I. fejezet
A matematikai indukció, mint alapvető bizonyítási módszer

A matematikai indukció a matematikában használt egyik legfontosabb bizonyítási (és nemcsak bizonyítási, hanem például definiálási) módszer is. A középiskolai tananyagban természetesen jelen van, itt a módszer gyakorlati alkalmazásaira helyezzük a hangsúlyt. A következőkben a matematikai indukció módszerének elméleti megalapozását adjuk meg és a módszer alapjául szolgáló indukciós elvet írjuk le. Továbbá bemutatjuk a gyakrabban előforduló indukciós bizonyítási variánsokat, az ezek alapjául szolgáló tételeket.

1.1. Következtetési módszerek. Dedukció és indukció.

Az előszóban említettük, hogy alapvetően kétfajta okoskodással szerezzük ismereteinket: bizonyító és plauzibilis okoskodással. A dedukció a bizonyító okoskodás egyik fajtája. Dedukción egy általános érvényű kijelentés sajátos esetre való alkalmazását értjük. A matematikában lépten-nyomon találkozunk dedukcióval.

Példák

1. Egy konvex *n*-oldalú sokszög szögeinek összege 180(*n*-2). Az ötszög 5 oldalú sokszög. Tehát az ötszög szögeinek összege 180(5-2)=540.

2. Minden olyan szám, amelyben a számjegyek alternáló előjellel vett összege osztható 11-gyel, osztható 11-gyel. Az 1234567895 szám számjegyeinek alternáló előjellel vett összege 0. A 0 osztható 11-gyel. Tehát 1234567895 osztható 11-gyel.

A matematikai tételek általános érvényű kijelentések, amelyeket pontosan azért bizonyítunk, hogy sajátos esetekben alkalmazhassuk a dedukció segítségével.

Az indukció a dedukcióval ellentétben a sajátosból indul ki. Az indukció alapja a megfigyelés. A megfigyelés eredményeként sejtések jöhetnek létre. Például Goldbach a XVIII. században a természetes számok tulajdonságait tanulmányozva észrevette, hogy a 4-nél nagyobb páros számok előállíthatók két prímszám összegeként: 8=3+5, 10=3+7=5+5, 12=5+7, 14=3+11=7+7, 16=3+13=5+11, 18=9+9. Megfigyelését más példákkal támasztotta alá, bármilyen konkrét páros számot tekintett, azt sikerült felbontania két páratlan szám összegére. Mindazonáltal sejtését mind a mai napig nem sikerült bizonyítani. Így a mai napig nem tudni biztosan, hogy az ő sejtése igaz-e.

Más igen plauzibilisnek tűnő sejtések hamisnak bizonyultak. Ilyen például Fermat sejtése, mely szerint a $2^{2^n}+1$ alakú számok minden $n \in N$ esetén prímek. Fermat észrevette, hogy $n \in \{0,1,2,3,4\}$ esetén ezek prímszámok, és úgy sejtette, hogy az állítás minden *n* esetén igaz. Euler azonban bebizonyította, hogy $2^{2^5}+1$ nem prímszám, tehát az állítás már $n=5$ esetén sem igaz.

Ha az x^n-1 binom irreducibilis tényezőkre való felbontását keressük $Z[X]$-ben, $n=1$ esetén ez a felbontás $x-1$, $n=2$-re az $(x-1)(x+1)$, $n=3$ esetén az $(x-1)(x^2+x+1)$, $n=4$ esetén az $(x-1)(x+1)(x^2+1)$, $n=5$-re pedig az $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ felbontást kapjuk. Észrevesszük, hogy a felbontást alkotó tényezők együtthatói a 0,1 vagy –1 számok. Ha újabb felbontásokkal próbálkozunk, $n=6$, $n=7$, stb. esetén is ugyanez érvényes. Megfogalmazódik az a sejtés, hogy ez a tulajdonság minden $n \in N^*$ esetén igaz. V. Ivanov orosz matematikus azonban bebizonyította, hogy

$n < 105$-re a tulajdonság igaz, $n = 105$-re viszont a felbontásnak van két darab –2-es együtthatója is.

Igen sok ilyen példát találhatunk, amelyben az induktív okoskodás hamis következtetéshez vezetett. Ez azonban a módszer értékét nem csökkenti, csak nyilvánvalóvá teszi, hogy az indukcióval történő okoskodást össze kell kötni bizonyító okoskodással, amely biztosítsa az indukcióval megsejtett eredmény helyességét. Egy ilyen bizonyító okoskodás, amely szervesen kötődik az induktív okoskodáshoz, a matematikai indukció vagy más néven a teljes indukció.

1.2. A matematikai indukció módszere. Peano axiómái

A matematikai indukciót, mint bizonyítási módszert Pascal írja le először a kombinációs összefüggések bizonyításakor a következőképpen: "Bár ez az állítás végtelen sok esetet tartalmaz, igen rövid bizonyítást adok rá, amely két lemmán alapszik. Az első az állítja, hogy a kijelentés igaz az első sorra. A második az állítja: ha a kijelentés igaznak bizonyul egy sorra, akkor szükségszerűen igaz a következő sorra is." Vizsgáljuk meg miről is beszél Pascal. Ennek érdekében tűzzük ki célul, hogy számítsuk ki az $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ összeget, ahol $n \in N^*$. A következőket kapjuk:

$$S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3},\ S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4},\ S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Megfigyelve a kapott eredményeket azt találjuk, hogy $n \in \{1,2,3,4\}$ esetén $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Jelöljük $P(n) -$nel a következő kijelentést: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ igaz, de amint azt az 1.1. paragrafusban megmutattuk az még nem biztosít arról, hogy minden természetes szám esetén kijelentésünk igaz. Viszont, ha sikerülne igazolnunk, hogy ha a kijelentés igaznak bizonyul egy k természetes számra, akkor a következő számra, $k+1$-re is igaz, akkor a következő láncot kapnánk:

$$P(1) \text{ igaz} \Rightarrow P(1+1) = P(2) \text{ igaz} \Rightarrow P(1+2) = P(3) \text{ igaz} \Rightarrow \ldots \Rightarrow P(n) \text{ igaz},$$

és így a kijelentés akármilyen kívánt n-re teljesül. Tehát azt kell belátnunk, hogy ha

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{k}{k+1} \quad (1), \text{ akkor}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \quad (2).$$

De $\left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)}\right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$, hiszen az (1) alapján a szögletes zárójelben megjelenő összeg $\frac{k}{k+1}$-gyel egyenlő és

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2},$$

tehát a (2) egyenlőség teljesül. Így bebizonyítottuk, hogy az állítás minden $n \in N^*$ esetén teljesül.

Intuitív módon a fenti következtetéslánc igen meggyőző. Ugyanakkor matematikai szempontból is precíz, alapjául a matematikai indukció elveként ismert matematikai elv szolgál. Az indukciós elv alapját Peano harmadik axiómája képezi, amelyet a következőben ismertetünk.

1.2.1. Peano axiómái

A XIX. században élt olasz matematikus, Giuseppe Peano (1858-1932) a természetes számok halmazát axiomatikusan értelmezte, a számelmélet axiomatikus alapjait fektette le. Kiinduló elemeknek egy nem üres N halmazt, ennek egy sajátos 0-val jelölt elemét és egy $r: N \to N$ függvényt tekintett. ($\forall x \in N$ esetén az $r(x)$-t az x rákövetkező elemének nevezzük.) Ezek alaptulajdonságait és a köztük levő összefüggéseket a Peano-féle axiómák adják meg:

P1) $r(x) \neq 0$, $\forall x \in N$ esetén

P2) Ha $r(x_1) = r(x_2)$, akkor $x_1 = x_2$

P3) N-nek bármely olyan részhalmaza, amely tartalmazza 0-t és amely minden x elemmel együtt a rákövetkező $r(x)$ elemet is tartalmazza, magával N-nel egyenlő:

A P3) axiómát az indukció axiómájának nevezzük.

A három axiómából néhány igen fontos tulajdonság következik.

Mivel $0 \notin r\{N\}$, azért $r(N)$ az N-nek valódi részhalmaza. A P2) axióma alapján viszont az $r: N \to r(N)$ függvény bijektiv. Tehát N bijektiv módon leképezhető egy valódi részhalmazra, ezért:

1. tulajdonság. N végtelen halmaz.

2. tulajdonság. Minden 0-tól különböző N-beli elem, egy N-beli elem rákövetkezője.

Valóban, az $r(N) \cup \{0\} = M$ halmaz részhalmaza N-nek és $r(M) \subseteq M$. A P3) axióma alapján $M = N$ és mivel $0 \notin r(N) \Rightarrow r(N) = N \setminus \{0\}$.

A fenti axiómákat teljesítő (és a bizonyított tulajdonsággal rendelkező) $(N, 0, r)$ hármasok esetén az N elemeit természetes számoknak nevezzük.

1.2.2. A matematikai indukció elve

1.2.1. Tétel

Rendeljünk hozzá minden $n \in N$ természetes számhoz egy $P(n)$ kijelentést. Ha teljesülnek a következő feltételeket:

i) $P(0)$ igaz

ii) bármely $n \in N$ esetén, ha $P(n)$ igaz, akkor $P(n+1)$ is igaz

akkor $P(n)$ igaz minden $n \in N$ esetén.

Bizonyítás

A P3) axiómából azonnal következik az állítás. Valóban, jelöljük M-mel azon k számok halmazát, amelyekre a $P(k)$ kijelentés igaz $M = \{k \in N \mid P(k) \text{igaz}\}$. A feltételek alapján $0 \in M$ és ha $k \in M$, akkor $r(k) \in M$. Tehát a P3) alapján $M = N$, azaz $P(n)$ igaz $\forall n \in N$ esetén.

A matematikai indukcióval történő bizonyításnak, mint azt a következő paragrafusban látni fogjuk, igen sok variánsa ismeretes, amelyeket a bizonyítandó tulajdonságok esetén szükség szerint válogatunk majd ki. Nagyon sokszor találkozunk azonban olyan tulajdonságokkal, amelyek csak egy bizonyos számnál nagyobb számokra érvényesek. Ahhoz, hogy a fenti indukciós elvet ezekre az esetekre alkalmazhassuk szükségünk lesz a következő értelmezésekre és tételekre:

1.2.1. Értelmezés

Legyenek $n, m \in N$. Azt mondjuk, hogy *m* kisebb vagy egyenlő *n*-nél ($m \le n$), ha $\exists p \in N$ úgy, hogy $n = m + p$.

1.2.2. Értelmezés

Legyen $A \subset N$ az N halmaz egy nem üres részhalmaza. Az $a \in A$ az A halmaz első vagy legkisebb eleme, ha $a \le x \ \ \forall x \in A$ esetén.

1.2.2. Tétel

A természetes számok minden nem üres részhalmazának van első (legkisebb) eleme.

Bizonyítás

Legyen $A \subset N$ egy nem üres részhalmaz. Tekintsük az $M = \{m \in N \mid m \le a, \forall a \in A\}$. Nyilvánvalóan $0 \in M$ és ha $a \in A$, akkor $r(a) \notin M$. Tehát $M \ne N$ és az indukciós axióma alapján létezik olyan $p \in M$ szám, amelyre $r(p) \notin M$. Ekkor p a keresett első elem, mivel $p \le a$, $\forall a \in A$. Ugyanakkor $p \in A$ mivel ellenkező esetben $p < a$ minden $a \in A$ esetén és így $r(p) \le a$ minden $a \in A$ esetén, ami ellentmondás azzal, hogy $r(p) \in M$. Tehát az N minden nem üres részhalmazának van legkisebb eleme.

1.3. A matematikai indukció variánsai

Ebben a paragrafusban bemutatjuk az indukcióval történő bizonyítások alapjául szolgáló legfontosabb tételeket, amelyek a matematikai indukció különböző variánsai. Minden variáns alkalmazására mutatunk példákat, tűzünk ki feladatokat, ugyanakkor a fejezet végén kitűzött feladatok esetén az olvasónak magának kell eldöntenie, hogy melyik kijelentést melyik variáns segítségével bizonyítja.

