KOMPLEX SZÁMOK A GEOMETRIÁBAN

Mircea Becheanu

Ismert, hogy kölcsönösen egyértelmű (bijektív) megfeleltetés létezik a sík pontjai és a komplex számok $\mathbf{C}$ halmaza közt. Ez a megfeleltetés lehetővé teszi azt, hogy komplex számokat használhatunk geometriai feladatok leírására. Ezt az is segíti, hogy a $\mathbf{C}$ halmazban nemcsak algebrai műveletek értelmezettek, hanem a poláris koordinátákat, és olyan tulajdonságokat is használhatunk, mint a modulus, vagy a konjugált. Látni fogjuk, hogy ezeknek az elemi fogalmaknak a segítségével sok geometriai feladatnak gyorsan átlátható és szép megoldása van. Tehát a komplex számok csodálatos világnak bizonyulnak, amely gazdag könnyen kezelhető tulajdonságokban. Kalandozásunkat a komplex számok földjén egy olyan feladatsor kíséri, amelyeknek ezen az úton elegáns a megoldása.

A következőkben, hacsak nem jelezzük azt másként, a sík pontjait az A, B, C, ... , Z nagybetűkkel, és a hozzájuk rendelhető komplex számot (affixumot) a megfelelő a, b, c, ... , z kisbetűvel jelöljük. Egy a ponthoz tartozó a komplex affixumot még az A pont komplex koordinátájának is nevezünk. Kezdetnek néhány elemi, de elegáns példát láthatunk, majd bemutatunk néhány alapvető geometriai elemet, amelyeket a komplex számok segítségével sikeresen lehet tanulmányozni.

1. Példák

1.1 A háromszög egyenlőtlenség. Adott z_1, z_2 komplex számokra igaz a következő egyenlőtlenség:

$$| z_1 + z_2 | \le | z_1| + |z_2|. \qquad (1)$$

Bizonyítás. Mivel $|z|$ egy nemnegatív valós szám, az adott egyenlőtlenség ekvivalens átalakítása, ha mindkét oldalát négyzetre emeljük:

$$| z_1 + z_2 |^2 \le | z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \Leftrightarrow$$

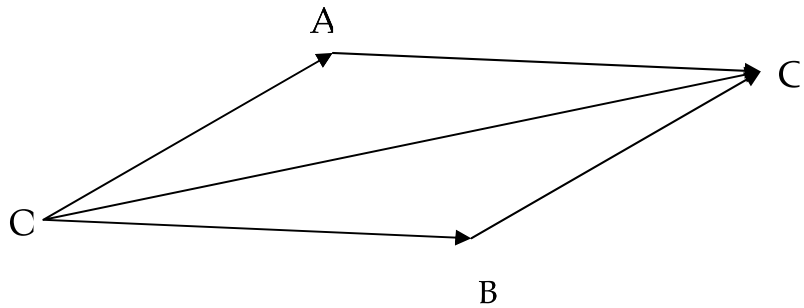
$$(z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \le z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + 2\sqrt{z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}} \Leftrightarrow$$

$$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} \le 2\sqrt{z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}}\,.$$

Legyen $z_1\overline{z_2} = w$; ekkor $\overline{w} = \overline{z_1}\, z_2$, az utóbbi egyenlőtlenség pedig $w + \overline{w} \le 2|w|$. Ha most $w = x + iy$ akkor az utóbbi ekvivalens a $2x \le 2\sqrt{x^2+y^2}$, ami nyilván igaz.

Mikor teljesül az egyenlőség az (1) egyenlőtlenségben? Csakis akkor, ha $x \ge 0$ és $y = 0$, amiből következik, hogy $w = z_1\overline{z_2} = \lambda$ egy nemnegatív valós szám. Ha most az előző egyenlőséget z_2-vel szorozzuk, akkor $\lambda z_2 = |z_2|^2 z_1$. Mivel $\lambda \ge 0$, következik, hogy itt az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ vektorok, amelyek a z_1, z_2 számok affixumai kollineárisak és azonos irányúak.

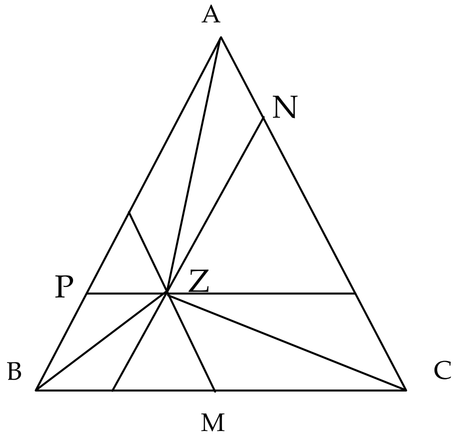
A komplex számokra vonatkozó háromszög egyenlőtlenségnek van egy geometriai magyarázata: egy adott háromszögben két oldal összege nagyobb a harmadik oldalnál. Valóban, ha vesszük azokat az A, B, C pontokat amelyekre, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ akkor az OACB parallelogrammában az $OA = |a|$, $AC = OB = |b|$, $OC = |a + b|$. Mivel $OC \le OA + AC$, nyilván az is igaz, hogy $|a + b| \le |a| + |b|$.



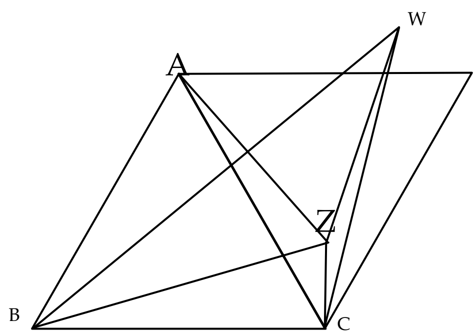
1.2 Pompeiu tétele.[1] Legyenek A, B, C egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai Z a háromszög síkjának egy pontja, ami nincs a háromszög köré írt körön. Ekkor a ZA, ZB, ZC szakaszok egy háromszög oldalai.

Első megoldás. Elsőként egy szép mértani megoldást ismertetünk. Tegyük fel, hogy Z egy belső pontja az ABCΔ –nek (lásd 1. ábra). Szerkesszük meg Z-n át rendre az AB, BC, CA oldalakkal párhuzamos egyeseket, amelyek ezeket az oldalakat rendre a P, M és N pontokban metszik. Az APZN, PZMB és MZNC egyenlő szárú trapézok. Tehát teljesülnek a következők: ZA = PN, ZB = PM, ZC = MN és így MNPΔ a kersett háromszög. Hasonló a gondolatmenet, ha Z a háromszög egyik oldalán van.

A második esetben feltehető, hogy Z a háromszög egy külső pontja. Vegyük a háromszög egy 60^0-os forgatását az A pont körül, amely a B pontot a C-be viszi át, és legyen a Z pont képe ennek a forgatásnak az eredményeként W. Mivel a forgatáskor a távolságok nem változnak, ZC = WB és ugyanakkor ZA = WA (2. ábra). Tehát a keresett háromszög ebben az esetben a ZWCΔ.



(1.ábra)



(2. ábra)

megjegyzendő, hogy a második gondolatmenet a W helyzetétől független, és belső pont esetén is alkalmazható.

Második megoldás. Ha a megoldáshoz, illetve a párhuzamosok alkalmazásához, vagy a forgatáshoz a megoldónak kevés az ötlete, alkalmazhatja a komplex számokat. Tegyük fel, hogy az A, B, C, Z pontok komplex koordinátái az a, b, c, z belátható, hogy a következő azonosság teljesül:

$$(z - a)(b - c) + (z - b)(c - a) + (z - c)(a - b) = 0.$$

Átírhatjuk ezt a következő alakban is:

$$-(z - a)(b - c) = (z - b)(c - a) + (z - c)(a - b).$$

[1] Dimitrie Pompeiu (1873-1954) egy ismert román matematikus volt, akit az elemi matematika is érdekelt.

vegyük most az azonosságban a modulust, és alkalmazzuk a háromszög egyenlőtlenséget:

$$|z - a||b - c| \leq |z - b||c - a| + |z - c||a - b|.$$

ha felhasználjuk, hogy $|a - b| = |b - c| = |c - a|$ akkor a következő az eredmény:

$$|z - a| \leq |z - b| + |z - c|.$$

Az 1.1. fejezet végén tett megjegyzés alapján könnyen belátható, hogy ez utóbbi egyenlőtlenség nem legyet egyenlőség, tehát ZA, ZB, ZC valóban egy háromszög oldalai.

1.3. Ptolemájosz tétele. Bármely konvex ABCD négyszögben teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Ez egy jól ismert eredmény és általában geometriai úton bizonyítják. Itt most egy rövid bizonyítást adunk, ami az előző feladatra támaszkodik.

Jelöljük a, b, c, d-vel rendre az A, B, C, D csúcsok komplex koordinátáit. Az előzőekhez hasonlóan az alábbi egyenlőtlenség teljesül:

$$(a - b)(c - d) + (a - c)(d - b) + (a - d)(b - c) = 0.$$

Előbb átírjuk a következő alakban:

$$(a - c)(b - d) = (a - b)(c - d) + (a - d)(b - c)$$

majd alkalmazzuk a háromszög egyenlőtlenséget:

$$|a - c||b - d| \leq |a - b||c - d| + |a - d||b - c|,$$

és ez pontosan a bizonyítani kívánt egyenlőtlenséget jelenti.

2. Egyenesek és kollineáris pontok

2.1. Egyenes egyenlete.

Az A, B, C pontok akkor és csakis akkor vannak egy egyenesen, ha az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok kollinárisak, azaz $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$, ahol λ egy valós szám. A komplex számok nyelvén ez azt jelenti, hogy vagy:

$$\frac{b-a}{c-a} \in \mathbf{R},$$

vagy

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}.$$

Következésképpen, ha adott két különböző pont, A és B, akkor egy etszőleges harmadik pont, Z akkor és csakis akkor van az AB egyenesen, ha:

$$\frac{z-a}{\overline{z}-\overline{a}} = \frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}.$$

Ez egy egyenes egyenlete komplex koordinátákban. Ugyanezt még a következő alakban szokás írni:

$$z - a = \frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}\left(\overline{z}-\overline{a}\right). \qquad (1)$$

A determinánsok kifejtését alkalmazva, belátható, hogy ezzel az egyenlettel ekvivalens a:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Azt a $\chi = \dfrac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}$ törtet, ami az (1) képletben szerepel, az AB egyenes a komplex iránytényezőjének nevezzük. Mivel χ szimmetrikus az a és b változókban és mivel $|b - a| = |\bar{b}-\bar{a}|$, következik, hogy $|\chi| = 1$. Tehát χ a komplex számsíkon az egység sugarú körhöz tartozik, és $\chi = \cos\varphi + i\sin\varphi$ alakban írható. Segítségével az (1) egyenlet átírható a következő alakban is:

$$z - a = \chi(\bar{z} - \bar{a}) \qquad (2)$$

A φ szög geometriai jelentése az iránytényező meghatározásából következik.

