VIK, Mérnök Informatikus szak (BSc)
ANALÍZIS (2)

Függvénysorok

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
mérnök informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné
Kónya Ilona

2007. február

Szerkesztette: Győri Sándor

1. Függvénysorok

Az $f_k : D \mapsto \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ függvényeknek a közös értelmezési tartománya $D \neq \emptyset$. Ezen függvények végtelen összegét nevezzük függvénysornak:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_k + \cdots .$$

Ezt a végtelen összeget egy s függvénynek tekinthetjük, amely a $H \subset D$ halmazon értelmezett, ha $x \in H$ esetén teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = s(x) .$$

Ⓓ $$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x) : \quad n\text{-edik részletösszeg} .$$

Tehát $x \in H$ esetén:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) .$$

Az s függvényt összegfüggvénynek, a H halmazt konvergenciatartománynak nevezzük és azt írjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) := s(x) , \qquad x \in H .$$

A nyomaték kedvéért ilyenkor azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ függvénysor a H halmazon pontonként konvergál s-hez. Tehát a pontonkénti konvegencia definíciója a következő:

Ⓓ Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ függvénysor a $H \subset D$ halmazon pontonként konvergál az $s : H \mapsto \mathbb{R}$ összegfüggvényhez, ha $\forall\, x_0 \in H$-ra $\exists$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0) := s(x_0) ,$$

azaz $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon, x_0)$, hogy

$$|s_n(x_0) - s(x_0)| < \varepsilon , \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon, x_0) , \quad x_0 \in H$$

Nyilvánvaló, hogy különböző $x_0 \in H$ esetén más-más $\big(s_n(x_0)\big)$ sorozathoz juthatunk, így $N(\varepsilon, x_0)$ értéke is függhet x_0-tól.

Ha a H halmaz x_0 pontjaihoz $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén találhatunk közös, x_0-tól független $N(\varepsilon)$ küszöbszámot, akkor azt mondjuk, hogy a H halmazon a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergál az $s(x)$-hez.

Ⓓ A $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ függvénysor a $H \subset D$ halmazon egyenletesen konvergál az s függvényhez, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists$ x-től független $N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon\ , \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon)\ , \quad \forall\, x \in H$$

Tehát az $N(\varepsilon)$ küszöbszám univerzálisan "jó" a H halmaz minden pontjában.

Következmény:

Vezessük be az $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ jelölést, melyet n-edik maradékösszegnek nevezünk.

$$\text{Ha} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = s(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} (s(x) - s_n(x)) = 0.$$

Pl. $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k = \frac{\frac{x}{3}}{1 - \frac{x}{3}}\ , \qquad \text{ha} \quad |x| < 3$$

Tehát $\quad s(x) = \dfrac{x}{3-x}\ , \qquad H = (-3, 3)$

Ez egy geometriai sor, amely pontosan akkor konvergál, ha q kvóciense $\left(q = \frac{x}{3}\right)$ a $(-1, 1)$-be esik, és az összeg $\dfrac{a}{1-q}$, ahol $a = \left(\frac{x}{3}\right)^1$

Pl.

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k = \dfrac{x}{3-x}$, a $H^* = (-2, 2)$ halmazon <u>egyenletesen konvergens</u>.

Ugyanis tetszőleges $x \in (-2, 2)$ esetén:

$$|s(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k \right| = \left| \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{x}{3}} \right| = \frac{\left(\frac{|x|}{3}\right)^{n+1}}{\left|1 - \frac{x}{3}\right|} \le$$

$$\leq \frac{\left(\frac{|x|}{3}\right)^{n+1}}{\left|1-\frac{|x|}{3}\right|} \leq \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \varepsilon\,, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon)$$

Itt az $N(\varepsilon)$ értékét a $3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ sorozathoz választhattuk. Tehát a $H^* = (-2,2)$ halmaz $\forall\ x_0$ pontjában ugyanaz az $N(\varepsilon)$ küszöbszám használható, vagyis a H^* halmazon a konvergencia egyenletes.
Nyilván a $H^{**} = [-2,2]$ halmazon is egyenletes a konvergencia. Sőt $0 < \delta < 3$ esetén a $[-3+\delta\,,\,3-\delta]$ halmazon is egyenletes a konvergencia.

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k = \frac{x}{3-x}$, a $H = (-3,3)$ halmazon nem egyenletesen konvergens.

Ugyanis, ha

$$|s(x) - s_n(x)| = \frac{\left(\frac{|x|}{3}\right)^{n+1}}{\left|1-\frac{x}{3}\right|} < \varepsilon\,, \quad \forall\, n > N(\varepsilon) \text{ és } \forall\, x \in (-3,3)$$

lenne, de ekkor $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\left(\frac{|x|}{3}\right)^{n+1}}{\left|1-\frac{x}{3}\right|} \leq \varepsilon\,,\quad \forall\, n > N(\varepsilon)$ lenne, amiből $\infty \leq \varepsilon$ adódna, ami persze ellentmondás.

(T) Ha $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens H -n, akkor pontonként is konvergens.

Ez a definíció közvetlen következménye, hiszen $N(\varepsilon) = N(\varepsilon, x_0)$ választható $\forall\ x_0 \in H$ esetén.

(D) A $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ eleget tesz a H halmazon a Cauchy kritériumnak, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ N(\varepsilon)$ x -től független küszöbszám, hogy $\forall\ x \in H$ esetén

$$|\, f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x)\,| < \varepsilon\,, \quad \forall\, m > n > N(\varepsilon)\,.$$

Ⓣ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens H-n

$$\iff \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ eleget tesz a Cauchy kritériumnak } H\text{-n.}$$

Ⓑ $\Longrightarrow$ bizonyítása:

Az egyenletes konvergencia miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\frac{\varepsilon}{2}$- höz $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, hogy $|s_m(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $m > n > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ $\forall\, x \in H$ - ra.

Ebből következik, hogy

$$|s_m(x) - s_n(x)| = |s_m(x) - s(x) + s(x) - s_n(x)| \le$$

$$\le |s_m(x) - s(x)| + |s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ ha } m > n > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \ \forall\, x \in H \text{ - ra,}$$

vagyis teljesül a Cauchy kritérium.

A tétel másik részét nem bizonyítjuk. (A numerikus sorokra vonatkozó megfelelő tétel bizonyításához hasonlóan bizonyítható, felhasználva a H halmazon való egyenletes konvergencia fogalmát.)

Megjegyezzük, hogy most is beszélhetünk abszolút konvergenciáról:

Ⓓ A $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ abszolút konvergens x_0-ban, ha $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x_0)|$ konvergens.

A függvénysor abszolút konvergenciájából következik a függvénysor konvergenciája:

Ha $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x_0)|$ konvergens $x_0 \in H$ $\Longrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0)$ is konvergens $x_0 \in H$.

Ez az állítás a numerikus sorokra tanult tétel megismétlése.

1.1. Weierstrass kritérium

(Egy elégséges tétel függvénysor egyenletes konvergenciájára.)

Ⓣ Ha $\exists\,(b_k)$, hogy $|f_k(x)| \le b_k\,;\ x \in H\,;\ k = 0, 1, \ldots$ és $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergens numerikus sor, akkor

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ abszolút konvergens $\forall\, x \in H$,

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens H-n.

Ⓑ

a) A $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ abszolút konvergencája a majoráns kritérium miatt következik a H halmaz minden pontjában.

b) Megmutatjuk, hogy $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ eleget tesz a Cauchy kritériumnak a H halmazon. Ugyanis $\forall\, x \in H$:

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| \le |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_m(x)| \le$$
$$\le b_{n+1} + \cdots + b_m < \varepsilon, \quad \text{ha } m > n > N(\varepsilon),$$

mert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ teljesíti a Cauchy kritériumot, ugyanis $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergens. $N(\varepsilon)$ független x-től, mivel a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ numerikus sorhoz választottuk. Mivel a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ teljesíti a Cauchy kritériumot H-n $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens H-n. ■

Pl. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n^3x + \pi)}{n^2 + 1}$ abszolút konvergens $\forall\, x \in \mathbb{R}$ és egyenletesen konvergens a $(-\infty, \infty)$ intervallumon, mert

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} = b_n\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \sum^{\infty} b_n = \sum^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergens.}$$

Pl. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-n(|x|+1)}$

$$|f_n(x)| = f_n(x) = \frac{n}{\left(\mathrm{e}^{|x|+1}\right)^n} < \frac{n}{\mathrm{e}^n} = b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konvergens, mert} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{egyenletesen konvergens } \mathbb{R}\text{-en.}$$

Tudjuk, hogy véges sok folytonos függvény összege is folytonos és tagonként integrálhatjuk véges sok függvény összegét, illetve tagonként deriválhatjuk. Végtelen összeg (függvénysor) esetére ezek az állítások nem feltétlenül teljesülnek. Azonban a végtelen soroknál egyenletes konvergenciát megkövetelve elégséges feltételeket nyerünk arra , hogy a függvénysor összege folytonos legyen, tagonként integrálható legyen, illetve az összege deriválható legyen.

1.2. $[a, b]$ intervallumon egyenletesen konvergens függvénysorok tulajdonságai

(T1) Ha $f_k \in C^0_{[a,b]}$ és $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens $[a, b]$-n , akkor az $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ összegfüggvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon.

(¬B)

A tétel akkor is igaz, ha $I = [a, b]$ helyett mindenütt $I = (a, b)$, vagy $I = [a, b)$, illetve $I = (a, b]$ szerepel.

(M) A tétel jelentése:

$$\lim_{x\to x_0} s(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0) = s(x_0)$$

A tétel következménye:
Ha az összeadandó függvények folytonosak, de az $s(x)$ összegfüggvény nem folytonos az I intervallumon, akkor a konvergencia nem egyenletes I intervallumon.

(Pl.) $\sum_{k=1}^{\infty} (x^k - x^{k-1})$ nem egyenletesen konvergens a H konvergenciatartományon.

Ugyanis

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (x^k - x^{k-1}) = x^1 - x^0 + x^2 - x^1 + x^3 - x^2 + \cdots + x^n - x^{n-1} = x^n - 1$$

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x^n - 1) = \begin{cases} -1\,, & \text{ha } |x| < 1 \\ 0\,, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

A konvergenciatartomány $H = (-1, 1]$. A $(-1, 1]$ halmazon a konvergencia nem egyenletes, mert az összeadandó $f_k(x) = x^k - x^{k-1}$ függvények folytonosak, de az $s(x)$ összegfüggvény nem folytonos a $(-1, 1]$ halmazon.

T2 Ha $f_k \in C^0_{[a,b]}$ és $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens a $H = [a, b]$ halmazon, akkor

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\neg\mathrm{B})$$

Pl. Láttuk, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k$ egyenletesen konvergens a $[-2, 2]$ -on, ezért nyilván a $[0, 2]$ -on is egyenletesen konvergens. (A $[-2, 2]$ -on alkalmas, x-től független $N(\varepsilon)$ küszöbszám alkalmas a $[0, 2]$ -on is.)
Így alkalmazhatjuk a T_2 tételt:

$$I = \int_0^2 \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k \Big)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_0^2 \left(\frac{x}{3}\right)^k \mathrm{d}x \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \left.\frac{x^{k+1}}{(k+1)\,3^k}\right|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)\,3^k}$$

Másrészt

$$I = \int_0^2 \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k \Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x}{3-x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^2 \left(\frac{3-x}{3-x} - \frac{3}{3-x} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= -\left[x + 3\,\ln(3-x) \right]_0^2 = -\,(2 + 3\ln 1 - 3\ln 3) = 3\ln 3 - 2\,,$$

Vagyis

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)\,3^k} = 3\ln 3 - 2$$

Tehát T_2 segítségével egy numerikus sor összegét határoztuk meg.

