CLASA a V-a

Coordonator Vasile Pop
Viorel Lupşor

OBIECTIVE DE REFERINTA ŞI EXEMPLE DE ACTIVITATI DE ÎNVĂȚARE

1. Cunoaşterea şi înțelegerea conceptelor, a terminologiei şi a procedurilor de calcul

Obiective de referință	**Exemple de activități de învățare**
La sfârşitul clasei a V-a elevul va fi capabil:	*Pe parcursul clasei a V-a se recomandă următoarele activități:*
1.1. să utilizeze raționamente bazate pe logica neformalizată şi să opereze cu mulțimi	-exerciții şi probleme de logică şi perspicacitate -exerciții de « criptaritm » -exerciții de completare a unui şir, prin deducerea regulii de formare a şirului (ideea de determinare a termenului general). -operații simple cu mulțimi. -exerciții şi probleme de determinare a elementelor unei mulțimi în condiții date.
1.2. să folosească metode specifice în rezolvarea unor tipuri de probleme	-probleme care se rezolva folosind metoda figurativa, metoda falsei ipoteze, metoda comparației, metoda drumului invers, sau alte metode. -probleme care se rezolva folosind teorema împărțirii cu rest. -exerciții şi probleme care se rezolva folosind principiul lui Dirichlet. -probleme de mişcare -probleme de debit
1.3. să folosească diferite metode pentru rezolvarea unor ecuații şi să utilizeze ecuații in rezolvarea unor probleme.	-exerciții de rezolvare a unor ecuații folosind diverse tehnici . -exerciții de transcriere a unei situații-problema în limbaj matematic, înlocuind numerele necunoscute cu simboluri. -rezolvarea unor probleme cu ajutorul ecuațiilor.
1.4. să utilizeze noțiuni elementare de divizibilitate a numerelor naturale	-exerciții de descompunere a unor numere naturale in produs de puteri de numere prime. -exerciții de scriere a unei expresii sub forma de produse. -exerciții de calcul a numărului şi sumei divizorilor unui număr natural. -probleme care se rezolva pe baza unicității numărului prim şi par 2.

	-probleme care se rezolva folosind proprietățile c.m.m.m.c şi c.m.m.m.d, a mai multor numere naturale.
1.5. să efectueze calcule cu numere naturale şi raționale pozitive.	-exerciții de calcul a unor sume. -exerciții de aducere la forma simpla a unor expresii numerice sau a unor expresii formate din numere şi litere. -exerciții de calcul in alte baze de numerație. -exerciții de aflare a unei fracții dintr-un număr.
1.6.să folosească metode matematice in rezolvarea problemelor puse la alte discipline	-rezolvarea unor probleme de mişcare şi de debit înrudite cu probleme din fizică

2.*Dezvoltarea capacității de a emite judecăți de valoare pentru rezolvarea problemelor* inventiv şi euristic-creative

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a-V-a elevul va fi capabil :*	**Exemple de activități de învățare** *Pe parcursul clasei a-V-a se recomanda următoarele activități :*
2.1. să analizeze şi să rezolve probleme dificile	-înțelegerea problemei -alegerea unei metode de rezolvare şi rezolvarea problemei
2.2 să formuleze probleme pornind de la un model sau enunț parțial	-verificarea rezultatului obținut şi analiza rezolvării -analiza aspectelor particulare ale unei probleme şi identificarea unor posibile aspecte generale
2.3 să găsească metode de lucru valabile pentru clase de probleme	-generalizarea unor situații-problemă şi aprecierea validității şi utilității generalizării -identificarea unor metode de rezolvare valabile pentru mai multe probleme -analizarea metodelor şi folosirea celor mai eficiente

3.*Dezvoltarea capacității de a face conexiuni cognitive in cadrul disciplinei şi a ariei curriculare*

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a-V-a elevul va fi capabil :*	**Exemple de activități de învățare** *Pe parcursul clasei a-V-a se recomandă următoarele activități*
3.1.să utilizeze raționamente diferite în rezolvarea problemelor dificile din domeniile studiate	-exerciții care necesită ingeniozitate în abordare -folosirea rezultatelor unor probleme pentru a rezolva altele din aceeaşi sferă cognitivă
3.2.să-şi formeze o gândire abstractă specifica matematicii	-modelarea matematică a unor fenomene sau relații din viața cotidiană -abordarea unor situații-problemă şi încadrarea lor într-o clasă de probleme

4.Dezvoltarea capacității de a comunica utilizând limbajul matematic

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a-V-a elevul va fi capabil :*	**Exemple de activități de învățare** *Pe parcursul clasei a-V-a se recomanda următoarele activități :*
4.1.să-şi însuşească o exprimare riguroasa specifica problemelor de matematica	-descrierea metodei care urmează a fi folosită în demonstrația problemei -redactarea demonstrației sau rezolvării problemei folosind terminologia adecvată
4.2.să formuleze consecințe şi metode alternative de rezolvare	-analizarea unei probleme şi deducerea unor consecințe -identificarea informațiilor esențiale dintr-un enunț

5.Dezvoltarea interesului şi a motivației pentru studiul şi aplicarea matematicii in contexte variate

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a-V-a elevul va fi capabil :*	**Exemple de activități de învățare** *Pe parcursul clasei a-V-a se recomanda următoarele activități :*
5.1.să îşi formeze obişnuința de a exprima prin operații matematice anumite probleme practice	-abordarea unor probleme date in limbaj curent şi transpunerea lor in limbaj matematic
5.2.să manifeste intuiție şi perseverență în rezolvarea unor probleme	-folosirea raționamentului pentru aflarea unor soluții

5.3 să manifeste interes pentru folosirea tehnologiilor informației în studiul matematicii	-aplicarea mai multor metode in rezolvarea unei probleme -utilizarea unor soft-uri pentru învățarea matematicii

CONȚINUTURI

1.Multimea numerelor naturale

- 1.1. Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică
  - 1.1.1 Metoda figurativă
  - 1.1.2 Metoda falsei ipoteze
  - 1.1.3 Metoda comparației
  - 1.1.4 Metoda drumului invers (metoda retrogradă)
  - 1.1.5 Probleme de mişcare
  - 1.1.6 Probleme de perspicacitate
- 1.2. Şiruri. Sume.
- 1.3. Teorema împărțirii cu rest
- 1.4. Puteri
  - 1.4.1. Aflarea ultimei/penultimei cifre a unei expresii cu puteri
  - 1.4.2. Suma puterilor consecutive ale unui număr natural
- 1.5. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte
- 1.6. Sisteme de numerație
- 1.7. Criptaritm
- 1.8. Principiul lui Diriclet

2.Mulțimi

- 2.1.Operații cu mulțimi
- 2.2.Determinarea elementelor unei mulțimi in condiții date

3.Divizibilitatea în mulțimea numerelor naturale

- 3.1 Criterii de divizibilitate cu (4;25;8;7;11;13;27;37)
- 3.2. Criterii de divizibilitate cu 2 ;3 ;4 ;5 ;9 ;in diferite baze de numerație
- 3.3. Numărul şi suma divizorilor unui număr natural
- 3.4. Scrierea unui număr natural sub formă de produs de puteri de numere prime
- 3.5. Calculul numărului de zerouri al unui produs
- 3.6. Număr prim, număr compus. Probleme ce se rezolva pe baza unicității numărului prim şi par 2
- 3.7.Divizor comun .C.m.m.d.c. Probleme
- 3.8.Multiplu comun. C.m.m.m.c. Probleme.
- 3.9. Divizibilitatea cu un număr compus
- 3.10.Divizibilitatea unei expresii cu un număr
- 3.11.Determinarea a două numere naturale când se cunosc c.m.m.d.c./c.m.m.m.c. al lor, respectiv sumă/produsul lor

4.Numere raționale pozitive

- 4.1.Determinarea unei fracții folosind divizibilitatea în mulțimea numerelor naturale
- 4.2.Fracții ireductibile
- 4.3.Calculul unor sume
- 4.4.Aflarea unei fracții dintr-un număr

1. Mulțimea numerelor naturale

1.1. Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică

1.1.1. Metoda figurativă

Metoda figurativă este o metodă de rezolvare a problemelor de aritmetică ce constă în reprezentarea printr-un desen a mărimilor necunoscute şi fixarea în acest desen a relațiilor dintre ele şi mărimile date în problemă.

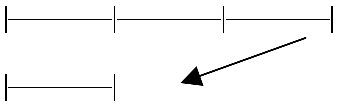
Model. Dinu şi Ionel şi-au pus împreună banii pe care îi aveau, în total 17500 lei. Ce sumă are fiecare din cei doi, ştiind că, dacă Dinu i-ar da lui Ionel 2500 lei, ei ar avea sume egale.

Soluție. Cele două persoane nu au sume egale. Fie acestea:

|———|——————| reprezintă suma lui Dinu

|———| reprezintă suma lui Ionel.

Dinu dă lui Ionel 2500 lei şi cei doi au sume egale:



aceasta înseamnă că Dinu are cu 5000 lei mai mult decât Ionel.

Ce sumă ar avea împreună cei doi, dacă fiecare ar avea o sumă de bani egală cu a lui Ionel?

17500 lei – 5000 lei = 12500 lei

Ce sumă are Ionel? 12500:2 = 6250 lei

Ce sumă are Dinu? 6250 + 5000 = 11250 lei

Verificare: Ce sumă au împreună cele două persoane?

11250 lei + 6250 lei = 17500 lei

Dinu dă lui Ionel 2500 lei. Cei doi au:

11250 lei – 2500 lei = 8750 lei (Dinu)

6250 lei + 2500 lei = 8750 lei (Ionel)

Probleme rezolvate

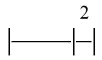
R1.1.1.1. Fiica, tatăl şi bunica au împreună 90 de ani. Peste 2 ani tatăl va avea de 8 ori vârsta fiicei, iar bunica de 2 ori vârsta actuală a tatălui. Să se afle vârsta fiecăruia în prezent.

Soluție. Vom reprezenta vârstele persoanelor în modul următor:

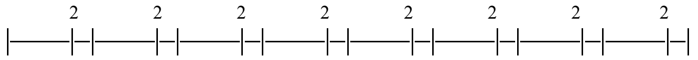
vârsta fiicei în prezent

|——|

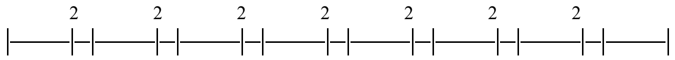
vârsta fiicei peste 2 ani



vârsta tatălui peste 2 ani



vârsta tatălui în prezent



Vârsta tatălui în prezent este formată din 8 segmente şi încă 14 deci vârsta bunicii peste 2 ani va fi dublu, adică va fi formată din 16 segmente şi încă 28, ceea ce înseamnă că în prezent vârsta bunicii este formată din 16 segmente şi încă 26.

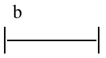
Suma vârstelor în prezent este formată din 25 segmente şi încă 40; un segment reprezintă 2.

Fiica are 2 ani, tatăl are 8·2+14=30 ani, iar bunica are 16·2+26=58ani, în prezent.

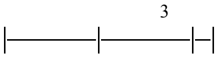
R1.1.1.2. Dacă într-o clasă se aşează câte 2 elevi într-o bancă, rămân 3 elevi în picioare; dacă se aşează câte 3 elevi într-o bancă rămân 4 bănci libere. Câte bănci şi câţi elevi sunt în clasă?

Soluţie. Vom reprezenta cele două mărimi care intervin în problemă prin segmente.

