MATEMATIKAI INDUKCIÓ

Michael Lambrou

1. Fejezet. Matematikatörténeti bevezető

A filozófiában és az alkalmazott tudományokban az indukció fogalma azt jelenti, hogy egyedi esetekből általános következtetésre jutunk. A matematikában viszont az ilyen következtetésekkel óvatosabban kell bánni, mivel a matematika demonstratív tudomány, amelyben bármely állítást bizonyítani kell. Például John Wallis-t (1616-1703) kortársai szigorúan kritizálták, mivel az *Arithmetica Infinitorum* (1656) c. munkájában, miután következő hat összefüggést megvizsgálta:

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12},$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}, \qquad \frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24},$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25+25}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}, \qquad \frac{0+1+4+9+16+25+36}{36+36+36+36+36+36+36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{36}$$

minden további érvelés nélkül kijelentette, hogy a következő általános összefüggés is érvényes:

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2\ldots+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n},$$

és mindez “*per modum inductionis*” következik.

Annak ellenére, hogy Wallis állítása igaz, és ezt a következő (Archimédesz által is ismert) állítás bizonyítja:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}\right)n^2(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

mégis, szükség lett volna egy bizonyításra.

Ennek a feladatnak egyik lehetséges bizonyítása a *teljes* vagy *matematikai indukcióval* történhet. Ezt a módszert, amelyet néha csak röviden indukciónak nevezünk, a következőkben részletezzük.

Az indukció egy egyszerű, de ugyanakkor nagy erejű bizonyítási módszer az egész számokra vonatkozó állításokra. A matematika más területein is hatékonyan alkalmazható: például az algebra, geometria, analízis, kombinatorika, gráfelmélet és sok más fejezet.

Az indukció elvének hosszú története van a matematikában. Kezdetei a görög matematikában lelhetők fel, és bár maga az elv nem jelenik meg explicit módon az ókori görög szövegekben, sok helyen megtaláljuk a gondolat csiráit. Néhány matematikatörténész nézete szerint *Platónak* (427-347 i.e.) a *Parmenides* dialógusa (§147a7-c3) az első ismert példa az indukció elvének alkalmazására:

Tehát legalább ketten kell, hogy legyenek, ha van köztük kapcsolat (egy). - Igen, legalább ketten vannak.- És ha a két taghoz egy harmadikat adunk közvetlen rákövetkezőnek, akkor már hárman lesznek, és köztük két kapcsolat. – Igen. – És így tehát, amint egy újabb tagot *adunk hozzájuk folytatólag, akkor egy újabb kapcsolat is létrejön. Tehát bármely számra igaz az, hogy a tagok száma mindig eggyel több, mint a kapcsolatok száma, mivel minden újabb tag hozzáadásakor egy újabb kapcsolat is létrejön.- Valóban-. Tehát bármennyi is a tagok száma, a kapcsolatok száma mindig eggyel kevesebb. – Igaz.*

Az előző részlet egy filozófia munka része, de találunk több olyan ókori matematikai szöveget is, amelyek tartalmaznak indukció-szerű érvelést. Így mutatja ki például Euklidész (~330 - ~ 265 i.e.) az *Elemek* c. munkájában azt, hogy minden egész szám prímszámok szorzata.

A mai értelemben vett indukció fogalomhoz már sokkal közelebb jár Pappus (~290-~350 i.sz.) a *Collectio*-ban. Itt a következő geometria tételt bizonyítja.

Adott egy C pont az AB szakaszon. Vegyük fel az AB szakasznak ugyanazon az oldalán azt a három félkört, amiknek rendre AB, AC és CB az átmérői. Most szerkesszük meg a C_n *köröket a következőképpen:* C_1 *érinti mind a három, előzőekben adott félkört;* C_{n+1} *a* C_n *kört valamint az AB és AC mint ármérőre szerkesztett köröket érinti. Ha* d_n *jelöli a* C_n *átmérőjét, és* h_n *az adott kör középpontjának a távolságát az AB-től, akkor* $h_n = nd_n$*.*

Pappus bizonyítása során geometriai úton igazolja a $h_{n+1} / d_{n+1} = (h_n + d_n)/d_n$ rekurrencia relációt. Aztán felidézi Archimédesz (287 - 212 i.e.) egy eredményét, a 6. Kijelentést a *Book of Lemma's* –ból, amely szerint az előbbi tétel állítása n = 1 –re igaz. Összekötve ezt a rekurrencia relációval, egy tetszőleges n-re igaznak jelenti ki..

A görög matematika hanyatlása után a matematika múzsája z iszlám világba költözött. Bár az arab matematikusok munkáiban nem szó szerint jelenik meg, de az indukció egy előzetes formáját használják. Például al - Karaji (953-1029) az *al-Fakhri-ban* egyebek mellett a binomiális tételt is leírja, és a Pascal háromszögre utal, mindössze néhány (többnyire öt) kezdeti lépés után. Ez az arab matematikus még az $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$ összefüggést is ismerte. Mintegy évszázaddal később, hasonlóan felfedezhető az indukció elve About a century later we find similar traces of induction in al-Samawal (~1130-~1180) könyvében, az *al-Bahir*-ban, ahol megjelenik a következő azonosság: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. Ebből az időből származik még a Levi Ben Gershon (1288-1344) munkája, aki Franciaországban élt, és *Maasei Hoshev* wcímű, héberül írt művében az indukcióhoz hasonló módszereket használt.

Az első írott forrás, amiben nyugati nyelvek egyikén, latinul, világosan említést tesznek az indukciónak a mai alakjáról, az az *Arithmeticorum Libri Duo* (1575), a görög eredetű és Szirakuzában élő görög származású, Francesco Maurolyco (1495–1575). Ő bebizonyítja például, hogy az első n páratlan természtes szám összege mindig osztható az n-ik négyzetszámmal. Szimbólikusan: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, és ezt már az ókori Pithagorász is ismerte.

Az indukció egy másik korai megemlítése Blaise Pascal (1623–1662), *Traité du Triangle Arithmetique* című munkájában történik, ahol a mai kifejezéssel, a „Pascal háromszögről esik szó”. A szerző azt igazolja, hogy a ${}^nC_k$ binomiális együtthatók teljesítik a következő összefüggést: ${}^nC_k : {}^nC_{k+1} = (k + 1) : (n - k)$, bármely n és k, ahol $0 \leq k < n$. Itt az n-ről az (n +1)-re történő átlépést a ${}^nC_r = {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_r$ képlet biztosítja.

A fent említett szerzők mindegyike intuitíven kezeli a természetes számokat. Ez elegendő a mi céljainkra is, tehát ezt az utat fogjuk követni. A modern matematikában a kései 19. századtól kezdve megjelenik a természetes számok axiomatikus bevezetésének igénye. Ennek az igénynek felelt meg Giuseppe Peano (1858-1932) , aki közzé tette az ún. Peano féle axiómákat 1889-ben az *Arithmetices principia, nova methodo exposita* c. munkájában. Erre az eredményre nincs teljességében szükségünk, de megemlítjük, hogy az említett axiómák egyikének éppen az a szerepe, hogy az indukciót, mint bizonyítási módszert bevezesse. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy az indukció módszerének ez az intuitív formája is teljes joggal használható.

A következőkben az elméleti részt kisebb fejezetekre tördeljük, és minden fejezetben megjelennek az arra jellemző feladatok. Az első néhány fejezet könnyebb feladatokat tartalmaz, de vége felé egyre nagyobb kihívások várnak az olvasóra. *A feladatok egy része más úton is megoldható, de az alapötlet az volt, hogy lássuk miként alkalmazható az indukció ezekben az esetekben.*

2. Fejezet. Alapfogalmak

A matematikai indukció elve egy olyan módszer, amellyel természetes számra vonatkozó kijelentéseket bizonyítunk. Például tekintsük a következő állítást: "$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n(n+1)(2n + 1)/6$", amelyet P(n) jelöl. Könnyen ellenőrizhető az állítás néhány n értékre, például $1^2 = 1 = 1.(1+ 1)(2.1 + 1)/6$, $1^2 + 2^2 = 5 = 2.(2 + 1)(2.2 + 1)/6$, $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = 3.(3 + 1)(2.3 + 1)/6$ és így tovább. Itt tehát az állítást n = 1, n = 2 és n = 3 esetekre ellenőriztük (nemsokára azt is látni fogjuk, hogy a két utóbbi fölösleges), de most tegyük fel, hogy ezt az ellenőrzést elvégeztük egy adott n = k értékig. Az utolsó állítás tehát azt jelenti, hogy biztosak lehetünk abban, hogy erre a bizonyos k értékre igaz az "$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = k(k + 1)(2k + 1)/6$" állítás. Feltevődik a kérdés, hogy igaz-e az állítás a következő egész szám, azaz az n = k + 1 esetén is? Azt állítjuk, hogy igen, igaz. Ez úgy látható be, hogy *felhasználjuk azt, hogy* $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = k(k + 1)(2k + 1)/6$ igaz, és felírjuk:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 &= k(k + 1)(2k + 1)/6 + (k + 1)^2 \qquad \text{(feltétel szerint)} \\ &= (k + 1)[k(2k + 1) + 6(k + 1)]/6 \\ &= (k + 1)(k + 2)(2k + 3)/6, \end{aligned}$$

és ez már az eredeti állítás, de már az n = k + 1 esetre.

Ismételjük el tehát: Be akartuk bizonyítani, hogy a P(n) állítás igaz az $n \geq 1$ egészekre. Először ellenőriztük, hogy n = 1 esetre igaz; majd *feltéve,* hogy igaz n = k esetén, ellenőriztük az n = k + 1 esetre. Más szavakkal, ha most az eljárást egymás után többször alkalmazzuk, akkor abból, hogy P(1) igaz, következik, hogy P(2) is igaz; abból, hogy P(2) igaz, következik, hogy P(3) is igaz; abból, hogy P(3) igaz, következik, hogy P(4) is igaz; *és így tovább* igaz bármely $n \geq 1$ esetén.

A bizonyítás menete szimbólikusan így összegezhető:

$$\begin{array}{l} P(1) \\ P(k) \Rightarrow P(k+1) \\ \hline \Rightarrow \ P(n) \text{ igaz bármely } n \in \mathbf{N} \text{ esetén.} \end{array}$$

A bizonyításnak a "$P(k) \Rightarrow P(k +1)$" részét az *indukciós lépésnek* nevezzük; az a feltételezés, hogy P(k) igaz, az *indukció feltétele*.

Vegyünk egy másik példát.

2.1. Példa. (Bernoulli- féle egyenlőtlenség). Igazolja, hogy ha a egy valós szám, amelyre $a > -1$, akkor $(1 + a)^n \geq 1 + na$ bármely $n \in \mathbf{N}$.

megoldás. Az n = 1 eset azonnal belátható, mert tulajdonképpen az egyenlőség teljesül. Tegyük fel tehát, hogy az n = k esetben is teljesül az egynlőtlenség; azaz tegyük fel, hogy $(1 + a)^k \geq 1 + ka$.

