla maradék 5, tehát (55;75) = 5.

2.3.2. $(a;b) = b \Rightarrow a|b$.

2.3.3.

a) (24;45;55) = 1; b) (100;325;725) = 25; c) (17;34;263) = 1;

d) (187;323;391) = 17; e) (12;50;56) = 2; f) (8;24;56) = 8;

g) $(2^3\cdot 3^4\cdot 11;3^2\cdot 11^2;3^7\cdot 7) = 3^2$; h) $(2\cdot 3\cdot 5;3\cdot 5\cdot 7;5\cdot 7\cdot 11) = 5$; i) $(7^2\cdot 13^2;13^9\cdot 17;3^4\cdot 7) = 1$;

j) $(p^3q;pq^2;pqr^2) = pq$; k) $(q^3r^4;pq^2r;q^2r^2) = q^2r$; l) $(pq^4;p^2q^2;p^2qr) = pq$.

2.3.4.

a) $60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$, például: $a = 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 11 = 1320$ és $b = 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 420$;

b) $19 = 1\cdot 19$, például: $a = 3\cdot 19 = 57$ és $b = 7\cdot 19 = 133$;

c) például: $a = 2^2\cdot 3\cdot 5^4\cdot 7 = 52500$ és $b = 2^3\cdot 3\cdot 5^3\cdot 13 = 39000$.

2.3.5. $x \geq 3$; $y = 2$; $z = 0$; $u = 1$; $v = 0$.

2.3.6.

a) (840;1800) = 120, ezért $\frac{840}{1800} = \frac{7}{15}$;

b) (535;1819) = 107, ezért $\frac{535}{1819} = \frac{840}{1800}$;

c) (3857;6061) = 551, ezért $\frac{3857}{6061} = \frac{7}{11}$;

d) (7395;9860) = 2465, ezért $\frac{7395}{9860} = \frac{3}{4}$;

e) (45;56) = 1, ezért a $\frac{45}{56}$ tovább nem egyszerűsíthető.

2.3.7. Bontsuk fel a számokat prímtényezőkre, válasszuk úgy a párokat, hogy ne legyen közös prímtényezőjük! A relatív prímpárok:

(3;4), (3;10), (3;28), (3;35), (4;15), (4;21), (4;35), (4;63), (6;35), (10;21), (10;63), (15;28).

2.3.8. Írjuk fel a számokat prímtényezős alakban úgy, hogy ne legyen közös prímtényezőjük: $a = pq$ és $b = rs$ (a prímtényezők kitevői tetszőlegesek lehetnek). Például: $a = 2^3 \cdot 7 = 56$ és $b = 3^2 \cdot 13 = 117$.

2.3.9. a) igaz, hiszen nincs közös prímtényezőjük;

b) hamis, pl.: $(8;10) = 2 \neq 1$;

c) hamis, pl.: $(3;6) = 3 \neq 1$.

2.3.10. a) (11;22;33) = 11 $\Rightarrow$ nem relatív prímek;

b) (258;124;73) = 1 $\Rightarrow$ relatív prímek;

c) (1024;256;487) = 1 $\Rightarrow$ relatív prímek.

2.3.11. Legyenek p, q, r, különböző prímek. A feltételeknek eleget tevő számok:

$a = p \cdot q$;	$b = p \cdot r$;	$c = q \cdot r$.
Például: $a = 2 \cdot 3 = 6$;	$b = 2 \cdot 5 = 10$;	$c = 3 \cdot 5 = 15$.

2.3.12.

a) $[8;28] = 56$; b) $[45;150] = 450$; c) $[105;180] = 1260$;

d) $[348;476] = 41412$; e) $[475;570] = 2850$; f) $[1840;3400] = 156400$;

g) $[2000;2010] = 402000$; h) $[2006;2009] = 4030054$;

i) $[2^3\cdot 3^2;2\cdot 3^5] = 2^3\cdot 3^5$; j) $[2\cdot 5^3\cdot 7^3;2^7\cdot 5^2\cdot 7] = 2^7\cdot 5^3\cdot 7^3$;

k) $[5^3\cdot 7;5^5\cdot 11^2] = 5^5\cdot 7\cdot 11^2$; l) $[11^{11};7\cdot 13^7] = 7\cdot 11^{11}\cdot 13^7$;

m) $[p^3q^2;pq^4] = p^3q^4$; n) $[pqr^3;p^3q^2r] = p^3q^2r^3$;

o) $[p^2r^3;p^3q^2] = p^3q^2r^3$; p) $[p^{11};qr^7] = p^{11}qr^7$.

2.3.13. $[a;b] = b \Rightarrow a|b$

2.3.14. a) $30 = 2\cdot 3\cdot 5$, például $a = 2\cdot 3 = 6$ és $b = 3\cdot 5=15$;

b) $29 = 1\cdot 29$, például $a = 1$ és $b = 29$ vagy $a = 29$ és $b = 29$;

c) például $a = 2^2\cdot 5\cdot 7 = 140$ és $b = 5\cdot 7^2 = 245$.

2.3.15. $x \le 3$; $y = 4$; $z = 2$; $u = 2$; $v = 4$.