(T₃) Ha $f_k \in C^1_{[a,b]}$ és

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{egyenletesen konvergál } [a,b]\text{-n és}$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x) \quad \text{egyenletesen konvergál } [a,b]\text{-n,}$$

akkor s deriválható $[a,b]$-n, és $s' = g$. (¬B)

Tehát

$$s'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} s(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x) = g(x)$$

A T_1, T_2 és T_3 tételekben szereplő függvénysorokról igen fontos feltenni, hogy a szóbanforgó halmazon egyenletesen konvergensek. Ezt olyan példákon mutatjuk meg, ahol a konvergencia a megfelelő halmazon csak pontonként, de nem egyenletesen teljesül. Az egyszerűség kedvéért az $s_n(x)$ részletösszeg függvényt adjuk meg. Ezt azért tehetjük meg, mert tetszőleges $s_n(x)$ függvényhez van olyan függvénysor, amelynek éppen $s_n(x)$ az n-edik részletösszege, mégpedig a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(s_k(x) - s_{k-1}(x)\big)\,, \qquad \text{ahol} \quad s_0(x) = 0.$$

Ugyanis ennek az n-edik részletösszege:

$$\sum_{k=1}^{n} \big(s_k(x) - s_{k-1}(x)\big) = s_1(x) - s_0(x) + s_2(x) - s_1(x) + \cdots s_n(x) - s_{n-1}(x) = s_n(x) - s_0(x) = s_n(x)$$

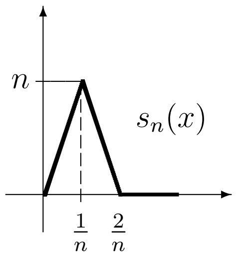
(Pl.) $s_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2} \ \Big(= (\mathrm{e}^{-x^2})^n\Big) \qquad D = \mathbb{R}\,;\ H = \mathbb{R}\,;$

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Az s függvény nem folytonos, pedig az s_n függvények folytonosak.

(Pl.)

$$s_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{ha } x \in [0, 1/n) \\ -n^2 x + 2n, & \text{ha } x \in [1/n, 2/n) \\ 0, & \text{ha } x > 2/n \end{cases}$$



$s(x) \equiv 0$ az $x \in [0, \infty) = H$ halmazon, mert

$s_n(0) = 0 \xrightarrow[\infty]{n} 0$

$x > 0$: $\quad s_n(x) = 0\,,$ ha $\dfrac{2}{n} \le x\,,$ vagyis $n \ge \dfrac{2}{x}$

Például $x = \dfrac{1}{10}$ - nél $s_n(x) = 0$, ha $n \ge 20$.

Ugyanakkor

$$0 = \int_0^1 s(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} s_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\ \mathrm{d}x \quad \neq$$

$$\neq \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 f_k(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 f_k(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n \right) = 1$$

Innen az is leolvasható, hogy

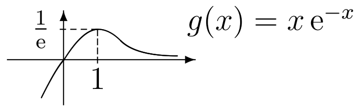
$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} s_n(x)\ \mathrm{d}x \quad \neq \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(x)\ \mathrm{d}x\ ,$$

tehát az integrálás és a limeszképzés se cserélhető fel mindig.

Pl. $\boxed{\text{Igaz-e} \qquad \int_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^{nx}}\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^2 \frac{x^n}{\mathrm{e}^{nx}}\,\mathrm{d}x}$

Megoldás:

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^n = (x\mathrm{e}^{-x})^n = (g(x))^n \in C^0_{\mathbb{R}}$$



Az f_n függvények vizsgálatából megállapítható, hogy

$$|f_n(x)| \le \max_{x\in[0,2]} |f_n(x)| = f_n(1) = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n = b_n$$

és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ konvergens , $\left(0 < q = \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1\,,\right.$ geometriai sor).

Tehát a Weierstrass kritérium miatt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konvergens $[0\,,\,2]$ intervallumon.

Az előzőek miatt $\int$ és $\sum$ felcserélhető (T_2 tétel) , tehát a példa állítása igaz.

Pl.

> Differenciálható-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} \frac{x}{n}}{n^2}$ sort összegfüggvénye és igaz-e, hogy s deriváltját a sor tagonkénti deriválásával kapjuk?

Megoldás:

$$|f_n(x)| = \frac{\left|\operatorname{arctg} \frac{x}{n}\right|}{n^2} < \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{konvergens}$$

$$\overset{\text{Weierstrass kr.}}{\Longrightarrow} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{egyenletesen konvergens } (-\infty, \infty)\text{-en.}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ egyenletesen konvergens-e?

$$f_n \in C^1_{\mathbb{R}}\,, \qquad f_n'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{n}}{n^2} = \frac{1}{n^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arctg} \frac{x}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}$$

$$|f_n'(x)| = \frac{1}{n^3} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{n^2}} \le \frac{1}{n^3} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad \text{konvergens.}$$

Ezért a Weierstrass kritérium miatt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ egyenletesen konvergens $(-\infty, \infty)$-en.

T_3 feltételei teljesülnek $\Longrightarrow$ az összegfüggvény deriválható és deriváltját a végtelen sor tagonkénti deriválásával kapjuk.

Pl.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n^3 x^2 + \frac{\pi}{2}\right)}{5^n + n^2 x^4} = ?}$$

Megoldás:
Mivel a sor összegfüggvényét nem tudjuk felírni, csak akkor van reményünk a feladat megoldására, ha a limeszképzés és a szummázás felcserélhető. Ez a folytonosságról szóló T_1 tétel alkalmazását igényli.

$$f_n(x) = \frac{\sin\left(n^3\, x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)}{5^n \,+\, n^2\, x^4} \in C^0_{\mathbb{R}} \quad \text{és a sor konvergenciája egyenletes } \mathbb{R}\text{-en, mert}$$

$$|f_n(x)| = \frac{\left|\sin\left(n^3\, x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)\right|}{5^n \,+\, n^2\, x^4} \le \frac{1}{5^n} = b_n\,, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \text{konvergens}$$

gemetriai sor $\left(0 \le q = \dfrac{1}{5} \le 1\right)$.

$$\underset{\text{Weierstrass kr.}}{\Longrightarrow} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \ \text{függvénysor egyenletesen konvergens } \mathbb{R}\text{-en.}$$

Így a T_1 tétel feltételei teljesülnek, tehát alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n^3\, x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)}{5^n \,+\, n^2\, x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(n^3\, x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)}{5^n \,+\, n^2\, x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

1.3. Speciális függvénysorok

A továbbiakban az alábbi speciális függvénysorokkal ismerkedünk meg:

1.) Hatványsorok (Taylor sorok)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \quad : \quad x_0 \text{ középpont körüli}$$

$$(a_k \in \mathbb{R})$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad : \quad \text{origó körüli}$$

2.) Trigonometrikus sorok (Fourier sorok)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

2. Hatványsorok

Elég a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ hatványsorral foglalkozni, mert az x_0 bázispontú hatványsor $u := x - x_0$ helyettesítéssel $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, u^k$ alakú lesz.

(T₁) Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ sor x_2-ben konvergens, akkor $\|x_1\| < \|x_2\|$ esetén x_1-ben abszolút konvergens és így konvergens is.

(B) Megmutatjuk, hogy x_1-ben abszolút konvergens $\Longrightarrow$ konvergens is.

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_2^k$ konvergens $\Longrightarrow$ $\lim_{k\to\infty} a_k x_2^k = 0$ (a konvergencia szükséges feltétele)

Konvergens sorozat korlátos, tehát $\exists\, K$: $\left|a_k x_2^k\right| \le K \quad \forall\, k$-ra

$$\left|a_k x_1^k\right| = |a_k|\, |x_2|^k \left|\frac{x_1}{x_2}\right|^k \le K q^k\,, \quad |q| = \left|\frac{x_1}{x_2}\right| < 1,$$

és $\sum_{k=0}^{\infty} K q^k$ konvergens majoráns $\left(= \dfrac{K}{1-q}\right)$.

Így $\sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k x_1^k\right|$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$ konvergens.

■

(T₂) Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor az $x = x_2$ helyen divergens, akkor $\|x_1\| > \|x_2\|$ esetén x_1-ben is divergens.

(B) Indirekt.

Feltesszük, hogy x_1-ben konvergens. De ekkor $\forall\, |x_2| < |x_1|$-re is konvergens lenne az előző tétel miatt, ami ellentmondás.

■

Következmény:

E két tételből már látható, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor H konvergenciatartománya mindig $x_0 = 0$ középpontú, R sugarú nyílt intervallumból és esetleg az R vagy $-R$ végpontokból áll, ahol

$$R = \sup\{\, |x|, \text{ a hatványsor az } x \text{ pontban abszolút konvergens}\}.$$

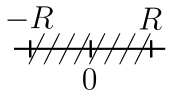
R neve: *konvergenciasugár*

Mivel 0-ban a fenti hatványsor mindig abszolút konvergens, azért H nem üres halmaz, $R > 0$ vagy $R = 0$ vagy $R = \infty$ lehetséges. Az egyes példáknál látjuk majd, hogy ezek az esetek valóban előfordulnak. A hatványsor a $(-R, R)$ pontjaiban abszolút konvergens. A hatványsor a $(-\infty, R)$ vagy a (R, ∞) pontjaiban nem abszolút konvergens de itt konvergencia sem állhat fenn a második tétel miatt, itt tehát divergens a hatványsor. Megjegyezzük, hogy az $0 < R < \infty$ esetén az $x = -R$ illetve az $x = R$ pontokban mind a konvergencia, mind pedig a divergencia fennállhat. Ezért az $x = -R$ illetve az $x = R$ pontokban minden egyes hatványsor esetében külön kell vizsgálódnunk.

Tehát a lehetséges esetek:

a.) $H = \{0\}$ $\quad (R = 0$ esete.) $\quad$ Pl. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$, mert $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k!\, x^k \neq 0$, ha $x \neq 0$.

b.) $\exists\, R > 0$:
$|x| < R$-ben konvergens
$|x| > R$-ben divergens
$|x| = R$? (Nem tudjuk. Minden esetben meg kell vizsgálni.)

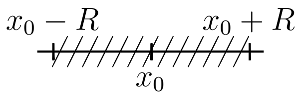


c.) $H = \mathbb{R}$ $\quad (R = \infty)$

Áttérve az x_0 középpontú hatványsorokra, kapjuk az alábbi állítást.

T$_3$

A $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ hatványsor konvergenciatartománya x_0 középpontú intervallum (nyílt, vagy zárt, vagy csak egyik oldalról zárt). Az intervallum belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens.



Vagyis a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ hatványsor $|x - x_0| < R$ - ben abszolút konvergens, $|x - x_0| > R$ - ben divergens, ahol R a sor konvergencia sugara.
A végpontokban a konvergenciát külön kell vizsgálni. Természetesen $R = 0$, illetve $R = \infty$ most is lehet.