Ez az indukció feltétele,és azt kell belátni, hogy $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$.

Felírható:

$$(1 + a)^{k+1} = (1 + a)(1 + a)^k$$

$\geq$ (1 + a)(1 + ka)   (az indukció feltétele alapján)

$= 1 + (k + 1)a + ka^2$

$\geq 1 + (k + 1)a$ (mivel $ka^2 \geq 0$).

Tehát az indukció elve alapján teljessé teszi a bizonyítást. □

Végül megjegyezhető, hogy a fenti példák az n = 1 esettel kezdődnek. Ez nem mindig van így, néha egy másik számtól kezdve igaz az állítás, lásd a feladatokat. Ezeknek a feladatoknak az esetén a szövegből derül ki az eltérés, és minden további részletezés szükségtelen.

A következő feladatokban változatos képletek bizonyítása jelenik meg. Egyik feladat megoldása sem jelenthet komoly fejtörést, céljuk az indukció elvének elsajátítása. Tulajdonképpen az olvasó a feladatok egy részét akár fejben is megoldhatja.

2.1. feladat. (Rutin). Igazolja indukcióval, hogy a következő azonosságok bármely termszetes n számra teljesülnek.

- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = n^2(n + 1)^2/4$,
- $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)/30$,
- $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = n^2(n + 1)^2(2n^2 + 2n - 1)/12$,
- $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$,
- $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$,
- $\frac{3}{1^2 2^2}+\frac{5}{2^2 3^2}+\frac{7}{3^2 4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$,
- $(n + 1)(n + 2)\ldots(2n - 1)(2n) = 2^n.1.3.5\ldots.(2n - 1)$,
- $\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k)!}{k!2^k}=\sum_{k=1}^{n}1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)$,
- $1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}$,
- $(\cos x)(\cos 2x)(\cos 4x)(\cos 8x)\ldots(\cos 2^{n-1}x) = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$ (for $x\in\mathbf{R}$ with $\sin x \neq 0$),
- $\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$, (for $x\in\mathbf{R}$ with $\sin x \neq 0$),
- $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n\ \text{radicals}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$,
- $(1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5) + (1^7 + 2^7 + 3^7 + \ldots + n^7) = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^4$,
- $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$.

2.2. Feladat. Ha az (a_n) sorozat teljesíti a következő feltételt:

a) $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($n\in\mathbf{N}$), akkor $a_n + 1 = 2^{n-1}(a_1 + 1)$.

b) $a_1 = 0$ és $a_{n+1} = (1 - x)a_n + nx$ ($n \in \mathbf{N}$), ahol $x \neq 0$, igazolja, hogy

$$a_{n+1} = [nx - 1 + (1 - x)^n]/x.$$

2.3. Feladat. Adott egy (a_n) sorozat. Vezessük be a következő új (x_n), (y_n) sorozatokat a következőképpen $x_1 = 1$, $x_2 = a_1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ és, az $n \geq 3$ esetén $x_n = a_n x_{n-1} + x_{n-2}$, $y_n = a_n y_{n-1} + y_{n-2}$. Igazolja, hogy:

$x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n$.

2.4. Feladat. Ha az $a_1, a_2, \dots, a_n$, számok mindegyike két teljes négyzet összege, akkor igazolja, hogy ugyanez a szorzatukra is igaz.

2.5. Feladat. Igazolja, hogy $2n^5/5 + n^4/2 - 2n^3/3 - 7n/30$ bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén egész.

2.6. Feladat. Igazolja, hogy, ha $x \neq y$, akkor $x - y$ polinom osztója az $x^n - y^n$ polinomnak.

2.7. Feladat. Iagzolja, hogy egy konvex n oldalú sokszögnek ½ $n(n - 3)$ átlója van ($n \geq 3$).

2.8. Feladat. Igazolja a binomiális tételt indukciós úton, azaz igazolja, hogy:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k a^k b^{n-k}$$

ahol ${}^{n}C_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Felhasználható a következő azonosság: ${}^{n+1}C_k = {}^{n}C_{k-1} + {}^{n}C_k$ ($1 \leq k \leq n$). (A binomiális tételt már az arabok is ismerték. Nem volt ugyan teljes a bizonyításuk, mivel néhány eset ellenőrzése után, egy indukciószerű állítást használtak. Később a tételt Isaac Newton (1654-1705), újra felfedezte, és közzé is tette a híres művében, a *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*-ban (1687). Az ő bizonyítása egy kombinatórikus érvelést tartalmaz. A tétel első indukciós bizonyítását Jakob Bernoulli (1654-1705), közölte *Ars Conjectandi* (1713) c. művében).

2.9. Feladat. Könnyen belátható, hogy a $(2+\sqrt{3})^n$ szám felírható $a_n + b_n\sqrt{3}$ alakban. Igazolja a) indukcióval és b) és indukció nélkül, hogy az a_n, b_n számok kielégítik az $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ ($n \in \mathbf{N}$) egyenletet.

2.10. Feladat. Igazolja, hogy a $2^{2^n} - 1$ legalább n különböző prímszámmal osztható. 2.11. Feladat. Ha $F_n = a^{2^n} + 1$ az n-ik Fermat szám ($n = 0, 1, 2, \dots$), igazolja, hogy

$F_n - 2 = (a - 1)F_0F_1\dots F_{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}$).

2.12. Feladat. Igazolja indukcióval, hogy $n! > 3^n$ az $n \geq 7$ esetén.

2.13. Feladat. Ha $a_0, a_1, a_2, \dots$ egy pozitív valós számsorozat, amelyre $a_0 = 1$ és $a_{n+1}^2 > a_n a_{n+2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), igazolja, hogy $a_1 > a_2^{1/2} > a_3^{1/3} > a_4^{1/4} > \dots > a_n^{1/n} > \dots$.

2.14. Feladat. Ramanujan egy eredménye az, hogy bebizonyította, hogy $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\dots}}}}} = 3$ (ennek a bizonyítása meghaladja a könyvünk kereteit). Használja fel Ramanujan eredményét annak az igazolására, hogy bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén: $\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+\dots}}}}} = n+1.$

3. Szabályszerűségek

Az indukció módszerének egyik hátránya, amint azt a következő példák (főként az 1. Feladat) is szemléltetik, az, hogy az adott feladathoz szükséges képletet mintegy *előre* kell ismerni. A feladat csupán a képlet bizonyítására vonatkozik. De ezt az előzetes képletet néha a szabályszerűségek ismeretében magunk is felfedezhetjük. Ez azt jelenti a gyakorlatban, hogy szükségesnek látszik néha megfogalmazni egy *sejtést*, amit aztán ellenőrizni és végül bizonyítani kell. Tehát végülis néha ki kell találni a képletet is. A következő példákon keresztül ilyen módon közelítünk a feladatokhoz.

3.1. Példa. Az n milyen értékeire lesz $2^n + 1$ a 3-nak többszöröse?

Megoldás. A legkisebb lehetséges értékeket ellenőrizve, azt találjuk, hogy $2^n + 1$ többszöröse 3-nak, ha n értéke az 1, 3, 5 és 7 számok egyike, de mindez nem igaz a 2, 4, 6 vagy 8 értékekre. Úgy tűnik, hogy megfogalmazható a sejtés, miszerint az n páratlan értékeire $2^n + 1$ a 3-nak többszöröse. Ez valóban igaznak bizonyul, de a teljesség kedvéért még bizonyítanunk kell. Jelölje az $a_n = 2^n + 1$ értéket.

Ekkor $a_{n+2} = 2^{n+2} + 1 = 4(2^n + 1) - 3 = 4a_n - 3$, ami pontosan akkor többszöröse 3-nak amikor az a_n is. □

3.2. Példa. Ha $f(x) = 2x + 1$, találja ki a következő függvénysorozat n-ik tagjának képletét: $f_1 = f(x)$, $f_2 = f(f(x))$, $f_3 = f(f(f(x)))$, $f_4 = f(f(f(f(x))))$, … majd bizonyítsa be a kapott képletet.

Megoldás. Számítással belátható, hogy $f_2 = 4x + 3$, $f_3 = 8x + 7$, $f_4 = 16x + 15$ és így tovább. Ha ennyi példa nem elég, ahhoz, hogy az általános szabályt felfedezzük, f további iterációit is kiszámíthatjuk (iteráció, azaz a függvény ismételt összetétele). Előbb-utóbb az a sejtés merül fel, hogy $f_n = 2^n x + 2^n - 1$. Kiderül, hogy a sejtés helyes, mert az olvasó kiegészítheti a hiányzó részleteket a következőképpen: $f_{n+1} = f(f_n(x)) = f(2^n x + 2^n - 1) = 2(2^n x + 2^n - 1) + 1 = 2^{n+1}x + 2^{n+1} - 1$. □

3.3. Példa. Tekintse a következő módon megadott sorozatot:

$$2 - 1,\ 3 - (2 - 1),\ 4 - (3 - (2 - 1)),\ 5 - (4 - (3 - (2 - 1))),\ \ldots$$

találja ki, majd bizonyítsa be a kapott képlet helyességét az

$$n - (n - 1 - (n - 2 - (n - 3 - (\ldots - (3 - (2 - 1))\ldots)))$$ kiszámításával.

Megoldás. A kezdő tagok rendre 1, 2, 2, 3, 3 és 4. Kitalálható, hogy az álatalános szabály a következő lesz:

$$n - (n - 1 - (n - 2 - (n - 3 - (\ldots - (3 - (2 - 1))\ldots))) = \begin{cases} n/2 & \text{if } n \text{ is even} \\ (n+1)/2 & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

Ez könnyen bizonyítható, a részleteket az olvasóra bízzuk, akinek azt tanácsoljuk, hogy külön tárgyalja a páros és páratlan esetet. □

Fontos megjegyzni és felhívni a figyelmet arra, hogy: attól függetlenül, hogy hány egyedi esetet vizsgálunk meg, ha egy szabályszerűségre bukkanunk, nem elegendő csak megfogalmazni az általános következtetést. *Minden* esetben bizonyítanunk kell a sejtésünket, a bizonyítás hiánya esetleg azt jelenti, hogy a következetésünk esetleg hibás. Több olyan eset volt, amikor elsőrangú matematikusok is hibát követtek el, elhamarkodva általánosítottak egy szabályszerűséget.

