MATEMATICĂ
PROGRAMA ŞCOLARĂ PENTRU CLASELE DE EXCELENȚĂ
IX

ARGUMENT

Studiul matematicii prin clasele de excelență, urmăreşte în principal crearea unui cadru organizat, în care elevii talentaţi la matematică, proveniți din diferite medii şcolare, să poată intra în contact, şi în timp relativ scurt, să formeze un grup performant. Aceşti elevi, beneficiind de o pregătire pe măsura potențialului lor intelectual, vor contribui ulterior la formarea unei elite româneşti în domeniul matematicii.

Realizarea unei programe pentru clasele de excelență, precum şi modul în care se va lucra pe această programă, constituie o noutate pentru învățământul românesc. Din acest motiv elaborarea prezentei programe trebuie înțeleasă ca o etapă necesară unui început de drum.

Un colectiv de cadre didactice din învățământul preuniversitar şi universitar din CRTCP Cluj, cu experiență în domeniul pregătirii elevilor capabili de performanțe superioare, au format o echipă care a realizat programa şi manualul care conține exerciții şi probleme extrem de utile pentru desăvârşirea pregătirii acestor elevi.

În selectarea conținuturilor programei s-a ținut cont de tendințele actuale în formularea subiectelor la concursurile şi olimpiadele şcolare, dar şi de tradițiile şcolii româneşti de matematică. Numeroasele cărți şi reviste adresate „vârfurilor ” au costituit o importantă sursă bibliografică în tratarea temelor. Temele propuse constituie o extindere firească a programei analitice obligatorii de matematică şi parcurgerea lor este necesară pentru abordarea unor probleme mai dificile. Anumite teme vor fi tratate pe percursul mai multor ani de studiu (evident cu o problematică corespunzătoare) asigurându-se astfel continuitatea şi coerența procesului de învățare. Mai trebuie precizat că la elaborarea programei echipa a avut în vedere faptul că matematica nu este un produs finit, ci un proces intelectual în care, pe suportul unor cunoştințe solide, primează inițiativa personală. Astfel, această programă oferă posibilități autentice de opțiune pentru profesori şi elevi.

Programa se adresează elevilor claselor V-IX şi a fost concepută pentru un număr de 2 ore/săptămână (în cele 30 de săptămâni ale anului şcolar în care se lucrează cu clasele sau grupele de excelență). Obiectivele cadru ale programei obligatorii de matematică au suferit câteva modificări. Obiectivul cadru „Dezvoltarea capacităților de explorare/ investigare şi de rezolvare de probleme” a fost înlocuit cu obiectivele cadru: „Dezvoltarea capacității de a emite judecăți de valoare pentru rezolvarea problemelor inventiv şi euristic-creative” şi „ Dezvoltarea capacităţii de a face conexiuni cognitive în cadrul disciplinei, la nivelul ariei curriculare şi interarii”. Raţiunea acestei schimbări o constituie tocmai specificul activităţii intelectuale matematice la nivel de performanţe superioare, prin focalizarea atenţiei dinspre câmpul larg al problemelor de matematică spre cele de tip inventiv şi euristic-creative. O atenţie sporită se dă şi capacităţii elevilor de a face conexiuni cognitive în cadrul disciplinei, a ariei curriculare şi interarii în scopul dobândirii unei imagini de ansamblu a matematicii elementare ca parte a unui sistem aflat în permanentă evoluţie şi interacţiune cu lumea înconjurătoare.

Programa este construită pe baza obiectivelor cadru ale predării-învăţării matematicii şi are următoarele componente:

- obiective de referinţă şi sugestii de activităţi de învăţare;
- conţinuturi.

OBIECTIVE CADRU:

1. **Cunoaşterea şi înţelegerea conceptelor, a terminologiei şi a procedurilor de calcul**
2. **Dezvoltarea capacităţii de a emite judecăţi de valoare pentru rezolvarea problemelor inventiv şi euristic-creative**
3. **Dezvoltarea capacităţii de a face conexiuni cognitive în cadrul disciplinei, la nivelul ariei curriculare şi interarii**
4. **Dezvoltarea capacităţii de a comunica utilizând limbajul matematic**
5. **Dezvoltarea interesului şi a motivaţiei pentru studiul şi aplicarea matematicii in contexte variate**

OBIECTIVE DE REFERINȚĂ ŞI EXEMPLE DE ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

1. Cunoaşterea şi înțelegerea conceptelor, a terminologiei şi a procedurilor de calcul

Obiective de referință	**Exemple de activități de învățare**
La sfârşitul clasei a IX-a elevul va fi capabil:	*Pe parcursul clasei a IX-a se recomandă următoarele activități:*
1.1. să recunoască operațiile cu mulțimi şi să opereze cu acestea	- exerciții de stabilire a unor identități în calculul cu mulțimi - demonstrarea principiului includerii şi excluderii
1.2. să opereze cu principii şi metode matematice	- exerciții de aplicare a principiului lui Dirichlet în algebră şi geometrie - aplicații ale principiului inducției matematice în geometria vectorială, plană şi în spațiu - demonstrarea unor inegalități utilizând semnul funcției de gradul al doilea - exerciții de aplicare a principiului includerii şi excluderii - rezolvarea unor inegalități prin metoda lui Sturm
1.3. să opereze cu ecuații şi funcții speciale	- rezolvări de ecuații diofantice - exerciții cu funcțiile speciale: parte întreagă, parte fracționară, minim, maxim
1.4. să utilizeze metode specifice de rezolvare a problemelor de geometrie	- probleme legate de rețele laticeale în plan şi spațiu - rezolvarea problemelor de geometrie utilizând metoda vectorială - probleme de concurență şi coliniaritate
1.5. să utilizeze metode geometrice în rezolvarea problemelor de algebră	- inegalități rezolvate geometric - probleme de maxim şi minim rezolvate geometric

	- ecuații funcționale rezolvate geometric - sisteme de ecuații rezolvate geometric
1.6. să utilizeze metode matematice în rezolvarea problemelor puse de alte discipline	- rezolvarea de probleme de geometrie plană şi în spațiu care îşi au originea în fizică - probleme pe tabla de şah, probleme de partiționări şi colorări

2. Dezvoltarea capacității de a emite judecăți de valoare pentru rezolvarea problemelor inventiv şi euristic - creative

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a IX-a elevul va fi capabil:*	**Exemple de activități de învățare** *Pe parcursul clasei a IX-a se recomandă următoarele activități:*
2.1. să analizeze, să elaboreze un plan de rezolvare şi să rezolve probleme atipice şi/ sau dificile din domeniile studiate	- înțelegerea problemei - elaborarea, în urma unei investigații, a unui plan de rezolvare - obținerea soluției prin aplicarea planului - verificarea rezultatului obținut şi analiza rezolvării
2.2. să formuleze situații-problemă, reciproce, generalizări pe baza problemelor atipice şi/ sau dificile din domeniile studiate	- depistarea modului în care condițiile inițiale ale problemei intervin în soluționarea acesteia prin întrebări deschise de tipul: „Ce s-ar întâmpla dacă din ipoteză am elimina condiția…?”, „Ce s-ar întâmpla dacă în ipoteză am modifica condiția … cu condiția…?”, „Ce condiții de lucru trebuie adăugate pentru ca problema să aibă soluție unică?” - formularea unor ipoteze care să conducă la reciproce, generalizări şi demonstrarea acestora

2.3. să identifice metode de lucru valabile pentru clase de probleme	- identificarea unor algoritmi de rezolvare valabili pentru clase de probleme - analizarea eficienței metodelor descoperite prin rezolvări de probleme din aceeaşi sferă cognitivă

3. ***Dezvoltarea capacității de a face conexiuni cognitive în cadrul disciplinei, la nivelul ariei curriculare şi interarii***

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a IX-a elevul va fi capabil:*	**Exemple de activități de învățare** *Pe parcursul clasei a IX-a se recomandă următoarele activități:*
3.1. să utilizeze raționamente inductive, deductive, prin analogie şi mixte în rezolvarea problemelor atipice şi/ sau dificile din domeniile studiate	- exerciții care se rezolvă făcând analogii între sisteme de elemente, inclusiv utilizând modelarea - exerciții care se rezolvă pornind de la ipoteză spre concluzie şi invers, şi prin metode combinate - extrapolarea soluțiilor unei probleme pentru rezolvarea altora din aceeaşi sferă cognitivă
3.2. să-şi însuşească o gândire reflexivă, independentă, flexibilă şi abstractă specifică matematicii	- probleme care necesită reflecții asupra justeței mai multor soluții ipotetice înainte de a acționa - discuții care conduc la diferențierea elementelor importante din enunțul problemei - exerciții dintr-un domeniu al matematicii care se rezolvă cu metodele specifice altui domeniu - modelarea matematică a unor probleme sau enunțuri matematice, din cotidian sau puse de alte discipline

4. ***Dezvoltarea capacității de a comunica utilizând limbajul matematic***

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a IX-a elevul va fi capabil:*	**Exemple de activități de învățare** *Pe parcursul clasei a IX-a se recomandă următoarele activități:*
4.1. să-şi însuşească treptat exigențele unei exprimări riguroase specifice problemelor inventiv-creative din domeniile studiate	- descrierea în scris, sau oral a încercărilor de rezolvare a problemelor - redactarea unor demonstrații sau rezolvări de probleme utilizând terminologia adecvată
4.2. să formuleze rezultate matematice noi: generalizări, reciproce şi metode de rezolvare pentru clase de probleme din domeniile studiate	- discuții pornind de la o problemă în scopul formulării de noi rezultate matematice - să redacteze noi rezultate matematice şi să le demonstreze

5. ***Dezvoltarea interesului şi a motivației pentru studiul şi aplicarea matematicii in contexte variate***

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a IX-a elevul va fi capabil:*	**Exemple de activități de învățare** *Pe parcursul clasei a IX-a se recomandă următoarele activități:*
5.1. să argumenteze importanța metodelor matematice în rezolvarea unor probleme cotidiene sau puse de alte discipline	- identificarea rolului matematicii în rezolvarea problemelor cotidiene sau puse de alte discipline prin exemple
5.1. să manifeste disponibilitate, perseverență şi gândire creativă pentru rezolvarea problemelor atipice şi/ sau dificile	- rezolvarea de probleme perseverând pe aceeaşi idee de lucru - activități în grup de rezolvare de probleme care să permită fiecărui participant să aibă un rol activ - activități care să permită exprimarea ideilor în scopul generării de ipoteze de lucru multiple şi inedite - utilizarea unor softuri educaționale pentru învățarea matematicii

CONȚINUTURI

1. **Mulțimi, funcții, ecuații**
   - Exerciții de teoria mulțimilor
   - Ecuații diofantice. Metode elementare de rezolvare
   - Funcții speciale

2. **Câteva principii de rezolvare a problemelor de matematică**
   - Principiul lui Dirichlet
   - Principiul inducției matematice în geometrie
   - Principiul trinomului în stabilirea unor inegalități
   - Principiul includerii şi excluderii

3. **Metode de rezolvare a problemelor de matematică**
   - Metoda vectorială în rezolvarea problemelor de geometrie
   - Metoda geometrică în rezolvarea problemelor de algebră
   - Metoda apropierii de extrem sau metoda variației parțiale a lui Sturm

4. **Geometrie**
   - Rețele laticeale în plan şi spațiu
   - Probleme de concurență şi coliniaritate rezolvate vectorial
   - Baricentre şi centre de greutate
   - Probleme de geometrie combinatorică

<u>CLASA a IX-a</u>

1. **Exerciții de teoria mulțimilor (Gh.Lobonț)**
    1.1. **Operații cu mulțimi. Proprietăți**

2. **Principiul lui Dirichlet (E.Jecan)**
    2.1. **Principiul lui Dirichlet în algebră**
    2.2. **Principiul lui Dirichlet în geometrie**

3. **Rețele laticeale în plan şi spațiu (E.Jecan)**
    3.1. **Noțiuni teoretice**
    3.2. **Probleme rezolvate**

4. **Ecuații diofantice. Metode elementare de rezolvare a ecuațiilor diofantice (E.Jecan)**
    4.1. **Ecuații diofantice de gradul întîi**
    4.2. **Metoda descompunerii**
    4.3. **Metoda inegalităților în rezolvarea ecuațiilor diofantice**
    4.4. **Metoda aritmeticii modulare**

5. **Inducția matematică în geometrie (E.Jecan)**

6. **Metoda vectorială în geometrie (E.Jecan)**
    6.1. **Consideratii teoretice**
    6.2. **Probleme rezolvate**

7. **Probleme de concurență şi coliniaritate rezolvate vectorial (E.Jecan)**

8. **Metoda geometrică în rezolvarea problemelor de algebră (E.Jecan)**

9. **Funcții speciale (E.Jecan)**
    9.1. **Definiții şi proprietăți ale funcțiilor speciale**
    9.2. **Aplicații ale funcțiilor speciale**
    9.3. **Probleme propuse şi soluții**
    9.4. **Ecuații funcționale**

10. **Principiul trinomului în stabilirea unor inegalități (E.Jecan)**
    10.1. **Consideratii teoretice**

11. **Principiul includerii şi excluderii (Gh. Lobonț)**

Coordonator Vasile Pop
Viorel Lupşor

1. Exerciții de teoria mulțimilor

În cadrul acestei teme vom prezenta probleme din teoria mulțimilor şi metode de rezolvare pline de imaginație care să îl stimulează pe elev. În teoria naivă a mulțimilor, ca şi în unele teorii axiomatice ale mulțimilor, ideea de mulțime este considerată ca o noțiune primară, fapt pentru care nu se dă o definiție. Vom înțelege mulțimea ca pe o colecție de obiecte, fără a avea, însă, pretenția că prin aceasta am enunțat o definiție.

1.1. Operații cu mulțimi. Proprietăți

1.1.1. Definiție: Date fiind două mulțimi, A şi B, numim *reuniunea* lor şi o notăm prin $A \cup B$, mulțimea care conține acele elemente şi numai acelea care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A sau B.

$x \in A \cup B$ dacă şi numai dacă $x \in A$ sau $x \in B$

1.1.2. Proprietăți ale reuniunii a două mulțimi:

(1) Reuniunea a două mulțimi include fiecare dintre termenii reuniunii.
(2) Dacă o mulțime include ambii termeni ai reuniunii, atunci ea include reuniunea.
(3) Reuniunea este comutativă $A \cup B = B \cup A$
(4) Reuniunea este asociativă $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(5) Reuniunea este idempotentă $A \cup A = A$
(6) Mulțimea nulă are rol de element neutru față de reuniune $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$
(7) Reuniunea este izotonă în ambele argumente $A \subset B$ şi $C \subset D$ rezultă $A \cup C \subset B \cup D$

Demonstrație:
(7) Deoarece $B \subset B \cup D$ (1) şi $A \subset B$ din ipoteză, din tranzitivitatea incluziunii rezultă că $A \subset B \cup D$. Analog se arată că $C \subset B \cup D$. Utilizăm (1) şi rezultă că $A \cup C \subset B \cup D$.

1.1.3. Propoziție: $A \subset B$ dacă şi numai dacă $A \cup B = B$

Demonstrație: "$\Leftarrow$" Din (1) rezultă că $A \subset A \cup B$. Deci presupunând $A \cup B = I$, deducem $A \subset B$.
"$\Rightarrow$" Reciproc, să presupunem $A \subset B$. Deoarece $B \subset B$, utilizăm (2), rezultă că $A \cup B \subset B$. Incluziunea contrară $B \subset A \cup B$ rezultă din (1) deci $A \cup B \subset B$.

1.1.4. Definiție: Fiind date două mulțimi A şi B, numim *intersecția* lor şi o notăm $A \cap B$ mulțimea care conține acele elemente şi numai acelea care aparțin atât lui A cât şi lui B.

$$x \in A \cap B \text{ dacă şi numai dacă } x \in A \text{ sau } x \in B$$

1.1.5. Proprietăți ale intersecției:

(1) Intersecția a două mulțimi este inclusă în fiecare dintre termenii intersecției.
(2) Dacă o mulțime este inclusă în fiecare termen al intersecției, atunci ea este inclusă în intersecție.
(3) Intersecția este comutativă $A \cap B = B \cap A$.
(4) Intersecția este asociativă $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(5) Intersecția este idempotentă $A \cap A = A$
(6) Mulțimea vidă are rol de *anulator* față de intersecție $A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$
(7) Intersecția este izotonă în ambele argumente $A \subset B$ şi $C \subset D \Rightarrow A \cap C \subset B \cap D$
(8) Intersecția este distributivă față de reuniune
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b) $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$

1.1.6. Propoziție (proprietățile de absorbție):
a) $A \cap (A \cup B) = A$
b) $A \cup (A \cap B) = A$

Demonstrație: Vom demonstra numai egalitatea a doua. Deoarece $A \cap B \subset A$ (din 1.1.5.(1)), aplicând proprietatea: $A \subset B$ dacă şi numai dacă $A \cap B = A$, rezultă $(A \cap B) \cup A = A$, din care obținem egalitatea cerută folosind comutativitatea.

1.1.7. Observație: Tot sub numele de absorbție se întâlnesc şi identitățile:

$(A \cup B) \cap A = A$	$(A \cap B) \cup A = A$
$A \cap (B \cup A) = A$	$A \cup (B \cap A) = A$
$(B \cup A) \cap A = A$	$(B \cap A) \cup A = A$

care se obțin din cele de mai sus prin comutativitate.

1.1.8. Propoziție: Reuniunea este distributivă față de intersecție:
a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
b) $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$

1.1.9. Definiție: Mulțimile A şi B se numesc *disjuncte* dacă $A \cap B = \varnothing$.

1.1.10. Definiție: Fiind date două mulțimi A şi B numim *diferența* lor şi o notăm prin $A \setminus B$ sau $A - B$ mulțimea care conține acele elemente ale lui A care nu se găsesc în B şi numai acelea.

1.1.11. Propoziție: Au loc următoarele relații:
(1) $A \setminus B \subset A$
(2) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$
(3) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B = A \setminus (B \cup C)$
(4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
(5) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
(6) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
(7) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
(8) $A \setminus \varnothing = A$, $\varnothing \setminus A = \varnothing$
(9) $A \setminus A = \varnothing$

Demonstrație:
(2) Deoarece $B \setminus A \subset B$, din proprietatea de izotonie a reuniunii rezultă că $A \cup (B \setminus A) \subset A \cup B$. Reciproc, fie $x \in A \cup B$, adică $x \in A$ sau $x \in B$. Dacă $x \in A$, atunci $x \in A \cup (B \setminus A)$. Dacă $x \notin A$, atunci $x \in B$, deci $x \in B \setminus A$ şi, prin urmare $x \in A \cup (B \setminus A)$, rezultă că $A \cup B \subset A \cup (B \setminus A)$.
(4) $x \in A \setminus (B \cup C)$ dacă şi numai dacă $x \in A$ şi $x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \in A$ şi ($x \notin B$ sau $x \notin C$) $\Leftrightarrow$ ($x \in A$ şi $x \notin B$) şi ($x \in A$ şi $x \notin C$) $\Leftrightarrow x \in A \setminus B$ şi $x \in A \setminus C$ dacă şi numai dacă $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

1.1.12. Definiție: Mulțimea $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ se numeşte *diferența simetrică* a mulțimilor A şi B.

1.1.13. Lemă: $x \in A \Delta B \Leftrightarrow$ ($x \in A$ şi $x \notin B$) sau ($x \in B$ şi $x \notin A$)

Demonstrație: Echivalența rezultă din definiție.

1.1.14. Proprietăți ale diferenței simetrice:
(1) Diferența simetrică este comutativă $A \Delta B = B \Delta A$
(2) Diferența simetrică este asociativă $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
(3) Mulțimea vidă este elementul neutru față de diferența simetrică

$$A \Delta \varnothing = \varnothing \Delta A = A$$

(4) $A \Delta A = \varnothing$

1.1.15. Propoziție: Intersecția este distributivă față de diferența simetrică:

a) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

b) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

Demonstrație: Vom demonstra relația de la a) deoarece relația de la b) rezultă din prima folosind comutativitatea. Din definiție rezultă că $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B))$. Folosind 1.1.11. (5) obținem $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = (((A \cap B) \setminus A) \cup ((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus A) \cup ((A \cap C) \setminus B))$

Deoarece $(A \cap B) \subset A$ și $(A \cap C) \subset A$, rezultă că $(A \cap B) \setminus A = \emptyset$ și $(A \cap C) \setminus A = \emptyset$, deci $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = ((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B)$.

Observăm că $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$ și rezultă

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = (A \cap (B \setminus C)) \cup (A \cap (C \setminus B))$$

Folosind distributivitatea intersecției față de reuniune, obținem

$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) = A \cap (B \Delta C)$.

1.1.16. Definiție: Dacă $B \subset T$, mulțimea $T \setminus B$ se numește *complementara* lui B față de T și se notează $C_T{}^B$.

1.1.17. Notație: În cazul particular în care mulțimea T se subînțelege, vom nota prescurtat CB în loc de $C_T{}^B$. În continuare vom lucra în $\mathcal{P}(T)$ (mulțimea părților mulțimii T) și vom adopta convenția de notație.

1.1.18. Lemă: Dacă $B \in \mathcal{P}(T)$ și $x \in T$, atunci $x \in CB$ dacă și numai dacă $x \notin B$.

Demonstrație: $x \in CB \Leftrightarrow x \in T \setminus B \Leftrightarrow x \in T$ și $x \notin B \Leftrightarrow x \notin B$.

1.1.19. Proprietățile complementarei:

(1) Au loc formulele lui Morgan:

$C(A \cup B) = CA \cap CB$

$C(A \cap B) = CA \cup CB$

(2) Complementara este antitonă: $A \subset B \Rightarrow CA \supset CB$

(3) Complementara este involutivă $CCA = A$

(4) $A \cap CA = \emptyset$ și $A \cup CA = T$

(5) $A \cap B = \emptyset$ și $A \cup B = T \Rightarrow B = CA$

Demonstrație:

(1) $C(A \cup B) = T \setminus (A \cup B) = (T \setminus A) \cap (T \setminus B) = CA \cap CB$

$C(A \cap B) = T \setminus (A \cap B) = (T \setminus A) \cup (T \setminus B) = CA \cup CB$

(2) $A \subset B \Rightarrow A = A \cap B \Rightarrow CA = C(A \cap B) = CA \cup CB \Rightarrow CA = CB$.

(5) Fie $x \in T$. Dacă $x \in B$ din $A \cap B = \emptyset$ deducem $x \notin A$. Dacă $x \notin B$, din $A \cup B = T$ deducem $x \in A$. Deci $x \in B \Leftrightarrow x \notin A$, adică $B = CA$.

1.1.20. Definiție: Se numește *produsul cartezian* al mulțimilor A și B și se notează cu $A \times B$ mulțimea tuturor perechilor ordonate (a, b), unde $a \in A$ și $b \in B$.

$A \times B = \{(a, b) \setminus a \in A$ și $b \in B\}$.

1.1.21. Proprietățile produsului cartezian:

(1) Produsul cartezian este izoton: $A \subset B$ și $C \subset D \Rightarrow A \times C \subset B \times D$.

(2) Produsul cartezian este distributiv față de reuniune:

$(A \cup \mathrm{B}) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

$C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$

(3) Produsul cartezian este distributiv față de intersecție:

$(A \cap B) \times \mathrm{C} = (A \times C) \cap (B \times C)$

$C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$

(4) Produsul cartezian este distributiv față de diferență:

$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

$C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$

(5) Produsul cartezian este distributiv față de diferența simetrică:

$(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$

$C \times (A \Delta B) = (C \times A) \Delta (C \times B)$

Demonstrație:

(2) Vom demonstra prima identitate. Deoarece $A \subset A \cup B$ și $B \subset A \cup B$ din 1.1.21. (1) deducem că $A \times \mathrm{C} \subset (A \cup B) \times C$ și $B \times C \subset (A \cup B) \times C$. Aplicăm 1.1.2.(2) și obținem $(A \times C) \cup (B \times C) \subset (A \cup B) \times C$.

Reciproc, fie $x \in (A \cup B) \times C$, adică $x = (\mathrm{a}, \mathrm{c})$ cu $a \in A \cup B$ și $c \in C$. Dar $a \in A \cup B$ este echivalent cu $a \in A$ sau $a \in B$. Dacă $a \in A$, atunci $x \in B \times C$ deci $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

(6) Demonstrăm prima egalitate:

$$(A \Delta B) \times C = \left(\left(A \setminus B\right) \cup \left(B \setminus A\right)\right) \times C = \left(\left(A \setminus B\right) \times C\right) \cup \left(\left(B \setminus A\right) \times C\right) =$$

$$\left(\left(A \times C\right) \setminus \left(B \times C\right)\right) \cup \left(\left(B \times C\right) \setminus \left(A \times C\right)\right) = \left(A \times C\right) \Delta \left(B \times C\right).$$

1.2. Probleme rezolvate (1.1)

R1.2.1.1 Fie mulţimea $M = \{a + 1, a + 2, \ldots, a + 25\}$, unde $a \in$ N. Să se determine cea mai mare valoare a lui a, astfel încât M să se poată împărţi în trei submulţimi, două câte două disjuncte, cu proprietatea că suma elementelor din fiecare submulţime este cel mult $\frac{s+3}{3}$, unde s este suma elementelor mulţimii M.

(A. Ghioca)

Soluţie: Avem $s = 25a + 325$. Dacă o astfel de împărţire este posibilă, atunci una dintre cele trei submulţimi va avea cel puţin 9 elemente. Cum suma celor mai mici 9 elemente din M este $9a + 45$, este necesar ca $9a + 45 \leq \frac{s+3}{3}$, adică $a \leq 96$. Pentru $a = 96$ se poate construi următorul exemplu: $M = X \cup Y \cup Z$, unde:
$X = \{97, 98, 99, \ldots, 105\}$, cu suma elementelor 909
$Y = \{108, 109, 110, 111, 112, 117, 120, 121\}$, cu suma elementelor 908
$Z = \{106, 107, 113, 114, 115, 116, 118, 119\}$, cu suma elementelor 908
Întrucât pentru $a = 96$ avem $\frac{s+3}{3} = 909 + \frac{1}{3}$, condiţia cerută în enunţ este îndeplinită. În concluzie, valoarea maximă a lui a este 96.

R1.2.1.2 Fie A o mulţime de numere reale care verifică:
a) $1 \in A$
b) $x \in A \Rightarrow x^2 \in A$
c) $x^2 - 4x + 4 \in A \Rightarrow x \in A$
Să se arate că $2000+\sqrt{2001} \in A$

(L. Dragomir)

Soluţie: Fie $x \in A$; din b) obţinem $x^2 \in A$, deci $\left[(x+2)^2 - 2\right]^2 \in A$, iar din c) rezultă că $(x + 2) \in A$. Din $1 \in A$ şi $(x + 2) \in A$ reiese prin inducţie că A conţine toate numerele impare pozitive.
Astfel $2001 = \left[\left(\sqrt{2001}+2\right)-2\right]^2 \in A$, deci $\sqrt{2001}+2 \in A$.
Avem $\sqrt{2001}+2 \in A$ şi $(x + 2) \in A$, prin urmare $\sqrt{2001}+2000 \in A$.

R1.2.1.3 Să se determine mulţimile nevide $A \subset \mathbf{R}^*$ cu proprietăţile:

(a) A are cel mult 5 elemente;

(b) $x \in A \Rightarrow \frac{1}{x} \in A$ şi $(1 - x) \in A$.

(M. Țena)

Soluție: Fie $x \in A$. Din ipoteză avem $\frac{1}{x}$, $1 - x \in A$; dar atunci şi $1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \in A$, $\frac{x}{x-1} \in A$, $\frac{1}{1-x} \in A$.

Aşadar dacă notăm $B = \left\{x \in A / x, \frac{1}{x}, 1 - x, \frac{x-1}{x}, \frac{x}{x-1}\right\}$ avem că $B \subset A$. Deoarece A are cel mult 5 elemente, rezultă că printre elementele lui B, cel puțin două dintre ele sunt egale. Studiind toate posibilitățile ca două elemente ale lui B să fie egale şi ținând seama că nu putem avea $0 \in A$, rezultă $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$, şi $x = -1$. Dar fiecare dintre aceste valori ale lui x generează o aceeaşi mulțime B şi anume $B = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$. Rezultă că există o singură mulțime A care verifică enunțul, şi anume $A = B = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

R1.2.1.4 Fie mulțimile:

$A = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} / x + y - 1 = 0\}$

$B = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} / x^3 + y^3 - 2x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 2y - 1 = 0\}$ Determinați:

a) $A \setminus B$

b) $B \setminus A$.

(M. Ursu)

Soluție: Fie $(x, y) \in B$, atunci perechea (x, y) verifică:

$x^3 + y^3 - 2x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy - x - y + 1) =$

$$0 \Leftrightarrow (x + y - 1)\left[\left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 + \frac{3(y-1)^2}{4}\right] = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$$

sau $(x, y) \in A \cup \{(1, 1)\}$, de unde deducem că $B = A \cup \{(1, 1)\}$, ceea ce conduce la răspunsul $A \setminus B = \varnothing$ şi $B \setminus A = \{(1, 1)\}$.

R1.2.1.5 Se dau mulțimile:

$A = \{x \setminus x = 3n - 2, n \in \mathbf{N}\}$

$B = \{x \setminus x = 1003 - 2m, m \in \mathbf{N}\}$

$C = \{x \setminus x = 6p + 1, p \in \mathbf{Z}, 0 \le p \le 166\}$.

Să se arate că $A \cap B = C$.

(N. Matei)

Soluție: Fie $x \in A \cap B$ şi să arătăm că $x \in C$. Într-adevăr, dacă $x \in A \cap B$ atunci $x \in A$ şi $x \in B$, adică există numerele naturale m şi n astfel ca $x = 3n - 2 = =1003 - 2m$, de unde rezultă $m = 502 - n - \frac{n-1}{2}$; m şi n fiind numere naturale trebuie ca $\frac{n-1}{2}$ să fie întreg: $\frac{n-1}{2} = p$. Rezultă $n = 2p + 1$, $M = 501 - 3p$; $2p + 1 \geq 1$, $501 - 3p \geq 1$, adică $0 \leq p \leq 166$, $x = 3n - 2 = 3(2p + 1) - 2 = 6p + 1$, deci $x \in C$ şi $A \cap B \subset C$.

Reciproc. Fie $x \in C$ şi să arătăm că $x \in A \cap B$. Dacă $x \in C$, atunci există p întreg, $0 \leq p \leq 166$, astfel ca $x = 6p + 1 = 3(2p + 1) - 2 = 3n - 2$, unde am notat $2p + 1 = = n$. Rezultă că $x \in A$. Avem şi $x = 6p + 1 = 1003 - 2(501 - 3p) = 1003 - 2m$, unde am notat $501 - 3p = m$ şi deci $x \in B$. Rezultă $x \in A \cap B$, deci $C \subset A \cap B$ şi prin urmare $A \cap B = C$.

R1.2.1.6 M este o submulțime a mulțimii $\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ astfel încât produsul oricăror trei elemente distincte ale lui M nu este pătrat perfect. Să se determine numărul maxim de elemente ale lui M.

(O.I.M. Bulgaria)

Soluție: Observăm că produsul celor trei elemente în fiecare dintre mulțimile $\{1, 4, 9\}$, $\{2,6,12\}$, $\{3, 5, 15\}$, $\{7, 8, 149\}$ este un pătrat perfect. De aici rezultă că nici una dintre aceste mulțimi nu este submulțime a lui M. Cum acestea sunt disjuncte, rezultă că $|M| \leq 11$. Dacă $10 \notin M$, atunci $|M| \leq 10$. Presupunem că $10 \in M$. Atunci una dintre mulțimile $\{2, 5\}$, $\{6, 15\}$, $\{1, 4, 9\}$, $\{7, 8, 14\}$ nu poate fi submulțime a lui M. Dacă $\{3, 12\} \not\subset M$ din nou avem $|M| \leq 10$. Presupunem că $\{3, 12\} \in M$. Atunci nici una dintre mulțimile $\{1\}$, $\{4\}$, $\{9\}$, $\{2, 6\}$, $\{5, 15\}$, $\{7, 8, 14\}$ nu poate fi submulțime a lui M şi avem $|M| \leq 9$. Urmează că în orice caz $|M| \leq 10$. În final este uşor de verificat că $M = \{1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14\}$ are proprietatea cerută. De aici valoarea maximă pentru $|M| \leq 10$.

2. Principiul lui Dirichlet

Matematica elementară ne oferă numeroase surse de inspirație bazate pe cunoştințe simple. Se pot realiza rezultate matematice valoroase folosind mijloace la nivelul învățământului gimnazial, ba chiar şi a celui primar. Există probleme în matematica care nu cer aproape nici o cultură specială, putând fi abordate cu mijloacele gândirii cotidiene, dar care prezintă dificultăți trecute cu eforturi cerebrale remarcabile, cu imaginație şi ingeniozitate.

Un exemplu strălucit îl constituie **Principiul cutiei** sau **Principiul lui Dirichlet**, după numele matematicianului care a adus rigoare şi exigență în analiza matematică. Faptul că acest principiu a fost introdus de către un matematician cu profund simț al fineții în raționament, ne dă de gândit asupra posibilității de modelare logico-matematică a unor fapte şi evenimente cotidiene, cu şanse de realizări neaşteptate şi pe arii largi de aplicabilitate.

Vom da în continuare câteva formulări ale principiului aplicat în algebră şi în geometrie, urmat de exemple.

2.1 Principiul lui Dirichlet în algebră

Una din formulările principiului este următoarea:

Dacă repartizăm nk+1 obiecte în k cutii, atunci în cel puțin o cutie vor fi cel puțin n+1 obiecte.

Observăm că în acest enunț este pusă în evidență existența unui număr minim de obiecte repartizate în aceeaşi cutie.

Într-o altă formulare, folosim noțiunea de partiție a unei mulțimi:

Fie *A* o mulțime nevidă, iar $A_1, A_2, ..., A_n$ o partiție a lui *A*, adică $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$, şi $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$. Dacă avem *n*+1 elemente din *A*, $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$, atunci există o submulțime A_i a partiției care să conțină cel puțin două elemente ale mulțimii $\{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}$.

2.2. Principiul lui Dirichlet în geometrie

Pentru aplicațiile geometrice dăm trei formulări ale principiului.

A. Dacă figurile $F_1, F_2, ..., F_n$ cu ariile respective $S_1, S_2, ..., S_n$ sunt incluse în figura *F* cu aria *S* şi $S_1 + S_2 + ... + S_n > ks$, atunci $k+1$ din figurile $F_1, F_2, ..., F_n$ au un punct comun.

B. Fie în plan o figura F de arie S şi n figuri F_i de arie $S_i, i=\overline{1,n}$. Dacă

$S > \sum_{i=1}^{n} S_i$ atunci cele n figuri F_i nu pot acoperi figura F_n;

Dacă cele n figuri F_i acoperă pe F, atunci $\sum_{i=1}^{n} S_i \geq S$.

Următoarea formulare a principiului lui Dirichlet are ca suport teoretic noţiunea de măsură.

C. Fie X o mulţime şi fie $P(X)$ mulţimea părţilor sale. O funcţie $m: P(X) \to [0,\infty)$ se numeşte măsură pe X dacă are proprietăţile:

1° m (Ø)=0.

2° $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Fie $A_1, A_2, ..., A_n \in P(X)$. Să notăm $I_k = \bigcup_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} \left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}\right), \overline{k=1,n}$.

2.2.1 <u>Propoziţie</u>: $\sum_{k=1}^{n} m(A_k) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k)$.

<u>Soluţie</u>: Pentru $n=2$,obţinem: $m(A_1) + m(A_2) = m(A_1 \cup A_2) + m(A_1 \cap A_2)$, deci proprietatea 2° din definiţia măsurii. Să presupunem relaţia adevărată pentru n şi să demonstrăm pentru $n+1$. Fie $I_k^{'} = \bigcup_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n+1} \left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}\right)$

Avem $I_k` = I_k \cup (A_{n+1} \cap I_{k-1})$ rezultă:

$m(I_k^{'}) = m(I_k) + m(I_{k-1} \cap A_{n+1}) - m(I_k \cap A_{n+1})$, $k = \overline{1,n}$; dând valori, avem:

$m(I_1^{'}) = m(I_1) + m(A_{n+1}) - m(A_{n+1} \cap I_1)$

....

$m(I_n^{'}) = m(I_n) + m(I_{n-1} \cap A_{n+1}) - m(I_n \cap A_{n+1})$

Adunând egalităţile obţinem: $\sum_{k=1}^{n} m(I_k^{'}) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k) + m(A_{n+1}) - m(I_n \cap A_{n+1})$

Dar $I_n \cap A_{n+1} = I_{n+1}^{'}$, deci $\sum_{k=1}^{n+1} m(I_k`) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k) + m(A_{n+1})$. Folosind ipoteza inducţiei, avem $\sum_{k=1}^{n} m(I_k') = \sum_{k=1}^{n+1} m(A_k)$.

2.2.2. <u>Corolar</u>. Dacă $I_{p+1} =$ Ø, atunci $\sum_{k=1}^{n} m(A_k) < p \cdot m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$

Soluție: Avem evident $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_{p+1} \supset \cdots \supset I_n$, deci $m(I_1) \geq m(I_2) \geq .... \geq m(I_p) \geq m(I_{p+1}) \geq ... \geq m(I_n)$. Prin urmare $I_{p+1} = \emptyset$, rezultă că $m(I_k) = 0, \forall k \geq p+1$. Folosind relația din propoziția anterioară, obținem: $\sum_{k=1}^{n} m(A_k) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k) \leq p \cdot m(I_1) = p \cdot m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$.

2.2.3. Corolar. Dacă $\sum_{k=1}^{n} m(A_k) > p \cdot m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$, există $i_1, i_2, i_3, ..., i_{p+1}$ cu $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_{p+1} \leq n$, astfel încât $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{p+1}} \neq \emptyset$.

Observații

1. Dacă X este finită se poate lua $m(A) =$ numărul elementelor mulțimii A.
2. Dacă $X = R$, , pentru $a < b$ definim $m([a,b]) = b - a$.
3. Dacă $X = R^3$, putem lua ca măsură volumul.

Prezentăm in continuare câteva aplicații la variantele amintite.

Bibliografie

- M. Ganga, Teme şi probleme de matematica,Ed tehnica, Bucureşti, 1991, pag. 95-108
- A. Ghioca, N. Teodorescu, Culegere de probleme, Ed. SSM, 1997, Bucureşti , pag 53-68
- D. Buşneag, I. Maftei, Teme pentru cercurile şi concursurile de matemetica ale elevilor, Ed. Scrisul Românesc, Craiova ,1983.
- M. Ganga, Probleme elementare de matematica, Ed. Math-press , Ploieşti, 2003, pag. 172-183
- M. Cocuz, Culegere de probleme de matematica, Ed. Academiei, 1984, pag. 125
- N. Teodorescu, A. Constantinescu, Probleme din gazeta matematica , Ed. Tehnica 1984

2.3. Probleme rezolvate (2.1)

R2.1.1. Se dă o mulțime *M* formată din *n* numere întregi. Să se arate că există o submulțime a lui *M* astfel încât suma elementelor sale să fie divizibilă cu *n*.