Pl. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$$\left.\begin{array}{lll} x = 1\text{-ben} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens } \underset{T_2\, miatt}{\Longrightarrow} & |x| > 1 - \text{ben div.} \\ x = -1\text{-ben} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ konvergens } \underset{T_1\, miatt}{\Longrightarrow} & |x| < 1 - \text{ben konv.} \end{array}\right\} \Longrightarrow R = 1$$

Tehát most $H = [-1, 1)$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ konvergencia sugara már nem vizsgálható az előbbi módszerrel, mert $x = \pm 1$-ben a sor konvergens. Ettől $R > 1$ is igaz lehetne.

Hogyan határozható meg R?

2.1. A konvergenciasugár meghatározása

A hatványsor konvergenciasugarának meghatározására két lehetőségünk is lesz. Ezekhez felhasználjuk a pozitív tagú sorokra vonatkozó általánosított gyök- ill. hányados kritériumot.

Emlékeztető $\left(\sum\limits^{\infty} c_n, \quad c_n > 0\right)$:

Gyökkritérium:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{c_n} \begin{array}{ll} < 1 & \text{a sor konv.} \\ > 1 & \text{a sor div.} \\ = 1 & ? \end{array}$$

Hányados kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \begin{array}{ll} < 1 & \text{a sor konv.} \\ > 1 & \text{a sor div.} \\ = 1 & ? \end{array}$$

Ezeket a konvergencia eldöntésére most is felhasználhatjuk. Nézzünk egy példát!

Pl. $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+x^2)^n}{4^{nx} n^n} \quad \text{Milyen } x\text{-re konvergens?}}$ (Ez nem hatványsor!)

$\forall\, x$-re pozitív tagú. $\quad \sqrt[n]{c_n} = \dfrac{1+x^2}{4^x n} \xrightarrow[\infty]{n} 0 < 1 \implies \forall\, x$-re konvergens

•••

Visszatérve a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsorokra, két tétel is kimondható.

(T4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor R konvergencia sugara:

$\alpha := \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}$ „$R = \dfrac{1}{\alpha}$”

1. $R = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}}$, ha $\alpha > 0$ véges
2. $R = \infty$, ha $\alpha = 0$
3. $R = 0$, ha $\alpha = \infty$

(B)

Az $x = 0$-ban a sor abszolút konvergens, ezért csak $x \neq 0$-ban vizsgálódunk. Az abszolút konvergenciát vizsgáljuk, tehát $\sum^{\infty} c_n := \sum^{\infty} |a_n\, x^n|$ sorra alkalmazzuk a a pozitív tagú sorokra vonatkozó általánosított gyökkritériumot.

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|\,|x|^n} = |x|\ \underbrace{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}}_{:=\alpha} = |x|\ \alpha = q$$

a.) Ha $\alpha = 0$, akkor $q = 0 < 1$, tehát a sor minden x -re abszolút konvergens, $R = \infty$

b.) Ha $\alpha \neq 0$, akkor $|x|\ \alpha = q < 1$, azaz $|x| < 1/\alpha$ esetén a sor abszolút konvergens és $|x| > 1/\alpha$ esetén ($q > 1$) a sor nem abszolút konvergens, így $R = 1/\alpha$.

c.) Ha $\alpha = \infty$, akkor $|x|\ \alpha = q = \infty$ (mivel $x \neq 0$), vagyis a sor nem abszolút konvergens semmilyen x esetén se, így $R = 0$. (Tehát csak $x = 0$ esetén konvergens a hatványsor.)

•••

(T5) Ha létezik a $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, akkor a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ hatványsor R konvergencia sugara:

$R = \dfrac{1}{\alpha}$, ha $\alpha > 0$ véges

$R = \infty$, ha $\alpha = 0$

$R = 0$, ha $\alpha = \infty$

(B)

Az előző tételhez hasonlóan történik, csak most a hányados kritériumot használjuk. A $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ abszolút konvergenciáját $x \neq 0$ esetben vizsgáljuk (az $x = 0$-ban abszolút konvergens).

Ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\ |x|^{n+1}}{|a_n|\ |x|^n} \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\ |x| = \alpha\ |x| \ = \ q\ < 1\,,$$

akkor a sor abszolút konvergens, ha $q > 1$, akkor nem abszolút konvergens.

a.) Ha $\alpha = 0$, akkor $q = 0$ minden x-re, a sor minden x-re abszolút konvergens, tehát $R = \infty$.

b.) Ha $\alpha > 0$, akkor $|x| < 1/\alpha$ esetén fennáll az abszolút konvergencia, az $|x| > 1/\alpha$ esetén nem áll fenn az abszolút konvergencia. Tehát $R = 1/\alpha$.

c.) Ha $\alpha = \infty$, akkor $q = \infty$ (ugyanis $x \neq 0$), a sor minden $x \neq 0$ esetén divergens, tehát $R = 0$.

●●●

Példák:

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n}\, x^n \qquad \text{Konvergenciatartomány?}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{|(-3)^n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{R} \quad \longrightarrow \quad R = 3 \quad \Longrightarrow$$

$|x| < 3$-ban, vagyis $(-3, 3)$-ban abszolút konvergens.
$|x| > 3$-ban divergens.
$|x| = 3$-ra meg kell vizsgálni:

$x = -3:\quad \displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{n}{(-3)^n}\,(-3)^n = \sum_0^{\infty} n$ divergens, mert $n \not\to 0$ (szüks. felt. nem teljesül)

$x = 3:\quad \displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{n}{(-3)^n}\,3^n = \sum_0^{\infty} (-1)^n\, n$ divergens, mert $(-1)^n\, n \not\to 0$ (szüks. felt. nem teljesül)

Így a konvergenciatartomány: $(-3, 3)$

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n \qquad \text{Konvergenciatartomány?}}$

$$a_n = n! \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \to \infty \quad \Longrightarrow \quad R = 0$$

Csak $x = 0$-ban konvergens a sor.

Pl. $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n)\,(x+2)^n \qquad \text{Konvergenciatartomány?}}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2+(n+1)}{n^2+n} = \frac{n+2}{n} = 1+\frac{2}{n} \quad \to \; 1 = \frac{1}{R} \qquad \longrightarrow \qquad R=1$$

$x_0=-2 \qquad |x-(-2)| = \; |x+2|<1$-ben konvergens

$|x+2|>1$-ben divergens

$|x+2|=1$?

$x=-2+1=-1$: $\sum^{\infty}(n^2+n)$ divergens, mert az általános tag $\not\to 0$.

$x=-2-1=-3$: $\sum^{\infty}(n^2+n)(-1)^n$ divergens, mert az általános tag $\not\to 0$.

Konvergenciatartomány: $(-3,-1)$

Pl. $\boxed{1-3x+2^2x^2-3^3x^3+2^4x^4-3^5x^5+\cdots \qquad R=?}$

$$|a_n| = \begin{cases} 2^n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 3^n, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 2, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 3, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Torlódási pontok: } t_1=2\,,\; t_2=3$$

$$\Longrightarrow \qquad \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = 3 = \frac{1}{R} \qquad \longrightarrow \qquad R=\frac{1}{3}$$

Pl. Keresse meg az alábbi sorok konvergenciatartományát!

a.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 9^n}\,x^n$ b.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 9^n}\,(x-1)^n$ c.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 9^n}\,(x-1)^{2n}$

a.) $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\dfrac{|(-1)^n|}{n\cdot 9^n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot 9} \to \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{R} \qquad \longrightarrow \qquad R=9;\; x_0=0$

$x=9$: $\sum^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 9^n}\cdot 9^n = \sum^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ konvergens (de nem abszoluú konvergens)

$x=-9$: $\sum^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 9^n}\cdot(-9)^n = \sum^{\infty}\dfrac{1}{n}\,(-1)^{2n} = \sum^{\infty}\dfrac{1}{n}$ divergens

KT (konvergenciatartomány): $(-9,9]$ $\underline{\underline{-9<x\le 9}}$

b.) Most $x_0=1$, ennek a 9 sugarú környezetéről van szó.

KT: $-9<x-1\le 9 \quad \longrightarrow \quad \underline{\underline{-8<x\le 10}}$

c.) Vigyázat! Most $a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \dfrac{(-1)^{n/2}}{\frac{n}{2}\, 9^{n/2}}, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$

$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}$-nel lehetne dolgozni, de jobb, ha helyettesítéssel visszavezetjük a.)-ra.

$z := (x-1)^2$ esetén: $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\, 9^n}\, z^n$

KT: $-9 < z \leq 9$ (lásd a.)) $\Longrightarrow$ $-9 < (x-1)^2 \leq 9$ adódik

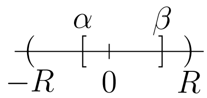
$\Longrightarrow$ KT: $\underline{\underline{|x-1| \leq 3}}$

2.2. A hatványsor tulajdonságai

Az előző fejezet T_3, T_4, T_5 tételei a hatványsor konvergencia tartományáról és abszolút konvergencia tartományáról szólnak. Ezeket itt nem ismételjük meg.

(T) $\boxed{\text{Ha } [\alpha,\beta] \subset (-R,R)\text{, akkor a } \sum a_k\, x^k \text{ hatványsor egyenletesen konvergens } [\alpha,\beta]\text{-n.}}$

(B) $q := \max\{|\alpha|, |\beta|\} < R$



$$|a_k|\,|x|^k \underset{x\in[\alpha,\beta]}{\leq} |a_k|\, q^k$$

és a $\displaystyle\sum_0^{\infty} |a_k|\, q^k$ sor konvergens (mivel a hatványsor a konvergencia tartomány bármely belső pontjában abszolút konvergens). Így a Weierstrass kritérium értelmében fennáll az egyenletes konvergencia az $[\alpha,\beta]$ intervallumon. Ha a hatványsor R-ben is konvergens, akkor $\beta = R$ megengedett.

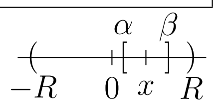
■

●●●

Az egyenletes konvergencia következményei:

(T_1) $\boxed{f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ folytonos } \forall\, x \in (-R,R)\text{-re}}$

(B) $\exists\, [\alpha,\beta]$ $\forall\, x$-hez: $-R < \alpha < x < \beta < R$



$[\alpha,\beta] \subset (-R,R)$ miatt a hatványsor egyenletesen konvergens $[\alpha,\beta]$-n, $a_k x^k$ folytonos mindenütt $\Longrightarrow$ f is folytonos x-ben. (A függvénysorok T_1^* tétele miatt.)

■

(T$_{1a}$) Ha a hatványsor R-ben is konvergens, akkor összegfüggvénye e helyen balról folytonos.

(Tehát $f(R) = \sum\limits_0^\infty a_k\, R^k = \lim\limits_{x\to R-0} f(x)$) $\qquad$ ($\neg$B)

Hasonló tétel mondható ki $(-R)$-re is.