Például a nagy Fermat, aki észrevette, hogy $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$ és $2^{2^4} + 1 = 65537$ mind prímszámok, azt hitte, hogy $2^{2^n} + 1$ minden n esetén prímszám. Ez hamisnak bizonyult, és erre az első ellenpéldát Eulre adta, aki igazolta, hogy $2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417.$

Néha egy ilyan szabályszerűségre nagyon nehéz ellenpéldát találni, vagy nagyon távoli az az idő, amikor ez valakinak sikerül. Például az $n^{17}+9$ és az $(n+1)^{17}+9$ számok relatív prímek n =1, 2, 3, . . . értékekkel kezdve elég sok természetes számra, és az első ellenpéldát nagyon *nagy számokig* nem lehet találni. De vajon van-e egyáltalán ellenpélda? A válasz igen (lásd http://primes.utm.edu/glossary/page.php/GCD.html) és az első ellenpéldáta következő n értékre találták meg:

n = 8424432925592889329288197322308900672459420460792433.

Richard Guy két ragyogó cikket is publikált olyan szabályszerűségekre, amelyek végül is nem igazak minden n-re: a *The Strong Law of Small Numbers* (American Mathematical Monthly, (1988) 697-711) és *The Second Strong Law of Small Numbers* (Mathematics Magazine, 63 (1990) 3 - 20). Néhány esetben a valóság, az intuicióval ellentétes, egész más. Érdemes felkeresni a következő internetes oldalt:

http://primes.utm.edu/glossary/page.php?sort=LawOfSmall

amelyen az előző példa is megtalálható.

A következőkben néhány ilyen feladatotközlünk, amelyeben az olvasónak vagy (i) az a feladata, hogy felfedezze a szabályszerűséget, és azt be is bizonyítsa, vagy (ii) találnia kell ellenpéldát az első pillantásra szabályszerűségnek tűnő állítás tagadására.

3.1. feladat. A következő összegek kiszámítására találjon ki megfelelő képletet az első néhány tag összegezése alapján, majd bizonyítsa azt: $1^2 – 2^2 + 3^2 – \ldots + (– 1)^{n-1} n^2$,

$$1\cdot(1!) + 2\cdot(2!) + 3\cdot(3!) + \ldots + n\cdot(n!),$$

$$n^2 – [(n – 1)^2 – [(n – 2)^2 – [(n – 3)^2 – [\ldots– [3^2 – (2^2 – 1^2)]\ldots]]]],$$

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\ldots+\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}.$$

3.2. Feladat. Ismert, hogy az $1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + n^6$ összeg felírható a következő alakban: $n(n + 1)(2n + 1)(An^4 + Bn^3 – 3n + 1)/42$, ahol A is B is n-től független állandók. Találja meg az A és B megfelelő értékeit, majd igazolja a kapott képlet helyességét.

3.3. Feladat. Ha (p_n) a prímszámok sorozata, amelyre $p_1 = 2$, igazolja, hogy az a sorozat, amelynek tagjai rendre $p_1 + 1$, $p_1 p_2 + 1$, $p_1 p_2 p_3 + 1$, ... , $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n + 1$, és amit Euklidész is használt egy bizonyításában, az n = 1, 2, 3, 4, 5 értékekre szintén prímszámokat tartalmaz, de n = 6-ra már nem.

3.4. Feladat. Adott n pont egy kör kerületén, ahol n rendre 1, 2, 3, 4,... : Szerkesszük meg (különböző rajzokon) az pontokat összekötő húrokat. Tegyük fel, hogy a pontok „általános helyzetben” vannak, azaz, bármely három húr nem metszi egymást egy pontban. Most számoljuk meg a keletkező tartományokat, ezek száma rendre 1, 2, 4, 8, 16, ... Milyen szabályszerűségre gondolhatunk? Igaz-e, hogy a következő lépésben 32 a tartományok száma? Bizonyítsa be, hogy ez nem igaz!

3.5. Feladat. Találja ki az (a_n) sorozat általános tagját: az $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ és ha $n \geq 1$, akkor $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6\sqrt{a_{n-1}}}$.

3.6. Feladat. Találja ki az (a_n) sorozat általános tagját: az $a_1 = 1$, és ha $n \geq 2$, akkor $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n} = \frac{1}{2}(n+1)\sqrt{a_n}$.

4. Fejezet. Oszthatóság

Az indukció módszerét változatos körülmények közt lehet alkalmazni, nem csupán képletek igazolására, amint azt a legtöbb eddigi példa sugallja. Következzen tahát néhány más jellegű példa. Egy könnyen érthető kérdéskörrel kezdjük, az egész számok oszthatóságával, erről már a 2. fejezetben is szó esett. A továbbiakban azt, hogy egy a egész szám osztója (szorzótényezője) egy b egész számnak a | b jelöli.

4.1. Példa. Igazolja, hogy bármely természetes n esetén $9 \mid 5^{2n} + 3n - 1$; azaz, 9 osztója az $5^{2n} + 3n - 1$ számnak.

Megoldás. Legyen $a_n = 5^{2n} + 3n - 1$. Világos, hogy az $a_1 = 27$ osztható 9-el. Tegyük fel most, hogy az n = k esetén, az a_n szám is osztható 9-el, azaz, $5^{2k} + 3k - 1 = 9M$ valamely M természetes számra. Be kell bizonyítanunk azt, hogy $a_{k+1} = 5^{2(k+1)} + 3(k + 1) - 1 = 25.5^{2k} + 3k + 2$ is osztható 9-el. Az ötlet az, hogy fel kell használni az indukciós feltételt, a következők szerint:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 25 \cdot 5^{2k} + 3k + 2 \\ &= 25 \cdot (5^{2k} + 3k - 1) - 72k + 27 \\ &= 25 \cdot 9M - 9(8n - 3) \quad \text{(az indukció feltétele alapján)} \end{aligned}$$

vagyis a_{k+1} is 9 egy többszöröse.

Tehát az indukció elvének értelmében $9 \mid a_n$ bármely természetes n esetén.□

4.1. Feladat. Oldja meg az előző feladatot egy sokkal elegánsabb módon, $a_{k+1} - 25a_k$ értékét számítva az a_{k+1} helyett.

4.2. Példa. Igazolja, hogy a 1003, 10013, 100113, 1001113,…és így tovább, a tagok felsorolásával megadott sorozat tagjai 17-el oszthatók.

Megoldás. Ellenőrizhető, hogy $1003 = 17\times59$, és ezen felül a sorozat bármely két, egymást követő tagjának különbsége 9010…0 alakú, ami szintén osztható 17-el (hiszen $901 = 17\times53$). Ezeknek az ismeretében az olvasó teljes indukció segítségével befejezheti a bizonyítást.□

4.2. Feladat. Igazolja, hogy bármely $n\in\mathbf{N}$ esetén, $7^{2n} - 48n - 1$ többszöröse 2304-nak.

4.3. Feladat. Igazolja, hogy bármely $n\in\mathbf{N}$ esetén, $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ többszöröse 17-nek.

4.4. Feladat. Igazolja, hogy három egymást követő természetes szám köbének összege 9-el osztható.

5. Fejezet. Egyenlőtlenségek

Az előzőekben már láthattunk egy egyenlőtlenséget az ún. Bernoulli féle egyenlőtlenséget (2.1. Példa), amely a természetes számokra igaz. Ezt indukcióval bizonyítottuk, és sok más, a természetes számora érvényes egyenlőtlenséget is lehet indukcióval bizonyítani. Ennek szemléltetésére, következzen itt a Bernoulli egyenlőtlenség egy általánosítása, amit az előző bizonyításhoz hasonlóan, annak kisebb módosításával igazolhatunk.

5.1. Példa (Weierstrass egyenlőtlenség). Ha a_n ($n\in N$) vagy pozitív valós számok, vagy a [-1, 0] intervallum elemei, akkor:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n}a_k$$

Bizonyítás. Amint arról már említés történt, a bizonyítás a Bernoulli egyenlőtlenség bizonyításának lépéseit követi, és azt az olvasóra bízzuk: Az induktív lépésnél mindkét oldalt meg kell szorozni az $(1 + a_{n+1})$ pozitív számmal, de a bizonyítást óvatosabban kell kezelni, ha az összes a_n a [-1, 0] intervallumban van, ez esetben az összegezést tartalmazó tag negatív, de az $a_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$ pozitív. □

Számos egyenlőtlenség szerepel ebben az anyagban és a következő feladatokban, de lássunk egy csokorra valót belőlük:

5.1. Feladat. Igazolja indukcióval azt, hogy: a) $2^n > n^2$ for $n \geq 5$, b) $2^n > n^3$ for $n \geq 10$.

5.2. Feladat. Igazolja indukcióval azt, hogy: $2!4!\ldots(2n)! > [(n + 1)!]^n$ ($n\in\mathbf{N}$).

5.3. Feladat. Igazolja, hogy: $(2n)!(n + 1) > 4^n(n!)^2$ bármely $n > 1$.

5.4. Feladat. Igazolja bármely $n > 1$ természetes számra a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2.$$

5.5. Feladat. Igazolja, hogy ha a_k eleget tesz a $0 < a_k < 1$ feltételnek, ha $1\leq k \leq n$, akkor:

$$(1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n) > 1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

5.6. Feladat. . Igazolja, hogy ha a_k eleget tesz a $0 < a_k < 1$ feltételnek, ha $1\leq k \leq n$, akkor:

$$2^{n-1}(1 + a_1 a_2 \ldots a_n) \geq (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n).$$

6. Fejezet. Az indukció különböző változatai

Annak a bizonyítására, hogy a P(n) állítás bármely pozitív valós számra igaz, mindeddig azt használtuk, hogy ellenőriztük P(1)-et, majd feltettük, hogy P(k) igaz, majd ebből azt bebizonyítottuk, hogy P(k+1) is igaz. Az indukciós bizonyítás más változatait mutatjuk be a következő fejezetekben.

a) Ugrások: Az indukciónak ebben a változatában, a P(n) állítás igazolására, egyszerre két egységnyit lépünk. Más szavakkal abból, hogy igaznak tételezzük fel a P(k) állítást, azt bizonyítjuk, hogy P(k + 2) is igaz. Emellett közvetlenül ellenőrizni kell azt, hogy P(1) és P(2) is igaz, ezután a célunkat azzal érjük el, hogy két implikációsort tekintünk: $P(1) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(5) \Rightarrow P(7) \Rightarrow \ldots$ és $P(2) \Rightarrow P(4) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(8) \Rightarrow \ldots$ amelyek együtt az összes n-re tartalmazzák a P(n)-t. Hasonlóan járunk el, ha egy rögzített $t\in\mathbf{N}$ egységnyit lépünk. Ez azt jelenti, hogy a $P(k) \Rightarrow P(k + t)$ implikációt kell igazolni, és ellenőrizni kell P(1), P(2), …, P(t)-t.