2.3.16.

a) $[24;72] = 2^3\cdot 3^2 = 72$, ezért: $\frac{1}{24}+\frac{1}{72}=\frac{3}{72}+\frac{1}{72}=\frac{4}{72}=\frac{1}{18}$;

b) $[7920;6300] = 2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11 = 277200$, ezért:

$$\frac{1}{7920}+\frac{1}{6300}=\frac{35}{277200}+\frac{44}{277200}=\frac{79}{277200};$$

c) $[840;1575;1400] = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7 = 12600$, ezért:

$$\frac{1}{840}+\frac{1}{1575}-\frac{1}{1400}=\frac{15}{12600}+\frac{8}{12600}-\frac{9}{12600}=\frac{14}{12600}=\frac{1}{900}.$$

2.3.17. Mivel $(a;b)\cdot[a;b]=a\cdot b$, ezért:

$60\cdot 2160=720\cdot b \Rightarrow b=180$.

2.3.18. Mivel $(a;b)\cdot[a;b]=a\cdot b$, ezért:

$(2^3\cdot 5^2)\cdot(2^5\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7^3)=2^5\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot b \Rightarrow b=2^3\cdot 3\cdot 5^2$.

2.3.19. A 20 és a 18 legkisebb közös többszöröse 180, így pontosan azok a háromjegyű számok oszthatók 20-szal is és 18-cal is, amelyek oszthatók 180-nal. A keresett számok: 180, 360, 540, 720 és 900.

2.3.20. A feltételt teljesítő számhoz 1-et adva osztható lesz 5-tel, 6-tal, 7-tel, 8-cal és 9-cel. Ekkor viszont osztható ezek legkisebb közös többszörösével, ami 2520. Ezek a 2520, 5040, 7560. A keresett számok: 2519, 5039 és 7559.

2.3.21. $[12;75] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$. 300 méter távolságban lesz ismét egymással szemben egy fa és egy oszlop.

2.3.22. $[12;20] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. 60 perc, azaz 1 óra múlva, 9 óra 20 perckor lesz ismét mindkét busz a megállóban. A délelőtt folyamán ez még kétszer fordul elő, 10 óra 20 perckor és 11 óra 20 perckor.

2.3.23. $[4;8;12] = 2^3 \cdot 3 = 24$. Találkozik mindhárom hajó ebben az évben, 24 hét múlva, 2009. június 20-án. Mindhárom hajó 24 hetente lesz együtt a kikötőben, 2009-ben összesen háromszor.

2.3.24. Ha a létszámból 3-at elveszünk, akkor a kapott szám osztható lesz 6-tal, 7-tel, 8-cal és 10-zel, így a négy szám legkisebb közös többszörösével is, ami 840. Mivel a létszám 1000-nél kisebb, az iskolának 843 tanulója van.

2.3.25. $(48;72;100) = 2^2 = 4$. Négy matróz volt a szigeten.

2.4. Diofantoszi problémák

2.4.1.

a) $7 \nmid 8$, ezért az egyenletnek nincs egész megoldása;

b) $3 \mid 24$, ezért az egyenlet megoldható az egész számok halmazán, $x = 8$;

c) $x = 2$; d) $x = -20$; e) nem megoldható; f) $x = 2$.

2.4.2. Az $ax + by = c$ diofantoszi egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha $(a;b) \mid c$. Ha egy $(x_0;y_0)$ megoldása a diofantoszi egyenletnek, akkor végtelen sok megoldása van, és a gyökök $x=x_0 + \frac{b}{(a;b)}t$ és $y=y_0 - \frac{a}{(a;b)}t$ alakban írhatók, ahol $t\in \mathbb{Z}$.

a) $(2;3) = 1$ és $1 \mid 13$, ezért az egyenlet megoldható.

$$2x+3y = 13$$

$$x = \frac{13-3y}{2}$$

$$x = \frac{12-2y+1-y}{2}$$

$$x = 6-y+\frac{1-y}{2}.$$

Az x csak akkor lesz egész szám, ha y páratlan. Néhány lehetséges megoldáspár: (2;3), (5;1), (8;-1), (11;-3). Általános megoldás: $x = x_0+3t$ és $y = y_0-2t$, $t\in \mathbb{Z}$.

b) az egyenletből x-et kifejezve $x = \frac{21-7y}{3} = 7-2y-\frac{y}{3}$. Az x egész szám lesz például $y_0 = 3$ esetében. Ekkor a megfelelő $x_0 = 0$. Néhány lehetséges megoldáspár: (-7;6), (7;0), (14;-3), (21;-6). Általános megoldás: $x = x_0+7t$ és $y = y_0-3t$, $t\in \mathbb{Z}$.

c) $(8;14) = 2$ és $2 \nmid 21$, ezért a diofantoszi egyenletnek nincs megoldása.

d) az egyenletből x-et kifejezve $x = \frac{12-6y}{3} = 4-2y$. Ha $y\in \mathbb{Z}$, akkor $x\in \mathbb{Z}$ is teljesül. Néhány megoldás: (4;0), (2;1), (0;2), (-2;3).

e) Néhány megoldás: (-2;-6), (-1;-3), (0;0), (1;3).

2.4.3.

a) Megoldandó az $5x+9y = 101$ diofantoszi egyenlet, ahol $x, y \in \mathbb{N}$. Mivel $(5;9) = 1$ és $1 \mid 101$, ezért az egyenlet megoldható, azaz a 101 forintos termék ára kifizethető.

b) Lehetséges kifizetési módok: 4 db 5 forintos és 9 db 9 forintos illetve 13 db 5 forintos és 4 db 9 forintos.

c) Mivel $(5;9) = 1$ és $1 \mid n \in \mathbb{N}$, ezért minden árucikk ára kifizethető. Ehhez feltételezzük, hogy vissza is adhatnak. Így lehet kifizetni például 11 forintot: adunk 4 db 9 forintost és visszakapunk 5 db 5 forintost. Ha nincs visszaadási lehetőség, akkor sok olyan eset van, ami nem fizethető ki.