(Gh. Szölösy)

Soluție: Fie $M = \{ a_1, a_2, ..., a_n \}$. Considerăm sumele următoare: $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, ..., S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, în total *n* numere. Dacă unul din numere, de exemplu S_k, se divide la *n*, atunci submulțimea căutată este $\{ a_1, a_2, ..., a_n \}$. Dacă nici unul din numerele S_k, $1 \le k \le n$, nu se divide la *n*, atunci resturile lor la împărțirea prin *n*, sunt 1,2,…,(*n*-1). Cum sunt *n* numere S_k, atunci cel puțin două vor da acelaşi rest la împărțirea prin *n*. Fie S_i, S_j, $1 \le i,\ j \le n$, $i < j$, două astfel de numere. Atunci $S_j - S_i \,\vdots\, n$ şi deci submulțimea $a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_j$,este cea căutată.

R2.1.2 Să se demonstreze că pentru orice număr impar *a* există un număr natural *b*, astfel încât $2^b - 1$ este divizibil cu *a*.

Soluție: Fie numerele $2^0 - 1, 2^1 - 1, ..., 2^a - 1$, în număr de $a + 1$. Prin împărțirea acestora la *a* se vor obține *a* resturi. Conform principiului lui Dirichlet, există (cel puțin) două numere ce dau acelaşi rest la împărțirea cu *a*. Fie aceste numere $2^k - 1$ şi $2^p - 1$, cu $k < p$. Atunci diferența lor se divide prin *a*, deci $(2^p - 1) - (2^k - 1) = 2^k (2^{p-k} - 1) \,\vdots\, a$. Cum *a* este impar, rezultă $2^{m-k} - 1 \,\vdots\, a$ şi luăm $b = m - k$.

R2.1.3. Fie $2n + 1$ numere reale mai mari decât 1 şi mai mici ca 2^n . Să se arate că există trei între ele care pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

Soluție: Puterile lui 2 mai mici decât 2^n realizează o partiție a intervalului $(1, 2^n)$ în n intervale, astfel: $(1,2), [2,2^2), [2^2,2^3), ..., [2^{n-1}, 2^n)$
Conform principiului cutiei, există un interval din cele *n*, ce conține cel puțin trei din cele $2n + 1$ numere. Fie *a*,*b*,*c* aceste numere situate în $[2^k, 2^{k+1})$, $0 \le k \le n - 1$. Din $2^k \le a < 2^{k+1}, 2^k \le b < 2^{k+1}$, $2^k \le c < 2^{k+1}$, rezultă de exemplu $2^{k+1} \le a + b < 2^{k+1}$, deci $c < a + b$ şi analoagele, prin urmare *a, b, c* pot fi laturile unui triunghi.

R2.1.4. Să se arate că oricare ar fi numerele întregi *a, b, c, d*, numărul

$E = abcd(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(a^2 - d^2)(b^2 - c^2)(b^2 - d^2)(c^2 - d^2)$ este multiplu de 7.

Soluție: Considerăm mulțimile $7Z + k = \{7n + k / n \in Z\}$. Reuniunea lor este mulțimea Z, deci $Z = \bigcup_{k=0}^{6} 7Z + k$. Dacă unul din numerele *a, b, c, d* se află în mulțimea 7Z, rezultă că $E \vdots 7$. Dacă nici unul din numerele *a, b, c, d* nu este în 7Z, atunci ele se află în oricare din celelalte şase mulțimi. Grupăm aceste mulțimi astfel: $\{7Z + 1, 7Z + 6\}, \{7Z + 2, 7Z + 5\}, \{7Z + 3, 7Z + 4\}$.

În modelul nostru acestea vor fi cutiile. Avem patru numere şi trei cutii, prin urmare cel puțin două numere vor fi in aceeaşi grupă (cutie). Dacă numerele au aceeaşi forma (de exemplu $7k + 2, 7p + 2$) atunci diferența lor este divizibilă cu 7, deci $E \vdots 7$. Dacă numerele sunt de forme diferite (de exemplu $7k + 1, 7p + 6$)atunci suma lor se divide cu 7, prin urmare $E \vdots 7$.

Probleme rezolvate (2.2)

R2.3.1. Să se arate că oricare ar fi 1000 de puncte într-un disc de rază $r = 1$, există un disc de rază $r` = \frac{1}{9}$ ce acoperă cel puțin 11 puncte.

(Pop Vasile)

Soluție: Condiția ca 11 puncte să se afle intr-un disc de rază $\frac{1}{9}$ este echivalentă cu intersecția nevidă a cercurilor de rază $\frac{1}{9}$ cu centrele în punctele respective. Să arătăm deci că 11 din discurile de rază $\frac{1}{9}$ cu centrele in cele 1000 de puncte, au intersecția nevidă. Reuniunea acestor discuri este inclusă in discul de raza $r + r`$, deci $m\left(\bigcup_{i=1}^{1000} D_i\right) < \left(1 + \frac{1}{9}\right)^2 \pi$, iar $\sum_{i=1} m(D_i) = 1000\pi\left(\frac{1}{9}\right)^2$ şi avem: $\sum_{i=1}^{1000} m(D_i) > 10 \cdot m\left(\bigcup_{i=1}^{1000} D_i\right)$. Folosind corolarul 2.2.2, există 11 discuri cu intersecția nevidă.

R2.3.2. Pe suprafața unui poligon de arie 13 se așează 10 poligoane de arie 6. Să se arate că există 4 poligoane ce se intersectează după o arie mai mare ca $\frac{1}{70}$. (Pop Vasile)

<u>Soluție</u>: Avem din ipoteză $m\left(\bigcup_{i=1}^{10} P_i\right) = 13$, $\sum_{i=1}^{10} m(P_i) = 60$ și scriind relația din propoziția 2.2.1, avem:

$$60 = m(\bigcup_{i=1}^{10} P_i) + m(I_2) + m(I_3) + m(I_4) + ... + m(I_{10}) \leq 3m(\bigcup_{i=1}^{10} P_i) + 7m(I_4),$$ deci

$7m(I_4) \geq 21$, rezultă $m(I_4) \geq 3$. Dar există 210 intersecții de câte 4 poligoane. Există deci o intersecție $P_{i1} \cap P_{i2} \cap P_{i3} \cap P_{i4}$ cu

$$m(P_{i1} \cap P_{i2} \cap P_{i3} \cap P_{i4}) \geq \frac{3}{210} = \frac{1}{70}.$$

R2.3.3. În interiorul pătratului de latură 1 sunt așezate câteva cercuri având suma lungimilor egală cu 10. Să se arate că există o dreaptă care să intersecteze cel puțin 4 din aceste cercuri.

<u>Soluție</u>: Proiectăm cercurile pe una din laturile pătratului. Proiecția fiecărui cerc este un segment cu lungimea egală cu diametrul cercului respectiv. Suma acestor segmente este $\frac{10}{\pi}$.Cum $\frac{10}{\pi} > 3{,}1$ conform principiului lui Dirichlet, există cel puțin patru segmente care au un punct comun. Perpendiculara ridicată în acest punct pe latura pătratului intersectează cel puțin patru cercuri.

R2.3.4. Un pătrat este secționat de zece drepte astfel încât fiecare dreaptă împarte pătratul în două patrulatere ale căror arii sunt în raportul $\frac{2}{3}$. Arătați că cel puțin trei dintre aceste drepte sunt concurente.

<u>Soluție</u>: Fiecare din cele zece drepte împarte pătratul în două trapeze având raportul ariilor $\frac{S_{AEFD}}{S_{BEFC}} = \frac{2}{3}$ (fig2.1).

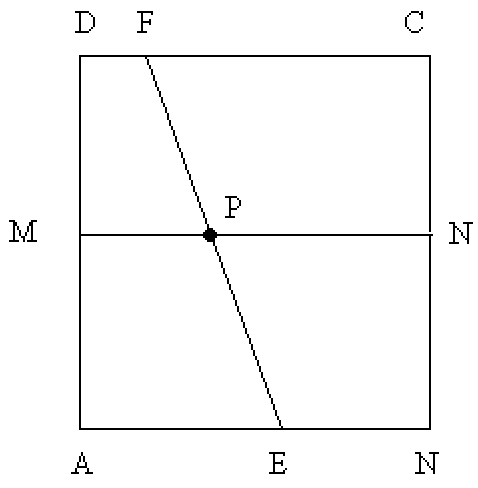


fig 2.1

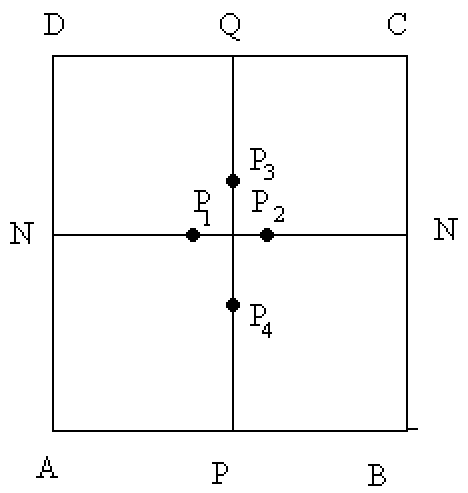


fig 2.2

Dacă $[MN]$ este linia mijlocie a pătratului, atunci $S_{AEFD} = \frac{(AE+FD)\cdot AD}{2} = l\cdot MP, S_{BEFC} = l\cdot NP$, unde l este latura pătratului. Avem: $\frac{S_{AEFD}}{S_{BEFC}} = \frac{MP}{PN} = \frac{2}{3}$. Deci fiecare din cele 10 drepte împart segmentul $[MN]$ sau $[PQ]$ în acelaşi raport (fig 2.2). Pe segmentul $[MN]$ punctele P_1 şi P_2 împart segmentul în raportul $\frac{2}{3}; \frac{MP_1}{P_1N} = \frac{NP_2}{P_2M} = \frac{2}{3}$. La fel pe segmentul $[PQ]$, punctele P_3, P_4 împart segmentul în acelaşi raport. Oricare din cele 10 drepte trece prin unul din punctele P_1, P_2, P_3, P_4, şi conform principiului lui Dirichlet rezultă că printr-un punct trec cel puţin trei drepte.

R2.3.5. Să se arate că în orice poligon convex cu 21 de laturi există doua diagonale care formează între ele unghi mai mic de 1^0.

<u>Soluţie</u>: Poligonul are $\frac{21\cdot 18}{2} = 189$ diagonale. Considerăm un punct O în planul poligonului şi ducem prin acest punct paralele la diagonalele poligonului. Se formează în jurul lui O, $2\cdot 189 = 378$ unghiuri. Cum suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este de 360^0, deducem că cel puţin unul din cele 378 de unghiuri are măsura mai mică decât 1^0. Diagonalele paralele cu laturile ce formează unghiul sunt cele cerute în enunţ.

R2.3.6. Într-un cub de latură 1 se consideră o linie frântă neintersectată de lungime 300. Să se arate că există un plan paralel cu una din fețe, care taie linia in cel puțin 101 puncte.

Soluție: Fie $L_1, L_2, ..., L_n$ segmentele liniei frânte şi proiecțiile ortogonale pe muchiile cubului $p_{r_1}, p_{r_2}, p_{r_3}$. Avem $m(L_i) < m(p_{r_1} L_i) + m(p_{r_2} L_i) + m(p_{r_3} L_i)$ de unde prin sumare, obținem: $300 = \sum_{i=1}^{n} m(L_i) < \sum m(p_{r_1} L_i) + m(p_{r_2} L_i) + m(p_{r_3} L_i)$. Deci există o sumă de proiecții mai mare ca 100. Fie $\sum_{i=1}^{n} m(p_{r_1} L_i) > 100$. Dar $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} p_{r_1} L_i\right) \leq 1$, deci $\sum_{i=1}^{n} m(p_{r_1} L_i) > 100 m\left(\bigcup_{i=1}^{n} p_{r_1} L_i\right)$ şi folosind corolarul 2.2.3. există $L_{i_1}, L_{i_2}, ..., L_{i_{101}}$ cu $p_{r_1} L_{i_1} \cap p_{r_1} L_{i_2} \cap ... \cap p_{r_1} L_{i_{101}} = A \neq \emptyset$. Un plan paralel cu această direcție de proiecție dus printr-un punct din A taie liniile $L_{i_1}, L_{i_2}, ..., L_{i_{101}}$ (în 101 puncte).

3. Rețele laticeale în plan şi spațiu

Această temă încearcă să facă o deschidere spre teoria punctelor din plan şi spațiu de coordonate numere întregi. Pentru a pătrunde în esența teoriei sunt necesare cunoştințe elementare, majoritatea acumulate în gimnaziu. Probleme de genul celor prezentate în continuare apar din ce în ce mai des la concursurile de matematică, frumusețea lor constând în simplitatea ideilor care conduc la rezolvarea lor.

În continuare, vom introduce noțiunile cu care operăm în cadrul temei amintite.

3.1. Noțiuni teoretice

Fie în plan un sistem ortogonal xOy. Elementele mulțimii $\{(x,y) \mid x \in \mathbf{Z}$ şi $y \in \mathbf{Z}\}$ se numesc **puncte laticeale**. Multimea $\{(x,y) \mid x \in \mathbf{Z}$ sau $y \in \mathbf{Z}\}$ se numeşte **rețea laticeală în plan** . Dreptele $x = x_0$, $y = y_0$, $x_0, y_0 \in \mathbf{Z}$ se numesc dreptele rețelei , iar punctele laticeale se mai numesc **nodurile rețelei**. În mod asemănător se definesc rețelele spațiale.
Fie în spațiu un sistem ortogonal. Mulțimea $\{(x,y,z) \mid x \in \mathbf{Z}$ sau $y \in \mathbf{Z}$ sau $z \in \mathbf{Z}\}$ se numeşte **rețea laticeală în spațiu**.
Planele $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, x_0, y_0, $z_0 \in \mathbf{Z}$ se numesc **planele rețelei**.
Dreptele $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$, $\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$, $\begin{cases} z = z_0 \\ x = x_0 \end{cases}$, $x_0, y_0, z_0 \in \mathbf{Z}$ se numesc **dreptele rețelei**.
Punctele (x_0, y_0, z_0) cu $x_0, y_0, z_0 \in \mathbf{Z}$ se numesc **nodurile rețelei** sau **puncte laticeale în spațiu**.

Dreptele rețelei situate în unul din planele rețelei determină o retea laticeală în plan , iar nodurile rețelei situate pe o dreaptă din rețea, determină o **diviziune unitară** a acestei drepte.

Vom prezenta şi câteva probleme rezolvate, în care se aplică cunoştințe elementare referitoare la distanța dintre două puncte în plan şi spațiu, numere raționale şi iraționale precum şi noțiuni de teoria numerelor.

Bibliografie

- D. Buşneag, I. Maftei, Teme pentru cercurile şi concursurile de matematica ale elevilor, Ed. Scrisul Românesc , Craiova 1983 pagina 29.

- V. Pop , Rețele ce trec prin elementele unei mulțimi G.M. 5-6 , 2001, pag. 193-198.
- M. Pimsner, S. Popa, Probleme de geometrie elementară. E.D.P.1979.
- A.M.Iaglom, I. M. Iaglom, Probleme neelementare tratate elementar. E. T. Pag. 38-39
- M. Ganga, Probleme elementare de matematică, Ed. Math press, Ploieşti 2003.

3.2. Probleme rezolvate (3.1)

R3.2.1. Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural n, există în plan un cerc care conține în interiorul său exact n puncte laticeale.

(Steinhana,Sierpinski)

Soluție. Să demonstrăm pentru început că nu există două puncte laticeale $M(a,b)$ şi $N(c,d)$, $M\neq N$ care să aibă aceeaşi distanță la punctul $P\left(\sqrt{3},\frac{1}{3}\right)$,

$a,b,c,d\in \mathbf{Z}$. Presupunem că există astfel de puncte, înseamnă că $PM=PN$ sau

$$\left(a-\sqrt{3}\right)^2+\left(b-\frac{1}{3}\right)^2=\left(c-\sqrt{3}\right)^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 2(c-a)\sqrt{3}=c^2+d^2-a^2-b^2+\frac{2}{3}(b-d)$$

Dacă $c\neq a \Rightarrow 2(c-a)\sqrt{3}\notin \mathbf{Q}$, contradicție, deci $c=a$, rezultă

$d^2-b^2-\frac{2}{3}(d-b)=0 \Leftrightarrow (d-b)\left(d+b-\frac{2}{3}\right)=0.$ Deoarece $d+b-\frac{2}{3}\notin \mathbf{Z}$ rezultă

$d=b$, deci $M=N$. Să finalizăm raționamentul problemei.

Fie M_1 punctul laticeal cel mai apropiat de P, M_2 următorul ş.a.m.d. Din demonstrația de mai sus , rezultă $M_1\neq M_2\neq \ldots \neq M_n \neq \ldots$ şi

$PM_1< PM_2< \ldots <PM_n<\ldots$ Cercul cu centrul în P şi cu rază cuprinsă între PM_n şi PM_{n+1} conține în interiorul său exact n puncte laticeale.

R3.2.2. Să se demonstreze că dacă pentru orice număr natural n există în plan un cerc cu centrul de coordonate (a,b), care conține în interiorul său exact n puncte laticeale, atunci a şi b nu pot fi simultan numere raționale.

Soluție. Fie punctul $A(x,y)$ unde $x=\frac{p}{q}$, $y=\frac{r}{q}$, cu $p, q, r\in \mathrm{Z}$, $q\neq 0$.

Atunci punctele laticeale $B(r,-p)$ şi $C(-r,p)$ verifică egalitatea $AB=AC$, deoarece

$\left(r-\frac{p}{q}\right)^2+\left(-p-\frac{r}{q}\right)^2=\left(-r-\frac{p}{q}\right)^2+\left(p-\frac{r}{q}\right)^2$. Aceasta înseamnă că pentru orice punct de coordonate raționale există două puncte laticeale distincte egal depărtate de acel punct . Vom arăta că dacă cerința problemei este satisfăcută pentru un număr natural n, atunci ea nu are loc pentru $n+1$.

Dacă $a,b\in\mathbf{Q}$, atunci există două puncte laticeale distincte, egal depărtate de punctul de coordonate (a,b).

Dacă cercul cu centrul (a,b) care trece prin aceste două puncte conține în interiorul său n puncte laticeale, atunci orice cerc concentric cu el şi de rază mai mare va conține în interiorul său cel puțin n+2 puncte laticeale. Prin urmare nu există un cerc cu centrul (a,b), care să conțină exact n+1 puncte. Deci $a \notin \mathbf{Q}$ sau $b \notin \mathbf{Q}$.

R3.2.3.Să se demonstreze că pentru orice număr natural n, există în spațiul 3-dimensional o sferă care conține în interiorul său exact n puncte laticeale.

Soluție. Vom face un raționament asemănător cu cel de la problema R-3.2.1. Fie două puncte laticeale diferite (x_1, y_1, z_1) şi (x_2, y_2, z_2).
Vom demonstra că distanțele de la aceste două puncte la punctul de coordonate $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\right)$ sunt diferite.Presupunem că aceste distanțe sunt egale. Rezultă

$$\left(x_1 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_1 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(z_1 - \sqrt{5}\right)^2 = \left(x_2 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_2 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(z_2 - \sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2} - 2\left(x_1\sqrt{2} + y_1\sqrt{3} + z_1\sqrt{5}\right) = x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2} - 2\left(x_2\sqrt{2} + y_2\sqrt{3} + z_2\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2} - \left(x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}\right) = 2\left[(x_1 - x_2)\sqrt{2} + (y_1 - y_2)\sqrt{3} + (z_1 - z_2)\sqrt{5}\right].$$

Cum $x_i, y_i \in \mathbf{Z}, i = \overline{1,3}$, deducem $(x_1 - x_2)\sqrt{2} + (y_1 - y_2)\sqrt{3} + (z_1 - z_2)\sqrt{5} = 0.$
Arătăm că $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} = 0,\ a,b,c \in \mathbf{Z}$ implică $a = b = c = 0.$
Avem $c\sqrt{5} = -\left(a\sqrt{2} + b\sqrt{3}\right) \Rightarrow 5c^2 = 2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6}$. Dacă $ab \neq 0$ rezultă $\sqrt{6} = \dfrac{5c^2 - 2a^2 - 3b^2}{2ab}$, contradicție. Prin urmare $a = 0$ sau $b = 0$ şi deducem că $a = b = c = 0$. Revenind, obținem $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$, contradicție cu ipoteza problemei. Un raționament similar cu cel de la problema R-3.2.1. conduce la rezolvarea problemei.

R3.2.4.Să se demonstreze că dacă un cerc, având raza de lungime un număr natural, trece prin două puncte laticeale situate la distanța 1 unul față de celălalt, atunci pe circumferința cercului nu se mai află nici un alt punct laticeal.

Solutie. Dacă A şi B sunt puncte laticeale situate la distanța 1 între ele, putem considera un sistem cartezian în care $A(0,0)$ şi $B(1,0)$. Dacă $r\in\mathbf{N}$ este raza cercului ce trece prin A şi B, atunci centrul cercului este $C\left(\frac{1}{2};y_0\right)$, cu $\frac{1}{4}+y_0{}^2=r^2$ deci $y_0=\pm\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}$. Putem lua oricare din valori.

Fie deci $C\left(\frac{1}{2},\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}\right)$. Dacă $M(x,y)$ este un punct laticeal prin care mai trece cercul $\zeta(C,r)$, atunci

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}\right)^2=r^2\Leftrightarrow x^2-x+y^2-2y\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}=0$ .Deoarece $x,y\in$ $\mathbf{Z}$, rezultă $4r^2-1=k^2$, $k\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow(2r+k)(2r-k)=1$, ecuație ce nu are soluții în numere întregi, deoarece $2r+k$ şi $2r-k$ au aceeaşi paritate. Deci cercul nu mai poate trece prin alt punct laticeal diferit de A şi B.

R3.2.5.Să se găsească toate poligoanele regulate care pot avea toate vârfurile în puncte laticeale.

Soluție. În mod evident pătratul verifică cerințele problemei.
Vom arăta că este singurul poligon regulat cu vârfurile în nodurile unei rețele laticeale.
Pentru început vom face demonstratia în cazul $n=3,5,6$.
Fie A, B, C trei vârfuri consecutive ale unui poligon regulat cu 3, 5 sau 6 laturi. Atunci măsura unghiului $A\hat{B}C$ este $\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{5}$ sau $\frac{2\pi}{6}$. Presupunem că A,B,C sunt

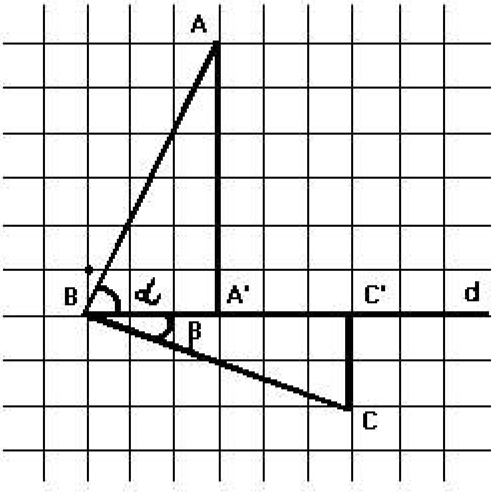


Fig. 3.1.

puncte laticeale (Fig. 3.1.). Atunci una din dreptele rețelei (orizontală sau verticală) trece prin interiorul unghiului $\angle ABC$, fie aceasta *d*. Notăm cu *A'* şi *C'* picioarele perpendicularelor din *A* şi *C* pe *d*, iar cu α şi β măsurile unghiurilor $\angle ABA'$ şi $\angle CBC'$, deci $\alpha + \beta \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

Avem $tg\alpha = \frac{AA'}{BA'} \in \mathbf{Q}$, $tg\beta = \frac{CC'}{BC'} \in \mathbf{Q} \Rightarrow tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} \in \mathbf{Q}$.

Dar $tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $tg\frac{3\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$, $tg\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, contradicție cu $tg(\alpha+\beta) \in \mathbf{Q}$, prin urmare nu există poligoane regulate cu 3, 5 sau 6 laturi, cu vârfurile în puncte laticeale. Pentru $n > 6$ fie $A_1A_2\ldots A_n$ poligonul regulat înscris în rețea având latura cea mai mică dintre toate poligoanele cu această proprietate şi fie *O* centrul său.

Fie *O'* un nod al rețelei. Considerăm vectorii $\overrightarrow{O'B_i} = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ pentru $i = 1,2,...,n-1$ şi $\overrightarrow{O'B_n} = \overrightarrow{A_nA_1}$, rezultă $B_1B_2\ldots B_n$ este un poligon regulat cu vârfurile puncte laticeale .

Avem $\Delta O'B_iB_{i+1} \sim OA_iA_{i+1}$ şi $m(\angle A_iOA_{i+1}) < \frac{\pi}{3} \Rightarrow B_iB_{i+1} < O'B_i = A_iA_{i+1}$, fapt ce contrazice minimalitatea lui A_iA_{i+1}.

R3.2.6. Fie P un poligon convex în plan care conţine n puncte laticeale în interior, k puncte laticeale pe laturi sau vârfuri, iar vârfurile sale sunt puncte laticeale.

Să se demonstreze că Aria (P) $= n + \frac{k}{2} - 1$. (Teorema lui Pick)

Soluţie. Să demonstrăm formula pentru cazul $n = 0, k = 3$.

Acest caz corespunde situaţiei în care P este un triunghi cu vârfurile în nodurile reţelei şi care nu mai conţine alte noduri pe laturi sau în interior. Arătăm că aria triunghiului este $\frac{1}{2}$. Fig.3.2.6. a)

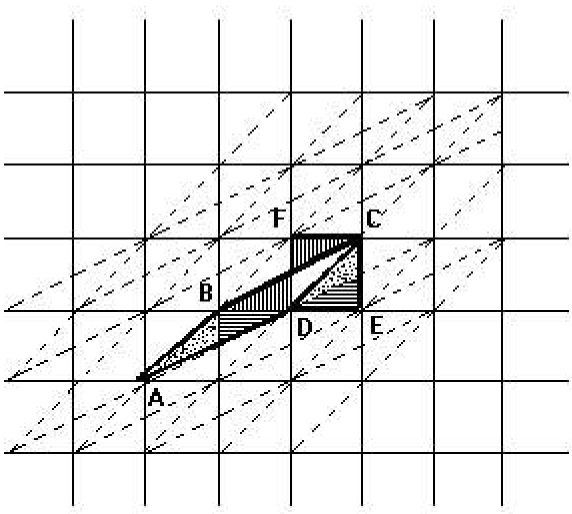
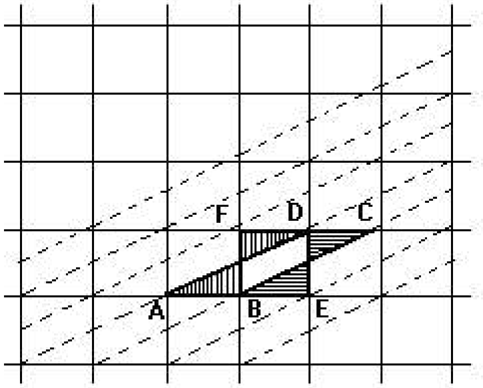


Fig.3.2.6. b)



Fie *ABC* un astfel de triunghi. El poate să nu aibă nici o latură conținută în dreptele rețelei (Fig.3.2. a), sau poate avea o latură conținută în dreptele rețelei(Fig.3.2.b). În ambele situații, simetricul lui *B* față de mijlocul lui [*AC*] este un punct laticeal, pe care-l notăm cu *D* şi *ABCD* este paralelogram cu $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC}$.

Dacă translatăm paralelogramul de-a lungul axelor rețelei, obținem o rețea de paralelograme care acoperă planul, iar toate vârfurile acestei rețele de paralelograme vor fi dispuse în nodurile rețelei de pătrate, în interiorul şi pe laturile rețelei de paralelograme nefiind situat nici un nod al rețelei de pătrate.

Vom arăta că aria unui astfel de paralelogram este 1.

În figura 3.2.a), $S_{ABCD} = S_{DECF} = 1$, iar în figura3.2.b), $S_{ABCD} = S_{BEDF} = 1$. Deci $S_{ABC} = \frac{1}{2}$. Pentru demonstrația în cazul general, să descompunem poligonul *P* în triunghiuri cu vârfurile în puncte laticeale şi care nu mai conțin puncte laticeale pe laturi sau în interior. Vom calcula numărul *m* de triunghiuri exprimând în două moduri suma unghiurilor lor. Pe de o parte suma unghiurilor este $180^0 \cdot m$, pe de altă parte ea este egală cu suma unghiurilor poligonului şi a unghiurilor din jurul punctelor interioare, deci ea este $180^0 (k-2) + 360^0 \cdot n$.

Rezultă că $m = 2n + k - 2$ şi cum aria unui triunghi este $\frac{1}{2}$, cele *m* triunghiuri au aria $\frac{m}{2}$, deci Aria$(P) = n + \frac{k}{2} - 1$.

R3.2.7. În fiecare pătrat al unei reţele laticeale este scris câte un număr real. Se consideră două figuri în plan, fiecare fiind formată dintr-un număr finit de pătrate laticeale. Figurile pot fi translatate în orice poziţie din plan. Se ştie că pentru orice translaţie a primei figuri, suma numerelor acoperite de figura translatată este pozitivă. Să se arate că există o translaţie a celeilalte figuri, astfel ca suma numerelor acoperite să fie pozitivă.

Soluţie. Notăm cu *A* figura formată din pătratele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi cu *B* figura formată cu pătratele $B_1, B_2, \ldots, B_m$.
Se observă că dacă translatăm pătratul A_i cu vectorul de poziţie al pătratului B_j, se obţine pătratul P_{ij}, acelaşi cu translatatul pătratului B_j cu vectorul de poziţie al pătratului A_i. (centrul pătratului P_{ij} este $\left(\overrightarrow{r_{Ai}} + \overrightarrow{r_{Bj}}\right)$. Pentru orice translaţie a figurii *A* după orice pătrat B_j, obţinem figura formată din pătrate $P_{1j}, P_{2j}, \ldots, P_{nj}$ şi notăm C_{ij} numărul scris în pătratul P_{ij}. Avem conform ipotezei $\sum_{i=1}^{n} C_{ij} > 0$, pentru orice $j = \overline{1,m}$, care prin adunare dau $\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} C_{ij}\right)$>0 sau echivalent $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} C_{ij}\right)$>0, deci cel puţin o sumă de forma $\sum_{j=1}^{n} C_{ij}$ este pozitivă. Ea reprezintă suma numerelor din pătratele $P_{i_0 1}, P_{i_0 2}, \ldots, P_{i_0 m}$ obţinută translatând figura *B* după vectorul de poziţie al pătratului A_{i_0}.

R3.2.8. Să se arate că din orice nod al unei reţele laticeale se poate ajunge în orice alt nod prin săriturile unui cal de şah.

Soluţie. Dintr-o poziţie dată $(x, y) \in \mathbf{Z X Z}$ se pot face opt tipuri de sărituri, (se poate ajunge în alte opt noduri) după schema $(x, y) \to (x \pm 1, y \pm 2)$, $(x, y) \to (x \pm 2, y \pm 1)$. Săriturile contrare $(x+1, y+2)$ şi $(x-1, y-2)$ se compensează , deci este suficient să ne rezumăm la umrătoarele patru tipuri de sărituri.

$(x, y) \xrightarrow{S_1} (x+1, y+2)$, $(x, y) \xrightarrow{S_2} (x-1, y+2)$
$(x, y) \xrightarrow{S_3} (x+2, y+1)$, $(x, y) \xrightarrow{S_4} (x+2, y-1)$

Dacă se fac a_1 sărituri de tipul S$_1$, a_2 de tipul S$_2$, a_3 de tipul S$_3$ şi a_4 de tipul S_4, din nodul (x, y) ajungem în (x', y') unde:

$$\begin{cases} x' = x + a_1 - a_2 + 2a_3 + 2a_4 \\ y' = y + 2a_1 + 2a_2 + a_3 - a_4 \end{cases}$$

Trebuie arătat că pentru orice $x, y, x', y' \in \mathbf{Z}$, există $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{Z}$ astfel ca să fie verificate relațiile de mai sus.

Avem $\begin{cases} a_1 = -\dfrac{1}{3}(z_1 + 5a_2 - 4a_4) \\ a_2 = -\dfrac{1}{3}(z_2 - 4a_2 + 5a_4) \end{cases}$ unde $\begin{cases} z_1 = (x' - x) - 2(y' - y) \\ z_2 = 2(x' - x) + (y' - y) \end{cases}$

Numerele $a_2, a_3 \in \mathbf{Z}$, trebuie astfel alese, încât parantezele să se dividă cu 3. Se observă că $z_1 \equiv z_2$ (mod 3), $5a_2 \equiv -a_2$, $-4a_4 \equiv -a_4$, $-4a_2 \equiv -a_2$, $5a_4 = -a_4$ (mod 3) ceea ce evident putem realiza luând de exemplu $a_2 \equiv z_1$, $a_4 \equiv 0$, (fără a folosi sărituri de tipul S$_4$).

4. Ecuații diofantice. Metode elementare de rezolvare a ecuațiilor diofantice

Titlul temei vine de la Diofant, numit şi „tatăl algebrei" care şi-a desfăşurat activitatea în oraşul Alexandria care era în antichitate centrul universitar al învățământul matematic. El este cunoscut pentru cartea sa „Aritmetica", lucrare în care tratează ecuațiile algebrice şi teoria numerelor. Cartea este o colecție de 150 de probleme cu soluții aproximative al unor ecuații determinate de grad cel mult trei şi conținând şi ecuații nedeterminate.

Vom numi în continuare ecuație diofantică, o ecuație de forma $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ (*) unde f este o funcție de n variabile şi $n \geq 2$. Dacă f este funcție polinomială cu coeficienți întregi, (*) se numeşte ecuație diofantică algebrică. Un n-uplu $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \mathbf{Z}^n$ care satisface (*) se numeşte soluție a ecuației (*) . O ecuație care are una sau mai multe soluții se numeşte solvabilă. Relativ la ecuațiile diofantice se pun următoarele trei probleme.

1. Este ecuația solvabilă ?
2. În caz de solvabilitate, este numărul soluțiilor finit sau infinit ?
3. În caz de solvabilitate, să se determine toate soluțiile ecuației.

Dintre ecuațiile diofantice clasice vom prezenta ecuațiile diofantice liniare.

4.1. Ecuațiile diofantice de gradul întâi

O ecuație diofantică de gradul întâi cu două necunoscute este de forma $ax + by = c$ (1) unde $a,b,c \in \mathbf{Z}$, $ab \neq 0$. Perechea $(x_0, y_0) \in \mathbf{Z}^2$ care verifică (1) o numim soluție particulară.

4.1.1. Teoremă: Condiția necesară şi suficientă ca ecuația (1) să admită soluție este ca d/c, unde $d=(a,b)$.

Demonstrație. Dacă există (x_0, y_0) care verifică (1), atunci $ax_0 + by_0 = c$ şi prin urmare d/c, deci condiția este necesară. Dacă d/c, există $c_1 \in \mathbf{R}$, astfel încât $c = dc_1$. Deoarece $d=(a,b)$, există $u,v \in \mathbf{Z}$, astfel încât $au + bv = d$ (2). Înmulțind ambii membrii ai egalității (2) cu c_1, obținem $a(c_1 u) + b(c_1 v) = c$, prin urmare $(c_1 u,\ c_1 v)$ este o soluție particulară a ecuației (1).

4.1.2. <u>Teoremă</u>: Dacă ecuaţia diofantică $ax + by = c$ are soluţia particulară (x_0, y_0) şi $d=(a,b)$, soluţia generală e ecuaţiei este dată de:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t,\ y = y_0 - \frac{a}{d}t,\ t \in \mathbb{Z}$$

<u>Demonstraţie</u>. Dacă (x_0, y_0) este o soluţie particulară, atunci $a x_0 + b y_0 = c$ (3). Pentru o pereche arbitrară $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$, avem $ax + by = c$ (4). Scăzând cele două relaţii, obţinem: $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$ (5) Cum $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, $(a_1, b_1) = 1$, (5) devine: $a_1(x - x_0) = b_1(y_0 - y)$ (6)

Rezultă că $b_1 / a_1(x - x_0)$ şi cum $(a_1, b_1) = 1$, deducem ca $b_1 / x - x_0$, prin urmare există $t \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x - x_0 = b_1 t$. Înlocuind în (6) obţinem $y_0 - y = a_1 t$. Deci $x = x_0 + b_1 t$ şi $y = y_0 - a_1 t$. Reciproc, dacă (x_0, y_0) este soluţie particulară (verifică (3)) şi $x = x_0 + b_1 t$, $y = y_0 - a_1 t$, $t \in \mathbb{Z}$, atunci (6) implică (5). În fine din (5) şi (3) rezultă (4), deci (x, y) este o soluţie a ecuaţiei.

4.1.3. <u>Corolar</u>: Fie a_1, a_2 numere întregi prime între ele. Dacă (x_0, y_0) este o soluţie a ecuaţiei $a_1 x + a_2 y = b$
atunci toate soluţiile ei sunt date de

$$\begin{cases} x = x_0 + a_2 t \\ y = y_0 - a_1 t \end{cases},\ \text{unde } t \in \mathbb{Z}$$

4.1.4. <u>Exemple:</u>

a) Să se determine cel mai mare divizor comun al numerelor întregi 1215 şi –2755 şi să se exprime acestea ca o combinaţie liniară a celor două numere.

b) Să se rezolve în **Z** ecuaţia $1215x - 2755y = 560$.

<u>Soluţie</u>

a) d = (1215,-2755) = (2755,1215). Aplicând algoritmul lui Euclid, avem:

$2755 = 1215 \cdot 2 + 325$

$1215 = 325 \cdot 3 + 240$

$325 = 240 \cdot 1 + 85$

$240 = 85 \cdot 2 + 70$

$85 = 70 \cdot 1 + 15$

$70 = 15 \cdot 4 + 10$

$15 = 10 \cdot 1 + 5$

10 = 5·2 , deci d=5

Pentru a afla *u,v*∈Z astfel încât $d = 1215u + (-2755)v$ folosim algoritmul de mai sus.

Avem: 325 = 1·2755 + (2)·1215

240 = (-3)·2755 + 7·1215

85 = 325 - 240·1 = 4·2755 - 9·1215

70 = 240 - 85·2 = (-11)·2755 + 25·1215

15 = 15·2755 - 34·1215

10 = -71·2755 + 161·1215

5 = 86·2755 - 195·1215

Deci 5 = 1215·(-195) + (-2755)·(-86).

b) Avem $5/560$, deci ecuația are soluții. Cum 560 = 5·112, soluția particulară este $x_0 = -195 \cdot 112$, $y_0 = -86 \cdot 112$, iar soluția generală $x = x_0 + 551 \cdot t$, $y = y_0 + 243 \cdot t$, t ∈ Z.

Considerăm cazul ecuațiilor diofantice de gradul întâi cu *n* necunoscute, $n \geq 1$:

$a_1x_1 + a_2x_2 + ...a_{n1}x_n = b$ (7) , unde $a_1, a_2,...a_n$, *b* sunt numere întregi fixate şi $a_1, a_2,...a_n$ sunt numere nenule. Principalul rezultat referitor la această ecuație, care se mai numeşte **ecuație diofantică liniară**, este :

4.1.5.<u>Teoremă</u> Condiția necesară şi suficientă ca ecuația (7) să admită soluții este ca d/b, unde d = ($a_1, a_2,...a_n$).