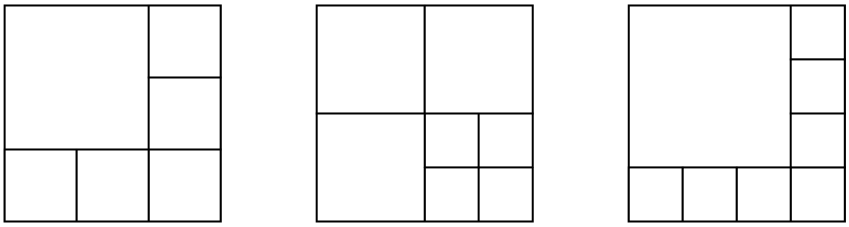
6.1. Példa. Igazolja, hogy bármely $n\in\mathbf{N}$ **esetén**, az $a^2 + b^2 = c^n$ egyenletnek van egy megoldása a pozitív egészeken.

Megoldás. Két egységnyi lépésekkel dolgozunk: Az n = 1 és n = 2 esetekben egy-egy pozitív egész megoldás nyilván létezik. Most tegyük fel, hogy $a_1^2+b_1^2=c_1^k$ egy megoldása pozitív egész megoldása n = k esetén az adott egyenletnek.

Ekkor az n = k + 2 esetén szintén van egy pozitív egész megoldás, éspedig: $(c_1a_1)^2+(c_1b_1)^2=c_1^{k+2}$. □

6.2. Példa. Nyilvánvaló, hogy egy négyzetet fel lehet osztani olyan kisebb négyzetekre, amelyek oldalai párhuzamosak az eredeti négyzet oldalaival. Igazoljuk, hogy bármely pontosan n, nem feltétlenül egynelő nagyságú négyzetre osztható, bármely $n \geq 6$ esetén.

Megoldás. Az alábbi ábrákon egy négyzetnek 6, 7 illetve 8 kisebb négyzetre osztása látható. Az ott megjelenő négyzetek bármelyike további négy kisebbre osztható, és ez a felosztás a négyzetek számát pontosan hárommal növeli (4 új jelenik meg, de egy régit elveszítünk). Tehát az indukciónak egy olyan változatával bizonyíthatjuk, amelyben egyből három lépést ugrunk. □



Megjegyezzük, hogy az indukciónak olyan változata is létezik, amelyben több lépést ugrunk, de nem mindig ugyanannyit. Szemléltessük ezt a következő példával.

6.3. Példa. Igazolja, hogy végtelen sok háromszögszám van, ami egyben négyzetszám is. (Emlékezetőül: a háromszögszámok $T_n = 1 + 2 + \ldots + n = ½\, n(n + 1)$ alakúak).

Megoldás. Nyilván $T_1 = 1 = 1^2$. Tegyük fel most, hogy a T_k háromszögszám egy teljes négyzet, és az a célunk, hogy találjunk ezeknek az információknak a birtokában egy nagyobb háromszögszámot, ami egyben teljes négyzet is. Elég hamar világossá válik, hogy T_{k+1}, T_{k+2} stb. most nem használható. Ha elgondolkozunk azon, hogy mi jöhet számításba, a következőre jutunk: $T_{4k(k+1)} = 4k(k + 1)[4k(k + 1) + 1]/2 = 4(4k^2 + 4k + 1)\, T_k = 4(2k + 1)^2 T_k$, a T_k-val együtt teljes négyzet. □

6.1. Feladat. Igazuk indukcióval, (két egységnyi lépéssel), hogy bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1}(1 + 2 + \ldots + n).$$

6.2. Feladat. (Eötvös verseny 1901). Igazoljuk egy négy egységnyi lépésű indukcióval, hogy $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ pontosan akkor osztható 5-el, ha nem osztható 4-el.

6.3. Feladat. Három egységnyi lépéseket használva igazoljuk indukcióval, hogy a $2^n + 1$ alakú számok nem többszörösei 7-nek.

6.4. Feladat. Ellenőrizzük a következő egyszerű azonosságokat: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}=1$, $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}=1$ és

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{21^2}=1$, majd egy olyan indukciós bizonyítást használva, ami három egységnyit ugrik, igazoljuk, hogy bármely $n \geq 6$ esetén léteznek az olyan $a_1, a_2, \ldots,$ a_n egészek, amelyekre $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a_n^2}=1$.

6.5. Feladat. (Erdős-Surányi tétel). Miután belátja közvetlen ellenőrzéssel a következő egyenlőségeket: $1 = 1^2$, $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$, $3 = -1^2 + 2^2$ és $4 = -1^2 - 2^2 + 3^2$ igazolja, hogy bármely N természetes szám esetén létezik egy n és a létezik a + és – előjelek (ezt röviden ± jellel jelöljük) olyan megválasztása, amelyre $N = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm n^2$.

b) Erős indukció: Euklidész az Elemek c. munkájában igazolja, hogy bármely k > 1 egész szám felírható (egy vagy több) prímszámok szorzataként. Bizonyítása alapjába véve a következő: Az állítás nyilván igaz k = 2 esetén. Tegyük fel most, hogy egy *k számig, magát a k-t is beleértve*, a tulajdonság minden számra teljesül, azaz k-ig minden szám prímszámok sozorzataként írható fel. Vegyük most k+1 értékét. Ez vagy prímszám, és akkor nincs mit bizonyítani, vagy legalább két (kisebb) tényező szorzata, de akkor ezek a kisebb számok felírhatók prímszámok szorzataként, tehát maga a k+1 is prímszámok szorzata. Ugyanezzel a logikával, k+2, k+3 stb. az összes egész számok is általánosíthatjuk a tulajdonságot

Más szavakkal az Euklidészi bizonyítás az indukció egy erősebb változata, ahol a) P(1)-et ellenőrizzük és b) a P(k+1) bizonyításához feltételezzük, hogy az *összes* állítás, P(1), P(2), … , P(k) mind teljesül (nem csak az utolsó, a P(k)). Az indukciós elv itt a következő: P(1) $\Rightarrow$ [P(1) és P(2)] $\Rightarrow$ [P(1) és P(2) és P(3)] $\Rightarrow$ [P(1) és P(2) és P(3) és P(4)], és így tovább, P(n) szerepel végül minden n-re.

Az erős indukció egyszerűbb formájában a P(k+1) bizonyításához csak azt tételezzük fel, hogy P(k-1) és P(k) igaz, (a többi kisebb egészre nem). Más szavakkal ellenőrizzük a P(1), P(2) állításokat, majd a következő implikációt: [P(k-1) és P(k)] $\Rightarrow$ [P(k+1). Vagyis tulajdonképpen az implikációsor így alakul: [P(1) és P(2)] $\Rightarrow$ [P(2) aés P(3)] $\Rightarrow$ [P(3) és P(4)], és így tovább.

Természetesen további lehetőségek is vannak, pl. P(k+1) igazolható abból, hogy a P(k-2), P(k-1) és P(k) állításokat tételezzük fel igaznak, miután a három legkisebb természetes számra ellenőriztük az állítást.

A következő példák szemléltetik a módszernek ezt a változatát.

6.4. Példa. Az (a_n) sorozatban $a_1 = a_2 = 4$ és $a_{n+1}a_{n-1} = (a_n - 6)(a_n - 12)$ az n = 2, 3, ... esetén. Igazolja, hogy a sorozat konstans.

Megoldás. Természetesen az megsejthető, hogy ez a konstans 4, az első két tag értéke. Tegyük fel, hogy $a_{k-1} = a_k = 4$. Most *egyidejűleg* felhasználva ezt a két feltételt, a rekurzió alapján felírható: $4a_{k+1} = (4 - 6)(4 - 12) = 16$, tehát $a_{k+1} = 4$. Mivel tudjuk, hogy a feltételek szerint $a_1 = a_2 = 4$ is teljesül, ez azt jelenti, hogy n esetén $a_n = 4$. □

6.5. Példa. Felidézzük, hogy a természetes számokon teljesül a következő azonosság: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$ bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén. Igazolja, hogy ez megfordítható, azaz, ha $a_n > 0$ egy olyan sorozat, amelyre $\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = (\sum_{k=1}^{n} a_k)^2$ bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén teljesül, akkor $a_n = n$ ($n \in \mathbf{N}$).

Megoldás. Az n = 1 esetén $a_1^3 = a_1^2$, tehát $a_1 = 1$ (mivel $a_n > 0$). *Tegyük fel most, hogy k minden értékére 1-től m-ig teljesül az állítás*, tehát $a_k = k$, vagyis $a_1 = 1, \ldots, a_m = m$. Ez most az erős indukció feltétele, és fel is használjuk teljes egészében. Az n = m + 1 esetén a feltétele szerint:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 + a_{m+1}^3 = (1 + 2 + \ldots + m + a_{m+1})^2$$

$$= (1 + 2 + \ldots + m)^2 + 2(1 + 2 + \ldots + m)a_{m+1} + a_{m+1}^2$$

vagyis $a_{m+1}^3 = m(m + 1)a_{m+1} + a_{m+1}^2$ és így $a_{m+1}(a_{m+1} + m)(a_{m+1} - m - 1) = 0$, amiből következik az állítás m+1-re, $a_{m+1} = m + 1$. □

6.6. Feladat. A Fibonacci sorozat esetén, amelyre $F_1 = F_2 = 1$, és $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, Igazolja, hogy a) $F_nF_{n+1} - F_{n-2}F_{n-1} = F_{2n-1}$, b) $F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n$.

6.7. Feladat. Legyen (a_n) a 6.4. Példában szereplő sorozat, csak $a_1 = 2$ és $a_2 = 20$ legyen. Igazolja, hogy $a_n = 9n^2 - 9n + 2$ ($n \in \mathbf{N}$). Hasonlóan, ha $a_1 = 2$ és $a_2 = 5$, igazolja, hogy $a_n = 4 + (-\frac{1}{2})^{n-2}$.

6.8. Feladat. Egy adott a szög esetén, az x értéke az x + 1/x = 2cosa egyenlet (egyik) megoldása. Igazolja, hogy $x^n + 1/x^n = 2\cos na$ ($n \in \mathbf{N}$).

6.9. Feladat. Igazolja, hogy ha a és b a következő egyenlet megoldásai a + b = 6 and ab = 1, akkor $a^n + b^n$ a) mindig egész és b) egy n esetén sem osztható 5-el.

6.10. Feladat. Legyen $a_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$. Igazolja, hogy a_n egész és $2^n | a_n$.

6.11. Feladat. Igazolja Pascal állítását, amelyet az 1. fejezetben idéztünk a *Traité du Triangle Arithmetique* alapján.

6.12. Feladat. Legyen a_1, a_2, a_3, … pozitív egészek sorozata, amelyre $a_1 = 1$ és $a_n < a_{n+1} \le 2a_n$ ($n \in \mathbf{N}$). Igazolja, hogy bármely természetes szám felírható különböző a_n –ek összegeként.

6.13. Feladat. Legyen (b_n) az a sorozat, amelyre $b_1 = 1$, $b_{2n} = b_n$ és $b_{2n+1} = b_{2n} + 1$. Igazolja, hogy b_n egyenlő az n szám bináris alakjában szereplő 1-es számjegyek számával.

c) Kettős indukció: Vannak olyan esetek is, amelyekben maga az indukciós lépés is külön indukcióval igazolható. A következő példák erre világítanak rá.