2.4.4. Megoldandó a $3x = 11y+2$ egyenlet, ahol a keresett szám $x \in \mathbb{N}$, ebből következően $y \in \mathbb{N}$. Az egyenletből x-et kifejezve $x = \frac{11y+2}{3} = 3y + \frac{2y+2}{3}$. A keresett számok: 24, 57, 90, 123, 156…

2.4.5. Megoldandó a $3x+2 = 5y+4$ egyenlet. A keresett számok: 14, 29, 44, 59 …

2.4.6. Megoldandó a $4x+3 = 6y+3$ egyenlet. A keresett számok: 3, 15, 27, 39, 51…

2.4.7. Megoldandó a $4x+3 = 10y+2$ egyenlet. Az egyenletnek nincs megoldása, mert $(4;-10) = -2$ és $-2 \nmid -1$, ezért nem létezik a feltételeknek megfelelő szám.

2.4.8. Megoldandó az $x+y = 8$ egyenlet.

a) A keresett számpárok: … (-2;10), (-1;9), (0;8), (1;7), (2;6), (3;5) …

b) A keresett számpárok: (0;8), (1;7), (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2), (7;1), (8,0).

2.4.9. Megoldandó a $4x+2y = 302$ egyenlet, ahol $x, y \in \mathbb{N}^+$. Lehetséges esetek:

1 személygépkocsi	és	149 motorkerékpár
2 személygépkocsi	és	147 motorkerékpár
3 személygépkocsi	és	145 motorkerékpár
⋮		⋮
75 személygépkocsi	és	1 motorkerékpár

2.4.10. Megoldandó a $72x+56y = 752$ egyenlet, ahol $x, y \in \mathbb{N}^+$. Az egyenletből y-t kifejezve $y = \frac{752-72x}{56} = 13-x+\frac{3-2x}{7}$. Ebből $x_0 = -2$ és $y_0 = 16$. Így gabonából 5 zsák a búza és 7 zsák az árpa.

2.4.11. a) Megoldandó egyenlet: $12^2+b^2 = c^2$, ahol $b, c \in \mathbb{N}^+$.

$144 = c^2-b^2$

$144 = (c + b)(c - b)$, azaz a 144 osztópárjai között kell keresni a megoldásokat. 144 osztópárjai: $(1\cdot 144)$, $(2\cdot 72)$, $(3\cdot 48)$, $(4\cdot 36)$, $(6\cdot 24)$, $(8\cdot 18)$, $(9\cdot 16)$ és $(12\cdot 12)$. Így:

$\left.\begin{aligned} c+b&=144 \\ c-b&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ $c = b+1$ és $b = 71{,}5 \notin \mathbb{N}^+$, azaz az első osztópár nem ad megoldást.

$\left.\begin{aligned} c+b&=72 \\ c-b&=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ $c = 37$, $b = 35$. A második osztópárból kaptunk megoldást.

Megoldást pontosan akkor kapunk, ha az osztópárok mindegyik tagja páros vagy páratlan, kivéve, ha egyenlők, hiszen különbségük csak így lesz 2-vel osztható.

A feladatnak négy megoldása van, ezek a következők:

a befogó	b befogó	c átfogó
12 cm	35 cm	37 cm
12 cm	16 cm	20 cm
12 cm	9 cm	15 cm
12 cm	5 cm	13 cm

b) Megoldandó egyenlet: $13^2+b^2 = c^2$, ahol $b, c \in \mathbb{N}^+$.

169 osztópárjai: $(1\cdot 169)$ és $(13\cdot 13)$. Ebből az a) feladatnál leírtak alapján megoldást csak egy esetben kapunk, azaz csak egy olyan derékszögű háromszög van, mely megfelel a feltételeknek. Ennek oldalai: 13, 84, 85.

c) Megoldandó egyenlet: $14^2+b^2 = c^2$, ahol $b, c \in \mathbb{N}^+$.

196 osztópárjai: $(1\cdot 196)$, $(2\cdot 98)$, $(4\cdot 49)$, $(7\cdot 28)$ és $(49\cdot 49)$. Ebből az a) feladatnál leírtak alapján megoldást csak egy esetben kapunk, azaz csak egy olyan derékszögű háromszög van, mely megfelel a feltételeknek. Oldalai: 14, 48, 50.

2.4.12. Van ilyen derékszögű háromszög, például: 3; 4; 5 vagy 5; 12; 13.

2.4.13. Két esetet vizsgálhatunk:

Legyenek a befogók párosak, ekkor négyzeteik is párosak és két páros szám összege is páros. Így az átfogó négyzete és vele együtt az átfogó is páros, tehát nem lehet páratlan.

Legyen az egyik befogó és az átfogó páros. Ekkor a másik befogó négyzete két páros szám különbsége, ami szintén páros szám, tehát a másik befogó nem lehet páratlan. Nem létezik olyan derékszögű háromszög, amely megfelelne a feltételeknek.

2.4.14. Két esetet vizsgálhatunk:

Legyenek a befogók páratlanok, ekkor négyzeteik is páratlanok és két páratlan szám összege páros. Így az átfogó négyzete és vele együtt az átfogó is páros, tehát nem lehet páratlan.