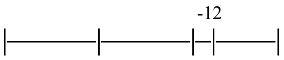
numărul de bănci



numărul de elevi
2·b+3



numărul de elevi
3·(b-4)=3·b-12



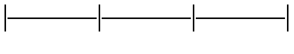
Se constată că b-12=3, deci b-15.

În clasă sunt 15 bănci şi 15·2+3=33 elevi (sau 3·(15-4)=33).

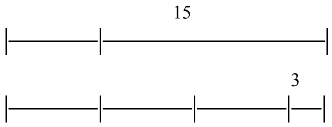
R1.1.1.3. Doi elevi aveau de rezolvat un anumit număr de probleme. Când unul din ei mai avea de rezolvat 3 probleme ca să termine, a rezolvat de 3 ori mai multe probleme decât celălalt, care mai avea de rezolvat 15 probleme. Câte probleme avea de rezolvat fiecare elev?

Soluţie. Cei doi elevi nu au rezolvat acelaşi număr de probleme. Fie acestea:


reprezintă numărul de probleme rezolvate de cel de al doilea elev


reprezintă numărul de probleme rezolvate de primul elev

Numărul total de probleme poate fi reprezentat în două moduri:



Numărul de probleme rezolvat de al doilea elev se poate afla

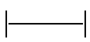
$(15-3):2=6$ probleme

Numărul total de probleme ce trebuie rezolvate este

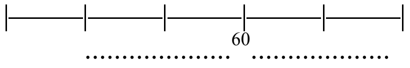
$15+6=21$ probleme

R1.1.1.4. Cinci băieți aveau, fiecare, acelaşi număr de mere. După ce fiecare a mâncat câte 12 mere, le-au rămas, laolaltă, atâtea mere câte a avut fiecare din ei la început. Câte mere a avut fiecare?

Soluție.

 reprezintă numărul de mere ce îl avea fiecare băiat

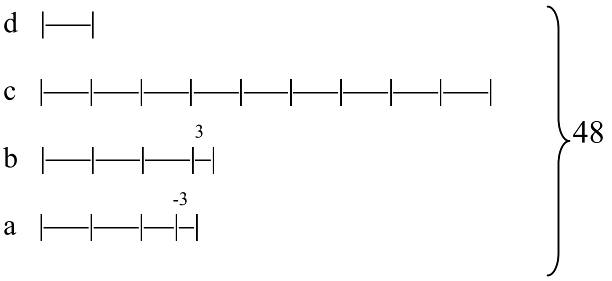
Fiecare băiat mănâncă 12 mere, în total 60 mere se mănâncă.



şi le-au rămas împreună atâtea mere câte au avut 60:4=15 reprezintă numărul de mere pe care l-a avut fiecare la început.

R1.1.1.5. Aflați 4 numere naturale, ştiind că suma lor este 48, iar dacă se adună numărul 3 la primul, se scade 3 din al doilea, se împarte al treilea la 3 şi se înmulţeşte al patrulea cu 3, se obțin numere egale.

Rezolvare. $a+3=b-3=c:3=d\cdot3$, a,b,c,d fiind cele 4 numere



$16d=48$

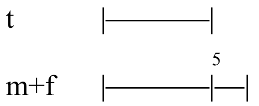
$d=3 \Rightarrow a=6, b=12, c=27, d=3$

R1.1.1.6. Tatăl are cu 5 ani mai puţin decât mama şi fiul la un loc. Peste 7 ani, fiul va avea a treia parte din vârsta mamei şi toţi trei vor avea împreună 108 ani. Ce vârstă are fiecare în prezent?

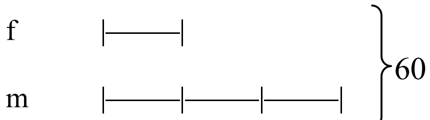
Rezolvare. Se poate afla suma vârstelor celor trei în prezent:

$$108-3\cdot7=87$$

Se poate afla vârsta tatălui în prezent.



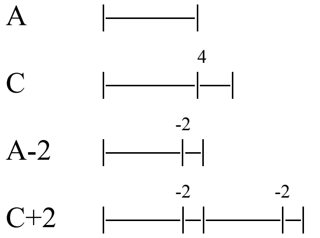
Tata are în prezent (87-5):2=41 ani. Peste 7 ani, tata va avea 48 ani, iar mama şi fiul la un loc vor avea 108-48=60 ani.



60:4=15 ani va avea fiul peste 7 ani, iar mama va avea 45 ani peste 7 ani.
În prezent fiul are 8 ani, iar mama are 38 ani.

R1.1.1.7. Cristina şi Alina sunt colege de bancă. Cristina îi spune Alinei: "Dă-mi două creioane colorate de la tine ca să am de două ori mai multe decât ai tu." Alina zice Cristinei: "Dă-mi tu două creioane colorate de la tine, ca să am şi eu câte au tu." Câte creioane are fiecare fetiță?

Rezolvare.



Diferența dintre C+2 şi A-2 este de 8, deci A-2=8 $\Rightarrow$ A=10.

Alina are 10 creioane, Cristina are 14 creioane.

1.1.2. Metoda falsei ipoteze

Metoda falsei ipoteze sau a presupunerii este mai puțin cunoscută elevilor. Caracterul neobişnuit al acestei metode, prin gradul sporit de abstractizare, face aplicarea ei aparent dificilă. Rezolvarea problemelor prin metoda ipotezelor pregăteşte pentru înțelegerea multor teme de algebră sau geometrie. Este o inițiere în demonstrarea mai târziu a teoremelor prin metoda reducerii la absurd.

Metoda falsei ipoteze constă în a face o ipoteză (presupunere) oarecare (deşi de obicei se pleacă de la ipoteza "toate de un fel") nu în ideea de a "nimeri" răspunsul, ci pentru a vedea din nepotrivirea cu enunțul ce modificări trebuie să facem asupra ei. Metoda se numeşte "a falsei ipoteze" pentru că avem bănuiala că nu este ipoteză conformă adevărului.

Problemele care se pot rezolva prin metoda falsei ipoteze sunt de două tipuri: a) probleme care se rezolvă printr-o ipoteză; b) probleme care se rezolvă prin două sau mai multe ipoteze.

Remarcă. Problemele examinate ca şi cele propuse pot fi rezolvate şi prin alte metode, atât aritmetic cât şi algebric, în unele cazuri mai eficiente decât metoda presupunerii.

Probleme de primul tip (cu o ipoteză)

R1.1.2.1. O echipă de muncitori a instalat o reţea de apă montând 180 ţevi, unele lungi de 8 m, altele de 6 m. Ştiind că s-au instalat în total 1240 m de ţeavă, aflaţi câte ţevi de fiecare lungime s-au folosit.

Soluţie. Primul mod. Presupunem că toate ţevile erau de 8 m. Atunci, ţevile utilizate ar avea 8·180=1440 m. În realitate au fost 1240 m, cu $1440-1240=200$ m mai puţin. Diferenţa provine din faptul că au fost folosite şi ţevi de 6 m. Înlocuind o ţeavă de 8 m cu una de 6 m se pierd $8-6=2$ m şi pentru a anihila surplusul de 200 m trebuie înlocuite 200:2=100 ţevi de 8 m cu ţevi de 6 m. Prin urmare au fost folosite 100 ţevi de 6 m şi $180-100=80$ ţevi de 8 m.

Verificare: 6·100+8·80=600+640=1240 m.

Al doilea mod. Se presupune că au fost utilizate numai ţevi de 6 m. Se formulează un raţionament asemănător celui anterior, numai că de data aceasta rezultatul este cu 160 m mai mic decât cel din enunţ. De aceea trebuie înlocuite 160:2=80 ţevi de 6 m cu ţevi de 8 m.

Observaţie. Dacă metoda de rezolvare a fost înţeleasă elevii nu trebuie să explice raţionamentul în scris, ci doar să scrie rezolvarea conform planului logic cu observaţiile corespunzătoare.

Primul mod. Presupunem că au fost folosite numai ţevi de 8 m.

1) Care este suma lungimilor ţevilor conform presupunerii?

8·180=1440 m

2) Care este diferenţa dintre lungimea obţinută şi cea reală?

1440 m – 1240 m = 200 m

3) Care este diferenţa dintre o ţeavă de 8 m şi una de 6 m? 2 m

4) Câte ţevi de 6 m au fost instalate? 200:2=100 ţevi

5) Câte ţevi de 8 m au fost utilizate? 180-100=80 ţevi

R1.1.2.2. O excursie costă 310$. Ionel a achitat costul excursiei folosind bancnote de 5$ şi de 20$, în total 23 bancnote. Câte bancnote de fiecare fel a folosit Ionel?

Soluţie. Presupunem că a plătit numai bancnote de 5$.

1) Cât ar fi costat excursia, conform presupunerii? 23·5=115$

2) Care este diferenţa dintre costul obţinut şi cel real?

310$ - 155$ = 195$

3) Care este diferenţa dintre valorile bancnotelor? 20$ - 5$ = 15 $

4) Câte bancnote de 20$ a avut Ionel? 195:15=13 bancnote

5) Câte bancnote de 5$ a avut Ionel? 23-13=10 bancnote

Verificare: 5·10+20·13=50+260=310$

R1.1.2.3. La un concurs se dau 30 de probleme. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greşit se scad 3 puncte. Câte răspunsuri corecte a dat un elev care a obținut 118 puncte?

Soluție. Presupunem că elevul a răspuns corect la toate întrebările.

1) Câte puncte ar fi obținut, conform presupunerii? 30·5=150 puncte

2) Care este diferența dintre punctajul obținut şi cel real?

150-118=32 puncte

3) Care este plusul de puncte acordat pentru o problemă greşită?

3+5=8 puncte

4) Care este numărul de probleme greşite? 32:8=4 probleme

5) Care este numărul de probleme corecte? 30-4=26 probleme

Verificare: 26·5-4·3=130-12=118 puncte

R1.1.2.4. O persoană se angajează la o lucrare: pentru fiecare zi lucrată primeşte 20$, iar pentru fiecare zi absentată va plăti câte 40$. După 30 zile a constatat că nu a câştigat nimic, dar nici nu este dator. Câte zile a lucrat persoana?

Soluție. Presupunem că persoana a lucrat 30 zile.

1) Ce sumă ar fi câştigat conform presupunerii? 30·20=600$

2) Care este diferența câştigată? 600-0=600$

3) Care este plusul acordat pentru o zi nelucrată? 20+40=60$

4) Câte zile nu a lucrat? 600:60=10 zile

5) Câte zile a lucrat? 30-10=20 zile

Verificare: 20·20-10·40=400-400=0.

R1.1.2.5. Un autoturism pleacă din localitatea A spre localitatea B şi se deplasează cu viteza constantă de 30 km/h. Ajungând în B, se întoarce, fără să oprească, deplasându-se de această dată cu viteza de 20 km/h şi ajunge în A după 5 ore de la plecare (din A). Să se afle distanța dintre cele două localități.

Soluție. Presupunem că distanța de la A la B ar fi 120 km. Drumul de la A la B este parcurs în 120:30=4 ore. La înapoiere drumul este parcurs în 120:20=6 ore. Timpul total ar fi 4 ore + 6 ore = 10 ore. În total, timpul este 5 ore, de 2 ori mai mic. Dacă timpul este de 2 ori mai mic, atunci şi distanța reală va fi de 2 ori mai mică, deci 120:2=60 km.

Verificare: 60:30+60:20=2+3=5 ore.

Probleme de al doilea tip (cu mai multe ipoteze)

R1.1.2.6. Dacă în fiecare bancă se aşează câte 5 persoane, atunci 10 persoane nu au locuri, iar dacă se aşează câte 6 persoane în fiecare bancă, atunci rămân 5 bănci libere. Câte bănci şi câte persoane sunt?