(T$_2$) $f(x) := \sum\limits_{k=0}^\infty a_k\, x^k, \quad x \in (-R, R)\,; \quad [a,b] \subset (-R, R)$

$$\int\limits_a^b \left(\sum_{k=0}^\infty a_k\, x^k \right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^\infty \int\limits_a^b a_k\, x^k\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^\infty a_k\, \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_a^b$$

(B) $a_k\, x^k$ folytonos $[a,b]$-n (sőt mindenütt) és $[a,b] \subset (-R,R)$ miatt $[a,b]$-ben a sor egyenletesen konvergens $\Longrightarrow\ \ldots$ $\quad$ (T_2^* tétel)

■

(T$_3$) A hatványsor összegfüggvénye a konvergenciaintervallumának bármely belső x pontjában differenciálható, mégpedig tagonként:

I. azaz $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum\limits_{k=0}^\infty a_k\, x^k = \sum\limits_{k=1}^\infty k a_k\, x^{k-1}$ (újfent hatványsor)

II. és a két sor konvergenciasugara megegyezik.

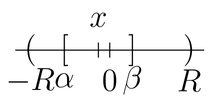
(B) Először a II. állítást látjuk be, mivel a tagonkénti deriválhatósághoz $\sum\limits^\infty f_n'$ egyenletes konvergenciája kell.

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|n\, a_n|} = \overline{\lim}\ \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow\ 1}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{miatt} \quad R_1 = R_2\ (= R)$$

Felhasználtuk, hogy $\sum\limits^\infty n\, a_n\, x^{n-1}$ és $\sum\limits^\infty n\, a_n\, x^n$ együtt konvergens illetve divergens, ugyanis a második sor az első sornak konstansszorosa (x-szerese).

I.:

x-hez $\exists\ [\alpha, \beta] \subset (-R, R)\,$, hogy $x \in (\alpha, \beta)$



$\sum^{\infty} k a_k x^{k-1}$ is hatványsor $\Longrightarrow$ $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$-en egyenletesen konvergens; $\sum^{\infty} a_k x^k$ is konvergens $[\alpha, \beta]$-n és $a_k x^k \in C^1_{[\alpha,\beta]}$ $\Longrightarrow$ tagonként deriválható, azaz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k x^{k-1} \,. \qquad (T_3^* \text{ tétel})$$

■

Az előző tétel következménye:

(T) A hatványsor összegfüggvénye a konvergenciatartomány bármely belső pontjában *akárhányszor* deriválható (mégpedig tagonként) és a konvergenciasugár ugyanaz marad mindegyik derivált sor esetén.

(M) x_0 középpontú hatványsorokra hasonló tételek igazak.

A fentiekből látható, hogy a hatványsor a konvergenciatartomány belsejében ugyanúgy differenciálható és integrálható, mint a polinomok.

●●●

Példák:

(Pl.) $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} := f(x) = ?}$

Vagyis adjuk meg az f összegfüggvényt véges sok elemi függvény segítségével és határozzuk meg a konvergencia tartományt (az f összegfüggvény értelmezési tartományát)!

$R_1 = 1\,,$ mert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 = \frac{1}{R_1}$

$$x = 1: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ \text{div.}, \qquad x = -1: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \ \text{konv.}$$

Tehát $D_f = H = [-1, 1)$. Legyen $[0\,, x] \subset (-1\,, 1)$

$$\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x \overset{N-L.}{=} f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = f(x) = \int_0^x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \right) \mathrm{d}x =$$

$|x| < 1,\ [0, x]$-ben egyenletes a konvergencia

$$= \int_0^x \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k}}_{\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}} \, \mathrm{d}x = \int_0^x \frac{1}{1-x} \, \mathrm{d}x = -\ln(1-x) \qquad (R_2 = R_1 = 1)$$

Tehát $f(x) = -\ln(1-x)$, ha $x \in [-1, 1)$.
(T_{1a} tétel miatt $x = -1$-re is fennáll az egyenlőség.)

Pl. Adja meg zárt alakban a $\Phi(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n\, x^{n-2}$ függvényt!
Határozza meg Φ értelmezési tartományát!

$R = 1$, mert... ; $x = \pm 1$-ben divergens (behelyettesítéssel)

$$\Phi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\, x^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\, x^k; \qquad \Phi(0) = 2$$

Ha $x \neq 0$:

$$\Phi_1(x) := x \cdot \Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\, x^{k+1}$$

$|x| < 1$ esetén $[0, x] \subset (-1, 1)$ (vagy $[x, 0] \subset (-1, 1)$) miatt szabad tagonként integrálni:

$$\int_0^x \Phi_1(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) \int_0^x x^{k+1}\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2} = \frac{x^2}{1-x}$$

$$\Phi_1(x) = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \cdots = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2} \quad \longrightarrow \quad \Phi(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}\, ; \qquad |x| < 1$$

2.3. Analitikus függvény

D f x_0-ban *analitikus*, ha $K_{x_0,R}$-ben $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, (x - x_0)^k$, tehát egy konvergens hatványsor összegfüggvénye.

D f analitikus (α, β)-n, ha $\forall$ pontjában az.

●●●

Mi a kapcsolat egy analitikus függvény és az a_k együtthatók között?

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2(x-x_0) + 3\,a_3(x-x_0)^2 + \cdots + n a_n (x-x_0)^{n-1} + \cdots$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x) = 2\,a_2 + 3\cdot 2\,a_3(x-x_0) + \cdots + n\,(n-1)\,a_n\,(x-x_0)^{n-2} + \cdots$$

$$f''(x_0) = 2\,a_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x_0) = n!\,a_n$$

Tehát $\boxed{a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$

(T) Ha f analitikus x_0-ban, azaz

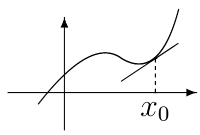
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \quad K_{x_0,R}\text{-ben } (R>0)\,, \quad \text{akkor} \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,,$$

vagyis analitikus függvény egyértelműen fejthető x_0 középpontú hatványsorba, azaz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$$

3. Taylor polinom

Tulajdonképpen már találkoztunk vele:



$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = T_1(x)$

(Az érintő egyenes $\equiv$ elsőrendű Taylor polinom)

Milyen tulajdonságokkal rendelkezik?

$T_1(x_0) = f(x_0)$ és $T_1'(x_0) = f'(x_0)$: T_1 legalább elsőrendben érinti f-et.

(D) Az f és g legalább n-szer differenciálható függvények *legalább n-edrendben* érintik egymást x_0-ban, ha

$$f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0)\,, \quad 0 \le i \le n$$

(D) Az f és g legalább $(n+1)$-szer differenciálható függvények *pontosan n-edrendben* érintik egymást x_0-ban, ha

$$f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0)\,, \quad 0 \le i \le n \quad \text{és} \quad f^{(n+1)}(x_0) \ne g^{(n+1)}(x_0)\,.$$

Pl. $f(x) = \sin x$	$g(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$	$f(0) = g(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$g'(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$	$f'(0) = g'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$g''(x) = -x$	$f''(0) = g''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$g'''(x) = -1$	$f'''(0) = g'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$g^{(4)}(x) = 0$	$f^{(4)}(0) = g^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos x$	$g^{(5)}(x) = 0$	$f^{(5)}(0) \ne g^{(5)}(0)$

Pontosan negyedrendben érintkeznek.

•••

Legyen f legalább n-szer differenciálható x_0-ban! Keressük azt a legfeljebb n-edfokú $T_n(x)$ polinomot, amely x_0-ban legalább n-edrendben érinti f-et.

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_k(x-x_0)^k + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

$$\begin{aligned}
T_n(x_0) &= a_0 = f(x_0) \\
T_n'(x) &= a_1 + 2\,a_2(x-x_0) + \cdots + k\,a_k(x-x_0)^{k-1} + \cdots + n\,a_n(x-x_0)^{n-1} \\
T_n'(x_0) &= a_1 = f'(x_0) \\
T_n''(x) &= 2\,a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0) + \cdots + k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2} + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} \\
T_n''(x_0) &= 2\,a_2 = f''(x_0) \\
T_n'''(x) &= 3!\,a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3} \\
T_n'''(x_0) &= 3!\,a_3 = f'''(x_0) \\
&\vdots \\
T_n^{(k)}(x_0) &= k!\,a_k = f^{(k)}(x_0) \\
&\vdots \\
T_n^{(n)}(x_0) &= n!\,a_n = f^{(n)}(x_0)
\end{aligned}$$

Tehát $$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots, n\,.}$$

Ezzel a következő tételt bizonyítottuk be:

Ⓣ Legyen f legalább n-szer differenciálható x_0-ban! Egyetlen olyan legfeljebb n-edfokú $T_n(x)$ polinom van, amely x_0-ban legalább n-edrendben érinti f-et, mégpedig

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Ⓓ A legalább n-szer differenciálható f függvény x_0 bázispontú n-edrendű Taylor polinomja:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Ⓜ Egy m-edfokú polinom $T_n(x)$ Taylor polinomja $m \le n$ esetén önmaga :
$P_m(x) = T_n(x)$, esetleg más hatványok szerint felírva.
Ugyanis egyetlen n-edrendben érintő polinom van és önmaga ilyen.

●●●

Látni fogjuk, hogy a legtöbb elemi függvény esetén

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)\,,$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty} f(x) - T_n(x) = 0\,.$$

Ezért az $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ maradéktag vizsgálata szükséges. (Megjegyezzük, hogy nem minden függvény esetén tart a Taylor polinom a függvényhez, ha $x \ne x_0$.)

A következő tétel $R_n(x)$ nagyságrendjét mutatja.

Ⓣ Legyen f legalább n-szer differenciálható K_{x_0}-ban. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0;$$

Tehát $R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ az x_0-ban.

Ⓜ A közelítés jóságát mutatja a tétel.

Ⓑ

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{\text{L'H}}{=}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)-T_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} \overset{\text{L'H}}{=} \underset{n \text{ lépés után}}{\cdots} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x)}{n!\,(x-x_0)^{n-n}} = \frac{0}{n!} = 0$$

(Az utolsó tört kivételével a törtek $\dfrac{0}{0}$ alakúak, ezért alkalmazhattuk a L'Hospital szabályt.)

■

Ⓜ Ha $T_n(x)$ helyett másik polinomot tekintünk, akkor ez az állítás nem igaz.

Lagrange-féle alakban felírt maradéktag

Ⓣ Ha f legalább $(n+1)$-szer differenciálható $K_{x_0,\delta}$- ban és $x \in K_{x_0,\delta}$, akkor $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ (ill. $\xi \in (x, x_0)$), hogy

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}.$$

Ⓜ Tehát $f(x) = T_n(x) + \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$ (¬B)

●●●

Pl. $\boxed{f(x) = \sin x \approx T_5(x) = ? \qquad x \in [0\,,\, 0.1],\;\; x_0 = 0 \quad |H| < ?}$

$f'(x) = \cos x\,;$ $\quad f''(x) = -\sin x\,;$ $\quad f'''(x) = -\cos x$
$f^{(4)}(x) = \sin x\,;$ $\quad f^{(5)}(x) = \cos x\,;$ $\quad f^{(6)}(x) = -\sin x\,;$ $\quad f^{(7)}(x) = -\cos x$

$f(0)=0;\quad f'(0)=1;\quad f''(0)=0;\quad f'''(0)=-1;\quad f^{(4)}(0)=0;\quad f^{(5)}(0)=1;\quad f^{(6)}(0)=0$

Ennek megfelelően: $\quad T_5(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$

$$H = R_5(x) = \frac{-\sin\xi}{6!}\,x^6\,; \qquad |H| \underset{0 \le x \le 0.1}{\underset{\uparrow}{\le}} \frac{1}{6!}\cdot(0.1)^6$$

De most $T_5(x) \equiv T_6(x)$ és így az alábbi is igaz:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{-\cos\xi}{7!}\,x^7\,; \qquad |H| \le \frac{1}{7!}\cdot(0.1)^7$$

4. Taylor sorok

(D) Legyen f akárhányszor differenciálható x_0-ban. Ekkor a formálisan előállítható

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots := T(x)$$

hatványsort az f függvény x_0 alapponthoz tartozó Taylor sorának nevezzük.
$x_0 = 0$ esetén:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots$$

Ezt MacLaurin sornak is hívják.