Legyen az egyik befogó és az átfogó páratlan. Ekkor a másik befogó négyzete két páratlan szám különbsége, ami páros szám, tehát a másik befogó nem lehet páratlan. Nem létezik olyan derékszögű háromszög, amely megfelelne a feltételeknek.

2.4.15. Van ilyen derékszögű háromszög, például: 6; 8; 10 vagy 10; 24; 26. Bármely Pitagoraszi számhármas tagjait egy pozitív páros számmal szorozva a megfelelő számhármast kapjuk.

2.4.16. a) Megoldandó egyenlet: $2(a+b) = 30$, ahol $a, b \in \mathbb{N}^+$

$$a+b = 15$$

7 különböző téglalap felel meg a feladat feltételeinek. Ezek a következőek: (1;14), (2;13), (3;12), (4;11), (5;10), (6;9) és (7;8).

b) Megoldandó egyenlet: $a \cdot b = 30$, ahol $a, b \in \mathbb{N}^+$.

Azaz keressük, hogy a 30-nak hány különböző osztópárja van. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, ebből $d(30) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. A különböző osztópárok száma 4, azaz 4 nem egybevágó téglalap van, melynek területe 30 cm^2. Ezek a következők: (1;30), (2;15), (3;10), (5;6).

2.4.17. a) Megoldandó egyenlet: $\frac{n(n-3)}{2} = 172$

$n^2 – 3n – 344 = 0$

$n_{1;2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+1376}}{2} \notin \mathbb{N}^+ \Rightarrow$ nincs ilyen sokszög.

b) Megoldandó egyenlet: $\frac{n(n-3)}{2} = 252$

$n^2 – 3n – 504 = 0$

Az egyenlet megoldásai $n_1 = 24 \in \mathbb{N}^+$ és $n_2 = -21 \notin \mathbb{N}^+$. Tehát egy ilyen sokszög létezik, oldalszáma 24.

c) Megoldandó egyenlet: $\frac{n(n-3)}{2} = n + 102$

$n^2 – 5n – 204 = 0$

Az egyenlet megoldásai $n_1 = 17 \in \mathbb{N}^+$ és $n_2 = -12 \notin \mathbb{N}^+$. Tehát egy ilyen sokszög létezik, oldalszáma 17.

d) Megoldandó egyenlet: $\frac{n(n-3)}{2} = n + 119$

$n^2 – 5n – 476 = 0$

$n_{1;2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+1904}}{2} \notin \mathbb{N}^+ \Rightarrow$ nincs ilyen sokszög.

e) Megoldandó egyenlet: $\frac{n(n-3)}{2} = n$

$n^2 – 5n = 0$

Az egyenlet megoldásai $n_1 = 5 \in \mathbb{N}^+$ és $n_2 = 0 \notin \mathbb{N}^+$. Tehát egy ilyen sokszög létezik, oldalszáma 5.

f) Megoldandó egyenlet: $\frac{n(n-3)}{2} \cdot n = 98$

$n^2 \cdot (n – 3) = 196$

A feladat megoldhatóságának szükséges feltétele, hogy a 196-nak legyen négyzetszám osztója. $196 = 2^2 \cdot 7^2 = 4 \cdot 49$. $\Rightarrow$ $n = 7$ megoldás, mert $7^2(7-3) = 196$. Tehát a 7 oldalú sokszög felel meg a feladat feltételeinek.

2.5. Számrendszerek

2.5.1. Írjuk fel az adott számok helyi értékes összegalakját (B a 11-es, F a 15-ös számot jelöli a 16-os számrendszerben):

a) $1\cdot 2^6+0\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0 = 64+0+16+8+4+0+1 = 93$;

b) 21; c) 8; d) 15 (= 10000_2–1);

e) $1\cdot 4^3+2\cdot 4^2+0\cdot 4^1+3\cdot 4^0 = 64+32+0+3 = 99$;

f) 441; g) 64; h) 255 (=10000_4–1);

i) $1\cdot 5^3+3\cdot 5^2+0\cdot 5^1+2\cdot 5^0 = 125+75+0+2 = 202$;

j) 555; k) 125; l) 624 (=10000_5–1);

m) $5\cdot 8^3+6\cdot 8^2+0\cdot 8^1+2\cdot 8^0 = 2560+384+0+2 = 2946$;

n) 2544; o) 512; p) 4095 (=10000_8–1);

q) $4\cdot 16^2+5\cdot 16^1+7\cdot 16^0 = 1024+80+7 = 1111$;

r) 2881; s) 4096; t) 65535 (=10000_{16}–1).

2.5.2. Végezzük el a következő algoritmust: az átírandó számot osszuk el az új számrendszer alapszámával és jegyezzük fel a maradékot. A kapott hányadost ismét osszuk el, és addig végezzük az osztást, amíg a hányados nulla lesz. A kapott maradékok visszafelé olvasva adják meg az átírt számot.

a) 12:2 = 6, maradék 0.
6:2 = 3, maradék 0.
3:2 = 1, maradék 1.
1:2 = 0, maradék 1. A 12 kettes számrendszerbeli alakja: 1100_2.
$12 = 1100_2 = 110_3 = 30_4 = 15_7$;

b) 64:3 = 21, maradék 1.
21:3 = 7, maradék 0.
7:3 = 2, maradék 1.
2:3 = 0, maradék 2. A 64 hármas számrendszerbeli alakja: 2101_3.
$64 = 1000000_2 = 2101_3 = 1000_4 = 121_7$;

c) 100:4 = 25, maradék 0.