Soluție.

Ipoteza I: Presupunem că sunt 30 de bănci.

Câte 5 persoane în fiecare bancă................5·30=150 persoane

Fără loc..10 persoane

Total 160 persoane

Sau: 6 persoane în fiecare bancă.....................6·(30-5)=150 persoane

În cele două situații se constată o diferență de 10 persoane, ceea ce arată că presupunerea făcută nu corespunde situației din problemă.

Ipoteza a II-a: Fie 32 numărul băncilor.

Câte 5 persoane în fiecare bancă..............5·32=160 persoane
Fără loc..10 persoane
Total 170 persoane

Sau: 6 persoane în fiecare bancă....................6(32-5)=162 persoane

Acum diferenţa este de 8 persoane, adică faţă de prima ipoteză, diferenţa s-a micşorat cu 2 persoane, la o creştere a numărului băncilor cu 2. Pentru a ajunge la situaţia din problemă e nevoie de încă 8 bănci, câte una pentru fiecare persoană. Prin urmare numărul băncilor este 30+10=40. Atunci:

Câte 5 persoane în fiecare bancă..............5·40=200 persoane
Fără loc..10 persoane
Total 210 persoane

Deci sunt 40 de bănci şi 210 persoane.

Verificare: 6·(40-5)=6·35=210 persoane.

R1.1.2.7. Într-o magazie se află o cantitate de grâu şi un număr de saci. S-a calculat că dacă în fiecare sac s-ar pune câte 75 kg grâu, atunci ar rămâne 450 kg grâu, iar dacă în fiecare sac s-ar pune câte 80 kg de grâu ar mai rămâne 10 saci. Ce cantitate de grâu şi câţi saci sunt?

Soluţie.

Ipoteza I: Presupunem că sunt 100 de saci.

75 kg în fiecare sac...................................75·100=7500 kg
Rămân...450 kg
Total 7950 kg

Sau: 80 kg în fiecare sac...............................80·(100-10)=7200 kg

Între cele două situaţii se constată o diferenţă de 7950-7200=750 kg, ceea ce nu corespunde situaţiei problemei.

Ipoteza a II-a: Presupunem că sunt 110 saci.

75 kg în fiecare sac..................................75·110=8250 kg
Rămân...450 kg
Total 8700 kg

Sau: 80 kg în fiecare sac...............................800(110-10)=8000kg

Între cele două situaţii se constată o diferenţă de 8700-8000=700 kg, adică faţă de prima ipoteză diferenţa s-a micşorat cu 50 kg. Deoarece la fiecare creştere cu 10 saci reuşim o micşorare a diferenţei cu 50 kg, atunci pentru fiecare creştere a numărului de saci cu 1, diferenţa se micşorează cu 5kg. Pentru a acoperi diferenţa de 750 kg avem nevoie de 750:5=150 saci. Prin urmare numărul sacilor trebuie să fie 100+150=250 saci.

Atunci, cantitatea de grâu este 75·250+450=19200 sau
$80\cdot(250-50)=19200$.

Deci sunt 250 saci şi 19200 kg grâu.

R1.1.2.8. Elevii unei clase au de plantat pomi. Dacă fiecare elev ar planta câte un pom, atunci s-ar planta cu 25 pomi mai puţin decât era planificat, iar dacă fiecare elev ar planta câte 2 pomi, atunci 4 elevi nu ar avea pomi de plantat. Câţi elevi erau în clasă şi câţi pomi aveau de plantat?

Soluție.

Ipoteza I: Presupunem că sunt 20 de elevi.

Fiecare plantează câte un pom..............20·1=20 pomi
Rămân...25 pomi
Total 45 pomi

Sau: Se plantează câte 2 pomi....................(20-4)·2=32 pomi

Între cele două situații se constată o diferență de 45-32=13 pomi, ceea ce nu corespunde problemei.

Ipoteza a II-a: Presupunem că sunt 30 de elevi.

Fiecare plantează câte un pom..............30·1=30 pomi
Rămân...25 pomi
Total 55 pomi

Sau: se plantează câte 2 pomi.....................(30-4)·2=52 pomi

Între cele două situații se constată o diferență de 55-52=3 pomi, adică față de prima ipoteză diferența s-a micșorat cu 10 pomi. Deoarece la fiecare creștere cu 10 elevi reușim o micșorare a diferenței cu 10 pomi, atunci pentru fiecare creștere a numărului de elevi cu 1, diferența se micșorează cu 1 pom. Pentru a acoperi diferența de 13 pomi avem nevoie de 13 elevi. Prin urmare numărul elevilor este 20+13=33 elevi.

Atunci, numărul pomilor este 33·1+25=58 pomi sau $(33-4)\cdot 2 = 29\cdot 2 = 58$ pomi.

Deci sunt 33 elevi și aveau de plantat 58 pomi.

1.1.3. Metoda comparației (metoda reducerii la același termen de comparație)

Problemele care se rezolvă folosind această metodă se caracterizează prin faptul că se dau două mărimi (care sunt comparate "în același mod") și legătura care există între ele. Aceste mărimi sunt caracterizate prin câte două valori fiecare și de fiecare dată se cunoaște legătura dintre ele. Metoda constă în a face ca una din cele două mărimi să aibă aceeași valoare și astfel problema devine mai simplă, având o singură necunoscută. Din această cauză se numește "aducerea la același termen de comparație".

Remarcă. Metoda comparației stă la baza rezolvării sistemelor de două ecuații cu două necunoscute prin metoda reducerii.

Model. Un țăran a primit pentru 2 gâște și 3 rațe 1225000 lei. Altă dată vânzând, la același preț, a primit pentru 3 gâște și 5 rațe 1950000 lei. Care este prețul unei gâște? Care este prețul unei rațe?

Soluție. Pentru 2 gâște și 3 rațe a primit 1225000 lei și pentru 3 gâște și 5 rațe a primit 1950000 lei. Presupunem că prima dată ar fi vândut de 3 ori mai multe gâște și de 3 ori mai multe rațe, deci ar fi încasat o sumă de 3 ori mai mare; și presupunem că a doua oară ar fi vândut de 2 ori mai multe gâște și de 2 ori mai multe rațe, deci ar fi încasat o sumă de 2 ori mai mare. Avem:

Pentru 6 gâște și 9 rațe ar fi încasat 3675000 lei și

pentru 6 gâşte şi 10 raţe ar fi încasat 3900000 lei,
de unde 1 raţă a vândut-o cu 3900000-3675000=225000 lei.

Pentru 3 raţe a primit 3·225000 lei=675000 lei.

Pentru 2 gâşte a primit 1225000-675000=550000 lei, de unde 1 gâscă a vândut-o un 550000:2=275000 lei.

Răspuns: 1 raţă a vândut-o cu 225000 lei
1 gâscă a vândut-o cu 275000 lei.

Observaţii. Problema se putea rezolva şi prin reducerea celei de a doua mărimi:

Presupunem că prima dată ar fi vândut de 5 ori mai multe gâşte şi de 5 ori mai multe raţe, deci ar fi încasat o sumă de 5 ori mai mare; şi presupunem că a doua oară ar fi vândut de 3 ori mai multe gâşte şi de 3 ori mai multe raţe, deci ar fi încasat o sumă de 3 ori mai mare. Avem:

Pentru 10 gâşte şi 15 raţe ar fi încasat 6125000 lei şi şi
pentru 9 gâşte şi 15 raţe ar fi încasat 5850000 lei
de unde 1 gâscă a vândut-o cu 6125000-5850000=275000 lei.

Pentru 2 gâşte a primit 2·275000=550000 lei, iar pentru 3 raţe a primit 1225000-550000=675000 lei, de unde 1 raţă a vândut-o cu 675000:3=225000 lei.

Probleme rezolvate

R1.1.3.1. 7 bile mari şi 3 bile mici cântăresc 44 grame, iar 5 bile mari şi 8 bile mici cântăresc 49 grame. Cât cântăreşte o bilă mare? Cât cântăreşte o bilă mică?

Soluţie. Presupunem că în prima situaţie numărul bilelor creşte de 5 ori, deci şi masa lor va creşte tot de 5 ori, în a doua situaţie numărul bilelor creşte de 7 ori, deci şi masa va creşte tot de 7 ori. Avem:

35 bile mari şi 15 bile mici cântăreau 220 grame şi
35 bile mari şi 56 bile mici cântăresc 343 grame,
de unde 56-15=41 bile mici cântăresc 343-220=123 grame, deci o bilă mică cântăreşte 123:41=3 grame.

Atunci 3 bile mici cântăresc 9 grame, iar 7 bile mari cântăresc $44-9=35$ grame, de unde o bilă mare cântăreşte 35:7=5 grame.

Verificare: 7·5+3·3=35+9=44
5·5+8·3=25+24=49.

R1.1.3.2. Suma dintre dublul unui număr şi triplul unui alt număr este 370. Dacă suma dintre primul număr multiplicat de 5 ori şi al doilea număr multiplicat de 7 ori este 875, să se afle numerele.

Soluţie. Notăm cu a şi b cele două numere. Avem în prima situaţie $2a+3b=370$ şi în a doua situaţie $5a+7b=875$. Presupunem că în prima situaţie numerele ar creşte de 5 ori, iar în a doua situaţie numerele ar creşte de 2 ori, atunci sumele ar creşte de 5 ori, respectiv de 2 ori. Avem $10a+15b=1850$ şi $10a+14b=1750$, deci al doilea număr $b=1850-1750$, adică $b=100$; atunci $3b=300$, iar $2a=70$, deci $a=35$. Numerele sunt 35 şi 100.

R1.1.3.3. Un caiet, 3 creioane şi 5 reviste costă 64000 lei, iar 5 caiete, 4 creioane şi 3 reviste costă 56000 lei.

a) Cât costă, la un loc, un caiet, un creion şi o revistă?

b) Cât costă, la un loc, 1 creion şi 2 reviste?

c) Cât costă fiecare obiect, dacă preţul unei reviste întrece cu 1000 lei preţul unui creion multiplicat de 5 ori?

Soluţie. 1 caiet, 3 creioane, 5 reviste costă 64000 lei şi

5 caiete, 4 creioane, 3 reviste costă 56000 lei.

a) Presupunem că în situaţia a doua se măreşte de 2 ori numărul de caiete, de creioane, de reviste, deci şi suma se măreşte de 2 ori; avem

10 caiete, 8 creioane, 6 reviste vor costa 112000 lei.

Ştim 1 caiet, 3 creioane, 5 reviste costă 64000 lei, deci împreună 11 caiete, 11 creioane, 11 reviste costă 176000 lei, de unde 1 caiet, 1 creion, 1 revistă costă împreună 176000:11=16000 lei.

b) Presupunem că în prima situaţie se măreşte de 5 ori numărul de caiete, de creioane, de reviste, deci şi suma se măreşte de 5 ori; avem

5 caiete, 15 creioane, 25 reviste costă 320000 lei

Ştim 5 caiete, 4 creioane, 3 reviste costă 56000 lei, deci pentru 11 creioane şi 22 reviste se va plăti 320000-56000=264000 lei, de unde 1 creion şi 2 reviste costă împreună 264000:11=24000 lei.

c) Se rezolvă prin metoda figurativă:

|——| reprezintă preţul unui creion

1000

|——|——|——|——|——|——| reprezintă preţul unei reviste

Se ştie că un creion şi 2 reviste costă împreună 24000 lei, deci un creion costă (24000-2000):11=2000 lei. Costul unui creion este 2000 lei, costul unei reviste este 11000 lei, iar costul unui caiet $16000-(2000+11000)=3000$ lei.