A $b - a = \chi(\bar{b} - \bar{a})$ alak alapján az abban szereplő számok argumentumát véve, a következő két eset egyikét kapjuk:

(i) $\dfrac{\varphi}{2} = \arg(b - a)$ ahol $0 \le \arg(b - a) < \pi$, vagy

(ii) $\dfrac{\varphi}{2} = \arg(b - a) - \pi$ ahol $\pi \le \arg(b - a) < 2\pi$.

Tegyük fel, hogy a Z pont az AB szakaszt egy adott, $\lambda \in R$, $\lambda \ne -1$ arányban osztja, azaz $AZ : ZB = \lambda$. Az (1) alapján z kifejezésére a következőt kapjuk:

$$z = \frac{1}{1+\lambda} a + \frac{\lambda}{1+\lambda} b. \qquad (3)$$

Azt mondjuk, hogy a fenti egyenlet az A, B pontokon áthaladó egyenes paraméteres egyenlete. A következőképpen értelmezhetjük: ha λ befutja a valós számok **R** halmazát, kivéve a $\lambda = -1$-et, Z befutja az AB egyenest. Sajátos esetben, ha $\lambda = 1$, akkor Z az AB szakasz középpontja és

$$z = \frac{1}{2}(a+b).$$

Ugyanakkor, ha λ az összes lehetséges valós számértéket rendre felveszi, és Z befutja az AB egyenest, azt is mondjuk, hogy Z az A és B egy konvex kombinációja.

2.2 Egy háromszög területe. Egy adott ABC háromszög esetén ki lehet számítani annak területét a csúcsainak komplex koordinátainak függvényében. Ezt a következő képlet adja: $[ABC] = \dfrac{1}{4i}|\Delta|$ ahol

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} .$$

A bizonyítást annak a képletnek a felhasználásával adhatjuk meg, amit a csúcsok $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$ koordinátáinak segítségével a következőképpen adhatunk meg: $[ABC] = \dfrac{1}{2}|\Delta|$, ahol

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

tehát elég ha kimutatjuk, hogy:

$$\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2i}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ez a bizonyítás könnyen elvégezhető.

Az előzőekben leírt képletek alkalmazásával bemutatjuk egy Nemzetközi Matematikai Olimpia (NMO) feladat egy egyszerű megoldását.

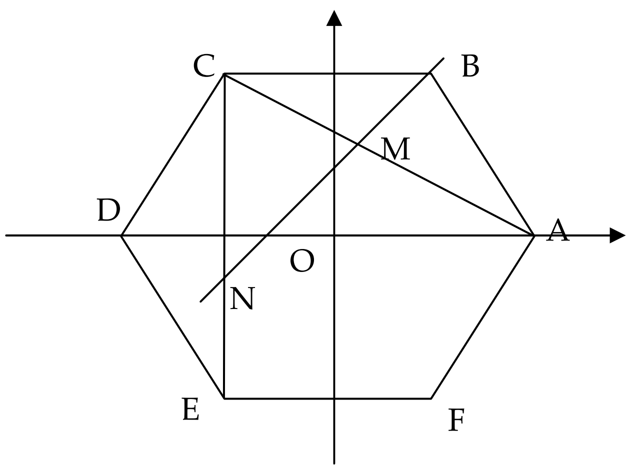
2.3. Feladat. [2] Az ABCDEF szabályos hatszög AC és CE átlóit az M, N belső pontok rendre úgy osztják, hogy.

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r\,.$$

Az r milyen értékeire lesznek a B, M és N pontok kollineárisak?

Megoldás. Legyen $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ az egység egyik komplex köbgyöke. Az adott komplex egységgyök algebrai tulajdonságainak ismeretében az A, B, ... , F csúcsok affixumának választhatjuk a következő komplex számokat (lásd ábra):

$a = 1$, $b = 1 + \varepsilon$, $c = \varepsilon$, $d = -1$, $e = \varepsilon^2$, $f = 1 + \varepsilon^2$.



Ábra

A feladat feltétele most átírható a pontok komplex koordinátáira (lásd 2.1.) a következő képpen:

$$\frac{m-a}{c-a} = \frac{n-c}{e-c} = r\,,\ \ r \in \mathbf{R},\ \ 0 < r < 1.$$

[2] 5. feladat, NMO 1982

Ebből a következő kifejezések kaphatók:

$$m = 1 + r(\varepsilon - 1) = (1 - r) + r\varepsilon$$

és

$$n = \varepsilon m = (1 - r)\varepsilon + r\varepsilon^2 = -r + (1 - 2r)\varepsilon.$$

A kollinearitás feltétele alapján:

$$\begin{vmatrix} 1+\varepsilon & 1+\varepsilon^2 & 1 \\ m & \overline{m} & 1 \\ \varepsilon m & \varepsilon^2\overline{m} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Tekintsük most az m kifejezését, ez egy egyenlet r-ben, tehát a feladat visszavezethető ennek az egyenletnek a megoldására. Ha alkalmas módon alakítjuk az algebrai kifejezéseket, akkor a következő, a célnak megfelelő végső alakot kapjuk:

$$\begin{vmatrix} 1+\varepsilon & 1+\varepsilon^2 & 1 \\ m & \overline{m} & 1 \\ \varepsilon m & \varepsilon^2\overline{m} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\varepsilon^2 & -\varepsilon & 1 \\ m & \overline{m} & 1 \\ \varepsilon m & \varepsilon^2\overline{m} & 1 \end{vmatrix} = (m\overline{m} - m - \overline{m})(\varepsilon^2 - \varepsilon) = 0.$$

Eza za egyenlet rendre ekvivalens az:

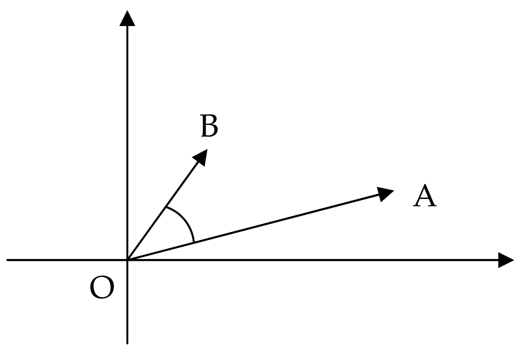
$$m\overline{m} - m - \overline{m} = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(\overline{m} - 1) = 1 \Leftrightarrow |m - 1|^2 = 1 \Leftrightarrow |r(\varepsilon - 1)|^2 = 1 \Leftrightarrow 3r^2 = 1.$$

Az r értékeire tett megszorítás ($0 < r < 1$) alapján, a megoldás $r = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

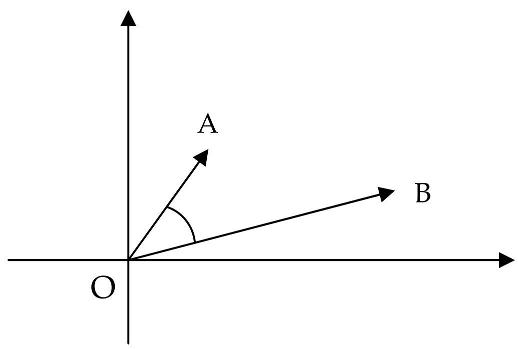
3. Szögek

3.1. Két egyenes által alkotott szög. Hasonló háromszögek. Adott a, b komplex számok és a nekik megfelelő A, B pontok, az $AOB\angle$ szöget a következő képlet adja:

$$AOB\angle = \arg\frac{b}{a} = \arg b - \arg a.$$



Ábra



Ábra

Ha most A, B, C három adott pont, akkor

$$ABC\angle = \arg\frac{a - b}{c - b}.$$

Ezeket a feltételeket változatos körülmények közt lehet alkalmazni. Például ha A, B, C, D négy adott különböző pont, akkor az AB és CD egyenesek akkor és csakis akkor merőlegesek, ha az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok is merőlegesek. Ez ekvivalens azzal a feltétellel, hogy

$$\frac{b-a}{d-c} = \lambda i \qquad \text{ahol } \lambda \in \mathbf{R},\ \lambda \neq 0.$$

Az adott feltétel ekvivalens a következő egyenlőséggel:

$$\frac{b-a}{d-c} = -\frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{c}}.$$

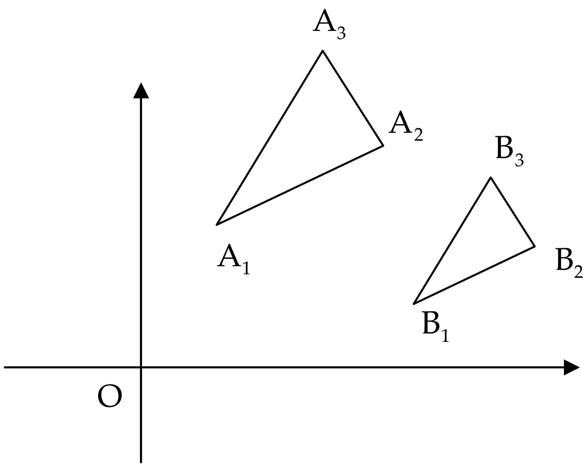
Egy másik példa a *hasonló háromszögek* jellemzése. Legyen $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ két háromszög, és tegyük fel, hogy azonos irányításúak (a csúcsok körüljárási iránya megegyező). Ezek a háromszögek akkor és csakis akkor hasonlóak,

$\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3}$ és $A_2A_1A_3\angle =$ $B_2B_1B_3\angle$. A komplex számok alkalmazásával ezek a feltételek ekvivalensek a következőkkel:

$$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}.$$

A determinánsok kifejtését használva a fenti feltétel az alábbi alakban írható:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$



