NOTA ELEVULUI

Proprietăţi ale punctului lui Nagel stabilite cu ajutorul numerelor complexe

Constantin ANTON[1]

Vom prezenta câteva proprietăţi ale punctului şi dreptei lui Nagel folosind ca instrument de lucru numerele complexe. O prezentare sintetică a acestor proprietăţi se poate găsi în [**1**]. Utilizarea numerelor complexe face ca demonstraţiile date să fie foarte simple.

Fie ABC un triunghi oarecare. Notăm cu A' mijlocul laturii (BC) şi cu D, D' punctele de contact ale acesteia cu cercurile înscris şi A-exînscris triunghiului dat. Pe laturile (CA) şi (AB) considerăm punctele B', E, E' şi respectiv C', F, F' cu semnificaţii analoage. Sunt cunoscute (sau se deduc uşor) următoarele relaţii:

$$BD' = p-c, D'C = p-b;\ CE' = p-a, E'A = p-c;\ AF' = p-b, F'B = p-a. \quad (1)$$

Convenim ca afixul unui punct X oarecare să fie notat cu z_X.

Propoziţia 1. *Dreptele AD', BE', CF' sunt concurente într-un punct N cu afixul dat de*

$$z_N = \frac{1}{p}\left[(p-a)\, z_A + (p-b)\, z_B + (p-c)\, z_C\right]. \quad (2)$$

Demonstraţie. Ţinând seama de (1), avem $k = \dfrac{BD'}{D'C} = \dfrac{p-c}{p-b}$, deci $z_{D'} = \dfrac{z_B + kz_C}{1+k} = \dfrac{1}{a}\left[(p-b)\, z_B + (p-c)\, z_C\right]$; se obţin formule similare pentru afixele punctelor E' şi F'. Fie V un punct pe segmentul (AD') determinat de raportul $v = \dfrac{AV}{VD'}$. Avem

$$z_V = \frac{z_A + vz_{D'}}{1+v} = \frac{1}{1+v}\left[\frac{1}{p-a}\,(p-a)\, z_A + \frac{v}{a}\,(p-b)\, z_B + \frac{v}{a}\,(p-c)\, z_C\right].$$

Vom obţine o formă simetrică pentru paranteza pătrată alegând v astfel încât $\dfrac{1}{p-a} = \dfrac{v}{a}$, adică $v = \dfrac{a}{p-a}$. Atunci, punctul de pe AD' corespunzător acestei valori a lui v, punct pe care-l notăm cu N, va avea afixul $z_N = \dfrac{1}{p}\left[(p-a)z_A + (p-b)z_B + (p-c)z_C\right]$. Simetria acestei relaţii face evident faptul că punctul N este situat şi pe dreptele BE' şi CF'. Demonstraţia este completă.

Punctul N pus în evidenţă de Propoziţia 1 se numeşte *punctul lui Nagel.* Proprietăţi remarcabile ale acestuia sunt date în propoziţiile următoare.

Propoziţia 2. *Punctul lui Nagel are proprietăţile:*

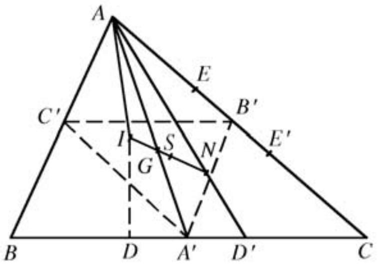
$$a)\ G \in (IN) \text{ şi } NG = 2GI, \qquad b)\ NH \| OI \text{ şi } NH = 2OI.$$

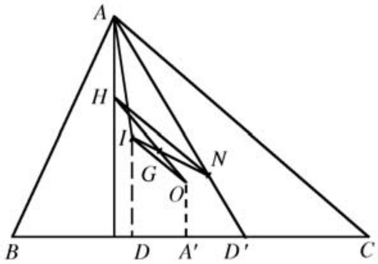
[1] Elev, clasa a X-a, Colegiul Naţional "C. Negruzzi", Iaşi

Demonstraţie. *a*) Pentru afixele punctelor G şi I avem

$$z_G = \frac{1}{3}\left(z_A + z_B + z_C\right), \; z_I = \frac{1}{2p}\left(az_A + bz_B + cz_C\right) \tag{3}$$

(acestea pot fi deduse aşa cum s-a procedat pentru z_N în Propoziţia 1).