1.1.4. Metoda mersului invers (retrogradă)

Metoda mersului invers (retrogradă) este folosită în probleme în care elementul necunoscut apare în faza de început a şirului de calcule; operaţiile se efectuează în sens invers acţiunii problemei. Această metodă constă în faptul că enunţul unei probleme trebuie urmărit de la sfârşit spre început. Analizând operaţiile făcute în problemă şi cele pe care le facem noi în rezolvarea problemei, constatăm că de fiecare dată, pentru fiecare etapă, facem operaţia inversă celei făcute în problemă. Deci, nu numai mersul este invers, ci şi operaţiile pe care le facem pentru rezolvare sunt operaţiile inverse celor din problemă. Verificarea (proba) se face aplicând asupra rezultatului obţinut operaţiile indicate în problemă.

Model. 1) Să se determine valoarea lui x din:

$$10+10:\{[10+10\cdot(x-10)]:10-10\}=11.$$

Soluţie. Pentru fiecare etapă facem operaţia inversă celei făcute în problemă:

1) $10:\{[10+10\cdot(x-10)]:10-10\}=11-10$, deci celălalt termen al sumei este 1.

2) Împărţitorul $[10+10\cdot(x-10)]:10-10=10:1$ (deîmpărţit:cât)

3) Descăzutul $[10+10\cdot(x-10)]:10=10+10$ (scăzător+diferenţă)

4) Deîmpărțitul $10+10\cdot(x-10)=20\cdot 10$ (cât · împărțitor)

5) Un termen al sumei se află prin diferența dintre sumă şi termenul cunoscut $10\cdot(x-10)=200-10$.

6) Un factor al produsului se află împărțind produsul la factorul cunoscut $x-10=190:10$.

7) Descăzutul este suma dintre scăzător şi diferență $x=10+19$, deci $x=29$.

Verificarea se face aplicând rezultatului obținut operațiile ce sunt indicate în exercițiu:
$29-10=19$; $19\cdot 10=190$; $190+10=200$; $200:10=20$; $20-10=10$;
$10:10=1$; $10+1=11$. Rezultatul obținut este corect.

2) Mă gândesc la un număr pe care îl adun cu 27; rezultatul îl împart la 4 şi-l adun apoi cu 6. Suma astfel obținută o împart la 7 şi din rezultat scad 7. Dacă obțin 1, la ce număr m-am gândit?

Această problemă diferă de problema de mai sus pentru că elevul trebuie să-şi scrie singur şirul de operații ce se efectuează.

Soluție. Notez cu x numărul necunoscut. Înlocuind în enunțul problemei se obține: $[(x+27):4+6]:7-7=1$.

Efectuând pentru fiecare etapă operația inversă celei făcute în problemă se obține: $[(x+27):4+6]:7=1+7$, $(x+27):4+6=8\cdot 7$, $(x+27):4=56-6$,
$x+27=50\cdot 4$, $x=200-27$, $x=173$.

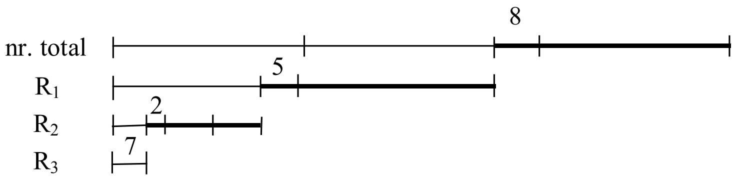
Probleme rezolvate

R1.1.4.1. Pe o banchiză plutesc mai mulți pinguini. Părăsesc banchiza prima dată pinguinii imperiali, o treime din toți pinguinii. Îi urmează alți 8 pinguini. Apoi pleacă jumătate din cei rămaşi, încă 5, două treimi din cei rămaşi şi încă 2 şi rămân pe banchiză 7 pinguini. Câți pinguini imperiali au fost?

Soluție. Din numărul total N de pinguini pleacă a treia parte şi încă 8 şi rămâne restul R_1 de pinguini. Apoi pleacă jumătate din R_1 şi încă 5 pinguini şi rămâne restul R_2. Din acest rest R_2 mai pleacă două treimi şi încă 2 pinguini şi rămâne restul R_3 de pinguini, adică 7 pinguini.

Avem $(7+2)\cdot 3=27$, ceea ce reprezintă valoarea lui R_2; $(27+5)\cdot 2=64$, ceea ce reprezintă valoarea lui R_1; $(64+8):2\cdot 3=108$ reprezintă numărul total de pinguini. $108:3=36$ reprezintă numărul pinguinilor imperiali.

Ne putem ajuta de o figură, prin care să reprezentăm numărul total de pinguini şi resturile:

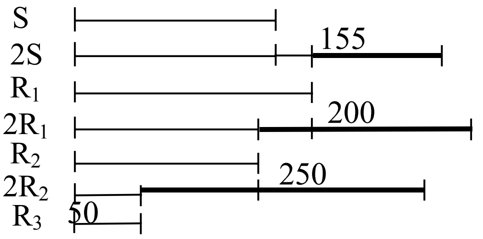


R1.1.4.2. O persoană are o sumă. După ce dublează această sumă cheltuieşte 155\$. Dublează apoi suma rămasă şi mai cheltuieşte 200\$. După ce dublează noul rest şi cheltuieşte încă 250$ constată că i-au mai rămas 50$. Care este suma inițială pe care a avut-o această persoană?

Soluție. Suma totală S se dublează, se cheltuieşte 155$ din ea şi se obține R_1; R_1 se dublează şi din el se cheltuieşte 200$ şi se obține R_2; R_2 se dublează şi din el se cheltuieşte 250$ şi rămâne R_3 ceea ce reprezintă 50$.

Avem 50+250=300, ceea ce reprezintă dublul lui R_2, deci R_2=150; 150+200=350 reprezintă dublul lui R_1, deci R_1=175; 175+155=330 reprezintă dublul sumei, deci suma inițială a fost 165$.

Ne putem ajuta de o figură, prin care să reprezentăm suma inițială şi sumele rămase de fiecare dată.

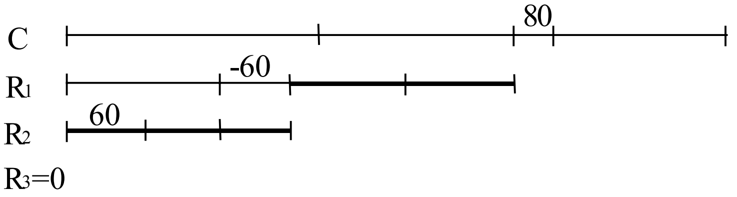


R1.1.4.3. Dintr-un magazin se vinde marfă astfel: prima dată o treime din cantitate şi încă 80 kg, a doua oară două treimi din rest mai puțin 60 kg şi a treia oară două treimi din rest şi încă 60 kg. Să se afle ce cantitate a fost inițial şi cât s-a vândut zilnic, dacă în magazin nu a mai rămas marfă.

Soluție. Din cantitatea totală C se vinde prima dată o treime şi încă 80 kg şi a rămas cantitatea R_1; apoi, din R_1 se vinde două treimi mai puțin 60 kg şi a rămas R_2; apoi, din R_2 se vinde două treimi şi încă 60 kg şi a rămas R_3; R_3=0.

Avem (0+60)·3=180, ceea ce reprezintă R_2, deci R_2=180, $(180-60)\cdot 3=360$, ceea ce reprezintă R_1, deci R_1=360, (360+80):2·3=660 ceea ce reprezintă cantitatea inițială.

Ne putem ajuta de o figură, prin care să reprezentăm cantitatea inițială şi cantitățile rămase de fiecare dată:



R1.1.4.4. Un biciclist parcurge un drum în trei etape: în prima etapă parcurge o pătrime din drum plus 5 km; în a doua etapă parcurge o şeptime din restul drumului şi încă 10 km, iar în etapa a treia parcurge patru cincimi din noul rest şi încă 10 km. Aflați lungimea drumului.

Soluție. Observăm că 10 km reprezintă o cincime din lungimea etapei a treia. Deci, în etapa a treia biciclistul a parcurs 10·5 =50 km. Adunând 50 km cu 10 km, obținem 60 km, ceea ce reprezintă şase şeptimi din distanța care a rămas de parcurs după prima zi. Deoarece o şeptime din această distanță reprezintă 10 km, rezultă că distanța rămasă după prima etapă este 70 km. Deci, după prima etapă au mai rămas de parcurs 70 km.

70 km + 5 km = 75 km, ceea ce reprezintă trei pătrimi din lungimea drumului. Prin urmare lungimea drumului este 75:3·4=100 km.

Raționamentul anterior poate fi expus folosind întrebări:

1) Ce parte din drum reprezintă 10 km? o cincime

2) Ce distanță a parcurs biciclistul în etapa a treia? 10 km · 5 =50 km

3) Ce distanță i-a rămas de parcurs biciclistului după ce a parcurs o şeptime din cât i-a mai rămas după prima etapă? 50 km + 10 km = 60 km

4) Ce parte din distanța rămasă de parcurs după prima etapă reprezintă 60 km? 6 şeptimi

5) Cât reprezintă o şeptime? 60:6=10 km

6) Ce distanță i-a mai rămas de parcurs biciclistului după prima etapă? 10 km + 60 km = 7·10 km = 70 km

7) Ce distanță reprezintă trei pătrimi din lungimea drumului?
70 km + 5 km = 75 km

8) Ce distanță reprezintă o pătrime? 75:3=25 km

9) Care este lungimea drumului? 4·25=100 km

Răspuns: 100 km.

1.1.5. Probleme de mişcare

Problemele de mişcare se clasifică în:

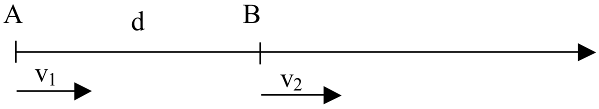
1) probleme de mişcare în acelaşi sens (numite probleme de urmărire)

2) probleme de mişcare în sensuri contrare.

Legea mişcării uniforme, exprimată prin $d = v \cdot t$ (distanța=viteza·timp, viteza=distanța:timp, $v = d : t$, timpul=distanța:viteză, $t = d : v$), este esențială în rezolvarea tuturor problemelor cărora le zicem "de mişcare uniformă".

Model. Două automobile pleacă simultan şi în acelaşi sens din localitățile A şi B aflate la distanța *d*. Automobilul din A are viteza v_1, iar automobilul din B are viteza v_2, $v_1 > v_2$. După cât timp cel din A îl ajunge pe cel din B?

Soluție. Putem ilustra astfel:



$v_1 > v_2$ pentru că numai astfel automobilul din A poate să îl ajungă pe cel din B. Deci, automobilul din A îl urmăreşte pe cel din B, de care îl desparte distanța *d*.

Pentru a afla după cât timp îl ajunge sau după cât timp recuperează distanța *d*, ar trebui să aflăm mai întâi cu cât se apropie într-o unitate de timp sau cât recuperează din distanță într-o unitate de timp. Presupunând că vitezele sunt exprimate în km/h (prin viteză înțelegem distanța parcursă de automobil într-o unitate de timp) şi distanța *d* în kilometri, formulăm întrebarea:

Cu cât se apropie automobilul din A de cel din B într-o oră?

Răspunsul este: cu $(v_1 - v_2)$ km. Dacă într-o oră automobilul din A recuperează $(v_1 - v_2)$ km din distanța *d*, atunci întreaga distanță *d* care le desparte o va recupera într-un număr de ore egal cu numărul care indică de câte ori $v_1 - v_2$ se cuprinde în *d*, adică $d:(v_1 - v_2)$, $t = d:(v_1 - v_2)$.