1.3.1. Tétel (Első variáns)

Legyen $a \in N$ egy természetes szám. Minden $n \ge a$ számhoz hozzárendelünk egy $P(n)$ kijelentést. Ha teljesülnek a következő feltételek:

i) $P(a)$ igaz

ii) $\forall k \in N, k \ge a$ esetén ha $P(k)$ igaz akkor $P(k+1)$ is igaz

akkor $P(n)$ igaz $\forall n \ge a$ esetén.

Bizonyítás

Tekintsük az $M = \{0,1,\ldots,a-1\} \cup \{x \in N \mid P(x) \text{ igaz}\}$ halmazt. Bizonyítjuk, hogy $M = N$. $0 \in M$ és ha $x \in M$, akkor ha $x < a-1 \Rightarrow x+1 \in \{0,1,\ldots,a-1\}$, azaz $x+1 \in M$; ha $x = a-1 \Rightarrow \ \ x+1 = a \in \{x \in N \mid P(x) \text{ igaz}\}$, tehát $x+1 \in M$; ha $x \ge a, x \in M \Rightarrow P(x)$ igaz $\overset{(ii)}{\Rightarrow} P(x+1)$ igaz, azaz $(x+1) \in M$. Tehát $\forall x \in M$-re $x+1 \in M$ és a P3) axióma értelmében $M = N$. Így $\{x \in N \mid P(x) \text{ igaz}\} \supseteq N \setminus \{0,1,\ldots,a-1\}$ tehát $P(n)$ igaz $\forall n \ge a$ esetén.

1.3.1. Példa

Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \in N, n \ge 2$ esetén fennáll az alábbi összefüggés:

$$\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+n}$$

Megoldás

Jelöljük $P(n)$-nel a következő kijelentést:

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+n}$$

$n=2$ esetén a $P(2):\dfrac{2^3-1}{2^3+1}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2^2+2+1}{2^2+2}\Leftrightarrow\dfrac{7}{9}=\dfrac{7}{9}$ igaz kijelentést kapjuk.

Feltételezzük, hogy a $P(k):\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{k^2+k+1}{k^2+k}$ kijelentés igaz. Ekkor

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{k^3-1}{k^3+1}\cdot\frac{(k+1)^3-1}{(k+1)^3+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2+k}\cdot\frac{k\cdot[(k+1)^2+(k+1)+1]}{(k+2)\cdot[(k+1)^2-(k+1)+1]}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{k^2+k+1}{k+1}\cdot\frac{(k+1)^2+(k+1)+1}{(k+2)\cdot(k^2+k+1)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{(k+1)^2+(k+1)+1}{(k+2)(k+1)},$$

tehát a $P(k+1)$ is igaz. Az 1.3.1. tétel értelmében a $P(n)$ kijelentés igaz $\forall n\geq 2$ természetes szám esetén.

1.3.2. Példa

Igazoljuk, hogy bármely $n\geq 4$ esetén $4^n-2^n\geq 60n$.

Megoldás

A $4^n-2^n\geq 60n$ kijelentés $n=4$ esetén igaz, mivel $4^4-2^2=240$, $60\cdot 4=240$ és $240\geq 240$. Feltételezzük, hogy a $P(k):4^k-2^k\geq 60k$ kijelentés igaz. Ekkor

$$4^{k+1}-2^{k+1}=4\cdot(4^k-2^k)+2^{k+1}\geq 4\cdot 60k+2^{k+1}=240k+2^{k+1}\geq 60k+60,$$

tehát a $P(k+1)$ kijelentés is igaz. Így fennáll a $4^n-2^n\geq 60n, \forall n\geq 4$ esetén, az 1.3.1. tétel értelmében.

1.3.3. Példa

Határozd meg az $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ szám egészrészét, ha $n\geq 6$.

Megoldás

$n=6$ esetén $\left[\dfrac{6}{\sqrt[6]{6!}}\right]=2$, $n=7$ -re $\left[\dfrac{7}{\sqrt[7]{7!}}\right]=2$. Sejtjük, hogy $\left[\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right]=2$ minden $n\geq 6$ esetén. Tekintjük a $P(n):\left[\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right]=2$ kijelentést. $n\in\{6,7\}$ esetén ez a kijelentés igaz. Ha a kijelentés igaz egy $k\geq 6$ szám esetén, akkor $2<\dfrac{k}{\sqrt[k]{k!}}\leq 3$, ami egyenértékű a $2^k<\dfrac{k^k}{k!}\leq 3$ egyenlőtlenségekkel. Tudjuk, hogy $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^2>2$ és $\dfrac{k^k}{k!}>2^k$. Összeszorozva az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait az

$$\frac{(k+1)^k}{k^k}.\frac{k^k}{k!}>2^{k+1}\Leftrightarrow\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}>2^{k+1}\ (1)$$

egyenlőséget kapjuk. Ugyanakkor $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^2\leq 3$ és $\dfrac{k^k}{k!}\leq 3^k$. Ebből a két egyenlőtlenségből az

$$\frac{(k+1)^k}{k^k}.\frac{k^k}{k!}\leq 3^{k+1}\Leftrightarrow\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\leq 3^{k+1}\ (2)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Tehát (1) és (2) alapján $2^{k+1} < \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \le 3^{k+1}$, ahonnan $2 < \frac{k+1}{\sqrt[k+1]{(k+1)!}} \le 3$, azaz $\left[\frac{k+1}{\sqrt[k+1]{(k+1)!}}\right] = 2$. Így a kijelentés $k+1$-re is igaz. Az 1.3.1 tétel értelmében $\left[\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right] = 2$ $\forall n \ge 6$ esetén.

Alkalmazások

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in N$, $x_1, x_2, ..., x_n \in (0,\infty)$ és $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$, akkor $x_1 + x_2 + ... + x_n \ge 1$.

2. Az $(a_n)_{n\ge 1}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $a_1 \in [1,2]$ és $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$ $\forall n \ge 1$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy $a_n \in [1,2]$ $\forall n \ge 1$ esetén és, hogy az $(a_n)_{n\ge 1}$ sorozatot csökkenő.

3. Legyenek $a_1 < a_2 < ... < a_k$ természetes számok és $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + ... + 2^{a_k}$. Bizonyítsd be, hogy $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + ... + \left[\frac{n}{2^{a_k}}\right] = n - k$.

1.3.2. Tétel (Második variáns)

Ha $a \in N$ és minden $n \ge a$ számhoz hozzárendelünk egy $P(n)$ kijelentést, amely teljesíti a következő feltételeket:

i) $P(a)$, $P(a+1), P(a+2), ..., P(a+k-1)$ igazak

ii) Bármely $n \ge a$ esetén, ha $P(n)$ igaz, akkor $P(n+k)$ is igaz

akkor $P(n)$ igaz $\forall n \ge a$ esetén.

Bizonyítás

Egy kijelentés megfelelő megválasztásával visszavezetjük az első variánsra. Jelöljük $Q(m)$-mel a $P(a+mk) \wedge P(a+1+mk) \wedge ... \wedge P(a+k-1+mk)$ kijelentést. A $Q(m)$ kijelentés teljesíti a következő feltételeket:

a) $Q(0) = P(a) \wedge P(a+1) \wedge ... \wedge P(a+k-1)$ igaz, mivel a $P(a), P(a+1), ..., P(a+k-1)$ kijelentések mindegyike igaz

b) Ha $Q(m)$ igaz egy $m \ge a$ esetén, akkor a $P(a+mk), P(a+1+mk), ...$ $P(a+k-1+mk)$ kijelentések igazak, ezért a ii) feltétel miatt a
$$P(a+(m+1)k), P(a+1+(m+1)k), ..., P(a+k-1+(m+1)k)$$
kijelentések is igazak, tehát a $Q(m+1)$ kijelentés, ami ezen kijelentések konjunkciója, is igaz.

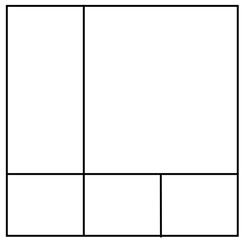
a) és b)-ből az első variáns értelmében következik, hogy $Q(m)$ igaz $\forall m \in N$ esetén, tehát $P(a+mk), P(a+1+mk), ..., P(a+k-1+mk)$ kijelentések igazak $\forall m \in N$, azaz a $P(mk+a+r)$ kijelentés igaz $\forall m \in N, \forall r \in \{0,1,...,k-1\}$ esetén. Minden p természetes szám felírható $p = qk + r$ $, q \in N$, $r \in \{0,1,...,k-1\}$ alakban (a maradékos osztás tétele), ezért minden $n \in N, n \ge a$ esetén $n - a = mk + r$, ahonnan $n = a + mk + r$. Tehát $P(n)$ igaz $\forall n \ge a$ esetén.

1.3.4. Példa

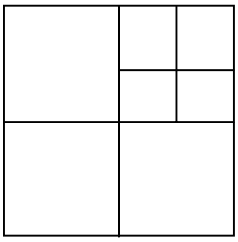
Minden négyzet felosztható n darab négyzetre, ha $n \geq 6$.

Megoldás:

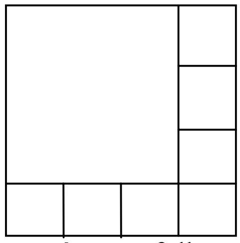
$n = 6$ esetén a következő felbontás lehetséges:



$n = 7$ esetén a felbontás:



$n = 8$-ra a felbontás:



Tehát állításunk igaz 6-ra, 7-re és 8-ra. Ha a négyzet felbontható n négyzetre, akkor igazoljuk, hogy $n+3$ négyzetre is felbontható. Valóban, tekintsük a négyzet n négyzetre való felbontását, és a felbontásban szereplő valamely négyzetet osszuk fel négy egyenlő négyzetre a szemközti oldalak felezőpontjainak összekötésével. Így az eredeti négyzet $(n-1)+4 = n+3$ négyzetre bomlik. Tehát $P(6), P(7), P(8)$ igaz és ha $P(n)$ igaz akkor $P(n+3)$ is igaz. Az 1.3.2. tétel értelmében $P(n)$ igaz $\forall n \geq 6$ esetén.

1.3.5. Példa

Igazoljuk, hogy $\forall n \in N$ esetén végtelen sok olyan $m \in N$ létezik, amelyre $n = \varepsilon_1 \cdot 1^2 + \varepsilon_2 \cdot 2^2 + \ldots + \varepsilon_m \cdot m^2$ és $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$ $\forall i = \overline{1.m}$. (Erdős-Surányi)

Bizonyítás. A következő két azonosságból indulunk ki:

$$\left[(n+3)^2 - (n+2)^2\right] - \left[(n+1)^2 - n^2\right] = 2n + 5 - 2n - 1 = 4$$

$$\left[(n+7)^2 - (n+6)^2\right] - \left[(n+5)^2 - (n+4)^2\right] = 2n + 13 - 2n - 9 = 4$$

Ha a második azonosságot kivonjuk az elsőből az

$$n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 - (n+4)^2 + (n+5)^2 + (n+6)^2 - (n+7)^2 = 0 \quad (1)$$

egyenlőséget kapjuk. Így $0 = -1^2 + 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2$. Ehhez az összeghez az (1)-hez hasonló nyolcas összeget akárhányszor hozzáadhatjuk, így a 0 végtelen sok féleképpen írható fel a kért módon. Az (1) azonosság miatt, ha bármilyen más számot egyféleképpen felírhatunk a kért módon, akkor ehhez ilyen nyolcas összegekből akárhányat hozzáírhatunk, így végtelen sok felírás létezik. Tehát csak azt kell bizonyítanunk, hogy $\forall n \in N$ esetén létezik egy ilyen típusú felírás.

$n = 1$-re egy lehetséges felírás $n = 1^2$.

$n = 2$-re $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$.

$n = 3$-ra $3 = -1^2 + 2^2$.

Tehát $n \in \{0,1,2,3)$ esetén a felírás lehetséges. Ha egy $n \in N$ szám felírható $n = \varepsilon_1 \cdot 1^2 + \varepsilon_2 \cdot 2^2 + \ldots + \varepsilon_m \cdot m^2$ alakban, akkor

$$n + 4 = \underbrace{\varepsilon_1 \cdot 1^2 + \varepsilon_2 \cdot 2^2 + \ldots + \varepsilon_m \cdot m^2}_{n} + \underbrace{(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2}_{4},$$

így az $n+4$ szám is felírható a kért alakban.