Ábra

Abban az esetben, ha az $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ háromszöget irányítása különböző, akkor azt a $B_1^{'}B_2^{'}B_3^{'}$ háromszöget vesszük, aminek csúcsai a B_1, B_2, B_3 csúcsok tükörképei az Ox tengelyre vonatkozóan. Ennek már megegyező az irányítása az $A_1A_2A_3\Delta$ háromszöggel. A tükrözött háromszög csúcsainak megfelelő komplex számok $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2$, $\overline{b}_3$. Ekkor a hasonlóság feltétele a következő:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3.2. Forgatások. Az egyenlő oldalú háromszög. Adott Z_0 pont és φ szög, amelyre $0 \le \varphi < 2\pi$, esetén úgy határozhatjuk meg a Z_0 pont körüli φ szöggel történő forgatást, mint a komplex síknak azt a függvényét, ami egy tetszőleges Z pontot abba a Z' pontba visz át, amire: $Z Z_0 = Z'Z_0$ és $ZZ_0Z'\angle = \varphi$. Az előbbi feltétel alapján:

$$\frac{z' - z_0}{z - z_0} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Legyen $\omega = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Ekkor z' a következő képlettel számítható:

$$z' = \omega z + (1 - \omega)z_0.$$

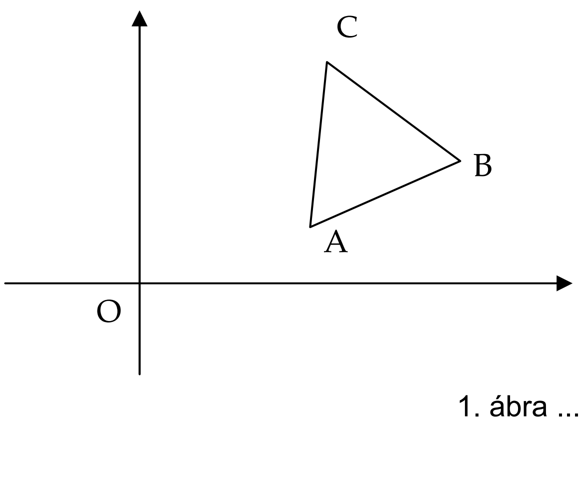
Ezt a *forgatás analitikus képletének* nevezzük. Használatával a forgatások sok tulajdonsága könnyen bizonyítható. Például bizonyítani fogjuk, hogy bármely forgatás távolságtartó. Jelöljük w-vel egy második pont komplex koordinátáját, és legyen w' ennek a második pontnak a képe ugyanazt a z_0 körüli φ forgatást követően. Ekkor: $w' = \omega w + (1 - \omega)z_0$. A szokásos számítások szerint:

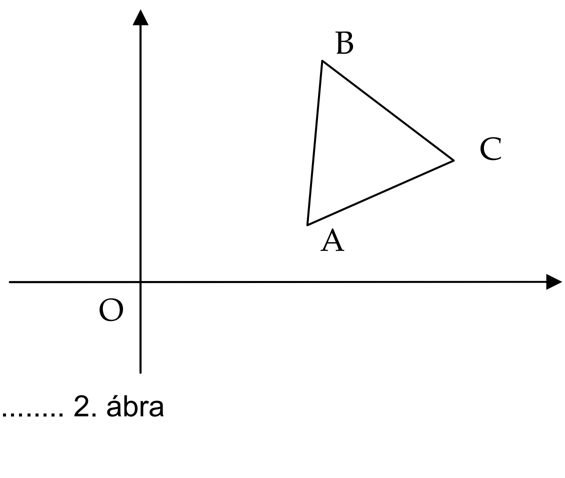
$$|z' - w'| = |\omega z + (1 - \omega)z_0 - \omega w - (1 - \omega) z_0| = |\omega||z - w| = |z - w|.$$

A forgatás képletének alkalmazásaként megadható az a feltétel, hogy három pont egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai legyenek. Három különböző A, B, C pont akkor és csakis akkor lesz egy egyenlő oldalú háromszög három csúcsa, ha a komplex affixumaik teljesítik a következő feltételt:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0.$$

Bizonyítás. Egy ABC háromszögnek a síkban vagy az óramutató járásával ellentétes az irányítása (lásd 1. ábra) vagy azzal megegyező (lásd 2. ábra).





1. ábra .... 2. ábra

Az első esetben C-t a B-ből egy A pont körüli 60^0 –os forgatással kaphatjuk meg. Tehát a forgatás eredményét az $\omega = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = 1 + \varepsilon$ komplex számmal való szorzás adja. A forgatás képletének alkalmazása után azt kapjuk, hogy

$c = b(1+ \varepsilon) + [1 - (1 - \varepsilon)]a = - b\varepsilon^2 - a\varepsilon$. Ez a feltétel a következő alkalmasabb módon írható:

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0.$$

A második esetben az ACB irányítása megegyező az óramutató járásával és az eredmény:

$$a + c\varepsilon + b\varepsilon^2 = 0.$$

Tehát egy háromszög akkor és csakis akkor egyenlő oldalú, ah a fenti egyenletek egyike teljesül. Ez ekvivalens a következő feltétellel:

$$(a + b\varepsilon + c\,\varepsilon^2)(a + c\varepsilon + b\varepsilon^2) = 0.$$

A szorzás elvégzése és az egység köbgyökei tulajdonságának alkalmazása után jutunk el a kívánt eredményhez.

3.3. Egy NMO feladat az egyenlő oldalú háromszögekkel.[3] Adott egy $A_1A_2A_3$ és egy P_0 pont a síkjában. Legyen $A_m = A_{m-3}$ bármely $m \geq 4$. Szerkesztünk egy P_0, P_1, P_2, ... pontsorozatot, amelyben a $P_{\kappa+1}$ pontot úgy kapjuk, hogy P_κ –t az $A_{\kappa+1}$ körül az óramutató járásával megegyező irányba forgatjuk 120^0-os szöggel, bármely $k = 0, 1, 2, ...$ esetén. Igazolja, hogy ha $P_{1986} = P_0$ akkor az $A_1A_2A_3$ egyenlő oldalú háromszög.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az $A_1A_2A_3\Delta$ háromszög az óramutató járásával ellentétes irányítású és jelöljük a P_0, P_1, P_2, ... pontok affixumait rendre z_0, z_1, z_2, ... Ekkor egy óramutatóval megegyező 120^0 –os forgatáshoz az $\omega = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \varepsilon^2$ komplex számra van szükségünk. Az előbbi gondolatmenetnek megfelelően:

$z_1 = z_0\,\varepsilon^2 + (1 - \varepsilon^2)a_1$

$z_2 = z_1\varepsilon^2 + (1 - \varepsilon^2)a_2 = z_0\varepsilon + (\varepsilon^2 - \varepsilon)a_1 + (1 - \varepsilon^2)\,a_2$

$z_3 = z_2\varepsilon^2 + (1 - \varepsilon^2)a_3 = z_0 + (\varepsilon - 1)a_1 + (\varepsilon^2 - \varepsilon)a_2 + (1 - \varepsilon^2)\,a_3$

$= z_0 + (\varepsilon - 1)(a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 a_3).$

Könnyen lehet n szerinti indukcióval igazolni, hogy n –szer három forgatásciklus után a P_{3n} a következőképpen fejezhető ki:

$$z_{3n} = z_0 + n(1 - \varepsilon)(a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 a_3).$$

Tehát, $z_{1986} = z_{662.3} = z_0 + 662(1 - \varepsilon)(a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 a_3)$.

vagyis, ha $z_{1986} = z_0$, akkor $a_1 + a_2\varepsilon + a\_3\varepsilon^2 = 0$. Ez a kívánt eredményt jelenti.

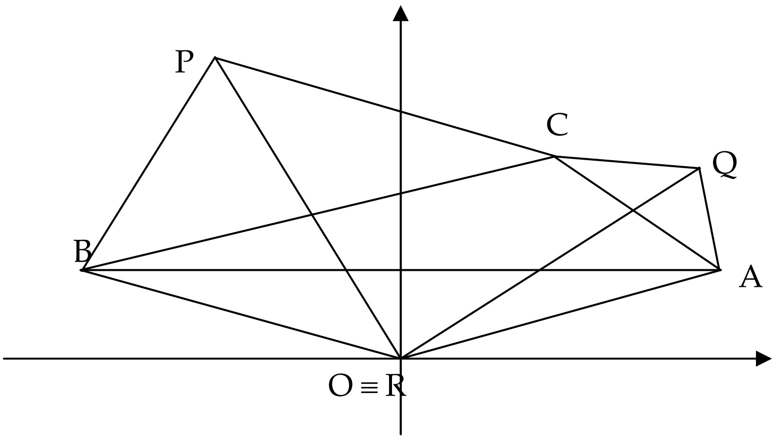
3.4. Egy NMO feladat, amelyben forgatás szerepel.[4] Legyen ABC egy háromszög. Az ABR, BCP és CAQ háromszögeket rendre az AB, BC, CA oldalakra szerkesztjük kívülről, olyan módon, hogy $PBC\angle = CAQ\angle = 45^0$, $BCP\angle = QCA\angle = 30^0$ és $RBA\angle = RAB\angle = 15^0$. Igazolja, hogy $QR = RP$ és $QRP\angle = 90^0$.

Ez a feladat aránylag nehéz, mivel a diákok nem várták azt, hogy a komplex számokat kell használniuk. Ugyanakkor azok használata sokkal könnyebben érhetőbbé teszi a feladatot.

Megoldás. Túl sok a szög ebben a feladatban! Ugyanakkor előnyt jelenthet az, hogy minden szög 15^0 többszöröse. A komplex számokat egy különleges módón fogjuk alkalmazni. Legyen o a komplex sík origója és vegyük fel az R pontot úgy, hogy $R \equiv O$, és a valós tengely párhuzamos legyen a BA oldallal. Feltehetjük azt is, hogy $OA = OB = 1$. (lásd ábra)

[3] 2. feladat, 27. NMO, 1986.

[4] 3. feladat, 17. NMO, 1975.