Rezolvarea unei probleme de mişcare (şi nu numai) parcurge următoarele etape importante:

1) cunoaşterea enunțului problemei
2) înțelegerea enunțului problemei
3) analizarea şi schematizarea problemei
4) rezolvarea propriu-zisă a problemei
5) verificarea soluției obținute.

Probleme rezolvate

R1.1.5.1. Nişte turişti pornesc de la o cabană la ora 8 dimineața şi merg cu viteza de 6 km/h. La ora 12 în aceeaşi zi se trimite după ei un curier cu o telegramă. Curierul se deplasează cu viteza de 14 km/h. După cât timp şi la ce distanță de cabană va ajunge curierul grupul de turişti?

Soluție. Din enunț rezultă că problema dată este de mişcare în acelaşi sens (o problemă de urmărire, curierul urmăreşte un grup de turişti).

Trebuie să stabilim în ce moment începe urmărirea şi la ce distanță de cabană se află grupul de turişti în momentul plecării curierului.

Planul logic şi operațiile corespunzătoare:

1) Cât timp merge grupul de turişti până la plecarea curierului?

12 h – 8 h = 4 h

2) Ce distanță parcurge grupul de turişti până la momentul plecării curierului? 6·4=24 km (am aplicat $d = v \cdot t$)

3) Aflăm cu cât se apropie curierul de turişti în fiecare oră.

14 km – 6 km = 8 km (adică, $v_1 - v_2$)

4) După câte ore se întâlnesc turiştii cu curierul?

24:8=3. După 3 ore.

5) La ce distanță de cabană are loc întâlnirea?

14·3=42 km (sau 6·7=42 km, deoarece turiştii merg timpul de 4 h + 3 h = 7 h şi au viteza 6 km/h)

Răspuns: Curierul ajunge grupul de turişti după 3 ore la 42 km de cabană.

Remarcă. În cazul mobilelor care se deplasează pe aceeaşi direcție şi în acelaşi sens (se urmăresc) viteza de apropiere a unuia față de celălalt este egală cu diferența vitezelor celor două mobile.

R1.1.5.2. Un ogar urmăreşte o vulpe care are 60 de sărituri înaintea lui. Peste câte sărituri va ajunge ogarul vulpea, ştiind că, pe când ogarul face 6 sărituri, vulpea face 9, dar că 3 sărituri de-a ogarului fac cât 7 de-ale vulpii?

Soluția 1. Problema poate fi rezolvată folosind formula $t = d:(v_1 - v_2)$, unde *d* este distanța dintre urmărit şi urmăritor, v_1 este viteza urmăritorului, v_2 este viteza urmăritului, *t* este intervalul de timp în care urmăritorul îl ajunge pe urmărit. Notez l_1 şi l_2 lungimea săriturii ogarului, respectiv lungimea săriturii vulpii. Atunci $v_2 = 9l_2$, iar $v_1 = 6l_1 = 6:3\cdot 7l_2 = 14l_2$, iar diferența de viteză $v_1 - v_2 = 5l_2$. Timpul necesar pentru ca ogarul să ajungă vulpea este $t = d:(v_1 - v_2)$, iar $d = 60l_2$, deci $t = 60l_2 :(5l_2) = 12$ unități de timp. În 12 unități de timp ogarul face 12·6=72 sărituri.

Soluția 2. În timp ce ogarul face 6 sărituri...........vulpea face 9 sărituri
2 sărituri de ogar.............7 sărituri de vulpe.

Transformăm datele pentru a le putea compara:
În timp ce ogarul face 6 sărituri...........vulpea face 9 sărituri
6 sărituri de ogar ....14 sărituri de vulpe.

Comparând rezultatele constatăm că în timp ce ogarul face 6 sărituri, vulpea face 9 sărituri, dar cele 6 sărituri ale ogarului fac cât 14 sărituri ale vulpii. După fiecare 6 sărituri ogarul se apropie de vulpe cu 5 sărituri.

De câte ori trebuie să facă ogarul câte 6 sărituri pentru a acoperi distanța de 60 de sărituri (de vulpe)? Evident de 60:5=12 ori.

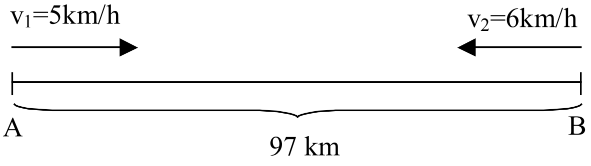
Câte sărituri face ogarul până ajunge vulpea? 12·6=72 sărituri.

R1.1.5.3. Un ogar urmăreşte o vulpe care are 60 de sărituri înaintea lui. Poate ogarul să ajungă vulpea, ştiind că, în timp ce ogarul face 6 sărituri, vulpea face 9, dar că 5 sărituri ale ogarului fac cât 7 ale vulpii?

Soluție. Notez l_1, l_2 lungimea săriturii ogarului, respectiv lungimea săriturii vulpii, v_1, v_2 viteza ogarului, respectiv viteza vulpii şi *d* distanța dintre ogar şi vulpe. Avem $d = 60l_2$, $v_2 = 9l_2$, $v_1 = 6l_1 = 6:5\cdot 7l_2 = 8{,}4l_2$. Deoarece $v_1 < v_2$, vulpea scapă sau ogarul nu poate ajunge vulpea.

R1.1.5.4. Distanța dintre cabana A şi B este de 97 km. Un grup de turişti a pornit de la cabana A spre cabana B cu viteza de 5 km/h. După 4 ore din cabana B porneşte un grup în întâmpinarea primului grup cu viteza 6 km/h. După câte ore se vor întâlni turiştii?

Soluție.



1) Aflăm câți km a parcurs primul grup în 4 ore.

5·4=20 km $(d = v\cdot t)$

2) Aflăm distanța dintre grupele de turişti în momentul în care pleacă al doilea grup de turişti. 97-20=77 km

3) Aflăm cu cât se apropie cele două grupuri de turişti.

6+5=11 km/h

4) Aflăm în cât timp grupul al doilea se întâlneşte cu primul.

77:11=7 ore

Grupurile se întâlnesc după 7 ore.

Remarcă. În cazul mobilelor care se deplasează pe aceeaşi direcţie, dar în sensuri contrare, viteza de apropiere a unuia faţă de celălalt este egală cu suma vitezelor celor două mobile.

R1.1.5.5. Două trenuri vin din direcţii opuse, pe linii paralele: unul merge cu viteza de 75 km/h, altul cu viteza de 78 km/h. Pasagerul din primul tren a observat că al doilea tren a trecut prin faţa sa în 10 secunde, iar călătorul din trenul al doilea a observat că primul tren a trecut prin faţa sa în 6 secunde.

a) Care este lungimea primului tren?

b) Care este lungimea celui de al doilea tren?

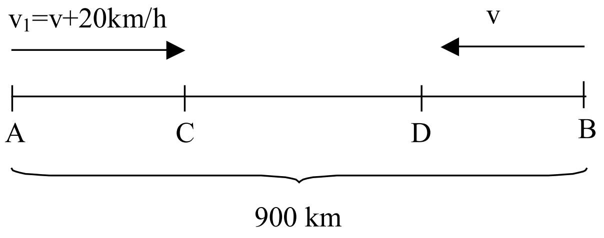
Soluţie. a) În cazul mobilelor care se deplasează pe aceeaşi direcţie, dar în sensuri contrare, viteza de apropiere dintre ele este suma vitezelor lor; deci viteza cu care un tren trece pe lângă celălalt este 75+78=153 km/h.

Primul tren trece pe lângă pasagerul din al doilea tren în 6 secunde. Ţinând cont că $d = v \cdot t$, rezultă că lungimea primului tren este (153000:3600) m/s · 6 s, adică 255 m.

b) Al doilea tren trece pe lângă pasagerul din primul tren în 10 secunde, rezultă că lungimea celui de al doilea tren este
(153000:3600) m/s · 10 s, adică 425 m.

R1.1.5.6. Din oraşele A şi B pornesc unul spre celălalt două trenuri. Unul are viteza cu 20 km/h mai mare decât celălalt. Distanţa dintre oraşe este de 900 km. După 3 ore suma distanţelor parcurse de ambele trenuri este cu 120 km mai mică decât distanţa rămasă. Să se afle vitezele medii ale trenurilor.

Soluţie.



Analizând schema grafică observăm că: AC reprezintă distanţa parcursă de primul tren, BD distanţa parcursă de al doilea tren şi CD este distanţa rămasă. Ştim că CD=AC+BD+120 km. Putem scrie:
AB=AC+CD+DB=AC+AC+BD+120 km+DB,
de unde rezultă că 900 km=2AC+2BD+120 km.

1) Aflăm cât reprezintă 2AC+2BD. 900-120=780 km

2) Aflăm suma distanţelor parcurse de cele două trenuri.

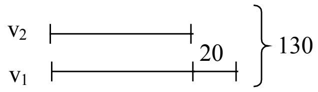
780 km : 2 = 390 km

3) Aflăm cu cât se apropie trenurile într-o oră sau suma vitezelor trenurilor.

$(v_1 + v_2) \cdot 3h = 390$ km, de unde $v_1 + v_2 = 130$ km/h

4) Aflăm vitezele celor două trenuri.

$$v_1 + v_2 = 130\,\text{km/h} \quad \text{şi} \quad v_1 = v_2 + 20\,\text{km/h}.$$



$v_2 = [(130 - 20) : 2]\,\text{km/h}$

$v_2 = 55\,\text{km/h}$ şi $v_1 = 75\,\text{km/h}$.

1.1.6. Probleme de perspicacitate

Problemele prezentate la această temă se rezolvă folosind elemente de logică matematică şi nu se încadrează în nici una din metodele prezentate (figurativă, falsei ipoteze, mersul invers, comparației). Ingeniozitatea, spiritul de inițiativă, perspicacitatea, deducția sunt calități care "puse în mişcare" duc la soluții surprinzătoare.

Rezolvarea acestor probleme e o provocare la un "duel al minții": să alegi soluția prin logică, perspicacitate, perseverență. (Armand Martinov)

Probleme rezolvate

R1.1.6.1. La o discotecă au fost 74 de elevi, băieți şi fete. A doua zi, fetele au făcut o clasificare: Cristina a dansat cu un băiat, Alexandra cu 3 băieți, Laura cu 9 băieți, Raluca cu 10 băieți, Doina cu 11 băieți şi aşa mai departe, fiecare fată a avut un partener mai mult decât precedenta, până la ultima, Alina, care a dansat cu toți băieții? Câte fete şi câți băieți au fost?

Soluție. Comparăm enumerarea: Laura, Raluca, Doina, ..., Alina sau, cu alte denumiri: $F_1, F_2, F_3,..., F_f$

cu 9, 10, 11,..., b băieți.

Rezultă că numărul băieților b este cu 8 mai mare decât al fetelor f. Aşadar (72-8):2=32 fete şi 40 de băieți. Inițial au fost 34 de fete şi 40 de băieți.

R1.1.6.2. În şapte cutii sunt batoane de ciocolată de câte 100 g. Printre ele sunt şi cutii cu batoane de ciocolată de 90 g. Printr-o singură cântărire să se determine aceste cutii, ştiind că toate batoanele sunt ambalate la fel.

Soluție. Din fiecare cutie se scoate un număr de batoane de ciocolată egal cu 2 ridicat la o putere egală cu numărul cutiei: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Dacă toate batoanele ar cântări câte 100 g, atunci ar avea împreună

$1\cdot100+2\cdot100+4\cdot100+8\cdot100+16\cdot100+32\cdot100+64\cdot100=12700$ g. Deoarece există şi batoane de ciocolată mai uşoare cu 10 g, diferența dintre 12700 şi masa indicată de cântar se împarte la 10. Numărul astfel obținut se scrie în mod unic ca sumă a numerelor $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$, luate o singură dată. Exponenții puterilor lui 2 reprezintă cutiile cu batoane de ciocolată mai uşoare.