25:4 = 6, maradék 1.

6:4 = 1, maradék 2.

1:4 = 0, maradék 1. A 100 négyes számrendszerbeli alakja: 1210_4.

$100 = 1100100_2 = 10201_3 = 1210_4 = 202_7$;

d) 321:7 = 45, maradék 6.

45:7 = 6, maradék 3.

6:7 = 0, maradék 6. A 321 hetes számrendszerbeli alakja: 636_7.

$321 = 101000001_2 = 102220_3 = 11001_4 = 636_7$.

2.5.3. Megoldható a feladat úgy, hogy a kettes számrendszerbeli számot átírjuk tízes számrendszerbe, majd a kívánt alapú számrendszerbe.

a) $1111_2 = 15_{10} = 33_4 = 17_8 = F_{16}$.

Kihasználhatjuk azt, hogy a számrendszerek alapszámai a 2 hatványai, ennek segítségével közvetlenül átírhatók a számok a megfelelő számrendszerbe. A $4 = 2^2$, a kettes számrendszerbeli szám számjegyeit kettes csoportokba állítva írjuk át négyes számrendszerbe: $\underbrace{11}_{3}\underbrace{11}_{3}{}_2 = 33_4$.

Nyolcas számrendszerbe való átíráskor hármasával csoportosítunk, hiszen $8=2^3$: $\underbrace{1}_{1}\underbrace{111}_{7}{}_2 = 17_8$.

Tizenhatos számrendszerbe való átíráskor négyesével csoportosítunk, mert $16=2^4$: $\underbrace{1111}_{F}{}_2 = F_{16}$;

b) $\underbrace{10}_{2}\underbrace{01}_{1}\underbrace{10}_{2}{}_2 = 212_4$, $\underbrace{100}_{4}\underbrace{110}_{6}{}_2 = 46_8$, $\underbrace{10}_{2}\underbrace{0110}_{6}{}_2 = 26_{16}$;

c) $\underbrace{11}_{3}\underbrace{10}_{2}\underbrace{01}_{1}\underbrace{11}_{3}\underbrace{01}_{1}{}_2 = 32131_4$, $\underbrace{1}_{1}\underbrace{110}_{6}\underbrace{011}_{3}\underbrace{101}_{5}{}_2 = 1635_8$, $\underbrace{11}_{3}\underbrace{1001}_{9}\underbrace{1101}_{D}{}_2 = 39D_{16}$.

2.5.4. Használjuk ki, hogy a számrendszerek alapszámai egymás hatványai! (A feladat természetesen úgy is megoldható, hogy közbe iktatjuk a tízes számrendszerbeli alakot.)

a) A négyes számrendszerbeli számokat közvetlenül úgy írhatjuk kettes számrendszerbe, hogy a számjegyeket egyesével írjuk kettes számrendszerbe, de mindegyiket kettő helyi értéken ($2=\sqrt{4}$)! A tizenhatos számrendszerbeli alak az 1.5.3. feladatban alkalmazottak szerint határozható meg ($16 = 4^2$).

$\overbrace{1}^{01}\,\overbrace{1}^{01}\,\overbrace{1}^{01}\,\overbrace{1}^{01}{}_4 = 1010101_2$, $\underbrace{11}_{5}\,\underbrace{11}_{5}{}_4 = 55_{16}$.

b) $\overbrace{3}^{11}\,\overbrace{0}^{00}\,\overbrace{2}^{10}\,\overbrace{1}^{01}{}_4 = 11001001_2$, $\underbrace{30}_{C}\,\underbrace{21}_{9}{}_4 = C9_{16}$.

c) $\overbrace{2}^{10}\,\overbrace{1}^{01}\,\overbrace{0}^{00}\,\overbrace{3}^{11}{}_4 = 10010011_2$, $\underbrace{21}_{9}\,\underbrace{03}_{3}{}_4 = 93_{16}$.

2.5.5. a) $\overbrace{A}^{1010}\,\overbrace{0}^{0000}\,\overbrace{2}^{0010}{}_{16} = 101000000010_2$, $\overbrace{A}^{22}\,\overbrace{0}^{00}\,\overbrace{2}^{02}{}_{16} = 220002_4$;

b) $\overbrace{3}^{0011}\,\overbrace{5}^{0101}{}_{16} = 110101_2$, $\overbrace{3}^{03}\,\overbrace{5}^{11}{}_{16} = 311_4$;

c) $\overbrace{2}^{0010}\,\overbrace{1}^{0001}\,\overbrace{3}^{0011}{}_{16} = 1000010011_2$, $\overbrace{2}^{02}\,\overbrace{1}^{01}\,\overbrace{3}^{03}{}_{16} = 20103_4$.

2.5.6. a) $\underbrace{2}_{2}\,\underbrace{10}_{3}\,\underbrace{12}_{5}{}_3 = 235_9$; b) $\underbrace{11}_{4}\,\underbrace{11}_{4}{}_3 = 44_9$; c) $\underbrace{22}_{8}{}_3 = 8_9$.

2.5.7. a) $\overbrace{7}^{21}\,\overbrace{8}^{22}{}_9 = 2122_3$; b) $\overbrace{1}^{01}\,\overbrace{1}^{01}\,\overbrace{1}^{01}{}_9 = 10101_3$; c) $\overbrace{2}^{02}\,\overbrace{2}^{02}{}_9 = 202_3$.