<u>Demonstrație.</u> O soluție a ecuației (7) este un sistem ordonat $(x_1^0, x_2^0,..., x_n^0)$ pentru care are loc egalitatea $(a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + ... + a_nx_n^0) = b$ (8)
Presupunem că *b* nu este divizibil cu *d*, atunci egalitatea (8) ne este posibilă, deoarece partea stângă din (8) este divizibilă cu *d*, iar partea dreaptă nu. Dacă d/b, adică $b = d \cdot b_1$, atunci există $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = 1$ ∈Z, astfel încât $a_1u_1 + a_2u_2 + ...a_nu_n = d$. Înmulțind ambii membri cu b_1, obținem:

$a_1(u_1b_1) + a_2(u_2b_1) + ... + a_n(u_nb_1) = b$ şi am pus în evidență o soluție particulară a ecuației (7), $x_1^0 = u_1b_1, x_2^0 = u_2b_1,..., x_n^0 = u_nb_1$.

Pentru aflarea mulțimii soluțiilor ecuației, avem următoarea:

4.1.6. <u>Teoremă</u>: Rezolvarea unei ecuații diofantice de gradul întâi cu *n* necunoscute se reduce la rezolvarea unei ecuații diofantice de gradul întâi cu două necunoscute şi a unei ecuaţii diofantice de gradul întâi cu n-1 necunoscute. Soluţia generală depinde de n-1 parametri întregi.

Demonstraţie Fie ecuaţia (7) care satisface condiţia d/b, d = $(a_1, a_2, ... a_n)$. Notăm $d_2 = (d_1, a_2), d_3 = (d_2, a_3), ..., d_k = (d_{k-1}, a_k), ...,$ $d_n = (d_{n-1}, a_n)$. Ştim că d = d_n. Notăm $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_{n-1}x_{n-1} = d_{n-1}y$. Ecuaţia (7) se scrie $d_{n-1}y + a_nx_n = b$ (9). Deoarece (d_{n-1}, a_n) = d şi d/b, ecuaţia (9) are soluţii şi dacă (y_0, x_n^0) este o soluţie particulară a ecuaţiei, atunci soluţia generală este :

$$y = y_0 + \frac{a_n}{d}t, x = x_0 - \frac{d_{n-1}}{d}t \text{ , } t \in Z$$

Pentru fiecare valoare fixată a lui t, găsim o valoare pentru x_n şi una pentru y. Pentru a găsi o soluţie a ecuaţiei (7), trebuie să găsim, pentru t fixat, $x_1, x_2, ... x_{n-1}$ astfel încât:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... a_{n-1}x_{n-1} = d_{n-1} \cdot (y_0 + \frac{a_n}{d}t) \quad (10)$$

Deoarece $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) = d_{n-1}$ şi $d_{n-1} / d_{n-1} \cdot (y_0 + \frac{a_n}{d}t)$, rezultă că ecuaţia (10) are soluţii.

Am văzut în 4.1.2. că dacă ecuaţia diofantică de gradul întâi cu două necunoscute are soluţii, soluţia generală depinde de un parametru. Presupunem că soluţia generală a ecuaţiei cu n-1 necunoscute depinde de n-2 parametri: $t_1, t_2, ..., t_{n-2}$. Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei (7) depinde de n-1 parametri: $t_1, t_2, ..., t_{n-2}$ şi t.

Demonstraţia dată ne propune şi o metodă de determinare a soluţiei generale a ecuaţiei (7) pentru $n \geq 2$.

Determinăm x_n în funcţie de un parametru t_{n-1}.

$$x_n = x_n^0 - \frac{d_{n-1}}{d}t_{n-1}, \quad t_{n-1} \in Z$$

Din (10) găsim x_{n-1} care depinde de un nou parametru t_{n-2} (şi de t_{n-1}), ş.a.m.d., până ajungem la

$a_1x_1 + a_2x_2 = A(t_2, t_3, ... t_{n-1})$, de unde găsim

x_1 şi x_2 depinzând de încă un parametru t_1.

4.1.7. Exemplu Să se rezolve în Z ecuaţia diofantică $4x_1 - 6x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 14$.

Soluție $d=(4,-6,10,2)=2$ și $2/14$, deci ecuația are soluții, $d_3=(4,-6,10)=2$. Notăm $4x_1-6x_2+10x_2=2y_1$ și ecuația dată devine $2y_1+2x_4=14$ sau $y_1+x_4=7$.

Notăm $y_1=t_3$ și rezultă $x_4=7-t_3$, $t\in$Z. Obținem $4x_1-6x_2+10x_3=2t_3$ sau $2x_1-3x_2+5x_3=t_3$. Notăm $2x_1-3x_2=y_2$ și obținem $y_2+5x_3=t_3$. Notăm $x_3=t_2$, deci $y_2=t_3-5t_2$. Din $2x_1-3x_2=t_3-5t_2$, $2(2t_3-10t_2)-3(t_3-5t_2)=t_3-5t_2$, obținem $x_1=2t_3-10t_2+3t_1$, $x_2=t_3-5t_2+2t_1$.

Soluția generală este:

$$x_1=3t_1-10t_2+2t_3$$
$$x_2=2t_1-5t_2+t_3$$
$$x_3=t_2$$
$$x_4=7-t_3,\ t_1,t_2,t_3\in\text{Z}.$$

În continuare vom prezenta principalele metode elementare de studiu a ecuațiilor diofantice.

4.2. Metoda descompunerii

Metoda constă în scrierea ecuației $f(x_1,x_2,...,x_n)=0$ sub forma $f_1(x_1,x_2,...,x_n)\ f_2(x_1,x_2,...,x_n)\dots f_k(x_1,x_2,...,x_n)=a$, $a\in$Z. Folosind descompunerea în factori primi a lui a, obținem un număr finit de descompuneri în k factori întregi $a_1,a_2,...,a_k$. Din fiecare descompunere obținem un sistem.

$f_i(x_1,x_2,...,x_n)=a_i$, $i\in\{1,2,...,k\}$.

Rezolvarea acestor sisteme ne conduce la mulțimea de soluții. Vom exemplifica metoda prin câteva exemple:

4.3. Metoda inegalităților în rezolvarea ecuațiilor diofantice

Probleme rezolvate

4.3.1. Să se determine toate perechile (x, y) de numere întregi care verifică ecuația $x^3+y^3=(x+y)^2$.

<u>Soluție</u> Observăm pentru început că orice pereche de forma ($x_0, -x_0$), cu $x_0 \in \mathbf{Z}$ este soluție a ecuației. Dacă $x + y \neq 0$ ecuația devine $x^2 - xy + y^2 = x + y$, care este echivalentă cu $(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$. Din această egalitate în numere întregi deducem $(x-1)^2 \leq 1$ şi $(y-1)^2 \leq 1$, de unde
$x \in [0,2], y \in [0,2]$. Obținem soluțiile (0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (2,2).

R4.3.2. Determinați toate cvadruplele de numere naturale nenule (x, y, z, w) pentru care

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z+1) = w^2$$

(Titu Andreescu)

<u>Soluție</u> Avem
$(x+y+z+1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z-1) - 2z + 1 < w^2$
şi $(x+y+z+1) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z+1) + 2y(z+1) + 2z + 1 > w^2$
Din $(x+y+z-1)^2 < w^2 < (x+y+z+1)^2$ rezultă că $w^2 = (x+y+z)^2$, deci $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z+1) = (x+y+z)^2$, de unde obținem $x = y$. Înlocuind în ecuație, avem $4x^2 + z^2 + 4xz = w^2$, sau $(2x+z)^2 = w^2$. Soluțiile ecuației sunt $(m,m,n,2m+n)$, m, $n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

R4.3.3. Determinați toate tripletele (x, y, z) de numere naturale nenule astfel încât

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z}) = 2\,.$$

(Olimpiadă Anglia)

<u>Soluție</u> Fără a restrânge generalitatea problemei putem presupune că $x \geq y \geq z$. Obținem $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z}) \leq (1+\frac{1}{z})^3$, adică $2 \leq (1+\frac{1}{z})^3$, care implică $z \leq 3$. Dacă
z = 1, atunci $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) = 1$, imposibil pentru x, $y \in \mathbf{N} - \{0\}$. Dacă z = 2, ajungem la $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) = \frac{4}{3}$. Cum $x \geq y$, obținem $(1+\frac{1}{y})^2 \geq \frac{4}{3}$, deci $y<7$.

Cum $1+\frac{1}{x}>1$ egalitatea $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})=\frac{4}{3}$ ne conduce la $1+\frac{1}{y}<\frac{4}{3}$, sau $y>3$, deci $y\in\{4,5,6\}$. Înlocuind, obținem soluțiile (7,6,4), (9,5,2), (15,4,2).
Dacă z = 3, atunci $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})=\frac{3}{2}$. Deoarece $x\geq y$, avem $(1+\frac{1}{y})^2\geq\frac{3}{2}$., de unde
$y<5$. Avem și $y\geq z=3$, care ne conduce la soluțiile (8,3,3) și (5,4,3). Soluțiile ecuației sunt toate permutările circulare ale tripletelor (7,6,2), (9,5,2), (15,4,2), (8,3,3) și (5,4,3).

4.4. Metoda aritmeticii modulare

Considerațiile simple de aritmetică modulară se dovedesc foarte utile în demonstrația faptului că anumite ecuații nu au soluții sau la reducerea posibilităților de alegere a soluțiilor acestora.

Amintim câteva noțiuni generale cu privire la congruențe.

Definiția 1. Două numere întregi a și b se numesc congruente modulo m, unde m∈Z, dacă $m/(a-b)$. Se scrie $a\equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ și se citește : *a* congruent cu *b* modulo *m* .

Definiția 2. Două numere întregi *a* și *b* se numesc congruente modulo *m*, unde $m\in Z-\{0\}$, dacă prin împărțire la *m* dau același rest, iar pentru *m* = 0 dacă sunt egale.

Câteva proprietăți ale relației de congruență:

1. Relația de congruență este o relație de echivalență, adică este reflexivă, simetrică și tranzitivă.
2. Două relații de congruență se pot aduna, scădea sau înmulți membru cu membru.
3. Ambii membri ai unei relații de congruență pot fi ridicați la aceeași putere întreagă pozitivă.
4. Ambii membri ai unei relații de congruență pot fi înmulțiți cu orice număr întreg pozitiv, înmulțind sau nu în același timp și modulul.
5. Orice relație de congruență în raport cu un modul dat este o relație de congruență în raport cu un modulul care este divizor al modului dat.
6. Ambii membrii ai unei relații de congruență pot fi simplificați cu orice factor prim cu modulul.

Relația de congruență fiind o relație de echivalență pe mulțimea numerelor întregi, determină pe aceasta o partiție, adică o împărțire în clase nevide, disjuncte şi a căror reuniune acoperă mulțimea.

4.5. Metoda inducției matematice

Inducția matematică este o metodă utilă în demonstrarea unor afirmații care depind de mulțimea numerelor naturale. Fie $(P(n))_{n\geq 0}$ un şir de propoziții. Metoda inducției matematice ne ajută să demonstrăm că propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq 0$, unde n_0 este un număr natural fixat.

Inducția matematică (forma slabă): Presupunem că

- $P(n_0)$ este adevărată
- Pentru orice $k \geq n_0$, din faptul că $P(k)$ este adevărată rezultă că $P(k+1)$ este adevărată.

Atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$.

Inducția matematică (cu pasul *s*): Fie *s* un număr natural fixat. Presupunem că:

- $P(n_0)$, $P(n_0+1)$,..., $P(n_0+s-1)$ sunt adevărate ;
- Pentru orice $k \geq n_0$, din faptul că $P(k)$ este adevărată rezultă că $P(k+s)$ este adevărată.

Atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$.

Inducția matematică (forma tare): Presupunem că:

- $P(n_0)$ este adevărată
- Pentru orice $k \geq n_0$, din faptul că $P(m)$ este adevărată pentru orice *m* cu $n_0 \leq m \leq k$, rezultă că $P(k+1)$ este adevărată.

Atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$.

Următoarele exemple ilustrează utilizarea metodei inducției matematice în studiul ecuațiilor diofantice.

Bibliografie

- *Petru Minuț, Teoria numerelor, Ed. Crenguța Gâldău, Iaşi 1997.*

- *T. Andreescu, D. Andrica, O introducere în studiul ecuațiilor diofanice, Ed. Gil, Zalău, 2002.*
- *M. Cocuz, Culegere de probleme de matematică,Ed. Academiei,1984*
- *L.Panaitopol, M.E. Panaitopol, M. Lascu, Inducția matematică,Ed.GIL,Zalău,2001*
- *I.Cucurezeanu, Probleme de aritmetică şi teoria numerelor, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1976*

4.5. Probleme rezolvate (4.1)

R4.2.1 Fie p şi q numere prime. Rezolvați în numere întregi ecuația $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p+q}$.

Soluție Ecuația este echivalentă cu $(x-pq)(y-pq)=p^2q^2$. Considerând toți divizorii pozitivi ai numărului p^2q^2, obținem sistemele

$$\begin{cases} x-pq=1 \\ y-pq=p^2q^2 \end{cases};\ \begin{cases} x-pq=p \\ y-pq=pq^2 \end{cases};\ \begin{cases} x-pq=q \\ y-pq=p^2q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-pq=p^2 \\ y-pq=q^2 \end{cases};\ \begin{cases} x-pq=pq \\ y-pq=pq \end{cases};\ \begin{cases} x-pq=pq^2 \\ y-pq=p \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-pq=p^2q \\ y-pq=q \end{cases};\ \begin{cases} x-pq=q^2 \\ y-pq=p^2 \end{cases};\ \begin{cases} x-pq=p^2q^2 \\ y-pq=1 \end{cases}$$

Obținem soluțiile: $(1+pq, pq(1+pq))$, $(p(1+q), pq(1+q))$, $(q(1+p), pq(1+p))$, $(p(p+q), q(p+q))$, $(2pq, 2pq)$, $(pq(1+q), p(1+q))$, $(pq(1+p), q(1+p))$, $(q(p+q), p(p+q))$, $(pq(1+pq), 1+pq)$.

R4.2.2. Rezolvați în numere întregi x, y ecuația $x^2+6xy+8y^2+3x+6y=2$.

Soluție Ecuația se scrie echivalent $(x+2y)(x+4y+3)=2$. Descompunerea lui 2 în produs de doi factori pozitivi ne conduce la sistemele:

$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+4y+3=2 \end{cases}$ cu soluția $(3,-1)$

$\begin{cases} x+2y=2 \\ x+4y+3=1 \end{cases}$ cu soluția $(6,-2)$

$\begin{cases} x+2y=-1 \\ x+4y+3=-2 \end{cases}$ cu soluția $(3,-2)$

$\begin{cases} x+2y=-2 \\ x+4y+3=-1 \end{cases}$ cu soluția $(0,-1)$

R4.2.3. Găsiți toate tripletele (x, y, z) de numere naturale astfel încât $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p$, unde p este un număr prim mai mare decât 3.

(Titu Andreescu, Dorin Andrica)

<u>Soluție</u> Folosind identitatea:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

Deoarece $x + y + z \geq 1$, rezultă $x + y + z = p$ şi $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 1$. Înmulțind a doua ecuație cu 2 obținem $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2$.

Fără să restrângem generalitatea, putem presupune $x \geq y \geq z$. Dacă $x> y>$ z, cum x, y, z $\in$ **N**, avem x-$y\geq 1$, y-$z\geq 1$ şi x-$z\geq 2$, de unde rezultă $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 6 \geq 2$. Înseamnă că $x = y = z + 1$ sau $x - 1 = y = z$. Numărul p este prim şi cum p>3, el este de forma $3k + 1$ sau $3k + 2$. Din $x = y = z + 1$ rezultă soluția $\left(\frac{p-1}{3}, \frac{p-1}{3}, \frac{p+2}{3}\right)$ şi permutările$\left(\frac{p-1}{3}, \frac{p+2}{3}, \frac{p-1}{3}\right), \left(\frac{p+2}{3}, \frac{p-1}{3}, \frac{p-1}{3}\right)$.

În cel de-al doilea caz, $x - 1 = y = z$ şi obținem soluțiile

$$\left(\frac{p-2}{3}, \frac{p+1}{3}, \frac{p+1}{3}\right), \left(\frac{p+1}{3}, \frac{p-2}{3}, \frac{p+1}{3}\right), \left(\frac{p+1}{3}, \frac{p+1}{3}, \frac{p-2}{3}\right).$$

Probleme rezolvate (4.4)

R4.4.1. Arătați că ecuația $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 + ... + (x + 2001)^2 = y^2$ nu are soluții în **Z**.

<u>Soluție</u> Folosind substituția $x = z - 1001$, ecuația devine $(z - 1000)^2 + ... + (z - 1)^2 + z^2 + (z + 1)^2 + ... + (z + 1000)^2 = y^2$, sau $2001z^2 + 2(1^2 + 2^2 + ... + 1000^2) = y^2$, de unde $2001z^2 + 2\frac{1000 \cdot 1001 \cdot 2001}{6} = y^2$ care se mai scrie $2001z^2 + (999 + 1)(999 + 2)(666 + 1) = y^2$. Membrul întâi este congruent cu 2(mod 3), deci nu poate fi pătrat perfect.

R4.4.2. Arătați că ecuația $x^5 - y^2 = 4$ nu are soluții în numere întregi.

(Balcaniada de matematică)

Soluție. Considerăm ecuația modulo 11. Din Teorema lui Fermat avem că pentru orice întreg a nedivizibil cu un număr prim p, are loc congruența $a^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$. Avem deci $x^{10} \equiv 1(\bmod 11)$ dacă x nu este divizibil cu 11 şi $x^{10} \equiv 0(\bmod 11)$ dacă $x \vdots 11$. Din $x^{10} = (x^5)^2$ rezultă $x^5 = -1$, 0 sau $1(\bmod 11)$. Dacă $x^5 \equiv -1(\bmod 11)$ rezultă $x^5 - 4 \equiv (11-5) = 6(\bmod 11)$. Dacă $x^5 \equiv 0(\bmod 11)$ rezultă $x^5 - 4 \equiv (11-4) = 7(\bmod 11)$. Dacă $x^5 \equiv 1(\bmod 11)$ rezultă $x^5 - 4 \equiv (11-3) = 8(\bmod 11)$.

Pe de altă parte, analizând toate situațiile pentru $y = 11 \cdot 12 + i$, i $\in$ $\{0,1,\ldots,10\}$, obținem $y^2 \equiv 0,1,3,4,5$ sau $9(\bmod 11)$, deci ecuația nu are soluții.

R4.4.3. Aflați toate perechile (x, y) de numere naturale care verifică ecuația $3^x - 2^y = 7$.

Soluție Pentru $y = 1$ rezultă $x = 2$. Pentru $y = 2$, avem $3^x \equiv 11$ care nu are soluții. Pentru $y \geq 3$, considerăm ecuația modulo 8. Cum $2^y \equiv 0(\bmod 8)$, deducem că $3^x \equiv 7(\bmod 8)$. Dar pentru x par $3^x \equiv 1(\bmod 8)$ şi pentru x impar $3^x \equiv 3(\bmod 8)$, deci ecuația nu are soluții pentru $y \geq 3$.

Probleme rezolvate (4.5)

R4.5.1. Arătați că pentru orice număr natural n, următoarea ecuație are soluție în mulțimea numerelor întregi: $x^2 + y^2 + z^2 = 59^n$.

(Dorin Andrica)

Soluție Vom utiliza inducția matematică cu pasul s = 2 şi $n_0 = 1$. Observăm că pentru (x_1, y_1, z_1) = (1,3,7) şi (x_2, y_2, z_2)=(14,39,42) avem $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 59$ şi $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 59^2$, deci ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = 59^n$ are soluții în Z pentru $n \in \{1,2\}$. Pentru pasul de inducție definim (x_n, y_n, z_n), $n \geq 3$, prin $x_{n+2} = 59^2 x_n$, $y_{n+2} = 59^2 y_n$, $z_{n+2} = 59^2 z_n$, $(\forall)$ $n \geq 1$. Atunci $x_{k+2}^2 + y_{k+2}^2 + z_{k+2}^2 = 59^2(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)$, deci $x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 = 59^k$ implică $x_{k+2}^2 + y_{k+2}^2 + z_{k+2}^2 = 59^{k+2}$.

R4.5.2. Să se arate că pentru orice $n \geq 3$, ecuația

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=1$ are soluții în mulțimea numerelor naturale distincte.

<u>Soluție</u> Pentru n = 3 avem $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Presupunem că pentru $k \geq 3$ are loc relația $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=1$, unde $x_1, x_2, ...x_k$ sunt numere naturale distincte. Prin înmulțirea cu $\frac{1}{2}$ obținem $\frac{1}{2x_1}+\frac{1}{2x_2}+...+\frac{1}{2x_k}=\frac{1}{2}$, de unde deducem $\frac{1}{2}+\frac{1}{2x_1}+\frac{1}{2x_2}+...+\frac{1}{2x_k}=1$. Am demonstrat propoziția pentru numerele naturale distincte $2, 2x_1, 2x_2, ..., 2x_k$, deci pentru orice $n \geq 3$ ecuația are soluții numere naturale distincte.

R4.5.3. Demonstrați că ecuația $x^2+(x+1)^2=y^2$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor naturale.

<u>Soluție.</u> Ecuația este verificată pentru $x_1=3$, $y_1=5$. Definim şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, prin relațiile de recurență:

$$\begin{cases} x_{n+1}=3x_n+2y_n+1 \\ y_{n+1}=4x_n+3y_n+2 \end{cases}, \text{ cu } x_1=3,\ y_1=5$$

Pentru pasul de inducție, presupunem că perechea (x_n, y_n) este soluție pentru ecuația dată. Ținând seama de $x_n^2+(x_n+1)^2=y_n^2$, obținem $x_{n+1}^2+(x_{n+1}+1)^2=(3x_n+2y_n+1)^2+(3x_n+2y_n+2)^2=(4x_n+3y_n+2)^2$. Deci $x_{n+1}^2+(x_{n+1}+1)^2=y_{n+1}^2$, adică ($x_{n+1}, y_{n+1}$) este soluție a ecuației.

5. Inducția matematică în geometrie

Metoda inducției matematice este frecvent utilizată în diferite ramuri ale matematicii şi constituie "unul dintre cele mai puternice mijloace de demonstrație în matematică" după afirmația academicianului Miron Nicolescu.

În paragraful 4.4 sunt prezentate trei forme ale inducției matematice: forma slabă, inducția cu pasul 2 şi forma tare. Următoarele exemple ilustrează utilizarea metodei inducției matematice la rezolvarea unor probleme de geometrie.

Bibliografie

- *D. Andrica, C. Varga, D. Văcărețu, Teme şi probleme alese de geometrie, Ed. Plus, Bucureşti, 2002, pag 283-316.*
- *L. Nicolescu, A. Bumbăcea, Metode de rezolvare a problemelor de geometrie, Ed. Univ. Bucureşti, 1998, pag278-291.*
- *L.Panaitopol, M.E. Panaitopol, M. Lascu, Inducția matematică,Ed.GIL,Zalău,2001*
- *M. Pimsner, S. Popa, Probleme de geometrie elementară. E.D.P.1979.*
- *L.I. Golovina, I.M. Iaglom, Inducția în geometrie, Ed.Tehnică, 1954.*

Probleme rezolvate (5.1)

R5.1.1. Fie O un punct de pe dreapta l, iar $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$, sunt n vectori de lungime 1, astfel încât punctele $P_1, \ldots, P_n$ se află într-un plan care conține dreapta l şi sunt toate de aceeaşi parte a acesteia. Să se demonstreze că dacă n este impar, atunci $\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}\right| \geq 1$,

unde $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ reprezintă lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$.

(O.I.M. – 1973 propusă de Cehoslovacia)

Soluție:

Demonstrăm prin metoda inducției, forma slabă.

Pentru n=1, $\left|\overrightarrow{OP_1}\right| \geq 1$, adevărat. Presupunem proprietatea adevărată pentru 2n–1 vectori şi o demonstrăm pentru 2n + 1 vectori. Renumerotând eventual punctele P_1, P_2,

…, P_{2n+1}, putem presupune că cel mai mare unghi $\angle P_i O P_J$ i,j=1, 2n+1 este $\angle P_1 O P_{2n+1}$. Din ipoteza inductivă rezultă $\left|\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \cdots + \overrightarrow{OP_{2n}}\right| \geq 1$

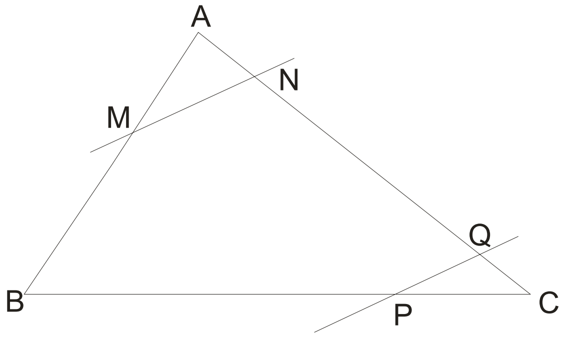
Fie $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_{2n+1}} = \overrightarrow{OR}.\ \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{OP_{2n+1}} = OR$. Dacă $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \cdots + \overrightarrow{OP_{2n}}$ şi $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}$, atunci T, S$\in$ $\operatorname{int}\angle\left(ROP_{2h+1}\right)$ sau T, S$\in \operatorname{int}\angle\left(ROP_1\right)$ de unde OT≥OS, deoarece ROS este ascuțit. Rezultă $\left|OT\right| \geq 1$ şi inducția este încheiată.

R5.1.2. Să se demonstreze că pentru orice n ≥ 4 există un poligon convex cu n laturi, nu toate egale, astfel încât suma distanțelor de la orice punct interior la laturi să fie constantă.

(Baraj – 1974, Dan Schwartz)

Soluție:

Să observăm mai întâi că triunghiul echilateral şi dreptunghiul cu proprietatea că suma distanțelor oricărui punct interior la laturi este constantă, P(4) este deci adevărată. Pentru a demonstra P(5) pornim de la triunghiul echilateral ABC pe care-l tăiem cu două drepte paralele după o direcție care nu este paralelă cu nici o latură a triunghiului ABC, ca în figură.



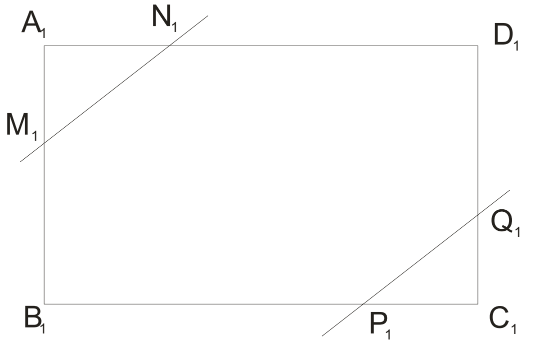


Fig. 5.1 Fig. 5.2

Pentagonul BMNQP are proprietatea cerută. Pentru P(6) considerăm dreptunghiul A_1 B_1 C_1 D_1 pe care-l tăiem cu două drepte paralele după o direcție neparalelă cu laturile dreptunghiului; atunci hexagonul B_1 M_1 N_1 D_1 P_1 Q_1 are proprietatea cerută. Am demonstrat că proprietatea este adevărată pentru n=4,5,6. Vom demonstra implicația $P(n)\Rightarrow P(n+2)$ (inducție cu pasul 2). Considerăm un poligon convex cu n laturi care satisface condiția problemei. Repetând procedeul de mai sus, tăiem două vârfuri ale poligonului cu două drepte paralele după o direcție neparalelă cu nici o latură a poligonului şi obținem un poligon cu n+2 laturi, nu toate egale. Suma distanțelor unui punct interior la laturi este egală cu suma distanțelor la laturile vechiului poligon, care este constantă, plus suma distanțelor la cele două laturi noi, care sunt paralele, deci şi această sumă este constantă.

R5.1.3. Se dau n suprafețe pătratice arbitrare ($n \geq 2$). Să se demonstreze că ele pot fi tăiate în părți, astfel încât din părțile obținute să se poată construi o nouă suprafață pătratică.

(Golovina L. I., Iaglom I.M. – Inducția în geometrie, Ed. Tehnică, București, 1964)

Soluție:
În demonstrația prin inducție este esențial cazul n=2. Fie suprafețele pătratice [ABCD] şi [A'B'C'D'] având lungimile laturilor l, respectiv l'. Dacă l=l' ducem diagonalele [AC], [B'D'] formând patru suprafețe triunghiulare care se pot compune formând un pătrat cu latura lV2 ca în figură. Fig 5.3

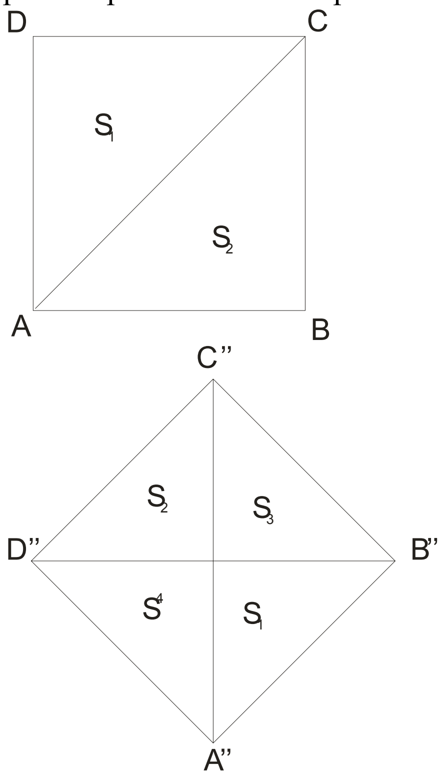


Fig 5.3.

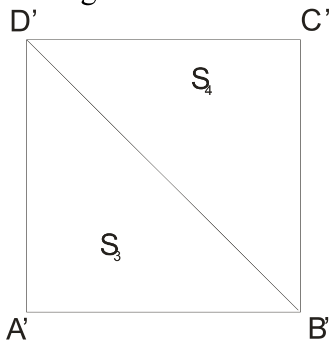
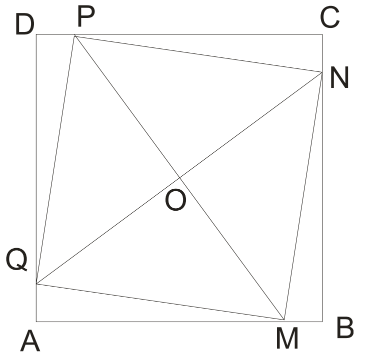


Fig. 5.4

În cazul l ≠ l'. putem lua l > l'.
Considerăm punctele M∈(AB), N∈(BC), P∈(CD), Q∈(DA), astfel ca
$AM = BN = CP = DQ = \frac{l + l'}{2}$. Atunci $MN = NC = PD = QA = \frac{l - l'}{2}$



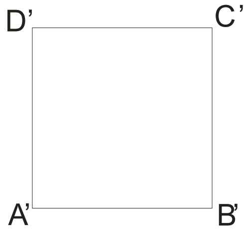
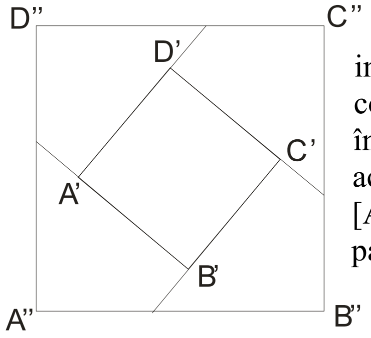


Fig. 5.5 fig. 5.6

Triunghiurile dreptunghice AQM, BMN, CNP, DPQ fiind congruente, rezultă QM=MN=NP=PQ, deci MNPQ este romb. Din congruența triunghiurilor AQM și BMN rezultă

$m\angle(AMQ) = m\angle(BNM)$. Dar $m\angle(BMN) + m\angle(BNM) = 90°$, deci $m(AMQ) + m(BMN) = 90°$ și prin urmare $m(QMN) = 90°$ și MNPQ este pătrat cu lungimea laturii $MN = \sqrt{\left(\frac{l+l'}{2}\right)^2 + \left(\frac{l-l'}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{l^2 + l'^2}{2}}$ și lungimea diagonalei $MP = \sqrt{l^2 + l'^2}$.



Notând $[MP] \cap [NQ] = \{0\}$, patrulaterele inscriptibile AQOM, BMON, CNOP, DPOQ sunt congruente, deci suprafața pătratică s-a descompus în patru suprafețe patrulatere congruente. Detașăm aceste suprafețe și le alăturăm suprafeței pătratice [A'B'C'D'], astfel ca vârfurile O ale celor patru patrulatere devin vârfurile A''B''C''D'' ale noului pătrat de latură A''B''= V(l^2+l'^2) . Să demonstrăm implicația P(n)⇒P(n+1). Presupunem proprietatea adevărată pentru n suprafețe pătratice (n ≥ 2). Fie S_1, S_2, fig. 5.7 …,S_n, S_{n+1} suprafețe pătratice. Conform ipotezei de inducție, S_1, S_2, …,S_n, pot fi tăiate în părți astfel încât din părțile obținute să se poată construi o altă suprafață pătratică S'. Procedând cu S' și S_{n+1} ca și în cazul n=2, obținem o nouă suprafață pătratică S'' și demonstrația este încheiată.

R5.1.4. Să se arate că numărul părților în care planul este împărțit de n drepte (n ≥ 1) două câte două secante și trei câte trei neconcurente este $F_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$.

Soluție:

Vom înțelege prin parte a planului, fie o anumită suprafață poligonală, fie o anumită intersecție de semiplane închise. În cazul n=1, o dreaptă împarte planul în două semiplane: $F_1 = \frac{1^2 + 1 + 2}{2}$. Presupunem că n drepte (n ≥ 1), două câte două secante şi trei câte trei neconcurente, împart planul în $F_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$ părți. Considerăm în plan n+1 drepte în poziția generală. Primele n dintre ele împart planul în F_n părți. $A(n+1) - a$ dreaptă, pe care o notăm cu d, se intersectează cu fiecare dintre cele n drepte (din ipoteză). Cele n puncte distincte de pe dreapta d determină pe aceastan-1 segmente şi două semidrepte. Astfel, dreapta d intersectează n+1 părți din F_n părți câte erau, deci numărul părților creşte cu n+1. Rezultă

$$F_{n+1} = F_n + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + 3n + 4}{2} = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2}$$

R5.1.5. Se dă o suprafață poligonală convexă $[A_1A_2A_3\ldots A_n]$ (n ≥ 5) cu proprietatea că oricare trei diagonale nu sunt concurente. Să se arate că numărul suprafețelor poligonale în care $[A_1A_2A_3\ldots A_n]$ este descompusă de diagonalele sale este

$$f_n = \frac{(n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 12)}{24}.$$

(Iaglom A.M., Iaglom I.M. – Probleme neelementare tratate elementar)

Soluție:

Pentru n=5, suprafața $[A_1A_2A_3\ldots A_n]$ se descompune în 11 suprafețe (vezi figura), notate cu $S_1\ldots S_{11}$. Avem $f_n = \frac{4 \cdot 3 \cdot (25 - 15 + 12)}{24} = 11$. Presupunem proprietatea adevărată pentru (n ≥ 5) şi considerăm o suprafață poligonală convexă $[A_1A_2A_3\ldots A_n\ A_{n+1}]$ cu oricare trei diagonale neconcurente. Ducem diagonalele acestei suprafețe exceptându-le pe cele care pleacă din vârful A_{n+1}. Notăm $[A_1A_2A_3\ldots A_n\ A_{n+1}]=S_{n+1}$, $[A_1A_2A_3\ldots A_n]=S_n$ .Din ipoteza de inducție avem că S_n se descompune în f_n suprafețe poligonale.

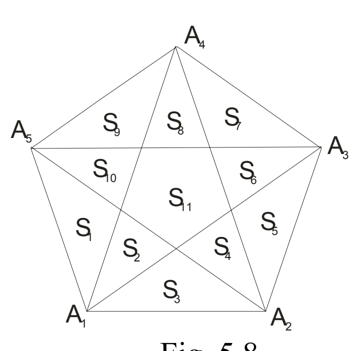


Fig. 5.8

S_{n+1} se descompune în f_n+1 suprafețe poligonale, deoarece am adăugat $[A_1A_2A_3\ldots A_n\ A_{n+1}]$ şi să ducem diagonalele din vârful A_{n+1} în

număr de n-2, apoi să vedem cu cât se măreşte numărul f_n+1.
Considerăm diagonala [$A_{n+1}A_k$] (k∈2,3,…n-1) (vezi figura 5.8). De o parte a ei se află k-1 vârfuri ($A_1A_2A_3…A_{k+1}$) iar în cealaltă n-k vârfuri ($A_{k+1}A_{k+2}…A_n$). Deci diagonala [$A_{n+1}A_k$] intersectează (k-1)(n-k) diagonale ale lui S_{n+1}, prin urmare se obţine un adaos de (k-1)(n-k)+1 suprafeţe poligonale. Raţionamentul este valabil pentru toate cele n-2 diagonale ce pornesc din A_{n+1} şi putem scrie:

$$f_{n+1} = f_n + 1 + \sum_{k=1}^{n-2}\left[(k-1)(n-k)+1\right] = f_n + 1 + \sum_{k=2}^{n-1}\left[(n-1)k - k^2 + 1\right] = f_{n+1} + (n-1)\sum_{k=1}^{n-2} k -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-2} k^2 + n - 2 = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24} + (n+1)\frac{(n-2)(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6} +$$

$$+ n - 1 = \frac{n(n-1)(n^2-n+10)}{24} = \frac{n(n-1)\left[(n+1)^2 - 3(n+1) + 12\right]}{24}.$$

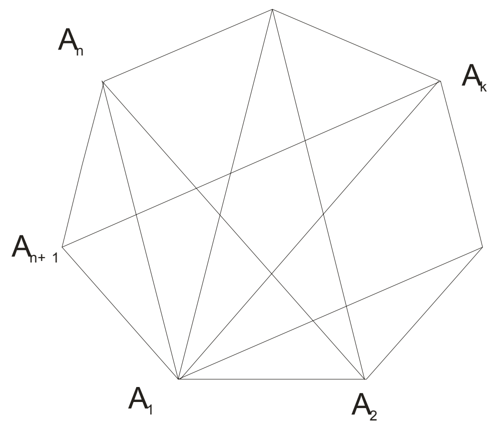


fig. 5.9

Observaţie: Formula pentru f_n rămâne valabilă atât pentru suprafeţe triunghiulare $f_3 = \frac{2\cdot 1(9-9+12)}{24} = 1$, cât şi pentru suprafeţe patrulatere convexe cu 2 diagonale $f_4 = \frac{3\cdot 2(16-12+12)}{24} = 4$

R5.1.6. Fie în plan o reţea de linii ce unesc între ele punctele $A_1,A_2,…A_n$ şi nu au alte puncte comune. Presupunem reţeaua ca fiind construită "dintr-o singură bucată", adică din fiecare punct $A_1,A_2,…A_n$ se poate ajunge în oricare altul numai de-a lungul liniilor reţelei. O astfel de reţea de linii o numim **hartă**, punctele date – **vârfurile** ei, porţiunile de curbe dintre două vârfuri vecine – **frontierele** (graniţele) hărţii, porţiunile din plan în care ea este descompusă de către frontiere – **ţările** hărţii.

Teorema lui Euler

Să notăm cu S numărul ţărilor unei hărţi arbitrare, cu l numărul frontierelor ei şi cu p numărul vârfurilor. Atunci

S+p=l+2

Soluție:

Demonstrăm egalitatea prin inducție după numărul l al frontierelor hărții.