Exemplu: Dacă batoanele cântăresc 12330 g, atunci

12700-12330=370, 370:10=37, iar $37 = 2^5 + 2^2 + 2^0$.

Cutiile cu batoanele de ciocolată de câte 90 g sunt cele pe care scrie 0, 2, 5.

R1.1.6.3. O persoană urcă treptele unei scări după regula: urcă 3 trepte coboară 2 trepte, urcă din nou 5 trepte şi coboară o treaptă.

a) După 736 paşi, pe ce treaptă se află persoana?

b) După câţi paşi ajunge pe treapta 736?

Soluţie. a) La 11 paşi persoana urcă 3-2+5-1=5 trepte.

Pentru că 736=11·66+10, rezultă că persoana face la 11·66 paşi 5·66=330 trepte, iar la încă 10 paşi face 3-2+5=6 trepte, total 336 trepte.

b) Pentru că 736=5·147+1, numărul de paşi se află 147·11+1=1618 paşi.

R1.1.6.4. Se dau nouă monede de aceeaşi valoare. Dacă opt au aceeaşi masă şi una este falsă, fiind mai uşoară, să se stabilească prin două cântăriri moneda falsă, având la dispoziţie o balanţă.

Soluţie. Împărţim cele 9 monede în 3 grupe de câte 3 monede. Prima cântărire: Aşezăm pe cele două talere ale balanţei câte o grupă. Dacă balanţa este în echilibru moneda falsă se află în a treia grupă. Dacă balanţa se înclină, atunci moneda falsă se află pe talerul care se ridică. Astfel am stabilit grupa în care se găseşte moneda falsă.

A doua cântărire: Din grupa cu moneda falsă luăm două monede pe care le aşezăm pe talerele balanţei. Dacă balanţa este în echilibru, moneda falsă este cea de a treia (rămasă). Dacă balanţa se înclină, moneda falsă este pe talerul care se ridică.

R1.1.6.5. Cum putem aduce 6 l de apă de la râu dacă dispunem numai de două vase: unul de 4 l şi altul de 9 l?

Soluţie. Umplem vasul de 9 l şi turnăm din el în vasul de 4 l până îl umplem, de două ori. În vasul de 9 l a rămas 1 l. Golim vasul de 4 l şi punem în el litrul rămas. Vasul de 9 l rămas gol îl umplem. Punem din el apă în vasul de 4 l până acesta se umple (putem pune numai 3 l, 1 l era deja acolo) şi în vasul de 9 l au rămas 6 l.

R1.1.6.6. **Un calcul mintal**. Ridicaţi la pătrat, fără hârtie şi creion, numărul 85.

Soluţie. Fie numărul $\overline{a5}$. Avem

$$\overline{a5}^2 = \overline{a5}\cdot(10a+5) = \overline{a5}\cdot 10a + \overline{a5}\cdot 5 = (10a+5)\cdot 10a + (10a+5)\cdot 5 =$$

$$= 100a^2 + 50a + 50a + 25 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25,$$

deci $\overline{a5}^2 = 100a(a+1) + 25$. Folosind acest procedeu

$$85^2 = 100\cdot 8\cdot 9 + 25 = 7225.$$

R1.1.6.7. **Turneul de tenis.** La un turneu de tenis de tip eliminatoriu participă *n* jucători. Câte meciuri trebuie jucate (sau câştigate prin neprezentare) pentru a şti cine este câştigătorul?

Soluţie. În fiecare meci există un învins. Fiecare jucător, în afară de cel care câştigă turneul trebuie să fie învins o singură dată. Vor fi $n-1$ învinşi, prin urmare vor fi $n-1$ meciuri.

R1.1.6.8. Cereţi unui prieten să-şi aleagă un număr format din 3 cifre cu cifra unităţilor diferită de 0. Cereţi să scrie şi răsturnatul numărului, apoi să scadă numărul mai mic din numărul mai mare; diferenţa obţinută să o adune cu răsturnatul său. Fără a adresa alte întrebări putem spune care este rezultatul obţinut. Justificaţi raţionamentul.

Soluție. Fie $\overline{abc}$ numărul şi $\overline{cba}$ răsturnatul său. Presupunem $a > c$. Efectuând calculele $\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10 + c) - (100c + 10b + a)$ vom obține $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c) = 100(a - c) - (a - c) = \overline{(a - c)00} - (a - c) =$
$= \overline{(a - c - 1)9(10 - a + c)}$; cifra sutelor este $a - c - 1$, cifra zecilor este 9 şi cifra unităților este $10 - a + c$.

Adunând diferența obținută cu răsturnatul său se obține

$$100(a - c - 1) + 90 + 10 - a + c + 100(10 - a + c) + 90 + a - c - 1 =$$
$$= 100a - 100c - 100 + 100 - a + c + 1000 - 100a + 100c + 90 + a - c - 1 = 1089,$$

oricare ar fi cifrele numărului ales.

1.2. Şiruri. Sume

O importanță deosebită o au în clasa a V-a problemele de numărare a termenilor unui şir, de determinare a formei generale sau a regulii de formare a termenilor unui şir, de aflare a sumei primilor *n* termeni dintr-un şir, de determinare a termenului de pe locul *n* dintr-un şir.

Prima problemă ce se ridică este următoarea:

- Fiind dat şirul $a_1, a_2, a_3, \ldots$ să se completeze cu încă *p* termeni, $p \in \mathbf{N}^*$.

Să se completeze cu încă trei termeni următoarele şiruri:

1) 14, 15, 16,...
2) 8, 10, 12,...
3) 13, 15, 17,...
4) 5, 8, 11,...
5) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,...
6) 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16,...
7) 1, 2, 6, 24, 120,...
8) 1, 3, 7, 5,...
9) 61, 52, 63,...

Soluție. 1) Numerele din primul şir sunt consecutive. Şirul se completează cu 17, 18, 19.

2) Numerele din al doilea şir sunt pare consecutive. Şirul se completează cu 14, 16, 18.

3) Numerele din al treilea şir sunt impare consecutive. Şirul se completează cu 19, 21, 23.

4) Numerele din al patrulea şir se formează după regula $a_n = a_{n-1} + 3$, $n \in \mathbf{N}^*$ ($a_1 = 5$, $a_2 = 5 + 3 = 8$, $a_3 = 8 + 3 = 11$). Şirul se completează cu 14, 17, 20.

5) Numerele din al cincilea şir se formează după regula: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_2 + a_3$, $a_5 = a_3 + a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$; în general $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$. Şirul se completează cu 13, 21, 34.

6) Numerele din al şaselea şir se formează după regula: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_1 + a_2 + a_3$, $a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, $a_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$; în general $a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}$, $n > 2$. Şirul se completează cu 32, 64, 128.

7) Numerele din şirul al şaptelea se formează după regula: $a_1 = 1$, $a_2 = 2 \cdot 1$, $a_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$, $a_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, $a_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$; în general $a_n = n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1$, $n \geq 1$. Acesta se notează cu *n*! şi se numeşte factorial. Şirul se completează cu 6!, 7!, 8!, adică 6·5·4·3·2·1, 7·6·5·4·3·2·1, 8·7·6·5·4·3·2·1, adică 720, 5040, 40320.

Observaţie. Regula de formare mai poate fi scrisă şi astfel: $a_1 = 1$, $a_2 = 2 \cdot a_1$, $a_3 = 3 \cdot a_2$, $a_4 = 4 \cdot a_3$, $a_5 = 5 \cdot a_4$; în general $a_n = n \cdot a_{n-1}$, $n \geq 2$.

8) Numerele din şirul al optulea se formează după regula $a_1 = u(2^1 - 1)$, $a_2 = u(2^2 - 1)$, $a_3 = u(2^3 - 1)$, $a_4 = u(2^4 - 1)$; în general $a_n = u(2^n - 1)$, adică ultima cifră a numărului $2^n - 1$. Ultimele cifre ale puterilor $2^5, 2^6, 2^7$ sunt 2, 4, 8, deci şirul se completează cu 1, 3, 7.

9) Numerele din al nouălea şir sunt răsturnatele numerelor $4^2, 5^2, 6^2, ...$ Deci şirul se completează cu 94, 46, 18.

- O altă problemă care se poate pune este numărarea elementelor dintr-un şir.

Să se determine numărul de numere naturale din următoarele şiruri:

a) 15, 16, 17,..., 30
b) 2, 4, 6,..., 54
c) 4, 7, 10,..., 76
d) 2, 7, 12,..., 77

Soluţie. Şirul a) conţine 30-15+1=16 numere.

Şirul b) conţine termeni de forma 2·1, 2·2, 2·3,..., 2·27, deci conţine 27 termeni sau (54-2):2+1=27.

Şirul c) are termeni de forma 3·1+1, 3·2+1, 3·3+1,..., 3·25+1, deci conţine 25 termeni sau (76-4):3+1=25.

Şirul d) are termeni de forma 5·0+2, 5·1+2, 5·2+2,..., 5·15+2, deci conţine 16 termeni sau (77-2):5+1=16.

În exerciţii apar foarte multe sume finite de numere naturale. De aceea vom prezenta câteva moduri de calcul a unor sume finite.

Un mod ingenios de a aplica proprietăţile adunării a fost descoperit de un copil. Acest copil care a devenit unul dintre marii matematicieni ai lumii, se numea Karl Friedrich Gauss (1777-1855).

Vom folosi procedeul lui Gauss pentru a aduna numere consecutive:

Să se determine suma primelor *n* numere naturale.

Soluţie. Fie $S = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n$ şi $S = n + (n-1) + ... + 2 + 1$. Adunând membru cu membru se obţine $2 \cdot S = (n+1) \cdot n$ sau $S = n(n+1) : 2$.

Procedeul se bazează pe tehnica lui Gauss de a aduna primul număr cu ultimul, al doilea cu penultimul etc., sumele obținute fiind egale.

Remarcă. Formula dedusă mai sus este foarte utilă în exerciții.

Formula se poate aplica imediat pentru calculul sumei primelor 10, 100, 1000 numere naturale:

1+2+3+...+10=10·11:2=55

1+2+3+...+100=100·101:2=5050

1+2+3+...+1000=1000·1001:2=500500

Probleme rezolvate

R1.2.1. Fie şirul de numere naturale: 1, 5, 9, 13,...

a) Completați şirul cu încă trei termeni.

b) Găsiți al 155-lea, al 378-lea, al 2003-lea număr.

c) Justificați care dintre următoarele numere fac parte din şir: 497, 531, 794, 1073. Precizați locul în şir, dacă e cazul.

d) Calculați suma primilor 20 termeni.

Soluție. a) Următorii 3 termeni sunt 13+4=17, 17+4=21, 21+4=25.

b) Termenii din şir au forma $a_n = 4 \cdot (n-1)+1$, $n \in \mathbf{N}$ (4·0+1, 4·1+1, 4·2+1,...). Al 155-lea termen este 4·154+1=617. Al 378-lea termen este 4·377+1=1509. Al 2003-lea termen este 4·2002+1=8009.

c) 497=4·124+1 $\Rightarrow$ 497 face parte din şir este al 125-lea termen.

531=4·132+3 $\Rightarrow$ 531 nu face parte din şir.

794=4·198+2 $\Rightarrow$ 794 nu face parte din şir.