2.5.8. a) $10_2 = 2_{10}$; b) $11_2 = 3_{10}$; c) $111_2 = 7_{10}$.

2.5.9. a) $1\cdot 2 = 2$ db, 10_2 és 11_2;

b) $1\cdot 2\cdot 2 = 4$ db, 100_2, 101_2, 110_2 és 111_2;

c).$1\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 8$ db, 1000_2, 1001_2, 1010_2, 1011_2 1100_2, 1101_2, 1110_2 és 1111_2.

2.5.10. a) Átírva tízes számrendszerbe:

$7^7 = 823543$ és $6\cdot 7^6+6\cdot 7^5+6\cdot 7^4+6\cdot 7^3+6\cdot 7^2+6\cdot 7+6=823542$, tehát 7^7 nagyobb eggyel.

vagy:

$7^7 = 10000000_7 > 666666_7 = 6\cdot 7^6+6\cdot 7^5+6\cdot 7^4+6\cdot 7^3+6\cdot 7^2+6\cdot 7+6$;

b)

elvégezve a kivonást: vagy átírva tízes számrendszerbe:

$$\begin{array}{r} 100000_5 \\ -\ 32014_5 \\ \hline 12431_5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3125 \\ -\ 2134 \\ \hline 991 \end{array}$$

2.5.11.

a)

$$\begin{array}{r} 1101011_2 \\ +\qquad\quad 1_2 \\ \hline 1101100_2 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 1101011_2 \\ +\qquad\ 11_2 \\ \hline 1101110_2 \end{array}$$

c) Az 1101011_2 kétszerese: 11010110_2. Az összes számjegy eggyel magasabb helyi értékre kerül, mert a számrendszer alapszámával szoroztunk hasonlóan, mint tízes számrendszerben a tízzel való szorzásnál.

d) Az 1101011_2 négyszerese: 110101100_2. (Az alapszám négyzetével szoroztunk.)

2.5.12.

+	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

·	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Írjuk egymás alá az összeadandókat, ügyelve arra, hogy a maradékot vigyük tovább!

a)

$$\begin{array}{r} 2130_4 \\ +\ 2011_4 \\ \hline 10202_4 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 10023_4 \\ +\ 13211_4 \\ \hline 23300_4 \end{array}$$

A szorzásnál hasonlóan járunk el.

c)

$$\begin{array}{l} \underline{\ 3201_4} \cdot 32_4 \\ 22203 \\ \underline{\ 13002} \\ 301032_4 \end{array}$$

2.5.13. Megoldható a feladat tízes számrendszerbe való átírással:

a) 123_4 = 27, páratlan; b) 111111_2 = 63, páratlan;

c) 111111_3 = 364, páros; d) 4210_6 = 942, páros;

e) 1357_9 = 1024, páros; f) 101010_2 = 42, páros;

g) 1000_5 = 125, páratlan; h) 12345_7 = 3267, páratlan.

Gyorsabban oldhatjuk meg a feladatot, ha az eredeti számrendszerben vizsgáljuk a számokat.

A páros alapszámú számrendszerben elegendő az utolsó számjegyet vizsgálni, hiszen a többi helyi érték mindegyike osztható kettővel.

Páratlan alapszám esetén a számjegyek összege dönti el, hogy a szám páros vagy páratlan, mert minden helyi érték kettes maradéka egy.

2.5.14. Mindegyik számítás helyes. A szorzás és a részletszorzatok összeadása közben nincs alapszám átlépés. A szorzás minden hétnél nagyobb alapú számrendszer esetén a felírt alakban helyes.

2.5.15. Egész tömegeket tudunk lemérni 1kg és 31 kg között:

1 = 1, **2** = 2, **3** = 2+1, **4** = 4, **5** = 4+1, **6** = 4+2, **7** = 4+2+1, …, **29** = 16+8+4+1, **30** = 16+8+4+2, **31** = 16+8+4+2+1.

A rendelkezésre álló tömegek pontosan a kettes számrendszer első öt helyiértékeinek felelnek meg. Ha egy tömeget felhasználunk, annak a számrendszerben megfelelő számjegy 1, ha nem, akkor 0.

2.5.16. Osszuk el hattal maradékosan a 8000-t!

8000:6 = 1333, maradék 2, azaz megtelik 1333 db tojástartó és kimarad 2 db tojás.

1333:6 = 222, maradék 1, azaz megtelik 222 db fehér doboz és kimarad 1 tojástartó.

222:6 = 37, maradék 0, így megtelik 37 db színes doboz és nem marad ki fehér doboz. A fentiek alapján 1333 db tojástartót, 222 db fehér dobozt és 37 színes dobozt használnak fel és kimarad 2 db tojás.

kimaradt fehér dobozok

kimaradt tojástartók

kimaradt tojások

$\underbrace{101}_{101_6}012_6 = 8000$

$101_6 = 37$ db színes doboz, $37 \cdot 6 = 222$ db fehér doboz, $222 \cdot 6 = 1333$ db tojástartó, $1333 \cdot 6 = 7998$ db tojás.

