Curs 4
Serii de numere reale

Facultatea de Hidrotehnică
Universitatea Tehnică "Gh. Asachi"
Iaşi 2014

Teoremă (Criteriul rădăcinii)

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in [0, +\infty] .$$

(i) Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

(ii) Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstraţie

(i) Să presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l < 1$ şi fie $q \in (l, 1)$. Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, să avem

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q.$$

Deoarece

$$x_n \leq q^n, \text{ pentru orice } n \geq n_0,$$

iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in (0, 1)$, este convergentă, conform Criteriului de comparaţie rezultă că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

(ii) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l > 1$, atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, să avem

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1.$$

Cum $x_n \geq 1$, pentru orice $n \geq n_0$, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ nu converge la zero. Rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Observaţie

Dacă $l = 1$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi stabilită cu ajutorul acestui criteriu. Într-adevăr, considerând seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} n$, observăm că, pentru prima serie,

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

iar pentru a doua serie,

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

deci în ambele cazuri $l = 1$; însă, prima serie este convergentă, iar a doua serie este divergentă.

Exerciţiu

Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}. \tag{1}$$

<u>*Soluţie*</u>. Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$. Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e} < 1.$$

Conform Criteriului rădăcinii, seria (1) este convergentă.

Exerciţiu

Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2} \right)^n, \; a > 0.$$

Soluţie. Termenul general al seriei este $x_n = \left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2} \right)^n$.

Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2} \right) = a.$$

Conform Criteriului rădăcinii, dacă $a < 1$, atunci seria dată este convergentă, iar dacă $a > 1$, seria este divergentă.

Dacă $a = 1$ nu putem aplica Criteriul rădăcinii, dar, în acest caz, observăm că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n(n+1)}{n^2}} = e.$$

Termenul general al seriei neavând limita 0, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$ este divergentă.

Teoremă (Criteriul raportului)

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, cu $x_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că există

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \in [0, +\infty] .$$

(i) Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

(ii) Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Observaţie

Dacă $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, atunci nu putem decide natura seriei cu ajutorul Criteriului raportului.

Într-adevăr, considerând seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, observăm că în ambele cazuri $l = 1$; însă, prima serie este divergentă, iar a doua serie este convergentă.

Exerciţiu

Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}. \tag{2}$$

Soluţie. Termenul general al seriei este $x_n = \dfrac{2^n + 5}{3^n}$. Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{n+1} + 5)\, 3^n}{(2^n + 5)\, 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\left(1 + \dfrac{5}{2^{n+1}}\right)}{2^n \left(1 + \dfrac{5}{2^n}\right)} = \frac{2}{3} < 1.$$

Conform Criteriului raportului, seria (2) este convergentă.

Exerciţiu

Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}. \tag{3}$$

Soluţie. Termenul general al seriei este $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$. Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Conform Criteriului raportului, seria (3) este divergentă.

Teoremă (Criteriul Raabe-Duhamel)

Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, cu $x_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că există

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l \in [0, +\infty]\,.$$

(i) Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

(ii) Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Observaţie

Dacă $l = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = 1$, atunci natura seriei nu poate fi precizată cu ajutorul Criteriului Raabe-Duhamel.

Exerciţiu

Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{n^2}. \tag{4}$$

Soluţie. Termenul general al seriei este

$$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Vom încerca să aplicăm Criteriul raportului. Avem

$$x_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+2)} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

deci nu putem stabili natura seriei cu ajutorul Criteriul raportului. Vom aplica Criteriul Raabe-Duhamel. Pentru aceasta calculăm

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} - 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+6n+2}{2n^2+n} = \frac{5}{2} > 1. \end{aligned}$$

Prin urmare, seria (4) este convergentă.

Teoremă (Criteriul condensării)

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir descrescător de numere reale pozitive.
Atunci seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ au aceeaşi natură.

Corollary

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *este convergentă pentru* $\alpha > 1$ *şi divergentă pentru* $\alpha \leq 1$.

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$, se numeşte *seria armonică generalizată*.

Demonstraţie

Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

Dacă $\alpha < 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă.

Dacă $\alpha = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă.

Dacă $\alpha > 0$, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător, astfel că putem aplica Criteriul condensării.

Conform acestui criteriu, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$, care este o serie geometrică de raţie $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$.

Dacă $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, adică $\alpha > 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$ este convergentă, prin urmare şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă.