Tehát egy akárhányszor differenciálható f függvényhez az x_0- ban hozzárendeltük a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$ hatványsort, jelben:

$$f(x) \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k = T(x)$$

Felvetődik a kérdés, hogy

1.) Milyen x-re konvergens a kapott sor? (H=?)

2.) Milyen kapcsolat van f és T között?
Látni fogjuk, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén $f(x) = T(x)$, $x \in H$. (Vagyis ilyenkor az f függvény helyett a T hatványsorával dolgozhatunk.) Az alábbi példa mutatja, hogy előfordulhat az is, hogy $f(x) = T(x)$ nem áll fenn, kivéve az x_0 alappontot.

(Pl.) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Belátható, hogy $\forall\, n$-re $\exists\, f^{(n)}(0) = 0$. Így $T(x) \equiv 0$. Tehát $T(0) = f(0)$, de más x-re nem áll fenn az egyenlőség, hiszen $f(x) \neq 0$, ha $x \neq 0$.

•••

Néhány Taylor sorfejtés:

A következő példáknál azt használjuk ki, hogy a hatványsor összegfüggvényének Taylor sora önmaga. Ha tehát egy függvényt fel tudunk írni hatványsor összegfüggvényeként, akkor az csak a Taylor sora lehet.

Pl. $\boxed{f(x) = x^2 + x + 1\,, \qquad x_0 = 2}$

$$\underbrace{x^2 + x + 1}_{x_0=0 \text{ körüli T. sor}} = \underbrace{(x-2)^2 + 5(x-2) + 7}_{x_0=2 \text{ körüli Taylor sor}} = T_2(x) = T_3(x) = T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}\,(x-2)^k$$

Pl. $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{1-x}}$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots \qquad : \text{geometriai sor, } |x| < 1\text{-re konvergens}$$

Tehát $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ analitikus $x_0 = 0$-ban. De $x = 1$ kivételével, ahol nem értelmezett, minden pontban analitikus. (Felírható az adott pontra támaszkodó hatványsor összegfüggvényeként és $R > 0$)

Pl. $x_0 := 5$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{-1}{x-1} = \frac{-1}{(x-5)+4} = \frac{-1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{-(x-5)}{4}} \left(= \frac{a}{1-q}\right) =$$

$$= \frac{-1}{4}\left(1 - \left(\frac{x-5}{4}\right) + \left(\frac{x-5}{4}\right)^2 - \left(\frac{x-5}{4}\right)^3 + \cdots\right)$$

KT: $\quad |q| = \left|-\dfrac{x-5}{4}\right| = \dfrac{|x-5|}{4} < 1 \quad \longrightarrow \quad |x-5| < 4\,, \quad R = 4$

(HF. $x_0 = -2$)

Pl. $\boxed{f(x) = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2, \qquad x_0 = 0}$

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots\right) =$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots n\,x^{n-1} + \cdots\,,$$

ha $|x| < 1$, $R = 1$. (A hatványsor tagonként deriválható.) A végpontokban ($x = \pm 1$) divergens a sor, mert az általános tag nem tart 0-hoz.

Házi feladat:

$$\boxed{g(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3, \qquad x_0 = 0}$$

Pl. $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}, \qquad x_0 = -2 \text{ pontra támaszkodó Taylor sora?}}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \cdots = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

$$-\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{3-(x+2)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x+2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{x+2}{3}\right) + \left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{3}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$KT_1: \ \left|\frac{x+2}{3}\right| < 1 \longrightarrow |x+2| < 3, \quad R_1 = 3$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{(x+2)-4} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{x+2}{4}} = -\frac{1}{4}\left(1 + \left(\frac{x+2}{4}\right) + \left(\frac{x+2}{4}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{4}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$KT_2: \ \left|\frac{x+2}{4}\right| < 1 \longrightarrow |x+2| < 4, \quad R_2 = 4$$

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x+2)^k \qquad a_0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$a_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$a_k = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$KT: \ |x+2| < 3 \quad (\text{közös rész: } KT_1 \cap KT_2), \quad R = 3$$

Pl. $\dfrac{d^{100}}{dx^{100}}\left(\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}\right)\Bigg|_{x=-2} = ?$

$f(x) := \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

Az előző példában ennek a függvénynek a Taylor sorát írtuk fel az $x_0 = -2$ bázisponttal. Tudjuk, hogy $a_k = \dfrac{f^k(x_0)}{k!}$, így az előző sorfejtésből:

$$a_{100} = \frac{f^{(100)}(-2)}{100!} \quad \Longrightarrow \quad f^{(100)}(-2) = 100! \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{100} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{100} \right)$$

Pl. $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\,, \qquad x_0 = 0}$

$$f(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

Geometriai sor: $a = 1\,,\ \ q = -x^2$

KT: $\quad |q| = |-x^2| < 1 \implies |x|^2 < 1 \implies |x| < 1\,, \quad R = 1$

Házi feladat:
Írja fel az $f(x) = \dfrac{1}{1+3x^4}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorfejtését!

Pl. $\boxed{f(x) = \operatorname{arctg} x\,, \qquad x_0 = 0 \text{ bázispontú Taylor sora?}}$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\,; \qquad q := -x^2$$

$$\text{KT.:} \quad |q| = \left|-x^2\right| < 1 \longrightarrow |x| < 1\,, \quad R = 1$$

$$\int_0^x (\operatorname{arctg} x)'\,\mathrm{d}x \overset{N-L.}{=} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} x = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots \bigg|_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Tehát

T $\boxed{\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}\,, \qquad |x| \le 1}$, így $\quad R = 1$

KT.: $\quad |x| < 1$-ben biztosan konvergens. Sőt: $x = \pm 1$-ben is, mert

$$x=1: \qquad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \qquad \text{konvergens (Leibniz típusú)}$$

A sor összege a T_{1a} tétel miatt $=\operatorname{arctg} 1=\dfrac{\pi}{4}$, tehát

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

Hasonlóan mutatható meg a konvergencia $x=-1$-re.

Pl. $\operatorname{arctg} 0{,}1 \approx T_5(0,1)=0{,}1-\dfrac{0{,}1^3}{3}+\dfrac{0{,}1^5}{5}$, $\qquad |H|<\dfrac{0{,}1^7}{7}$ (Leibniz sor)

Pl. $\boxed{f(x)=\ln(1+x)\,, \qquad x_0=0}$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+\cdots \quad |x|<1\,, \quad R=1$$

Elvégezve az integrálást $[\,0\,,\,x\,]$- en:

$$\ln(1+x)=\int_0^x\left(1-t+t^2-t^3+\cdots\right)\,\mathrm{d}t=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\,,$$

Ez a sor $x=1$-ben is konvergens, mert Leibniz sor. T_{1a} tétel miatt értéke:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Tehát a kapott eredmény:

T $\boxed{\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}\,, \qquad x\in(-1,1]}\,, \quad R=1$

Az előző sorfejtésből $x\to -x$ helyettesítéssel adódik:

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots \quad , \quad R=1$$

A két sorfejtés segítségével már kapható egy minden argumentumértékre konvergens sorfejtés is:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\,, \qquad |x|<1\,, \quad R=1$$

$\Big(\ln z=?\qquad \ln z:=\ln\dfrac{1+x}{1-x}; \qquad z=\dfrac{1+x}{1-x}$-ből $\qquad |x|<1$ adódik mindig $\Big)$

4.1. Függvény és Taylor sorának megegyezése

$$f(x) \rightsquigarrow T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$$

$f(x) = T(x)$ *-ről mit mondhatunk általánosságban?*

Szükséges és elégséges tétel $f(x) = T(x)$ fennállására:

Ⓣ $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \xrightarrow[\infty]{n} f(x)$ (azaz $f(x) = T(x)$) akkor és csak akkor, ha

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \xrightarrow[\infty]{n} 0$$

Ⓓ A $g_0, g_1, \dots, g_n, \dots$ függvények a $D = \bigcap D_{g_n}$ halmazon *egyenletesen korlátosak*, ha

$$\exists\, K \in \mathbb{R}: \qquad |g_n(x)| \le K, \qquad \text{ha } x \in D,\ n \in \mathbb{N} \qquad (\text{ van közös korlát })$$

Pl. $\sin x,\ 2\sin 2x,\ 3\sin 3x, \dots, n \sin nx, \dots$ egyenként korlátosak, de nem egyenletesen korlátosak.

Pl. $\cos x,\ \cos 4x,\ \cos 9x, \dots, \cos n^2 x, \dots$ egyenletesen korlátosak.

Elégséges tétel $f(x) = T(x)$ fennállására:

Ⓣ Ha f akárhányszor differenciálható $(-R, R)$-en és $f,\ f',\ f'', \dots, f^{(n)}, \dots$ deriváltfüggvények egyenletesen korlátosak itt, akkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \qquad x \in (-R, R)\text{-en.}$$

Ⓜ x_0 bázispontra hasonló tétel mondható ki $(x_0 - R, x_0 + R)$-re.

Ⓑ Már láttuk, hogy

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k}_{T_n(x) = s_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1}}_{R_n(x) \text{ Lagrange-féle alakja}}$$

Ezért:

$$\underbrace{|f(x) - T_n(x)|}_{=|s(x) - s_n(x)|} = |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\, |x|^{n+1} \le K\, \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} := a_n$$

Mivel $a_n \xrightarrow[\infty]{n} 0$ (I. félévi anyagban szerepelt: $\dfrac{a^n}{n!} \xrightarrow[\infty]{n} 0$), ezért

$$|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon) \implies T_n(x) \to f(x)\ , \quad \text{azaz} \quad T(x) = f(x). \qquad \blacksquare$$

●●●

További fontos Taylor sorfejtések:

Pl. $f(x) = \boxed{\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ; \qquad \boxed{x \in \mathbb{R}}$

Ui.:
$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\
\hline
f^{(4)}(x) = \sin x & \downarrow \text{Innen periodikusan ismétlődik}
\end{array}$$

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

A deriváltak $(-\infty, \infty)$-en egyenletesen korlátosak, ezért $\forall\ x$-re: $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots$.

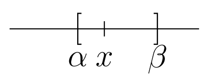
Pl. $f(x) = \boxed{\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \qquad \boxed{x \in \mathbb{R}}$

Az előző példához hasonlóan:
$$\left.\begin{array}{ll}
f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\
f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\
f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\
f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0
\end{array}\right\} \text{a deriváltak egyenletesen korlátosak}$$
$$\begin{array}{ll}
\hline
f^{(4)}(x) = \cos x & \downarrow \text{Innen periodikusan ismétlődik}
\end{array}$$

Pl. $f(x) = \boxed{e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; \qquad \boxed{x \in \mathbb{R}}$

$f^{(k)}(x) = e^x; \quad f^{(k)}(0) = 1 \quad k \in \mathbb{N}$

Konvergencia: $f^{(k)}(x) = e^x \ \ x \in \mathbb{R}$-en nem korlátos, de tetszőleges $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$-en már igen.
$\left|f^{(k)}(x)\right| \le e^\beta$. Tehát itt a deriváltak egyenletesen korlátosak, így a tétel alapján $f(x) = T(x) \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$-re.