6.6. Példa. Igazolja, hogy bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén, $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ többszöröse 24-nek.

Megoldás. Jelölje $a_n = 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$, és az állítás nyilván igaz n = 1-re. Tegyük fel, hogy n = k is igaz, és mivel az $a_{k+1} = 7 \cdot a_k - 6 \cdot 5^k + 30$, az indukciós lépés igazolásához be kell látni, hogy $6 \cdot 5^k - 30$ is többszöröse 24-nek, mivel az első tag egyik szorzótényezője, az a_k is osztható 24-el. Ez egy újabb indukciós feladat, aminek a bizonyítását, mint egyszerűbb feladatot, az olvasóra bízzuk. □

d) Indukció két dimenzióban: Mindeddig olyan P(n) állításokat vizsgáltunk, amelyek egyetlen természetes számtól, n-től függtek. So far we have considered statements depending on a single integer n. Néha viszont olyan áálításokkal is találkozhatunk, amelyek két (vagy több) egész számtól függenek. Egy használható indukciós módszer az lehet, hogy az állítást, amit az egyszerűség kedvéért P(m,n) jelöl, rendre m és n szerint bizonyítunk. Például a) P(1,1)ellenőrzése után, vizsgálhatjuk b) azt, hogy P(2,1) és P(1,2), majd c) a P(3,1), P(2,2) és P(1,3) állítások igazak-e, és így tovább. Ezt az utat röviden 'átlós' módszernek nevezzük. Bármely más módszer, amelynek során az (m,n) értékeket rendre lefedjük szintén elfogadható.

6.7. Példa. (IMO 1972). Igazolja, hogy (2m)!(2n)! osztható m!n!(m+n)!-el , bármely m és n természetes számra.

Megoldás. Igazolni fogjuk, hogy a C(m, n) = (2m)!(2n)!/(m!n!(m+n)!) egész, bármely természetes m, n esetén. Természetesen a C(m, 0) = (2m)!/(m!m!) igaz (enek a bizonyítását az olvasóra bízzuk: a bizonyítás egyik útja az, hogy felismerjük, hogy ez tulajdonképpen egy binomiális együttható). Végül könnyen belátható, hogy teljesül a következő összefüggés: C(m, n) = 4C(m, n – 1) - C(m + 1, n – 1), aminek az alapján, az előző lépést felhasználva, arra lehet következtetni, hogy C(m,1) is egész bármely m esetén, majd C(m, 2)-re, C(m, 3)-ra is igaz ugyanez minden m esetén, és így tovább. □

6.14. Feladat. Igazolja indukcióval, hogy r egymást követő pozitív egész szám szorzata osztható r!-al.

6.15. Feladat. Ha (F_n) jelöli a Fibonacci sorozatot, igazolja, hogy $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ és $2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{2n+2}$. (Ötlet: Jelölje P(n) az első állítást, és Q(n) a másodikat. Az indukciós implikációsor most a következő lehet: $P(1) \Rightarrow Q(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow Q(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow \ldots$).

e) Oda-vissza úton: Ebben a változatban az indukciót két szakaszban végezzük. Az első szakaszban egy előre rögzített $1 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ sorozatnak megfelelő $P(1) \Rightarrow P(n_1) \Rightarrow P(n_2) \Rightarrow P(n_3) \Rightarrow \ldots$ implikáció lépéseket végezzük el, majd a visszavezető úton, a $P(k) \Rightarrow P(k-1)$ implikációkat ellenőrizzük. Nyilván a „visszafele” út során az „odafele” úton nem érintett számokra is kiegészíti a bizonyítást, ami ezáltal teljessé válik. Legyen erre egy példa az ún. számtani-mértani közép egyenlőtlenség. (Ennek az igazolására az „odafele” úton az $1 < 2 < 2^2 < 2^3 < \ldots$ sorozat elemeit használjuk.)

6.8. Példa Igazolja, hogy bármely (a_n) pozitív számsorozat elemeire:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

Megoldás. Az n = 1 eset nyilván igaz. Tegyük fel most, hogy P(k) igaz bármely pozitív tagú (a_n) sorozat esetén, ekkor a P(2k) a következőképpen igazolható: Alkalmazzuk P(k)-t az $((a_{2n-1} + a_{2n})/2\ )$ sorozatra:

$$\left(\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + ... + \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}}{k}\right)^k \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \cdot ... \cdot \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}$$

$$\geq \sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4} \cdot ... \cdot \sqrt{a_{2k-1} a_{2k}}$$

és ez utóbbi nyilván P(2k)-t jelenti, vagyis

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2k}}{2k}\right)^{2k} \geq a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_{2k}.$$

Tehát most már igazoltuk a P(1), P(2), P(2^2), P(2^3), … eseteket.

Visszafele, tegyük fel, hogy P(k) igaz és mutassuk ki, hogy P(k-1) is az. Ennek érdekében alkalmazzuk most P(k)-t a következő k számra: $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ és $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})/(k-1)$, ekkor

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}}{k-1}}{k}\right)^k \geq a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_{k-1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}}{k-1}$$

amiből a megfelelő számítások után éppen P(k-1)-et kapjuk. □

6.16. Feladat. A $\sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_{2k}} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdot ... \cdot a_{2k}}}$ egyenlőséget felhasználva, adjunk egy másik bizonyítást is a P(k) ⇒ P(2k) implikációra a 6.8. Példában.

6.17. Feladat. (Jensen egyenlőtlenség). Ha $f : I \to \mathbf{R}$, ahol $I \subseteq \mathbf{R}$ egy valós intervallum, egy konkáv függvény, akkor $f\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right) \geq \frac{f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n)}{n}$ az I intervallum bármilyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemire. A konvex függvényekre az egyenlőtelenség ellenkezője igaz. (Tudvalévő, hogy a konkáv függvényekre az $f\left(\frac{x + y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2}$ és a konvex függvényekre az ellentétes egyenlőtlenség teljesül).

f) Élesítés: A következőkben egy különleges módszert, és annak indoklását láthatjuk.

6.9. Példa. Igazolja, hogy bármely n ≥ 2 esetén $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\le\frac{3}{4}$.

Megoldás. Mivel az indukciós lépés itt nem alkalmazható módosítjuk az állítást, és helyette egy *élesebb* (erősebb) P(n) állítást fogalmazunk meg:

P(n): $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\le\frac{3}{4}-\frac{1}{n}$.

Az n = 2 azonnal belátható, és az indukciós lépések is lehetővé válnak, a következők szerint:
$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\le\frac{3}{4}-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\le\frac{3}{4}-\frac{1}{k+1}$, és ez teljessé teszi a bizonyítást. □

Ennek a módszernek az a különlegessége, hogy nem magát az állítást sikerült igazolni, hanem egy élesebb, (erősebb) állítást! Már maga *az indukció feltétele is erősebb volt* az eredetinél, tehát nem meglepő, hogy a következtetés is egy erősebb állítás. Eredeti formájában az állítás túl gyenge ahhoz, hogy a bizonyítást indukcióval elvégezhessük.

6.18. Feladat. Igazolja a következő egyenlőtlenséget: $\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot...\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}<\frac{1}{3n}$.

6.19. Feladat. Igazolja a következő egyenlőtlenséget: $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2$.

6.20. Feladat. Igazolja a következő egyenlőtlenséget: $(1+\frac{1}{2^3})(1+\frac{1}{3^3})\cdot...\cdot(1+\frac{1}{n^3})\le 3$.

A élesítés módszerét eddig a bizonyítás érdekében alkalmaztuk. Más alkalmazás is lehet, amint azt a következő példa is szemlélteti.

6.10. Példa. Igazolja, hogy bármely n esetén az n!-nak n különböző osztója van, amelyeknek az összege n!

Megoldás. Mielőtt kijelentenénk magát az élesebb állítást, tegyünk egy kísérletet az adott állítás indukcióval történő bizonyítására. Az n=1 eset nyilván igaz. Tegyük fel most, hogy van k!-nak van k olyan különböző d_1, d_2, …, d_k osztója, amelyeknek az összege k!. Vegyük ekkor a $(k + 1)d_1$, $(k + 1)d_2$, … , $(k + 1)d_k$ különböző számokat. Ezek valóban a (k+1)! osztói és összegük valóban a keresett (k + 1)! , de csak k darab van belőlük, és a mi feltételünk szerint k+1 ilyen osztóra lenne szükségünk. Ha most a $(k + 1)d_1$ osztó helyett a kd_1 és d_1 számokat vesszük, akkor k+1 számunk lesz, de lehet, hogy a kd_1 nem osztója (k + 1)! –nak. Ez elkerülhető lenne, ha $d_1 = 1$ lenne, de vajon ezt megtehetjük-e? Ha magát az állítást helyettesítjük a következő általánosabb állítással (élesítés): „bármely n esetén létezik n!-nak n olyan olyan különböző osztója, amelyeknek az összege n! és az egyik osztó 1” akkor ez már könnyen igazolható, bizzuk ezt az olvasóra. □

7. Fejezet. További esetek

A fejezet elején az indukció, mint bizonyítási módszer hatékonyságáról beszéltünk. A következő példákban még világosabbá tesszük a módszer változatos alkalmazhatóságát. A beutatott példákban az indukció áttételesen alkalmazható

Mielőtt az első példát megismernénk, idézzük fel, hogy az eddigi feladatokban az n (változó) szám szerepe a feladat feltételei alapján eléggé világos volt. A következő példákban mi kell megválasszuk a változó szerepét betöltő számot, és ez a kényes kérdés megnehezítheti a munkánkat.

7.1. Példa. Igazolja, hogy nemnegatív számok bármely nemüres $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ halmaza esetén az of $X = \dfrac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!}{a_1!a_2!\ldots a_n!}$ kifejezés egész szám.

Megoldás. Az indukciót most nem az n szerint, hanem inkább az $N = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ szerint kell végezni. Ha $N = 1$, akkor (az általánosság megtartása mellett) vehetjük $a_1 = 1$, $a_2 = \ldots = a_n = 0$, és az eredmény azonnali. Tegyük fel, hogy $k \geq 1$ esetén, X egy egész miközben $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$. Most ugyanezt igazoljuk n nemnegatív egészre, amelyeknek összege $k + 1$. Megjegyezzük, hogy feltehető $a_j \geq 1$ for all $1 \leq j \leq n$ (és ha valamely $a_j = 0$, mivel az X nem változik, tehát törölhető).