Mivel $0,1,2,3$ felírható a kért módon és ha egy n szám felírható ilyen típusú összegként, akkor az $n+4$ szám is felírható az 1.3.2. tétel értelmében $\forall n \in N$ szám felírható $n = \varepsilon_1 \cdot 1^2 + \varepsilon_2 \cdot 2^2 + ... + \varepsilon_m \cdot m^2$ alakban és végtelen ilyen felírás lehetséges.

1.3.6. Példa

Igazoljuk, hogy $\forall k \geq 6$ természetes szám esetén léteznek olyan $n_1, n_2, ..., n_k$ természetes számok, amelyekre $\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} + ... + \frac{1}{n_k^2} = 1$.

Bizonyítás

$k=6$ esetén az $n_1 = n_2 = n_3 = 2, n_4 = n_5 = 3, n_6 = 6$ számok megfelelőek, hiszen $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} = 1$, tehát a tulajdonság $k=6$-ra igaz.

$k=7$ esetén az $n_1 = n_2 = n_3 = 2$, $n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = 4$ számokra

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} = 1.$$

$k=8$ esetén az $n_1 = n_2 = n_3 = 2, n_4 = n_5 = 3, n_6 = 7, n_7 = 14, n_8 = 21$ számokra

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{21^2} = 1.$$

Továbbá bizonyítjuk, hogy ha a $P(n)$ állítás igaz, akkor a $P(n+3)$ állítás is igaz. Valóban, ha az $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + ... + \frac{1}{x_n^2} = 1$ egyenletnek vannak természetes megoldásai: $(x_1, x_2, ..., x_n)$ egy ilyen megoldás, akkor az $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 2x_n, 2x_n, 2x_n, 2x_n$ számokra

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + ... + \frac{1}{x_{n-1}^2} + \frac{1}{4x_n^2} + \frac{1}{4x_n^2} + \frac{1}{4x_n^2} + \frac{1}{4x_n^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + .. + \frac{1}{x_n^2} = 1,$$

tehát az $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + ... + \frac{1}{x_{n+4}^2} = 1$ egyenletnek is vannak természetes megoldásai. Az 1.3.2. tétel értelmében $\forall k \in N, k \geq 6$ esetén léteznek olyan $n_1, n_2, ..., n_k$ számok, amelyekre $\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} + ... + \frac{1}{n_k^2} = 1$.

Alkalmazások

1. Jelöljük x_1-gyel illetve x_2-vel az $y = x^2 - 6x + 1$ egyenletű parabola Ox tengellyel való metszéspontjait. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \in N$ esetén $\frac{1}{x_1^n} + \frac{1}{x_2^n}$ természetes szám és osztható 5-tel.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \geq 4$, akkor tetszőleges háromszög felbontható n darab egyenlő szárú háromszögre.

3. Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, amelyekre minden n oldalú konvex sokszög felbontható egymást nem metsző átlók segítségével háromszögekre úgy, hogy minden csúcsból páros számú átló induljon ki.

1.3.3. Tétel (harmadik variáns)

Legyen $a \in N$ egy rögzített természetes szám. Ha minden $n \geq a$ számhoz hozzárendelünk egy $P(n)$ kijelentést, amely teljesíti a következő feltételeket:

i) $P(a)$ igaz

ii) $\forall n \in N$ esetén ha $P(k)$ igaz $\forall n \geq k \geq a$-ra, akkor $P(n+1)$ is igaz

akkor $P(n)$ igaz $\forall n \geq a$ esetén.

Bizonyítás

Jelöljük $Q(n)$-nel a $P(a)\wedge P(a+1)\wedge ...\wedge P(n)$ kijelentést. Ekkor $Q(a) = P(a)$ igaz és ha $Q(n)$ igaz, akkor $P(a)\wedge P(a+1)\wedge ...\wedge P(n)$ igaz, azaz $\forall n \geq k \geq a$ esetén $P(k)$ igaz kijelentés, így ii) alapján $P(n+1)$ is igaz, tehát a $Q(n+1) = P(a)\wedge P(a+1)\wedge ...\wedge P(n)\wedge P(n+1)$ kijelentés is igaz. A $Q(n)$ kijelentés teljesíti az 1.3.1. tétel feltételeit, ezért $Q(n)$ igaz $\forall n \in N, n \geq a$ esetén, így $P(n)$ is igaz $\forall n \in N, n \geq a$ esetén.

1.3.7. Példa

Határozzuk meg az összes olyan $f : N^* \to N^*$ függvényt, amely teljesíti a következő feltételeket:

a) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$, bármely $a, b \in N^*$ esetén

b) Ha $a < b$, akkor $f(a) < f(b)$

c) $f(2) = 2$

Megoldás

Az a) összefüggésbe $a = b = 1$-t helyettesítve az $f(1) = f^2(1)$ egyenlőséghez jutunk és mivel $f(0) \neq 0$, az $f(1) = 1$.

A c) feltétel alapján $f(2) = 2$. Ha az a) összefüggésbe $a = b = 2$-t helyettesítünk, akkor $f(4) = f(2) \cdot f(2) = 4$.

A b) feltétel alapján, mivel $2 < 3 < 4$ következik, hogy $f(2) < f(3) < f(4)$, azaz $2 < f(3) < 4$. Mivel 2 és 4 között egyetlen természetes szám található, a 3, az $f(3) = 3$.

Észrevesszük, hogy $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén $f(n) = n$. Indukcióval bizonyítjuk, hogy $f(n) = n$, $\forall n \in N$ esetén.

Feltételezzük, hogy a $P(k) : f(k) = k$ kijelentés igaz $\forall k \leq n$ esetén.

Ha $n+1$ páros, akkor létezik olyan $k \leq n$, amelyre $n+1 = 2k$ Innen $f(n+1) = f(2k) = f(2) \cdot f(k) = 2k = n+1$.

Ha $n+1$ páratlan, akkor létezik olyan k, amelyre $n+1 = 2k+1$. Ekkor $2k < n+1 < 2k+2$ és a b) feltétel alapján $f(2k) < f(n+1) < f(2k+2)$. De $f(2k) = f(2) \cdot f(k) = 2k$, mivel $2 \leq n, k \leq n$ és $f(2k+2) = f(2) \cdot f(k+1) = 2k+2$, mivel $2 \leq n, k+1 \leq n$. Így $2k < f(n+1) < 2k+2$, ahonnan $f(n+1) = 2k+1 = n+1$.

Tehát $f(n+1) = n+1$, ha $f(k) = k, \forall k \leq n$ esetén. Az 1.3.3. tétel értelmében $f(n) = n$, $\forall n \in N^*$.

1.3.8. Példa

Egy xOy derékszögű koordinátarendszerben tekintsük az $A_k(z_k), k = \overline{1, n}$ pontokat, ahol $z_k \in C$. Ha $|z_1 + z_2 + ... + z_n| = |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$, akkor az $O, A_1, A_2, ..., A_n$ pontok kollineárisak.

Megoldás

$n = 1$-re O és A_1 nyilvánvalóan egy egyenesen helyezkednek el.

Feltételezzük, hogy $\forall i=\overline{1,n}$-ig a kijelentés igaz. Bebizonyítjuk, hogy akkor $n+1$ szám esetén is igaz.

Ha az $n+1$ szám közül legalább az egyik 0, pl. $z_k=0$, akkor 0 a z_k affixuma és az indukciós feltevésből, mivel

$$|z_1+z_2+...+z_{k-1}+0+z_{k+1}+...+z_{n+1}|=|z_1|+|z_2|+...+|z_{k-1}|+0+|z_{k+1}|...+|z_{n+1}|$$

a $z_1,z_2,...,z_{k-1},z_{k+1},...,z_{n+1}$ (n darab szám) affixumai és az O (a z_k affixuma) kollineáris, tehát $O,A_1,A_2,...,A_{k-1},O,A_{k+1},...,A_n$ kollineárisak.

Ha $z_i\neq 0, \forall i=\overline{1,n+1}$, akkor legyen $z_i=r_i\cdot(\cos\alpha_i+i\cdot\sin\alpha_i)$, ahol $\alpha_i\in[0,2\pi]$. Mivel $\left|\sum_{i=0}^{n+1}z_i\right|=\sum_{i=1}^{n+1}|z_i| \Rightarrow \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n+1}r_i\cos\alpha_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n+1}r_i\sin\alpha_i\right)^2}=\sum_{i=1}^{n+1}r_i$. Négyzetre emelés után a $\sum_{1\le i<j\le n+1}r_ir_j\cos(\alpha_i-\alpha_j)=\sum_{1\le i<j\le n+1}r_ir_j$, azaz $\sum_{1\le i<j\le n+1}r_ir_j(1-\cos(\alpha_i-\alpha_j))=0$ összefüggéseket kapjuk. Mivel $r_ir_j>0$ és $1-\cos(\alpha_i-\alpha_j)\ge 0$ $\forall i,j\in\overline{1,n}$ esetén következik, hogy $\cos(\alpha_i-\alpha_j)=1$ $\forall i<j$, $i,j\in\overline{1,n+1}$-re ahonnan $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_{n+1}$, ami azt jelenti, hogy $O,A_1,A_2,...,A_{n+1}$ kollineárisak.

Alkalmazások

1. (Pick tétele) Bizonyítsuk be, hogy ha egy rácssokszög oldalain (a csúcsokat is beleértve) K darab rácspont van és a sokszög belsejében B darab, akkor a sokszög területe $B+\frac{K}{2}-1$.

2. Határozzuk meg az $f:N^*\to N^*$ teljesen multiplikatív függvények $\left(f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y),\forall x,y\in N^*\right)$ általános alakját a prímértékekben felvett értékek segítségével.

3. Az (a_n) sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$a_n=\begin{Bmatrix}1, & ha\ n=0\\ 2a_{\left[\frac{n}{2}\right]}+3a_{\left[\frac{n}{3}\right]}+6a_{\left[\frac{n}{6}\right]}, & ha\ n\ge 1\end{Bmatrix}$$

Bizonyítsuk be, hogy $a_n\le 10n^2+1$.

1.3.4. Tétel (negyedik variáns)

Legyen $a\in N$ egy rögzített természetes szám. Minden $n\ge a$ számhoz hozzárendelünk egy $P(n)$ kijelentést, amely teljesíti a következő feltételeket:

a) $P(a)$, $P(a+1),P(a+2),...,P(a+k-1)$ igaz (k egy rögzített szám)

b) Ha bármely $m\in N$, $n\le m\le n+k-1$ esetén $P(m)$ igaz, akkor $P(n+k)$ is igaz

akkor $P(n)$ igaz $\forall n\in N, n\ge a$ esetén.

Bizonyítás

Tekintsük a $Q(n)=P(n)\wedge P(n+1)\wedge...\wedge P(n+k-1)$ kijelentést $\forall n\in N, n\ge a$ esetén. A $Q(a)=P(a)\wedge P(a+1)\wedge...\wedge P(a+k-1)$ kijelentés igaz, mivel i) alapján a $P(a)$, $P(a+1)$, $P(a+k-1)$ kijelentések mindegyike igaz. Ha a $Q(n)$ kijelentés igaz, akkor a $P(n),P(n+1),...,P(n+k-1)$ kijelentések mindegyike igaz, azaz $P(m)$ igaz $\forall m\in N$ esetén, amelyre $n\le m\le n+k-1$ esetén. A ii) feltétel alapján ekkor a $P(n+k)$ is igaz, ami azt jelenti, hogy a $Q(n+1) = P(n+1) \wedge P(n+2) \wedge \ldots \wedge P(n+k)$ kijelentés is igaz. Tehát az 1.3.1. tétel feltételei teljesülnek a $Q(n)$ kijelentésre, ezért $Q(n)$ igaz $\forall n \in N$, $n \geq a$ esetén.