Pl. $f(x) = \boxed{\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad x \in \mathbb{R} \\ \mathrm{e}^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \ldots$$

Pl. $f(x) = \boxed{\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) = \cdots$

•••

Példák Taylor sorfejtésre:

Pl. $\boxed{f(x) = \sin x \cdot \cos x\,, \qquad x_0 = 0}$

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{5!}(2x)^5 - \frac{1}{7!}(2x)^7 + \cdots\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Az alábbi néhány példa az

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots\,, \qquad u \in \mathbb{R}$$

sorfejtésre támaszkodik.

Pl. $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{x^2}\,, \qquad x_0 = 0}$

$$\mathrm{e}^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 + \cdots\,, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \left(u = x^2\right)$$

Pl. $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\,, \qquad x_0 = 0}$

$$\mathrm{e}^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 - \cdots\,, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \left(u = -x^2\right)$$

A valószínűségszámításban találkozunk az $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ Gauss görbével.

Pl. $\boxed{f(x)=\sqrt{e^x}\,, \qquad x_0=0}$

$$\sqrt{e^x}=e^{\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots\,, \qquad x\in\mathbb{R} \qquad \left(u=\frac{x}{2}\right)$$

Pl. $\boxed{f(x)=e^{3x^2}\,, \qquad x_0=0}$

$$e^{3x^2}=1+3x^2+\frac{1}{2!}3^2x^4+\frac{1}{3!}3^3x^6\cdots\,, \qquad x\in\mathbb{R} \qquad \left(u=3x^2\right)$$

Pl. $\boxed{f(x)=e^{3x}\,, \qquad x_0=0,\ \text{illetve}\ \ x_0=1}$

a.) $x_0=0:\quad e^{3x}=1+3x+\frac{1}{2!}(3x)^2+\frac{1}{3!}(3x)^3+\cdots\,, \qquad x\in\mathbb{R}$

b.) $x_0=1:\quad e^{3x}=e^{3(x-1)+3}=e^3e^{3(x-1)}=$

$$=e^3\left(1+3(x-1)+\frac{1}{2!}3^2(x-1)^2+\frac{1}{3!}3^3(x-1)^3+\cdots\right)\,, \qquad x\in\mathbb{R}$$

Pl. Adja meg az

$$f(x)=\frac{1}{7+x}$$

függvény Taylor sorát és annak konvergenciatartományát, ha

a.) $x_0=0$

b.) $x_0=2$

a.)

$$\frac{1}{7+x}=\frac{1}{7}\,\frac{1}{1-\frac{-x}{7}}=\frac{1}{7}\left(1-\frac{x}{7}+\left(\frac{x}{7}\right)^2-\left(\frac{x}{7}\right)^3+\cdots\right)$$

$$a=\tfrac{1}{7}\ ;\quad q=-\tfrac{x}{7}$$

$$\text{KT.: } |q|=\left|-\frac{x}{7}\right|=\frac{|x|}{7}<1\implies |x|<7\,, \qquad R=7$$

b.)

$$\frac{1}{7+x}=\frac{1}{(x-2)+9}=\frac{1}{9}\,\frac{1}{1-\frac{-(x-2)}{9}}=\frac{1}{9}\left(1-\frac{x-2}{9}+\left(\frac{x-2}{9}\right)^2-\left(\frac{x-2}{9}\right)^3+\cdots\right)$$

$$a=\tfrac{1}{9}\ ;\quad q=-\tfrac{x-2}{9}$$

$$\text{KT.: } |q|=\left|-\frac{x-2}{9}\right|=\frac{|x-2|}{9}<1\implies |x-2|<9 \qquad (x\in(-7,11))$$

$$R=9$$

(Pl.) Fejtse $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorba az

$$f(x) = \frac{2x}{2-x^2}$$

függvényt! Konvergenciatartomány?

$$\frac{1}{2-x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,x^{2k}$$

KT.: $\left|\frac{x^2}{2}\right| < 1$, tehát $|x| < \sqrt{2}$, azaz $R = \sqrt{2}$, $H = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Ennek a sorfejtésnek a felhasználásával:

$$f(x) = 2x\,\frac{1}{2-x^2} = 2x\,\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,x^{2k+1},$$

$$|x| < \sqrt{2}, \quad R = \sqrt{2}, \quad H = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

(Pl.) a.) Határozza meg a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k!}\,x^{2k}$$

sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

b.) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k!} = ?$

a.) $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k!}\,x^{2k}$ $\qquad R = \infty$, mert...

$$f_1(x) := \int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k!}\,x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x \frac{2k+1}{k!}\,x^{2k}\,dx =$$

egyenl. konv.

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k!}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\bigg|_0^x \underset{\substack{\uparrow\\ x\neq 0}}{=} x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2)^k}{k!} = x\mathrm{e}^{x^2} \quad \text{és} \quad f_1(0) = 0$$

Tehát $f_1(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}\ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \left(x\,\mathrm{e}^{x^2}\right)' = \mathrm{e}^{x^2} + 2x^2\,\mathrm{e}^{x^2}\ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

b.)

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!} = f(1) = \mathrm{e} + 2\mathrm{e} = 3\mathrm{e}$$

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} = ?}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{5})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\Bigg|_{x=\frac{1}{5}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-x)\ , \qquad \text{ahol } |x| < 1$$

Ezért $x = \dfrac{1}{5}$ behelyettesíthető:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \ln\frac{5}{4}$$

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = ?}$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots\ ; \qquad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Ezért $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = \operatorname{ch} 1 - 1 - \frac{1}{2!}$

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\,x^n = ?\ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!\,3^n} = ?}$

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\,x^n$$

A hányadoskritériummal belátható, hogy $R = \infty$. Azt is tudjuk, hogy f-re folytonos

függvényt kell kapnunk eredményül, mert f egy hatványsor összegfüggvénye.
Mivel $f(0)=0$, azért $x \neq 0$-át vizsgáljuk.

$$x \cdot f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \mathrm{e}^x - 1 - x \,, \qquad R = \infty$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(L'Hospital szabállyal megmutatható, hogy f valóban folytonos $x=0$-ban is.)

$f(x)$-be $x = \dfrac{1}{3}$ - ot helyettesítve kapjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!\, 3^n} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$$

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\,(-1)^k}{(2k)!} = ?}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{(2k)!} \,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\,(-1)^k}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(\sqrt{2})^{2k}}{(2k)!} - 1 = \cos\sqrt{2} - 1$$

4.2. Binomiális sor

Az $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq -1)$ függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sora. ($\alpha = -1$ esetén geometriai sor összegfüggvényéről van szó.)

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^\alpha & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) &= \alpha \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) &= \alpha(\alpha-1) \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} & f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \end{aligned}$$

$$(1+x)^\alpha \rightsquigarrow T(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$$

Ⓜ Ha $\alpha = n$ egész: $f^{(k)}(x) \equiv 0 \quad k \geq n+1$-re és

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Ezért

Ⓓ $\displaystyle\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ és $\displaystyle\binom{\alpha}{0} := 1$

Az eredményeink:

$\alpha = n \in \mathbb{N}^+ \;:\; (1+x)^\alpha = T(x) = T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ (Binomiális tétel)

$\alpha \neq n \;:\; (1+x)^\alpha \rightsquigarrow \boxed{T(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k}$

Kérdések:

1.) $R = ?$

2.) $f(x) = T(x)$ mikor igaz $(-R, R)$-en?

Ⓣ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \text{ esetén } R = 1}$

Ⓑ $$a_k = \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$a_{k+1} = \binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{(k+1)!} = \binom{\alpha}{k} \frac{\alpha-k}{k+1}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = \left|\frac{\frac{\alpha}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}\right| \xrightarrow[\infty]{k} |-1| = 1 = \frac{1}{R} \implies R = 1$$

■

Ⓣ $$\boxed{\underbrace{(1+x)^\alpha}_{f(x)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k}_{T(x)} \qquad \forall\, x \in (-1, 1)\text{-re.}}$$

A végpontokban a konvergenciát külön meg kell vizsgálni.

Ⓑ f deriváltfüggvényei most nem egyenletesen korlátosak $\Longrightarrow$ tételünk nem alkalmazható. Ezért más módszerrel látjuk be az egyenlőséget. Megmutatjuk, hogy

$$\left(\frac{T(x)}{f(x)}\right)' \equiv 0 \Longrightarrow \frac{T(x)}{f(x)} \equiv \text{konst.}, \text{ de } \quad \frac{T(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1 \Longrightarrow T(x) \equiv f(x)$$

$$\left(\frac{T}{f}\right)' = \frac{T'f - Tf'}{f^2} = \frac{T'(1+x)^\alpha - T\cdot\alpha\cdot(1+x)^{\alpha-1}}{f^2} = \frac{(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}}(T'(1+x) - \alpha T) \equiv 0,$$

mert

$$T(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \quad \cdots \quad + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots$$

$$\alpha T(x) = \alpha + \alpha^2 x + \frac{\alpha^2(\alpha-1)}{2!}x^2 + \quad \cdots \quad + \alpha\binom{\alpha}{k}x^k + \cdots$$

$$T'(x) = \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \quad \cdots \quad + k\binom{\alpha}{k}x^{k-1} + (k+1)\binom{\alpha}{k+1}x^k + \cdots$$

$$xT'(x) = \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x^2 + \quad \cdots \quad + k\binom{\alpha}{k}x^k + \cdots$$

$$(1+x)T' - \alpha T = \sum_{k=0}^{\infty}\left((k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k} - \alpha\binom{\alpha}{k}\right)x^k$$

és itt

$$\left((k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k} - \alpha\binom{\alpha}{k}\right) = \binom{\alpha}{k}\left((k+1)\frac{\alpha-k}{k+1} + k - \alpha\right) = 0 \qquad \forall\, k\text{-ra}$$

■

Ⓜ Belátható, hogy $|x| < 1$-re végülis $\left|\binom{\alpha}{k}x^k\right| \searrow 0$, tehát k egy értékétől kezdődően a sor tagjai monoton csökkenően tartanak a 0 -hoz. A 0-hoz tartás a konvergencia miatt nem kérdéses, csak a monoton csökkenés. (Mi nem bizonyítjuk általánosságban a monoton csökkenést.) Ezért, ha váltakozó előjelű a sor, akkor felírható egy konstans és egy Leibniz típusú sor összegeként. Ilyen esetben könnyű a hibaszámítás:

$$(1+x)^\alpha \approx \sum_{k=0}^{N}\binom{\alpha}{k}x^k = s_N \quad \text{közelítésnél} \qquad |H| < \left|\binom{\alpha}{N+1}x^{N+1}\right|$$

(Az első elhagyott tag majorálja a hibát, ha N értéke akkora, amelynél már teljesül a monoton csökkenés.)