I. Fie l=0, atunci S=1, p=1 $\Rightarrow$S+p=l+2

II. Presupunem că relația este adevărată pentru orice hartă care are n frontiere. Considerăm o hartă cu l=n+1 frontiere, S țări şi p vârfuri. Distingem două situații:

i) Pentru orice pereche de vârfuri ale hărții există un drum unic care le uneşte de-a lungul frontierelor (există cel puțin unul, deoarece harta este conexă). În acest caz harta nu conține nici un contur închis. (vezi figura 5.9)

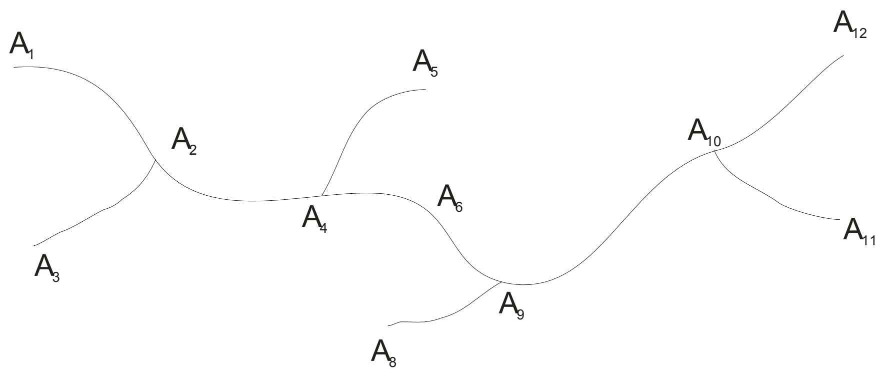


fig. 5.10

În acest caz S=1. Să arătăm că pe o astfel de hartă se va găsi cel puțin un vârf aparținând numai unei singure frontiere (de exemplu A_1 sau A_3)numit vârf extrem. Într-adevăr să luăm un vârf arbitrar. Dacă el nu este extrem, atunci el reprezintă capătul a cel puțin două frontiere. Să parcurgem una dintre frontiere până la al doilea vârf al său. Dacă nici acest vârf nu este extrem, atunci el constituie capătul unei alte frontiere şi parcurgem această frontieră până la al doilea capăt al ei şi aşa mai departe. Deoarece harta nu conține contururi închise, nu ne vom întoarce la nici unul din vârfurile parcurse înainte şi după un număr finit de paşi ajungem la un vârf care va fi extrem. Îndepărtând acest vârf împreună cu o frontieră care îl are drept capăt, obținem o nouă hartă în care l'=l-1, S'=S, p'=p-1… Din ipoteza de inducție, S'+p*=l'+2, de unde S+p=l+2.

ii) Există două vârfuri unite prin mai multe drumuri (vezi figura 5.10)

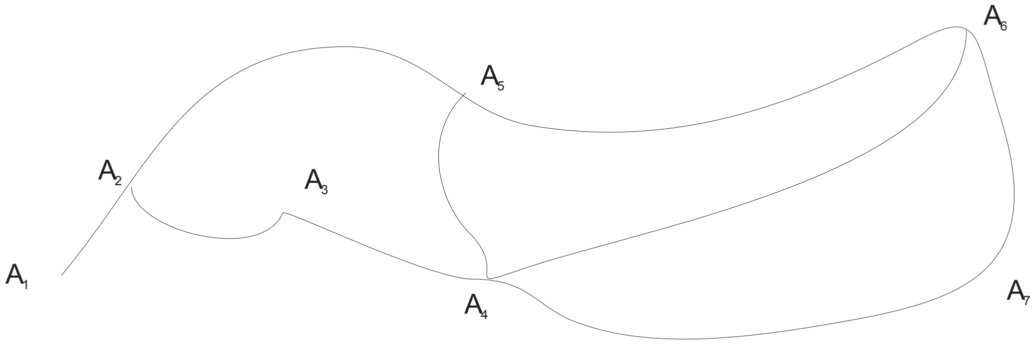


fig. 5.11

Îndepărtând una din frontierele acestui contur (fără vârfuri) obţinem o nouă hartă conexă în care l'=l-1, p'=p. S'=S-1. Din ipoteza de inducţie S'+p'=l'+2, de unde S+p=l+2.

R5.1.7. Notăm cu v numărul vârfurilor, m numărul muchiilor şi f numărul feţelor unui poliedru din spaţiul euclidian. Pentru a obţine formula v-m+f=2, în cazul unui poliedru simplu (conex) procedăm în modul următor: Ne imaginăm că poliedrul este confecţionat dintr-o foiţă de cauciuc subţire şi observăm că dacă înlăturăm una din feţe putem deforma suprafaţa rămasă întinzând-o pe un plan. Obţinem astfel o hartă planară care ale acelaşi număr de vârfuri şi muchii ca poliedrul iniţial. Înlocuind faţa înlăturată cu faţa infinită şi utilizând rezultatul demonstrat mai sus pentru hărţi plane conexe găsim relaţia lui Euler în cazul poliedrelor simple.
Să arătăm că există cinci tipuri de poliedre conexe regulate şi anume: tetraedrul, hexaedrul (cubul), dodecaedrul, octaedrul şi icosaedrul regulat.

Soluţie:
Fie q numărul muchiilor de pe o faţă şi p numărul muchiilor ce pleacă dintr-un vârf. Cum fiecare muchie aparţine frontierei pentru două feţe şi conţine două vârfuri, rezultă că $2m = f \cdot q = v \cdot p \Rightarrow v = \frac{2m}{p}, f = \frac{2m}{q}$.

Din formula lui Euler $\frac{2m}{p} - m + \frac{2m}{q} = 2$ sau $m\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Deci $p < 6$ şi analog, $q < 6$. Dacă $p > 4 \Rightarrow \frac{1}{q} > \frac{1}{2} - \frac{1}{p} >, > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{p}$ deci $q < 4$. Obținem că singurele perechi (p, q) care verifică inegalitatea $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} > 0$ sunt (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)

p	*q*	*v*	*m*	*f*	**Denumire**
3	3	4	6	4	tetraedru
3	4	8	12	6	cub
4	3	6	12	8	octaedru
3	5	20	30	12	dodecaedru
5	3	12	30	20	icosaedru

6. Metoda vectorială în geometrie

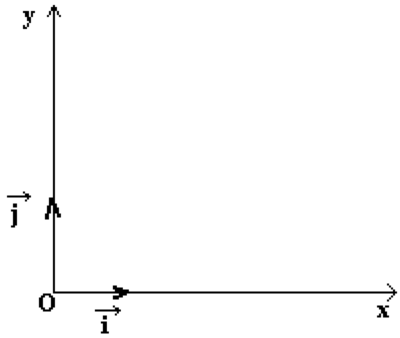
6.1. Considerații teoretice

Pentru studiul geometriei euclidiene plane se folosesc mai multe modele: sintetic, analitic, vectorial, complex. Fiecare dintre aceste modele se dovedeşte a fi mai eficient într-un anumit tip de probleme, de aceea este util să le cunoaştem pe toate şi să avem posibiltatea de a trece cu uşurință de la unul la altul. Modelul vectorial se pretează la probleme în care apar drepte, segmente, rapoarte, probleme care de multe ori se rezolvă mai simplu decât s-ar rezolva pe cale sintetică. Planul euclidian definit axiometric (modelul sintetic) îl considerăm cunoscut, elementele sale fiind puncte.

Modelul analitic îl obținem alegând un sistem de coordonate în plan şi considerând planul ca produsul cartezian a două drepte (ortogonale) :
$\pi = \mathbf{R}^2 = \{(x, y) \backslash x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$.

Modelul vectorial îl obținem alegând în planul π un punct fix, numit origine şi doi vectori necoliniari de bază, de exemplu $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ reprezentați prin două săgeți (versorii directori ai axelor O_x şi O_y).

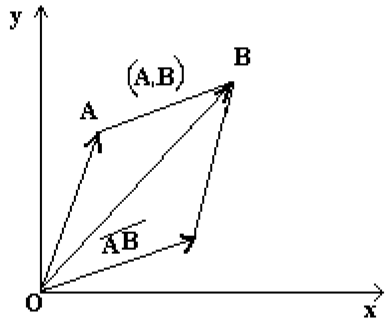
Fig. 6.1.



Deci $\pi = \mathbf{R}^2 = \{\vec{v} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \backslash x, y \in \mathbf{R}\}$.
Orice punct M din planul π are în modelul analitic două coordonate $M(x,y)$, deci este unic determinat de două numere reale $x \in \mathbf{R}$ (abscisa) şi $y \in \mathbf{R}$ (ordonata). Acelaşi punct M are în modelul vectorial un vector de poziție $\bar{r}_M = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, deci orice punct este unic determinat de vectorul său de poziție, care se reprezintă printr-o săgeată ce porneşte din originea O şi se termină în M.

Pentru o pereche de puncte $(A,B) \in \pi \times \pi$, reprezentăm printr-o săgeată ce porneşte din A şi se termină în B, segmentul orientat (A,B). Fiecărui segment orientat (A,B) i se ataşează un vector $\overline{AB} \in \mathbf{R}^2$, definit prin $\overline{AB} = \overline{r_B} - \overline{r_A}$.

Fig. 6.2.



Trei puncte $A, B, C \in \pi$ sunt coliniare dacă vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ sunt coliniari, adică dacă există un număr real t astfel ca $\overline{AC} = t \cdot \overline{AB}$

Mulțimea punctelor coliniare cu două puncte distincte A, B formează dreapta AB.

Dintre ecuațiile dreptei amintim:

a) $D: \overline{r} = \overline{r_0} + t \cdot \overline{v};\ t \in \mathbf{R}$

Ecuația dreptei ce trece prin vârful vectorului $\overline{r_0}$ şi este paralelă cu vectorul $\overline{v} \neq \overline{0}$.

b) $D: \overline{r} = (1-t)\overline{r_A} + t \cdot \overline{r_B};\ t \in \mathbf{R}$.

Ecuația dreptei ce trece prin A şi B.

În ecuația b) a dreptei, punctul M, al cărui vector de poziție este $\overline{r_M} = (1-t)\overline{r_A} + t \cdot \overline{r_B}$, cu $t \in [0,1]$ se află pe segmentul $[AB]$ şi este determinat de raportul distanțelor $t = \dfrac{d(A,M)}{d(A,B)} = \dfrac{\left\|\overline{AM}\right\|}{\left\|\overline{AB}\right\|}$.

În particular mijlocul C al segmentului $[AB]$ are vectorul de poziție

$\overline{r_C} = \frac{1}{2}\left(\overline{r_A} + \overline{r_B}\right)$.

Dacă *ABC* este un triunghi, atunci pentru orice punct *M* din plan, există numerele reale α, β, γ unic determinate astfel ca:

$$\overline{r_M} = \alpha \cdot \overline{r_A} + \beta \cdot \overline{r_B} + \gamma \cdot \overline{r_C}\text{, cu } \alpha + \beta + \gamma = 1 .$$

Dacă α, β, γ sunt pozitive, punctul *M* se află în interiorul triunghiului *ABC* şi numerele α, β, γ reprezintă rapoarte de arii:

$$\alpha = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = ; \quad \beta = \frac{S_{MCA}}{S_{ABC}} ; \quad \gamma = \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}} .$$

În particular pentru punctele importante din triunghi avem:

$\overline{r_G} = \frac{1}{3}\left(\overline{r_A} + \overline{r_B} + \overline{r_C}\right)$ (centrul de greutate);

$\overline{r_I} = \frac{a \cdot \overline{r_A} + b \cdot \overline{r_B} + c \cdot \overline{r_C}}{a + b + c}$ (centrul cercului înscris);

$\overline{r_H} = \frac{tgA \cdot \overline{r_A} + tgB \cdot \overline{r_B} + tgC \cdot \overline{r_C}}{tgA + tgB + tgC}$ (ortocentrul triunghiului);

$\overline{r_O} = \frac{\sin 2A \cdot \overline{r_A} + \sin 2B \cdot \overline{r_B} + \sin 2C \cdot \overline{r_C}}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$ (centrul cercului circumscris);

$\overline{r_E} = \frac{3}{4}\overline{r_G} + \overline{r_H}$ (centrul cercului lui Euler);

Bibliografie

(1) BRÂNZEI, D. :Bazele geometriei analitice plane, Editura Paralele 45, Piteşti, 1999

(2) BESOIU, I., BESOIU, E. : Probleme de geometrie rezolvate cu vectori pentru clasele a IX-a şi a X-a, Editura STAR SOFT, Alba Iulia, 2000.

(3) BRÂNZEI, D., NECHITA,V., ŞERDEAN, V. : Dicționar de geometrie elementară, Editura Paralela 45, Piteşti, 2001.

(4) BIŞBOACĂ, N. : Teme complementare de geometrie, Editura Paralela 45, Piteşti, 1999.

(5) BRÂNZEI,D., ZANOSCHI, A. : Geometrie – probleme cu vectori, clasa a IX-a, Editura Paralela 45, Piteşti, 1999.

(6) NECHILĂ, P. : Algebră vectorială şi geometrie analitică, Editura Paralela 45, Piteşti, 2001.

(7) BRÂNZEI, D., ONOFRAŞ, E., ANIȚA, S., ISVORANU, GH. : Bazele raționamentului geometric, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1983.

(8) DRANCA, C., VORNICESCU, FL., RADU, L., VORNICESCU, N. : Probleme şi soluții de geometrie vectorială, analitică şi trigonometrie, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 2002.

(9) SIMIONESCU, GH., D. : Noțiuni de algebră vectorială şi aplicații în geometrie, Editura Tehnică, Bucureşti, 1982.

(10) CÎMPEAN, V., CÎMPEAN, V. : Vectori – geometrie, clasele IX – X, Editura Milenium, Alba Iulia, 2003.

(11) PIMSNER, M., POPA, S. : Probleme de geometrie elementară, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

(12) NICOLESCU, L., BUMBĂCEA, AL., CATANĂ, A., HORJA, P., NICULESCU, GH., OPREA, N.N ZARA, C. : Metode de rezolvare a problemelor de geometrie, Editura Universității din Bucureşti, 1998.

(13) ANDRICA, D., VARGA, Cs., VĂCĂREȚU, D. : Teme şi probleme alese de geometrie, Editura Plus, Bucureşti, 2002.
(14) NICULA, V. : Geometrie plană (sintetică, vectorială, analitică) – culegere de probleme, Editura Gil, Zalău, 2002.
(15) CSINTA, Th., MODAN, L. : Probleme de matematică date între 1998-2002 la concursul de admitere în grupul „GEIPI" al şcolilor superioare franceze de înalte studii inginereşti, vol. I, Editura Gil, Zalău, 2003.
(16) BRÂNZEI, D., ŞERDEAN, I., ŞERDEAN, V. : Olimpiadele balcanice de matematică pentru juniori, Editura Plas, Bucureşti, 2003.

6.2. Probleme rezolvate (6.1)

R6.2.1. Fie *ABCDE* un pentagon şi *M, N, P, Q, R, S* mijloacele segmentelor *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *MP* şi *NQ*. Să se arate că $RS = \frac{1}{4} AE$.

Soluție. Avem $\overline{r_M} = \frac{1}{2}\left(\overline{r_A} + \overline{r_B}\right)$ şi analoagele.

Rezultă $\overline{r_R} = \frac{1}{4}\left(\overline{r_A} + \overline{r_B} + \overline{r_C} + \overline{r_D}\right)$ şi $\overline{r_S} = \frac{1}{4}\left(\overline{r_B} + \overline{r_C} + \overline{r_D} + \overline{r_E}\right)$, deci $\overline{RS} = \overline{r_S} - \overline{r_R} = \frac{1}{4}\left(\overline{r_E} - \overline{r_A}\right) = \frac{1}{4} AE$.

Atunci $\left\|\overline{RS}\right\| = \frac{1}{4}\left\|\overline{AE}\right\|$ şi în plus segmentele *RS* şi *AE* sunt paralele.

R6.2.2. Două segmente $\left[A_1, B_1\right]$ şi $\left[A_2, B_2\right]$ alunecă pe două drepte $\left(d_1\right)$ şi $\left(d_2\right)$. Fie A_3 mijlocul segmentului $\left[A_1, A_2\right]$ şi B_3 mijlocul segmentului $\left[B_1, B_2\right]$. Să se arate că segmentul $\left[A_3, B_3\right]$ are lungime constantă.

Soluție. Dacă $\overline{r_X}$ este vectorul de poziție al punctului *X*, avem: $\overline{r_{A_3}} = \frac{1}{2}\left(\overline{r_{A_1}} + \overline{r_{A_2}}\right)$, $\overline{r_{B_3}} = \frac{1}{2}\left(\overline{r_{B_1}} + \overline{r_{B_2}}\right)$ şi atunci $\overline{A_3B_3} = \overline{r_{B_3}} - \overline{r_{A_3}} =$ $= \frac{1}{2}\left(\overline{r_{B_1}} - \overline{r_{A_1}} + \overline{r_{B_2}} - \overline{r_{A_2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2}\right) = \overline{c}$, vector constant, căci vectorii $\overline{A_1B_1}$ şi $\overline{A_2B_2}$,asociați segmentelor orientate $\left(A_1, B_1\right)$ şi $\left(A_2, B_2\right)$, sunt vectori constanți.

Observație:

a) Mărimea segmentului A_3B_3 este egală cu mediana unui triunghi *ABC* în care $AB \equiv A_1B_1$, $AC \equiv A_2B_2$ şi $\angle BAC = \angle\left(d_1, d_2\right)$.

b) Din egalitatea vectorială rezultă că în orice două poziții ale segmentelor care alunecă, segmentele $\left[A_3, B_3\right]$ şi $\left[A_3', B_3'\right]$ sunt paralele.

c) Rezultatul se menține dacă se definesc punctele A_3 şi B_3 ca împărțind segmentele $\left[A_1, A_2\right]$, respectiv $\left[B_1, B_2\right]$ în acelaşi raport.

R6.2.3. Două mobile M_1 şi M_2 se mişcă cu viteze constante $\overline{v_1}$ şi $\overline{v_2}$ pe dreptele (d_1) şi (d_2). Dacă M este mijlocul segmentului $[M_1, M_2]$ să se arate că M se deplasează pe o dreaptă, cu viteză constantă.

Soluție. Fie A_1, A_2 pozițiile din care pleacă cele două mobile şi $M_1(t), M_2(t)$ pozițiile lor după timpul *t*. Avem: $\overline{r_{M_1}} = \overline{r_{A_1}} + t \cdot \overline{v_1}$, $\overline{r_{M_2}} = \overline{r_{A_2}} + t \cdot \overline{v_2}$ şi $\overline{r_M} = \frac{1}{2}\left(\overline{r_{M_1}} + \overline{r_{M_2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{r_{A_1}} + \overline{r_{A_2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{v_1} + \overline{v_2}\right) = \overline{r_A} + t \cdot \overline{v}$, unde A este poziția inițială a lui M, iar $\overline{v} = \frac{1}{2}\left(\overline{v_1} + \overline{v_2}\right)$ este media vitezelor. O mişcare rectilinie şi uniformă este definită de legea: $\overline{r_{M_{(t)}}} = \overline{r_{M_{(0)}}} + t \cdot \overline{v}$, *t>0* reprezintă timpul, deci *M* se mişcă rectiliniu şi uniform.

Observație: Dacă *P* este un punct de pe segmentul $[M_1, M_2]$ care îl împarte în raport constant, atunci punctul *P* se mişcă pe o dreaptă cu viteza medie ponderată a vitezelor punctelor M_1 şi M_2.

R6.2.4. Fie *ABC* un triunghi şi *M* un punct în planul său. Notăm cu A_2, B_2, C_2 simetricele lui *M* față de mijloacele A_1, B_1, C_1 ale laturilor *BC*, *CA*. *AB*. Să se arate că dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente.

Soluție. Avem $\overline{r_{A_2}} = 2\overline{r_{A_1}} - \overline{r_M} = \overline{r_B} + \overline{r_C} - \overline{r_M}$ şi analoagele.

Un punct de pe dreapta AA_2 are vector de poziție de forma :

$AA_2 : \overline{r} = (1-t)\overline{r_A} + t \cdot \overline{r_{A_2}} = (1-t)\overline{r_A} + t \cdot \left(\overline{r_B} + \overline{r_C} - \overline{r_M}\right),\ t \in \mathbf{R}$.

Analog:

$BB_2 : \overline{r} = (1-s)\overline{r_B} + s \cdot \left(\overline{r_C} + \overline{r_A} - \overline{r_M}\right),\ s \in \mathbf{R}$;

$CC_2 : \overline{r} = (1-u)\overline{r_C} + u \cdot \left(\overline{r_A} + \overline{r_B} - \overline{r_M}\right),\ u \in \mathbf{R}$;

Pentru $t = s = u = \frac{1}{2}$ se obține acelaşi punct:

$$\overline{r_N} = \frac{1}{2}\left(\overline{r_A} + \overline{r_B} + \overline{r_C}\right) - \frac{1}{2}\overline{r_M} = \frac{3}{2}\overline{r_G} - \frac{1}{2}\overline{r_M};$$

Punctul de intersecție *N* se află pe dreapta *GM*.

R6.2.5. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se iau punctele variabile M şi N astfel ca $BM \equiv CN$. Să se arate că punctul P, mijlocul segmentului $[M,N]$ se mişcă pe o dreaptă paralelă cu bisectoarea unghiului A.

Soluție. Alegem originea în A şi atunci $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AC} = \overline{c}$.

Avem: $\overline{r_M} = \overline{b} - t \cdot \frac{\overline{b}}{b}$, $\overline{r_N} = \overline{c} - t \cdot \frac{\overline{c}}{c}$, $\overline{r_P} = \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2} - t \cdot \left(\frac{\overline{b}}{b} + \frac{\overline{c}}{c}\right)$, $t \in \mathbf{R}$.

Dar $\frac{\overline{b}}{b}$ şi $\frac{\overline{c}}{c}$ sunt versorii laturilor AB şi AC, suma lor dând direcția bisectoarei din A. Deci $\overline{r_P} = \overline{r_{A'}} - t \cdot \overline{d_1}$ $t \in \mathbf{R}$, P se află pe dreapta ce trece prin A', mijlocul lui BC, paralelă cu bisectoarea din A.

R6.2.6. Fie triunghiul $A_1A_2A_3$ şi M un punct în planul său. Pentru fiecare permutare a vârfurilor $A_{\sigma(1)}$, $A_{\sigma(2)}$, $A_{\sigma(3)}$, notăm cu $M_{\sigma(1)}$ simetricul lui M față de $A_{\sigma(1)}$, cu $M_{\sigma(2)}$ simetricul lui $M_{\sigma(1)}$ față $A_{\sigma(2)}$, $M_{\sigma(3)}$ simetricul lui $M_{\sigma(2)}$ față de $A_{\sigma(3)}$. Să se arate că pentru toate cele 6 permutări se obțin trei puncte M_1, M_2, M_3 care formează un triunghi de arie $S_{M_1M_2M_3} = 16 \cdot S_{A_1A_2A_3}$.

Soluție. Avem:
$$\overline{r_{M_{\sigma(1)}}} = 2\overline{r_{A_{\sigma(1)}}} - \overline{r_M};$$
$$\overline{r_{M_{\sigma(2)}}} = 2\overline{r_{A_{\sigma(2)}}} - 2\overline{r_{A_{\sigma(1)}}} + \overline{r_M};$$
$$\overline{r_{M_{\sigma(3)}}} = 2\overline{r_{A_{\sigma(3)}}} - 2\overline{r_{A_{\sigma(2)}}} + 2\overline{r_{A_{\sigma(1)}}} - \overline{r_M};$$

Cele trei puncte au vectorii de poziție:

$\overline{r_{M_1}} = 2\left(\overline{r_{A_2}} + \overline{r_{A_3}} - \overline{r_{A_1}}\right) - \overline{r_M}$;

$\overline{r_{M_2}} = 2\left(\overline{r_{A_1}} + \overline{r_{A_3}} - \overline{r_{A_2}}\right) - \overline{r_M}$;

$\overline{r_{M_3}} = 2\left(\overline{r_{A_2}} + \overline{r_{A2}} - \overline{r_{A3}}\right) - \overline{r_M}$;

Avem: $\overline{M_1M_2} = 4\left(\overline{r_{A_1}} - \overline{r_{A_2}}\right) = 4\overline{A_2A_1}$, deci laturile triunghiului $M_1M_2M_3$ sunt paralele cu ale triunghiului $A_1A_2A_3$ şi de patru ori mai mari. Raportul de asemănare este 4, iar raportul ariilor 16.

R6.2.7. Să se determine locul geometric al centrelor de greutate al triunghiurilor A_1, B_1, C_1 cu vârfurile variabile pe laturile *BC*, *CA*, *AB* ale triunghiului *ABC*.

Soluție. Avem: $\overline{r_{A_1}} = (1-t)\cdot\overline{r_B} + t\cdot\overline{r_C}$, $t\in[0,1]$;
$$\overline{r_{B_1}} = (1-s)\cdot\overline{r_C} + s\cdot\overline{r_A},\quad s\in[0,1];$$
$$\overline{r_{C_1}} = (1-u)\cdot\overline{r_A} + u\cdot\overline{r_B},\quad u\in[0,1];$$

$$\overline{r_{G_1}} = \frac{1}{3}\left(\overline{r_{A_1}} + \overline{r_{B_1}} + \overline{r_{C_1}}\right) = \frac{1-u+s}{3}\overline{r_A} + \frac{1-t+u}{3}\overline{r_B} + \frac{1-s+t}{3}\overline{r_C}.$$

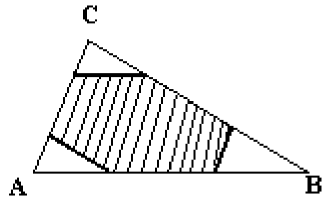
Notând $\alpha = \frac{1-u+s}{3}$, $\beta = \frac{1-t+u}{3}$, $\gamma = \frac{1-s+t}{3}$, avem $\alpha+\beta+\gamma = 1$,

$\alpha \ge 0, \beta \ge 0, \gamma \ge 0$, $1-u+s \le 1-0+1 = 2$ deci $\alpha \le \frac{2}{3}, \beta \le \frac{2}{3}, \gamma \le \frac{2}{3}$. Din simetrie se obțin $\alpha \ge \frac{1}{3}, \beta \ge \frac{1}{3}, \gamma \ge \frac{1}{3}$, deci locul geometric este

$$\left\{\overline{r} = \alpha\cdot\overline{r_A} + \beta\cdot\overline{r_B} + \gamma\cdot\overline{r_C} \setminus \alpha+\beta+\gamma = 1, \alpha\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right], \beta\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right], \gamma\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\right\},$$ care

reprezintă interiorul şi frontiera unui hexagon în care trei laturi sunt treimile din mijloc ale fiecărei laturi din triunghiul *ABC*.

Fig. 6.3.



7. Probleme de concurență şi de coliniaritate rezolvate vectorial

Aceasta temă este o continuare a temei precedente în care au fost amintite principalele noțiuni teoretice , necesare rezolvării problemelor de geometrie vectorială.

Pentru demonstrarea problemelor de coliniaritate amintim următoarea :

Teoremă de coliniaritate: Doi vectori nenuli sunt *coliniari* dacă şi numai dacă există $\alpha \in \Re^*$ astfel încât $\vec{a} = \alpha\vec{b}$.

Ca o consecință a teoremei avem condiția de coliniaritate a trei puncte : Punctele *A, B, C* sunt coliniare dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari.

Bibliografie

- *L. Nicolescu, A. Bumbăcea, Metode de rezolvare a problemelor de geometrie, Ed. Univ. Bucureşti, 1998, pag 7-79.*
- *L. Nicolescu, V.Boskoff, Probleme practice de geometrie, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990*
- *D. Andrica, C. Varga, D. Văcărețu, Teme şi probleme alese de geometrie, Ed. Plus, Bucureşti, 2002.*

Probleme rezolvate (7.1)

R7.1.1 Teorema lui Menelaus : Fie triunghiul ABC şi punctele coliniare $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$. Atunci are loc relația $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$ (*)

Soluție. Considerăm cazul când două puncte sunt pe laturi şi unul pe prelungirea unei laturi (Fig.7.1)

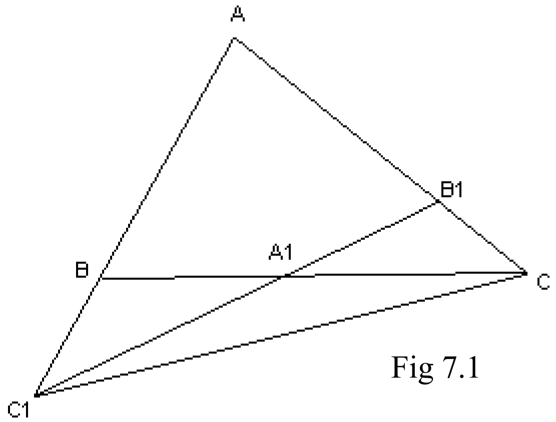


Fig 7.1

Notăm $\alpha = \frac{A_1B}{A_1C}$,

$\beta = \frac{B_1C}{B_1A}$,

$\gamma = \frac{C_1A}{C_1B}$.

Din $\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{1}{\alpha}$ rezultă $\frac{A_1C}{BC} = \frac{1}{1+\alpha}$, deci $\overrightarrow{CA_1} = \frac{1}{1+\alpha} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Din $\frac{B_1C}{B_1A} = \beta$ rezultă $\overrightarrow{CB_1} = \frac{\beta}{1+\beta}\overrightarrow{CA}$.

Avem $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{CA} + \frac{AC_1}{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\overrightarrow{AB}$.

Putem acum exprima vectorii $\overrightarrow{B_1A_1}$ şi $\overrightarrow{B_1C_1}$.

$$\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CB_1} = \frac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{CB} - \frac{\beta}{1+\beta}\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CA} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\overrightarrow{AB} - \frac{\beta}{1+\beta}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{1+\beta}\overrightarrow{CA} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) =$$

$= \frac{-1-\beta\gamma}{(1+\beta)(\gamma-1)}\overrightarrow{CA} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\overrightarrow{CB}.$ Din condiția ca vectorii $\overrightarrow{B_1A_1}$ şi $\overrightarrow{B_1C_1}$ să fie coliniari, rezultă $\frac{\gamma-1}{(1+\alpha)\gamma} = \frac{\beta(1+\beta)(\gamma-1)}{(1+\beta)(1+\beta\gamma)}$, de unde obținem $\alpha\beta\gamma = 1$, care este tocmai (*)

Observații 1. Analog se tratează cazul când punctele A_1, B_1, C_1 sunt pe prelungirile laturilor.

2.Are loc şi reciproca teoremei : Dacă pentru punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ are loc relația (*) , atunci punctele A_1, B_1, C_1 sunt colineare.

Pentru demonstrația afirmației să considerăm configurația din (Fig 7.1).

Notând $\alpha = \dfrac{A_1B}{A_1C}$, $\beta = \dfrac{B_1C}{B_1A}$ şi $\gamma = \dfrac{C_1A}{C_1B} = \dfrac{1}{\alpha\beta}$, avem $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CB_1} =$

$= \dfrac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{CB} - \dfrac{\beta}{1+\beta}\overrightarrow{CA}$ (1)

$\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CB_1} = -\dfrac{1+\beta\gamma}{(1+\beta)(\gamma-1)}\overrightarrow{CA} + \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\overrightarrow{CB}$ şi înlocuind $\gamma = \dfrac{1}{\alpha\beta}$ obținem

$\overrightarrow{B_1C_1} = \dfrac{\alpha+1}{1-\alpha\beta}\left(\dfrac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{CB} - \dfrac{\beta}{1+\beta}\overrightarrow{CA}\right)$ (2). Din (1) şi (2) avem

$\overrightarrow{B_1C_1} = \dfrac{\alpha+1}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{B_1A_1}$, deci A_1, B_1, C_1 sunt puncte coliniare. Cealaltă situație se tratează analog.

R7.1.2. Teorema triunghiurilor ortologice

Fiind date două triunghiuri *ABC* si *A'B'C'* situate în acelaşi plan şi dispuse astfel încât perpendicularele din *A, B, C* pe laturile *B'C' , C'A' , A'B'* , sunt concurente , atunci şi perpendicularele din *A', B',C'* respectiv pe laturile *BC, CA, AB* sunt concurente.

Soluție

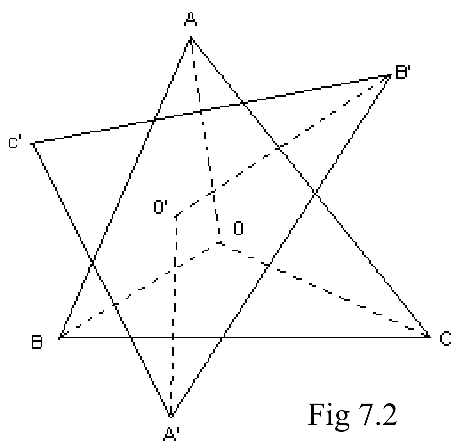


Fig 7.2

Notăm cu *O* punctul de concurență al perpendicularelor din *A, B, C* pe laturile triunghiului *A'B'C'* si cu *O*' punctul de intersecție al perpendicularelor din *A'* si *B'* pe *BC* respectiv *AC* (Fig 7.2). Avem :

$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{O'C'} - \overrightarrow{O'B'}$

$\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{O'A'} - \overrightarrow{O'C'}$

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{O'B'} - \overrightarrow{O'A'}$

Folosind aceste relații obținem $O = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{A'B'} =$ $= \overrightarrow{O'C'} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{O'B'} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{O'A'} \cdot \overrightarrow{BC}$. Cum $O'B' \perp AC$ şi $O'A' \perp BC$, avem $\overrightarrow{O'B'} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{O'A'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ şi deci $\overrightarrow{O'C'} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$, de unde rezultă $O'C' \perp AB$. Prin urmare perpendicularele din *A', B', C'* pe laturile triunghiului *ABC* sunt concurente în *O'*.

R7.1.3. (Dreapta lui Gauss)

Fie *ABCD* un patrulater convex, $AD \cap BC = \{E\}$, $AB \cap DC = \{F\}$. Atunci mijloacele *M, N, P* ale segmentelor (*AC*), (*BD*), (*EF*) sunt puncte colineare.

<u>Soluție</u>

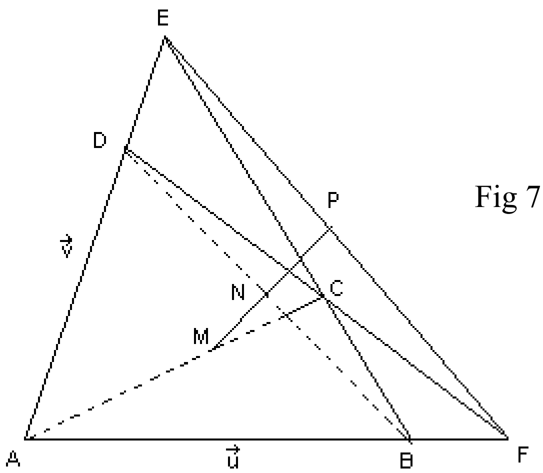


Fig 7.3

Notând $\frac{AF}{AB} = p$ şi $\frac{AE}{AD} = q$, $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AD} = \vec{v}$ (Fig 7.3) atunci $\overrightarrow{AF} = p\vec{u}, \overrightarrow{AE} = q\vec{v}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\vec{u} + \vec{v}\right), \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(p\vec{u} + q\vec{v}\right)$. Notând $\frac{CF}{CD} = r$,

$\frac{CB}{CE}=t$, avem $\overrightarrow{AC}\frac{p\vec{u}+r\vec{v}}{1+r}=\frac{\vec{u}+tq\vec{v}}{1+t}$, de unde $\frac{p}{1+r}=\frac{1}{1+t}$, $\frac{r}{1+r}=\frac{tq}{1+t}$.

Obținem $t=\frac{r}{pq}$ și $r=\frac{q(p-1)}{q-1}$. Înlocuind în $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$ obținem

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2(pq-1)}\left[p(q-1)\vec{u}+q(p-1)\vec{v}\right].$$

Din $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AP}= =\frac{1}{2}\left[(p-1)\vec{u}+(q-1)\vec{v}\right]$,

rezultă $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=\frac{pq}{2(pq-1)}\left[(p-1)\vec{u}+(q-1)\vec{v}\right]=\frac{pq}{2(pq-1)}\overrightarrow{NP}$,

prin urmare punctele *M, N, P* sunt coliniare .

Observație Rezultatul demonstrat mai sus mai are și următorul enunț : *Mijloacele diagonalelor unui patrulater complet sunt coliniare*. (punctele se află pe dreapta lui Gauss).

R7.1.4. Să se arate că punctele A_1, A_2, A_3 sunt coliniare dacă și numai dacă pentru orice punct *M* din plan (sau din spațiu) există numerele reale m_1, m_2, m_3 nu toate nule , astfel încât

$$m_1\cdot\overrightarrow{MA_1}+m_2\cdot\overrightarrow{MA_2}+m_3\cdot\overrightarrow{MA_3}=\vec{0},\ m_1+m_2+m_3=0 \quad (*)$$

Soluție. Fie punctele colineare A_1, A_2, A_3 și M un punct arbitrar . Există $\lambda\in\Re^*\setminus\{1\}$ astfel ca $\overrightarrow{A_1A_2}=\lambda\overrightarrow{A_1A_3}$ (1) Dar $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{MA_2}-\overrightarrow{MA_1}$, $\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{MA_3}-\overrightarrow{MA_1}$ și (1) devine $(1-\lambda)\overrightarrow{MA_1}-\overrightarrow{MA_2}+\lambda^{\rightarrow}$. Luând $m_1=1-\lambda$, $m_2=-1$, $m_3=\lambda$, relația este demonstrată.

Reciproc, fie punctele A_1, A_2, A_3 cu proprietatea că pentru orice punct M din plan (sau spațiu) există numerele $m_1, m_2, m_3\in\Re$, nu toate nule astfel încât au loc relațiile (*). Trebuie să arătăm că A_1, A_2, A_3 sunt coliniare.

Unul din numerele m_1, m_2, m_3 este nenul , fie $m_2\neq 0$

Din (*) , putem scrie $-(m_2+m_3)\overrightarrow{MA_1}+m_2\overrightarrow{MA_2}+m_3\overrightarrow{MA_3}=\vec{0}$, sau $m_2\overrightarrow{A_1A_2}+m_3\overrightarrow{A_1A_3}=\vec{0}$ (2) . Dacă $m_3=0$, ar rezulta $m_2=0$ sau $A_1=A_2$, imposibil , deci $m_3\neq 0$.

Arătăm că $m_3 \neq -m_2$. Dacă $m_3 = -m_2$, atunci $m_2\left(\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_1A_3}\right) = \vec{0}$ de unde rezultă $A_2 = A_3$, imposibil, aşadar $m_3 \neq -m_2 \neq 0$. Avem atunci $-\frac{m_3}{m_2} \in \Re^* - \{1\}$ şi relaţia (2) se scrie $\overrightarrow{A_1A_2} = -\frac{m_3}{m_2}\overrightarrow{A_1A_2}$, deci punctele A_1, A_2, A_3 sunt coliniare.

8. Metoda geometrică în rezolvarea problemelor de algebră

O cale deosebit de elegantă de aflare a soluției în cazul unor probleme de algebră, este cea geometrică. Formula distanței dintre două puncte în plan şi spațiu, teorema cosinusului, exprimarea în diferite moduri a unei arii sau a unui volum, sunt câteva dintre ideile care pot conduce la probleme interesante de algebră. Frumusețea acestor probleme constă în simplitatea şi naturalețea soluției care de cele mai multe ori nu se întrevede la prima vedere.

Vom prezenta câteva probleme de algebră în care apar inegalități, probleme de maxim şi minim, ecuații funcționale şi sisteme de ecuații rezolvate prin metoda geometrică.