2.6. Egyszerűbb számelméleti függvények

2.6.1. Meghatározhatjuk az osztók számát az összes osztó megkeresésével osztópárokkal vagy a prímtényezős felbontásból, de ez a legtöbb esetben lassú és nehézkes megoldás. Legyen egy pozitív természetes szám prímtényezős felbontása: $N = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... p_n^{k_n}$, ekkor $d(N) = (k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot \ldots (k_n+1)$, azaz a prímtényezős felbontásból vegyünk minden kitevőnél eggyel nagyobb számot és képezzük ezek szorzatát, ekkor megkapjuk az adott szám osztóinak számát.

a) $d(1) = 1$;	b) $d(5) = 2$;	c) $d(9) = 3$;
d) $d(10) = 4$;	e) $d(100) = 9$;	f) $d(625) = 5$;
g) $d(90) = 12$;	h) $d(4851) = 18$;	i) $d(1024) = 11$.

2.6.2.

a) $2 = (\mathbf{1}+1) \Rightarrow N = p^1$, azaz bármely prímszám, pl.: 2; 5; 7; … 73; …

b) $3 = (\mathbf{2}+1) \Rightarrow N = p^2$, azaz bármely prímnégyzet, pl.: 4; 9; 25; 49; 121; …

c) $8 = (\mathbf{7}+1) \Rightarrow N = p^7$, pl.: $2^7 = 128$; $3^7 = 2178$; $5^7 = 78125$; … vagy

$8 = (\mathbf{3}+1)\cdot(\mathbf{1}+1) \Rightarrow N = p^3\cdot q^1$, pl.: $2^3\cdot 3 = 24$; $3^3\cdot 2 = 54$; $5^3\cdot 11 = 875$ … vagy

$8 = (\mathbf{1}+1)\cdot(\mathbf{1}+1)\cdot(\mathbf{1}+1) \Rightarrow N = p^1\cdot q^1\cdot r^1$, pl.: $2\cdot 3\cdot 5 = 30$; $3\cdot 7\cdot 13 = 273$;...

d) $10 = (\mathbf{9}+1) \Rightarrow N = p^9$, pl.: $2^9 = 512$; $3^9 = 19683$; … $11^9 = 2357947691$ … vagy

$10 = (\mathbf{4}+1)\ (\mathbf{1}+1) \Rightarrow N = p^4\cdot q^1$, pl.: $2^4\cdot 3 = 48$; $5^4\cdot 13 = 8125$; …

e) $12 = (\mathbf{11}+1) \Rightarrow N = p^{11}$, pl.: $2^{11} = 2048$; $3^{11} = 177147$; … vagy

$12 = (\mathbf{5}+1)\cdot(\mathbf{1}+1) \Rightarrow N = p^5\cdot q^1$, pl.: $2^5\cdot 3 = 96$; $3^5\cdot 5 = 1215$; … vagy

$12 = (\mathbf{3}+1)\cdot(\mathbf{2}+1) \Rightarrow N = p^3\cdot q^2$, pl.: $2^3\cdot 7^2 = 392$; $3^3\cdot 5^2 = 675$; … vagy

$12 = (\mathbf{1}+1)\cdot(\mathbf{1}+1)\cdot(\mathbf{2}+1) \Rightarrow N = p^1\cdot q^1\cdot r^2$, pl.: $2\cdot 3\cdot 5^2 = 150$; $3\cdot 5\cdot 7^2 = 735$; ...

f) $90 = (\mathbf{89}+1) \Rightarrow N = p^{89}$, pl.: 2^{89}; 7^{89}; 17^{89} … vagy

$90 = (\mathbf{44}+1)\ (\mathbf{1}+1) \Rightarrow N = p^{44}\cdot q^1$, pl.: $2^{44}\cdot 3$; $3^{44}\cdot 5$ … vagy

⋮

$90 = (\mathbf{2}+1)\cdot(\mathbf{4}+1)\cdot(\mathbf{5}+1) \Rightarrow N = p^2\cdot q^4\cdot r^5$, pl.: $2^2\cdot 3^4\cdot 5^5$; $5^2\cdot 3^4\cdot 2^5$ … vagy

⋮

2.6.3. a) Megválaszolandó, hogy hányféle kéttényezős szorzattal állítható elő a 72, másképp fogalmazva hány osztópárja van? A feladatban különbséget teszünk 1x72 és 72x1 szorzatok között (sor - oszlop), így az osztópárok száma megegyezik az osztók számával. Mivel $d(72) = 12$, ezért 12 különböző módon vonulhatnak fel.

b) $d(81) = 5$, tehát 5 féle alakzat lehetséges.

c) Ha $d(N)$ páratlan, azaz a versenyzők száma négyzetszám.

2.6.4. Egy természetes szám osztóinak a száma akkor és csak akkor páratlan, ha az adott szám négyzetszám.

2.6.5. Egy természetes szám akkor és csak akkor négyzetszám, ha minden prímtényezőjének kitevője páros szám.

Négyzetszámok: b), $(2^3 \cdot 5^2 \cdot 11^5)^2$ és d), $(p^2 \cdot q^6)^2$

2.6.6.

a) $346 = 2 \cdot 173$, legalább $2 \cdot 173$-mal kell szorozni;

b) $128 = 2^7$, legalább 2-vel kell szorozni;

c) $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$, legalább 7-tel kell szorozni;

d) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, legalább $2 \cdot 3$-mal kell szorozni;

e) $2^4 \cdot 3^5 \cdot 11^6$, legalább 3-mal kell szorozni;

f) $p^2 \cdot q^9 \cdot r$, legalább $(q \cdot r)$-rel kell szorozni;

g) q^{100}, négyzetszám, ezért nem szükséges megszorozni;

h) $p^{12} \cdot q^{10} \cdot r^{11}$, legalább r-rel kell szorozni;

i) $2 \cdot 9 \cdot r^2$, legalább $2 \cdot 9$-cel kell szorozni.