Ábra

Mivel a feladatban szereplő szögek mind 15^0 többszörösei, vezessük be az

$\omega = \cos 15^0 + i\sin 15^0 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$ jelölést. Belátható, hogy $a = \omega$ és $b = \omega^{11}$. Ha Ha a .ábrának megfelelően választjuk ki az ABCΔ irányítását, akkor belátható, hogy a C pontot a Q pontnak az A pont körüli forgatásával kaphatjuk meg. Így a q komplex számot egyértelműen meghatározzák a következő feltételek:

(1) $$c - a = \frac{AC}{AQ}\,\omega^3(q - a),$$

(2) $$q - c = \frac{QC}{AC}\,\omega^2(a - c).$$

Hasonló módon a p komplex számot is teljesen meghatározzák a következő feltételek:

(3) $$b - c = \frac{BC}{PC}\,\omega^2(p - c),$$

(4) $$p - b = \frac{BP}{BC}\,\omega^3(c - b),$$

Az AQCΔ ~ BPCΔ háromszögek hasonlóságát és a sinus tételt felhasználva a következő arányokat kapjuk:

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{BP}{PC} = \frac{\sin 30^0}{\sin 45^0} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Az (1) és (2) egyenlőségek szorzata alapján:

$$q - c = \sqrt{2}\,\omega^5(a - q) \Leftrightarrow q(1 + \sqrt{2}\,\omega^5) = c + \sqrt{2}\,\omega^5 a.$$

Figyelembe véve, hogy $a = \omega$, végül azt kapjuk, hogy:

$$q = \frac{c+\sqrt{2}\omega^6}{1+\sqrt{2}\omega^5}.$$

Hasonló számításukat végezve a (3), (4) egyenlőségekkel, és felhasználva, hogy b = ω^{11}, megkapjuk a következő értéket:

$$p = \frac{(c+\sqrt{2}\omega^6)\omega^5}{\sqrt{2}+\omega^5}.$$

Nyilvánvaló, hogy $1+\sqrt{2}\omega^5 \neq 0$, $\sqrt{2}+\omega^5 \neq 0$ és $c+\sqrt{2}\omega^6 \neq 0$.

Most azt kell bebizonyítani, hogy p = iq. Mivel i = ω^6, rendre felírhatók a következők:

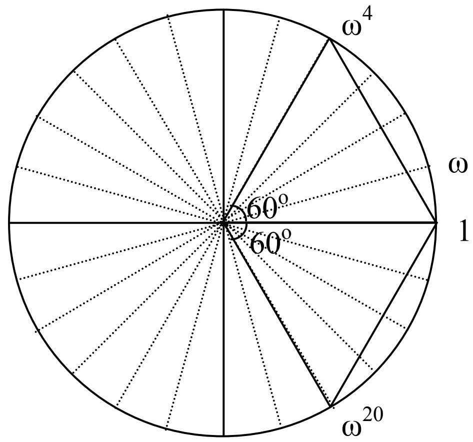
$$\frac{(c+\sqrt{2}\omega^6)\omega^6}{1+\sqrt{2}\omega^5} = \frac{(c+\sqrt{2}\omega^6)\omega^5}{\sqrt{2}+\omega^5} \Leftrightarrow 1+\sqrt{2}\omega^5 = \omega(\sqrt{2}+\omega^5) \Leftrightarrow 1-\omega^6 = \sqrt{2}\,(1-\omega^4)$$

Ismét alkalmazva, hogy ω^6 = i, azt kapjuk, hogy 1- ω^6 = 1 - i = $\sqrt{2}\,\omega^{21}$. Innen a kívánt egyenlőség ekvivalens a következővel:

(5) $$\omega^{20} + \omega^4 = 1.$$

Ez kétféleképpen is bizonyítható. Egyszerű számítás alapján: $\omega^{20} = \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\omega^4 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ezt behelyettesítve kapjuk a kívánt eredményt.

Az (5) egyenlőség még az alábbi ábra alapján is belátható:



Ábra

3.5 Konciklikus pontok. Ismert, hogy bármely három, nem egy egyenesbe eső pont egy körön van. Azt mondjuk, hogy az A, B, C, D pontok konciklikus pontok, ha egy körön vannak. Ez a feltétele kifejezhető a pontok a, b, c, d komplex koordinátáival is. Az A, B, C, D, nem egy egyenesbe eső pontok akkor és csakis akkor konciklikusak, ha a komplex koordinátáik eleget tesznek a következő feltételnek:

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbf{R}.$$

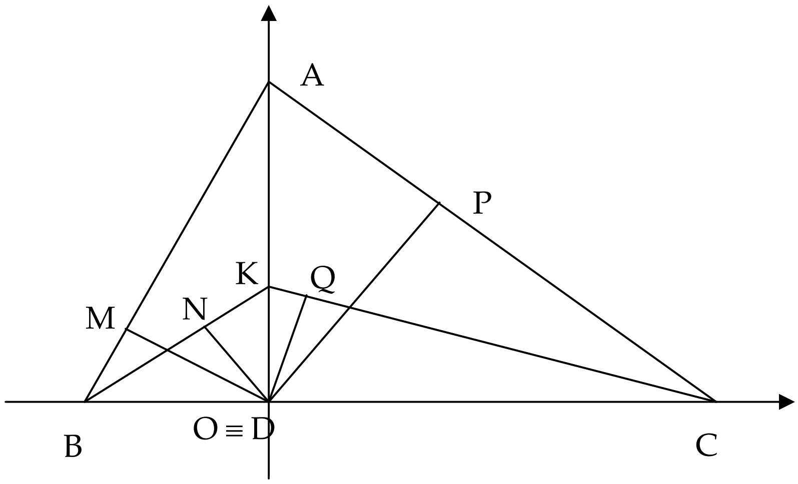
Ez a 3.1.alapján azonnal következik. Az adott A, B, C, D pontok esetén, a D pont akkor és csakis akkor van az ABC háromszög köré írható körön, ha ACB∠ = ADB∠. Ez azt jelenti, hogy az $\frac{a-c}{b-c}$ és $\frac{a-d}{b-d}$ komplex számoknak vagy megegyezik az argumentuma, vagy csupán π –ben különbözik. Mivel a modulusuk különböző lehet, következik, hogy:

$$\frac{a-c}{b-c} = \lambda \frac{a-d}{b-d},$$

ahol λ egy pozitív, vagy negatív valós szám. Tehát következik a kívánt eredmény.

3.6 Egy koncicklikus pontokat tartalmazó feladat. Adott az ABC háromszög, D az a csúcshoz tartozó magasság talppontja, és K az AD szakasz egy tetszőleges pontja. Jelölje M, N, P, Q rendre a D pont merőleges vetületeit BA, BK, CA, CK egyenesekre. Igazolja, hogy MNPQ húrnégyszög.

Megoldás. Ebben a feladatban a D pontból négy merőleges indul ki, ezért célszerű a koordinátákat úgy megválasztani, hogy D pont legyen az origó, BC az OX tengelyen, DA az OY tengelyen legyen (lásd ábra). Tehát az A, B, C, K pontok komplex koordinátai rendre: ai, b, c, k, ahol a, b, c ∈ **R**.



Ábra

Az M pont koordinátáinak kiszámításhoz a 2.1. és 3.1. következtetései segíthetnek. Az AB egyenes egyenlete:

$$m(a + bi) - \overline{m}(b - ai) = 2abi.$$

Az AB és DM közt a merőlegesség feltétele:

$$m(a + bi) - \overline{m}(b - ai) = 0.$$

A két egyenletből álló rendszert megoldva:

$$m = \frac{abi}{b+ai} = \frac{ab}{a - bi}.$$

Az előbbi eredményt most A helyett K-ra alkalmazva a következőt kapjuk:

$$n = \frac{bk}{k - bi}.$$

Hasonló úton kapjuk a p és q értékeit:

$$p = \frac{ck}{k - ci} \text{ és } q = \frac{ac}{a - ci}.$$

A 3.5. alapján a pontok akkor és csakis akkor konciklikusak, ha:

$$\frac{m-p}{n-p} : \frac{m-q}{n-q} \in \mathbf{R}.$$

Behelyettesítjük a kiszámított m, n, p, q értékeket:

$$\frac{m-p}{n-p} : \frac{m-q}{n-q} = \frac{\frac{ab}{a-bi} - \frac{ck}{k-ci}}{\frac{bk}{k-bi} - \frac{ck}{k-ci}} \cdot \frac{\frac{bk}{k-bi} - \frac{ac}{a-ci}}{\frac{ab}{a-bi} - \frac{ac}{a-ci}}$$

$$= \frac{[ak(b-c) - bc(a-k)i][ak(b-c) + bc(a-k)i]}{a^2k^2(b-c)^2}$$

$$= \frac{[ak(b-c)]^2 + [bc(a-k)]^2}{a^2k^2(b-c)^2} \in \mathbf{R}$$

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

4. A háromszög geometriája

4.1. Háromszögek nevezetes pontjai. Legyenek az ABC háromszög csúcsainak affixumai rendre az a, b, c komplex számok. Jelölje rendre G, H, O, I a háromszög súlypontját, ortocentrumát, a köréírt körének, illetve a beírt körének középpontját. Első célunk megtalálni ezeknek a komplex koordinátáit, majd feladatok megoldásában alkalmazzuk a kapott eredményt.

A G **súlypont** g komplex koordinátája:

$$g = \tfrac{1}{3}(a + b + c).$$

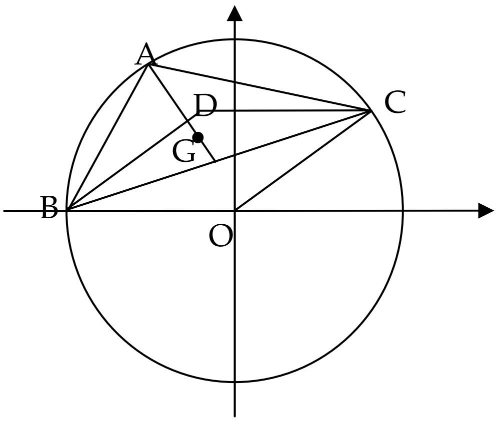
Valóban, ez vektoriális úton bizonyítható. Ismert, hogy G az AA' oldalfelezőn van és ismert, hogy $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GA'}$. Mivel $a' = \frac{1}{2}(b + c)$ a (3) alapján következik, hogy

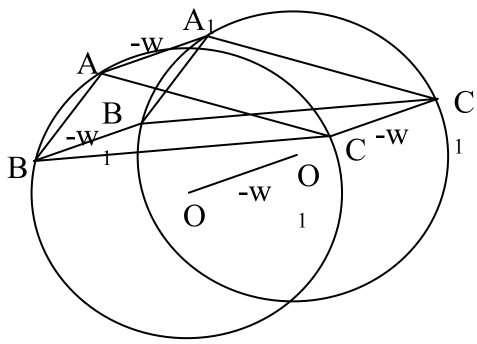
$$g = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a' = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\,\frac{b+c}{2} = \frac{1}{3}(a + b + c).$$

Ha a háromszög köré írt kör O középpontja éppen a komplex sík origója, akkor a H **ortocentrum** koordinátája: h = a + b + c. Ennek bizonyítására elegendő a következő (Sylvester egyenlőségként ismert) vektorazonosság igazolása:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

Erre egy szép bizonyítás adható. Az ötlet az, hogy kiszámítjuk az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ vektorösszeget, majd megvizsgáljuk, hol van a vektor H végpontja. Az összeg csoportosítható: $\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ jelöljük egyelőre $\overrightarrow{OX}$-el, anélkül, hogy megmondanánk azt, hogy hol is van az X pont. Az $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ vektorra igaz, hogy OD $\perp$ BC mivel OBCD egy rombusz (lásd 1. ábra).