Dacă $\frac{1}{2^{\alpha-1}} \geq 1$, adică $\alpha \leq 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$ este divergentă, deci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă.

Teoremă (Criteriul lui Dirichlet)

Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$, unde $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ sunt şiruri de numere reale. Dacă:

(i) seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit şi

(ii) şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este monoton descrescător şi are limita 0,

atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

Exerciţiu

Să se arate că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \tag{5}$$

este convergentă, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Să observăm mai întâi că această serie se poate scrie sub forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot \frac{1}{n}.$$

Vom folosi Criteriul lui Dirichlet cu $x_n = \sin nx$ şi $y_n = \frac{1}{n}$. Fie $(S_n)_{n \geq 1}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Dacă $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci

$$\begin{aligned} |S_n| &= |\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \\ &\leq \frac{2}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} = \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dacă $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci

$$|S_n| = |\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx| = 0.$$

Prin urmare, şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Şirul $y_n = \frac{1}{n}$ este descrescător şi convergent la 0.

Conform Criteriului lui Dirichlet seria (5) este convergentă.

Teoremă (Criteriul lui Abel)

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$, unde $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ sunt şiruri de numere reale. Dacă:

(i) seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă şi

(ii) şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este şir monoton şi mărginit,

atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

Exerciţiu

Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cos \frac{1}{n}}{n}. \tag{6}$$

Soluţie. Scriem seria sub forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \cdot \cos \frac{1}{n}$$

şi folosim Criteriul lui Abel cu $x_n = \dfrac{\cos n}{n}$ şi $y_n = \cos \dfrac{1}{n}$.
Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n}$ este convergentă, iar şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este crescător şi mărginit. Conform Teoremei lui Abel, seria (6) este convergentă.

Definiţie

O serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se numeşte *alternantă* dacă termenii săi alternează ca semn, adică

$$x_n x_{n+1} < 0, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Orice serie alternantă poate fi scrisă în una din următoarele două forme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ sau } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \text{ cu } a_n \geq 0, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Teoremă (Criteriul lui Leibniz)

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir descrescător de numere reale pozitive, convergent la 0. Atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ este convergentă.

Demonstraţie

Utilizăm Criteriul lui Dirichlet. Fie $x_n = (-1)^n$ şi $y_n = a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Se observă uşor că $S_n = 1$ pentru n par şi $S_n = 0$ pentru n impar, deci $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Cum şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este descrescător şi convergent la 0, conform Criteriului lui Dirichlet obţinem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ este convergentă.

Exemplu

Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

este convergentă conform Criteriului lui Leibniz, deoarece şirul $a_n = \frac{1}{n}$ tinde descrescător la 0.

Exemplu

Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

este convergentă conform Criteriului lui Leibniz, deoarece şirul $a_n = \frac{1}{2^n}$ tinde descrescător la 0.

Definiţie

Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este *absolut convergentă* dacă seria modulelor, adică seria $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$, este convergentă.

Exemplu

Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

este absolut convergentă întrucât seria modulelor este

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

despre care am arătat că este o serie convergentă.

Teoremă

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

Demonstraţie

Deoarece seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă, rezultă că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă. Conform Criteriului lui Cauchy, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, şi orice $p \in \mathbb{N}^*$, avem

$$||x_{n+1}| + ... + |x_{n+p}|| < \varepsilon,$$

adică

$$|x_{n+1}| + ... + |x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_\varepsilon$ şi $p \in \mathbb{N}$. Avem

$$|x_{n+1} + ... + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + ... + |x_{n+p}| < \varepsilon,$$

prin urmare, seria $\sum\limits^{\infty} x_n$ este convergentă.

Observaţie

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. Există serii convergente care nu sunt absolut convergente.

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă, dar seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Definiţie

Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este *semiconvergentă* dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, dar seria modulelor, $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$, este divergentă.

Exerciţiu

Studiaţi absoluta convergenţă a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

<u>*Soluţie*</u>. Deoarece $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, pentru orice $n \geq 1$ şi orice $x \in \mathbb{R}$, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, conform Criteriului de comparaţie, rezultă că seria modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|$ este convergentă. Prin urmare, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ este absolut convergentă.

Exerciţiu

Studiaţi absoluta convergenţă a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Soluţie. Observăm că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ este o serie alternantă şi, conform Criteriului lui Leibniz, este convergentă. Seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha = \frac{1}{2} < 1$). Prin urmare, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ este semiconvergentă.