1.3.9. Példa

Az $(x_n)_{n \in N}$ sorozat elemeit a következőképpen adjuk meg:

$$x_0 = 0, x_1 = 1 \text{ és } x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}, \ \forall n \geq 1\text{-re.}$$

Bizonyítsuk be, hogy a sorozat általános tagját az $x_n = \frac{2}{3} \cdot \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right]$, $\forall n \in N$ összefüggés adja meg.

Megoldás

Jelöljük $P(n)$-nel az $x_n = \frac{2}{3} \cdot \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right]$ kijelentést.

$n = 0$ esetén $P(0): x_0 = \frac{2}{3} \cdot (1-1) \Leftrightarrow 0 = 0$ igaz

Feltételezzük, hogy $P(k)$ igaz $\forall k \leq n$ esetén. Ez azt jelenti, hogy $x_{n-1} = \frac{2}{3} \cdot \left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right]$ és $x_n = \frac{2}{3} \cdot \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right]$. A rekurziós összefüggés alapján

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} + 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right] = \frac{2}{3} \cdot \left[1 + \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}}\right],$$

tehát a $P(n+1)$ kijelentés is igaz. Az 1.3.3. tétel értelmében $P(n)$ igaz $\forall n \in N$ esetén.

Alkalmazások

1. Jelöljük T_n-nel az $\cos(n \cdot ar\cos x)$ kifejezést bármely $x \in [-1,1]$ esetén. Bizonyítsd be, hogy $T_n : [-1,1] \to R$ egy n-ed fokú polinomfüggvény és számítsd ki az együtthatói modulusának összegét.

2. Ha $S_m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m$, ahol $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ egyenlet gyökei $(a_k \in Z)$ és $S_m \in Z$ ha $m = \overline{1, n-1}$, akkor $S_m \in Z$ bármely $m \in N$ esetén.

3. Az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat teljesíti az $x_{n+2} = 2x_{n+1} + n(n+1)x_n$ rekurziót és a $0 < 3x_1 \leq 2x_2 \leq 4x_1$ kezdeti feltételeket. Számítsuk ki a $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{x_n}}{n}$ határértéket!

Indukció előre-hátra

Előfordulhat, hogy az előbbi tételekben szereplő $P(n) \to P(n+1)$ vagy a hozzá hasonló implikációk bizonyítása több közbeeső lépést igényel. Az is lehetséges, hogy egy ilyen implikáció bizonyításához újabb indukció szükséges. Azonosságok, egyenlőtlenségek esetében gyakran használunk $P(n) \to P(2n) \to P(n+1)$ típusú közbeékelt implikációt.

1.3.10. Példa (Jensen egyenlőtlenség)

Ha I egy intervallum és $f : I \to R$ egy olyan függvény, amelyre $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ $\forall x, y \in I$, akkor

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}\quad \forall n\in N^* \text{ és } \forall x_i\in I, i=\overline{i,n} \text{ esetén.}$$

Bizonyítás

Jelöljük $P(n)$-nel az $f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}$ $\forall x_i\in I, i=\overline{i,n}$ állítást.

$P(1)$ nyilvánvalóan igaz, $P(2)$ a feltétel alapján igaz. Feltételezzük, hogy $P(n)$ igaz. Akkor tetszőleges $x_1, x_2,..., x_n\in I$-re a feltétel alapján

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n+...+x_{2n}}{2n}\right)=f\left(\frac{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+...+x_{2n}}{n}}{2}\right)\geq$$

$$\geq\frac{f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)+f\left(\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+...+x_{2n}}{n}\right)}{2} \quad (1).$$

Az indukciós feltétel alapján viszont: $f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}$ (2),

és

$$f\left(\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+...+x_{2n}}{n}\right)\geq\frac{f(x_{n+1})+f(x_{n+2})+...+f(x_{2n})}{n} \quad (3).$$

(1), (2) és (3)-ból következik, hogy $f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{2n}}{2n}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{2n})}{2n}$ (4),

azaz a $P(2n)$ kijelentés is igaz.

Ha az előbbi egyenlőtlenségben $x_{n+2}=x_{n+3}=...=x_{2n}=\frac{x_1+x_2+...+x_{n+1}}{n+1}$-gyet választunk, akkor az $f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{n+1}}{n+1}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n+1})}{n+1}$ egyenlőtlenséget kapjuk, mert $\frac{x_1+x_2+...+x_{n+1}+(n-1)\frac{x_1+x_2+...+x_{n+1}}{n+1}}{2n}=\frac{x_1+x_2+...+x_{n+1}}{n+1}$, így a (4)-es egyenlőtlenség a következőképpen alakul:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{n+1}}{n+1}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n+1})+(n-1)f\left(\frac{x_1+x_2+...+n_{n+1}}{n+1}\right)}{2n},$$

ahonnan $(n+1)\cdot f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{n+1}}{n+1}\right)\geq f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n+1})$ és $(n+1)$-gyel való osztás után az $f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{n+1}}{n+1}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n+1})}{n+1}$ összefüggést kapjuk, ami azt mutatja, hogy a $P(n+1)$ állítás is igaz. Az 1.3.1. tétel értelmében $P(n)$ állítás igaz $\forall n\in N^*$ esetén.

Az ilyen típusú indukciót némileg módosított formában először Augustin Louis Cauchy használta az 1800-as évek végén (Analyse Algebrique, 457-459 oldal). J.L.W.V.Jensen érdeme, hogy a gondolatmenet nagyfokú általánosságát észrevette.

Látható, hogy ha előbb valamilyen módszerrel igazoljuk k-ra a bizonyítandó egyenlőtlenséget, akkor a $P(n) \to P(kn) \to P(n+1)$ implikációkat is bizonyíthatjuk.

Megjegyzések

1. Az egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy ha f grafikus képén minden húr felezőpontja a neki megfelelő grafikonív alatt helyezkedik el, akkor az $M_i(x_i, f(x_i))$ pontok által meghatározott sokszög súlypontja is az ív alatt van, $\forall i \in N$ esetén.
2. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező f függvényeket Jensen-konkáv függvényeknek nevezzük. Ha f folytonos, akkor a Jensen-féle konkavitás a konkavitással egyenértékű, általában azonban ettől különböző fogalom. Pl. ha $f: R \to R$ lineáris, de nem folytonos (ilyen függvény létezik, és a Hamel-bázisok segítségével megszerkeszthető), akkor f Jensen-konkáv, de nem konkáv.
3. Sok X. osztályos tankönyvben a konvexitás fogalma helyett a Jensen-konvex fogalmat vezetik be, anélkül, hogy a kettő különbségét megemlítenék.
4. Eredetileg 1905-ben (január 17-én a dán matematikai társaság előtt tartott előadásai) Jensen valóban ezzel az egyenlőtlenséggel definiálta a konvex és konkáv függvényeket, de a modern matematikában a konvex függvény definiciója ettől különbözik.

Alkalmazások

1. Bizonyítsd be, hogy ha az $f: R_+^* \to R_+^*$ függvényre $f\left(\sqrt{xy}\right) = \dfrac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$ $\forall x, y \in R_+^*$, akkor

$$f\left(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\right) = \frac{n}{\dfrac{1}{f(x_1)} + \dfrac{1}{f(x_2)} + \ldots + \dfrac{1}{f(x_n)}} \quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in R_+^*.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_k \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ $k = \overline{1,n}$, akkor $\dfrac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n} \le \dfrac{\prod_{k=1}^{n} (1-x_k)}{\left(\sum_{k=1}^{n} (1-x_k)\right)^n}$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_k, b_k \in R_+^*$ $k = \overline{1,n}$, akkor $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{a_k^2 + b_k^2}{a_k b_k} \ge \dfrac{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} b_k^2}}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k b_k}}$.

1.4. Indukció az indukcióban

Amint már említettük, gyakran előfordul, hogy egy matematikai indukcióval történő bizonyítás során, amikor $P(n) \to P(n+1)$ vagy hozzá hasonló implikációt bizonyítunk, olyan összefüggéshez jutunk, melynek bizonyításához újabb indukciót kell használnunk. Az ilyen esetekre mondjuk azt, hogy "indukció az indukcióban".

1.4.1. Példa

Bizonyítsuk be, hogy $3^n > n^3 \quad \forall n \in N, n \geq 4$ esetén.

Bizonyítás

Jelöljük $P(n)$-nel a $3^n > n^3$ állítást. A $P(4)$ kijelentés $3^4 > 4^3 \Leftrightarrow 81 > 64$ nyilvánvalóan igaz. Feltételezzük, hogy $P(n)$ igaz. Bizonyítsuk be, hogy akkor a $P(n+1): 3^{n+1} > (n+1)^3$ kijelentés is igaz.

Az indukciós feltétel alapján $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3n^3$. Ha sikerül bebizonyítanunk azt, hogy $3n^3 > (n+1)^3$ (1) tetszőleges $n \geq 4$ esetén, akkor a $3^{n+1} > 3n^3 > (n+1)^3$ egyenlőtlenségsorozatból következik, hogy $P(n+1)$ is igaz.

Az (1)-es egyenlőtlenség igazolására matematikai indukciót használunk. Jelöljük $Q(n)$-nel a $3n^3 > (n+1)^3$ kijelentést. A $Q(4)$ kijelentés: $3 \cdot 4^3 > 5^3 \Leftrightarrow 192 > 125$ igaz. Ha feltételezzük, hogy $Q(n)$ kijelentés igaz, akkor

$$3(n+1)^3 = 3n^3 + 9n^2 + 9n + 3 > (n+1)^3 + 9n^2 + 9n + 3 \quad (2)$$

az indukciós feltevés alapján. Már csak azt kell belátnunk, hogy $(n+1)^3 + 9n^2 + 9n + 3 > (n+2)^3$ (3), ami egyenértékű a $12n^2 + 12n + 4 > 6n^2 + 12n + 8$ egyenlőtlenséggel, azaz a $6n^2 > 4$ egyenlőtlenséggel, amely nyilvánvalóan igaz $\forall n \geq 4$ esetén.

A (2) és (3) egyenlőtlenségek alapján tehát $3^{n+1} > (n+2)^3$, azaz $Q(n+1)$ is igaz $\forall n \in N, n \geq 4$ esetén. Tehát, ha a $P(n)$ kijelentés igaz, akkor a $P(n+1)$ kijelentés is igaz, így a $P(n)$ kijelentés igaz $\forall n \in N, n \geq 4$ esetén.

Megtörténik, hogy az indukción belüli indukció érdekes módon fonódik össze az eredeti kijelentéssel, és a kettő együttes igazolásával tudjuk belátni az eredeti kijelentést.

1.4.2. Példa

Adott az $(F_n)_{n \in N^*}$ Fibonacci sorozat ($F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$). Bizonyítsuk be, hogy $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$.

Megoldás

Jelöljük $P(n)$-nel a bizonyítandó kijelentést. A $P(1): 1^2 + 1^2 = 2$ kijelentés igaz. Ha feltételezzük, hogy $P(n)$ igaz, akkor

$$F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 = F_{n+1}^2 + (F_n + F_{n+1})^2 = F_n^2 + F_{n+1}^2 + (2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2) = F_{2n+1} + (2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2)$$

az indukciós feltevés alapján.

Igazolnunk kellene, hogy $F_{2n+1} + (2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2) = F_{2n+3}$. Ez a következőkkel egyenértékű $F_{2n+1} + (2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2) = F_{2n+1} + F_{2n+2} \Leftrightarrow 2F_nF_{2n+1} + F_{2n+1}^2 = F_{2n+2}$

Jelöljük $Q(n)$-nel a $2F_nF_{2n+1} + F_{2n+1}^2 = F_{2n+2}$ kijelentést. A $Q(1): 2 + 1 = 3$ igaz kijelentés. Ha $Q(n)$-et igaznak feltételezzük, akkor

$$2F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+2}^2 = 2F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) + F_{n+2}^2 = (2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2) + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 \overset{Q(n)}{=}$$

$$= F_{2n+2} + (F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2) \overset{P(n+1)}{=} F_{2n+2} + F_{2n+3} = F_{2n+4}.$$

Tehát a $P(n) \wedge Q(n)$ kijelentést bizonyítottuk a $P(n) \wedge Q(n) \Rightarrow P(n+1)$, $P(n+1) \wedge Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$ implikációk alapján, ami a $P(n) \wedge Q(n) \Rightarrow P(n+1) \wedge Q(n+1)$-hez vezet.