Bibliografie

- *L.Panaitopol, V.Băndilă, M. Lascu, Inegalități, Ed.GIL, Zalău, 1996*
- *V.Tudor, Probleme de algebră cu rezolvări ingenioase, Ed. Carminis, Piteşti, 1999, pag 12-18*
- *M. Prajea, Demonstrarea unor inegalități prin metode geometrice, G.M. 1/2001, pag 12-18.*
- *G. Csongor, S. Groznev, I. Kortezov, Best Practices in Education,2002*

Probleme rezolvate (8.1)

A. Inegalități

R8.1.1. Să se demonstreze că

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge(a+b+c)\sqrt{2},\ \ a,b,c\in\mathbf{R}$$

Soluție. Dacă *a, b, c* sunt pozitive putem considera un model geometric sugerat de expresiile din primul membru care sunt distanțele şi de membrul doi în care apare diagonala unui pătrat de latură a+b+c. Considerăm aşadar pătratul ABCD cu latura a+b+c ca în figura 8.1

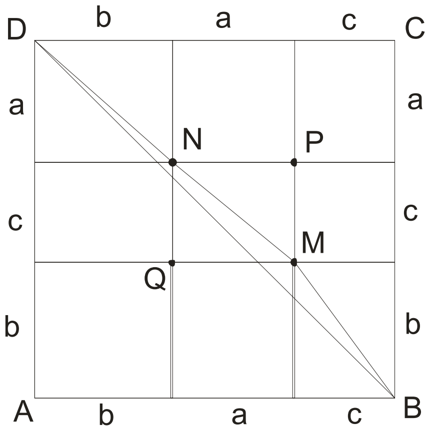


Fig. 8.1

Avem $BM=\sqrt{b^2+c^2}$, $MN=\sqrt{a^2+c^2}$, $ND=\sqrt{a^2+b^2}$, $BD=(a+b+c)\sqrt{2}$. Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu *BM+MN+ND≥BD*, care este evidentă.

Observații: Pornind de la figura… putem deduce şi alte inegalități.

BP+PD≥BD$\Leftrightarrow\ \sqrt{c^2+(b+c)^2}+\sqrt{a^2+(a+b)^2}\ge(a+b+c)\sqrt{2}$

BN+ND≥BD$\Leftrightarrow\ \sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2}+\sqrt{a^2+b^2}\ge(a+b+c)\sqrt{2}$

AQ+QP+PC≥AC$\Leftrightarrow\ \sqrt{2b^2}+2\sqrt{a^2+c^2}\ge(a+b+c)\sqrt{2}$

Dacă unul dintre numerele *a, b, c* este negativ, de exemplu *c≤0*, aplicăm modelul de mai sus numerelor *a, b, -c* şi avem

$\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geq (a+b-c)\sqrt{2} \geq (a+b+c)\sqrt{2}$, deci inegalitatea este adevărată pentru orice numere reale a, b, c, cu egalitate $\Leftrightarrow a=b=c$.

Inegalitățile de mai sus admit şi generalizări.

R8.1.2. Să se demonstreze inegalitatea lui Minkowski.

$$\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}+\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}+\ldots+\sqrt{a_n^{\,2}+b_n^{\,2}} \geq \sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots b_n)^2}$$

$a_i, b_i \in R, i=\overline{1,n}$.

Soluție:

Membrul întâi ne sugerează o sumă de segmente, iar membrul doi, diagonala unui dreptunghi. Considerăm dreptunghiul de laturi $a_1+a_2+\ldots+a_n$ şi $b_1+b_2+\ldots+b_n$ ca în figura 8.2

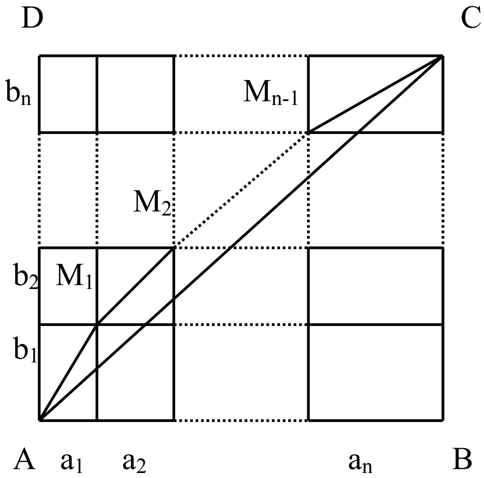


Fig. 8.2

Se formează n^2 dreptunghiuri de dimensiuni a_i şi b_j, $i,j=\overline{1,n}$. Dintre acestea considerăm dreptunghiurile de dimensiuni a_i şi b_j, $i,j=1,n$ ale căror diagonale sunt $\sqrt{a_i^{\,2}+b_i^{\,2}}, i=\overline{1,n}$. Diagonala dreptunghiului ABCD este $AC=\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}$

Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu

$AM_1+M_1M_2+\ldots+M_{n-1}\geq AC$, care este evidentă. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă toate dreptunghiurile formate sunt asemenea cu ABCD,

adică $\frac{a_i}{b_i}=\frac{AB}{AD}, i=\overline{1,n}$

Observaţii:

1. Făcând un raţionament analog pentru diagonala BD, obţinem

$$\sqrt{a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}}+\sqrt{a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}}+\ldots+\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}} \geq \sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+^2}$$
$$+(b_1+b_2+\ldots+b_n)$$

2. Dacă ABCD este pătrat, inegalitatea devine

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2} \geq \sqrt{2}(\sum_{i=1}^{n}a_i) = \sqrt{2}(\sum_{i=1}^{n}b_i)$$

3. Modelul foloseşte numere a_i, b_i pozitive, celelalte situaţii se deduc uşor din prima.

R8.1.3. Să se arate că dacă a, b, c$\in$R$^+$, are loc inegalitatea

$$\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{3}}+\sqrt{b^2+c^2-bc\sqrt{3}}+\sqrt{a^2+c^2-ac\sqrt{3}} \geq a\sqrt{2}$$

<u>Soluţie</u>:

Expresiile de sub radicali ne sugerează folosirea teoremei cosinusului. Considerăm modelul geometric din figura…, în care *OA=OD=a*, *OB=b*, *OC=c*, $m(BOC)=m(COD)=30^0$. Din teorema cosinusului avem:

$$AB=\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{3}} \quad BC=\sqrt{b^2+c^2-bc\sqrt{3}} \quad CD=\sqrt{a^2+c^2-ac\sqrt{3}}$$

Scriind *AB+BC+CD≥AD* obţinem inegalitatea cerută. Egalitate se obţine dacă *B*$\in$*(AD)* şi *C*$\in$*(AD)*. În acest caz avem *b=c* şi teorema sinusurilor aplicată în ΔABO, obţinem relaţia $b=a(\sqrt{3}-1)$, prin urmare inegalitatea devine egalitate$\Leftrightarrow$ $b=c=a(\sqrt{3}-1)$.

În exemplul următor, expresiile de sub radical ne sugerează un model spaţial.

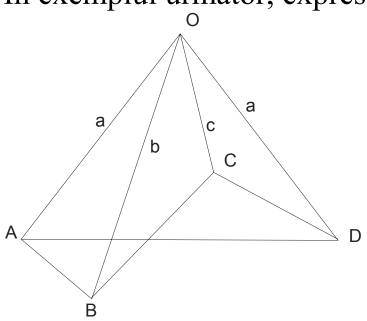


fig. 8.3

R8.1.4. Să se arate că oricare ar fi $x_i, y_i \in R,\ i=\overline{1,n},$ are loc inegalitatea:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2} \geq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2}$$

Soluție:
Considerăm un paralelipiped dreptunghic cu un vârf în originea unui sistem de axe ortogonale în spațiu, iar axele *OX*, *OY*, *OZ*, de-a lungul celor trei muchii ce pleacă din *O*. Considerăm pe *OX* punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pe *OY* punctele $y_1, y_2, \ldots, y_n$ iar pe *OZ* punctele $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Ducând prin punctele x_i, $i=\overline{1,n}$ plane paralele cu *YOZ*, prin punctele y_i, $i=\overline{1,n}$ plane paralele cu *XOZ*, iar prin punctele z_i, $i=\overline{1,n}$, plane paralele cu *XOY*, se formează o rețea spațială de paralelipipede. Exprimând faptul că diagonala din *O* a paralelipipedului este mai mică decât suma diagonalelor paralelipipedelor de dimensiuni x_i, y_i, z_i, $i=\overline{1,n}$, obținem inegalitatea cerută.

Comentariu:
Pentru inegalitatea

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}+\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}^2+a_n^2+a_1^2}+\sqrt{a_n^2+a_1^2+a_2^2}\ge$$
$$\ge\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\sqrt{3}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1= a_2=\ldots= a_n\ge 0$ putem folosi ca model de pornire un cub şi parcurgem un raționament similar cu cel prezentat în problema R - 8.1.4.

Exemplele următoare folosesc ca model geometric noțiunile de arie şi volum.

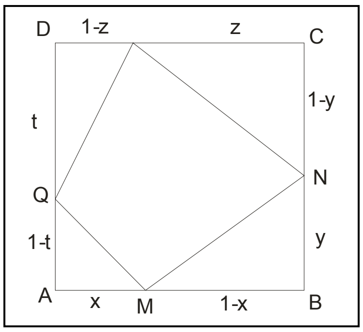
R8.1.5. Dacă $x, y, z, t\in[0,1]$, să se arate că

$$x(1-t)+y(1-x)+x(1-y)+t(1-z)\le 2.$$

Soluție:
Pe laturile pătratului *ABCD*, de latură 1, considerăm punctele $M\in[AB]$, $N\in[BC]$, $P\in[CD]$, $Q\in[AD]$, astfel încât $AM=x$, $BN=y$, $CP=z$, $DQ=t$ (vezi figura).

Suma ariilor triunghiurilor *AMQ*, *BMN*, *CNP* şi *DQP* este cel mult egală cu aria pătratului *ABCD*, ceea ce se scrie echivalent:

$$\frac{x(1-t)}{2}+\frac{y(1-x)}{2}+\frac{z(1-y)}{2}+\frac{t(1-z)}{2}\le$$



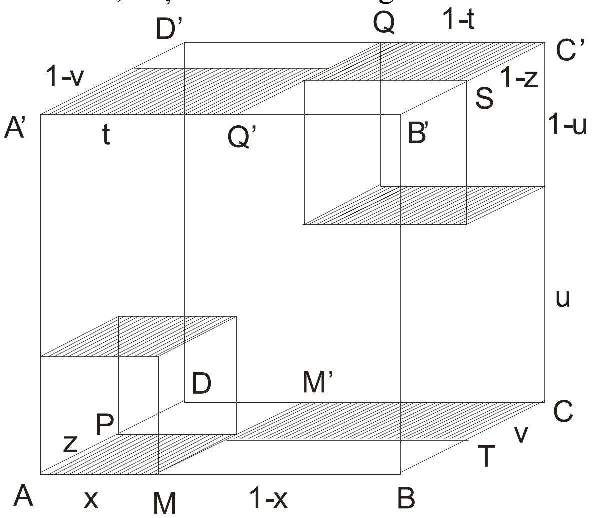
Egalitatea se realizează pentru $(x,y,z,t)\in\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$.

R8.1.6. Fie $x,y,z,t\in(0,1)$. Ştiind că aceste numere variază independent în intervalul $(0,1)$, să se arate că

$$xyz+uv(1-x)+(1-y)(1-v)t+(1-z)(1-u)(1-t)<1.$$

Soluție:

Considerăm cubul *ABCDA'B'C'D'*, de latură 1 şi punctele $M\in(AB)$, $N\in(AA')$, $P\in(AD)$, $R\in(CC')$, $S\in(B'C')$, $Q\in(C'D')$, astfel încât $AM=x$, $AN=y$, $AP=B'S=z$, $A'Q'=t$, $TC=v$. Exprimăm faptul că suma volumelor paralelipipedelor ce conțin vârfurile *A*, A', *C* şi *C'* este cel mult egală cu volumul cubului, obținem tocmai inegalitatea cerută.

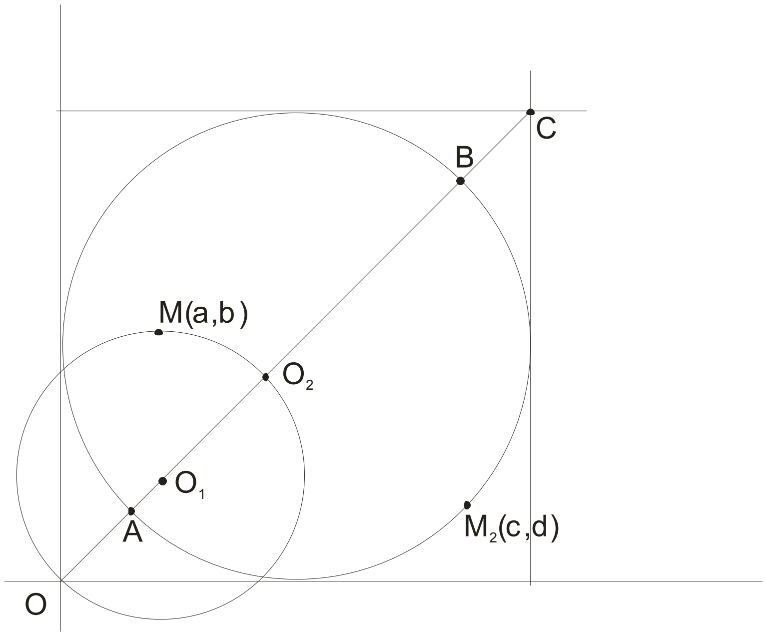


B. Probleme de extrem

R8.1.7. Să se arate că dacă a, b, c∈R şi există relația $a^2+b^2=2(a+b)$; $c^2+d^2+4=4(c+d)$, atunci

1. $4-2\sqrt{2}\le a+b+c+d\le 2(4+2\sqrt{2})$
2. $0\le(a-c)^2+(b-d)^2\le 4(3+2\sqrt{2})$.

Soluție:
Cele două relații din ipoteză se scriu echivalent
$(a-1)^2+(b-1)^2=(\sqrt{2})^2;(c-2)^2+(d-2)^2=2^2$, ceea ce ne sugerează să folosim un model geometric cu cercurile $C_1(O_1,\sqrt{2})$ şi $C_1(o_2,2), AB=4, OC=4\sqrt{2}$ (vezi figura).



Deoarece $OA=\dfrac{OC-OA}{2}=2\sqrt{2}-2,\Rightarrow A(2-\sqrt{2})$ şi $B(2+\sqrt{2},2+\sqrt{2})$.
Avem $OM_1\le OO_2 \Leftrightarrow 0\le a^2+b^2\le 8$.
Din $a+b=\dfrac{a^2+b^2}{2}\Rightarrow 0\le a+b\le 4...(1)$.
Avem $OA\le OM_2\le OB \Leftrightarrow OA^2\le c^2+d^2\le OB^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $12-8\sqrt{2}\le c^2+d^2\le 12+18\sqrt{2}$. Din $c+d=\dfrac{c^2+d^2+4}{4}\Rightarrow$
$4-2\sqrt{2}\le c+d\le 4+2\sqrt{2}...(2)$.
Adunând (1) cu (2) obținem
$4-2\sqrt{2}\le a+b+c+d\le 8+2\sqrt{2}$.

2. $M_1M_2=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}, M_1\in C_1(O_1,\sqrt{2})$ şi $M_2\in C_2(O_2,2)$. Cele două cercuri au două puncte comune, deci min $M_1M_2=0$, max$M_1M_2=OB$.

Deci $0\le M_1M_2^2\le OB^2 \Leftrightarrow 0\le(a-c)^2+(b-d)^2\le 4(3+2\sqrt{2})$

R8.1.8.

a) Aflaţi valoarea minimă a funcţiei

b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(y-x)^2+1}+\sqrt{(4-y)^2+16}$

c) Aflaţi $p\in$R astefel încât minimul funcţiei

d) $g(x,y)=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(y-x)^2+16}+\sqrt{(p-y)^2+1}$

Să fie acelaşi cu minimul lui *f(x,y)*

Soluţie:

a) Fie $A(x,2)$, $B(y,3)$, $C(4,7)$, (vezi figura), deci

$f(x,y)=OA+AB+BC\ge OC=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}$

Avem egalitate dacă $A,B\in OC \Leftrightarrow$

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{4}{7}\Rightarrow x=\frac{8}{7}, y=\frac{12}{7}$$

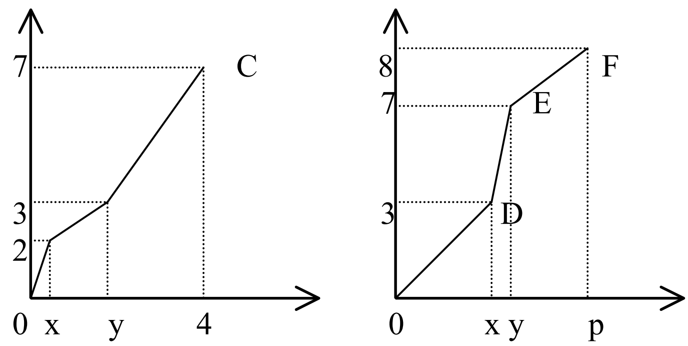


Fig. Fig.

b) Fie D(x,3), E(y,7), F(p,8) (vezi figura). Atunci

$$g(x,y)=OD+DE+EF\ge OF=\sqrt{p^2+64}$$

Din

Obţinem p=1. $\sqrt{p^2+64}=\sqrt{65}$

R8.1.9. Să se determine valoarea maximă şi valoarea minimă a expresiei $E(x,y)=x^2+y^2-6x-10y$ dacă $x^2+y^2-2y\le 0$.

Soluţie:
Condiţia $x^2+y^2-2y\geq 0$ se mai scrie $x^2+(y-1)^2\leq 1$, deci punctele *M*(*x*,*y*) se află în interiorul discului de centru *C*(0,1) şi rază *R*=1. Dacă notăm *A*(3,5) atunci

$$E(x,y)=(x-3)^2+(y-5)^2-34=MA^2-34.$$

Deci punctele situate în discul *D*(*C*,1) la distanţă minimă şi maximă sunt situate pe cerc la intersecţia cu dreapta *AC*. Avem *AC*=5 şi deci *AP*=5-1, *AQ*=5+1 (vezi figura). Obţinem E_{max}=2 şi E_{min}=-18

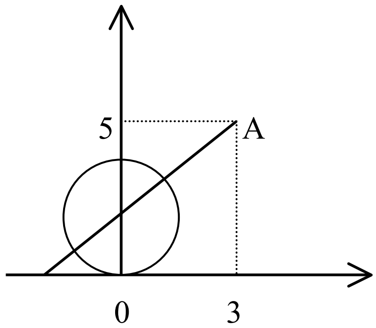


Fig.

C. Ecuaţii funcţionale

R8.1.10. Determinaţi funcţiile care verifică ecuaţia funcţională $f(x+y)=f(x)+f(y),(\forall)x\in R.$

Soluţie: Relaţia dată se scrie echivalent

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{(x+y)-x}=1,\forall x,z\in R \quad (1)$$

Reamintim că o condiţie a punctelor $M_1(x_1,y_1);M_2(x_2,y_2)\,;M_3(x_3,y_3)$ fie coliniare este $m_{M_1M_2}=m_{M_1M_3}$ care este echivalentă cu $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$

(am notat m_{AB} panta dreptei AB). Dacă în (1) în locul lui x luăm k, k$\in$Z, obţinem $\frac{f(kx+y)-f(kx)}{(kx+y)-kx}=1,k\in Z,x,y\in R$

Obţinem că punctele $M_1(x+y,f(x+y)),M_2(x,f(x)),M_{\text{jk}}(kx,f(kx))$ sunt coliniare şi aparţin unei drepte de pantă m=1. Prin urmare $f(x)=x+b$, $\forall x\in$R, care verifică ecuaţia funcţională.

D. <u>Sisteme de ecuații</u>

R8.1.11. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(z+1)^2}+\sqrt{(x-y)^2+(z-t)^2}+\sqrt{(y+1)^2+(t+1)^2}=6 \\ x^2+z^2=y^2+t^2=2; x,z,t>o, y<o \end{cases}$$

<u>Soluție</u>:
Prima ecuație a sistemului ne sugerează considerarea următoarelor puncte: $A(x,z); B(y,t); C(-1,-1); D(1,-1)$. Din a doua şi a treia relație rezultă că punctele se află pe cercul $C(0,\sqrt{2}$ (vezi figura). Avem

$$AD=\sqrt{(x-1)^2+(z+1)^2}, BC=\sqrt{(x-y)^2+(z-t)^2}, AB=\sqrt{(y+1)^2+(t+1)^2}$$

CD=2=latura pătratului (l_4) înscris în $C(0,\sqrt{2})$. Dar patrulaterul inscriptibil de perimetru maxim înscris într-un cerc dat este pătratul. Din ipoteză avem că se atinge maximul perimetrului, deci *ABCD* pătrat. Ținând cont de egalitățile a doua şi a treia din ipoteză, soluțiile sistemului sunt (1,-1,1,1), (-1,-1,-1,1).

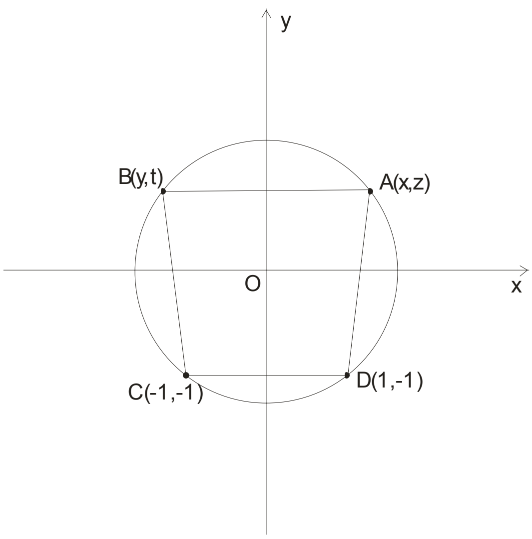


Fig.

În exemplul următor, modelul geometric îl constituie un triunghi în care se ia un punct interior. Esențial este faptul că pentru unghiurile sub care se văd laturile triunghiului, din acest punct interior, se cunosc valorile funcției trigonometrice cosinus. O soluție algebrică în acest caz necesită eforturi mari, nu întotdeauna încununate de succes.

R8.1.12. Numerele x, y, z$\in$R$^+$ verifică următoarele relații:

(i) $x^2+xy+y^2=9$

(ii) $y^2+yz+z^2=16$

(iii) $z^2+xz+x^2=25$

Să se calculeze valoarea expresiei $xy+yz+zx$.

<u>Soluție:</u>

Prima condiție este echivalentă cu existența unui triunghi cu laturile x,y,3 şi unghiul dintre x şi y de 120^0 (teorema cosinusului). Un raționament similar pentru celelalte două relații ne sugerează următorul model (vezi figura), în care ABC are laturile 3,4 şi 5 iar unghiurile cu vârful în T au măsurile de 120^0.

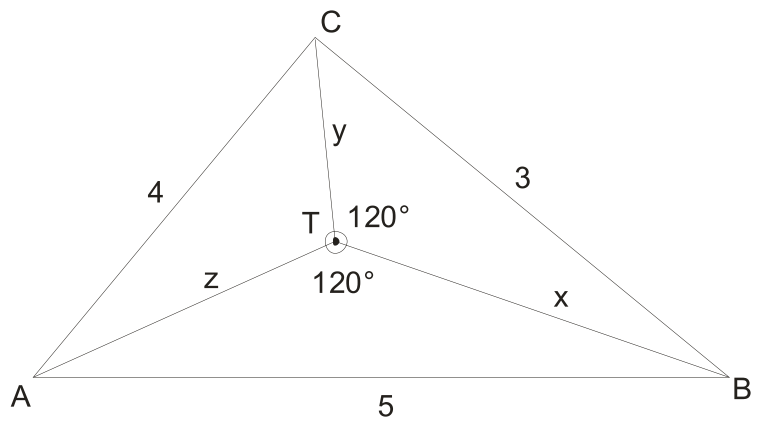


Fig.

Avem

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(xy\sin 120^0 + yz\sin 120^0 + zx\sin 120^0\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(xy + yz + zx\right)$$

Pe de altă parte, triunghiul ABC fiind dreptunghic, $S_{ABC} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$. Deci $xy+yz+zx=8\sqrt{3}$.

<u>Comentariu</u>: Punctul T cu proprietatea

$$m(\angle \mathrm{ATB})=m(\angle \mathrm{BTC})=m(\angle \mathrm{CTA})= 120^0$$

există pentru orice triunghi care are unghiurile mai mici de 120^0 şi se numeşte <u>punctul lui Torricelli</u>. Acest punct realizează minimul sumei $TA+TB+TC$ şi se află la intersecția cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale construite pe laturile triunghiului ABC, în exterior.

9. Funcții speciale

Într-o expunere făcută de Euler în anul 1749 se menționează de mai multe ori funcția ca o mărime variabilă care depinde de o altă mărime variabilă. Pentru unele scopuri, o astfel de definiție a funcției este suficientă. În dezvoltarea ulterioară a matematicii s-a impus necesitatea de a da noțiunii de funcție un conținut mai general şi mai abstract. Nu dependența variabilelor (prin care de obicei se înțeleg numere care pot fi comparate în ceea ce priveşte mărimea) este esențială în conținutul noțiunii de funcție, ci corespondența prin care anumitor obiecte li se ataşează alte obiecte. În felul acesta, noțiunea de funcție se fundamentează pe noțiuni ale teoriei mulțimilor. În considerațiile ce urmează se consideră funcții care nu sunt nominalizate în trunchiul comun, însă care facilitează rezolvarea unor probleme de teoria mulțimilor sau teoria numerelor.

9.1. Definiții şi proprietăți ale funcțiilor speciale

9.1.1.Definiție: Fie E o mulțime nevidă fixată şi $A \subset E$. Aplicația $f_A : E \to \mathbf{R}$, $f_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \in E \setminus A \end{cases}$, se numeşte *funcția caracteristică mulțimii A*.

9.1.2.Teoremă: Fie *A, B* submulțimi ale unei mulțimi *E*.
Atunci $A = B \Leftrightarrow f_A = f_B$.

Demonstrație: Dacă mulțimile sunt egale, din definiția 9.1.1. deducem imediat $f_A = f_B$. Reciproc, presupunem $f_A = f_B$ şi vom demonstra identitatea $A = B$ prin dublă incluziune. Fie $x \in A$, deci $f_A(x) = f_B(x) = 1$, de unde obținem $x \in B$; astfel $A \subset B$. Fie $x \in B$, deci $f_A(x) = f_B(x) = 1$, de unde obținem $x \in A$; astfel $B \subset A$.

9.1.3. Observație: A demonstra egalitatea a două mulțimi este echivalent cu a demonstra că funcțiile lor caracteristice sunt egale.

9.1.4. Teoremă: Fie $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Atunci

$$1°. f_{\overline{A}} = 1 - f_A$$
$$2°. f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A \cdot f_B$$
$$3°. f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B$$
$$4°. f_{A \setminus B} = f_A (1 - f_B)$$
$$5°. f_{A \Delta B} = f_A + f_B - 2 f_A f_B$$

Demonstrație:

1°. Pentru $x \in E$ sunt posibile doar situațiile:

(i) $x \in A$, deci $f_A(x) = 1$; aceasta implică $x \notin \overline{A}$, deci $f_A(x) = 0$. Astfel identitatea este verificată.

(ii) $x \notin A$, deci $f_A(x) = 0$, ceea ce implică $x \notin \overline{A}$, deci $f_A(x) = 1$. Astfel formula 1° este verificată şi în acest caz.

2°. Fie $x \in E$ şi pentru sistematizarea demonstrației prezentăm datele pe cazuri:

1. $x \notin A$ şi $x \notin B$, $x \notin A \cup B$: $f_{A \cup B}(x) = 0$ $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$
2. $x \notin A$ şi $x \in B$, $x \in A \cup B$: $f_{A \cup B}(x) = 1$ $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = 1$
3. $x \in A$ şi $x \notin B$, $x \in A \cup B$: $f_{A \cup B}(x) = 1$ $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = 1$
4. $x \in A$ şi $x \in B$, $x \in A \cup B$: $f_{A \cup B}(x) = 1$ $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = 1$

Deducem $\forall x \in E$, $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$.

3°. Se demonstrează analog, luându-se în discuție aceleaşi patru cazuri.

4°. Putem utiliza identitatea $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ şi vom aplica succesiv proprietățile 3° şi 1°; obținem $f_{A \setminus B} = f_{A \cap \overline{B}} = f_A \cdot f_{\overline{B}} = f_A \cdot (1 - f_B)$.

5°. Prin definiție $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Utilizăm proprietățile 2° şi 4°. Astfel
$f_{A \Delta B} = f_{A \setminus B} + f_{B \setminus A} - f_{A \setminus B} \cdot f_{B \setminus A} =$
$= f_A(1 - f_B) + f_B(1 - f_A) - f_A(1 - f_B) \cdot f_B(1 - f_A) \quad = f_A + f_B - 2 \cdot f_A \cdot f_B$, căci pentru orice mulțime $M \subset E$ şi orice număr natural $k > 0$, $f_M^k = f_M$.

9.1.5. Exerciții:

1. Arătați că diferența simetrică este asociativă.

Soluție: Va trebui să arătăm că $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$, $\forall A, B, C \in \mathcal{P}$ *(E).* Conform teoremei 9.1.2. este suficient să arătăm că $f_{(A \Delta B) \Delta C} = f_{A \Delta (B \Delta C)}$, iar pentru aceasta utilizăm formula 5° din teorema 9.1.4.

$$f_{(A \Delta B) \Delta C} = f_{A \Delta B} + f_C - 2 \cdot f_{A \Delta B} \cdot f_C =$$
$$= f_A + f_B - 2 \cdot f_A \cdot f_B - 2(f_A + f_B - 2 f_A \cdot f_B) f_C =$$

$$= f_A + f_B + f_C - 2(f_A \cdot f_B + f_A \cdot f_C + f_B \cdot f_C) + 4 \cdot f_A f_B f_C .$$

Calculând $f_{A\Delta(B\Delta C)}$ se obține acelaşi rezultat.

2. Studiați injectivitatea funcției caracteristice unei mulțimi *A*, $A \subset E$, *card(E)* ≥ 1.

Soluție: Fie $A \in \mathcal{P}(E)$, $f_A : E \to \mathbf{R}$. Dacă *E* are un element, atunci $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, E\}$. Funcțiile $f_\varnothing$, f_E sunt injective. Dacă *E* are două elemente, $E = \{a, b\}$, atunci $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, E\}$. Deducem $f_{\{a\}}$ şi $f_{\{b\}}$ sunt injective. Fie *card (E)* ≥ 3. Pentru orice submulțime *A* a lui *E*, $Im\, f_A \subset \{0, 1\}$ nu are mai mult de două elemente, în schimb domeniul de definiție al funcției are cel puțin 3 elemente; astfel f_A nu poate fi injectivă. În concluzie, funcția caracteristică unei mulțimi $A \subset E$ este injectivă în ipotezele

(i) *card (E)* = 1
(ii) *card (E)* = 2 şi *card (A)* = 1.

3. Fie *A, B* submulțimi disjuncte ale lui E. Determinați $X \in \mathcal{P}(E)$ încât $A \cup (B \setminus X) = B \cup X$.

Soluție: Prin utilizarea funcției caracteristice, ecuația dată se poate scrie

$$f_A + (f_B - f_B \cdot f_X) - f_A(f_B - f_B \cdot f_X) = f_B + f_X - f_B \cdot f_X .$$

Din $A \cap B = \varnothing$ deducem $f_A \cdot f_B = 0$. După reducerea termenilor asemenea obținem $f_A = f_X$, adică *X* = *A*, soluție unică a ecuației.

4. Fie *A, B* submulțimi disjuncte ale lui E. Determinați $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ astfel încât

$$\begin{cases} X \cup Y = E \\ X \cap Y = A \\ X \setminus Y = B \end{cases}$$

Soluție: Aplicând funcția caracteristică şi proprietățile acesteia sistemul devine:

$$\begin{cases} f_X + f_Y - f_X \cdot f_Y = 1 \\ f_X \cdot f_Y = f_A \\ f_X - f_X \cdot f_Y = f_B \end{cases}$$

Înlocuind relația a doua în relația a treia şi utilizând faptul că $A \cap B = \varnothing$, ceea ce înseamnă $f_A \cdot f_B = 0$.

Vom avea $f_A + f_B = f_A + f_B - f_A \cdot f_B = f_{A\cup B}$ şi astfel relaţia a treia conduce la $f_X = f_{A\cup B}$, adică $X = A \cup B$. Înlocuim relaţia a doua în prima şi utilizăm soluţia găsită pentru X care implică $f_X = f_A + f_B$. După reducerea termenilor asemenea se obţine $f_Y = 1 - f_B$, adică $f_Y = f_{\overline{B}}$, ceea ce înseamnă $Y = \overline{B}$. Soluţia sistemului este $\left(A \cup B, \overline{B}\right)$.

9.1.6. Definiţie: Funcţia $f:$ **R** → **Z**, dată de legea $f(x) = [x]$, unde $[x]$ reprezintă cel mai mare întreg mai mic decât x, se numeşte *funcţia parte întreagă.*

9.1.7. Observaţie: Au loc inegalităţile $[x] \le x < [x] + 1$.

9.1.8. Definiţie: Funcţia $f:$ **R** → $[0,1)$ dată de legea $f(x) = x - [x]$ se numeşte *funcţia parte fracţionară.*

9.1.9. Proprietăţi ale funcţiei parte întreagă:
Fie $f:$ **R** → **Z**, $f(x) = [x]$. Atunci au loc proprietăţile:

1°. $f(x + y) \ge f(x) + f(y)$, $x, y \in$ **R**;

2°. $f\left(\dfrac{[x]}{n}\right) = f\left(\dfrac{x}{n}\right)$, $n \in$ **Z***, $x \in$ **R**;

3°. $f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = f(2x) - f(x)$, $x \in$ **R**;

4°. $f(x) + f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) + f\left(x + \dfrac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(x + \dfrac{n-1}{n}\right) - f(nx) = 0$, $x \in$ **R,** $n \in$ **Z***.

Demonstraţie:

1°. Se scrie inegalitatea sub forma: $[x + y] \ge [x] + [y]$. Ori pentru x, $y \in$ **R** avem $x = [x] + \{x\}$, $y = [y] + \{y\}$, deci $x + y = [x] + [y] + \{x\} + \{y\}$. Cum $\{x\} + \{y\} \ge 0$, obţinem $[x] + [y] \in$ **Z** şi $[x] + [y] \le [x + y]$. Dar $[x + y]$ este cel mai mare întreg ce nu depăşeşte pe $x + y$. Deci $[x + y] \ge [x] + [y]$.

2°. Egalitatea se mai scrie: $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$. Plecăm de la $x=[x]+\{x\}$ şi de la $[x]=qn+r$, $0\le r\le n-1$ când obţinem $\frac{[x]}{n}=q+\frac{r}{n}$ sau $\left[\frac{[x]}{n}\right]=q$, ceea ce încheie demonstraţia proprietăţii.

3°. Are forma $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$ cu $x=[x]+\{x\}$. Avem cazurile:

a) $0\le\{x\}<\frac{1}{2}$. Avem $x+\frac{1}{2}=[x]+\{x\}+\frac{1}{2}$ şi deci $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]$, $[2x]=[2[x]+2\{x\}]=2[x]$.

b) $\frac{1}{2}\le\{x\}<1$. Cum $x+\frac{1}{2}=[x]+\{x\}+\frac{1}{2}$ avem: $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]+1$; $[2x]=[2[x]+2\{x\}]$ $=2[x]+1$ şi relaţia 3° este verificată.

4°. Ca şi în celelalte cazuri rescriem proprietatea cu ajutorul simbolului [ ] şi avem: $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+...+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx]=0$. Această egalitate este cunoscută sub numele de *identitatea lui Hermite.* Notăm $\{x\}$ = a, deci x =$[x]$ + a. Partiţionăm intervalul [0,1] în n subintervale , mai exact fie $[0,1)=\bigcup_{k=0}^{p-1}\left[\frac{k}{n},\frac{k-1}{n}\right]$ Deoarece $a\in[0,1)$, va exista $k\in\{0, 1,\ldots, n-1\}$, încât $\frac{k}{n}\le a<\frac{k+1}{n}\le 1$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $k\le n\cdot a<k+1\le n$ .Atunci $\left[x+\frac{i}{n}\right]=$ $=\left[[x]+a+\frac{i}{n}\right]$ $=[x]+\left[\frac{a\cdot n+i}{n}\right]$. Pentru primele $n-k$ valori ale lui i şi anume i = 0, 1,..., $n-k-1$ deducem $0\le\frac{n\cdot p+i}{n}<1$, adică $\left[\frac{n\cdot p+i}{n}\right]=0$. Folosind aceasta va rezulta $\sum_{i=0}^{n-k-1}\left[x+\frac{i}{n}\right]=(n-k)\cdot[x]$. Pentru următoarele k valori ale lui i, şi anume $i=n-k,n-k+1,n-k+(k-1)$ deducem: $1\le\frac{n\cdot a+i}{n}<\frac{k+n}{n}$ $=1+\frac{k}{n}$, adică $\left[\frac{n\cdot a+i}{n}\right]=1$. Folosind aceasta avem $\sum_{i=n-k}^{n-1}\left[x+\frac{i}{n}\right]=k[x]+k$. Prin urmare $\sum_{i=0}^{n-1}\left[x+\frac{i}{n}\right]=n[x]+k$ şi pe de altă parte $[n\cdot x]=[n[x]+n\cdot a]=n[x]+[n\cdot a]=n[x]+k$, deoarece $[n\cdot a]=k$, deci $\sum_{i=0}^{n-1}\left[x+\frac{i}{n}\right]=[n\cdot x]$.

9.1.10. Definiție: Funcția sgn : **R** → {– 1, 0, 1} definită prin

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$$

se numeşte *funcția signum* (*funcția indicator de semn*).

9.1.11. Proprietăți ale funcției signum

1°. Funcția signum este surjectivă, dar nu este injectivă.

2°. Funcția signum este impară.

3°.Pentru orice (*x, y*) ∈ **R** × **R** avem: $\operatorname{sgn}(x\cdot y)=\operatorname{sgn} x\cdot\operatorname{sgn} y$.

9.1.12. Observație: Funcția signum mai poate fi definită astfel:

$$\operatorname{sgn}:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \operatorname{sgn} x=\begin{cases}\frac{x}{|x|}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}.$$

9.1.13. Definiții:

(1) Funcția $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x,y)=\begin{cases}x, x\geq y\\ y, x<y\end{cases}$ se numeşte *funcție maximum* din *x* şi *y* (prescurtat, funcție max) şi se notează $f(x,y)=\max\{x,y\}$.

Altfel , funcția max se mai scrie $f(x,y)=\frac{x+y+|x-y|}{2}$.

(2) Funcția $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x,y)=\begin{cases}x, x\leq y\\ y, x>y\end{cases}$ se numeşte *funcție minimum* dintre *x* şi *y* (funcție min) şi se notează $f(x,y)=\min\{x,y\}$.

Funcția minimum se mai poate scrie $\min\{x,y\}=\frac{x+y-|x-y|}{2}$.

9.1.14. Proprietăți ale funcțiilor maximum şi minimum:

(1) Funcțiile max, min nu sunt injective, dar sunt surjective.