Példák binomiális sorfejtésre

Pl. $\boxed{f(x) = \sqrt{1+x}\,, \qquad x_0 = 0}$

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 + \ \cdots\ ,$$

Konvergenciasugár: $\quad R = 1$

Megmutatható, hogy $x > 0$-ra Leibniz típusú a sor ($x < 0$-nál nem!). Ezért, ha $x > 0$:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{és} \quad |H| < \frac{1}{8}x^2$$

(Tehát $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$, ha $x > 0$)

Pl. $\sqrt{1{,}05} = (1+0{,}05)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\,0{,}05 \quad |H| < \frac{1}{8}\,(0{,}05)^2$

Hasonlóan megmutatható, hogy $k \in \mathbb{N}^+$-ra: $\sqrt[k]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{k} = T_1(x)$

Pl. $\boxed{\sqrt[5]{34} \approx ?}$

$\sqrt[5]{34} = (1+33)^{\frac{1}{5}}$ nem jó, mert $x = 33 > 1$

De $\sqrt[5]{34} = \sqrt[5]{32\frac{34}{32}} = 2\sqrt[5]{\frac{34}{32}} = 2\left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\left(\frac{1}{16}\right)^k \underset{\text{pl.}}{\approx} 2\sum_{k=0}^{3}\binom{\frac{1}{5}}{k}\left(\frac{1}{16}\right)^k$

Leibniz sor (belátható): $\qquad |H| < 2\left|\binom{\frac{1}{5}}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^4\right|$

Pl. $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}\,, \qquad x_0 = 0 \ \text{ bázispontú Taylor sor?}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \left(\frac{x^2}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k$$

$$\text{konvergenciasugár:} \quad \left|\frac{x^2}{2}\right| < 1 \implies |x| < \sqrt{2} \qquad \left(R = \sqrt{2}\right)$$

(Pl.) $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16 - x^3}}\,, \qquad x_0 = 0 \text{ bázispontú Taylor sor?}}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16}}\,\frac{1}{\left(1 - \frac{x^3}{16}\right)^{\frac14}} = \frac12\left(1 + \left(-\frac{x^3}{16}\right)\right)^{-\frac14} = \frac12\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac14}{k}\left(-\frac{x^3}{16}\right)^k =$$

$$= \frac12\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac14}{k}\frac{(-1)^k}{16^k}\,x^{3k}$$

Konvergenciasugár: $\left|-\dfrac{x^3}{16}\right| < 1 \implies |x| < \sqrt[3]{16}\,, \qquad R = \sqrt[3]{16}$

(Pl.) $\boxed{f(x) = \sqrt[3]{8 + x^2}\,, \qquad x_0 = 0 \text{ bázispontú Taylor sor?}}$

$$f(x) = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{1 + \frac{x^2}{8}} = 2\left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt8}\right)^2\right)^{\frac13} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac13}{k}\left(\frac{x}{\sqrt8}\right)^{2k}$$

Konvergenciasugár: $\left|\dfrac{x^2}{8}\right| < 1 \implies |x| < \sqrt8\,, \qquad R = \sqrt8$

(Pl.) $\boxed{f(x) = \arcsin x\,, \qquad x_0 = 0 \text{ bázispontú Taylor sor?}}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + (-x^2)\right)^{-\frac12} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac12}{k}(-x^2)^k = 1 + \frac12 x^2 + \frac38 x^4 + \cdots$$

Konvergenciasugár: $|-x^2| < 1 \implies |x| < 1 \qquad (R_1 = 1)$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x + \frac16 x^3 + \frac{3}{8\cdot5}x^5 + \cdots\,, \qquad (R_2 = 1)$$

$\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k\,a_k\,x^k \quad \text{sorok konvergenciasugarai megegyeznek.}\right)$

Összefoglalva:

(T) $\boxed{\arcsin x = x + \dfrac16\,x^3 + \dfrac{3}{8\cdot5}\,x^5 + \cdots\,, \qquad R = 1}$

Az $\arccos x$ Taylor sorát hasonlóan kaphatjuk meg, mint az $\arcsin x$ -ét.

Mivel $\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$, azért nyilván:

$$\boxed{\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8\cdot 5}x^5 + \cdots\right), \qquad R = 1}$$

Pl. Írja fel az $f(x) = 5\sqrt[5]{1+x^2} - 7\sqrt[7]{1+x^2} + 2$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és adja meg annak konvergencia sugarát!
Létezik-e C és α úgy, hogy $f(\frac{1}{n}) \sim Cn^{\alpha}$ legyen?

$$(1+x^2)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})}{2!}x^4 + \cdots \qquad \text{konv.sugár: } |x^2| < 1 \implies |x| < 1$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{7}} = 1 + \frac{1}{7}x^2 + \frac{\frac{1}{7}(-\frac{6}{7})}{2!}x^4 + \cdots \qquad \text{konv.sugár: } |x^2| < 1 \implies |x| < 1$$

$$f(x) = 5 - 7 + 2 + \left(5\cdot\frac{1}{5} - 7\cdot\frac{1}{7}\right)x^2 + \left(5\frac{-4}{5^2\cdot 2} - 7\frac{-6}{7^2\cdot 2!}\right)x^4 + \cdots =$$

$$= \left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\right)x^4 + \cdots \qquad |x| < 1, \quad R = 1$$

$a_n \sim b_n$, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\ldots\right)\left(\frac{1}{n}\right)^6 + \cdots \qquad 0 < \frac{1}{n} < 1, \text{ ha } n > 1$$

$$\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(-\frac{2}{5}+\frac{3}{7}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^4} = 1 + \left(\ldots\right)\frac{1}{n^2} + \left(\ldots\right)\frac{1}{n^4} + \cdots \xrightarrow[\infty]{n} 1 \qquad C = -\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$$

$$\alpha = -4$$

Pl. Számítsa ki $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ értékét közelítően!

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{k}x^{2k} \qquad \text{Konv.sugár: } \left|x^2\right| < 1 \implies |x| < 1$$

$$R = 1$$

A hatványsort szabad tagonként integrálni, mivel $[0\,,0.1] \subset (-1\,,1)$.

$$\int_0^{0,1} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{k}\int_0^{0,1} x^{2k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{k}\left.\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right|_0^{0,1} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{k}\frac{0{,}1^{2k+1}}{2k+1} =$$

$$\underbrace{0{,}1+\frac{-1}{3}\,\frac{0{,}1^3}{3}+\frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})}{2!}\,\frac{0{,}1^5}{5}}_{:=a}+\underbrace{\frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})}{3!}\,\frac{0{,}1^7}{7}}_{:=b}+\cdots \underset{\substack{\text{Leibniz}\\ \text{típusú}}}{\approx} a\,, \qquad |H|\le |b|$$

(Belátható, hogy Leibniz sorról van szó.)

Pl. Határozza meg az $\displaystyle\int_0^{0,1}\sqrt[5]{32+x^5}\,\mathrm{d}x$ integrál értékét közelítőleg az integrálandó függvényt ötödrendű Taylor polinomjával közelítve! Adjon becslést az elkövetett hibára!

$$\sqrt[5]{32+x^5}=\sqrt[5]{32}\,\sqrt[5]{1+\frac{x^5}{32}}=2\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^5\right)^{\frac{1}{5}}=2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^{5k}=2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\frac{1}{32^k}x^{5k}$$

$$\text{Konv.sugár:}\quad \left|\left(\frac{x}{2}\right)^5\right|<1 \implies |x|<2\,,\quad R=2$$

$[0,\ 0{,}1]$-ben a sor egyenletesen konvergens $\implies$ szabad tagonként integrálni.

$$\int_0^{0,1}2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\frac{1}{32^k}x^{5k}\,\mathrm{d}x=2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\frac{1}{32^k}\,\frac{x^{5k+1}}{5k+1}\bigg|_0^{0,1}=2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\frac{1}{32^k}\,\frac{0{,}1^{5k+1}}{5k+1}=$$

$$=2\left(0{,}1+\frac{\frac{1}{5}}{1}\,\frac{1}{32}\,\frac{0{,}1^6}{6!}+\frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})}{2!}\,\frac{1}{32^2}\,\frac{0{,}1^{11}}{11}+\cdots\right)\underset{\text{Leibniz típusú}}{\approx}2\left(0{,}1+\frac{1}{5}\,\frac{1}{32}\,\frac{0{,}1^6}{6!}\right)$$

$$|H|<2\left|\frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})}{2}\,\frac{1}{32^2}\,\frac{0{,}1^{11}}{11}\right|$$

(Most is belátható, hogy Leibniz sorról van szó.)

5. Fourier sor

Emlékeztető:
$\mathcal{L}$: lineáris tér (vektortér) a valós számok teste felett; $\underline{v}\in\mathcal{L}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$

Skaláris szorzat axiómái:

$(\underline{v}_1|\underline{v}_2)=(\underline{v}_1,\underline{v}_2)\in\mathbb{R}$

1.) $(\underline{v}|\underline{v}) \geq 0$ és $(\underline{v}|\underline{v}) = 0$ a.cs.a., ha $\underline{v} = \underline{0}$ ($\underline{0}$: a tér nulleleme)

2.) $(\underline{v}_1|\underline{v}_2) = (\underline{v}_2|\underline{v}_1)$ (Nem valós esetben: $(\underline{v}_1|\underline{v}_2) = \overline{(\underline{v}_2|\underline{v}_1)}$)

3.) $(\lambda\underline{v}_1|\underline{v}_2) = \lambda(\underline{v}_1|\underline{v}_2)$

4.) $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2|\underline{v}_3) = (\underline{v}_1|\underline{v}_3) + (\underline{v}_2|\underline{v}_3)$

Pl. $C^0_{[a,b]}$-n: $(f|g) = \int\limits_a^b f(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x$ megfelel skaláris szorzatnak.

Euklideszi tér: olyan lineáris tér, amelyben van skaláris szorzat.

Ⓓ $(\underline{v}_1|\underline{v}_2) = 0$ esetén $\underline{v}_1$ *ortogonális* $\underline{v}_2$-re.

Norma: $\| \underline{v} \| = \sqrt{(\underline{v}|\underline{v})}$ -vel dolgozunk (euklideszi norma)

Távolság: $\rho(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \| \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \|$

●●●

Ⓣ $\boxed{\text{Ha } \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \ (\underline{v}_i \neq \underline{0}) \text{ páronként ortogonálisak, akkor lineárisan függetlenek.}}$

Ⓑ

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \cdots + \lambda_i\underline{v}_i + \cdots + \lambda_n\underline{v}_n = \underline{0} \quad | \cdot \underline{v}_i$$

$$\lambda_1 \underbrace{(\underline{v}_1|\underline{v}_i)}_{=0} + \cdots + \lambda_{i-1} \underbrace{(\underline{v}_{i-1}|\underline{v}_i)}_{=0} + \lambda_i \underbrace{(\underline{v}_i|\underline{v}_i)}_{\neq 0} + \cdots + \lambda_n \underbrace{(\underline{v}_n|\underline{v}_i)}_{=0} = 0$$

$\Longrightarrow \lambda_i = 0$ (és ez igaz $\forall\, i$ -re)

■

Ⓣ
1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, ..., $\sin kx$, $\cos kx$, ... páronként ortogonálisak $[-\pi, \pi]$-n (általánosan $[a, a + 2\pi]$ -n), így közülük bármely véges sok lineárisan független. A skaláris szorzat: $(f|g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$

Ⓜ Így az általuk generált tér nem véges dimenziós.