Datorită relaţiilor (2) şi (3), vom avea:

$$\frac{z_G - z_I}{z_N - z_G} = \frac{\frac{1}{3}\left(z_A + z_B + z_C\right) - \frac{1}{2p}\left(az_A + bz_B + cz_C\right)}{\frac{1}{p}\left[\left(p-a\right)z_A + \left(p-b\right)z_B + \left(p-c\right)z_C\right] - \frac{1}{3}\left(z_A + z_B + z_C\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2p\left(z_A + z_B + z_C\right) - 3\left(az_A + bz_B + cz_C\right)}{3\left[\left(p-a\right)z_A + \left(p-b\right)z_B + \left(p-c\right)z_C\right] - p\left(z_A + z_B + z_C\right)} = \frac{1}{2},$$

deci $\dfrac{z_G - z_I}{z_N - z_G} = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că $G \in (IN)$ şi $|z_N - z_G| = 2\,|z_G - z_I|$, adică $NG = 2GI$.

b) Alegem un sistem de axe cu originea în O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC. În acest caz, ştim că $z_H = z_A + z_B + z_C$ şi vom avea:

$$\frac{z_N - z_H}{z_I - z_O} = \frac{\frac{1}{p}\left[\left(p-a\right)z_A + \left(p-b\right)z_B + \left(p-c\right)z_C\right] - \left(z_A + z_B + z_C\right)}{\frac{1}{2p}\left(az_A + bz_B + cz_C\right)} = -2 \in \mathbb{R},$$

deci $NH \| OI$ şi $|z_N - z_H| = 2\,|z_I - z_O|$, adică $NH = 2OI$.

În geometria triunghiului, dreapta IN se numeşte *dreapta lui Nagel.*

Propoziţia 3. *Cercul înscris în triunghiul median $A'B'C'$ are centrul în mijlocul S al segmentului (IN).*

Demonstraţie. Evident, avem $B'C' = \dfrac{a}{2}$, $C'A' = \dfrac{b}{2}$, $A'B' = \dfrac{c}{2}$ şi $p' = \dfrac{1}{2}p$, p' fiind semiperimetrul triunghiului median. Atunci, conform cu (3),

$$z_{I'} = \frac{1}{2p'}\left(\frac{a}{2}z_{A'} + \frac{b}{2}z_{B'} + \frac{c}{2}z_{C'}\right) = \frac{1}{2p}\left[a\frac{z_B + z_C}{2} + b\frac{z_C + z_A}{2} + c\frac{z_A + z_B}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4p}\left[\left(b+c\right)z_A + \left(c+a\right)z_B + \left(a+b\right)z_C\right].$$

Pe de altă parte,

$$z_S = \frac{1}{2}\left(z_I + z_N\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2p}\left(az_A + bz_B + cz_C\right) + \frac{1}{p}\left[\left(p-a\right)z_A + \left(p-b\right)z_B + \left(p-c\right)z_C\right]\right]$$

$$= \frac{1}{4p}\left[(2p-a)\,z_A+(2p-b)\,z_B+(2p-c)\,z_C\right]=\frac{1}{4p}\left[(b+c)\,z_A+(c+a)\,z_B+(a+b)\,z_C\right].$$

Ca urmare, $z_{I'} = z_S$ şi deci I' coincide cu S.

Punctul S, mijlocul segmentului (IN), se numeşte *punctul lui Spiecker*, iar cercul $C\left(S, \frac{r}{2}\right)$, înscris în triunghiul median, *cercul lui Spiecker*.

Propoziţia 4. *Centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC este punctul lui Nagel al triunghiului median $A'B'C'$.*

Demonstraţie. Pentru punctul lui Nagel N' al triunghiului $A'B'C'$ avem:

$$z_{N'} = \frac{1}{p'}\left[(p'-a')\,z_{A'}+(p'-b')\,z_{B'}+(p'-c')\,z_{C'}\right] =$$

$$= \frac{1}{p}\left[(p-a)\,\frac{z_B+z_C}{2}+(p-b)\,\frac{z_C+z_A}{2}+(p-c)\,\frac{z_A+z_B}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2p}\left(az_A+bz_B+cz_C\right)=z_I,$$

deci N' coincide cu I.

Propoziţia 5. *Punctul lui Nagel N al triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul complementar XYZ (unde $A \in YZ \| BC$, $B \in ZX \| CA$, $C \in$ $\in XY \| AB$).*

Demonstraţie. Aplicăm propoziţia precedentă luând triunghiul complementar în rolul triunghiului ABC. Se poate da şi o demonstraţie directă acestei propoziţii (de tipul celei din Propoziţia 4).

Bibliografie

1. **D. Brânzei, S. Aniţa, M. Chirciu** - *Geometrie, cl. a IX-a*, Colecţia Mate 2000, Editura ”Paralela 45”, Piteşti, 1998.