Legyen tehát $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k + 1$. Alkalmazva az indukció feltételét az $a_1 - 1, a_2, \ldots, a_n$, azt írhatjuk fel, hogy:

$$\frac{a_1X}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{(a_1 - 1 + a_2 + \ldots + a_n)!}{(a_1 - 1)!a_2!\ldots a_n!}$$

egész. Hasonlóan az $a_2X/(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, … , $a_nX/(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ számok mind egészek, tehát az összegük is, tehát:

$$X = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_jX}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}. \ \square$$

7.1. Feladat. Adjunk eg másik bizonyítást a 7.1. Példára, felhasználva a következő azonosságot: $\dfrac{(a + b + \ldots + c)!}{a!b!\ldots c!} = \dfrac{((a + b) + \ldots + c)!}{(a + b)!\ldots c!} \cdot \dfrac{(a + b)!}{a!b!}$.

A következő két példában az indukciós feltételt egészen másképp alkalmazzuk.

7.2. Példa. Legyen A az n elememű $\{1, 2, 3, \ldots, 2n - 1\}$ halmaz tetszőleges része. Ahol with $n \in \mathbf{N}$. Igazolja, hogy A tartalmaz két olyan x és y elemet (nem feltétlenül különbözőeket) amelyekre $x + y = 2n$.

Megoldás. Az $n = 1$ eset nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy a következtetés igaz $n = k$-ra, és vegyük az $\{1, 2, 3, \ldots, 2k + 1\}$ halmaz egy $k + 1$ elemű A része. Ki kell mutatnunk, hogy van A-ban két olyan x és y, amelyre $x + y = 2(k + 1)$. Ha az 1 és $2k + 1$ egyaránt az A-ban van, akkor kész vagyunk, tehát feltehetjük, hogy a két adott elem közül legalább az egyik hiányzik. Vegyük ki az A-ból a másikat is, ha egyik ilyen elem benne van, ekkor egy legfennebb k elemű $A' \subseteq \{2, 3, \ldots, 2k\}$ részhalmazhoz jutunk. Most csökkentsük A' elemeit 1-el, így most az egy legfennebb k elemű része az$\{1, 2, 3, \ldots, 2k - 1\}$ halmaznak. *Alkalmazzuk az indukció feltételét erre az utóbbi halmazra.* Van tehát A-ban olyan x és y in A amelyre $(x - 1) + (y - 1) = 2k$, tehát $x + y = 2(k + 1)$. □

7.2. Feladat. (Hermite azonosság) Ha n egy pozitív egész és x egy valós szám, igazolja, hogy:

$$[x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \ldots + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx],$$

ahol [.] az „egész részt" jelöli. (Ötlet: az indukciót nem az n szerint, hanem inkább egy egyértelműen létező $k \in N$ szerint végezzük, amire $k/n \le x < (k+1)/n$).

7.3. feladat. Egy körpályán n üzemanyag töltőállomás van, és az ott tankolható üzemanyag mennyisége összességében pont elég arra, hogy egy jármű a körpályát befussa. Igazolja, hogy lehetséges úgy megválasztani az induló pontot, hogy a jármű teljesen befussa a körpályát, feltéve, hogy csak azt az üzemanyagot használja fel, amit az olyan üzemanyag töltőállomásokon tankol, ami előtt elhalad.

8. Fejezet. Nehezebb kérdések.

8.1. Feladat. Ha x olyan valós szám, amely nem egyenlő n + ½ -el, egyetlen egész n-re sem, jelölje {x} az x-hez legközelebb eső egészet (így például {e} = {π} = 3). Igazolja, hogy

$$\sum_{k=1}^{n^2+n} \{\sqrt{k}\} = 2\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

8.2. Feladat. Legyen n egy egész. Vegyük az összes olyan (a,b) egész koordinátájú pontot a síkon, amelyre $0 \le a$, $0 \le b$, $a + b \le n$. Igazolja, hogy ha ezeket a pontokat egyenesekkel fedjük, akkor legalább n + 1 ilyen egyenesre van szükségünk.

8.3. Feladat. Egy adott N természtes szám esetén, képezzünk egy másik, s(N)-el jelölt számot a következők szerint: Ha N-et a 10-es számrendszerben a következő alakban írható: $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$, akkor $s(N) = \sum a_k^2$. Igazolja, hogy ennek az eljárásnak az ismétlésével vagy az 1-et kapjuk, vagy a következő ciklikussá váló sorozatot: 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20. (Megjegyzés: Közvetlen számítással ellenőrizhető a három számjegyű számokra, majd ez lehet az indukció feltétele, ezután N szerinti indukciót végzünk el.)

8.4. Feladat. Igazolja, hogy annak a sorozatnak, amelynek a tagjaira rendre teljesül az $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ és $a_{n+3} = (1 + a_{n+1}a_{n+2})/a_n$ $(n \ge 1)$ feltétel, minden tagja egész.

8.5. Feladat. Ha m és n természetes számok, mutassuk ki, hogy úgyszintén egész szám az $\dfrac{(mn)!}{m!(n!)^m}$.

8.6. Feladat. (Chebychev egyenlőtlenség).

Adott $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge 0$ és $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n \ge 0$. Igazolja, hogy

$\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} a_k).\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} b_k) \le \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)$. Mi lesz a megfelelő egynlőtlenség, ha

$0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ és $0 \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ a kiinduló egyenlőtlenség sor?

8.7. Feladat. (Putnam 1968, átfogalmazva). Adott egy n elemű S halmaz, és legyen P az S összes részhalmazainak halmaza. Igazolja, hogy P elemeit az $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}$ sorba írhatjuk, ahol $A_1 = \emptyset$ és ebben a felsorolásban két egymást követő halmaz pontosan egy S-beli elemben különbözik.

8.8. Feladat. (Putnam 1956, átalakítva). Adott 2n pont $(n \ge 2)$ amelyet $n^2 + 1$ szakasz köt össze, igazolja, hog ezek a szakaszok legalább egy háromszöget határoznak meg.

8.9. Feladat.Legyen A egy n + 1 elemű részhalmaza az {1, 2, … , 2n} halmaznak. Igazolja indukcióval, hogy van olyan x, y az A elemi közt, amelyre x osztja y-t.

8.10. Feladat. Igazolja, hogy bármely n > 1 esetén létezik egy olyan véges A_n ponthalmaz a síkban, úgy, hogy bármely $x \in A_n$ létezik még $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az A_n–ben és mindegyik 1 egység távolságra van x-től.

8.11. Feladat. (Az IMO 1997 példái alapján). Igazolja, hogy végtelen sok olyan n érték van, amelyre létezik egy $n\times n$-es mátrix, aminek az elemei az $S = \{1, 2, ... , 2n-1\}$ halmaz elemi, és minden $k = 1, 2, ... , n$, a k . sora és k . oszlopa tartalmazzák S összes elemét.

Megoldások

2.1) Ezek egyszerű gyakorló feladatok. Mégsem árt tudni, hogy a megoldásukban felhasználunk bizonyos, ismert képleteket, mint a j) megoldásában a sin(2y) = 2sinycosy, k) megoldásakor a $\sin\theta - \sin\phi = 2\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$, ahol $\theta = (2n + 2)x$ és $\varphi = 2nx$. Az l) pontban az indukciós lépésnél szükség van a $\sqrt{2+2\cos\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ képletre, ami a következő, barátságosabb alakban írható: $\cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$.

2.2) Az indukció során használjuk az $a_{k+1} + 1 = 2a_k + 2 = 2(a_k + 1) = 2^k(a_1 + 1)$ felírást. A második fele egyszerű gyakorlatnak számít.

2.3) Használja az: $x_{n+1}y_n - x_ny_{n+1} = (a_{n+1} x_n + x_{n-1}) y_n - x_n(a_{n+1} y_n + y_{n-1}) = -(x_ny_{n-1} - x_{n-1}y_n)$.

2.4) Használja az: $(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2$.

2.5) Ha $P(k) = 2k^5/5 + k^4/2 - 2k^3/3 - 7k/30$ akkor, kifejtve, $P(k+1) = P(k) +$ egész.

2.6) Használja az: $x^{n+1} - y^{n+1} = x(x^n - y^n) + y^n(x - y)$.

2.7) Könnyen belátható, hogy egy k-oldalú sokszög esetén egy újabb oldal beiktatása az átlók számát $k - 1$-el növeli és $\frac{1}{2} k(k - 3) + k - 1 = \frac{1}{2} (k + 1)(k - 2)$.

2.8) Ennek a bizonyítása a tankönyvekben is megtalálható.

2.9) a) Használja az: $(2+\sqrt{3})^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = (2a_n + 3b_n) + (a_n + 2b_n)\sqrt{3}$ és így $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ és $b_{n+1} = a_n + 2b_n$. Könnyen bizonyítható, hogy $a_{n+1}^2 - 3b_{n+1}^2 = 1$. b) A binomiális tétel alapján könnyen belátható, hogy $(2+\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$. Végül: $(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n = (4-3)^n = 1$.

2.10) Használja a $2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1)$. Megjegyzendő, hogy $2^{2^n} - 1$ és $2^{2^n} + 1$ számoknak nincs közös prímtényező osztójuk, mindkét szám páratlan és különbségük 2.

2.11) Az n = 1 eset világos. Ha felhasználjuk az $F_k - 2 = (a - 1)F_0F_1\ldots F_{k-1}$ feltételt, akkor felírható $F_{k+1} - 2 = a^{2^{k+1}} - 1 = (a^{2^k} - 1)(a^{2^k} + 1) = (F_k - 2)F_k = (a - 1)F_0F_1\ldots F_{k-1}F_k$.

2.12) 7! = 5040 > 2187 = 3^7. If k! > 3^k (ahol k ≥ 7) és végül (k+1)! = (k+1)(k!) > (k+1).3^k ≥ 8.3^k > 3^{k+1}.

2.13) Az $a_1^2 > a_0a_2 = a_2$ feltételből következik az első egyenlőtlenség. Feltéve, hogy $a_{k-1}^{1/(k-1)} > a_k^{1/k}$ azt kapjuk, hogy $a_k^2 > a_{k-1}a_{k+1} > (a_k)^{(k-1)/k}a_{k+1}$, ahonnan már könnyen belátható a végeredmény.

2.14) Az n = 1 eset éppen Ramanujan eredménye. Az indukció feltétele legyen:
$\sqrt{1+k\sqrt{1+(k+1)\sqrt{1+(k+2)\sqrt{1+(k+3)\sqrt{1+\ldots}}}}} = k+1$. Most emeljék négyzetre mindkét oldalt, vonjuk ki mindkét oldaból 1-et, és osszk végik k-val. Ez pontosan a következő lépést adja.

3.1) a) $(-1)^n(1 + 2 + ... + n) = (-1)^n n(n + 1)/2$

b) (n + 1)!

c) 1 + 2 + ... + n = n(n + 1)/2

d) n/[x(x+n)]

3.2) A = 3, B = 6.

3.3) Az első lépésekben a 3, 7, 31, 211, 2311 prímszámokat kapjuk, de n = 6 esetén a szám összetett: 30031 = 59 x 509.

3.4) A következő szám, ami n = 6-nak felel meg, a 31.