(2) Fie funcția $f(x,y)$, unde $x \in [a,b] = I$, $y \in [c,d] = J$. Atunci au loc relațiile:

a) $\min\limits_{x \in I} \min\limits_{y \in J} f(x,y) \le \max\limits_{x \in I} \max\limits_{y \in J} f(x,y)$;

b) $\min\limits_{y \in J} \min\limits_{x \in I} f(x,y) \le \max\limits_{y \in J} \max\limits_{x \in I} f(x,y)$.

Demonstrație:

(2) a) Pentru $x \in I$, x fixat, fie $g(y) = f(x,y), y \in J$: Avem $\min\limits_{y \in J} g(y) \le \max\limits_{y \in J} g(y) \Leftrightarrow \min\limits_{y \in J} f(x,y) \le \max\limits_{y \in J} f(x,y)$. Dar $\min\limits_{y \in J} f(x,y)$ este un număr ce depinde de valoarea fixată pentru *x*. Fie $h(x) = \min\limits_{y \in J} f(x,y)$ și $l(x) = \max\limits_{y \in J} f(x,y)$. Atunci $h(x) \le l(x), x \in I$ dacă și numai dacă $\max\limits_{x \in I} h(x) \le \max\limits_{x \in I} l(x)$.

Dar $\max\limits_{x \in I} h(x) \ge \min\limits_{x \in I} l(x)$, deci $\min\limits_{x \in I} h(x) \le \max\limits_{x \in I} h(x) \le \max\limits_{x \in I} l(x)$, și deci $\min\limits_{x \in I} \min\limits_{y \in J} f(x,y) \le \max\limits_{x \in I} \max\limits_{y \in J} f(x,y)$.

9.1.15. Definiții și proprietăți (alte funcții):

(1) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x) = \begin{cases} x - [x], \{x\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 1 + [x] - x, \{x\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$ se numește *funcția distanță la cel mai apropiat întreg.*

Funcția distanță la cel mai apropiat întreg este o funcție pară, mărginită, $\operatorname{Im} f = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, periodică, cu perioada principală $T_0 = 1$.

(2) Funcția $f : \mathbf{R} \to \{0, 1\}, f(x) = T(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$ se numește *funcția lui Heaviside* sau *funcția treaptă unitate.*

Este funcția caracteristică a mulțimii $\mathbf{R}_+$.

(3) Funcția $f : \mathbf{R} \to \{0, 1\}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbf{Q} \\ 0, x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$ se numește *funcția lui Dirichlet.*

Este o funcţie pară, mărginită, surjectivă, care admite ca perioadă orice număr $T \in$ **Q***. Funcţia lui Dirichlet este funcţia caracteristică a mulţimii **Q**.

9.2. Aplicaţii ale funcţiilor speciale

Probleme rezolvate

R9.2.1 Fie *A, B, C* mulţimi cu proprietatea $A \cup (C \setminus B) = B \cup (C \setminus A)$. Determinaţi $A \Delta B$.

Soluţie: Conform teoremei 9.1.2. vom avea $f_{A \cup (C \setminus B)} = f_{B \cup (C \setminus A)}$. Calculăm fiecare membru utilizând formulele teoremei 9.1.4:

$f_{A \cup (C \setminus B)} = f_A + f_{C \setminus B} - f_A \cdot f_{C \setminus B} = f_A f_C - f_C \cdot f_B - f_A \cdot f_C + f_A \cdot f_B \cdot f_C$.

$f_{B \cup (C \setminus A)} = f_B + f_{C \setminus A} - f_B \cdot f_{C \setminus A} = f_B + f_C - f_C \cdot f_A - f_B \cdot f_C + f_A \cdot f_B \cdot f_C$.

Ipoteza conduce la $f_A = f_B$, adică $A = B$, ceea ce implică $A \Delta B = \emptyset$.

R9.2.2 Să se demonstreze cu ajutorul funcţiei caracteristice că dacă $A \cup X = B \cup X$ şi $A \cap X = B \cap X$, atunci $A = B$.

Soluţie: Avem:

$f_A(x) + f_X(x) - f_A(x) \cdot f_X(x) = f_B(x) + f_X(x) - f_B(x) \cdot f_X(x)$ şi $f_A(x) \cdot f_X(x) = f_B(x) \cdot f_X(x)$. Din aceste relaţii rezultă $f_A(x) = f_B(x)$, deci $A = B$.

R9.2.3 Să se arate că pentru orice $x > 0$ şi $n \in$ **N**, avem:

$$\frac{(n+1)\cdot x}{2} \geq \sqrt[n]{\bigcap_{k=1}^{n} [kx]}.$$

Soluţie: Avem $x > 0$ şi $k \in$ **N**, de unde rezultă $[kx] \geq 0$ şi se ştie că:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} [kx]}{n} \geq \sqrt[n]{\bigcap_{k=1}^{n} [kx]}.$$

Dar $kx \geq [kx]$, rezultă $\frac{\sum_{k=1}^{n} kx}{n} \geq \frac{\sum_{k=1}^{n} [kx]}{n}$.

Deci $\frac{\sum_{k=1}^{n} kx}{n} \geq \sqrt[n]{\bigcap_{k=1}^{n} [kx]} \Leftrightarrow \frac{x \sum_{k=1}^{n} k}{n} = \frac{x \frac{n(n+1)}{2}}{n} \geq \sqrt[n]{\bigcap_{k=1}^{n} [kx]} \Leftrightarrow \frac{(n+1)x}{2} \geq \sqrt[n]{\bigcap_{k=1}^{n} [kx]}$.

R9.2.4 Să se arate că pentru orice $x > 0$, avem:

$$\sum_{k=1}^{n}[1+kx]\geq n+\frac{n(n+1)}{2}[x].$$

Soluție:

$\sum_{k=1}^{n}[1+kx]=[1+x]+[1+2x]+...+[1+nx]$. Dar $[1+kx]=1+[kx]\geq 1+[k]\cdot[x]$.

Deci $\sum_{k=1}^{n}[1+kx]\geq n+[x]\sum_{k=1}^{n}k=n+\frac{n(n+1)}{2}[x]$.

R9.2.5 Să se determine exponentul numărului 7 în numărul 90!.

Soluție: Ştim că exponentul unui număr prim p în numărul $n!$ este egal cu $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+...$ În cazul nostru exponentul căutat este:

$$\left[\frac{90}{7}\right]+\left[\frac{90}{7^2}\right]+\left[\frac{90}{7^3}\right]+...=12+1+0=13.$$

R9.2.6 Dacă a este un număr real, notăm $\{a\}=a-[a]$ partea sa fracționară. Fiind dat m $(m\geq 2)$ un număr natural, să se arate că funcția f : **N** → **R**, definită prin $f(n)=\{m^n\cdot\sqrt{2}\}$ este injectivă.

(C. Niță)

Soluție: Presupunem prin absurd că funcția f n-ar fi injectivă, adică ar exista $x_1\neq x_2$, x_1, $x_2\in$ **N**, astfel ca $f(x_1)=f(x_2)$. Aceasta din urmă este echivalentă cu:

$\{m^{x_1}\cdot\sqrt{2}\}=\{m^{x_2}\cdot\sqrt{2}\}$ sau $m^{x_1}\cdot\sqrt{2}-[m^{x_1}\cdot\sqrt{2}]=m^{x_2}\cdot\sqrt{2}-[m^{x_2}\cdot\sqrt{2}]$ sau $\sqrt{2}=\frac{[m^{x_1}\cdot\sqrt{2}]-[m^{x_2}\cdot\sqrt{2}]}{m^{x_1}-m^{x_2}}$, deci $\sqrt{2}\in$ **Q**, fals. Prin urmare f este injectivă.

R9.2.7 Să se arate că singura funcție f : **R** → **R** cu proprietatea că: $f(x+y)=\max(f(x),y)+\min(f(x),y)$, $\forall x,y\in$ **R** este funcția identică.

Soluție: Schimbând pe x cu y în relația din enunț obținem:

$$f(x+y)=\max(f(y),x)+\min(f(x),y),\forall x,y\in \mathbf{R}.$$

Adunând această relație cu cea din enunț și folosind relația

$$\max(x,y)+\min(x,y)=x+y,\forall x,y\in \mathbf{R}$$

obținem:

$$2f(x+y)=x+y+f(x)+f(y),\ \forall x,y\in \mathbf{R}.$$

Pentru $y = 0$ avem $f(x)=x+f(0), \forall x\in$ **R**. Fie $f(0)=a$, atunci relația din enunț devine : $x+y+a=\max(x+a,y)+\min(y+a,x), \forall x,y\in$ **R** . Pentru x = 0, $y = -a$ rezultă $0=\max(a,-a)+0$, de unde a = 0 şi deci $f(x)=x, \forall x\in$ **R**.

9.3. Ecuații funcționale

9.3.1. Exemple de ecuații funcționale

La fel ca noțiunea de mulțime, pentru noțiunea de ecuație funcțională este dificil de dat o definiție care să cuprindă toate tipurile de ecuații funcționale. Vom înțelege prin ecuație funcțională, o relație de egalitate în care apare una sau mai multe funcții necunoscute, care trebuie să satisfacă relația identic pentru valori atribuite variabilelor dintr-o mulțime dată.

Dintre ecuațiile funcționale clasice amintim, ca exemplu:

9.3.1.1. Ecuația lui Cauchy

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x+y)=f(x)+f(y),\ x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

9.3.1.2. Ecuația lui Jensen

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2},\ x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

9.3.1.3. Ecuația general liniară

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(a\cdot x+b\cdot y+c)=A\cdot f(x)+B\cdot f(y)+C,\ x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

unde $a,b,c,A,B,C\in\mathbb{R}$.

9.3.1.4. Ecuația lui d'Alambert

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y),\ x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

9.3.1.5. Ecuația lui Pexider

$$\begin{cases} f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x+y)=g(x)+h(y),\ x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

9.3.1.6. Ecuația lui Hosszú

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x+y-xy)=f(x)+f(y)-f(xy),\ x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

9.4. Probleme rezolvate (9)

Atribuirea unor valori particulare variabilelor

R9.3.2.1. Să se decidă dacă există un număr real a şi o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x)+f(a-x)=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Soluție. Dacă ar exista, înlocuim x cu $a-x$ obținem o nouă relație $f(a-x)+f(x)=a-x$, pe care comparând-o cu prima, obținem $x=a-x$ pentru orice $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, care este falsă, deci *nu există a şi f.*

R9.3.2.2. Să se rezolve ecuația funcțională

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \\ f(x-y)=f(x)\cdot f(y),\ x,y\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluție. $x=y=0 \Rightarrow f(0)=(f(0))^2 \Rightarrow f(0)\in\{0,1\}$.

Dacă $f(0)=0$, punând în ecuație $y=0 \Rightarrow f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$, deci $f=0$.

Dacă $f(0)=1$, facem în ecuație schimbările $x\to 2x$ şi $y\to x$, şi rezultă

$$f(x)=f(2x)\cdot f(x)$$

(2)

Dacă există $a\in\mathbb{R}$ astfel ca $f(a)=0$, din ecuație, pentru $y=a\Rightarrow$ $f=0$.

Dacă $f(x)\neq 0$ pentru orice x, din (2) rezultă $f(2x)=1$, $x\in\mathbb{R}$ deci $f=1$.

Singurele funcții care verifică ecuația sunt funcțiile constante $f=0$ şi $f=1$.

R9.3.2.3. Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisfac relația

$$(x+y)(f(x)-f(y))=f(x^2)-f(y^2),$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi $y\in\mathbb{R}$.

Soluție. Pentru $y=0$ şi $y=1$ obținem:

$$x(f(x)-f(0))=f(x^2)-f(0),$$

$$(x+1)(f(x)-f(1))=f(x^2-f(1)),$$

din care prin scădere:

$$f(x)=(f(1)-f(0))\cdot x+f(0),$$

deci $f(x)=ax+b$, $x\in\mathbb{R}$, unde a, b sunt constante reale arbitrare.

Se verifică uşor că toate aceste funcții satisfac relația.

Substituții de funcții şi schimbări de variabile

R9.3.2.4. Să se rezolve ecuația funcțională

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \\ 4f(x)-3f(-x)=2|x|,\ x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluție. Înlocuim x cu $-x$ şi obținem relația: $4f(-x)-3f(x)=2|x|$, adică sistemul:

$$\begin{cases} 4f(x)-3f(-x)=2|x| \\ -3f(x)+4f(-x)=2|x| \end{cases}$$

cu necunoscutele $f(x)$ şi $f(-x)$.

Înmulțim prima relație cu 4, a doua cu 3 şi le adunăm. Rezultă:

$$7f(x)=14|x| \Rightarrow f(x)=2|x|,\ x\in\mathbb{R}.$$

R9.3.2.5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care verifică relația

$$f(x+a)+f(x)=1+3\left(\sqrt[3]{(f(x))^2}-\sqrt[3]{f(x)}\right),$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde $a\in\mathbb{R}^*$ este o constantă arbitrară. Să se arate că funcția *f* este periodică.

Soluție. Scriem relația sub forma

$$f(x+a)=\left(1-\sqrt[3]{f(x)}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{f(x+a)}=1-\sqrt[3]{f(x)}.$$

Notând $g(x)=\sqrt[3]{f(x)}$ obținem:

$$g(x+a)=1-g(x),$$
$$g(x+2a)=1-g(x+a)=1-(1-g(x))=g(x),$$

deci

$$\sqrt[3]{f(x+2a)}=\sqrt[3]{f(x)} \Leftrightarrow f(x+2a)=f(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Funcția *f* are perioada $T=2a$.

R9.3.2.6. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care pentru orice $x\in\mathbb{R}$ verifică sistemul

$$\begin{cases} f(x+6)+2g(2x+15)=6x+40, \\ f\left(\dfrac{x+2}{2}\right)+g(x+5)=2x+6. \end{cases}$$

Soluție. Dacă $\dfrac{y+2}{2}=x+6$ atunci $y+5=2x+15$. Înlocuind în relația a doua pe *x* cu $2x+10$ obținem sistemul

$$\begin{cases} f(x+6)+2g(2x+15)=6x+40 \\ f(x+6)+g(2x+15)=4x+26 \end{cases} \Rightarrow$$

$g(2x+15)=2x+14,\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow g(x)=x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

$f(x+6)=2x+12,\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=2x,\ x\in\mathbb{R}$.

R9.3.2.7. Fie a şi b două numere reale fixate. Să se determine toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația:

$$f(x)-f(2a-x)=x\cdot(x-2a)+b,\ x\in\mathbb{R}.$$

Soluție. Dacă în locul lui x punem $x\to 2a-x$, obținem relația:

$$f(2a-x)-f(x)=-x(x-2a)+b,$$

care dacă o adunăm cu prima, obținem $0=b$, deci pentru $b\neq 0$ nu există funcții care să verifice relația dată.

Pentru $b=0$ rămâne o singură relație:

$$f(x)-f(2a-x)=x(x-2a),\ x\in\mathbb{R}.$$

Dacă $x=a\Rightarrow 0=0$, deci $f(a)$ este arbitrară.

Dacă $x<a\Rightarrow 2a-x>a$, între valorile lui f pentru fiecare din intervalele $(-\infty,a)$ şi $(a,+\infty)$ nu există nici o relație. Obținem:

$$f(x)=\begin{cases} h(x) &, x\le a \\ x(x-2a)-h(2a-x), & x>a \end{cases}$$

unde $h:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ este o funcție arbitrară.

Folosirea unor proprietăți de monotonie, surjectivitate, injectivitate

R9.2.3.8. Să se determine toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică condițiile:

a) g este injectivă;

b) $f(g(x)+y)=g(x+f(y))$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi $y\in\mathbb{R}$.

Soluție. Pentru $x=0$ obținem: $f(g(0)+y)=g(f(y))$, deci:

$$g(f(x))=f(x+b),\ x\in\mathbb{R} \text{ unde } b=g(0)$$

(1)

Pentru $y=0$, obținem:

$$f(g(x))=g(x+a),\ x\in\mathbb{R}\text{, unde } a=f(0).$$

(2)

Din (1) şi (2) rezultă

$$g(g(x+a))=g(f(x))=(g\circ f)(g(x))=$$

$$=f(g(x)+b)\overset{b)}{=}g(x+f(b))\overset{g\text{ injectivă}}{\Rightarrow} g(x+a)=x+f(b)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = x + c \overset{(2)}{\Rightarrow} f(x+c) = x + a + c$$

şi obţinem:

$$f(x) = x + a,\ x \in \square \ \text{ şi } \ g(x) = x + b,\ x \in \square\ ,$$

unde *a* şi *b* sunt parametri reali arbitrari.

R9.3.2.9. Să se decidă dacă există numerele naturale *m*, *n* şi funcţiile $f : \square \to \square$ şi $g : \square \to \square$ astfel ca:

$$(f \circ g)(x) = x^{2m+1} \ \text{ şi } \ (g \circ f)(x) = x^{2n+2}.$$

Soluţie. $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow x_1^{2m+1} = x_2^{2m+1} \Rightarrow x_1 = x_2$, deci funcţia *g* este injectivă.

Avem:

$$g((f \circ g)(x)) = (g \circ f)(g(x)) \Leftrightarrow g(x^{2m+1}) = (g(x))^{2m+2}.$$

Pentru $x = 0$, $x = 1$ şi $x = -1$, obţinem:

$$g(0) = (g(0))^{2n+2},\ g(1) = (g(1))^{2n+2},\ g(-1) = (g(-1))^{2n+2}$$

deci

$$g(0) \in \{0,1\},\ g(1) \in \{0,1\},\ g(-1) \notin \{0,1\},$$

adică numerele $g(0)$, $g(1)$ şi $g(-1)$ nu sunt toate distincte. (Contradicţie cu injectivitatea funcţiei *g*). În concluzie, răspunsul este negativ.

R9.3.2.10. Să se arate că nu există funcţii $f : \square \to \square$ astfel ca:

- funcţia $g(n) = f(3n+1) - n$, $n \in \square$ să fie crescătoare, iar
- funcţia $h(n) = f(5n+2) - n$, $n \in \square$ să fie descrescătoare.

Soluţie. Dacă prin absurd *g* ar fi crescătoare şi *h* descrescătoare atunci funcţiile $g_1(n) = g(5n+2)$ şi $h_1(n) = h(3n+1)$ ar fi crescătoare, respectiv descrescătoare, deci funcţia $f_1(n) = g_1(n) - h_1(n)$ ar fi crescătoare. Dar:

$$f_1(n) = f(15n+7) - 5n - 2 - f(15n+7) + 3n + 1 = -2n - 1,$$

care este o funcţie descrescătoare

R9.3.2.11. Să se determine funcţiile injective $f : \square \to \square$ cu proprietatea

$$(f \circ f)(x) - f(x) - 1 = 0,\ x \in \square\ .$$

Soluţie. Dacă $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$ atunci $f(y) = y + 1$. Arătăm că $\operatorname{Im} f = \square$, deci $f(y) = y + 1,\ y \in \square$.

(f este surjectivă) şi atunci unica soluţie este funcţia $f(x) = x + 1,\ x \in \square$.

Dacă $y \in \operatorname{Im} f \Rightarrow y + 1 \in \operatorname{Im} f$ deci $\{y, y+1, \ldots, y+n, \ldots\} \subset \operatorname{Im} f$.

Dacă presupunem că $\operatorname{Im} f \neq \square$ atunci în $\operatorname{Im} f$ ar exista un element minim $y_0 \in \operatorname{Im} f$.

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_0) = y_0$. Deoarece pentru $y > y_0$ avem $f(y-1) = y$ rezultă că $x \le y_0$ şi pentru orice $x < x_0$, $f(x) \in \operatorname{Im} f$ deci $f(x) = y = f(y-1)$ cu $x \ne y-1$, deci *f* nu ar fi injectivă.

Folosirea unor inegalități

R9.3.2.12. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție bijectivă, strict crescătoare. Să se determine funcțiile $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$(f \circ g)(x) \le x \le (g \circ f)(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Funcția inversă f^{-1} este şi ea strict crescătoare

$$f(g(x)) \le x \Rightarrow f^{-1}(f(g(x))) \le f^{-1}(x) \Leftrightarrow g(x) \le f^{-1}(x).$$

Punem în relația $x \le g(f(x))$ în loc de x pe $f^{-1}(x)$ şi avem: $f^{-1}(x) \le g(x)$. Din cele două relații avem: $f^{-1}(x) \le g(x)$. Din cele două relații rezultă $g(x) = f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, deci singura funcție este $g = f^{-1}$.

R9.3.2.13. Să se determine funcțiile $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$ cu proprietatea

$$f(ax+by) \le \frac{1}{4a} \cdot f(x) + \frac{1}{4b} \cdot f(y),$$

pentru orice numere pozitive *a*, *b*, *x*, *y*.

Soluție. Pentru $a = \frac{1}{2}$ şi $b = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y}$ obținem

$$f(x) \le \frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} \cdot f(y) \Leftrightarrow x \cdot f(x) \le y \cdot f(y).$$

Pentru $a = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$ şi $b = \frac{1}{2} \Rightarrow y \cdot f(y) \le x \cdot f(x)$ deci $x \cdot f(x) = y \cdot f(y)$ pentru orice *x*, *y*.

Rezultă că $f(x) = \frac{c}{x},\ x \in \mathbb{R}$ unde $c \in (0,\infty)$ este o constantă arbitrară. Avem:

$$f(ax+by) = \frac{c}{ax+by},\ \frac{1}{4a} \cdot f(x) + \frac{1}{4b} \cdot f(y) = \frac{c}{4a \cdot x} + \frac{c}{4b \cdot y}$$

şi inegalitatea din enunț este echivalentă cu $\frac{2}{ax+by} \le \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} \right)$ care este cunoscută (inegalitatea dintre media aritmetică şi armonică).

Metode recursive şi inductive

R9.3.2.14. Să se determine funcţiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ care îndeplinesc simultan condiţiile:

a) $f(m+n)=f(m)+f(n)+2mn$, oricare ar fi $m,n\in\mathbb{N}$;

b) Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, numărul $f(n)$ este pătrat perfect.

Soluţie. Pentru $m=n=0$, din a) rezultă $f(0)=0$. Pentru $m=n=1$, din a) rezultă $f(2)=2f(1)+2$. Din b) există $a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{N}$ astfel ca $f(1)=a^2$, $f(2)=b^2$. Dacă a ar fi un număr par atunci numărul $2a^2+2$ ar fi de forma $4M+2$, deci nu poate fi pătrat perfect. Rămâne că a este impar $a=2k+1$, şi b este un număr par $b=2p$ şi avem relaţia:

$$(2p)^2=2(2k+1)^2+2\Leftrightarrow 4p^2=4k^2+4k+4\Leftrightarrow p^2=k^2+k+1$$

din care rezultă $p>k$ deci $p\geq k+1\Rightarrow p^2\geq k^2+2k+1>k^2+k+1$, dacă $k\neq 0$.

Deci condiţia $p^2=k^2+k+1$ poate fi îndeplinită pentru $k=0$ şi $p=1\Rightarrow\ \Rightarrow f(1)=1$ şi $f(2)=4=2^2$.

Arătăm prin inducţie că $f(n)=n^2$, $n\in\mathbb{N}$.

Avem: $f(n+1)=f(n)+f(1)+2n$ şi din ipoteza de inducţie

$$f(n)=n^2\Rightarrow f(n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

R9.3.2.15. Să se determine funcţiile $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ care satisfac condiţiile

a) $f(f(n))=n$, $n\in\mathbb{Z}$;

b) $f(f(n+2)+2)=n$, $n\in\mathbb{Z}$;

c) $f(0)=1$.

Soluţie. $f(f(n))=n$, $n\in\mathbb{Z}\Rightarrow f$ este bijectivă. $n=f(f(n))=$ $=f(f(n+2)+2)$

$$\Rightarrow f(n)=f(n+2)+2$$

(1)

Din (1) pentru $n=0\Rightarrow f(2)=-1$ şi prin inducţie

$f(2k)=1-2k$, $k\in\mathbb{Z}$;

$f(f(2k))=2k\Rightarrow f(1-2k)=2k=1-(1-2k)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Deci, $f(n)=1-n$, $n\in\mathbb{Z}$ este singura funcţie care satisface cele trei condiţii.

10.2. Probleme rezolvate (10)

R10.2.1. Inegalitatea lui *Cauchy-Buniakovski-Schwarz*. Fie numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Atunci:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) (1)$$

Cu egalitate dacă şi numai dacă $\exists\ p,q \in \mathbf{R}$ astfel încât $pa_i = qb_i$ pentru orice $i \in \{1,2,\ldots,n\}$

<u>Demonstrație</u>. Inegalitatea este verificată cu egalitate pentru $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ Presupunem că există $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ cu a_i diferit de zero. Considerăm funcția

$$f : R \to R, f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2$$

Observăm că $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Pe de altă parte avem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 x^2 - 2a_i b_i x + b_i^2) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

Cum

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$$

deducem $\Delta f \leq 0$ sau

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0$$

care conduce la (1). Egalitatea în (1) este echivalentă cu $\Delta f=0$. Atunci există $r \in \mathbf{R}$, cu $f(r)=0$, rezultă $a_i r = b_i$, pentru orice $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ şi numerele p,q din enunț sunt $p=r$, $q=1$.

R10.1.2. Inegalitatea lui *Aczel*. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ şi $a_1^2 > a_2^2 + \ldots + a_n^2$. Atunci

$(a_1 b_1 - a_2 b_2 - \ldots - a_n b_n)^2 \geq (a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_n^2)$(2)

egalitatea obținându-se dacă şi numai dacă există $p,q \in \mathbf{R}$ astfel încât $pa_i = qb_i$ pentru orice $i \in \{1,2,\ldots n\}$.

<u>Demonstrație</u>: Considerăm funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$f(x)=(a_1x-b_1)^2-(a_2x-b_2)^2-\ldots-(a_nx-b_n)^2$. Pentru $r=\frac{b_1}{a_1}$, $a_1\neq 0$, avem $f(r)=-(a_1r-b_1)^2-(a_2r-b_2)^2-\ldots-(a_nr-b_n)^2\leq 0$. Dar
$f(x)=(a_1^2-a_2^2-\ldots-a_n^2)x^2-2(a_1b_1-a_2b_2-\ldots-a_nb_n)x+b_1^2-b_2^2-\ldots-b_n^2$
şi cum $a_1^2-a_2^2-\ldots-a_n^2>0$, deducem $\Delta f\geq 0$, inegalitate echivalentă cu cea din enunț.
Dacă în (2) avem egalitate, atunci $\Delta f=0$, deci $f(x)\geq 0$, oricare ar fi x real. Rezultă $f(r)\geq 0$ cu $r=\frac{b_1}{a_1}$ Dar am demonstrat că $f(r)\leq 0$, adică $a_ir=b_i$, $i\in\{1,2,\ldots n\}$.

R10.2.3. Fie $a_1, a_2,\ldots, a_n, b_1, b_2,\ldots, b_n$ numere reale pozitive şi $a_i\leq b_i$, oricare ar fi $i\in\{1,2,\ldots n\}$. Atunci:

$$\left[\sum_{1\leq i\prec j\leq n}\left(a_ia_j+b_ib_j\right)\right]^2\geq 4\left(\sum_{1\leq i\prec j\leq n}a_ib_j\right)\left(\sum_{1\leq i\prec j\leq n}b_ia_j\right)$$

Demonstrație:
Considerăm funcția

$$f(x)=\sum_{1\leq i\prec j\leq n}\left(a_ix-b_i\right)\left(b_jx-a_j\right)$$

Din $a_i\leq b_i$, rezultă

$$f(1)=\sum_{1\leq i\prec j\leq n}\left(a_i-b_i\right)\left(b_j-a_j\right)\leq 0$$

Pe de altă parte,

$$f(x)=\left(\sum_{1\leq i\prec j\leq n}a_ib_j\right)x^2-\left(\sum_{1\leq i\prec j\leq n}\left(a_ia_j+b_ib_j\right)\right)x+\sum_{1\leq i\prec j\leq n}b_ia_j$$

Cum coeficientul lui x^2 este pozitiv,folosind varianta II a principiului, rezultă $\Delta f\geq 0$, inegalitate echivalentă cu cea din enunț.

În următorul exemplu vom prezenta un alt raționament pentru deducerea semnului lui Δf ,decât variantele prezentate. Fie f_1f_2 funcții de gradul al doilea cu coeficienții dominanți pozitivi. Atunci $f=f_1+f_2$ este o funcție de gradul doi cu coeficientul dominant pozitiv. Dacă f_1+f_2 ia şi valori nepozitive, atunci au loc una din inegalitățile $\Delta f\geq 0$, $\Delta f\geq 0$. Într-adevăr, presupunând $\Delta f_1<0$ şi $\Delta f_2<0$ obținem $f_1(x)>0$ şi $f_2(x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$ şi atunci $(f_1+f_2)(x)>0$ oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$, contrar ipotezei.

R10.2.4. Fie $a,a_1,a_2,\ldots,a_{2n},b,b_1,b_2,\ldots,b_{2n}\in\mathbf{R}$

Dacă $a^2 > 2a_1^2 + 2a_2^2 + \cdots + 2a_{2n-1}^2$ şi $a^2 > 2a_2^2 + 2a_4^2 + \cdots + 2a_{2n}^2$, atunci $(ab - a_1b_1 - a_2b_2 - \cdots - a_{2n}b_{2n})^2 \geq \min\{A_1C_1, A_2C_2\}$, unde

$A_1 = a^2 - 2a_1^2 - 2a_3^2 - \cdots - 2a_{2n-1}^2$, $C_1 = b^2 - 2b_1^2 - 2b_3^2 - \cdots - 2b_{2n-1}^2$

$A_2 = a^2 - 2a_2^2 - 2a_4^2 - \cdots - 2a_{2n}^2$, $C_2 = b^2 - 2b_2^2 - 2b_4^2 - \cdots - 2b_{2n}^2$.

Demonstraţie: Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = (ax - b)^2 - (a_1x - b_1)^2 - (a_2x - b_2)^2 - \cdots - (a_{2n}x - b_{2n})^2 =$$
$$(a^2 - a_1^2 - \cdots - a_{2n}^2)x^2 - 2(ab - a_1b_1 - \cdots - a_{2n}b_{2n})x + b^2 - b_1^2 - \cdots - b_{2n}^2 =$$
$$= f_1(x) + f_2(x) \text{ unde } f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(a^2 - 2a_1^2 - 2a_3^2 - \cdots - 2a_{2n-1}^2)x^2 - (ab - a_1b_1 - a_2b_2 - \cdots - a_{2n}b_{2n})x + + \frac{1}{2}$$
$$(b^2 - 2b_1^2 - 2b_3^2 - \cdots - 2b_{2n-1}^2) = \frac{1}{2}A_1x^2 - Bx + \frac{1}{2}C_1,$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(a^2 - 2a_2^2 - 2a_4^2 - \cdots - 2a_{2n}^2)x^2 - (ab - a_1b_1 - a_2b_2 - \cdots - a_{2n}b_{2n})x + +$$
$$\frac{1}{2}(b^2 - 2b_2^2 - 2b_4^2 - \cdots - 2b_{2n}^2) = \frac{1}{2}A_2x^2 - Bx + C_2.$$

Din ipoteză, coeficienţii dominanţi ai funcţiilor f_1 şi f_2 sunt pozitivi, deci şi f are coeficientul dominant pozitiv. Cum

$$f\left(\frac{b}{a}\right) = -\left(a_1\frac{b}{a} - b_1\right)^2 - \ldots - \left(a_{2n}\frac{b}{a} - b_{2n}\right)^2 \leq 0$$

deducem $\Delta f_1 \geq 0$ sau $\Delta f_2 \geq 0$, adică $B^2 \geq A_1C_1$ sau $B^2 \geq A_2C_2$, atunci $B^2 \geq \min(A_1C_1, A_2C_2)$, care este tocmai inegalitatea (3).

R10.2.5. Fie (a_n) $n \geq 1$ un şir de numere reale pozitive astfel încât $(a_{2n-1})_{n\geq 1}$ este monoton şi $a_{2n-1} + a_{2n+1} < 2a_{2n}$ oricare ar fi numărul $n \geq 1$. Atunci

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(a_ka_{k+1})\right)^2 > \left(\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(a_k^2)\right)\left(\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(a_{k+1}^2)\right) \quad (4)$$

<u>Demonstraţie</u>: Fie f:$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(a_kx + a_{k+1})^2$$

Vom folosi varianta III de aplicare a principiului trinomului. Să evaluăm semnul produsului $f(-1)f(1)$. Avem

$$f(-1)f(1)=\left[\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(-a_k+a_{k+1})^2\right]\left[\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(a_k+a_{k+1})^2\right]$$

În prima paranteză dreaptă avem o sumă de *n* expresii de forma
$\alpha_p= - (-a_{2p-1}+a_{2p})^2+(-a_{2p-1}+a_{2p})^2,\ p\in\{1,2,\ldots,n\}$
iar în a doua paranteză dreaptă avem o sumă de *n* expresii de forma
$\beta_p= - (a_{2p-1}+a_{2p})^2+(a_{2p-1}+a_{2p})^2\ ,p\in\{1,2,\ldots,n\}$.
Avem
$\alpha_p=(a_{2p+1}-a_{2p-1})(a_{2p+1}+a_{2p-1}-2a_{2p})$, şi
$\beta_p=(a_{2p+1}-a_{2p-1})(a_{2p+1}+a_{2p-1}+2a_{2p})$.
Folosind ipoteza problemei deducem că $\alpha_p\beta_p<0$, de unde obținem că $f(-1)f(1)<0$ şi prin urmare $\Delta f>0$. Scriind funcția dată sub forma:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k a_k^2x^2+2\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k a_ka_{k+1}x+\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k a_{k+1}^2$$

condiția $\Delta f>0$ este echivalentă cu inegalitatea (4).

11. Principiul includerii şi excluderii

În acest capitol vom urmări prezentarea unei metode prin care să se poată număra elementele unei mulțimi.

11.1. Mulțimi finite. Principiul includerii şi excluderii

11.1.1. Definiție: Spunem că o *mulțime A* este *finită* dacă există o funcție bijectivă $f:\{1,2,...,n\}\to A$. Atunci numărul *n* este unic şi spunem că *A* este finită cu *n* elemente sau *A* este o mulțime de cardinal *n*.

11.1.2 Notație: Vom nota cu $|A|$ *cardinalul* (sau numărul de elemente) al mulțimii *A*.

11.1.3 Teoremă (PRINCIPIUL INCLUDERII ŞI EXCLUDERII)
Fie $A_1,...,A_n$ o familie de mulțimi finite. Atunci cardinalul mulțimii $A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$ este dat de formula:

$$|A_1\cup A_2\cup...\cup A_n|=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+...+(-1)^{k-1}\sum_{i_1<..<i_k}|A_{i_1}\cap...\cap A_{i_k}|+...+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap...\cap A_n|$$

numită *formula lui Boole-Sylvester*.

Demonstrație:
Procedăm prin inducție după *n*. Pentru *n*=2 trebuie să demonstrăm relația:
$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$.
Aceasta rezultă din faptul că $A_1\cup A_2$ este reuniunea mulțimilor disjuncte A_1 şi $A_2\setminus(A_1\cap A_2)$, iar A_2 este reuniunea mulțimilor disjuncte $A_2\setminus(A_1\cap A_2)$ şi $A_1\cap A_2$. Din egalitățile: $|A_2|=|A_2\setminus(A_1\cap A_2)|+|A_1\cap A_2|$
$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2\setminus(A_1\cap A_2)|$
rezultă egalitatea de demonstrat. Presupunem că formula din enunț este adevărată pentru familii de *n*-1 mulțimi şi o vom demonstra pentru familii de *n* mulțimi:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right| = \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| + |A_n| - \sum_{1\le i<j\le n} \left|A_i \cap A_j\right| + \ldots +$$

$$+(-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n-1} \left|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right| + \ldots + (-1)^{n-2}|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}| - \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} \left|A_i \cap A_j\right| + \ldots + (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n-1} \left|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right| + \ldots + (-1)^{n-2}|A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_{n-1}| -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| + \sum_{1\le i<j\le n-1} \left|A_i \cap A_j \cap A_n\right| + (-1)^{n-1}|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n|.$$

Grupând sumele cu acelaşi număr de factori în intersecție se obține formula din enunț.

11.1.4. Observații:

(1) Formula lui Boole-Sylvester se mai scrie sintetic astfel:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{(|I|+1)} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

(2) O formă mai generală a principiului includerii şi excluderii este următoarea: Fie A o mulțime finită şi $f : B \to [0,+\infty)$ o funcție. Pentru orice submulțime $B \subset A$ notăm: $f(B) = \sum_{x\in B} f(x)$, iar $f(\phi) = 0$. În aceste ipoteze, dacă $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ atunci are loc egalitatea:

$$f(A) = \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{(|I|+1)} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

Dacă f este funcție constantă $f(x) = 1$, $\forall x \in A$ atunci se obține 11.1.4.(1).

11.1.5. Teoremă (**indicatorul lui EULER**)

Dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$, unde $2 < p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ sunt numere prime, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathrm{N}$ atunci $\left|k \in \mathrm{N}^* \middle| k \le n, (k,n) = 1\right| = \varphi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_m})$ ($\varphi(n)$ numindu-se *indicatorul lui Euler* aferent numărului natural $n \ge 2$).

Demonstrație:
Pentru un întreg pozitiv *n* se notează prin $\varphi(n)$ funcția lui Euler, care este egală cu numărul întregilor pozitivi mai mici sau egali cu *n* şi primi cu *n*.
Să notăm cu A_i mulțimea numerelor naturale mai mai mici sau egale cu *n*, care sunt multipli de p_i. Deducem: $|A_i| = \frac{n}{p_i}$; $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i \cdot p_j}$, deoarece numerele p_i şi p_j fiind numere prime sunt prime între ele. Numerele naturale mai mici sau egale cu *n* şi care sunt prime cu *n* sunt numerele din mulțimea $X = \{1,2,...,n\}$ care nu aparțin nici uneia dintre mulțimile A_i pentru $1 \le i \le m$.
Deci $\varphi(n) = n - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m| =$

$$= n - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - ... + (-1)^m \left| \bigcap_{i=1}^{m} A_i \right| =$$

$$= n - \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \le i < j \le m} \frac{n}{p_i \cdot p_j} - ... + (-1)^m \cdot \frac{n}{p_1 \cdot ... p_m} =$$

$$= n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{1}{p_m}).$$

11.1.6. Proprietăți ale indicatorului lui Euler

(1) Dacă (*m,n*) = 1 atunci $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$, adică funcția lui Euler este o funcție aritmetică multiplicativă.
(2) Pentru orice *n* avem $\sum_{d|n} \varphi(n) = n$.

Demonstrație:
Vom demonstra (2). Presupunem că $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m}, \alpha_m > 0$. După o idee a lui Gauss vom demonstra afirmația prin inducție după suma $s = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m$. Dacă *s* = 1 rezultă că *n* este număr prim şi are doar divizorii 1 şi *n*; prin urmare suma devine $\varphi(1) + \varphi(n) = 1 + (n-1) = n$. Presupunând proprietatea adevărată pentru numerele în care suma exponenților este mai mică decât s, o vom demonstra pentru s. Împărțim mulțimea D a divizorilor lui *n* în două clase disjuncte: D_1 este mulțimea divizorilor în care p_1 apare la puteri mai mici decât α_1, iar D_2 este mulțimea divizorilor în care p_1 apare la puterea α_1. Avem $D = D_1 \cup D_2$ şi $D_1 \cap D_2 = \phi$. Prin urmare:

$$\sum_{d\in D}\varphi(d)=\sum_{d\in D_1}\varphi(d)+\sum_{d\in D_2}\varphi(d)=\sum_{d|\frac{n}{p_1}}\varphi(d)+\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\sum_{d|\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}}\varphi(d)=$$

$$=\frac{n}{p_1}+p_1^{\alpha_1}\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}=\frac{n}{p_1}+n-\frac{n}{p_1}=n\ .$$

În continuare vom prezenta câteva exemple clasice de utilizare a principiului includerii şi excluderii.