1073=4·268+1 $\Rightarrow$ 1073 face parte din şir; este al 269-lea termen.

d) Primii 20 de termeni sunt 4·0+1, 4·1+1, 4·2+1,..., 4·19+1. Deci *S*=1+5+9+...+77 şi *S*=77+78+...+1. Adunând membru cu membru 2*S*=78·20, deci *S*=78·10=780.

O altă metodă de calcul a sumei *S* este:

S=(4·0+1)+(4·1+1)+(4·2+1)+...+(4·19+1)=
=(4·0+4·1+4·2+...+4·19)+20·1=4(1+2+...+19)+20=
=4·19·20:2+20=760+20=780.

R1.2.2. Fie şirul de numere naturale 1, 2·3, 4·5·6, 7·8·9·10,... Să se determine al 7-lea şi al 100-lea termen al şirului.

Soluție. Se observă că termenul a_n este produs de *n* numere naturale consecutive. Trebuie să deducem forma ultimului factor în funcție de locul al *n*-lea din şir. Ultimul număr din a_n verifică relația $n(n+1):2$.

Ultimul număr din al 7-lea termen va fi 7·8:2, adică 28; deci al 7-lea termen va fi produs a 7 numere consecutive, ultimul fiind 28. Al 7-lea termen va fi 22·23·24·25·26·27·28. Ultimul număr din al 100-lea termen va fi 100·101:2=5050. Termenul al 100-lea va fi produsul a 100 numere consecutive dintre care ultimul este 5050. Al 100-lea termen este 4951·4952·...·5050.

R1.2.3. Fie numărul A=1234567891011121314...20022003.

a) Aflaţi câte cifre are numărul A.

b) Care este a 2000-a cifră a numărului A?

Soluţie. a) Sunt 9 numere de o cifră, 99-10+1=90 numere de 2 cifre, 999-100+1=900 numere de 3 cifre şi 2003-1000+1=1004 numere de 4 cifre. În total sunt 9+90·2+900·3+1004·4=6905 cifre.

b) Pentru scrierea numerelor de o cifră şi 2 cifre se folosesc 189 cifre. Rămân 2000-189=1811 cifre pentru a scrie numere de 3 cifre. Dar, 1811=3·603+2, rezultă că a 2000-a cifră este a 2-a cifră a celui de al 604-lea număr natural de 3 cifre, a 2-a cifră a lui 703, deci 0.

R1.2.4. Fie $A = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{999...99}_{2003\text{ cifre}}$. Câte cifre de 1 are A?

Soluţie. Se poate scrie

$A = (10-1) + (100-1) + (1000-1) + (1\underbrace{00...00}_{2003\text{ cifre}} - 1)$ sau

$A = 10 + 100 + 1000 + ... + 1\underbrace{00.00}_{2003\text{ cifre}} - 1 \cdot 2003$; avem $A = \underbrace{111...111}_{2003\text{ cifre}}0 - 2003$.

Efectuând scăderea $A = \underbrace{111...109107}_{\text{total 2004 cifre}}$. Numărul A are 2004 cifre, dintre care 4 sunt diferite de 1, deci A are 2000 cifre de 1.

R1.2.5. Calculaţi următoarele sume:

a) S=111+222+...+999

b) S=9+19+29+...+1999

c) S=3+5+7+...+2001-2-4-6-...-2000

Soluţie. a) Se dă factor comun 111. Avem S=111·(1+2+...+9)=111·(9·10:2), deci S=4995.

b) S se poate scrie: S=9+(10·1+9)+(10+2+9)+...+(10·199+9). S are 200 termeni. Aplicând proprietăţile adunării, grupăm S=9·200+10(1+2+...+199). Avem S=1800+10·(199·200:2) adică S=200800.

c) S se poate scrie grupând termenii câte 2, fiind 1000 numere impare şi 1000 numere pare, deci vom obţine 1000 grupuri. S=(3-2)+(5-4)+(7-6)+...+(2001-2000)=1000.

R1.2.6. Calculaţi următoarele sume:

a) S=1·2+2·3+...+19·20

b) S=1·2·3+2·3·4+...+18·19·20.

Soluţie. a) Fie 3·S=1·2·3+2·3·3+...+19·20·3; putem scrie mai departe 3·S=1·2·(3-0)+2·3·(4-1)+...+19·20·(21-18). Efectuând calculele vom avea 3·S=1·2·3-1·2·0+2·3·4-1·2·3+...+19·20·21-18·19·20, deci 3·S=19·20·21 sau S=19·20·7, adică S=2660.

b) În mod asemănător vom proceda şi la b):

4·S=1·2·3·4-0·1·2·3+2·3·4·5-1·2·3·4+...+18·19·20·21-17·18·19·20

iar prin efectuarea calculelor se obţine 4·S=18·19·20·21 sau S=18·19·5·21, adică S=35910.

Generalizare. $1\cdot 2+2\cdot 3+...+n(n+1)=n(n+1)(n+2):3$

$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+...+n(n+1)(n+2)=n(n+1)(n+2)(n+3):4$.

1.3. Teorema împărțirii cu rest

Oricare ar fi numerele naturale *a* şi *b*, cu $b \neq 0$, există două numere naturale *q* şi *r*, numite cât, respectiv rest, astfel încât $a=bq+r$, $r<b$.

Numerele determinate în acest condiții sunt unice.

Proprietatea de mai sus se numeşte teorema împărțirii întregi sau teorema împărțirii cu rest.

Resturile posibile la împărțirea la numărul natural *b*, $b \neq 0$ sunt 0,1,2,...,*b*-1.

Remarcă. Dacă două numere naturale dau acelaşi rest la împărțirea cu un alt număr natural, diferența lor se împarte exact la acel număr.

Modele. a) Să se afle cel mai mic număr natural de trei cifre, ştiind că dacă îl împărțim la un număr de o cifră, obținem restul 8.

b) Să se afle suma tuturor numerelor naturale de trei cifre care împărțite la un număr de o cifră dau restul 8.

Soluție. a) Se ştie că restul este mai mic decât împărțitorul. Dacă restul este 8, singurul număr de o cifră care poate fi împărțitor este 9. Cel mai mic număr de 3 cifre, care la împărțirea cu 9 dă restul 8 este 9·11+8=107.

b) Numerele căutate sunt 9·11+8, 9·12+8, 9·13+8,..., 9·110+8, adică 107, 116, 125,..., 998; sunt 100 de numere. Suma acestor numere este
9·(11+12+13+...+110)+8·100=9·121·100:2+800=55250.

Probleme rezolvate

R1.3.1. Suma a două numere este 340. Dacă împărțim numărul mai mare la jumătatea numărului mic obținem câtul 3 şi restul 25. Aflați numerele.

Soluție. Se combină teorema împărțirii cu rest cu metoda figurativă de rezolvare a problemelor de aritmetică:

|———|———| reprezintă numărul mic

25

|———|———|———|———| reprezintă numărul mai mare.

Pentru a afla jumătatea numărului mic efectuăm (340-25):5=631 deci numărul mic este 63·2=126, iar numărul mare este 3·63+25=214.

R1.3.2. Câte numere de 3 cifre există cu proprietatea că împărțite la un număr de 2 cifre dau restul 97?

Soluție. Se ştie că restul este mai mic decât împărțitorul. Dacă restul este 97 şi împărțitorul are 2 cifre, atunci acesta poate fi 98 sau 99. Numerele căutate sunt de 3 cifre şi au forma 98·c+97 sau 99·c+97. Ele sunt

98·1+97, 98·2+97,..., 98·9+97

99·1+97, 99·2+97,..., 99·9+97, total 18 numere.

R1.3.3. Scriem şirul numerelor naturale impare fără să le separăm. Să se determine a 2003-a cifră.

Soluţie. Se scrie şirul numerelor naturale impare:

1351113...99101103...9991001003...

Sunt 5 numere impare de o cifră, sunt 45 numere impare de 2 cifre ((99-11):2+1=45), sunt 450 de numere impare de 3 cifre
((999-101):2+1=450). Pentru scrierea acestor numere s-au folosit 5+2·45+3·450=1445 cifre. A 2003-a cifră este o cifră dintr-un număr impar de 4 cifre; 2003-1445=558 cifre se folosesc până la a 2003-a cifră.

558=4·139+2, deci a 2003-a cifră va fi a 2-a cifră a celui de al 140-lea număr impar de 4 cifre; cele 140 numere impare au forma:
1001+2·0, 1001+2·1, 1001+2·2, 1001+2·3,..., 1001+2·139,
deci al 140-lea număr impar este 1279, a doua sa cifră va fi a 2003-a cifră a şirului, deci 2.

R1.3.4. Împărţind pe *n* la 84 obţinem restul 56. Ce rest obţinem dacă împărţim pe *n* la 12?

Soluţie. Se scrie teorema împărţirii cu rest: $n = 84c + 56$. Avem 84=12·7 şi 56=4·12+8, de unde obţinem

$$n = 12 \cdot 7c + 4 \cdot 12 + 8 = 12(7c + 4) + 8,$$

deci restul împărţirii lui *n* la 12 este 8.

R1.3.5. Să se afle numerele nenule care împărţite la 4, dau câtul *a* şi restul *b*, iar împărţite la 10 dau câtul *b* şi restul *a*.

Soluţie. Se scrie teorema împărţirii cu rest. Fie *x* numărul căutat $x = 4a + b$, $b < 4$ şi $x = 10b + a$, $a < 10$. Avem $4a + b = 10b + a$ sau $3a = 9b$, deci $a = 3b$, relaţie verificată de $a = 3$, $b = 1$ sau $a = 6$, $b = 2$ sau $a = 9$, $b = 3$. Numerele cerute sunt 13, 26 şi 39.

R1.3.6. Un număr de 3 cifre are primele două cifre identice, iar a treia cifră este 5. Acest număr se împarte la un număr de o singură cifră şi se obţine restul 8. Să se găsească deîmpărţitul, împărţitorul şi câtul.

Soluţie. Se ştie că restul este mai mic decât împărţitorul. Dacă restul este 8 şi împărţitorul are o cifră, acesta este 9. Se scrie teorema împărţirii cu rest: $\overline{aa5} = 9x + 8$, unde s-a notat câtul cu *x*. Avem $\overline{aa0} + 5 = 9x + 8$ sau $\overline{aa0} = 9x + 3$, de unde rezultă că $9x$ trebuie să fie printre numerele 107, 217, 327, 437, 547, 657, 767, 877, 987. Singurul număr care se împarte exact la 9, din acest şir, este 657, rezultă că $\overline{aa0} = 660$, deci deîmpărţitul este 665, împărţitorul este 9, iar câtul este 73.

1.4. Puterea cu exponent natural a unui număr natural

În acest paragraf vom avea nevoie de următoarele definiţii şi proprietăţi învăţate în cadrul orei de matematică:

1) $a, n \in \mathbf{N}$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n\ factori}$, $a^0 = 1$, $a^1 = 1$ şi 0^0 nu are sens

a se numeşte bază, *n* se numeşte exponent.

2) Toate puterile naturale ale lui 1 sunt egale cu 1.

3) Toate puterile cu exponent natural nenul ale lui 0 sunt egale cu 0.

4) Dacă a,b,m,n sunt numere naturale:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}\ (m \geq n), \quad (a^m)^n = a^{m\cdot n}, \quad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

5) Ridicarea la putere nu este operaţie comutativă, nici asociativă.

6) O deosebită importanţă în rezolvarea problemelor au puterile lui 10. Acestea se folosesc pentru a compara şi a scrie mai uşor numere naturale foarte mari:

$$10^n = 1\underbrace{00...0}_{n\ zerouri}, \quad 10^n = 2^n \cdot 5^n$$

1.4.1. Calculul ultimei/penultimei cifre a unei expresii numerice cu puteri, a unui produs

Pentru a determina ultima/penultima cifră a unei expresii numerice cu puteri trebuie remarcate următoarele:

1) Toate puterile cu baza 5 sau un număr a cărui ultimă cifră este 5 au ultima cifră 5.