1.ábra .... 2. ábra

Továbbá az $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ vektorra igaz, hogy OAXD egy parallelogramma, és így OD // AX. Következik, hogy AX ⊥ BC és így X az ABC háromszög A csúcsához tartozó magasság egy pontja. Ugyanez a gondolatmenet megismételhető a vektorok két másik csoportosításával, és végül azt kapjuk, hogy X mindhárom magasságon rajta van, tehát X ≡ H. Most a vektorok helyett a megfelelő komplex számokkal a kívánt h = a + b + c eredmény következik.

Ha az ABCΔ háromszög köré írható kör O középpontja nem esik egybe az origóval, hanem w a komplex koordinátája, akkor a H ortocentrum komplex koordinátája: h = a + b + c - 2w. Ennek a bizonyítására a háromszög –w vektorral eltolható, ekkor a kapott háromszög csúcsainak koordinátái: a - w, b - w, c - w és az így kapott háromszög köré írható kör középpontja viszont már az origó. Ennek a háromszögnek a H' ortocentrumára igaz, hogy h' = (a - w) + (b - w) + (c - w) = a + b + c - 3w (lásd 2. ábra). Most újabb eltolást végzünk a w vektorral, így visszakapjuk az eredeti háromszöget, és annak H ortocentrumát, amelyre: h = h' + w = a + b + c - 2w.

A háromszög beírt körének I **középpontjának** koordinátája szintén kiszámítható a csúcsok koordinátáinak, és az oldalak hosszának ismeretében. A beírt kör I középpontjának k koordinátáját a következő képlet adja:

$$\kappa = -\ \frac{AB \cdot a + BC \cdot b + CA \cdot c}{AB + BC + CA}$$

Bizonyítás. Legyen AD a BAC∠ szög szögfelezője, ahol D a BC oldalon van. A szögfelező tétele alapján teljesül a: BD : CD = AB : AC egyenlőség. A 2.1. fejezet (3) képletét használva:

$$d = \frac{BC \cdot b + CA \cdot c}{BC + CA}$$

A BD szögfelező hossza $BD = \dfrac{BC \cdot AB}{AC + AB}$. Az ABD háromszög AI szögfelezőjére ismét alkalmazzuk a szögfelező tételt, és felhasználjuk ugyanazt a (3) képletet:

$$\kappa = \frac{1}{1 + \frac{CA + AB}{AB}} \cdot a + \frac{\frac{CA + AB}{AB}}{1 + \frac{CA + AB}{AB}} \cdot \frac{1}{CA + AB} \cdot (CA \cdot b + AB \cdot c) = \frac{AB \cdot a + BC \cdot b + CA \cdot c}{AB + BC + CA}$$

4.2. A kilencpontos kör. Egy adott ABC háromszögben jelölje rendre A', B', C' a BC, CA AB oldalak középpontját, A'', B'', C'' az A, B, C csúcsokhoz tartozó magasságok talppontját, valamint H_A, H_B, H_C az AH, BH és CH szakaszok középpontját. A következő kilenc pont:

$$A', B', C', A'', B'', C'', H_A, H_B, H_C$$

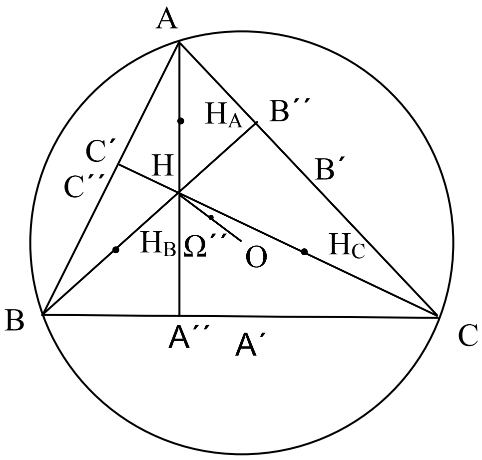
Ugyanazon a körön, a kilencpontos körön (más néven Euler kör) van és a kör középpontja az OH szakasz középpontja.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy az ABCΔ köré írt kör O középpontja egybeesik az origóval, és a köréírt kör sugara R, tehát: $|a| = |b| = |c| = R$. A H pont koordinátája mint láttuk: $h = a + b + c$ és az A', B', C', H_A, H_B, H_C pontok koordinátái rendre: $a' = (b + c)/2$, $b' = (c + a)/2$, $c' = (a + b)/2$, $h_A = a + (b + c)/2$, $h_B = b + (c + a)/2$ és $h_C = c + (a + b)/2$. Jelölje Ω az OH szakasz felezőpontját. Ennek koordinátája: $\omega = (a + b + c)/2$. Kiszámítva az Ω A' és Ω H_A távolságokat:

$$|a' - \omega| = \left|\frac{b+c}{2} - \frac{a+b+c}{2}\right| = \frac{|-a|}{2} = \frac{R}{2},$$

$$|h_A - \omega| = \left|a + \frac{b+c}{2} - \frac{a+b+c}{2}\right| = \frac{|a|}{2} = \frac{R}{2},$$

majd hasonló számítást végzünk a B és C csúcsokra. Ezzel beláttuk, hogy a következő hat pont : A', B', C', H_A, H_B, H_C ugyanazon az Ω a középpontú és $\frac{R}{2}$ sugarú körön van.



Ábra

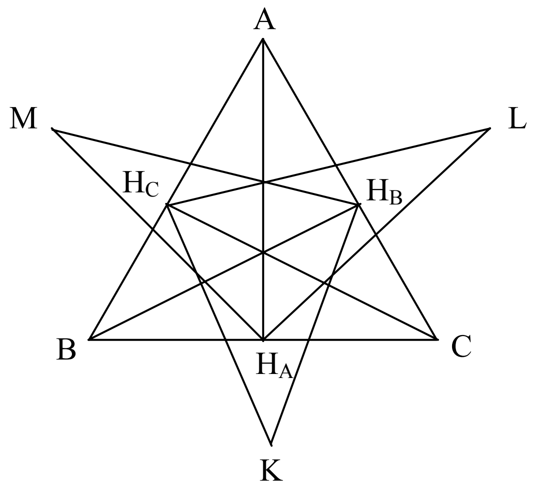
Annak a bizonyítása, hogy a maradék három pont is ugyanezen a körön van geometriai úton juthatunk el az ábra alapján. Mivel Ω az OH középpontja, egyenlő távol van az A' és A'' pontoktól, tehát ΩA'' = ½ R. Hasonlóan a B'' és C'' pontok is rajta vannak az adott körön.

4.3. Háromszögekre vonatkozó feladatok.

1. Feladat. Adott ABC hegyesszögű háromszögben jelölje H_A, H_B, H_C rendre az A, B, C csúcsokhoz tartozó magasságok talppontjait. A $BH_CC\angle$ és $BH_BC\angle$ szögek szögfelezői a K pontban metszik egymást, a $CH_CA\angle$ és $AH_AC\angle$ szögek szögfelezői az L pontban metszik egymást, valamint a $BH_BA\angle$ és $AH_AB\angle$ szögek szögfelezői az M pontban metszik egymást. Igazolja, hogy ha az ABCΔ és KLMΔ háromszögeknek egybeesik az ortocentruma, akkor AB = BC = CA.

Megoldás. Vegyük az AC átmérőjű kört. Ez a kör áthalad a H_A és H_C pontokon. Ebben a körben jelölje L annak a félkörívnek a középpontját, amely nem tartalmazza a H_A, H_C

pontokat. Jelölje B' az AC oldal középpontját. Ekkor B'L= AC/2 és B'L $\perp$ AC. Következik, hogy L a középpontja annak a négyzetnek, ami az AC oldalra kívülről szerkeszthető. Hasonló módon K és M azoknak a négyzeteknek a középpontjai, amelyek a BC, illetve AB oldalakra kívülről szerkeszthetők (lásd ábra)



Ábra

Most tekintsük az A(a), B(b), C(c) pontokat, illetve komplex koordinátáikat, ekkor a K, L, M pontok koordinátái a következők:

$$k = \frac{b+c}{2} + i\,\frac{b-c}{2},$$

$$l = \frac{c+a}{2} + i\,\frac{c-a}{2},$$

$$m = \frac{a+b}{2}\; i\,\frac{a-b}{2}.$$

Ezekből az egyenlőségekből az következik, hogy: k + l + m = a + b + c.