11.2. Probleme rezolvate (11)

R11.2.1. (PR1) Câte numere naturale mai mici sau egale cu 1000 sunt divizibile cu 2 sau cu 3 sau cu 5.

Soluție: Fie $A = \{2n \mid n \in N, 2n \le 1000\}$; $B = \{3n \mid n \in N, 3n \le 1000\}$; $C = \{5n \mid n \in N, 5n \le 1000\}$. Se observă că $A \bigcap B = \{6n \mid n \in N, 5n \le 1000\}, ..., A \bigcap B \bigcap C = \{30n \mid n \in N, 30n \le 1000\}$. Evident numărul căutat este $|A \bigcup B \bigcup C|$. Aplicând formula Boole-Sylvester avem:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| =$$

$$\left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{3}\right] + \left[\frac{1000}{6}\right] - \left[\frac{1000}{10}\right] - \left[\frac{1000}{15}\right] - \left[\frac{1000}{12}\right] + \left[\frac{1000}{30}\right] =$$

$$500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734.$$

R11.2.2. Calculul numărului numerelor prime dintr-o mulțime

Fie n>1 un număr natural nenul şi ne propunem să calculăm numărul numerelor prime din mulțimea $A = \{1,2,\ldots,n\}$. Ideea este de a proceda ca în ciurul lui Eratostene: se pun numerele de la 1 la n într-un şir (crescător) din care se elimină cele divizibile cu 2, exceptându-l pe 2, se reține 3 şi se şterg multiplii lui 3 ş.a.m.d. Pentru numere n mai mici se poate proceda astfel, dar pentru numere mari este necesară o analiză mai atentă. Se observă că orice număr compus din A este multiplu al unuia din numerele prime cel mult egale cu $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Fie $p_1 = 2, p_2 = 3$ şirul numerelor prime cel mult egale cu $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Pentru fiecare p_i din acest şir notăm $A_{p_i} = \{a \mid 1 \le a \le n, p_i \mid a\}$. Atunci numărul numerelor prime cel mult egale cu n este $n + k - 1 - \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_{p_i}\right|$.

De exemplu, să calculăm numărul numerelor prime mai mici decât 250. Deoarece $\lfloor\sqrt{250}\rfloor = 15$ rezultă că şirul numerelor prime cu care vom lucra este: 2,3,5,7,11,13 şi avem de calculat cardinalul unei reuniuni de 6 mulțimi:

$$|A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}| =$$

$$= \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| \cdot$$

Formula este aceasta deoarece din inegalitatea $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 > 250$ rezultă că intersecția a cinci mulțimi este vidă. Ținând seama de faptul că

$\left|A_{p_i}\right| = \left[\dfrac{n}{p_i}\right]$, $\left|A_{p_i} \cap A_{p_j}\right| = \left[\dfrac{n}{p_i \cdot p_j}\right]$ ş.a.m.d. obținem $\left|\bigcup A_i\right| = 202$. Prin urmare rezultă că în mulțimea {1,2,3,…,250} sunt 53 numere prime.

R11.2.3. (PR3) Într-un institut de cercetare se află 67 de cercetători. Dintre aceştia 47 vorbesc limba engleză, 35 vorbesc limba germana şi 23 ambele limbi. Câți cercetători din institut nu vorbesc nici una dintre cele două limbi?

Soluție: Pentru rezolvarea problemei nu se poate aplica sub forma dată principiul includerii şi excluderii şi prin urmare îl reformulăm. Fie A o mulțime cu n elemente având sau nu cel puțin una dintre proprietățile notate 1,2,...,p. Notăm cu A_i mulțimea elementelor ce au proprietatea $i(1 \le i \le p)$ (indiferent dacă elementele mulțimii mai au şi alte proprietăți); $A_i \cap A_j$ mulțimea elementelor ce au proprietățile i şi j (chiar dacă elementele din $A_i \cap A_j$ mai au şi alte proprietăți), etc. De asemenea, notăm cu $\overline{A_i}$ mulțimea elementelor ce nu au proprietatea i$(1 \le i \le p)$ $\overline{A_i} \cap \overline{A_j}$ mulțimea elementelor ce nu au proprietățile i şi j etc. Atunci principiul includerii şi excluderii are forma:

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_p}\right| =$$

$$= n - \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p\right| = n - \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| + \sum_{1 \le i < j \le p}\left|A_i \cap A_j\right| - \ldots + (-1)^p \left|\bigcap_{i=1}^{p} A_i\right|$$

În cazul nostru A_1 este mulțimea cercetătorilor ce vorbesc limba engleză, A_2 mulțimea cercetătorilor care vorbesc limba germană şi se cere $\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right|$. Avem:

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right| = 67 - \left|A_1\right| - \left|A_2\right| + \left|A_1 \cap A_2\right| = 67 - 47 - 35 - 23 = 8.$$

Acesta este numărul celor care nu vorbesc nici limba engleză şi nici limba germană.

R11.2.4. (PR4) Câte numere compuse din n cifre există, care nu conțin cifrele 1,2,3 dar pe fiecare dintre acestea cel puțin o dată?

Soluție: Fie A_i mulțimea numerelor de n cifre care nu-l conțin pe i(i=1,2,3). Atunci pe baza principiului includerii şi excluderii $\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = 3^n - \left|A_1 \cup A_2 \cup A_3\right| = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$.

R11.2.5. Problema coincidențelor (a punctelor fixe)

Definiție : O aplicație bijectivă $\varphi : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ cu $\varphi(i) = i$ se spune că *admite o coincidență* în *i*. Numărul *i* se numeşte *punct fix* al aplicației . Numărul total de aplicații bijective (permutări) φ este egal cu $n!$.

Se pot defini următoarele mulțimi $A_i = \{\varphi | \varphi(i) = i\}$ cu $|A_i| = (n-1)!$, $A_i \cap A_j = \{\varphi | \varphi(i) = i \text{ , } \varphi(j) = j\}$, $i<j$, cu $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$, ş.a.m.d.

Problema coincidețelor : Un lucrător la poştă are în față *n* plicuri cu adresele a *n* persoane diferite şi *n* scrisori adresate fiecărei persoane (câte una de fiecare persoană) . El trebuie să introducă în fiecare plic câte o scrisoare. Discutând cu oamenii de la ghişeu lucrătorul este neatent şi introduce oricum scrisorile în plicuri.

În câte moduri poate introduce cele n scrisori în plicuri astfel ca nici o persoană să nu-şi primească scrisoarea ? Dar numai una să-şi primească scrisoarea ?

Soluție : Pentru a determina numărul de modalități în care nu avem permutări cu coincidențe aplicăm formula includerii şi excluderii şi avem :

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right| = n! - \binom{n}{1} \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2)! - \cdots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} =$$

$$= n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

şi reprezintă numărul de posibilități de a introduce scrisorile în plicuri în aşa fel încât nici una dintre persoane să nu-şi primească scrisoarea. Pentru a determina în câte moduri doar o persoană îşi poate primi un plic cu scrisoarea care îi era adresată procedăm astfel : dacă unul dintre plicuri are scrisoarea adresată , atunci în celelalte $n-1$ plicuri se pot introduce astfel încât nici unul să nu conțină scrisoarea cu acelaşi număr în $(n-1)! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$ moduri.

Deoarece un plic se poate alege din cele *n* plicuri în *n* moduri deducem că numărul total de moduri este $n \cdot (n-1)! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$.

12. Metoda apropierii de extrem, sau metoda variației parțiale a lui Sturm

12.1. Introducere

În cadrul acestei teme ne propunem să descriem o metodă elementară de demonstrare a unor inegalități, propusă în 1884 de matematicianul german ***R. Sturm.***

Metoda este prezentată pe larg în revista sovietică Kvant (nr. 1/1981) şi se referă la inegalități cu funcții de mai multe variabile, în care se fixează pentru moment o parte din variabile, lăsând să varieze una sau două dintre acestea. De aceea metoda este cunoscută şi sub numele de "metoda variației parțiale".

Metoda lui Sturm de demonstrare a unor inegalități în care apar n, $n \geq 2$ numere reale constă în a studia comportarea unei expresii mai simple, de două variabile, atunci când acestea iau valori apropiate, în ipoteza că suma sau produsul lor este o mărime constantă. Raționamentul continuă în cazul a n numere în care cel puțin două sunt distincte şi se aplică rezultatul obținut anterior de mai multe ori.

Studiul riguros al funcțiilor de mai multe variabile se face cu ajutorul analizei matematice şi depăşeşte nivelul cunoştințelor de liceu.

Primul exemplu, preluat din revista citată, are ca scop descrierea metodei la o problemă de geometrie.

Bibliografie

- *Gh. Eckstein, Metoda apropierii de extrem a lui Sturm, RMT 1/1984 pag 3-10*
- *M. Ganga, Teme şi probleme de matematica,Ed tehnica, Bucureşti, 1991, pag 117-123*

Probleme rezolvate (12)

R12.2.1 Dintre toate poligoanele de n laturi înscrise într-un cerc dat, să se găsească poligonul de arie maximă.

Soluție. Considerăm A,B,C trei vârfuri consecutive ale poligonului şi presupunem $AB>BC$ (vezi figura).

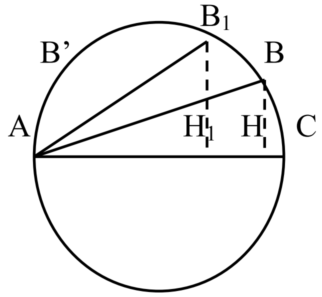


Fig.

Să studiem cum variază aria triunghiului ABC, dacă fixăm A şi C, iar

B se deplasează pe arcul ABC, astfel încât lungimile AB şi BC să se "apropie". Bacă B' aparține arcului AC cu $B'A=BC$, atunci a "apropia" lungimile AB şi BC înseamnă a înlocui B cu orice punct B_1 aparținând arcului BB'. Înălțimea $B_1H_1>BH$, deci aria triunghiului creşte. Trecând la analiza cazului general, să observăm că nici un poligon neregulat nu este soluție a problemei, deoarece dacă [AB] şi [BC] sunt laturi neegale, înlocuind B cu B_1, B_1 aparținând arcului BB', obținem un poligon cu arie mai mare.

Să demonstrăm că poligonul regulat are aria mai mare decât aria oricărui alt poligon înscris în acelaşi cerc. Să observăm că dacă înlocuim B cu B', obținem un poligon cu aceeaşi arie şi aceleaşi laturi, doar că ordinea a două laturi vecine s-a schimbat. Repetând de un număr finit de ori această operație, putem schimba între ele oricare două laturi. Fie Π un poligon diferit de poligonul regulat cu n laturi. Cea mai mică latură subîntinde un arc mai mic decât $360^0/n$, iar cea mai mare un arc mai mare decât $360^0/n$. Permutăm laturile lui Π astfel încât cea mai mică şi cea mai mare latură să fie vecine. În figură, acestea sunt [BC] şi [AB]. Alegem pe arcul AB punctul B_1, astfel ca $m(ABC)=360^0/n$. Obținem poligonul Π_1 de arie mai mare şi în care cel puțin o latură are lungimea laturii poligonului regulat.

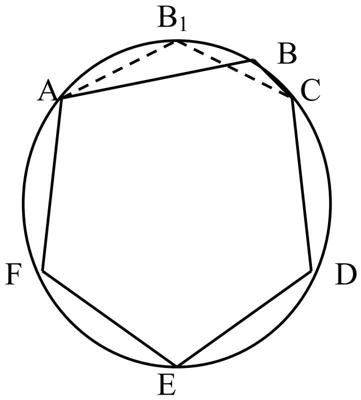


Fig.

Dacă poligonul Π_1 nu este regulat, repetăm raționamentul şi obținem poligonul Π_2 cu aria şi mai mare şi cel puțin două laturi egale cu lungimea laturii poligonului regulat. După cel mult *n-1* paşi, ajungem la poligonul regulat şi am demonstrat că poligonul regulat cu *n* laturi înscris într-un cerc are aria strict mai mare decât orice alt poligon cu *n* laturi înscris în acelaşi cerc. În următorul exemplu vom demonstra o inegalitate cu metoda lui Sturm.

R12.2.2. Pentru orice numere reale $a_1, a_2, ..., a_n$, este adevărată inegalitatea

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \quad (1)$$

<u>Soluție</u>. Să observăm că dacă $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ atunci inegalitatea este satisfăcută, cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$. Dacă $a_1+a_2+\cdots+a_n=S\neq 0$ atunci (1) se mai scrie $\left(\frac{a_1}{s}\right)^2+\left(\frac{a_2}{s}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a_n}{s}\right)^2 \geq \frac{1}{n}$. Notând $b_k=\frac{a_k}{s}, k\in\{1,2,\ldots,n\}$ problema devine:

Ştiind că $b_1+b_2+...+b_n=1$, să se demonstreze că

$$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2 \geq \frac{1}{n} \quad (2)$$

Să studiem cum se modifică suma pătratelor a două numere reale *a* şi *b* dacă le modificăm fără a schimba suma lor. Înlocuim *a* cu *a+x* iar *b* cu *b-x*. Dacă $a<b$, iar $x\in(0,b-a)$, numerele se "apropie", iar dacă $x<0$, numerele se "depărtează". Să presupunem că "apropiem" numerele. Avem: $(a+x)^2+(b-x)^2=a^2+b^2-2x(b-a-x)<a^2+b^2$.

Deci apropiind numerele, suma pătratelor lor scade. În concluzie, dacă nu toate numerele $b_1,b_2,...,b_n$ sunt egale, atunci suma

$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$ poate fi micşorată. Vom demonstra că dacă $b_1+b_2+\ldots+b_n=1$,

$$\text{atunci } b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2 \geq \left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n}$$

Într-adevăr, dacă nu toate numerele $b_1,b_2,\ldots,b_n$ sunt sunt egale cu $\frac{1}{n}$, atunci unul dintre numere este mai mic decât $\frac{1}{n}$, altul mai mare decât $\frac{1}{n}$. Putem presupune că aceste numere sunt b_1 şi b_2. Înlocuind b_1 cu $\frac{1}{n}$, iar pe b_2 cu $b_1+b_2-\frac{1}{n}$, noile n numere au tot suma 1, dar suma pătratelor mai mică. În plus, cel puţin unul dintre aceste numere este egal cu $\frac{1}{n}$. Repetând de cel mult $n-1$ ori această operaţie, inegalitatea (2) este demonstrată şi prin urmare (1) este adevărată.

Observaţii:

1. În exemplele R – 12.2.1 şi 12.2.2. am căutat extremul unei funcţii de n variabile făcând să varieze doar un vârf (Ex. 1) sau două numere (Ex.2).
2. În etapa a doua a demonstraţiei, (Ex. 1) am "apropiat" variabilele astfel: la trecerea de la Π la Π_1 am ales B_1 astfel ca $[AB_1]$ să aibă lungimea laturii poligonului regulat. Dacă alegeam B_1 la mijlocul arcului AC, măream aria, dar nu ajungeam la poligonul regulat după un număr finit de paşi.
3. Exemplul R-12.2.2. a fost ales pentru exemplificarea metodei lui Surm, inegalitatea (1) putându-se demonstra şi prin alte metode. De exemplu: pornim de la $x^2-2xs+s^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2-s^2\geq 2s(x-s)$ (3) Înlocuim succesiv x cu $a_1+a_2+\ldots+a_n$ şi adunând inegalităţile obţinute, apoi înlocuim s cu media aritmetică a numerelor $a_1+a_2+\ldots+a_n$ şi obţinem (1).
   Următorul exemplu tratează aplicarea metodei la o problemă de Trigonometrie.

R12.2.3. Dacă $a,b,c,d\geq 0$, iar $a+b+c+d=\pi$, atunci

$$\sin a \sin b \sin c \sin d \leq \frac{1}{4}$$

Soluţie. Să analizăm produsul $\sin a \sin b$, cu $a+b$=constant, dacă numerele a şi b se "apropie" ($a+b<\pi$). Fie $a<b$, $0<2x<b-a$.

În identitatea $\sin a \sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$, înlocuim *a* şi *b* cu *a+x*, respectiv *b-x*. Identitatea devine:

$$\sin(a+x)\sin(b-x)=\frac{1}{2}[\cos(a-b+2x)-\cos(a+b)]=$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(b-a-2x)-\cos(a+b)]$$

Cum $0<b-a-2x<b-a<\pi$ şi funcţia cosinus este descrescătoare pe $[0,\pi]$. Deducem $\cos(b-a-2x)>\cos(b-a)$, deci $\sin(a+x)\sin(b-x)>\sin a\sin b$. Prin urmare, dacă înlocuim numerele *a* şi *b* de sumă constantă cu altele mai "apropiate" având de asemenea suma constantă, produsul sinusurilor creşte. Vom demonstra că maximul produsului are loc când numerele *a,b,c,d* sunt egale. Dacă între unghiurile *a,b,c,d*, există două inegale, atunci unul este strict mai mic decât $\frac{\pi}{4}$, iar altul strict mai mare decât $\frac{\pi}{4}$. Fie $a<\frac{\pi}{4}$ şi $b>\frac{\pi}{4}$. Înlocuind aceste unghiuri cu $\frac{\pi}{4}$ şi respectiv $a+b-\frac{\pi}{4}$, suma rămâne constantă, iar produsul de sinusuri s-a mărit, după cum rezultă din raţionamentul făcut anterior. Repetând raţionamentul, obţinem în final că pentru $a=b=c=d=\frac{\pi}{4}$, produsul este maxim.

<u>Observaţie</u>: Problema admite următoarea generalizare:

Dacă $x_i \geq 0, i\in\{1,2,\ldots,n\}$ cu $\sum_{i=1}^{n} x_i = \pi$, atunci are loc inegalitatea

$$\prod_{i=1}^{n}\sin x_i \leq \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^n, n\geq 2, n\in\mathbf{N}.$$

În exemplul următor extremele nu se ating pentru valori egale ale variabilelor aşa cum s-a întâmplat în celelalte exemple.

R12.2.4. Să se găsească maximul şi minimul expresiei:

$$E(a,b,c,d)=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}$$

unde *a,b,c,d* sunt numere nenegative, cel mult două egale cu zero.

(O.I.M.)

<u>Soluţie</u>. Dacă $a+b+c+d=s$ atunci $E(a,b,c,d)=E\left(\frac{a}{s},\frac{b}{s},\frac{c}{s},\frac{d}{s}\right)$.

Notând $\frac{a}{s}=a',\frac{b}{s}=b',\frac{c}{s}=c',\frac{d}{s}=d'$, avem $a'+b'+c'+d'=1$, deci putem presupune $a+b+c+d=1$ şi în acest caz avem

$$E(a,b,c,d)=\frac{a}{1-c}+\frac{c}{1-a}+\frac{b}{1-d}+\frac{d}{1-b}$$

Observăm că expresia este simetrică în *a* şi *c*, în *b* şi *d,* iar perechile (*a,c*) şi (*b,d*) joacă şi ele un rol simetric. Să presupunem *a<c* şi să studiem cum se modifică *E(a,b,c,d)* dacă înlocuim *a* cu *a+x,* *c* cu *c-x,* astfel încât *a+x<c-x*. Avem:

$$E(a+x,b,c-x,d)-E(a,b,c,d)=\frac{a+x}{1-c+x}+\frac{c-x}{1-a-x}-\frac{a}{1-c}-\frac{c}{1-a}=$$

$$=\frac{x(1-a-c)}{(1-c+x)(1-c)}-\frac{x(1-a-c)}{(1-a-x)(1-a)}=\frac{x(1-a-c)(2-a-c)(c-a-x)}{(1-c+x)(1-c)(1-a-x)(1-a)}$$

Deducem de aici că dacă *a* şi *c* se "apropie" $(x>0)$, expresia *E* creşte, iar dacă *a* şi *c* se "îndepărtează" $(x<0)$, valoarea expresiei *E* scade. În situațiile extreme cînd se apropie, *a=c* şi *b=d*, iar când se îndepărtează, $a\to 0$, $c\to a+c$, $b\to 0$, $d\to b+d$. Dacă notăm *a+c=2u, b+d=2v*,

obținem $E(u,v,u,v)\geq E(a,b,c,d)\geq E(0,0,2u,2v)=1$. Deci minimul lui *E* este 1.

Pentru maxim să luăm $E(u,v,u,v)=\frac{2u}{1-u}+\frac{2v}{1-v}$ şi să căutăm maximul lui *E*, când 2(*u*+*v*)=1. Urmărind un raționament analog ajungem la concluzia că *E* creşte când *u* se îndepărtează de *v*. Ajungem în final să obținem că maximul lui *E*(*a,b,c,d*) este *E*(0,2,0,2)=2.

Observație:

În acest exemplu, nici minimul nici maximul nu s-au atins în cazul în care toate variabilele sunt egale. În această situație, *a=b=c=d,* iar expresia $E(a,a,a,a)=\frac{4}{3}$,care nu este nici minim, nici maxim pentru *E.*

În exemplele precedente am variat două dintre variabile, celelalte rămânând fixe. Se poate însă varia şi numai o singură variabilă, aşa cum este cazul prezentat în următorul exemplu.

R12.2.5. Inegalitatea lui *Schweitzer.*

Dacă $0<a<b$ iar $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[a,b]$, atunci

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\leq\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2$$

Soluție. Studiul variației unei singure necunoscute ne sugerează considerarea funcției $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=(c+x)\left(d+\frac{1}{x}\right)$,

$c,d>0$. Avem $f(x)=cd+1+xd+\frac{c}{x}\geq cd+1+2\sqrt{cd}=\left(\sqrt{cd}+1\right)^2$. Minimul funcției are loc pentru $x=\sqrt{\frac{c}{d}}$, , deci *f* este descrescătoare pe $\left(0,\sqrt{\frac{c}{d}}\right)$ și crescătoare pe $\left(\sqrt{\frac{c}{d}},+\infty\right)$, prin urmare, maximul funcției *f* pe intervalul [*a,b*] este atins la unul din capete. Fixând *n*-1variabile și variind-o pe a *n*-a, deducem

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\leq(pa+qb)\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}\right),$$

cu *p,q* naturale și *p+q=n* (în *p* puncte variabilele iau valoarea *a* și în *q* puncte valoarea *b*). Folosind inegalitatea $4AB\leq(A+B)^2$, obținem

$$(pa+qb)\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}\right)=\frac{4(pa+qb)(pb+qa)}{4ab}\leq\frac{(pa+qb+pb+qa)^2}{4ab}=\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2$$

În continuare propunem aplicarea metodei lui *Sturm* la rezolvarea următoarelor probleme, care au fost propuse la diverse concursuri.

13. Baricentre şi centre de greutate

În cadrul acestei teme prezentăm o metodă de rezolvare a problemelor de geometrie plană şi în spaţiu care îşi are originea în mecanică.

Vom prezenta mai întâi consideraţiile de mecanică care au condus la noţiunea de *baricentru*.

Prin *punct material* în fizică înţelegem cuplul (punct, număr): (A,m). Altfel spus, în punctul A se află masa $m > 0$. Pentru (A,m) scriem simplu mA. Să considerăm două bile de mase m_1 şi m_2 la capetele unei bare A_1A_2 (vezi figura 13.1). Există un punct G în care dacă bara este legată, atunci sistemul este în echilibru. Punctul G se numeşte *centrul masei sistemului de puncte materiale* S, sau *baricentrul* sistemului $S = \{m_1A_1, m_2A_2\}$

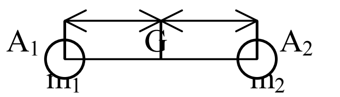


Fig. 13.1

Noţiunea poate fi extinsă la o configuraţie spaţială cu sferele de mase $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Pentru aplicarea conceptului la rezolvarea problemelor de geometrie trebuie să ţinem seama de următoarele *reguli*:

1. Orice sistem format din n puncte materiale are un baricentru şi acesta este unic.
2. Baricentrul a două puncte materiale este situat pe segmentul determinat de cele două puncte. Poziţia acestuia este determinată de *regula pârghiei*: produsul masei punctului material cu distanţa dintre acesta la baricentru este acelaşi pentru cele două puncte materiale, adică $m_1d_1=m_2d_2$.
3. Dacă într-un sistem format dintr-un număr finit de puncte materiale marcăm câteva puncte materiale şi masele lor le mutăm în baricentrul acestor puncte materiale, atunci poziţia baricentrului sistemului iniţial nu se schimbă.

13.1 Definiţia matematică a baricentrului

Vom analiza pentru început cazul a două puncte materiale m_1A_1, m_2A_2 având în G baricentrul (regula1) Egalitatea $m_1d_1 = m_2d_2$ (regula 2) se poate scrie sub forma: $m_1\left|\overrightarrow{GA_1}\right| = m_2\left|\overrightarrow{GA_2}\right|$. Cum vectorii $\overrightarrow{GA_1}$, $\overrightarrow{GA_2}$ au sensuri opuse, relaţia se scrie vectorial $m_1\overrightarrow{GA_1} = m_2\overrightarrow{GA_2}$ (1).

Fie acum trei puncte materiale m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3 şi G baricentrul acestui sistem. (vezi figura 13.2).

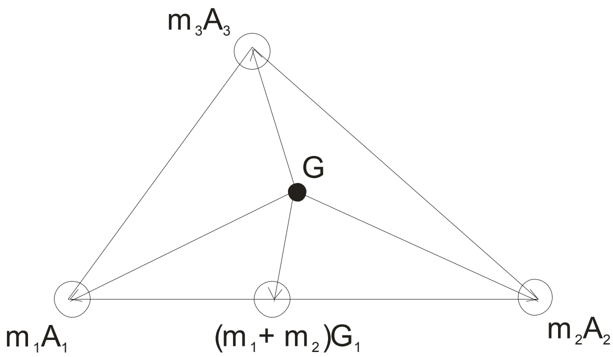


Fig. 13.2

Fie G_1 baricentrul sistemului format din punctele m_1A_1, m_2A_2. Conform (1) putem scrie: $m_1\overrightarrow{G_1A_1}+m_2\overrightarrow{G_1A_2}=0$ (2) Ținând cont de regula 3, baricentrul sistemului inițial format din punctele materiale m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3 coincide cu baricentrul sistemului format din punctele materiale $(m_1+m_2)G_1$, m_3A_3 şi ținând seama de (1) avem

$(m_1+m_2)\overrightarrow{GG_1}+m_3\overrightarrow{GA_3}=0$ (3). Dar $(m_1+m_2)\overrightarrow{GG_1}=m_1\overrightarrow{GG_1}+$

$$+m_2\overrightarrow{GG_1}=m_1\left(\overrightarrow{GA_1}-\overrightarrow{G_1A_1}\right)+m_2\left(\overrightarrow{GA_2}-\overrightarrow{G_1A_2}\right)=m_1\overrightarrow{GA_1}+m_2\overrightarrow{GA_2}-$$
$$-\left(m_1\overrightarrow{G_1A_1}+m_2\overrightarrow{G_1A_2}\right)=m_1\overrightarrow{GA_1}+m_2\overrightarrow{GA_2}\ .$$

Prin urmare (3) devine: $m_1\overrightarrow{GA_1}+m_2\overrightarrow{GA_2}+m_3\overrightarrow{GA_3}=\vec{0}$ (4)

În mod asemănător se poate deduce o relație pentru mai multe puncte materiale. Cu acestea putem da următoarea:

13.1.1. Definiție: Baricentrul sistemului de puncte materiale m_1A_1, m_2A_2,…, m_nA_n este punctul G pentru care are loc egalitatea:

$$m_1\overrightarrow{GA_1}+m_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$$

Masele m_1 m_2,…,m_n se numesc **ponderi**. Dacă aceste ponderi sunt egale obținem un caz particular de baricentru, numit **centru de greutate**.

13.1.2. Definiție: Un punct G se numeşte centru de greutate al punctelor A_1, A_2, …,A_n din spațiu dacă

$$\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$$

Orice sistem de puncte din spațiu are un unic centru de greutate (din regula 1)
Notând prin $S=\{m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_nA_n\}$ sistemul de puncte materiale, avem următoarea teoremă de caracterizare a baricentrului unui sistem de puncte materiale:

13.1.3. Teoremă: a) Dacă G este baricentrul sistemului de puncte materiale S, atunci oricare ar fi punctul O, are loc egalitatea

$$\overrightarrow{OG}=\frac{m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+m_m\overrightarrow{OA_n}}{m_1+m_2+\cdots+m_n} \quad (5)$$

b) Dacă pentru orice punct O are loc (5), atunci G este baricentrul sistemului S.
Demonstrație
Vom trata cazul n=2, pentru n>2 procedându-se analog.
a) Fie O un punct arbitrar. Egalitatea $m_1\overrightarrow{GA_1}+m_2\overrightarrow{GA_2}=\vec{0}$ se scrie sub forma $m_1\left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OG}\right)+m_2\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OG}\right)=\vec{0}$ sau $m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}=$
$=(m_1+m_2)\overrightarrow{OG}$, care este relația de demonstrat.
b) Afirmația se deduce parcurgând în sens invers egalitățile de la punctul a).
Din teorema enunțată rezultă că orice sistem S format dintr-un număr finit de puncte materiale are un baricentru unic (rezultatul corespunde regulii 1). Să arătăm că definiția baricentrului ne conduce la regula 2.

13.1.4. Teoremă: Baricentrul a două puncte materiale este situat pe segmentul ce unește cele două puncte. Poziția acestuia se determină prin regula pârghiei: $m_1d_1= m_2d_2$.
Demonstrație: Considerăm punctele materiale m_1A_1, m_2A_2 cu baricentrul G. Atunci $m_1\overrightarrow{GA_1}+m_2\overrightarrow{GA_2}=\vec{0}$, adică vectorii $\overrightarrow{GA_1}$, $\overrightarrow{GA_2}$ sunt coliniari și de sens contrar, deci G se află între A_1 și A_2, $G\in[A_1A_2]$. Din $m_1\overrightarrow{GA_1}=-m_2\overrightarrow{GA_2}$ rezultă $m_1d_1= m_2d_2$. Verificarea regulii numărul 3 este dată de următoarea

13.1.5. Teoremă de grupare a punctelor materiale: Fie sistemul de puncte materiale $S=\{m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_nA_n\}$ în care marcăm k puncte materiale $m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_kA_k$ și fie G' baricentrul punctelor marcate. Dacă întreaga masă a punctelor marcate o concentrăm în G', atunci baricentrul sistemului de puncte materiale $(m_1+m_2+\ldots+m_k)G'$, $m_{k+1}A_{k+1}, \ldots, m_nA_n$ coincide cu baricentrul sistemului S.
Demonstrație:
Fie G baricentrul sistemului S, deci are loc egalitatea

$$m_1\overrightarrow{GA_1}+m_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+m_k\overrightarrow{GA_k}+m_{k+1}\overrightarrow{GA_{k+1}}+\cdots+m_n\overrightarrow{GA_n}=0$$

Deoarece G' este baricentrul sistemului $\{m_1 A_1, m_2 A_2, \ldots, m_k A_k\}$, avem
Şi obţinem

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_n \overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)\overrightarrow{GG'} + m_{k+1}\overrightarrow{GA_{k+1}} + \cdots + m_n \overrightarrow{GA^n} = 0$$

prin urmare G este baricentrul sistemului de puncte materiale $(m_1+m_2+\ldots+m_k)G'$, $m_{k+1}A_{k+1}+\ldots+ m_nA_n$ şi teorema este demonstrată. Formula (%) are loc pentru orice punct O. Putem folosi o scriere simplificată $G = \frac{m_1\vec{A}_1 + m_2\vec{A}_2 + \ldots + m_n\vec{A}_{nk}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$

De exemplu scrierea $G = \frac{2A + 1B + 4C}{7}$

Arată că G este baricentru a trei puncte materiale 2A, 1B, 4C. Analog, 5A+3B=8G arată că G este baricentrul punctelor materiale 5A, 3B. Implicaţia

$$G = \frac{(2A + 3B + 1C) + 4D}{10} = \frac{6E + 4D}{10} \Rightarrow G \in [ED]$$

are următoarea semnificaţie: G este baricentrul punctelor materiale 2A, 3B, 1C, 4D. Dacă concentrăm masele a trei puncte materiale 2A, 3B, 1C în baricentrul E, atunci $G\in[ED]$.

Observaţii:

1. Dacă G este baricentrul maselor m_1, m_2, m_3, plasate în vârfurile A, B şi respectiv C (vezi figura 13.3). Atunci dreapta AG intersectează latura BC în A' care este baricentrul punctelor materiale m_1B şi m_3C.
2. Baricentrul G se poate determina astfel: În vârfurile A,B,C ale triunghiului ABC sunt plasate masele m_1, m_2 şi m_3 (vezi figura 13.4). Dacă B' este baricentrul sistemului $\{m_1 A, m_3 C\}$ şi C' baricentrul sistemului $\{m_1 A, m_2 B\}$, atunci $G=BB'\cap CC'$ este baricentrul sistemului de puncte materiale $\{m_1A, m_2B, m_3C\}$.

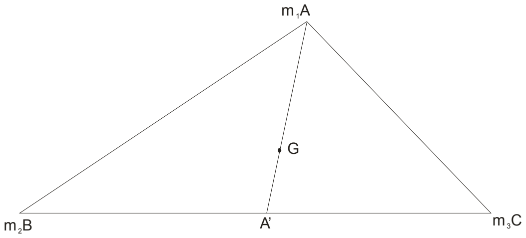


Fig. 13.3

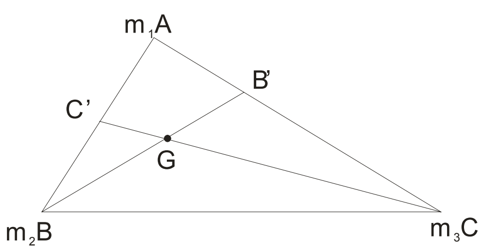


Fig. 13.4

Această observație este importantă, servind la demonstrarea concurenței a două sau mai multor drepte prin gruparea convenabilă a punctelor materiale (regula 3).

3. Utilizarea metodei baricentrelor în rezolvarea problemelor de geometrie constă în: i) alegerea convenabilă a punctelor; ii) punerea maselor corespunzătoare în aceste puncte, astfel încât problema să fie uşor rezolvabilă.

13.2. Baricentrul unui sistem de puncte materiale în care apar şi mase negative

Datorită faptului că am definit centrul de masă al unui sistem de puncte materiale printr-o relație vectorială, putem lua coeficienții vectorilor şi numere negative. De exemplu, centrul de masă al sistemului (-3)A, 4B este acel punct G pentru care are loc relația vectorială

$(-3)\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=0$. Condiția pentru ca un sistem de puncte materiale $\{m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_nA_n\}$ să aibă un baricentru este ca suma maselor $m_1+m_2+\ldots+m_n$ să fie nenulă. Au loc rezultatele din paragraful precedent şi putem afirma că: Centru G a două mase m_1 şi m_2 cu $m_1+m_2 \neq 0$, aşezate la capetele segmentului A_1A_2 se află pe dreapta A_1A_2 şi verifică condiția $|m_1| d_1=|m_2| d_2$, unde $d_1=|GA_1|$, $d_2=|GA_2|$. Avem $G\in[A_1A_2]$ dacă m_1,m_2 au acelaşi semn sau G aparține exteriorului segmentului $[A_1A_2]$ dacă numerele m_1,m_2 au semne diferite. În cazul maselor negative, centrul de masă este mai aproape de acea masă care este mai mare în valoare absolută.

13.3. Coordonate baricentrale în plan

În paragrafele anterioare am arătat că orice mase m_1,m_2,m_3 aşezate în vârfurile triunghiului $A_1A_2A_3$ definesc un punct unic G care este baricentrul sistemului de puncte materiale m_1A_1,m_2A_2,m_3A_3. Are loc şi proprietatea reciprocă, adică pentru orice punct G din planul triunghiului $A_1A_2A_3$ există trei mase m_1,m_2,m_3 plasate în vârfurile $A_1A_2A_3$ ale triunghiului astfel încât sistemul de puncte materiale să aibă centrul de masă G. Cele trei numere m_1,m_2,m_3 nu definesc în mod unic punctul G, deoarece $(km_1)A_1$, $(km_2)A_2$, $(km_3)A_3$ are acelaşi baricentru. Luând $k=1/(m_1+m_2+m_3)$ şi notând $\alpha_i = k_i$, $i=\{1,2,3\}$, avem că G este baricentrul punctelor materiale α_iA_i, $i=\{1,2,3\}$. Putem spune că pentru orice punct $G\in int[A_1A_2A_3]$ există trei numere pozitive α_I, α_2, α_3 cu $\alpha_I+\alpha_2+\alpha_3=1$ pentru care G este baricentru sistemului $\{\alpha_1A_1, \alpha_2A_2, \alpha_3A_3\}$, adică $G=\{\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3$. Numerele α_I, α_2, α_3 care verifică proprietățile de mai sus se numesc coordonatele baricentrice ale punctului G relative la triunghiul $A_1A_2A_3$.

În cazul particular în care G este punctul de intersecție al medianelor triunghiului $A_1A_2A_3$, atunci G este centrul de masă al sistemului cu suma ponderilor 1: $\frac{1}{3}A_1$, $\frac{1}{3}A_2$, $\frac{1}{3}A_3$ deci coordonatele baricentrice ale lui G sunt $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}$.

Dacă extindem coordonatele baricentrice şi la mase negative atunci centrul de masă G aparține planului $(A_1A_2A_3)$. Are loc următoarea:

13.3.1. Teoremă: Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi dat şi M un punct în planul triunghiului. Atunci există numerele reale unice α_1, α_2, α_3 cu $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$ şi M baricentrul sistemului α_1A_1, α_2A_2, α_3A_3, deci $M=\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3$.

În următoarea teoremă vom raporta coordonatele baricentrice la ariile unor triunghiuri.

13.3.2. Teoremă: Fie punctul P situat în interiorul triunghiului $A_1A_2A_3$ şi fie S,S_1,S_2,S_3 ariile triunghiurilor $A_1A_2A_3$, $P_1A_2A_3$, A_1PA_3, PA_1A_2. Atunci coordonatele baricentrice ale punctului P sunt

$$\alpha_1 = \frac{S_1}{S}, \alpha_2 = \frac{S_2}{S}, \alpha_3 = \frac{S_3}{S}$$

Deci, dacă punem în vârfurile $A_1A_2A_3$ masele egale cu S_1,S_2,S_3 atunci baricentrul acestor puncte este P.