1.5. Indukció a valós számok halmazán

Az eddig bemutatott indukciós bizonyítási variánsok közös vonása, hogy egy természetes számokra vonatkozó kijelentés igazolására szolgáltak. A matematikai indukció módszerével azonban olyan kijelentéseket is bizonyíthatunk, amelyek nem természetes, hanem pozitív valós számokra vonatkoznak.

1.5.1. Tétel

Ha a $P(x)$ ahol $x \in R_+$ olyan kijelentés, amely teljesíti a következő feltételeket:

i) $P(x)$ igaz $\forall\, x \in [0,1)$ esetén

ii) Bármely $x \geq 0$ esetén, ha $P(x)$ igaz, akkor $P(x+1)$ is igaz

akkor $P(x)$ igaz $\forall x \geq 0$ -ra.

Bizonyítás

Tekintsük a $Q(n): P(x)$ igaz $\forall\, x \in [n, n+1)$ esetén kijelentést.

$Q(0) \Leftrightarrow P(x)$ igaz $\forall\, x \in [0,1)$ esetén, ami az i) feltétel alapján igaz.

Feltételezzük, hogy $Q(n)$ igaz, azaz, hogy a $P(x)$ igaz $\forall\, x \in [n, n+1)$ -re.

Igazoljuk, hogy $Q(n+1)$ is igaz, azaz, hogy $P(x)$ igaz $\forall\, x \in [n+1,\, n+2)$ -re. Legyen $x_0 \in [n+1,\, n+2)$ egy tetszőleges elem. Ekkor $1 - x_0 \in [n, n+1)$ és ezért $P(x_0 - 1)$ igaz. De a ii) feltétel alapján akkor a $P((x_0 - 1) + 1) = P(x_0)$ is igaz. Tehát $P(x)$ igaz tetszőleges $x_0 \in [n+1,\, n+2)$ esetén, így $Q(n+1)$ igaz.

Az 1.5.1. tétel értelmében $Q(n)$ igaz $\forall n \in N$ esetén, tehát $\forall n \in N$ esetén $P(x)$ igaz $\forall\, x \in [n, n+1)$ -re, azaz $P(x)$ igaz $\forall x \geq 0$ -ra.

Megjegyzés

Nyilvánvalóan, ha az ellenőrző lépést nem $\forall x \in [0,1)$ -re, hanem $x \in [a, a+1)$ -re végezzük, akkor azt bizonyítjuk, hogy $P(x)$ igaz $\forall x \geq a$ esetén.

1.5.1. Példa

Bizonyítsuk be, hogy $5^x > 5x^3 + 2, \forall x \in [5, +\infty)$ -re.

Bizonyítás

Ellenőrizzük, hogy a $P(x): 5^x > 5x^3 + 2$ állítás igaz-e az $[5,6)$ intervallumon. Minden $x \in [5,6)$ -ra $5 \leq x < 6$, így $5^x \geq 5^5 = 3125$, és $5x^3 + 2 < 5 \cdot 6^3 + 2 = 1082$, tehát $5^x \geq 5^5 > 5 \cdot 6^3 + 2 \geq 5x^2 + 2$, így az állítás igaz.

Bizonyítjuk, hogy ha $P(x)$ igaz, akkor $P(x + 1)$ is igaz. Az indukciós feltevés következtében

$$5^{x+1} = 5 \cdot 5^x > 5 \cdot \left(5x^3 + 2\right). \qquad (1)$$

Elégséges igazolni, hogy $5 \cdot \left(5x^3 + 2\right) > 5(x+1)^3 + 2 \quad (2)$. De

$$5 \cdot \left(5x^3 + 2\right) > 5(x+1)^3 + 2 \quad (2) \;\Leftrightarrow\; 25x^3 + 10 > 5x^3 + 15x^2 + 15x + 7 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 10x^3 - 15x^2 - 15x + 3 > 0 \;\Leftrightarrow\; 5x\left(2x^2 - 3x - 3\right) + 3 > 0,$$

ami igaz, mivel $2x^2 - 3x - 3 > 0$ bármely $x > \dfrac{3 + \sqrt{33}}{4}$ -re, ahonnan következik, hogy bármely $x \geq 5$ -re is. (1) és (2) alapján $5^{x+1} > 5(x+1)^3 + 2$, tehát $P(x + 1)$ is igaz. Az 1.3.5. tétel értelmében $P(x)$ igaz minden $x \in [5, \infty)$ -re.

Az 1.5.1. tételben az ellenőrző lépést tetszőleges hosszúságú intervallum esetén is elvégezhetjük (ez a hossz nem feltétlenül természetes szám). Ebben az esetben a következő indukciós variánshoz jutunk:

1.5.2. Tétel

Ha $a,\ b\in R$, $b>0$ valós számok, $P(x)$ egy olyan kijelentés, amely az $x\in[a,\ +\infty)$-tól függ, és ha a $P(x)$ teljesíti a következő feltételeket:

i) $P(x)$ igaz minden $x\in[a,\ a+b)$ esetén;

ii) minden $x\in[a,\ +\infty)$ esetén, ha $P(x)$ igaz, akkor $P(x+b)$ is igaz,

akkor $P(x)$ igaz minden $x\geq a$ esetén.

Bizonyítás

Tekintsük a $Q(n)$: $P(x)$ igaz bármely $x\in[a+nb, a+(n+1)b)$, n-től függő kijelentést. $Q(0)\Leftrightarrow P(x)$ igaz $\forall\ x\in[a,\ a+b)$, ami nyilvánvalóan igaz az i) feltétel szerint. Ha $Q(n)$ igaz, akkor $P(x)$ igaz minden $x\in[a+nb, a+(n+1)b)$-re. Így tetszőleges $y\in[a+(n+1)b, a+(n+2)b)$-re $y-b\in[a+nb, a+(n+1)b)$, ezért $P(y-b)$ igaz. A ii) alapján ekkor a $P((y-b)+b)=P(y)$ kijelentés is igaz. Az 1.5.1. tétel értelmében a $Q(n)$ kijelentés igaz bármely $n\in N$-re.

1.5.2. Példa

Bizonyítsuk be, hogy bármely $x\geq\frac{11}{6}$ esetén $5^{3x}>5\sqrt{5}\cdot\left(3x-\frac{1}{2}\right)^3+2\sqrt{5}$.

Bizonyítás

Az $5^{3x}>5\sqrt{5}\cdot\left(3x-\frac{1}{2}\right)^3+2\sqrt{5}$ (1) egyenlőtlenség egyenértékű a $\frac{5^{3x}}{\sqrt{5}}>5\left(3x-\frac{1}{2}\right)^3+2 \Leftrightarrow 5^{3x-\frac{1}{2}}>5\cdot\left(3x-\frac{1}{2}\right)^3+2$ egyenlőtlenségekkel. Az 1.5.1. példában az $x=3y-\frac{1}{2}$ változócserét alkalmazva, az $5^{3y-\frac{1}{2}}>5\left(3y-\frac{1}{2}\right)^3+2$, $\forall\ y\geq\frac{11}{6}$ egyenlőtlenséghez, vagyis pontosan a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk (ha $x\geq 5$, akkor $y=\frac{x+\frac{1}{2}}{3}\geq\frac{5+\frac{1}{2}}{3}=\frac{11}{6}$). Az (1) egyenlőtlenséget azonban az 1.5.2. tétel segítségével, direkt indukcióval is igazolhatjuk. Előbb belátjuk, hogy a $P(x)$: $5^{3x}>5\sqrt{5}\cdot\left(3x-\frac{1}{2}\right)^3+2\sqrt{5}$ kijelentés bármely $x\in\left[\frac{11}{6},\ \frac{13}{6}\right]$-ra igaz. Valóban, $5^{3x}\geq 5^{\frac{11}{2}}=\sqrt{5}\cdot 5^5=3125\sqrt{5}$, és

$$5\sqrt{5}\left(3x-\frac{1}{2}\right)^3+2\sqrt{5}\leq 5\sqrt{5}\cdot\left(\frac{13}{2}-\frac{1}{2}\right)^3+2\sqrt{5}=1084\sqrt{5}.$$

Tehát $5^{3x}\geq 3125\sqrt{5}>1084\sqrt{5}\geq 5\sqrt{5}\left(3x-\frac{1}{2}\right)^3+2\sqrt{5},\ \forall\, x\in\left[\frac{11}{6},\ \frac{13}{6}\right]$,

ahonnan $5^{3x}>5\sqrt{5}\left(3x-\frac{1}{2}\right)^3+2\sqrt{5}$.

Igazoljuk, hogy ha $P(x)$ igaz, akkor $P\left(x+\frac{13}{6}-\frac{11}{6}\right)$ is igaz. A $P\left(x+\frac{1}{3}\right)$: $5^{3x+1} > 5\sqrt{5}\cdot\left(3x+\frac{1}{2}\right)^3 + 2\sqrt{5}$ egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk.

$5^{3x+1} = 5\cdot 5^{3x} > 5\left[5\sqrt{5}\left(3x-\frac{1}{2}\right)^3 + 2\sqrt{5}\right] = 25\sqrt{5}\left(3x-\frac{1}{2}\right)^3 + 10\sqrt{5}$, az indukciós feltevés értelmében. De $25\sqrt{5}\left(3x-\frac{1}{2}\right)^3 + 10\sqrt{5} > 5\sqrt{5}\left(3x+\frac{1}{2}\right)^3 + 2\sqrt{5}$, ami a műveletek elvégzése után igaz egyenlőtlenséghez vezet. Tehát ha $P(x)$ igaz, akkor $P\left(x+\frac{1}{3}\right)$ is igaz. Az 1.5.2. tétel értelmében $P(x)$ igaz minden $x \geq \frac{11}{6}$ esetén.

1.6. Indukció élesítéssel

Előfordul, hogy olyan egyenlőtlenségeket kell bizonyítanunk, amelyeket matematikai indukcióval a megadott formában nem tudunk belátni, de ha élesítjük az egyenlőtlenséget, az így kapott formát már bebizonyíthatjuk indukcióval (kutatók paradoxonja). Tehát annak az igen érdekes helyzetnek vagyunk a tanúi, amikor egy egyenlőtlenséget nem, de a nála szigorúbb egyenlőtlenséget bizonyítani tudjuk (és ezáltal nyilván a kértet is).

1.6.1. Példa

Igazoljuk, hogy $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2,\ \ \forall n\in N^*$ esetén.

Bizonyítás

Az egyenlőtlenséget igazolhatjuk más eljárással, mint az indukció, például teleszkopikus becsléssel. Mivel

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n},$$

ezért $1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}<2$. Viszont , ha indukcióval próbálnánk bizonyítani a kért összefüggést, akkor a $P(n)\to P(n+1)$ implikáció igazolásakor az $1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}<2+\frac{1}{(n+1)^2}$ egyenlőtlenséghez jutok, és ennek az egyenlőtlenségnek a jobb oldalán álló összegről nem tudom belátni, hogy 2-nél kisebb. Ezért megpróbálunk egy olyan $E: N^* \to R_+^*$ függvényt meghatározni, amelyre

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2-E(n),\ \ \forall n\in N^*.$$

Az $E(n)$ kifejezést úgy határozzuk meg, hogy az egyenlőtlenség indukcióval bizonyítható legyen. A $P(n)\to P(n+1)$ implikáció igazolásakor, az indukciós feltevés alapján $1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}<2-E(n)+\frac{1}{(n+1)^2}$, tehát elégséges volna a

$$2-E(n)+\frac{1}{(n+1)^2}<2-E(n+1) \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2}<E(n)-E(n+1)$$

egyenlőtlenség. Egy ilyen $E(n)$ függvény az $E(n)=\frac{1}{n}$, mivel $\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$.

Tehát azt igazolom, hogy $1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}$, $\forall n\ge 1$. Az előbbiek alapján ez indukcióval igazolható, tehát $1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}<2$, $\forall n\ge 1$.