Az ABC háromszög H ortocentrumára h = a + b + c. Legyen w a KLM háromszög köré írt kör középpontjának koordinátája. Ekkor ennek a háromszögnek az ortocentrumát a következő kifejezés adja: k + l + m - 2w = a + b + c - 2w = h - 2w. A feladat feltétele szerint ez a pont egybeesik H-val. Következik, hogy w = 0. Ez azt jelenti, hogy a két háromszög köré írt körök középpontja is egybeesik. Ebből következik, hogy OK = OL = OM. Szokásos trigonometriai számítások elvégzése után:

$$OK = R\cos A + a/2;\ OL = R\cos B + b/2;\ OM = R\cos C + c/2,$$

Ahol R az ABCΔ köré írt kör sugara. A sinus tételt és az előző összefüggéseket felhasználva:

$$\sin A + \cos A = \sin B + \cos B = \sin C + \cos C,$$

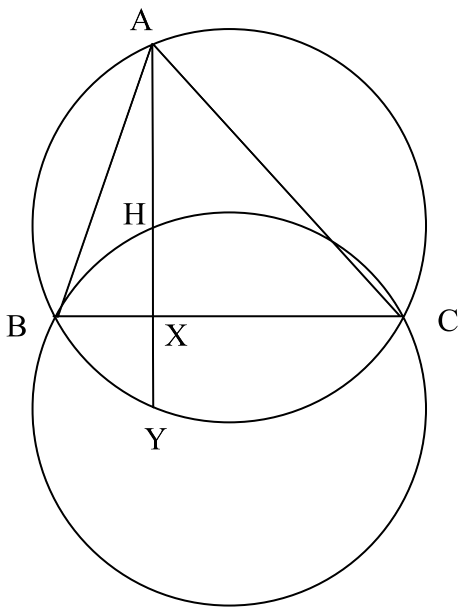
ami átalakítható a következő képpen:

$$\sin(A + \frac{\pi}{4}) = \sin(B + \frac{\pi}{4}) = \sin(C + \frac{\pi}{4}).$$

Az utóbbi egyenlőségek azt is jelentik, hogy vagy A + B = C = $\frac{\pi}{2}$ vagy A = B = C. Mivel a háromszög hegyesszögű, csak a második eset lehetséges.

2. Feladat. Legyen az ABC háromszög ortocentruma H. A BCH, CHA, AHB háromszögek köré írt körökön vegyük fel azokat az A', B', C' pontokat, amelyekre rendre HA' = HB' = HC'. Legyen K, L, M rendre a BA'C, CB'A, AC'B háromszögek ortocentruma. Igazolja, hogy az A'B'C' és KLM háromszögek ortocentruma egybeesik.

Megoldás. Ismert az, hogy a H ortocentrumnak a háromszög valamelyik oldalára vonatkozó tükörképe a háromszög köré írható körön van. Ezt a következő módon lehet belátni: ha az AH magasság a BC oldalt X-ben és a háromszög köré írt kört Y-ban metszi, akkor a HBX és YBX háromszögek egybevágók. Következik HX = YX (lásd ábra) és ez elegendő a bizonyításhoz. Az ABCΔ köré írt kör áthalad a B, C és Y pontokon, tehát a BCHΔ köré írt kör az előző körnek a BC- re vonatkozó tűkörképe. A köréírt kör O középpontjának a tűkörképe W, amelyet a következőképpen adhatunk meg: $\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Következik w = b + c. Ezen felül: |w - b| = |w - c| = |w - a'| = R, ahol R az ABCΔ köré írt kör sugara.



Ábra

A 4.1. képlet alapján: k = a' + b + c - 2w = a' - (b + c). Hasonlóan l = b' - (c + a) és m = c' - (a + b). Ezeknek összege:

$$k + l + m = (a' + b' + c') - 2(a + b + c) = (a' + b' + c') - 2h.$$

Az A'B'C'Δ köré írt kör középpontja H. Ezáltal ismét a 4.1. alapján:

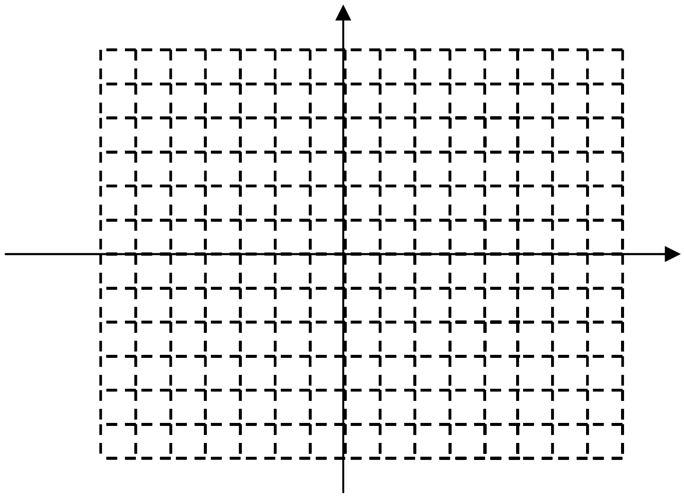
$h_{A'B'C'} = (a' + b' + c') - 2h = k + l + m$. Mivel |k| = |a' - w| = R következik, hogy a KLMΔ köré írt kör középpontja O. Innen következik, hogy $h_{KLM} = k + l + m$ és ez a kívánt eredményt jelenti.

5. Kitűzött feladatok

5.1. Feladat. Igazolja, hogy nem létezik olyan egyenlő oldalú háromszög, amelynek csúcsai egybeesnek egy tetszőlegesen nagy sakktábla négyzeteinek csúcsával. **Megoldás.** Egy tetszőlegesen nagy sakktábla úgy tekinthető, mint egy derékszögű koordinátarendszer, és a sakktábla négyzeteinek csúcspontjai azok a pontok, amelyeknek egészek a koordinátái.

Komplex számokkal kifejezve, ezek azok a számok, amelyek a $z = a + bi$ alakban írhatók, ahol $a, b \in \mathbf{Z}$.

Megjegyzendő, hogy a $\mathbf{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ halmaz a geometriában, algebrában és számelméletben egyaránt nagyon fontos. Neve a Gauss egészek gyűrűje.



Ábra

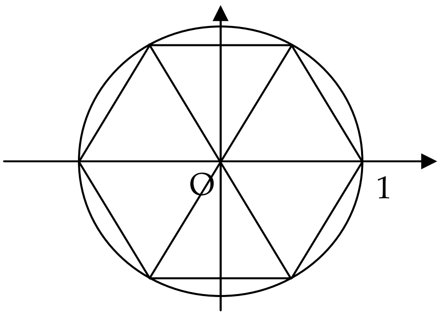
Most tegyük fel, hogy van olyan egyenlő oldalú háromszög, amelynek csúcsai Gauss egészek. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan $a, b, c \in \mathbf{Z}[i]$ elemek, amelyre $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0$. felhasználva az $\varepsilon^2 = -(\varepsilon + 1)$ egyenlőséget, következik, hogy $\varepsilon(b - c) = c - a$. Innen az ε –ra a következő kifejezést kapjuk:

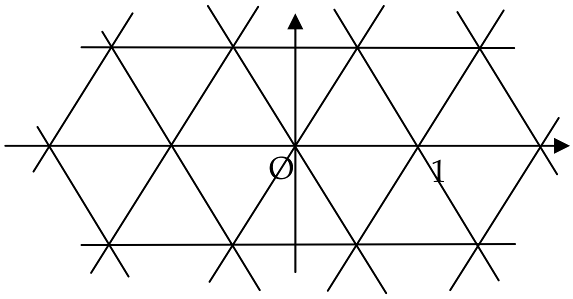
$$\varepsilon = \frac{c-a}{b-c} = \alpha + \beta i,$$

ahol α, β racionális számok. Ez ellentmond az ε értékének, mivel annak képzetes része $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ami irracionális.

5.2. Feladat. Tegyük fel, hogy a síkot egyenlő oldalú háromszögekkel lefedjük. Igazolja, hogy nem létezik olyan négyzet, amelynek a csúcsai egyben a lefedő háromszögek csúcsai.

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan a sík pontjait komplex számokkal azonosítjuk. Szükségünk van a sík egyenlő oldalú háromszögekkel történő lefedésének a leírására. Ehhez tekintsük azt a szabályos hatszöget, ami egy egység sugarú körbe írható, tehát aminek csúcsai az 1, $1 + \varepsilon$, ε, -1, $\varepsilon^2 = -(1+ \varepsilon)$, $1 + \varepsilon^2 = - \varepsilon$ pontok és kössük össze a csúcsokat a kör középpontjával (lásd 1. ábra). Hat egyenlő oldalú háromszöget kapunk. Most toljuk el a hatszöget az $1 + (1 + \varepsilon) = 2 + \varepsilon$ vektorral párhuzamosan, így egy újabb hatszöget és vele együtt hat egyenlő oldalú háromszöget kapunk. Ez az eljárás vég nélkül folytatható újabb párhuzamos eltolásokat használva, az eltolás vektorát mindig a hatszög két egymás utáni csúcsának koordinátája adja. Előállítottuk tehát a sík egy lefedését egyenlő oldalú háromszögekkel (lásd 2. ábra). Könnyen belátható, hogy a háromszögek csúcsait a $\mathbf{Z}[\varepsilon] = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ halmaz adja.





1. ábra ……………………………………. 2. ábra

A csúcsoknak ezt a leírását felhasználva, lássuk most a feladat megoldását. Tegyük fel, ellentmondásra való visszavezetéssel, hogy létezik egy olyan négyzet aminek a csúcsai a **Z**[ε] halmazban vannak. Ekkor léteznie kell olyan z, u, v $\in$ **Z**[ε] komplex számoknak, amelyre $i = \frac{u-z}{v-z}$. Akkor az u - z és v - z komplex számok szintén a **Z**[ε] halmazban vannak. Tehát egy következő alakú egyenlőséghez jutunk:

$$m + n\varepsilon = i(p + q\varepsilon),$$

ahol m, n, p, q egészek. Az ε értékét tekintve, azt kapjuk, hogy:

$$m - \frac{n}{2} + I\,\frac{n\sqrt{3}}{2} = -\,\frac{q\sqrt{3}}{2} + i(p - \frac{q}{2}),$$

ami ellentmondás azzal a feltétellel, hogy m, n, p, q $\in$ **Z**.

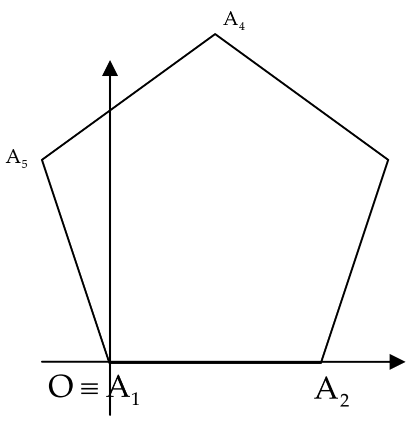
5.3. Feladat.[5] Adott egy konvex ötszög, ami teljesíti a következő feltételeket:

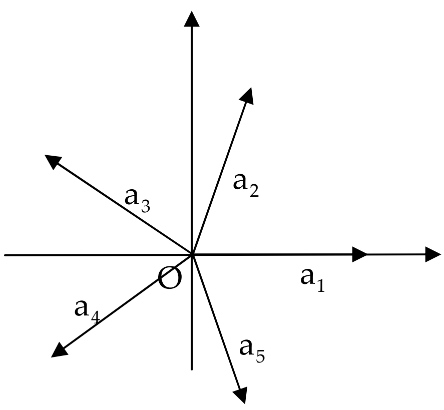
(a) minden belső szöge egyenlő,

(b) az oldalainak hossza racionális szám.

