Funcţii primitivabile

1. Orice ***funcţie continuă*** $f : I \to \mathbb{R}$ posedă primitive pe I (condiţia suficientă)
Observaţie : Propoziţia : „Dacă f nu este continuă, atunci f nu admite primitive“ este greşită .
Observaţie : Există ***funcţii discontinue*** care au primitive.

Exemplu. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}\ ; x \neq 0,\ x \in \mathbb{R} \\ 0 \quad ; x = 0 \end{cases}$ discontinuă în $x = 0$ are o primitivă

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin formula $F = G - H$ unde

$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $G(x) = \begin{cases} x^2 \cos x\ ; x \neq 0,\ x \in \mathbb{R} \\ 0 \quad ; x = 0 \end{cases}$ şi

$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei continue $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu

$$h(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}\ ; x \neq 0,\ x \in \mathbb{R} \\ 0 \quad ; x = 0 \end{cases} \Rightarrow H^{l}(x) = h(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}\ ; x \neq 0,\ x \in \mathbb{R} \\ 0 \quad ; x = 0 \end{cases}.$$

Avem:

$$F'(x) = G'(x) - H'(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}\ ; x \neq 0,\ x \in \mathbb{R} \\ 0 \quad ; x = 0 \end{cases} = f(x)$$

deci F este o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

2. Condiţia necesară de existenţă a primitivelor lui $f : I \to \mathbb{R}$ este ca f să posede ***proprietatea Darboux***, deoarece în acest caz f este o derivată pe I $\left(f = F^{l}\right)$.

Observaţie : Dacă f nu are ***proprietatea Darboux***, atunci f nu admite primitive
Observaţie : Dacă f are o discontinuitate de speţa I, atunci f nu are proprietatea lui Darboux.
Observaţie : Dacă f are o limită laterală infinită , atunci f nu are proprietatea lui Darboux.
Observaţie : Dacă că Im(f) nu este interval, atunci f nu are proprietatea lui Darboux
REŢINEM :

- Pentru a arăta că o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, parcurgem următorii paşi :

Studiem continuitatea funţiei f
→ f- continuă $\Rightarrow f$ are primitive pe I
→ f nu este continuă
  → f are discontinuitate de speţa I $\Rightarrow f \notin P$
  → f are o limită laterală infinită $\Rightarrow f \notin P$
  → $f \notin D \Rightarrow f \notin P$
  → se încearcă construirea unei primitive a lui f (vezi exemplu de la funcţia discontinuă)

- Pentru a arăta că o funcţie $f: I \to \mathbb{R}$ **nu** admite primitive pe $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, parcurgem următorii paşi :

  - Se arată că are discontinuităţi de speţa I
  - Se arată că are o limită laterala infinită într-un punct x_0 din I
  - Se arată că Im(f) nu este interval
  - Se arată că funcţia nu are proprietatea lui Darboux
  - Se scrie functia *f* sub forma *f=g+h* unde $g \in P$,iar $h \notin P$

unde *C* reprezintă mulțimea funcțiilor continue pe I
P reprezintă mulțimea funcțiilor primitivabile pe I
D reprezintă mulțimea funcțiilor care au proprietatea lui Darboux pe I
şi evident avem următoarele incluziuni $C \subset P \subset D$

PROBLEME

1) Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, x \le 1 \\ \ln x, \quad x > 1 \end{cases}$

a) Să se arate că funcţia f **admite primitive.**

b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f **este convexă pe** $(1, \infty)$**.**

2) Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, x < 1 \\ (x+1)\ln x, x \ge 1 \end{cases}$**. Arătaţi că funcţia** f **admite primitive pe** $\mathbb{R}$**.**

3) Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e \cdot e^x + 1, \ x \le -1 \\ 3 + x, \ x > -1 \end{cases}$**. Să se arate că funcţia** f **admite primitive pe** $\mathbb{R}$**.**

4) Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + e^x + 1, \ x \le 0 \\ \sqrt{x} + 2, \ x > 0 \end{cases}$**. Arătaţi că funcţia** f **admite primitive pe** $\mathbb{R}$**.**

5) Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 3, x < 0 \\ e^x + 2, x \ge 0 \end{cases}$**. Să se arate că funcţia** f **admite primitive pe** $\mathbb{R}$**.**

6) Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 2 \quad , x < 0 \\ 1 + \dfrac{1}{x+1} + \sqrt{x}, x \ge 0 \end{cases}$**. Arătaţi că funcţia** f **admite primitive pe** $\mathbb{R}$**.**

7) Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 \quad , x \le 0 \\ 1 + x + \sqrt{x}, x > 0 \end{cases}$**. Arătaţi că funcţia f admite primitive pe** $\mathbb{R}$**.**

8) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+7, \ x<-1 \\ 3(x^2+1), \ x\ge -1 \end{cases}$. **Arătaţi că funcţia** f **admite primitive pe** $\mathbb{R}$.

9) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \frac{x+5}{x-2}, \ x\le 1 \\ \ln x-6, \ x>1 \end{cases}$. **Arătaţi că funcţia** f **admite primitive pe** $\mathbb{R}$.

10) Să se demonstreze că funcţia: $f(x)=\begin{cases} \frac{5x^3+4x+10}{4x-1}, x\ge 1 \\ \frac{13}{3}x+2, x<1 \end{cases}$ **admite primitive pe** $(0,\infty)$

11) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+x-2, x<1 \\ (x+1)\ln x, x\ge 1 \end{cases}$.

a) **Să se arate că funcţia** f **admite primitive.**
b) **Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei** f **este convexă pe** $[1,\infty)$.

12) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e\cdot e^x, \ x\le -1 \\ 2+x, \ x>-1 \end{cases}$. **Să se arate că funcţia** f **admite primitive pe** $\mathbb{R}$.

13) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+e^x, \ x\le 0 \\ \sqrt{x}+1, \ x>0 \end{cases}$. **Arătaţi că funcţia** f **este primitivabilă pe** $\mathbb{R}$.

14) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+2, x<0 \\ e^x+1, x\ge 0 \end{cases}$. **Să se arate că funcţia** f **admite primitive pe** $\mathbb{R}$.

15) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+1 \quad , x<0 \\ \frac{1}{x+1}-\sqrt{x}, x\ge 0 \end{cases}$. **Arătaţi că funcţia** f **admite primitive pe** $\mathbb{R}$.

16) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3 \quad , x\le 0 \\ x+\sqrt{x}, x>0 \end{cases}$. **Arătaţi că funcţia f admite primitive pe** $\mathbb{R}$

17) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+5, \ x<-1 \\ 3x^2+1, \ x\ge -1 \end{cases}$. **Arătaţi că funcţia** f **admite primitive pe** $\mathbb{R}$.

18) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x-2}, \ x\le 1 \\ \ln x-2, \ x>1 \end{cases}$. **Arătaţi că funcţia** f **admite primitive pe** $\mathbb{R}$.

19) Să se demonstreze că funcţia: $f(x)=\begin{cases} \frac{5x^3+4x+11}{3x-1}, x\ge 1 \\ \frac{13}{2}x+3,5 \quad ; x<1 \end{cases}$ **admite primitive pe** $\mathbb{R}$

20) Să se demonstreze că funcţia: $f(x)=\begin{cases}1-3\sin x,\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \cos 2x-1,\ x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\end{cases}$ **admite primitive pe** $(0,\pi)$

21) Să se determine parametrii reali a **şi** b **, astfel încât funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}ax^2+b, x\in(-\infty,1)\\ 2x+1, x\in[1,2]\\ (a-1)x^2+b, x\in(2,\infty)\end{cases}$ **să admită primitive pe** $\mathbb{R}$ **.**

22) Să se determine parametrii reali a **şi** b **, astfel încât funcţia** $f:[0,3]\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}3x^2-(a-1)x+2b, x\in[0,1]\\ 3x-4, x\in(1,2)\\ 5x-2a, x\in[2,3]\end{cases}$ **să admită primitive pe** $[0,3]$**.**

23) Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ **,** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}, & x>0\\ 1 & , x=0\end{cases}$ **. Să se arate că funcţia** f **are primitive pe** $[0,\infty)$ **.**

24) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,** $f(x)=\begin{cases}xe^x,\ x\le 0\\ \sin x, x>0\end{cases}$**. Să se arate că funcţia** f **are primitive pe** $\mathbb{R}$**. Să se determine primitiva** F **a funcţiei** f **care are proprietatea** $F(0)=-1$ **.**

25) Fie a **şi** b **numere reale şi funcţia** $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,** $F(x)=\begin{cases}axe^x-x, & x\le 0\\ x\cos x+b, x>0\end{cases}$**. Să se determine** a **şi** b **astfel încât funcţia** F **să fie o primitivă a unei funcţii** f **.**

26) Fie a **şi** b **numere reale şi funcţia** $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **,** $F(x)=\begin{cases}ax+b, & x<1\\ \ln^2 x+1, x\ge 1\end{cases}$**. Să se determine** a **şi** b **astfel încât funcţia** F **să fie o primitivă a unei funcţii** f **.**

27) Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^x\sin x\ ,\ x\le 0\\ \dfrac{x}{3x+5}\ , x>0\end{cases}$ **.**

a) Să se demonstreze că funcția f **este primitivabilă pe** $\mathbb{R}$ **.**

b) Să se determine primitiva $F_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **a funcției** f **care trece prin origine.**

28) Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^x\cos x-1,\ x\le 0\\ \dfrac{x}{2x+1}\ , x>0\end{cases}$ **.**

a) Să se demonstreze că funcția f **este primitivabilă pe** $\mathbb{R}$ **.**

b) Să se determine primitiva $F_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **a funcției** f **care trece prin origine.**

29) Arătați că următoarele funcții nu admit primitive pe $\mathbb{R}$ **.**

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+[x]$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 1\\ x^2+1, & x>1\end{cases}$