2.6.7. Egy természetes szám akkor és csak akkor köbszám, ha minden prímtényezőjének kitevője a három többszöröse.

Köbszámok: a), $8 = 2^3$; c), $125 = 5^3$; d), $216 = 2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3$; e), $(2^3 \cdot 5)^3$; f), $(3^2 \cdot 2^2)^3$.

Négyzetszámok: f), $(3^3 \cdot 2^3)^2$ és h), $(3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4)^2$.

Ha egy természetes szám egyszerre négyzetszám és köbszám is, akkor az valamely természetes számnak hatodik hatványa: f), $(3 \cdot 2)^6$.

2.6.8.

a) $125 = 5^3$ köbszám, ezért nem szükséges megszorozni;

b) $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, legalább $2^2 \cdot 3 \cdot 5$-tel kell szorozni;

c) $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, legalább $3 \cdot 7^2$-nel kell szorozni;

d) $2^9 \cdot 5^2 \cdot 7^7$, legalább $5 \cdot 7^2$-nel kell szorozni;

e) $p^3 \cdot q^6 \cdot r^9$ köbszám, ezért nem szükséges megszorozni;

f) $p^4 \cdot q$, legalább $(p^2 \cdot q^2)$-tel kell szorozni;

g) $100 \cdot p^3 \cdot q = 2^2 \cdot 5^2 \cdot p^3 \cdot q$, legalább $2 \cdot 5 \cdot q^2$-tel kell szorozni;

h) $8 \cdot q^2 = 2^3 \cdot q^2$, legalább q-val kell szorozni;

i) $p^{99} \cdot q^{66} \cdot r^{33}$ = köbszám, ezért nem szükséges megszorozni.

2.6.9. Egy természetes szám akkor és csak akkor negyedik hatvány, ha minden prímtényezőjének kitevője a négy többszöröse.

Egy természetes szám akkor és csak akkor n-edik ($n \in \mathbb{N}$) hatvány, ha minden prímtényezőjének kitevője az n többszöröse.

2.6.10. $d(A) = 30 \Rightarrow x = 2$, $d(B) = 24 \Rightarrow y = 1$.

$A \cdot B = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 7^3 \Rightarrow d(A \cdot B) = (5+1) \cdot (5+1) \cdot (3+1) = 144$.

2.6.11. $d(A) = 36 \Rightarrow x = 2$, $d(B) = 18 \Rightarrow y = 1$.

$\frac{A}{B} = 5 \cdot 7 \Rightarrow d\left(\frac{A}{B}\right) = (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 4$.

Legyen egy pozitív természetes szám prímtényezős felbontása $N = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots p_n^{k_n}$, ekkor $S(N) = \frac{p_1^{k_1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2} - 1}{p - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n^{k_n} - 1}{p_n - 1}$. Például $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $S(36) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = 7 \cdot 13 = 91$.

2.6.12.

a) $S(1) = 1$;	b) $S(5) = 6$;	c) $S(18) = 39$;
d) $S(25) = 31$;	e) $S(30) = 72$;	f) $S(225) = 403$;
g) $S(90) = 234$;	h) $S(504) = 1560$;	i) $S(1000) = 2340$.

2.6.13.

a) $S(2^8) = 2^8-1$; b) $S(3^4\cdot 5) = \frac{3^5-1}{2}\cdot\frac{5^2-1}{4} = 726$;

c) $S(3\cdot 5^2\cdot 7^3)$; $= \frac{3^2-1}{2}\cdot\frac{5^3-1}{4}\cdot\frac{7^4-1}{6} = 49600$;

d) $S(p) = p+1$, hiszen: $\frac{p^2-1}{p-1} = \frac{(p+1)\cdot\cancel{(p-1)}}{\cancel{p-1}} = p+1$;

e) $S(p\cdot q) = (p+1)\cdot(q+1) = p\cdot q+p+q+1$;

f) $S(p^2\cdot q\cdot r^3) = (p^2+p+1)\cdot(q+1)\cdot(r^3+r^2+r+1)$;

g) $S(3\cdot p^2) = 4\cdot(p^2+p+1)$;

h) $S(5^2\cdot p\cdot q^3) = 31\cdot(p+1)\cdot(q^3+q^2+q+1)$;

i) $S(1000\cdot q) = \mathrm{S}(2^3\cdot 5^3\cdot q) = 2340\cdot(q+1)$.

2.6.14.

a) tökéletes szám, mert $S(28) = \frac{2^3-1}{1}\cdot\frac{7^2-1}{6} = 7\cdot 8 = 56$ $(= 2\cdot 28)$;

b) nem tökéletes szám, mert $S(176) = \frac{2^5-1}{1}\cdot\frac{11^2-1}{10} = 31\cdot 12 = 372$ $(\neq 2\cdot 176)$;

c) tökéletes szám, mert $S(496) = \frac{2^5-1}{1}\cdot\frac{31^2-1}{30} = 31\cdot 32 = 992$ $(= 2\cdot 496)$;

d) tökéletes szám, mert $S(8128) = \frac{2^7-1}{1}\cdot\frac{127^2-1}{126} = 127\cdot 128 = 16256$ $(= 2\cdot 8128)$.

2.6.15. $d(p) = p+1$, azaz minden prímszám osztóinak száma $p+1 \neq 2\cdot p$, tehát prímszám nem lehet tökéletes szám.