Igazolja, hogy az ötszög szabályos.

Megoldás. Legyen $A_1A_2A_3A_4A_5$ az adott feltételeket teljesítő ötszög, és tegyük fel, hogy csúcsainak sorrendje az óramutatóval ellentétes (lásd 1. ábra). Minden oldala egy vektorként értelmezhető: $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{a_2}$, ... , $\overrightarrow{A_5A_1} = \overrightarrow{a_5}$. A síkban ezek a vektorok eltolhatók egy közös O kezdőpontba, és tegyük fel, hogy az a_1 vektor a valós tengelyen van (lásd 2. ábra).





[5] 2. Feladat, 18. Balkán Matematikai Olimpia, 2001.

1. ábra ………………………………………….... 2. ábra

Két egymást követő vektor közti szög $72^0 = \frac{2\pi}{5}$ és $\sum_{k=1}^{5} \overrightarrow{a_k} = 0$. Természetesnek tűnik, hogy az ötödrendű komplex egységgyököket használjuk, az $\omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. A vektorok helyett komplex számokat használva a következő egyenlőségekhez jutunk:

$$a_1 = |a_1|,\ a_2 = |a_2|\omega,\ a_3 = |a_3|\omega^2,\ a_4 = |a_4|\omega^3,\ a_5 = |a_5|\omega^4.$$

Ezt felhasználva kapjuk a következő egyenletet:

$$|a_1| + |a_2|\omega + |a_3|\omega^2 + |a_4|\omega^3 + |a_5|\omega^4 = 0.$$

Ez egy negyedfokú egyenlet, amelynek racionális együtthatói $|a_1|, \ldots, |a_5|$, és amelynek egyik gyöke ω. Ugyanakkor ω a következő irreducibilis polinomnak is gyöke:

$$\Phi_5(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

Tehát $|a_1| = |a_2| = \ldots = |a_5|$, és ezzel bebizonyítottuk a feladatot.

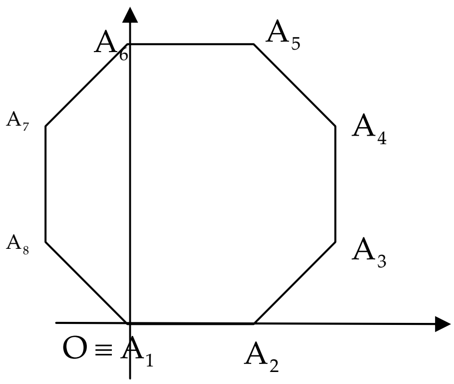
5.4. feladat.[6] Adott egy konvex nyolcszög, ami teljesíti a következő tulajdonságokat:

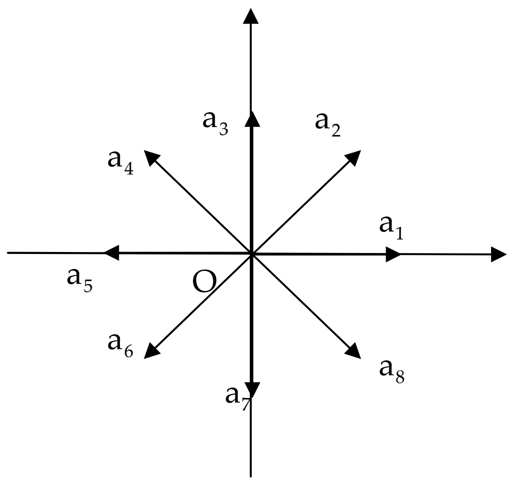
(a) minden belső szöge egyenlő,

(b) az oldalainak hossza racionális szám.

Igazolja, hogy a nyolcszögnek van egy szimmetria pontja.

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan feltesszük, hogy a nyolcszög oldalai az $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ... , $\overrightarrow{a_8}$, amelyeknek a hossza rendre a racionális $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_8|$. Tekintsük ezeket a vektorokat az origóból induló vektoroknak és rendeljük hozzájuk az $a_1, a_2, \ldots, a_8$ komplex számokat.





1. ábra …………………………….. 2. ábra

Két egymást követő vektor szöge $\varphi = 45^0 = \frac{\pi}{4}$. Jelölje $\omega = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$. A következő egyenlethez jutunk:

$$a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2 + \ldots + a_8\omega^7 = 0.$$

---

[6] Az Orosz Matematikai Olimpia egy feladata.

Mivel $\omega^4 = -1$, az egyenlet átalakítható:

$$(a_1 - a_5) + (a_2 - a_6)\omega + (a_3 - a_7)\omega^2 + (a^4 - a^8)\omega^3 = 0.$$

Innen következik, hogy ω egy legfeljebb harmadfokú egyenlet gyöke. Ismert, hogy ω minimális polinomja **Q** fölött a $\Phi_8(X) = X^4 + 1$. Tehát $a_1 = a_5$, $a_2 = a_6$, $a_3 = a_7$ és $a_4 = a_8$. Ez azt jelenti, hogy a nyolcszög négy szemben fekvő oldalpárja négy parallelogrammát határoz meg. Ezeknek a parallelogrammáknak közös szimmetria pontja van, tehát ez a nyolcszög szimmetria pontja.

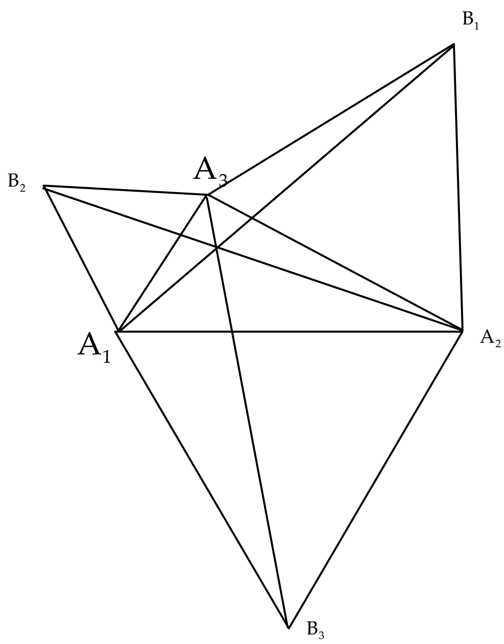
5.5. Feladat. Az $A_1A_2A_3$ oldalaira kívülről megszerkesztjük az $A_2B_1A_3$, $A_3B_2A_1$ és $A_1B_3A_2$ egyenlő oldalú háromszögeket.

a) Igazolja, hogy az A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 egyenesek egy közös F ponton mennek át.

b) Igazolja, hogy $A_1FA_2\ \angle = A_2FA_3\ \angle = A_3FA_1\ \angle = 120^0$ (F az $A_1A_2A_3$ háromszög *Fermat-Toricelli* pontja).

c) Igazolja, hogy $FB_1 = FA_2 + FA_3$, $FB_2 = FA_3 + FA_3$ és $FB_3 = FA_1 + FA_2$.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az $A_1A_2A_3$ háromszög csúcsainak sorrendje az óramutató járásával ellentétes. Ekkor az $A_2B_1A_3$, $A_3B_2A_1$ és $A_1B_3A_2$ háromszögek körüljárási iránya is az óramutató járásával ellentétes (lásd ábra)



Ábra

A 3.2. alapján a B_1, B_2, B_3 pontok komplex koordinátáit a következő képletek adják:

$$b_1 + a_3\varepsilon + a_2\varepsilon^2 = 0,$$

$$b_2 + a_1\varepsilon + a_3\varepsilon^2 = 0,$$

$$b_3 + a_2\varepsilon + a_1\varepsilon^2 = 0.$$

Az egyenlőségeket összeadva, és figyelembe véve azt, hogy $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$ a következő egyenlőséghez jutunk:

$$b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

Az A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 egyenesek egyenlete a 2.1. alapján írható fel, a következő lineáris egyenleteket kapjuk z és $\overline{z}$-ra:

$$z(\overline{a_1}-\overline{b_1})-\overline{z}(a_1-b_1)+(a_1\overline{b_1}-\overline{a_1}b_1)=0,$$

$$z(\overline{a_2}-\overline{b_2})-\overline{z}(a_2-b_2)+(a_2\overline{b_2}-\overline{a_2}b_2)=0,$$

$$z(\overline{a_3}-\overline{b_3})-\overline{z}(a_3-b_3)+(a_3\overline{b_3}-\overline{a_3}b_3)=0.$$

Ezek az egyenesek akkor és csakis akkor haladnak át egy közös ponton, ha van a síknak egy olyan pontja, amire $(z, \overline{z})$ megoldása az előző rendszernek. Ez azt jelenti, hogy a következő feltétel teljesül:

$$\begin{vmatrix} \overline{a_1}-\overline{b_1} & a_1-b_1 & a_1\overline{b_1}-\overline{a_1}b_1 \\ \overline{a_2}-\overline{b_2} & a_2-b_2 & a_2\overline{b_2}-\overline{a_2}b_2 \\ \overline{a_3}-\overline{b_3} & a_3-b_3 & a_3\overline{b_3}-\overline{a_3}b_3 \end{vmatrix}=0$$

A determináns alsó két sorát az elsőhöz adva, és a $b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3$ feltételt figyelembe véve, azt kapjuk, hogy a determináns csak akkor nulla, ha:

$$a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + a_3\overline{b_3} = \overline{a_1}b_1+\overline{a_2}b_2+\overline{a_3}b_3.$$

A következő pont bizonyításkor egy kicsit többet is bizonyíthatunk, mint amit a feladat kér. Az A_1B_1 és A_2B_2 egyenlő hosszúságúak, és a szögük 120^0. Ennek belátására elegendő bebizonyítani a $(b_1 - a_1)\varepsilon = b_2 - a_2$ egyenlőséget, ami a b_1, b_2 –t kifejező képletből azonnal következik.