3.5) Azt kapjuk, hogy $a_2 = 2^{3/2}$, $a_3 = 2^{7/4}$, $a_4 = 2^{15/8}$ stb. Kitalálható, majd indukcióval bizonyítható, hogy $a_n = 2^{(2^n-1)/2^{n-1}}$.

3.6) Könnyen ellenőrizhető, hogy $a_2 = 4$, $a_3 = 9$ stb. Az $a_n = n^2$ sejtés helyes lesz, és indukcióval igazolható. Ennek egyik, hamar célravezető, lépéseként igazolható, hogy $\sqrt{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n}\sqrt{a_n}$.

4.1) Lényegében az előző feladat, csak most: $a_{k+1} - 25a_k = -9(8k - 3)$.

4.2) Ha $a_n = 7^{2n} - 48n - 1$, az indukcióhoz felhasználható, hogy $a_{k+1} - 49a_k = 2304k$.

4.3) Ha $a_n = 3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$, az indukció lépéséhez felhasználható, hogy $a_{k+1} – 25a_k = -17.2^{2n+1}$. Egy másik lehetőség, ha belátjuk, hogy $a_{k+1} – 8a_k = 3.17.5^{2k+1}$.

4.4) Ha $a_k = k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3$, akkor $a_{k+1} – a_k = (k + 3)^3 – k^3 = 9(k^2 + 3k + 3)$.

5.1) a) $2^5 = 32 \geq 5^2$. Ha $2^k > k^2$ (ahol $k \geq 5$) akkor $2^{k+1}= 2.2^k > 2.k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 5k > k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. b) $2^{10} = 1024 > 10^3$. Ha $2^k > k^3$ (ahol $k \geq 10$) akkor $2^{k+1}= 2.2^k > 2.k^3 = k^3 + k^3 \geq k^3 + 10k^2 \geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k + 1)^3$.

5.2) Az indukciós lépéshez mutassuk ki, hogy $(k + 2)\ldots(2k + 2) > (k + 2)^{k+1}$. Ez nyilván igaz, mivel a baloldalon mind a $k + 1$ tényező $\geq (k + 2)$.

5.3) Ha $(2k)!(k + 1) > 4^k(k!)^2$ akkor $(2k + 2)!(k + 2) = (2k + 2)(2k + 1)[(2k)!(k + 1)](k + 2)/(k + 1) > (2k + 2)(2k + 1)4^k(k!)^2 (k + 2)/(k + 1) = 4^{k+1}((k + 1)!)^2 (2k + 1)(k + 2)/[2(k + 1)^2] > 4^{k+1}((k + 1)!)^2$.

5.4) Az indukcióhoz igazolni kell, hogy $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$, ami nem jelenthet gondot.

5.5) Az érveléshez az 5.1. Példában leírtak használhatók.

5.6) Az indukciós lépés bizonyítására, tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség igaz az $n = m$ esetben és (a_k) olyan tetszőleges sorozat, amelyre $0 \leq a_k \leq 1$ ha $1 \leq k \leq m$. Vegyük most az $n = m + 1$ esetet és tekintsük azt a (b_k) sorozatot, amelyre $0 \leq b_k \leq 1$ for $1 \leq k \leq m + 1$. Alkalmazzuk az indukció feltételét az következőképpen felírható (a_k) sorozatra: $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, … , $a_{m-1} = b_{m-1}$ és $a_m = b_m b_{m+1}$. ekkor $2^m(1 + b_1 b_2 \ldots b_{m-1}(b_m b_{m+1})) \geq 2(1 + b_1)(1 + b_2)\ldots(1 + b_{m-1}) (1 + b_m b_{m+1})$. A kívánt eredmény a következő észrevételből következik:

$2(1 + b_m b_{m+1}) \geq (1 + b_m)(1 + b_{m+1})$ (ami nyilván igaz, mert ekvivalens a következővel:

$(1 - b_m)(1 - b_{m+1}) \geq 0$.)

6.1) A két lépésenkénti indukció során az $1^2 – 2^2 + 3^2 – 4^2 + \ldots +(-1)^{k-1}k^2$ kifejezéshez hozzáadjuk a következő kifejezést: $(-1)^k (k + 1)^2 + (-1)^{k+1}(k + 2)^2 =$

$(-1)^{k-1} [- (k+ 1)^2 + (k + 2)^2] =(-1)^{k-1} [(k+ 1) + (k + 2)]$. Könnyen igazolható, hogy ha az adott kifejezést a jobboldalhoz adjuk, éppen a kívánt eredményt kapjuk.

6.2) Az $n = 1, 2, 3, 4$ esetek azonnal beláthatók, például az 5 nem osztója az adott kifejezésnek: $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 354$. Az induktív lépés érdekében felírjuk: $1^{k+4} + 2^{k+4} + 3^{k+4} + 4^{k+4} – (1^k + 2^k + 3^k + 4^k) = 15.2^k + 80.3^k + 255.4^k =$ (ami többszöröse 5-nek).

6.3) Felhasználható a következő egyenlőség: $2^{n+3} + 1 = 8.2^n + 1 = 7.2^n + (2^n +1)$.

6.4) Ha az $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ szám *n-es* rendelkezik az adott tulajdonsággal, akkor nyilván az $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 2a_n, 2a_n, 2a_n, 2a_n)$ szám *(n + 3)-as* is rendelkezik ugyanazzal a tulajdonsággal.

6.5) 4 lépésenkénti ugrást és az $(n + 1)^2 - (n + 2)^2 - (n + 3)^2 + (n + 4)^2 = 4$ azonosságot használjuk a bizonyítás során. Megjegyzendő, hogy a tulajdonság minden egész számra kiterjeszthető. Ha igaz N-re akkor nyilván igaz –N-re is, és $0 = 1^2 + 2^2 + 3^2 - 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2$.

6.6) Rutinfeladat, a meghatározások alapján.

6.7) Az a_1 és a_2 az eredmény belátható. Az indukciós lépéshez, tegyük fel, hogy $a_{k-1} = 9(k-1)^2 - 9(k-1) + 2$ és $a_k = 9k^2 - 9k + 2$, ennek alapján belátható, hogy $a_{k+1} = 9(k + 1)n^2 - 9(k + 1) + 2$.

6.8) Az indukciós lépés érdekében tegyük fel, hogy n = k és n = k – 1 esetén egyaránt igaz a tulajdonság. Ez után használjuk fel a következő azonosságot: $x^{k+1} + 1/x^{k+1} = (x + 1/x)(x^k + 1/x^k) - (x^{k-1} + 1/x^{k-1}) = 4(\cos a)(\cos ka) - 2\cos(k - 1)a$.

6.9) a) Iagzolható: :$a^{n+1} + b^{n+1} = (a^n + b^n)(a + b) - ab(a^{n-1} + b^{n-1}) = 6(a^n + b^n) - (a^{n-1} + b^{n-1})$. b) Az előző ismételt alkalmazásával:

$a^{n+1} + b^{n+1} = 6[6(a^{n-1} + b^{n-1}) - (a^{n-2} + b^{n-2})] - (a^{n-1} + b^{n-1}) =$ (5 többszöröse) $- (a^{n-2} + b^{n-2})$.

6.10) Vegyük észre, hogy $a_{n+1} = 6a_n - 4a_{n-1}$ (könnyen belátható, hogy az $a = 3+\sqrt{5}$ és a $b = 3-\sqrt{5}$ az $x^2 = 6x - 4$ egyenlet gyökei).

Indukcióval következik, hogy $a_{n+1} = 6.2^n.$(egész) – 4. $2^{n-1}.$(egész) = $2^{n+1}.$(egész).

6.11) Az indukciós lépés érdekében tegyük fel, hogy az eredmény igaz az n = m és minden k < n esetén. Ekkor ${}^{m+1}C_k : {}^{m+1}C_{k+1} = ({}^mC_{k-1} + {}^mC_k) : ({}^mC_k + {}^mC_{k+1})$. Ezután egyszerűsítsük a törtet ${}^mC_k$-val, és alkalmazzuk a következő összefüggést ${}^mC_{k-1} : {}^mC_k = k : [n - (k - 1)]$, ${}^mC_k : {}^mC_{k+1} = (k + 1) : (n - k)$.

6.12) Az indukciós lépéshez tegyük fel, hogy minden természetes x, amelyre $x \le a_k$ felírható a különböző $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k$ elemekkel. Ekkor bármely y, amelyre $a_k < y \le a_{k+1}$ felírható az $y = a_k + x$ alakban, ahol $1 \le x \le a_{k+1} - a_k \le a_k$ és az indukció feltételét x-re alkalmazzuk.

6.13) Az indukciós bizonyítás a következő megjegyzések alapján végezhető el: A 2n szám a kettes számrendszerben ugyanúgy írható fel, mint az n csak egy 0 kerül a végére. A 2n + 1 esetén is ugyanazok a számjegyek, mint a 2n esetén, csak az utolsó számjegy 0 helyett 1.

6.14) Egy rögzített r esetén tekintsük a P(n) = n(n + 1)(n + 2)...(n + r -1) számot, az r darab egymás utáni egész szám szorzatát. Ekkor P(n + 1) - P(n) = r x (n + 1)(n + 2)...(n + r -1) = r x (r - 1 darab egymás utáni egész szám). Más szavakkal a kijelentést csak az r - 1 utáni egész számra kell bizonyítani. Ez viszont indukcióval bizonyítható r = 1-el kezdve.

6.15) Rutinmunka a feladat szövege alapján.

6.16) A P(k) $\Rightarrow$ P(2k) lépés a következő:

$$\sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2k}} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2k}}} \le \frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2k}}}{2} \le$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{2k}}{k}\right) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k}}{2k}.$$

6.17) A bizonyítás szinte szó szerint követi a 6.8. Példában leírt P(k) $\Rightarrow$ P(2k) és ezt követően a P(k) $\Rightarrow$ P(k - 1) lépéseket, csupán a kézenfekvő változtatásokat kell elvégezni azon.

6.18) Ha az induktív lépésben a szokásos útat követnénk, akkor a következő *hamis* egyenlőtlenségre jutnánk: $\frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2} < \frac{3k}{3k+3}$. A feladat megoldásához az $\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} < \frac{1}{3n+1}$, az eredetinél erősebb egyenlőtlenség bizonyítását végezzük el! Ennek a bizonyítása során most már a helyes egyenlőtlenséghez jutunk: $\frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2} < \frac{3k+1}{3k+4}$.

6.19) Az adott egyenlőtlenséget az erősebb $\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$ egyenlőtlenséggel helyettesítjük, amit könnyű bizonyítani.

6.20) Az adott egyenlőtlenséget az annál erősebb $(1+\frac{1}{2^3})(1+\frac{1}{3^3}) \cdot \ldots \cdot (1+\frac{1}{n^3}) \le 3 - \frac{1}{n}$ egyenlőtlenséggel helyettesítjük, amit könnyű bizonyítani.