Alkalmazások

Ezzel a módszerrel igazolhatjuk például a következő egyenlőtlenségeket is:

1. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{n^2-n+1}<2,\ \forall n\in N^*$; **2.** $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4},\ \forall n\in N^*$;

3. $\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot...\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<4,\ \forall n\in N^*$; **4.** $\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdot...\cdot\left(1+\frac{1}{n^3}\right)<3,$;

5. $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot...\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)<\frac{5}{2},\ \forall n\in N^*$.

Megjegyzés

Az 1., a 2. és a 4. egyenlőtlenségek igazolásakor az $E(n)=\frac{1}{n}$-re indukcióval igazolható, hogy $1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n^2-n+1}<2-E(n)$, illetve $1+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}+E(n)$. A 3. egyenlőtlenség indukcióval történő igazolása érdekében az $E(n)$ függvényt úgy kell megválasztanunk, hogy fennáljon a $[4-E(n)]\left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]<4-E(n+1)$ egyenlőtlenség, ugyanakkor a sajátos ($n=4$) eset fennállása érdekében a $\frac{25\cdot 17}{9\cdot 16}\le 4-E(4)$ egyenlőtlenségnek is fenn kell állnia. Ha $E(n)$-t $\frac{a}{n}$ alakban keressük, az egyik feltételből $a\le 4$-hez, a másikból pedig $a\ge 4$-hez jutunk, tehát $a=4$, és így $E(n)=\frac{4}{n}$.

Az 5-ös egyenlőtlenség igazolásakor az $\frac{5}{2}(1-E(n))$ élesítést végezzük, így az $\frac{5}{2}(1-E(n))\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)<\frac{5}{2}(1-E(n+1))$ egyenlőtlenséget kell igazolnunk, amely egyenértékű az $1+\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{1-E(n+1)}{1-E(n)}$ egyenlőtlenséggel. Ez az $E(n)=\frac{1}{2^n}$ függvényre nyilvánvalóan igaz.

1.7. Többváltozós indukció

Gyakran találkozunk olyan állításokkal, amelyek két paramétertől (vagy akár többtől) is függenek. Ebben az esetben is használhatjuk a matematikai indukciót, mint bizonyítási eszközt. Az indukció alkalmazásának egyik legegyszerűbb esete, ha $n+m$-re vonatkozó indukciót végzünk. Ennek a lényegét a következő tételben fogalmazzuk meg.

1.7.1. Tétel

Ha $n_0,\ m_0\in N$, és $P(n,\ m)$ egy n és m-től függő predikátum, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

i) $P(n_0, m_0)$ igaz;

ii) Ha $P(n', m')$ igaz bármely olyan n'-re és m'-re, amelyre $n' + m' < n + m$, akkor a $P(n, m)$ is igaz,

akkor $P(n, m)$ igaz bármely $n, m \in N$, $n \geq n_0$, $m \geq m_0$ esetén.

1.7.1. Példa

Az x_i, y_i $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ számok olyan pozitív egész számok, amelyekre $x_1 + ... + x_n = y_1 + ... + y_m < n \cdot m$, és $n, m \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy az x_i és az y_j számok közül kiválasztható néhány (nem az összes) úgy, hogy ezeknél a kiválasztott x_i-k összege egyenlő legyen a kiválasztott y_j-k összegével.

Bizonyítás

$n + m$-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. Feltehető, hogy $x_1 \geq x_i$ minden i-re, és $y_1 \geq y_i$ minden i-re, továbbá $x_1 > y_1$ ($x_1 = y_1$-re az állítás nyilvánvaló). Ekkor

$$(x_1 - y_1) + x_2 + ... + x_n = y_2 + ... + y_m .$$

Belátjuk, hogy $y_2 + ... + y_m < n(m-1)$, amiből az indukciós feltevés alapján adódik az állítás.

Legyen $y_1 + y_2 + ... + y_m = s < n \cdot m$. Ekkor az y_1 megválasztása miatt $y_1 \geq \frac{s}{m}$. Így

$$y_1 + y_2 + ... + y_m = s - y_1 \leq s - \frac{s}{m} < nm\left(1 - \frac{1}{m}\right) = n(m-1).$$

1.7.2. Példa

Egy, különböző természetes számokat tartalmazó $m \times n$-es táblázat minden sorában aláhúzzuk a k $(k \geq 2)$ darab legnagyobbat, és minden oszlopában aláhúzzuk az l $(l \geq 2)$ darab legnagyobbat $(k \leq m, l \leq n)$. Bizonyítsuk be, hogy legalább $k \cdot l$ számot kétszer húztunk alá.

Bizonyítás

A $k + l$-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Keressünk a táblázatban olyan sort, vagy olyan oszlopot, amelyben k darab, illetve l darab kétszer aláhúzott szám szerepel. Elhagyva azt a sort (vagy oszlopot), a maradék táblázatra (k és l–1, vagy k–1 és l paraméterekkel) alkalmazzuk az indukciós feltevést, mely szerint ebben a táblázatban található legalább $k(l-1)$ vagy $(k-1)l$ elem, amelyet kétszer húztunk alá. Így az eredeti táblázatban van $k(l-1) + k = k \cdot l$, vagy $(k-1)l + l = k \cdot l$ kétszer aláhúzott elem.

A továbbiakban belátjuk, hogy ilyen sor, vagy oszlop a táblázatban biztosan található. Válasszuk ki az egyszer aláhúzott elemek közül a legnagyobbat (ha nincs egyszer aláhúzott elem, akkor mind kétszer vannak aláhúzva, így készen vagyunk). Ez a saját sorában a k darab legnagyobb elem között van, de oszlopában nincs az l darab legnagyobb elem között (vagy fordítva). Ekkor az oszlopában az l legnagyobb elem alá van húzva, és az nála nagyobb, tehát a választás miatt nem lehetnek egyszer aláhúzottak. Tehát ez az l elem kétszer aláhúzott.

A két paramétertől függő állítások igazolására más módon is alkalmazhatjuk az indukciós elvet, például a következőképpen:

1.7.2. Tétel. Ha $P(n, m)$ egy n és $m \in N$-től függő predikátum, amely teljesíti a következő feltételeket:

i) $P(0, 0)$ igaz;

ii) Ha $P(n', m')$ igaz bármely $n' < n$ és $m' \leq m$, illetve $n' \leq n$ és $m' < m$ esetén, akkor $P(n, m)$ igaz, akkor $P(n,\ m)$ igaz $\forall n,\ m \in N$.

1.7.3. Példa

Bizonyítsuk be, hogy $m! + \dfrac{(m+1)!}{1!} + ... + \dfrac{(m+n)!}{n!} = \dfrac{(m+n+1)!}{n!(m+1)}$.

Bizonyítás

A bizonyítandó egyenlőség mindkét oldalát elosztva $m!$-ral, a vele egyenértékű $C_m^0 + C_{m+1}^1 + ... + C_{m+n}^n = C_{m+n+1}^n$ azonossághoz jutunk. Jelöljük $P(m,\ n)$-nel ezt az állítást.
A $P(0,\ 0)$: "$C_0^0 = C_1^0$" kijelentés igaz. Ha feltételezzük, hogy $P(n',\ m')$ igaz bármely $n' < n$-re, vagyis $P(n-1,\ m)$ is igaz, így $\left(C_m^0 + C_{m+1}^1 + ... + C_{m+n-1}^{n-1}\right) + C_{m+n}^n = C_{m+n}^{n-1} + C_{m+n}^n = C_{m+n+1}^n$ az indukciós feltevés, és a Pascal-formula alapján, tehát $P(n,\ m)$ is igaz. Így az egyenlőség fennáll bármely $m,\ n \in N$ esetén.

A többváltozótól függő állítások igazolása gyakran a z előbbiekben már bemutatott indukción belüli indukcióval is történhet. Erre egy geometriai alkalmazást mutatunk be:

1.7.4. Példa

Adottak az $A_{i1}A_{i2}...A_{im}$, $i \in \{1,\ 2,\ ...\ ,\ n\}$, $m \geq 3$, azonos körüljárási irányú, egymással hasonló sokszögek. Ha A_{i_0}-val jelöljük az $A_{i1}A_{i2}...A_{im}$ sokszög, és A_{0j}-vel az $\{A_{ij}\}_{i=\overline{1,\ n}}$ pontrendszer súlypontját minden $j = \overline{1,\ m}$ esetén, akkor

1) $A_{01}A_{02}...A_{0m}$ hasonló és azonos körbejárású a megadott sokszögekkel;
2) Az $A_{01}A_{02}...A_{0m}$ sokszög súlypontja egybeesik az eredeti sokszögek súlypontjai által alkotott pontrendszer súlypontjával.

Bizonyítás

A sokszög oldalszáma szerinti indukcióval bizonyítjuk a tulajdonságot.
Ha $m = 3$, akkor egymással hasonló $A_{i1}\ A_{i2}A_{i3}$ háromszögeink vannak, $i \in \{1,\ ....,\ n\}$. A tulajdonságot *n* szerinti indukcióval igazoljuk.
$n = 2$ esetén igazolnunk kell, hogy két egyenesen hasonló háromszög megfelelő csúcsai által meghatározott szakaszok felezőpontjai a háromszögekkel egyenesen hasonló háromszöget alkotnak. Jelöljük $a_{11},\ a_{12},\ a_{13}$-mal illetve $a_{21},\ a_{22},\ a_{23}$-mal a csúcsoknak megfelelő affixumokat. Legyen XYZ a két háromszöggel egyenesen hasonló háromszög. Ebben az esetben fennállnak az

$$a_{11}(y-z) + a_{12}(z-x) + a_{13}(x-y) = 0$$

és

$$a_{21}(y-z) + a_{22}(z-x) + a_{23}(x-y) = 0 \quad (2)$$

összefüggések. A (2) összefüggést λ-val szorozzuk, összeadjuk a két összefüggést, majd az így kapott relációt szorozzuk $\dfrac{1}{1+\lambda}$-val, így az

$$\frac{a_{11}+\lambda a_{21}}{1+\lambda}(y-z) + \frac{a_{12}+\lambda a_{22}}{1+\lambda}(y-z) + \frac{a_{13}+\lambda a_{23}}{1+\lambda}(x-y) = 0 \quad (3)$$

összefüggést kapjuk, ami azt fejezi ki, hogy a megfelelő csúcsokat összekötő $A_{11}A_{21}$, $A_{12}A_{22}$, $A_{13}A_{23}$ szakaszokat λ arányban osztó pontok által meghatározott háromszög egyenesen hasonló az adott háromszögekkel. $\lambda = 1$-re éppen a felezőpontokra kapjuk a kívánt tulajdonságot.
Feltételezzük, hogy a tulajdonság igaz *n* háromszög esetén. Egy (*n* + 1)-szög G súlypontját úgy kapjuk meg, hogy valamely *n* csúcsa által meghatározott sokszög súlypontjait

összekötjük az (n +1)-ik csúccsal és az így keletkezett G_0A_{n+1} szakaszon felvesszük a G_0A_{n+1}-et $\frac{1}{n}$ arányban osztó G pontot ($\frac{G_0G}{A_{n+1}G}=\frac{1}{n}$).

Az (n + 1) háromszög közül tekintjük az első n háromszöget. Az indukciós feltevés alapján a megfelelő csúcsok által alkotott sokszögek G_1, G_2 és G_3 súlypontjai az eredeti háromszögekkel egyenesen hasonló háromszöget alkotnak. A $G_1G_2G_3$, és az $A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$ háromszögekre használjuk azt a tulajdonságot, hogy megfelelő csúcsaikat összekötő szakaszokat $\lambda=\frac{1}{n}$ arányban osztó pontok által alkotott háromszög velük egyenesen hasonló. De ezek a pontok éppen az (n + 1)-szögek súlypontjai. Tehát $m=3$-ra a tulajdonságot bizonyítottuk (n szerinti indukcióval).