A feladat utolsó része a Ptolemájosz tétel következménye, ha azt az $FA_2B_1A_3$, $FA_3B_2A_1$, $FA_1B_3A_2$ húrnégyszögekre alkalmazzuk. Azt kapjuk tehát, hogy az egyenlő oldalú háromszög köré írt kör egy pontjának a távolsága a háromszög egyik csúcsától a másik két csúcstól mért távolságok összegével egyenlő. Ez az eredmény Schooten tételeként ismert.

5.6. Feladat. Legyen ABCD egy húrnégyszög és H_A, H_B, H_C, H_D rendre a BCD, CDA, DAB és ABC háromszögek ortocentrumai. Igazolja, hogy az ABCD és a $H_AH_BH_CH_D$ egybevágóak.

Megoldás. Tegyük fel, hogy a húrnégyszög köré írt kör O középpontja az origó. Ekkor a BCD, CDA, DAB, ABC háromszögek ortocentrumainak koordinátái rendre $h_A = b + c + d$, $h_B = c + d + a$, $h_C = d + a + b$, $h_D = a + b + c$. Észrevehető, hogy $h_A - h_B = a - b$, tehát az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{H_AH_B}$ vektorok párhuzamosak, egyenlő hosszuk van, de ellentétes irányúak. A négyszög többi oldalaira hasonló tulajdonság érvényesül, és ezzel a kívánt eredményt bebizonyítottuk.

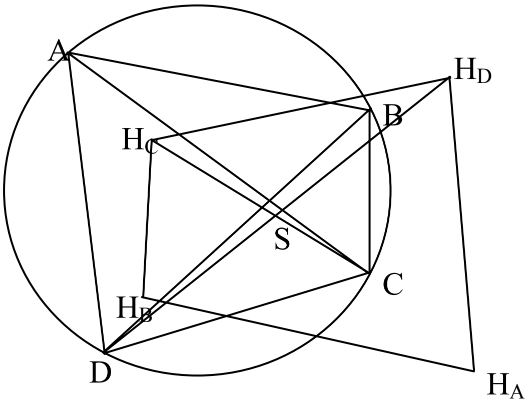
Megjegyzés. A fenti eredményt felhasználva egy érdekes jellemzése adható a $H_AH_BH_CH_D$ négyszögnek. Legyen S az a pont aminek a komplex koordinátája:

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Ekkor:

$$a + h_A = b + h_B = c + h_C = d + h_D = 2s.$$

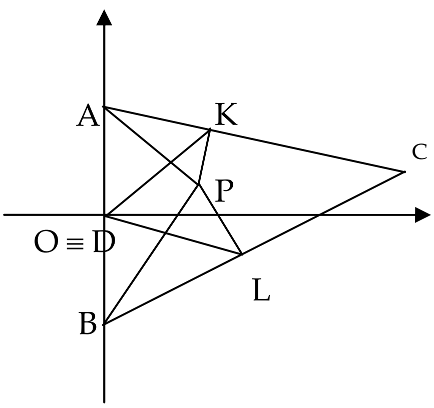
Ezek az egyenlőségek azt mutatják, hogy a H_A, H_B, H_C, H_D pontok az A, B, C, D pontoknak az S pontra vonatkozó szimmetrikusai.



Ábra

5.7. Feladat. Legyen P az ABC háromszögnek egy olyan belső pontja, amire PAC∠= PBC∠. Jelölje K, L a P pont vetületét rendre az AC, BC oldalakra, és D az AB oldal középpontja. Igazolja, hogy DK = DL.

Megoldás. Ebben a feladatban a C pont helyzete nem fontos. Tegyük fel, hogy az AB oldal középpontja az origó, tehát D = O és b = - a. Vegyük fel a tetszőleges P pontot a síkban, majd szerkesszük meg a K és L pontokat a feladat szerint: PAK∠ = PBL∠= α és PK ⊥ AK, PL ⊥ BL (lásd ábra).



Ábra

A k és l komplex koordinátákkal a következőképpen fejezhető ki:

$$p - k = i(a - k)\tan\alpha,$$

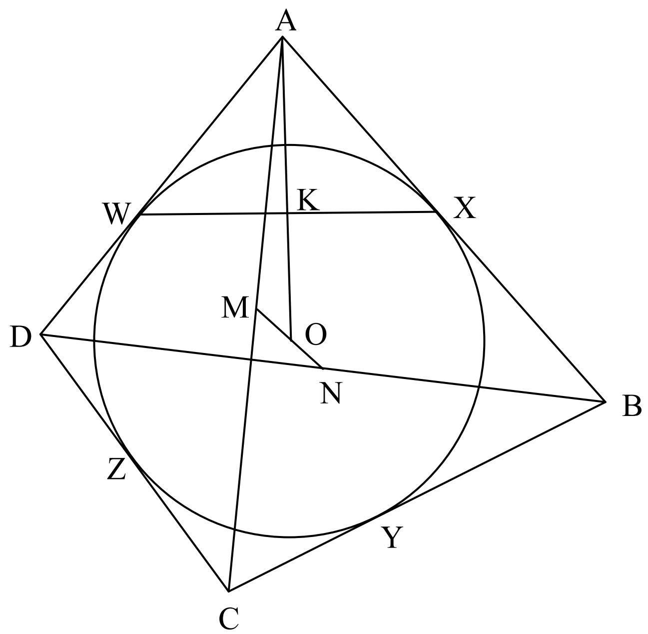
$$a + l = i(l - p)\mathrm{ctg}\alpha.$$

A fenti képletek alapján a k és l a következő alakban írható:

$$k = \frac{p - ai\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha} \text{ és } l = \frac{p - ai\tan\alpha}{1 + i\tan\alpha}$$

Nyilván teljesül $k\bar{k} = l\bar{l}$, ami azt jelenti, hogy $|k|^2 = |l|^2$.

5.8. Feladat. Igazolja, hogy egy kör köré írható négyszög átlóinak felezőpontját összekötő egyenes áthalad az adott kör középpontján (a négyszög Newton vonala). **Megoldás.** Tegyük fel, hogy a négyszögbe írható kör középpontja az origó, és sugara 1. Jelölje X, Y, Z, W rendre azokat a pontokat, ahol az AB, BC, CD, DA oldalak a kört érintik és x, y, z, w az adott pontok komplex koordinátái. Mivel $|x| = |y| = |z| = |w| = 1$ felírható, hogy: $\overline{x} = \frac{1}{x}$; $\overline{y} = \frac{1}{y}$; $\overline{z} = \frac{1}{z}$; $\overline{w} = \frac{1}{w}$. A megoldás ötlete az, hogy kiszámítjuk az a, b, c, d értékeit az x, y, z, w függvényében



Ábra

Legyen K az XW szakasz középpontja. Mivel A pont az AX és AW érintők metszéspontja, az AK az XW felezőmerőlegese, és az O, K, A pontok kollineárisak (lásd ábra). Az OKXΔ és OWAΔ háromszögek hasonlóak és azonos a körüljárási irányuk is. A 3.2 feltétel alapján:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & x \\ 0 & w & a \end{vmatrix} = 0.$$

Ebből az egyenletből, felhasználva a $k = \frac{x+w}{2}$ kifejezést, az a értékére a következőt kapjuk:

$$a = \frac{xw}{k} = \frac{2xw}{x+w}.$$

Hasonlóan:

$$b = \frac{2xy}{x+y};\ c = \frac{2yz}{y+z};\ d = \frac{2zw}{z+w}.$$

Legyen M az AC átló középpontja. Ekkor:

$$m = \frac{xw}{x+w} + \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{\overline{x}+\overline{w}} + \frac{1}{\overline{y}+\overline{z}}.$$

Hasonlóan a BD átló N középpontjának koordinátája:

$$n = \frac{xy}{x+y} + \frac{zw}{z+w} = \frac{1}{\overline{x}+\overline{y}} + \frac{1}{\overline{z}+\overline{w}}.$$

A 2.1 alapján annak a feltételét, hogy a M, O, N kollineárisak a következő alakban írhatjuk fel: $m\overline{n} = \overline{m}n$. Az előző kifejezést alkalmazva és felhasználva azt, hogy $x\overline{x}$ = ... = $w\overline{w}$ = 1, a következőket kapjuk:

$$m\overline{n} = \left(\frac{1}{\overline{x}+\overline{w}} + \frac{1}{\overline{y}+\overline{z}}\right)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z+w}\right) = \frac{\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}}{(\overline{x}+\overline{w})(\overline{y}+\overline{z})} \cdot \frac{x+y+z+w}{(x+y)(z+w)}$$

$$= \frac{xyzw(x+y+z+w)(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w})}{(x+y)(y+z)(z+w)(w+x)}.$$

Ez a kifejezés ciklikus x, y, z, w -ben. Mivel n értékét az m-ből ciklikus permutációval kapjuk, következik, hogy $\overline{m}n$ értéke is ugyanaz. Ezzel bebizonyítottuk a feladatot.

5.9. feladat. [7] Egy adott ABC háromszögben legyen h_a az A csúcshoz tartozó magasság hosszát, m_a az A csúcshoz tartozó súlyvonal, valamint R és r rendre a köréírt, illetve beírt kör sugara. Igazolja a következő egyenlőtlenséget: $\frac{R}{2r} \geq \frac{m_a}{h_a}$

és igazolja, hogy az egyenlőség csak egyenlő oldalú háromszögben érvényes.

Megoldás. Jelölje S a háromszög területét, és s kerület felét. Ekkor:

$$2rm_a \leq R_a \Leftrightarrow 2m_a\frac{S}{s} \leq \frac{2RS}{BC} \Leftrightarrow 2m_a \cdot BC \leq 2Rs.$$

Tegyük fel, hogy az ABCΔ háromszög köré írt kör O középpontja a komplex sík origója, és legyen a, b, c a csúcsok komplex koordinátái. Ekkor |a| = |b| = |c| = R.

A kívánt egyenlőtlenség bal oldala a következőképpen számítható ki:

$$2m_a \cdot BC = 2|b - c|\left|a - \frac{b+c}{2}\right| = |b - c||2a - b - c| = |(b - c)(2a - b - c)|$$

$$= |a(b - c) + b(a - b) + c(c - a)|$$

$$\leq |a||b - c| + |b||a - b| + |c||c - a| = 2Rs.$$

Az egyenlőség csak akkor lehetséges, ha az a(b - c), b(a - b), c(c - a) vektorok megegyező irányúak. Ez azt jelenti, hogy az ABCΔ egyenlő oldalú.

[7] A Gazeta Matematica egy feladata,1981.