7.1) Az n szerinti indukciós feltételt felhasználva igazolhatjuk, hogy a jobb oldal egész számok szorzata.

7.2) Ha 0 ≤ x < 1/n az eredmény azonnal belátható. Tegyük fel, hogy az egyenlőség igaz bármely x esetén, amelyre k/n ≤ x < (k+1)/n és legyen y egy tetszőleges szám amelyre (k+1)/n ≤ y < (k+2)/n. Be kell látnunk az egyenlőséget y esetén is. Ennek érdekében tegyük fel, hogy x = y – 1/n. Így megkapjuk a kívánt eredményt, kivéve a végpontokra, de ezekre is kiterjeszthető, mivel [a + 1] = [a] + 1. Negatív x esetén hasonló a bizonyítás.

7.3) Az indukció érdekében a következő gondolatmenetet követjük: Ha k+1 töltőállomás, akkor (az eredeti feltétel alapján) nyilvánvaló, hogy van egy, például A-nak jelölt töltőállomás, amelyen a tankolt üzemanyag a jármű közlekedését lehetővé teszi az óramutató járásának megfelelő irány szerinti, következő töltőállomásig. Ha átszállítjuk az A töltőállomás üzemanyag készletét a következő töltőállomásra, akkor k töltőállomásunk lesz, és így az indukció feltétele alapján, a körpálya befejezhető. Tegyük fel, hogy ez a teljes pálya a B pontban kezdődik, és óramutató járásával megegyező irányban történik. Az is világos, hogy most már visszvihetjuk az üzemanyagot az A töltőállomásra, és B-ből indulva, az óramutató járásával megegyező irányban történik, és az üzemanyagot az A-ból akkor szállítjuk el, amikor áthaladunk a töltőállomás előtt.

8.1) Az indukciós bizonyításhoz észrevehető, hogy ha $n^2 + n < k \le (n + 1)^2 + (n + 1)$ akkor $n^2 + n + ¼ < k < (n + 1)^2 + (n + 1) + ¼$ (az első egyenlőtlenség azért teljesül, mert k egy $n^2 + n$ *egész* számnál nagyobb *egész* szám). Tehát $(n + ½)^2 < k < (n + 1 + ½)^2$ és így $\{\sqrt{k}\} = n + 1$, ahonnan következik, hogy az új tagok az összeget a következőképpen növelik: $\sum_{k=n^2+n+1}^{(n+1)^2+(n+1)} \{\sqrt{k}\} = (n+1)[(n+1)^2+(n+1)-(n^2+n)] = 2(n+1)^2$, vagyis amit bizonyítani kellett.

8.2) Az n = 1 eset világos. Tegyük fel, hogy n = k esetén legalább k + 1 egyenessel fedhető le a pontok hálózata. Ekkor az n = k + 1 esetén vagy a) ha az egyenesek egyike x + y = k + 1, akkor a feltétel szerint legalább k + 1 egyenessel lehet lefedni a maradék pontokat, összesen: k + 2. vagy b) Ha pedig az x + y = k + 1 egyenest nem vettük be a lefedésbem, akkor k + 2 hálózat- pont lefedéséhez legalább k + 2 további egyenesre van szükség.

8.3) Először hadd jegyezzük meg, hogy ha N ≥ 999 akkor N – 1 ≥ s(N) mivel N – s(N) = $\sum_{k=1}^{n} a_k(10^k - a_k) + a_0(1-a_0)$ ≥ $1.(10^2 – 9) + 9.(1 – 9) > 0$. Tegyük fel, hogy s ismételt alkalmazásával minden olyan k esetén, amire k ≤ n (where n ≥ 999) vagy az 1-es-hez jutunk, vagy az említett ciklushoz. Ekkor az n+1 esetén n ≥ s(n + 1)

8.4) A sorozat néhány kezdő tagja következő: 1, 1, 1, 2, 3, 7, 11, 26, 41, ... Gyanítható, hogy a következő rekkurencia reláció is célravezető. $a_{n+2} = 4a_n - a_{n-2}$ (n ≥ 1). Ezt a következő úton bizonyíthatjuk: $a_{n+3} = (1 + a_{n+1}a_{n+2})/a_n =$

$[1 + a_{n+1}(4a_n - a_{n-2})]/a_n = 4 a_{n+1} + (1 - a_{n+1}a_{n-2})/ a_n = 4 a_{n+1} + [1 - (1 + a_na_{n-1})]/ a_n =$

$4 a_{n+1} - a_{n-1}$. Az a tény, hogy (a_n) sorozat csak egész számokat tartalmaz, az új rekurrencia relációból következik.

8.5) Tekintsük az m szerinti indukciót. Az indukciós lépés: $a_m = \frac{(mn)!}{m!(n!)^m}$, ahol, rögzített n esetén, azt kapjuk, hogy

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{(mn+1)(mn+2)...(mn)...(mn+n)}{(m+1)n!} = \frac{(mn+1)(mn+2)...(mn)...(mn+n-1)}{(n-1)!}.$$

Jegyezzük meg, hogy a számláló első része n-1 egymást követő egész tényező szorzata, tehát a nevezőnek egy többszöröse (ez sokféleképpen igazolható, még akár indukcióval is).

8.6) Az n = m ről n = m + 1-re történő indukciós lépés a következőképpen látható be:

$a_{m+1}(b_1 + b_2 + ... + b_m) + b_{m+1}(a_1 + a_2 + ... + a_m)$

$$\le (a_1b_1 + a_2 b_2 + ... + a_mb_m) + (m+1)\, a_{m+1}\, a_{m+1} .$$

Ez a k szerinti összegzésen alapszik, mert 1-től m-ig a következő egyszerű egyenlőtlenségek teljesülnek:

$$a_{m+1}\, b_k + a_k\, b_{m+1} \le a_{m+1}\, b_{m+1} + a_k\, b_k \quad (1 \le k \le m).$$

Ha az (a_n), (b_n) növekvő sorozatok, akkor a bizonyítás a Chebychev egyenlőtlenség fordítottján alapszik. A bizonyítás lépései az előzőhöz hasonlóak, csupán az "≤" jelet kell mindenütt felcserélni az ellenkezőjére.

8.7) Legyen $S_n = \{x_1, x_2, ... , x_n\}$ ($n \in \mathbf{N}$). Az S_1 részhalmazainak egy megfelelő elrendezése a következő: $\emptyset$, $\{x_1\}$, $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2\}$. Az indukciós lépés bizonyítására, tegyük fel, hogy az S_n részhalmazai a jelzett módon vannak felsorolva, és jelölésük: $\emptyset = A_1 , A_2 , ... , A_{2^n}$. Az S_{n+1} halmaz 2^{n+1} részhalmazára a következő jelölés alkalmazható:

$$\emptyset = A_1 , A_2 , ... , A_{2^n} , \{x_{n+1}\}\cup A_{2^n} , \{x_{n+1}\}\cup A_{2^n-1} , \{x_{n+1}\}\cup A_{2^n-2} , ... , \{x_{n+1}\}\cup A_1 .$$

8.8) Az indukciós lépésben, a 2n + 2 pont esetén, válsszuk bármely kettőt, amelyeket szakasz köt össze. Ha van egy harmadik pont is amit ezzel a kettővel szakasz köt össze, a bizonyítás véget ért. Ellenkező esetben a 2n pontot ezekkel legfeljebb 2n szakasz köti össze (mivel bármely más pont ezek közül legfennebb az egyikkel lehet összekötve). Tehát a maradék 2n pontot, legalább $(n + 1)^2 - 2n = n^2 + 1$ szakasz köti össze. Az eredmény tehát a feltételünkből következik.

8.9) Az indukciós lépés bizonyítására, tegyük fel, hogy a következtetés igaz az if n = k esetén. Vegyük most az A-nak az {1, 2, … , 2k + 1, 2k + 2} összesen k + 2 elemet tralmazó részhalmazát. Ha $2k + 2 \notin A$ akkor az A-nak (legalább) k + 1 eleme az {1, 2, … , 2k} halmazban van, tehát az indukciós feltétel alapján igaz a következtetés. Ha $2k + 2 \in A$ akkor vagy $k + 1 \in A$ vagy $k + 1 \notin A$. Az első esetben ismét kész a bizonyítás, tehát tegyük fel, hogy a második teljesül. Vegyük az a B halmazt, amelynek elemi az A elemeit tartalmazzák, de úgy, hoyg 2k + 2 helyett k + 1-et veszünk. Meg kell jegyezni, hogy B-nek (legalább) k + 1 eleme van az {1, 2, … , 2k} halmazban, mivel k + 2 eleme a {1, 2, … , 2k + 1} halmazban van. Az indukció feltétele alapján létezik olyan x, y a B halmazban, amleyre $x \mid y$. Ha $x \ne k + 1 \ne y$, akkor kész vagyunk. Különben ha = k + 1 (ekkor nem lehet $\ge y \ge 2x = 2k + 2$, mivel $2 \notin B$). De ekkor $x \mid 2y$.

8.10) Az n = 2 esetben bármely két, egység távolságra eső pont megfelel a feltételnek. Az n = k esetén adva van egy véges A_k halmaz, ami megfelel az adott feltételnek. Legyen $\vec{u}$ a síknak egy olyan egységvektora, amely az A_k pontait összekötő, véges számú vektortól különbözik. Az A_{k+1} ponthalmaz úgy adható meg, hogy az A_k pontjait egyesítjuk ugyanezeknek a pontoknak az $\vec{u}$ vektorral párhuzamosan eltolt pontjaival. Világos, hogy az A_{k+1} minden pontja 1 távolságra van az A_{k+1} ponthalmaz k+1 pontjától (k az A_k tulajdonságából következik és egy újabb pontot az $\vec{u}$-val való eltolással kaptunk).

8.11) Az n = 2 esetben egy ilyan mátrix nyilván felírható, csupa 1-es elemmel a főátlón. Ha most az adott tulajdonsággal felírható egy (a_{ij}) mátrix az n = k esetén, azzal a kiegészítő tulajdonsággal, hogy a főátlón csupa 1-es elemet tartalmaz, akkor a következőképpen írható fel fel a megfelelő (b_{ij}), 2kx2k méretű mátrix: Az $0 \leq i, j \leq n$, esetekben a) $b_{i,j} = a_{i,j}$, b) $b_{i+n,j+n} = a_{i,j}$; c) $b_{i,j+n} = a_{i,j} + 2n$ és végül, d) $b_{i+n,i} = 2n$ és $b_{i+n,j} = a_{i,j} + 2n$ ahol i különbözik j-től.

Könnyen igazolható, hogy (b_{ij}) rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal (1-esek a főátlón). Megjegyzendő, hogy az adott eljárással $2^m \times 2^m$ méretű mátrixokat kapunk bármely m esetén.