Feltételezzük, hogy a tulajdonság igaz m oldalú sokszögekre, és bizonyítjuk, hogy $m+1$ oldalú sokszögekre is igaz. Ha az $\{A_{ij}\}_{j=\overline{1,\, m+1}}$ sokszögek egyenesen hasonlóak bármely $i=\overline{1,\, n}$-re, akkor az $\{A_{ij}\}_{j=\overline{1,\, m}}$ sokszögek szintén hasonlóak minden $i=\overline{1,\, n}$-re, így az indukciós feltevés alapján az $A_{01}A_{02}...A_{0m}$ sokszög egyenesen hasonló az $A_{11}A_{12}...A_{1m}$ sokszöggel. Másrészt az $A_{0m+1}A_{0m}A_{01}$ és az $A_{1m+1}A_{1m}A_{11}$ háromszögek hasonlóak (az $m=3$ esetben bizonyítottak értelmében), így az $A_{01}A_{02}...A_{0m}A_{0m+1}$ sokszög egyenesen hasonló az $A_{11}A_{12}...A_{1m}A_{1m+1}$ sokszöggel.

Alkalmazások

1. Bizonyítsuk be, hogy $\left[\frac{1}{n}\right]+\left[\frac{2}{n}\right]+\left[\frac{3}{n}\right]+...+\left[\frac{m}{n}\right]=\left[\frac{m}{n}\right]\left(1+m-\frac{n}{2}\left(1+\left[\frac{m}{n}\right]\right)\right)$

2. Legyen $(a_n)_{n\geq 1}$ egy valós számsorozat, amelynek a 0 nem tagja. Bizonyítsuk be, hogy ez a sorozat pontosan akkor számtani haladvány ha $\frac{1}{a_k\cdot a_{k+1}\cdot ...\cdot a_{k+p}}=\frac{1}{p!\cdot r^p}\cdot\sum_{i=0}^{p}\frac{(-1)^i C_p^i}{a_{k+i}}$.

1.8. A végtelen leszállás elve

A végtelen leszállás a teljes indukció indirekt változata, amelyben nem azt bizonyítjuk be, hogy ha egy természetes számokra vonatkozó állítás igaz az összes n-nél kisebb számra, akkor igaz n-re is, hanem azt, hogy ha az n-re nem teljesül az állítás, akkor van egy n-nél kisebb pozitív egész is, amire nem teljesül. Egy lehetséges megfogalmazás a következő:

Ha $P(n)$ egy természetes számoktól függő állítás, és létezik olyan $n_0\in N$, amelyre $P(n_0)$ nem igaz, akkor a $H=\{n\in N\mid P(n)\text{nem igaz}\}$ halmazban van legkisebb elem. Így ha bármely $n\in N$ esetén létezik $m\in H$, $m<n$, akkor H csak üres halmaz lehet, és ezért $P(n)$ igaz minden $n\in N$ esetén. Ezt a bizonyítási módot néha minimumelvként is emlegetik (ugyanis azt bizonyítjuk, hogy nincs H-nak minimuma).

1.8.1. Példa

Milyen a, b természetes számokra osztható $a^2+b^2-a-b+1$ az ab szorzattal?

Megoldás

Igazoljuk, hogy csak akkor, ha $a=b=1$.

Tegyük fel, hogy $ab\,|\,a^2+b^2-a-b+1$, $a\leq b$, $b>1$ és $a+b$ a lehető legkisebb. Nyilván $a\neq 1$, mert $a=1$ esetén $b\,|\,1+b^2-1-b+1=b^2-b+1$. Innen következik, hogy $b\,|\,1$, viszont feltételeztük, hogy $b>1$. Legyen valamely pozitív egész k-ra $a^2+b^2-a-b+1=kab$ (1).

Tekintsük az (1) rendezésével kapott $x^2-(ka+1)x+(a^2-a+1)=0$ egyenletet; ennek (1) szerint b gyöke. Legyen az egyenlet másik gyöke c. Felhasználva mindkét összefüggést a gyökök és együtthatók között, kapjuk, hogy $c=(ka+1)-b=\frac{(a^2-a+1)}{b}$.

A c egész, mert $c=ka+1-b$. Másrészt $0<c<a$, mivel

$$c=\frac{a^2-a+1}{b}\geq\frac{1}{b}, \text{ és } c=\frac{a^2-a+1}{b}<\frac{a^2}{b}<\frac{a^2}{b}\leq\frac{a^2}{2}=a.$$

Tehát $0<c<a$ és $c^2-(ka+1)c+(a^2-a+1)=0$, azaz $c^2+a^2-c-a+1=kca$, vagyis $ca\,|\,c^2+a^2-c-a+1$. Viszont $c+b<a+b$, ami ellentmond a és b kiválasztásának. Nem léteznek tehát olyan a és b egynél nagyobb egészek, amelyekre teljesül a feladat feltétele.

1.8.2. Példa

Oldjuk meg az $x^2+y^2=3(u^2+v^2)$ egyenletet a természetes számok halmazában.

Megoldás

Bizonyítani fogjuk, hogy az egyenlet egyetlen megoldása $x=y=u=v=0$.

Tegyük fel, hogy van olyan megoldás, amelyre $x\neq 0$. Így létezik a megoldások közt olyan, amelyre x nem nulla, és a lehető legkisebb a modulusa. Jelöljük ezt a megoldást (x_0, y_0, u_0, v_0)-val. Egy természetes szám $3k$, $3k+1$, vagy $3k+2$ alakú, tehát a négyzetének 3-mal való osztási maradéka csak 0 vagy 1 lehet. Így az x^2+y^2 összeg csakis akkor osztható 3-mal, ha x is és y is osztható 3-mal. Eszerint $x_0=3x_1$, $y_0=3y_1$ és $3(x_1^2+y_1^2)=u_0^2+v_0^2$. Ha az előbbi gondolatmenetet az $u_0^2+v_0^2$ összegre alkalmazzuk, következik, hogy $u_0=3u_1$ és $v_0=3v_1$, tehát $x_1^2+y_1^2=3(u_1^2+v_1^2)$. De $x_1=\frac{x_0}{3}<x_0$, tehát ellentmondáshoz jutunk x_0 megválasztásával. Így minden (x, y, u, v) megoldásban $x=0$. Hasonlóképpen látható be, hogy y is nulla, tehát az egyetlen megoldás $x=y=u=v=0$.

Alkalmazások.

1. Van-e nullától különböző természetes megoldása az $u^2=7v^2$ egyenletnek?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $x^2+y^2+1=xyz$, akkor $z=3$.

3. Az $n\in N$ természetes számból kiindulva a következő lépéseket végezzük:

a) ha a szám páros, osztjuk 2-vel;

b) ha a szám páratlan, hozzáadunk 1-et.

Bizonyítsuk be, hogy mindig eljutunk az 1-hez.

Pl $n=36$ esetén

$$36\xrightarrow{:2}18\xrightarrow{:2}9\xrightarrow{+1}10\xrightarrow{:2}5\xrightarrow{+1}6\xrightarrow{:2}3\xrightarrow{+1}4\xrightarrow{:2}2\xrightarrow{:2}1.$$

1.9. Induktív definíciók és szerkesztések

Az előző paragrafusban az indukciónak, mint bizonyítási módszernek a sokrétű variánsait és alkalmazásait mutattuk be. De az indukciónak nem csak mint bizonyítási módszernek van igen nagy jelentősége.

Sokszor találkozunk olyan matematikai objektumokkal, amelyeket induktív módon értelmezünk, vagy hasonlóan szerkesztünk meg. Lássunk néhány ilyent:

1. Rekurzív sorozatok

Tekintsük például azt az $(a_n)_{n\in N}$ sorozatot, amelyre $a_{n+1}=a_n+d$, $\forall\, n\geq 0$. Adott a_0 és d esetén a sorozat induktívan értelmezett (vagyis a_0-ból az a_1-gyet, a_1-ből az a_2-t határozzuk meg és így tovább). Ugyanígy, tulajdonképpen induktívan értelmezett az összes $x_{n+1}=f(x_0, x_1, ..., x_n)$ rekurzióval értelmezett sorozat.

2. Pontrendszer súlypontja

Egy, n pontból álló pontrendszer súlypontját többféleképpen is értelmezhetjük:

1. Értelmezés

Az $A_1A_2...A_n$ pontrendszer súlypontja az a G pont, amelyre $\sum_{i=1}^{n} \overline{GA_i} = 0$.

Lássuk be, hogy ez az értelmezés helyes. Ehhez azt kell belátnunk, hogy ilyen G pont létezik, és egyértelműen meghatározott.

Rögzítsünk egy O pontot a síkban. Ekkor $\overline{0} = \sum_{i=1}^{n} \overline{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{GO} + \sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i} = n \cdot \overline{GO} + \sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i}$,

innen $\overline{OG} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \overline{OA}}{n}$, ez a vektor létezik, és egyértelműen meghatározott.

A rendszer súlypontját induktívan is értelmezhetjük:

2. Értelmezés:

Ha G_k-val jelöljük az $A_1A_2...A_k$ pontrendszer súlypontját, akkor G_2 az $[A_1A_2]$ szakasz felezőpontja, és G_{k+1} a G_kA_{k+1} szakaszt $\dfrac{1}{k}$ arányban osztó pont.

Megjegyzés

1. Ez akkor is elvégezhető, amikor a pontokon nem azonos súlyok vannak.

2. A két értelmezés nyilvánvalóan egyenértékű, mert

$$\overline{OG_{k+1}} = \frac{k\overline{OG_k} + \overline{OA_{k+1}}}{k+1} = \frac{k \cdot \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{k} \overline{OA_j} + \overline{OA_{k+1}}}{k+1} = \frac{\sum_{j=1}^{k+1} \overline{OA_j}}{k+1}.$$

3. Hamel-bázisok

Igazolható, hogy a valós számok halmaza vektorteret alkot a racionális számok teste fölött. Ennek a vektortérnek a bázisait hívjuk Hamel-bázisoknak. A Hamel-bázisokat a következőképpen értelmezzük (szerkesztjük meg):

Legyen $h_1 \in Q^*$ egy tetszőleges, nullától különböző racionális szám. Képezzük a következő halmazt:

$$H_1 = \{r \cdot h_1 / \ r \in Q\}.$$

Ez a H_1 halmaz megszámlálható sok elemet tartalmaz (mert $H_1 \sim Q$), így létezik olyan h_2 elem az R-ben, amely nem eleme a H_1-nek; $h_2 \in R \setminus H_1$, $H_2 = \{r_1h_1 + r_2h_2 / \ r_1, r_2 \in Q\}$. Belátjuk, hogy különböző (r_1, r_2) és (r_1', r_2') párokra $r_1h_1 + r_2h_2 \neq r_1'h_1 + r_2'h_2$. Valóban, ha feltételezzük, hogy $r_1h_1 + r_2h_2 = r_1'h_1 + r_2'h_2$, akkor következik, hogy $(r_1 - r_1')h_1 = (r_2' - r_2)h_2$, ahonnan $\dfrac{r_1 - r_1'}{r_2' - r_2}h_1 = h_2$, és mivel $\dfrac{r_1 - r_1'}{r_2' - r_2} \in Q^*$ (mert $r_1 \neq r_1'$, $r_2 \neq r_2'$ és $r_1, r_2, r_1', r_2' \in Q$), következik ,hogy $\dfrac{r_1 - r_1'}{r_2' - r_2} \cdot h_1 \in H_1$. Ugyanakkor $h_2 \in R \setminus H_1$, és így ellentmondáshoz jutottunk. Tehát minden (r_1, r_2) pár más elemet származtat a H_2-ben. Ekkor $H_2 \sim Q \times Q$, ezért megszámlálható sok elemet tartalmaz. Kiválasztunk egy $h_3 \in R \setminus H_2$ elemet és így tovább. Ha H_n az n-edik így megszerkesztett halmaz, akkor $H_n \sim Q \times Q \times ... \times Q$, vagyis megszámlálható sok elemet tartalmaz, ezért létezik $h_{n+1} \in R \setminus H_n$, és akkor a H_{n+1}-gyet a következőképpen értelmezzük:

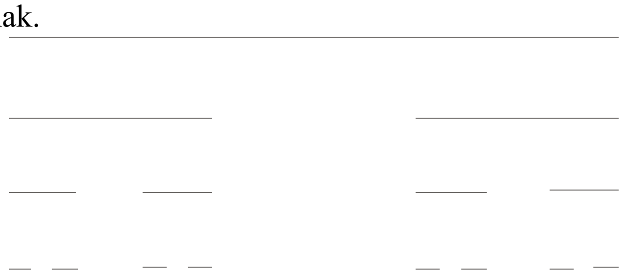
$$H_{n+1} = \{r_1 h_1 + r_2 h_2 + ... + r_{n+1} h_{n+1} / \ r_1, r_2, ..., r_{n+1} \in Q\}.$$

A $\{h_1, h_2, ..., h_n, ...\}$ megszámlálható sok elemet tartalmazó halmazt nevezzük Hamel-bázisnak.