Demonstrație:

Fie $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ coordonatele baricentrice ale punctului P din interiorul triunghiului $A_1A_2A_3$ (vezi figura 13.5). Sistemul format din punctele materiale α_2A_2 şi α_3A_3 au baricentrul în punctul $B_1 \in [A_2A_3]$, prin urmare punctele A_1, P, B_1 sunt coliniare. Are loc relația

$\alpha_2 \left|\overrightarrow{B_1A_2}\right| = \alpha_3 \left|\overrightarrow{B_1A_3}\right|$ sau $\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{B_1A_2}{B_1A_3}$

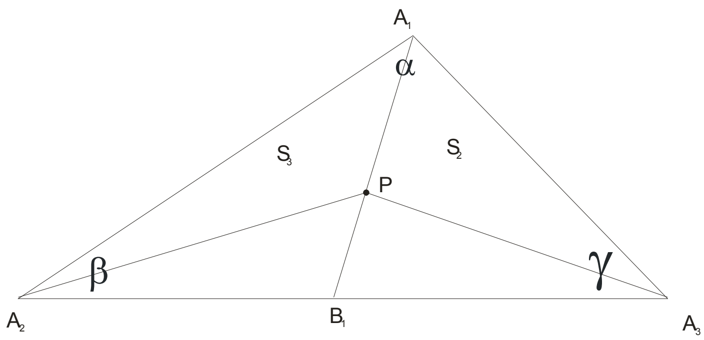


Fig. 13.5

Triunghiurile $A_1A_2B_1$ şi $A_1B_1A_3$ au aceeaşi înălţime (din A_1), la fel triunghiurile PA_2B_1 şi PB_1A_3. Atunci $\frac{S_{A_1A_2B_1}}{S_{A_1A_3B_1}}=\frac{S_{PA_2B_1}}{S_{PA_3B_1}}=\frac{B_1A_2}{B_1A_3}$ 3

De unde deducem $\frac{S_{A_1A_2B_1}-S_{PA_2B_1}}{S_{A_1A_3B_1}-S_{PB_1A_3}}=\frac{B_1A_2}{B_1A_3}$ sau $\frac{S_3}{S_2}=\frac{B_1A_2}{B_1A_3}$

Din (1) şi (2) avem $\frac{S_3}{S_2}=\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\Leftrightarrow\frac{\alpha_2}{S_2}=\frac{\alpha_3}{S_3}$

Analog obţinem relaţia

$$\frac{\alpha_1}{S_1}=\frac{\alpha_2}{S_2}, deci \frac{\alpha_1}{S_1}=\frac{\alpha_2}{S_2}=\frac{\alpha_3}{S_3}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{S_1+S_2+S_3}=\frac{1}{S}$$

Rezultă că $\alpha_1=\frac{S_1}{S},\alpha_2=\frac{S_2}{S},\alpha_3=\frac{S_3}{S}$

Care sunt coordonatele baricentrice ale punctului P.

Consecinţe:

1. Cu ajutorul teoremei 13.3.2. putem deduce coordonatele baricentrice ale ortocentrului unui triunghi $A_1A_2A_3$ ascuţitunghic, dacă
$m(A_1)=\alpha$, $m(A_2)=\beta$ $m(A_3)=\gamma$. Dacă $(\alpha_I, \alpha_2, \alpha_3)$ sunt coordonatele baricentrice a lui H atunci $P\equiv H$ şi $A_1B_1\perp A_2B_3$. Din (1) avem

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2}=\frac{B_1A_2}{B_1A_3}=\frac{B_1A_2}{A_1B_1}\frac{A_1B_1}{B_1A_3}=ctg\beta tg\gamma=\frac{tg\gamma}{tg\beta}$$

Deducem analog $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{tg\beta}{tg\alpha}$ şi obţinem coordonatele baricentrice ale lui H:

$$\frac{tg\alpha}{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma},\frac{tg\beta}{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma},\frac{tg\gamma}{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma}$$

Ţinând seama de identitatea tgα+tgβ+tgγ= tgαtgβtgγ, coordonatele se mai scriu (ctgβctgγ, ctgαctgγ, ctgαctgβ).

2. Coordonatele baricentrice ale centrului înscris în triunghiul ABC
având laturile a,b,c sunt a/(a+b+c), b/(a+b+c), c/(a+b+c). Într-adevăr, dacă r este raza cercului înscris în triunghiul ABC, avem: $S_1 = \frac{ar}{2}$, $S_2 = \frac{br}{2}$, $S_3 = \frac{cr}{2}$ iar $S = \frac{(a+b+c)r}{2}$. Coordonatele lui I sunt

$$\alpha_1 = \frac{S_1}{S} = \frac{a}{a+b+c},\ \alpha_2 = \frac{S_2}{S} = \frac{b}{a+b+c},\ \alpha_3 = \frac{c}{a+b+c}$$

Bibliografie

- V. Nicula, Revista Arhimede, nr 1-2/2002 pag 6-19
- M. Botesch, D. Isac, Baricentre şi centre de greutate G.M. 7-8/2001 pag 257
- M. Ganga, Probleme elementare de matematică, Ed. Mathpress, Ploieşti, 2003 pag 196

13.4. Probleme rezolvate (13)

R13.4.1. Să se arate că într-un triunghi medianele sunt concurente într-un punct G care împarte fiecare mediană în raportul 2:1, de la vârfuri. Punctul G se numeşte <u>centrul de greutate</u> al triunghiului.
b) Segmentul determinat de un vârf al unui tetraedru şi centrul de greutate al feței opuse se numeşte <u>mediană.</u> Arătați că într-un tetraedru medianele sunt concurente într-un punct G, care se <u>numeşte centrul de greutate</u> al tetraedrului.
<u>Soluție</u>:

a) Fie triunghiul ABC şi A_1, B_1, C_1, mijloacele laturilor [BC], [AC] şi respectiv[AB] (vezi figura 13.6). Cum A_1 este mijlocul segmentului [BC], punem în B şi C aceeaşi masă. Un raționament similar ne conduce la aşezarea în A,B şi C a aceleiaşi mase, de exemplu 1. Avem deci sistemul $S=(1A,1B,1C)$. Există baricentrul sistemului S (regula 1), notat cu G, deci $G=\frac{1A+1B+1C}{3}$.
Fie A_1 baricentrul sistemului $\{1B,1C\}$, deci $A_1=\frac{1B+1C}{2}$ şi $A_1B= A_1C_1$. Aplicând regula 3, deducem că S nu-şi schimbă centrul de greutate G, deci $G=\frac{1A+(1B+1C)}{3}=\frac{1A+2A_1}{3}$, de unde $G\in[AA_1]$ şi $2GA_1=1*GA$. Analog obținem $GB/GB_1=GC/GC_1=2/1$.

b) Considerăm sistemul de puncte materiale $S=\{1A,1B,1C,1D\}$ (vezi figura 13.7). Există G, centrul de greutate al sistemului S, $G=\frac{1A+1B+1C+1D}{4}$.
Grupăm $\{1B,1C,1D\}$ şi fie G_A centrul de greutate al sistemului, deci $G_A=\frac{1B+1C+1D}{3}\Rightarrow 3G_A=1B+1C+1D$.
Din teorema de grupare a punctelor materiale, deducem că sistemul $3G_A$,1A are acelaşi centru de greutate G ca şi sistemul S.

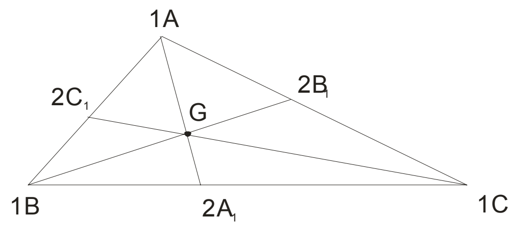


Fig. 13.6

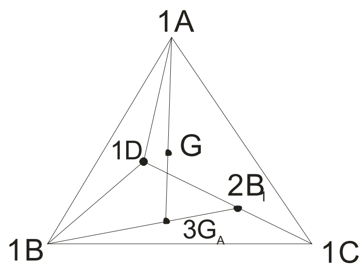


Fig. 13.7

Avem deci că $G=\frac{(1B+1C+1D)+1A}{4}=\frac{3G_A+1A}{4}=$, ceea ce înseamnă că $G\in[AG_A]$ şi $3GG_A=1G_A$, adică $\frac{GA}{GG_A}=\frac{3}{1}$. Deci G împarte mediana tetraedrului în raportul 3:1 plecând de la vârf. Avem şi $G=\frac{(1A+1B+1C)+1D}{4}=\frac{3G_D+1D}{4}\Rightarrow G\in[DG_D]$ şi $\frac{GD}{GG_D}=\frac{3}{1}$. Analog obținem că $G\in[CG_C]$ şi $\frac{GC}{GG_C}=\frac{3}{1}$; $G\in[BG_B]$ şi $\frac{GB}{GG_A}=\frac{3}{1}$.

Observație: Problema are o rezolvare simplă folosind chestiuni elementare. Scopul alegerii problemei a fost exemplificarea metodei baricentrelor pe o problemă clasică.

R13.4.2. Pe laturile (AB), (BC), (CA) ale triunghiului ABC se consideră punctele M, N respectiv P, astfel încât $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{5}$, $\frac{NC}{NB}=\frac{1}{4}$ şi $\frac{PC}{PA}=\frac{1}{6}$. Să se determine raportul în care punctul de intersecție al segmentelor [AN] şi [MP] împarte fiecare din aceste segmente.

Soluție: Vom pune mase convenabile în vârfurile triunghiului astfel ca punctele M, N şi P să fie baricentre. Din NB=4NC rezultă că trebuie să luăm punctele 1B şi 4C (vezi figura 13.8). În A punem masa x astfel ca M să fie baricentrul punctelor materiale 1B, xA.

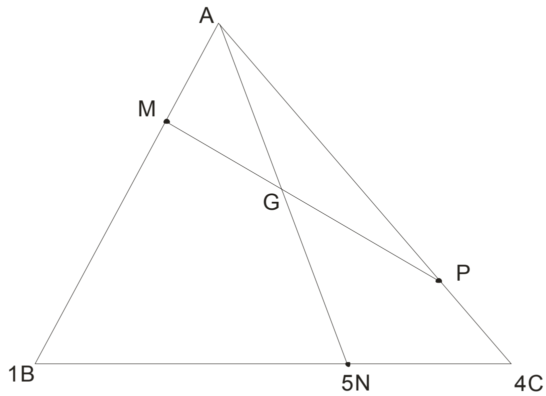


Fig. 13.8

Din relația 5MA=1MB rezultă x=5, deci $M=\frac{1B+5A}{6}$. De asemenea în A punem masa y astfel ca P să fie baricentrul punctelor materiale 3C,yA. Din

6PC=PA şi 4PC=yPA deducem $y=\frac{4PC}{PA}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Deci P este baricentrul punctelor 4C, $\frac{2}{3}A$, când $P=\frac{4C+\frac{2}{3}A}{\frac{14}{3}}$. Fie G baricentrul sistemului $S=\left\{1B,4C,5A,\frac{2}{3}A\right\}$.

Deci $G=\frac{1B+4C+5A+\frac{3}{2}A}{\frac{32}{2}}$

Aplicăm teorema de grupare a punctelor materiale şi avem:

$$G=\frac{(1B+5A)+\left(4C+\frac{2}{3}A\right)}{\frac{32}{3}}=\frac{6M+\frac{14}{3}P}{\frac{32}{3}},$$

deci G∈[MP] şi $6GM=\frac{14}{3}GP$, adică $\frac{GM}{GP}=\frac{\frac{14}{3}}{6}=\frac{7}{9}$.

Folosind altă grupare, avem

$G=\frac{(1B+4C)+\left(5A+\frac{3}{2}A\right)}{\frac{32}{3}}=\frac{5N+\frac{17}{3}A}{\frac{32}{3}}$, deci G∈[AN] şi $5GN=\frac{17}{3}GA$, adică $\frac{GA}{GN}=\frac{5}{\frac{17}{13}}=\frac{15}{17}$.

R13.4.3. **Teorema lui Pappus.**

Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele M∈(AB), N∈(BC) şi P∈(AC), astfel ca. Atunci triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate.

Demonstraţie:

Vom alege mase convenabile pentru vârfurile triunghiului astfel ca punctele M, N şi P să fie baricentre (vezi figura 13.9).

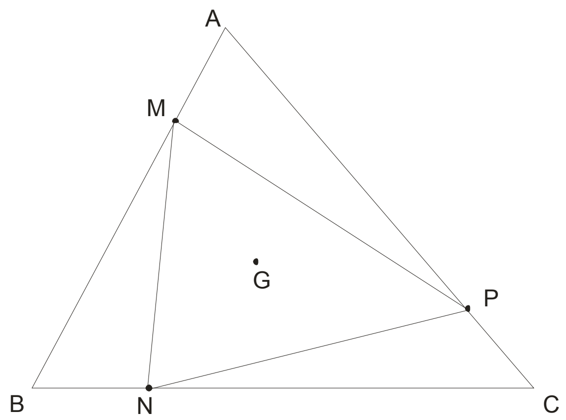


Fig. 13.9

Din MA=rMB rezultă că trebuie să luăm punctele 1A şi rB, iar $M=\frac{1A+rB}{1+r}$.

Din NB=rNC rezultă punctele !B, rC când $N=\frac{1B+rC}{1+r}$. Din PC=rPA rezultă punctele materiale 1C, rA, iar $P=\frac{1C+rA}{1+r}$.

Fie G baricentrul sistemului $S=\{1A,rB,1B,rC,1C,rA\}$, deci $G=\frac{1A+rB+1B+rC+1C+rA}{3(1+r)}$G. Folosind teorema de grupare a punctelor materiale, avem: $G=\frac{(1A+rB)+(1B+rC)+(1C+rA)}{3(1+r)}=$

$=\frac{(1+r)M+(1+r)N+(1+r)P}{3(1+r)}=\frac{M+N+P}{3}$, deci G este centrul de greutate al triunghiului MNP. Grupând altfel avem:

$G=\frac{(1A+rA)+(1B+rB)+(1C+rC)}{3(1+r)}=\frac{A+B+C}{}3$, prin urmare G este centru de greutate şi pentru triunghiul ABC.

R13.4.4. **Teorema lui Pappus generalizată**

Pe laturile triunghiului ABC considerăm punctele M∈(AB), N∈(BC) şi P∈(AC), astfel încât $\frac{MA}{MB}=\frac{y_2}{x_1}$, $\frac{NB}{NC}=\frac{z_2}{y_1}$, $\frac{PC}{PA}=\frac{x_2}{z_1}$, unde x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2 sunt numere pozitive oarecare. Atunci baricentru sistemului de puncte materiale $S_1=\{(x_1+x_2)A,(y_1+y_2)B,(z_1+z_2)C\}$ este acelaşi cu baricentrul sistemului

$$S_2 = \{(x_1 + y_2)M, (y_1 + z_2)N, (z_1 + x_2)P\}.$$

Demonstrație:

Considerăm sistemul de puncte materiale $S = \{x_1 A, x_2 A, y_1 B, y_2 B, z_1 C, z_2 C\}$. Conform regulii 1, S are baricentrul G, cu $G = \dfrac{x_1 A + x_2 A + y_1 B + y_2 B + z_1 C + z_2 C}{x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2}$.

Folosind regula 3 avem:

$G = \dfrac{(x_1 + x_2)A + (y_1 + y_2)B + (z_1 + z_2)C}{x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2}$, deci G este baricentrul sistemului S_1.

Din $x_1 MA = y_2 MB$ rezultă că trebuie considerate punctele materiale $x_1 A$, $y_2 B$ şi $M = \dfrac{x_1 A + y_2 B}{x_1 + y_2}$. Analog obținem $N = \dfrac{(y_1 B + z_2 C)}{y_1 + z_2}$ şi $P = \dfrac{x_2 A + z_1 C}{x_2 + z_1}$.

Folosind din nou teorema de grupare a punctelor materiale, avem:

$$G = \frac{(x_1 A + y_2 B) + (y_1 B + z_2 C) + (x_2 A + z_1 C)}{x_1 + y_2 + y_1 + z_2 + x_2 + z_1} =$$

$= \dfrac{(x_1 + y_2)M + (y_1 + z_2)N + (x_2 + z_1)P}{x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2}$, prin urmare G este baricentru şi pentru S_2. În cazul particular $x_1 = y_1 = z_1 = u$. $x_2 = y_2 = z_2 = v$, atât A,B,C cât şi M,N,P au aceeaşi pondere u+v, deci baricentrul comun al celor două sisteme devine centrul de greutate comun şi am obținut teorema lui Pappus.

Observație:

Ca o consecință imediată avem următorul rezultat: Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Atunci pentru orice $M \in (AB)$ există $N \in (BC)$ şi $P \in (CA)$ astfel încât G să fie centrul de greutate al triunghiului MPN.

14. Probleme de geometrie combinatorica

14.1. Partiţii ale mulţimii numerelor naturale

Problemele care se referă la partiţii ale mulţimii numerelor naturale pot apărea în contexte aparent diferite.

În general, o astfel de problemă poate avea enunţul de forma:

Dacă partiţionăm mulţimea numerelor naturale într-un număr finit de submulţimi, atunci una din mulţimi are o proprietate dată. Această proprietate poate fi legată strict de mulţimea numerelor naturale (de exemplu, dacă ea este legată de operaţiile cu numere naturale), legată doar de faptul că mulţimea numerelor naturale este numărabilă (ideea de şir) sau de faptul că este o mulţime discretă şi le putem parcurge pe toate “pas cu pas”.

Una din problemele celebre, cu aplicaţii foarte interesante, este problema lui Baudet, rezolvată de Van der Waerden. Demonstraţia teoremelor legate de această problemă ar ocupa mult spaţiu (dar, ar merita urmărită din bibliografie), noi vom da doar enunţurile şi câteva aplicaţii.

14.1.1. Teoremă. *Pentru orice partiţie a lui* $\mathbb{N}$ *în două clase* $\mathbb{N} = A_1 \bigcup A_2$, $(A_1 \bigcap A_2 = \varnothing)$ *şi pentru orice* $k \geq 3$ *există o clasă care conţine k numere în progresie aritmetică.*

14.1.2. Observaţii. a) Orice partiţie a lui $\mathbb{N}$ în două clase, are o clasă care conţine progresii aritmetice finite oricât de lungi.

b) Existenţa progresiilor cu oricât de mulţi termeni nu implică existenţa în una din clase a unei progresii aritmetice infinite după cum rezultă din exemplul $\mathbb{N} = A_1 \bigcup A_2$ unde

$$A_1 : 1, \quad\quad ,4,5,6, \quad\quad ,\ldots$$
$$A_2 : \; 2,3 \quad\quad\quad 7,8,9,10,\ldots$$

c) În general, în teoria numerelor, considerăm că 0 nu este număr natural, deci $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$.

14.1.3. Teoremă. *Pentru orice partiţie a mulţimii* $\mathbb{N}$ *într-un număr finit de mulţimi* $\mathbb{N} = A_1 \bigcup \ldots \bigcup A_n$ *şi pentru orice* $k \geq 3$ *esxistă k numere în progresie aritmetică, toate aflate în aceeaşi submulţime a partiţiei.*

14.1.4. Teoremă. (Van der Waerden). *Pentru orice număr natural n şi* $k \geq 3$ *există un număr natural (minim)* $N = W(n,k)$ *cu proprietatea că pentru orice partiţie a mulţimii* $\{1,2,\ldots,N\}$ *în n mulţimi, cel puţin o mulţime conţine k numere în progresie aritmetică.*

14.1.5. Teoremă. (Kakeya, Morimoto). *Pentru orice numere naturale k şi d există un număr natural N cu proprietatea că orice mulţime de N numere naturale*

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_N$$

cu $a_{i+1} - a_i \le d$, $i = 1, N-1$, *conține o progresie aritmetică cu k termeni.*

14.1.6. Observație. Nu se poate trage concluzia că dacă şirul infinit de numere naturale $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ verifică condiția $a_{i+1} - a_i \le d$, $i \in \mathbb{N}^*$, atunci el ar conține progresie aritmetică infinită. (Mulțimea progresiilor infinite este numărabilă, o progresie fiind determinată de primul termen şi de rație, iar mulțimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă).

Dacă presupunem că am ordonat toate progresiile: $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ şi alegem $b_1 \in P_1$, $b_2 \in P_2, \ldots, b_n \in P_n, \ldots$ atunci şirul $\mathbb{N} \setminus \{ b_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ verifică condiția $| a_{i+1} - a_i | \le 2$, dar nu conține nici o progresie aritmetică infinită.

O interpretare interesantă a teoremei lui Van der Waerden a fost dată de R.Rado [2] şi anume: oricum am împărți numerele naturale într-un număr finit de clase, sistemul de ecuații

$$x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \ldots = x_n - x_{n+1} \ne 0$$

are soluție în una din clase.

Această interpretare a deschis un tip de probleme:

O ecuația de forma $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ sau un sistem de astfel de ecuații are soluție în una din mulțimile partiției, oricare ar fi această partiție?

14.1.7. Definiție. Dacă o ecuație sau un sistem de ecuații are proprietatea că oricum am împărți mulțimea numerelor naturale într-un număr finit de clase, ecuația sau sistemul are soluție cu toate componentele în aceea clasă, spunem că ecuația sau sistemul este ***n* normală**.

14.1.8. Observații. a) Dacă o ecuație este *n* normală şi $k < n$ atunci ea este *k* normală.

b) O ecuație care este *n* normală pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se numeşte **ecuație normală**.

c) Din teorema lui Van der Waerden rezultă că ecuația $x + y = 2z$ este normală (chiar în ipoteza suplimentară că numerele *x*, *y* şi *z* sunt distincte).

Un rezultat general, interesant, în acest domeniu este

14.1.9. Teoremă. Ecuația $ax + by = cz$ este 2-normală pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ (în general însă ea nu este *n* normală pentru orice *n*).

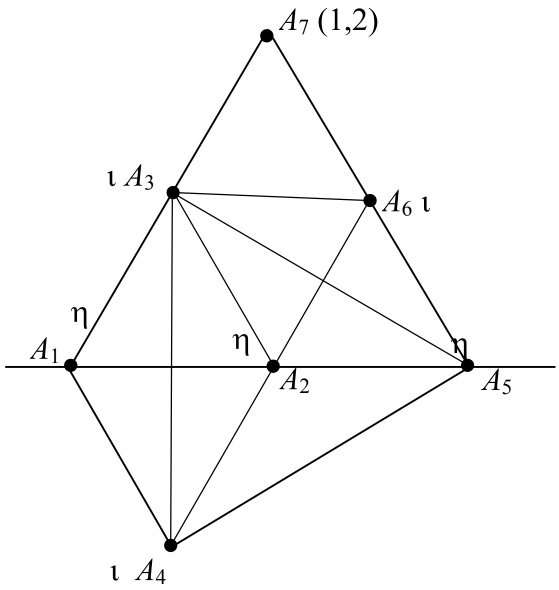
Bibliografie

1. **G., Sudan,** *Câteva probleme matematice interesante*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969
2. **P., Erdös, R., Rado,** *Combinatorial theorem on classification of subsets of a given set*, Proc.of London Math.Soc., vol.2, 1952
3. **L.,Moser,** *Notes on number theory. On a theorem of Van der Waerden*, Canadian Bull. 1960
4. **I., Creangă,** *Introducere în teoria numerelor*, Editura p. Bucureşti, 1965

14.2. Probleme rezolvate (14)

R14.2.1. Să se arate că pentru orice partiție a punctelor planului într-un număr finit de mulțimi, există trei puncte în una din mulțimi, care sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Soluție. Pentru partiția în două mulțimi vom da o soluție elementară:



Considerăm două puncte A_1, A_2 din aceeaşi mulțime C_1. Cele două puncte A_3 şi A_4 care sunt vârfuri ale triunghiurilor $A_1A_2A_3$ şi $A_1A_2A_4$ sunt în C_2 (în caz contrar se formează triunghi echilateral în C_1). Punctul A_5 situat pe semidreapta $[A_1A_2$ pentru care triunghiul $A_3A_4A_5$ este echilateral va fi în C_1. Punctul A_6 pentru care triunghiul $A_2A_5A_6$ este echilateral (situat în aceeaşi parte a dreptei A_1A_5 ca şi A_3) va fi în C_2. Analizăm în ce mulțime este punctul A_7 (pentru care triunghiurile $A_3A_6A_7$ şi $A_1A_5A_7$ sunt simultan echilaterale). Dacă $A_7 \in C_1$ avem triunghiul $A_1A_5A_7$ în C_1, iar dacă este în C_2, atunci $A_3A_6A_7$ este triunghi echilateral în C_2. Pentru partiția în n mulțimi, această metodă nu pare a avea şanse. Vom folosi teorema Van der Waerden.

Considerăm în plan o rețea de triunghiuri echilaterale (de latură 1). Considerăm nodurile rețelei situate pe una din dreptele d_1 ale rețelei.

Considerăm nodurile rețelei situate pe una din dreptele d_1 ale rețelei. Există pe ea suficient de multe (orice număr finit) puncte în aceeaşi mulțime a partiției C_1, echidistante (în progresie aritmetică). Dacă L_1 este distanța între două astfel de noduri consecutive, considerăm toate triunghiurile echilaterale de laturi L_1 situate în acelaşi semiplan faţă de d_1, cu câte două vârfuri pe d_1. Dacă unul din aceste noduri este în C_1 se formează triunghi în C_1. Dacă toate sunt în celelalte $(n-1)$ mulţimi, se pare că putem continua inductiv, dacă la început am luat suficient de multe puncte pe d_1. Acest număr este $N = a_n$ unde şirul $(a_k)_k$ este definit astfel:

$$a_{k+1} = W(a_k + 1, k+1),\ k = \overline{1,n} \text{ şi } a_1 = 2,$$

unde am notat $W(p,q)$ numărul minim pentru care dacă partiţionăm mulţimea $\{1,2,\dots W(p,q)\}$ în q mulţimi există p numere în progresie aritmetică în aceeaşi mulţime.

R14.2.2. Fie $x>1$, $y>1$ numere reale. Să se arate că mulţimile $A = \left\{[n\cdot x] \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, $B = \left\{[n\cdot y] \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ formează o partiţie a mulţimii $\mathbb{N}^*$, dacă şi numai dacă $x, y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

Soluţie. Fie $A_n = \left\{k \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, [k\cdot x] \le n\right\}$, $B_n = \left\{k \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, [k\cdot y] \le n\right\}$. Dacă $k_n = \max A_n$, $l_n = \max B_n$ atunci $|A_n| = k_n$, $|B_n| = l_n$ şi condiţia $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n) = \mathbb{N}^*$ revine la: pentru orice $\varepsilon > 0$, oricât de mic, există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca

$$1-\varepsilon < \frac{l_n + k_n}{n} < 1 \text{ pentru toţi } n \ge N.$$

Avem: $[k\cdot x] \le n \Leftrightarrow k\cdot x < n+1$ deci $k < \dfrac{n+1}{x}$ şi atunci $\dfrac{n+1}{x} - 1 \le k_n < \dfrac{n+1}{x}$ şi analog, $\dfrac{n+1}{y} - 1 \le l_n < \dfrac{n+1}{y}$.

Adunând relaţiile obţinem:

$$\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) - \frac{2}{n} \le \frac{k_n + l_n}{n} < \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),$$

relaţii care au loc pentru orice n numai dacă $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = 1$.

Rămâne să arătăm că $x, y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Dacă, prin absurd, $x \in \mathbb{Q}$ atunci şi $y \in \mathbb{Q}$, fie $x = \frac{\gamma}{q}$, $y = \frac{\gamma}{p-q}$. Avem: $[q \cdot x] = [(p-q) \cdot y] = \gamma$ deci $A \cap B \neq \varnothing$.

Reciproc, dacă $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ trebuie să arătăm că orice număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ se află doar în una din mulţimile A sau B. Fie $A' = \left\{ k \in \mathbb{N} \,\middle|\, k \geq \frac{n}{x} \right\}$, $B' = \left\{ l \in \mathbb{N} \,\middle|\, l \geq \frac{n}{y} \right\}$ şi $k_0 = \min A'$, $l_0 = \min B'$. Dacă $k_0 = \frac{n}{x} + \varepsilon_1$, $l_0 = \frac{n}{y} + \varepsilon_2$, cu $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0,1)$, atunci $k_0 + l_0 = n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = n + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \in \mathbb{N}$, deci $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$ sau $\frac{x \cdot \varepsilon_1}{x} + \frac{y \cdot \varepsilon_2}{y} = 1$. Unul din numerele $x \cdot \varepsilon_1$, $y \cdot \varepsilon_2$ este mai mic ca 1, iar altul mai mare (dacă am avea $x \cdot \varepsilon_1 = y \cdot \varepsilon_2 = 1$ atunci $x \cdot k_0 = n + 1 \in \mathbb{N}$ sau $x \in \mathbb{Q}$). Dacă $0 < x \cdot \varepsilon_1 < 1$ şi $y \cdot \varepsilon_2 > 1$ atunci $x \cdot k_0 = n + x \cdot \varepsilon_1$ şi $[x \cdot k_0] = n$, iar $[y \cdot l_0] > n$.

R14.2.3. a) Să se arate că oricum am partiţiona mulţimea numerelor naturale în două mulţimi, există numerele x, y, z în una din mulţimile partiţiei astfel ca ele să verifice relaţia

$$x + y = 3z .$$

b) Rămâne afirmaţia adevărată dacă partiţia se face în mai multe mulţimi?

Soluţie. Observăm că în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia $x + y = 3z$ are soluţia (2,1,1) şi $(2k, k, k)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Notăm cu C_1 mulţimea care conţine pe $a_1 = 3$ şi cu C_2 cealaltă mulţime. Dacă în şirul $\{3n \mid n \in \mathbb{N},\, n \geq 3\}$ toţi termenii ar fi din C_1 am avea soluţia $(18,9,9) \in S(C_1)$. Fie deci $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ astfel încât $a_2 = 3n \in C_2$ şi notăm $k = 3(n-1)$. În şirul $\{m \cdot k \mid m \in \mathbb{N}^*\}$ există termeni din C_2 (în caz contrar am avea soluţia $(2k, k, k) \in S(C_1)$, fie $a_3 = m \cdot k \in C_2$ şi considerăm numerele $a_4 = m(n-1) + n$ şi $a_5 = (m+1)k$. Tripletele (a_3, a_2, a_4) şi (a_5, a_1, a_4) verifică ecuaţia $x + y = 3z$ şi din $a_2, a_3 \in C_2$ rezultă $a_4 \in C_1$ iar din $a_1, a_4 \in C_1$ rezultă $a_5 \in C_2$. Atunci, din ipoteza $m \cdot k \in C_2$ a rezultat $(m+1)k \in C_2$ şi, prin inducţie, $(m+2)k \in C_2, \ldots, 2mk \in C_2$ şi am obţinut soluţia $(2mk, mk, mk) \in S(C_2)$.

b) Vom arăta că dacă, de exemplu, partiționăm $\mathbb{N}$ în 4 clase, ecuația $x+y=3z$ nu are soluție în nici una din clase.

Pentru aceasta punem în evidență o astfel de partiție:

Se ştie că orice număr natural se poate scrie sub forma $N=5^p\cdot q$, unde q nu se divide cu 5. Definim clasele:

$$C_1=\left\{(5n+1)\cdot 5^m \,\middle|\, n,m\in\mathbb{N}\right\};$$

$$C_2=\left\{(5n+2)\cdot 5^m \,\middle|\, n,m\in\mathbb{N}\right\};$$

$$C_3=\left\{(5n+3)\cdot 5^m \,\middle|\, n,m\in\mathbb{N}\right\};$$

$$C_4=\left\{(5n+4)\cdot 5^m \,\middle|\, n,m\in\mathbb{N}\right\}.$$

Dacă ecuația ar avea soluție în una din mulțimi am avea:

$$(5n_1+c)\cdot 5^{m_1}+(5n_2+c)\cdot 5^{m_2}=3(5n_3+c)\cdot 5^{m_3}.$$

Distingem cazurile:

a) Unul din m_1,m_2,m_3 este strict mai mic decât celelalte două;

b) Unul din m_1,m_2,m_3 este strict mai mare decât celelalte două;

c) $m_1=m_2=m_3$.

Toate, după simplificare cu puterea maximă a lui 5, dau contradicțiile de forma $C\equiv 0(\bmod 5)$ sau $2C\equiv 0(\bmod 5)$, sau $3C\equiv 0(\bmod 5)$.

Observație. Ecuația $x+y=3z$ este 2−normală dar nu este 4−normală (nici n−normală pentru $n\geq 4$).

R14.2.4. Se consideră în plan $a_n=1+n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$, $n\geq 1$ puncte oricare trei necoliniare, iar segmentele ce unesc aceste puncte se partiționează în n mulțimi (se colorează în n culori). Să se arate că se formează cel puțin un triunghi cu laturile în aceeaşi mulțime a partiției (monocolor).

Soluție. Vom încerca o inducție după n.

$n=1$; $a_1=3$ evident;

$n=2$; $a_2=6$

$n=3$; $a_3=17$

(Problemă dată la Olimpiada Internațională de Matematică, 1964

(17 oameni corespondează între ei pe trei teme. Să se arate că există 3 care corespondează pe aceeaşi temă).

Pentru inducție, în general, este utilă o relație de recurență de tipul $a_n=f(a_{n-1})$. Avem

$$a_n - 1 = n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right) \Leftrightarrow$$

$$a_n - 1 = n \cdot \left[(n-1)!\left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right)\right] + 1 \Leftrightarrow$$

$$a_n - 1 = n(a_{n-1} - 1) + 1$$

Unim punctul A_1 cu celelalte $a_n - 1$ puncte cu segmente de n culori, $a_n - 1 = n(a_{n-1} - 1) + 1 \Rightarrow$ cel puțin a_{n-1} segmente sunt de aceeaşi culoare $C_1\left(\frac{n(a_{n-1}-1)+1}{n} > a_{n-1}\right)$.

Dacă unul din segmente ce unesc aceste a_{n-1} puncte ar fi de culoare C_1 am avea un triunghi de culoare C_1.

Dacă nu, problema s-a redus la pasul de inducție (a_{n-1} puncte cu segmentele ce le unesc partiționate în $(n-1)$ mulțimi).

Altă formulare: A_n mulțime cu a_n elemente şi $P_2(A_n)$ mulțimea părților cu două elemente. Dacă partiționăm $P_2(A_n)$ în n mulțimi există o mulțime C_i a partiției şi $\alpha, \beta, \gamma \in A_n$ distincte astfel ca $\{\alpha,\beta\}, \{\beta,\gamma\}, \{\gamma,\alpha\} \in C_i$
(Pentru idee n se poate lua $n = 2$, $a_2 = 6$)

R14.2.5. Numerele naturale de la 1 la $b_n = n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$ se partiționează în n mulțimi. Să se arate că ecuația

$$x + y = z$$

are soluție în cel puțin una dintre mulțimi.
(există $C_i : x, y, z \in C_i$ neapărat distincte astfel ca $x + y = z$).

Soluție. Vom proceda în mod analog cu problema anterioară. $b_1 = 2$, $1 + 1 = 2$ deci (1,1,2) este soluție.

Relația de recurență este $b_n = n \cdot b_{n-1} + 1$.

Din relație suntem inspirați la o primă concluzie: cel puțin $N = b_{n-1} + 1$ numere sunt în aceeaşi mulțime C_1 a partiției. Fie ele

$$1 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_N$$

şi să considerăm diferențele

$$1 \le \alpha_2 - \alpha_1 < \alpha_3 - \alpha_2 < \ldots < \alpha_N - \alpha_1$$

în număr de b_{n-1}.

Dacă una din aceste diferențe ar fi în C_1 problema este rezolvată.

Dacă nu, cum $b_{n-1}=(n-1)b_{n-2}+1$ cel puțin $b_{n-2}+1$ sunt în C_2.

Fie ele $1\le\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{b_{n-2}+1}$ şi considerăm cele b_{n-2} diferențe $\beta_2-\beta_1<\beta_3-\beta_2<\ldots<\beta_{b_{n-2}+1}-\beta_1$.

Dacă nu ar fi în C_2 s-a terminat (soluție în C_2)

Dacă nu ar fi în C_1, din nou s-a terminat căci $\beta_i-\beta_j=(\alpha_k-\alpha_\beta)-(\alpha_\gamma-\alpha_1)=\alpha_k-\alpha_\beta$ (soluție în C_1).

După n paşi ajungem la $b_1=2$ elemente (diferențe) din care dacă unul este în mulțimile $C_1,\ldots,C_{n-1}$ s-a terminat. Dacă ambele sunt în C_n oriunde ar fi diferența lor avem o soluție în această mulțime.

Avem: $b_2=5$, $b_3=16$, $b_4=65$, $b_5=326$, $b_6=1957<1978$.

Pentru $n=6$ Olimpiada Internațională de Matematică, Bucureşti 1978 s-a dat problema: Membrii unei Societăți Internaționale fac parte din 6 țări. Lista membrilor conține 1978 de nume, numerotate de la 1 la 1978. Să se arate că există un membru care are numărul de ordine egal cu suma numerelor de ordine a doi compatrioți (sau dublul unuia).

Observații. a) În limbajul partițiilor lui $\mathbb{N}$, problema afirmă că ecuația $x+y=z$ este n-normală pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, deci este o ecuație normală. Metoda de rezolvare a fost dată de I. Schur.

b) Între problemele R.13.2.4 şi R.13.2.5 din relația $a_n=1+b_n$ se întrevede o legătură. Soluția problemei R.13.2.5 s-ar putea obține din cea a problemei 13.2.4.

Dacă $\{1,2,\ldots,b_n\}=M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_n$ considerăm în plan punctele $A_0,A_1,A_2,\ldots,A_{b_n}$ (a_n puncte) oricare trei necoliniare şi colorăm segmentul $[A_iA_j]$ cu culoarea C_k corespunzătoare mulțimii M_k în care se află numărul $|i-j|\in\{1,2,\ldots,b_n\}$.

Faptul că un triunghi $A_iA_jA_k$ este monocolor este echivalent cu faptul că numerele $x=j-i$, $y=k-j$ şi $z=k-i$ sunt în aceeaşi mulțime şi atunci ele verifică ecuația $x+y=z$.

R14.2.6. Să se arate că oricum am partiționa planul în n mulțimi, există patru puncte în aceeaşi mulțime care sunt vârfurile unui dreptunghi.

Soluție. Considerăm rețeaua laticeală. Pe dreapta $y=0$ avem o infinitate de noduri, dintre care o infinitate în aceeaşi mulțime a partiției C_1. Considerăm nodurile de deasupra lor situate pe dreapta $y=1$, dacă două din ele ar fi în C_1 s-a format dreptunghi în C_1, dacă nu rămânem cu o infinitate de puncte de pe dreapta $y=1$, aflată în C_2, deasupra unor puncte de pe dreapta

$y=0$, din C_1. Considerăm nodurile de deasupra acestora pe dreapta $y=3$, o infinitate sunt în C_3. Raționând inductiv ajungem pe dreapta $y=n$ cu o infinitate de puncte în una din mulțimile $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Dacă acesta este C_k se formează dreptunghi cu vârfurile în C_k (două noduri pe dreapta $y=n$ şi două noduri pe dreapta $y=k-1$).

R14.2.7. Vârfurile unui poligon regulat sunt colorate $2n$ în roşu şi $2n$ în negru. Să se arate că există două poligoane cu $(n+1)$ vârfuri, unul nergru şi unul roşu, congruente.

Soluție. Ne imaginăm că am construit două roți identice în care pe cercurile de pe margine am făcut $4n$ găuri. În găurile corespunzătoare punctelor roşii avem câte o sursă de căldură iar în cele negre avem cartuşe. Putem roti roata de sus peste cea de jos, care rămâne fixă. Dacă se suprapune o gaură negară peste una roşie atunci puşcă un cartuş. Este suficient să arătăm că există o rotație la care se produc $(n+1)$ puşcături.

Avem $4n-1$ rotații şi fiecare punct negru ajunge peste fiecare punct roşi, în total avem $2n \times 2n = 4n^2$ puşcături. Deoarece $\dfrac{4n^2}{4n-1} > n$, există o rotație la care se produc $(n+1)$ puşcături.