Ⓑ

$$\left.\begin{aligned} (1|\sin kx) &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,\mathrm{d}x = 0 \\ (1|\cos kx) &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}\right\} \text{teljes periodusra integrálunk}$$

$$(\sin kx|\sin lx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin lx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos{(k-l)x} - \cos{(k+l)x}) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & \text{ha } \ k = l \\ 0, & \text{ha } \ k \neq l \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \| \sin kx \| = \sqrt{(\sin kx|\sin kx)} = \sqrt{\pi}$$

$$(\cos kx|\cos lx) = \begin{cases} \pi, & \text{ha } \ k = l \\ 0, & \text{ha } \ k \neq l \end{cases} \quad \text{(Az előzőhöz hasonlóan jön ki.)}$$

$$\Longrightarrow \| \cos kx \| = \sqrt{(\cos kx|\cos kx)} = \sqrt{\pi}$$

$$(\sin kx|\cos lx) = 0 \qquad \text{(Szintén hasonlóan.)}$$

Ⓜ $(1|1) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, \mathrm{d}x = 2\pi \implies \| 1 \| = \sqrt{(1|1)} = \sqrt{2\pi}$

ONR (ortonormált rendszer) :

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\varphi_0},\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x}_{\varphi_1},\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x}_{\varphi_2},\ \dots,\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx}_{\varphi_{2k-1}},\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx}_{\varphi_{2k}},\ \dots$$

•••

Mivel a $\{\varphi_i\}$ függvények közül tetszőlegesen kiválasztva véges sokat, azok lineárisan függetlenek, jogos az a kérdés, hogy egy 2π szerint periodikus f függvény felírható-e a következő alakban:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \, \varphi_i(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

A felvetődő kérdések:

– $\alpha_i = ?$ $\quad (a_k = ?,\ b_k = ?)$

– Milyen f-ekre és hol lesz egyenlőség?

Az ilyen alakú sorokat *trigonometrikus sorok*nak nevezzük.

n-edrendű *trigonometrikus polinom:*

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

•••

Mi a kapcsolat a trigonometrikus sor Φ összegfüggvénye és az a_k, b_k együtthatók között?

Ⓣ $\Phi(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ és a konvergencia egyenletes, akkor Φ és a_k, b_k között egyértelmű kapcsolat van, mégpedig:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{(\Phi | \cos kx)}{(\cos kx | \cos kx)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{(\Phi | \sin kx)}{(\sin kx | \sin kx)}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Ⓑ Általánosságban a $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x)$ alakot kellene szoroznunk skalárisan φ_k-val és így megkapnánk α_k értékét, ahonnan már a_k ill. b_k kapható. a_2-re megmutatjuk a képlet helyességét. Hasonlóan történik a bizonyítás a többi együtthatóra is.

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_k \cos kx + b_k \sin kx + \cdots = \Phi(x)$$

Beszorozva $\cos 2x$-szel és $[-\pi, \pi]$-n integrálva (az egyenletes konvergencia miatt szabad tagonként integrálni):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{a_0}{2} \cdot \cos 2x + a_1 \cos x \cdot \cos 2x + b_1 \sin x \cdot \cos 2x + a_2 \cos 2x \cdot \cos 2x + \cdots$$

$$\cdots + a_k \cos kx \cdot \cos 2x + b_k \sin kx \cdot \cos 2x + \cdots \Big) \, \mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \cdot \cos 2x \, \mathrm{d}x$$

$$\frac{a_0}{2} \, (1 | \cos 2x) + a_1 \, (\cos x | \cos 2x) + b_1 \, (\sin x | \cos 2x) + a_2 \, (\cos 2x | \cos 2x) + \cdots$$

$$\cdots + a_k \, (\cos kx | \cos 2x) + b_k \, (\sin kx | \cos 2x) + \cdots = (\Phi(x) | \cos 2x)$$

A bal oldalon $(\cos 2x | \cos 2x) = \| \cos 2x \|^2 = \pi$, a többi skaláris szorzat az ortogonalitás miatt nulla. Így

$$a_2 \, (\cos 2x | \cos 2x) = (\Phi(x) | \cos 2x) \implies a_2 = \frac{(\Phi(x) | \cos 2x)}{(\cos 2x | \cos 2x)}$$

Ⓜ A tétel feltételei között igen fontos, hogy egyenletesen konvergens trigonometrikus sorról van szó, hiszen emiatt tudtunk tagonként integrálni egy végtelen sort.

Házi feladat: Vezesse le a bizonyítást a_3 és b_2 esetére is!

Fourier sor

Ⓓ Ha f 2π szerint periodikus és $f \in R_{[0,2\pi]}$, akkor f Fourier sora

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{a}^{a+2\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(f|\cos kx) \ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{a}^{a+2\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(f|\sin kx) \ , \qquad k = 1, 2, \ldots$$

a_k, b_k neve: Fourier együtthatók. Itt $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

●●●

A Fourier sor összegfüggvénye legyen $\Phi(x)$ és az n-edik részletösszeg függvény pedig $\Phi_n(x)$!
$\left(\Phi_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right)$

Kitérő: *egy minimum probléma*

f adott 2π szerint periodikus, integrálható függvény.

$$t_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) = \sum_{i=0}^{2n} \alpha_i \, \varphi_i(x)$$

Ezen trigonometrikus polinomok közül melyik van f-hez átlagnormában a legközelebb? Azaz milyen α_i-kre lesz $\| f - t_n \| = \min.$?

Ⓣ $\| f - t_n \| = \sqrt{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - t_n(x))^2 \, \mathrm{d}x}$ akkor minimális, ha az együtthatók a Fourier együtthatók, tehát $t_n(x) = \Phi(x)$. (¬B)

●●●

Visszatérve a Fourier sorhoz, még válaszolni kell arra a kérdésre, hogy a Fourier sor milyen x-ekre konvergens, és $f(x) = \Phi(x)$ mikor igaz.

Ⓣ Ha a 2π szerint periodikus f függvény folytonos és Fourier sora egyenletesen konvergens, akkor $f(x) = \Phi(x)$ (¬B)

Pl. $f(x) = |x| \quad x \in [-\pi, \pi); \quad f(x + 2\pi) = f(x)$ L. előadás!

●●●

Ⓣ Ha f kétszer folytonosan deriválható 2π szerint periodikus függvény, akkor Fourier sora egyenletesen konvergens. (¬B)

Önmagában az egyenletes konvergenciából még nem következik az $f(x) = \Phi(x)$ egyenlőség. Csak annyi következik, hogy Φ Fourier együtthatói megegyeznek f Fourier együtthatóival.

Kérdés: ha f és Φ Fourier együtthatói azonosak, lehetséges-e, hogy $f(x) \not\equiv \Phi(x)$? Lehetséges. Pl. az $f(x) = |x|$-es példában f értékét 1 pontban megváltoztatva (pl. $f(1) := 3$), a Fourier együtthatók nem változnak, így $\Phi(x)$ sem változik, de igaz, hogy $f_1(x) \not\equiv \Phi(x)$ $(\equiv f(x))$.

Ha viszont f folytonos, akkor már érdekes a kérdés. (A választ már persze ismerjük.)

Legyenek f és Φ Fourier együtthatói azonosak, tehát $f - \Phi$ Fourier együtthatói nullák, vagyis $(f - \Phi | \varphi_k) = 0$. Tehát $f - \Phi$ ortogonális a $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ függvényrendszerre.

Bővíthető-e a trigonometrikus rendszer?

Ⓣ Ha a g függvény 2π szerint periodikus és *folytonos* és

$$(g|\varphi_k) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \quad \Longrightarrow \quad g \equiv 0.$$

Azaz a trigonometrikus rendszer nem bővíthető. (¬B)

A Fourier sor konvergenciájával kapcsolatban sok tétel ismert. Mi egy könnyen kezelhető tételt használunk:

Dirichlet tétel (egy elégséges tétel a Fourier sor konvergenciájára)

Ⓣ Ha az f függvény 2π szerint periodikus, $f \in R_{[0,2\pi]}$, a periodus felbontható véges sok (α, β) intervallumra, hogy itt f monoton és a végpontokban $\exists$ a véges határérték, akkor f Fourier sora minden x-re konvergens, és

$$\Phi(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

6. Feladatok

6.1. Függvénysorok

1.) Határozza meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát!

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

c.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{nx}}{n}$

d.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+x^4}$

e.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^4}$

f.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}}$

2.) Egyenletesen konvergensek-e az alábbi függvénysorok az adott I intervallumon?

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+2x^2}, \quad I=(-\infty,\infty)$

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2(x+3)}{n^2+1+\cos nx}, \quad I=(-\infty,\infty)$

c.) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n, \quad I=[0,1]$ ill. $I=(0,2)$

3.) Szabad-e tagonként deriválni tetszőleges x-re a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x+3)}{n^3}$ függvénysort?

4.) Határozza meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát!

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x}{2}\right)^n$

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} x^n$

c.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n}(x-3)^n$

d.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}(x+2)^n$

e.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n+1)!}(x+1)^n$

f.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-6)^n}{(2n)!}$

g.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n}}{n^2\,2^n}$

h.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{2n}}{(n+1)^2\,3^n}$

5.) Határozza meg az alábbi sorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

a.) $\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)x^{k+1}$

b.) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k-1}$

c.) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k+1}(x-2)^{k-1}$

6.) Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát, és határozza meg a sor konvergenciatartományát!

a.) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$

b.) $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$

c.) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$

d.) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

e.) $f(x) = \sin^2 x$

f.) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

g.) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$

h.) $f(x) = \frac{3}{8+x^3}$

i.) $f(x) = \sqrt[3]{1-2x^2}$

j.) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{27-x}}$

7.) Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 1$ körüli Taylor sorát, és határozza meg a sor konvergenciatartományát!

a.) $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 3$

b.) $f(x) = \frac{1}{x}$

c.) $f(x) = \mathrm{e}^x$

d.) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

8.) $f(x) = x^5\mathrm{e}^x \quad f^{(67)}(0) = ?$

9.) $f(x) = \ln(8-3x^2) \quad f^{(10)}(0) = ?,\ f^{(9)}(0) = ?$

10.) Felhasználva, hogy $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, fejtse $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorba az

$$f(x) = \operatorname{arsh} x$$

függvényt! $R = ?$
Adja meg a $g(x) = 1 - \operatorname{arsh}(2x^3)$ függvény sorfejtését is!

11.) $f(x) = \sqrt[5]{1+2x^2} + \operatorname{sh} x - 1$

a.) Adja meg a függvény $x_0 = 0$ körüli hatodrendű Taylor polinomját!

b.) Határozza meg a függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorának konvergenciasugarát!

12.) a.) Fejtse $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorba az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8-x}}$ függvényt, és határozza meg a sorfejtés konvergenciasugarát!

b.) Írja fel f harmadrendű Taylor polinomját elemi műveletekkel!

c.) $\left(x^{100} f(x)\right)^{(200)}(0) = ?$

13.) $f(x) = \sqrt[12]{1+2x^2} - \sqrt[18]{1+3x^2}$

a.) Írja fel a függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát, és határozza meg annak konvergenciasugarát!

b.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^4} = ?$

14.) Határozza meg az alábbi integrálok közelítő értékét az integrálandó függvény Taylor sorának 3. részletösszegét felhasználva!

a.) $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2 \,\mathrm{d}x$

b.) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x$

c.) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \,\mathrm{d}x$

d.) $\displaystyle\int_0^{0{,}1} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \,\mathrm{d}x$