4. Fraktálok

A fraktál szó a latin fractus szóból származik, ami azt jelenti: törött, töredezett. Az elnevezést Mandelbrot amerikai matematikus találta ki 1975 körül. Olyan alakzatokat, ponthalmazokat nevezett fraktáloknak, amelyek lényegesen szabálytalanabbak, összetettebbek, töredezettebbek, mint a klasszikus geometriában előforduló alakzatok. Bár az elnevezés ilyen új, különféle érdekes halmazok már régóta szerepelnek matematikai munkákban. Ezek mind egyszerűen definiálható, induktív módon szerkesztett, értelmezett halmazok. Néhány ilyen halmaz:

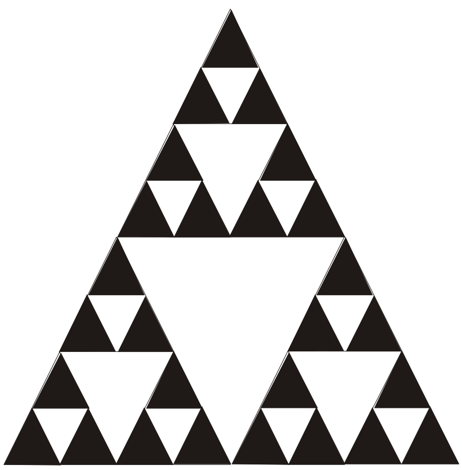
A Cantor halmaz a legegyszerűbben megszerkeszthető fraktál. Induljunk ki a $[0, 1]$ intervallumból. Ezt osszuk három egyenlő részre, majd hagyjuk el a középső részt. Ezután osszuk három egyenlő részre mindkét megmaradó szakaszt, és hagyjuk el a középső részeiket. Így 4 szakaszt kapunk. Az n-ik lépés után 2^n szakaszunk lesz, ezek hossza 3^{-n}. Ezeket a szakaszokat ismét osszuk három-három részre, és hagyjuk el a középső szakaszokat, így 2^{n+1} szakaszunk lesz. A Cantor halmaz azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek végtelen sok lépés után megmaradnak.



$$C_0 = [0, 1];\ C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right];\ C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \text{ stb.}$$

A Cantor halmaz $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$.

A Sierpinski háromszög.



A Cantor halmaz két dimenziós megfelelője. Megszerkesztéséhez induljunk ki egy egységnyi oldalú egyenlő oldalú háromszögből, S_0-ból. Az oldalfelező pontok összekötésével osszuk négy egybevágó részre, majd hagyjuk el a középső rész belső pontjait. A megmaradó alakzat S_1. A második lépésben hagyjuk el az S_1 -gyet alkotó mindegyik kis háromszög középső részét, a kapott halmazt jelöljük S_2-vel, és így tovább. Az S_{n+1} halmazt úgy kapjuk, hogy az S_n-t alkotó háromszögek középső részeit elhagyjuk. Az S Sierpinski háromszög azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek mindegyik S_n -hez hozzátartoznak: $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$.

Kitűzött feladatok

1. Igazoljuk, hogy a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{n^2+2n-2}{6} < \sum_{k=2}^{n} \sqrt[k]{k!} < \frac{n^2+3n-4}{4}$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ és $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$, akkor

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \le n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

3. Adott síkon száz kék pont és száz piros pont úgy, hogy közülük nincs három pont egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy lehet a pontokat száz egyenes szakasszal úgy összekötni, hogy minden szakasz végpontjai különböző színűek legyenek, és hogy bármely két szakasznak ne legyen közös pontja. Kvant (Moszkva)

4. Az $x_1, x_2, ..., x_n$ nem negatív valós számok összege nem nagyobb $\frac{1}{2}$-nél. Mutassuk meg, hogy

$$(1-x_1)(1-x_2)\ ...(1-x_n) \ge \frac{1}{2}.$$

5. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$x - \lg(2^x + x - 1) = x \lg 2{,}5 .$$

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \ge \frac{1}{2}$ és $n \ge 2$ egész, akkor

$$\sqrt{(n+1)^2 x + \frac{n(n+1)(2n+3)}{6}} < \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + ... + \sqrt{x+n} < \sqrt{(n+1)^2 x + \frac{n(n+1)^2}{2}} .$$

7. Legyen $p(x)$ legfeljebb n-ed fokú polinom. Bizonyítsuk be, hogy ekkor van olyan $0 \le k \le n+1$ egész szám, amelyre $\left|p(k) - 3^k\right| \ge 1$.

8. Vezessük be a következő jelöléseket

$$x^{(n)} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdot ... \cdot(x-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ... \cdot n}$$

ha $n = 1, 2, 3 ...$. Bizonyítsuk be, hogy minden valós együtthatós n-ed fokú polinom felírható

$$b_0 + b_1 x^{(1)} + b_2 x^{(2)} + ... + b_n x^{(n)} \quad (2)$$

alakban, ahol a b_i-k valós számok $(i = 0, 1, 2, ... , n)$. Bizonyítsd be, hogy a polinom akkor és csak akkor vesz fel minden egész helyen egész értéket, ha a (2) alakú előállításban minden b_i egész szám.

9. Határozzuk meg annak a sorozatnak általános tagját, amelynek képzési szabálya

a) $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$,

b) $v_{n+3} = v_{n+2} - v_{n+1} + v_n$, $v_0 = v_1 = v_2 = 1$,

c) $w_{n+3} = w_{n+2} + w_n$, $w_0 = w_1 = 1$, $w_2 = 2$.

10. Az első $2^{n+1} (= 2m)$ pozitív egész számot szét lehet osztani két, egyenként m elemet tartalmazó $(x_1, x_2, ... , x_m)$ és $(y_1, y_2, ... , y_m)$ csoportba úgy, hogy minden, legfeljebb n-ed fokú polinomra fennálljon a

$$p(x_1) + p(x_2) + ... + p(x_m) = p(y_1) + p(y_2) + ... + p(y_m)$$

egyenlőség.

11. Fogadjuk el bizonyítás nélkül, hogy minden természetes szám mellett létezik olyan P_n polinom, amelyre fennáll a

$$\sin nx = P_n(\cos x)\cdot \sin x$$

azonosság. Mutassuk meg, hogy $P_n(1) = n$.

12. Az n-ed fokú $P(x)$ polinomra teljesül a $P(j) = 2^{j-1}$ egyenlőség $j = \overline{1, n+1}$ esetén. Számítsuk ki $P(n+2)$ -t!

13. Legyen $P \in R[X]$ egy legfeljebb n-ed fokú polinom. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan $k \in \{0,1,2,...,n+1\}$ természetes szám, amelyre $\left|P(k) - 3^k\right| \geq 1$.

14. Legyen $P \in R[X]$ egy olyan n-ed fokú polinom, amelynek mind az n gyöke valós. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_0 \in R$ és $P'(x_0) \neq 0$, akkor létezik olyan x_1 gyöke a P polinomnak, amelyre teljesül az $\left|x_0 - x_1\right| \leq n\left|\dfrac{P(x_0)}{P'(x_0)}\right|$ egyenlőtlenség.

15. Az $f:[0,1) \to R$, $f_1(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } 0{,}5 \leq x < 0{,}6 \\ 0 \text{ különben} \end{cases}$ függvényből kiindulva lépésről lépésre meghatározzuk az $f_n:[0,1) \to R$ függvénysorozatot a következő eljárás szerint:
Ahol $f_{n-1}(x) > 0$, ott $f_n(x) = f_{n-1}(x)$. Ahol $f_{n-1}(x) = 0$ ott $f_n(x)$ értéke legyen q^{n-1} vagy 0, aszerint, hogy x-nek az n-edik tizedesjegye 5-e vagy sem, ahol q egy 1-nél kisebb előre rögzített pozitív szám. Számítsuk ki az $a_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ sorozat határértékét.

16. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx = 0 \;\; \forall x \in R$ esetén, akkor $a_k = 0 \;\; k = \overline{1, n}$.

17. Adott a síkon 10 pont. Legfeljebb hány pontban metszik egymást az ezen pontok által meghatározott szakaszok felezőmerőlegesei?

18. Osszuk az első $2n$ pozitív egész számot két n elemű csoportra, majd a csoportok elemeit rendezzük nagyság szerint növekvő illetve csökkenő sorrendbe. Így kapjuk az
$a_1 < a_2 < ... < a_n$ és $b_1 > b_2 > ... > b_n$ sorozatokat. Bizonyítsd be, hogy

$$\left|a_1 - b_1\right| + \left|a_2 - b_2\right| + ... + \left|a_n - b_n\right| = n^2.$$

19. Egy országban minden út egyenes, bármely két út metszi egymást, és minden útkereszteződésben pontosan két út metszi egymást. A kereszteződéseket kétszintesekké alakítják át úgy, hogy egyik út a másik felett haladjon át. Mutassuk ki, hogy a kereszteződések alkalmas kialakításával elérhető, hogy az ország tetszőleges útján haladva a többi utakat felváltva alul és felül keresztezzük. (Lovász László)

20. Egy láthatatlan bolha az origóból indulva ugrál a rácspontokon jobbra és fel. Mi minden ugrás után egy rácspontot megmérgezünk. El tudjuk-e pusztítani a bolhát korlátos számú lépésben?

21. Hányféleképpen lehet egy $n \times n$ -es táblázatot kitölteni az 1-től n^2 -ig terjedő pozitív egész számokkal úgy, hogy a (csúcs vagy él) szomszédos mezőkbe írt számok különbsége ne legyen nagyobb $(n+1)$ -nél?

22. Határozd meg az $f_n : R \to R$ függvénysorozatot, ha

$$f_n'(x) = -n \cdot \lambda \cdot f_n'(x) + \lambda \cdot (n-1) f_{n-1}(x) \;\; \forall x \in R,$$

$f_1(0) = 1$ és $f_n(0) = 0$, ha $n \geq 2$.

23. Bizonyítsd be, hogy az $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cos\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ függvény akárhányszor deriválható.

24. Az $f : R \to R$ függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

$$\forall\, x \in [-1,1]\text{-re } f(x) = x \text{ és } f(x+2) = 2f(x),\ \forall\, x \in R \text{ esetén.}$$

Bizonyítsuk be, hogy *f* felírható két szigorúan növekvő függvény különbségeként.

25. $\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^3}\right) < 3,\quad \forall\, n \in N^*$-ra;

26. $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right) < \frac{5}{2},\quad \forall\, n \in N^*$-ra.

27. Négy tetszőleges természetes számból kiindulva a következő lépést ismételjük: a meglevő $(x,\ y,\ z,\ t)$ számnégyest helyettesítjük az $|x-y|,\ |y-z|,\ |z-t|,\ |t-x|$ számnégyessel. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után csupa 0-t kapunk.

28. Egy bűvésznek 100 kártyája van és ezek 1-től 100-ig vannak számozva. A következő mutatványt szeretné bemutatni: Szétosztja a kártyákat három kalapba (nagyság szerint különböznek) és megkér egy nézőt, hogy húzzon két kártyát. A néző két kalapból húz egy-egy kártyát úgy, hogy a bűvész ne lássa honnan húz, és a kártyákra írt számok összegét közli a bűvésszel. A bűvész ez alapján meg kell állapítsa, hogy melyik két kalapból húzott a néző. Hányféleképpen oszthatja szét a kártyákat, ha a mutatványnak 100%-os sikerrel kell működni? (Nemzetközi Diákolimpia 2000)

Tovább