2) Toate puterile cu baza 6 sau un număr a cărui ultimă cifră este 6 au ultima cifră 6.

3) Toate puterile unui număr natural care are ultima cifră 1 au şi ele ultima cifră 1.

4) Toate puterile unui număr natural care are ultima cifră 0 au şi ele ultima cifră 0; mai mult, aceste puteri vor avea un număr de zerouri egal cu exponentul (dacă penultima cifră a numărului este diferită de 0).

5) Notăm $u(a)$ ultima cifră a numărului *a*, $a \in \mathbf{N}$. Dacă *k* este natural:

$u(2^{4k+1}) = 2$, $u(2^{4k+2}) = 4$, $u(2^{4k+3}) = 8$, $u(2^{4(k+1)}) = 6$

$u(3^{4k+1}) = 3$, $u(3^{4k+2}) = 9$, $u(3^{4k+3}) = 7$, $u(3^{4(k+1)}) = 1$

$u(7^{4k+1}) = 7$, $u(7^{4k+2}) = 9$, $u(7^{4k+3}) = 3$, $u(7^{4(k+1)}) = 1$

$u(8^{4k+1}) = 8$, $u(8^{4k+2}) = 4$, $u(8^{4k+3}) = 2$, $u(8^{4(k+1)}) = 6$

Regulile de mai sus se pot desprinde scriind şirul puterilor naturale cu bazele 2, 3, 7 şi 8.

În mod asemănător deducem

$$u(4^{2k+1}) = 4,\ u(4^{2(k+1)}) = 6 \text{ şi } u(9^{2k+1}) = 9,\ u(9^{2(k+1)}) = 1.$$

Remarcă. Dacă *n* este un număr natural n^4 are ultima cifră 0, 1, 5 sau 6.

Observaţie. Aceste reguli se păstrează şi pentru bazele care au ultima cifră 2, 3, 7, 8, 4 sau 9.

Model 1. Să se determine ultima cifră a următoarelor numere:

$$A = 4^{1995} + 2^{1996} + 3^{1997} + 6^{1998} + 7^{1999} + 9^{2000}$$

$$B = 2000^{2000} + 2001^{2001} + 2002^{2002} + 2003^{2003} + 2004^{2004} + 2005^{2005}$$

Soluţie. Aplicând regulile stabilite mai sus, avem:

$u(4^{1995}) = u(4^{1994+1}) = u(4^{2\cdot 997+1}) = 4$, $u(2^{1996}) = u(2^{4\cdot 499}) = 6$
$u(3^{1997}) = u(3^{1996+1}) = u(3^{4\cdot 499+1}) = 3$, $u(6^{1998}) = 6$
$u(7^{1999}) = u(7^{1996+3}) = u(7^{4\cdot 999+3}) = 3$, $u(9^{2000}) = u(9^{2\cdot 1000}) = 1$

Deci, $u(A) = u(4+6+3+6+3+1) = 3$.

Procedând în mod analog pentru termenii lui *B*, avem:
$u(2000^{2000}) = 0$, $u(2001^{2001}) = 1$, $u(2002^{2002}) = u(2^{2002}) = u(2^{4\cdot 500+2}) = 4$
$u(2003^{2003}) = u(3^{2003}) = u(3^{4\cdot 500+3}) = 7$, $u(2004^{2004}) = u(4^{2004}) = u(4^{2\cdot 1002}) = 6$
şi $u(2005^{2005}) = u(5^{2005}) = 5$.

Deci, $u(B) = u(0+1+4+7+6+5) = 3$.

Model 2. Să se determine ultimele două cifre ale numărului $N = 7^{32} + 7^{30}$.

Soluţie. Se observă că $N = 7^{30}(7^2+1) = 7^{30}\cdot 50 = 7^{30}\cdot 5\cdot 10$, deci ultima cifră a lui *N* este 0, iar cifra zecilor lui *N* este $u(7^{30}\cdot 5)$, deci $u(7^{4\cdot 7+2}\cdot 5) = u(9\cdot 5) = 5$. Rezultă că ultimele două cifre ale lui *N* sunt 5 şi 0. $(N = \overline{***...*50})$

Model 3. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului

$$N = 2^{2000} - 2^{1998} + 2^{1995}.$$

Soluţie. Se scrie

$$N = 2^{1995}(2^5 - 2^3 + 1) = 2^{1995}\cdot 25 = 2^{1993}\cdot 2^2\cdot 5^2 = 2^{1993}\cdot 100$$

N are ultimele două cifre 0, iar cifra sutelor este $u(2^{1993})$, adică $u(2^{4\cdot 498+1}) = 2$. Rezultă că ultimele 3 cifre ale lui *N* sunt 2, 0, 0 $(N = \overline{**...*200})$.

Probleme rezolvate

R1.4.1.1. Să se determine ultima cifră a numărului:

$$N = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + ... + 20^{20}$$

Soluţie. Determinăm ultima cifră a fiecărui termen, aplicând regulile de mai sus şi grupăm câte doi din termenii sumei:
$u(2^2) + u(12^{12}) = u(4+6) = 0$, $u(3^3) + u(13^{13}) = u(7+3) = 0$,
$u(5^5) + u(15^{15}) = u(5+5) = 0$, $u(7^7) + u(17^{17}) = u(3+7) = 0$
$u(8^8) + u(18^{18}) = u(6+4) = 0$ şi $u(1^1) + u(11^{11}) = 2$, $u(10^{10}) + u(20^{20}) = 0$
$u(4^4) + u(14^{14}) = u(6+6) = 2$, $u(6^6) + u(16^{16}) = u(6+6) = 2$,
$u(9^9) + u(19^{19}) = 2$.

Însumând rezultatele obţinute, rezultă că ultima cifră a lui *N* este 8.

R1.4.1.2. Să se determine ultimele două cifre ale numărului:

$$a = 1991^2\cdot 1992^2\cdot 1993^2\cdot ...\cdot 1999^2.$$

Soluție. Se poate scrie $a=(1991\cdot 1992\cdot 1993\cdot 1994\cdot 1995\cdot ...\cdot 1999)^2$. Ultima cifră a numărului $1991\cdot 1992\cdot 1993\cdot 1994\cdot 1995\cdot ...\cdot 1999$ este 0, care provine din 1992·1995, deci ultimele două cifre ale lui a sunt egale cu 0 $(a=\overline{**...*00})$, a fiind pătratul unui număr natural care are ultime cifră 0.

R1.4.1.3. Să se determine ultima cifră a următoarelor numere:

$$A=1+3+3^2+3^3+...+3^{50} \quad \text{şi} \quad B=4+4^2+4^3+...+4^{201}$$

Soluție. Aceste exerciții se bazează pe următoarele proprietăți:

$$u(3^{4k+1})+u(3^{4k+2})+u(3^{4k+3})+u(3^{4k})=u(3+9+7+1)=0 \text{ şi}$$

$$u(4^{2k+1})+u(4^{2(k+1)})=u(4+6)=0.$$

În prima sumă grupăm termenii câte 4, iar în a doua sumă grupăm termenii câte 2. Vom avea:

$u(A)=u(1+3^{49}+3^{50})=u(1+3+9)=3$ şi $u(B)=u(4^{201})=4$

Remarcă. În exercițiile în care trebuie determinată ultima cifră a unei sume de puteri consecutive ale unui număr natural este bine să aplicăm gruparea termenilor, după următoarea regulă:

$u(2^{4k+1})+u(2^{4k+2})+u(2^{4k+3})+u(2^{4(k+1)})=u(2+4+8+6)=0$

$u(3^{4k+1})+u(3^{4k+2})+u(3^{4k+3})+u(3^{4(k+1)})=u(3+9+7+1)=0$

$u(7^{4k+1})+u(7^{4k+2})+u(7^{4k+3})+u(7^{4(k+1)})=u(7+9+3+1)=0$

$u(8^{4k+1})+u(8^{4k+2})+u(8^{4k+3})+u(8^{4(k+1)})=u(8+4+2+6)=0$

$u(4^{2k+1})+u(4^{2(k+1)})=u(4+6)=0$

$u(5^k)+u(5^{k+1})=u(5+5)=0$

$u(9^{2k+1})+u(9^{2(k+1)})=u(9+1)=0$

$u(6^{5k+1})+u(6^{5k+2})+u(6^{5k+3})+u(6^{5k+4})+u(6^{5(k+1)})=u(6+6+6+6+6)=0$.

R1.4.1.4. Se consideră şirul de numere naturale:

1, 3, 7, 15, 31, 63,...

Aflați ultima cifră a numărului de pe locul 2003.

Soluție. Regula de formare a şirului este $a_1=2^1-1$, $a_2=2^2-1$, $a_3=2^3-1$; $a_4=2^4-1$, $a_5=2^5-1$, $a_6=2^6-1$; în general $a_n=2^n-1$. Numărul de pe locul 2003 este $a_{2003}=2^{2003}-1$ şi are ultima cifră egală cu $u(2^{2003}-1)=u(8-1)=7$.

R1.4.1.5. Câte zerouri are la sfârşit numărul $N=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 100$.

Soluție. Se ține cont că $10^n=2^n\cdot 5^n$ şi că este suficient să numărăm aparițiile cu 5 în N (aparițiile lui 2 sunt mai multe). Numerele care se împart exact la 5 sunt 5, 10,..., 100, în total 20, numerele care se împart exact la 5^2 sunt 25, 50, 75, 100, în total 4, iar numere care se împart exact la 5^3 nu sunt în acest produs. Rezultă că numărul N se împarte exact la 5^{24}, el se împarte exact şi la 2^{24}, deci numărul are 24 de zerouri, fiind de forma $2^{24}\cdot 5^{24}\cdot n \ (n\in \mathbf{N})$.

R1.4.1.6. Să se determine ultima cifră a numărului

$$N = 3^{2002} - 2\cdot 3^{2001} - 2\cdot 3^{2000} - ... - 2\cdot 3^{1002}$$

Soluție. În rezolvarea acestui exercițiu se poate aplica următoarea observație: $3^{n+1} - 2\cdot 3^n = 3^n(3-2) = 3^n$, $n \in \mathbf{N}$. Avem $3^{2002} - 2\cdot 3^{2001} = 3^{2001}$, $3^{2001} - 2\cdot 3^{2000} = 3^{2000}$,..., $3^{1003} - 2\cdot 3^{1002} = 3^{1002}$, deci $u(N) = u(3^{1002}) = 9$.

1.4.2. Calculul sumei puterilor consecutive ale unui număr natural

Pentru a calcula suma puterilor consecutive cu baza 2 se poate folosi proprietatea $2^n + 2^n = 2^{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$.

Model 1. Să se afle suma $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{2002} + 2^{2003}$.

Soluție. Folosind proprietatea enunțată mai sus vom calcula $S+1$:

$S + 1 = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{2002} + 2^{2003} =$

$= 2 + 2 + 2^2 + 2^4 + ... + 2^{2002} + 2^{2003} = 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{2002} + 2^{2003} =$

$= 2^3 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{2002} + 2^{2003} = 2^4 + 2^4 + ... + 2^{2002} + 2^{2003} = ... =$

$= 2^{2002} + 2^{2002} + 2^{2003} = 2^{2003} + 2^{2003} = 2^{2004}$.

Dacă $S + 1 = 2^{2004}$, rezultă că $S = 2^{2004} - 1$.

Generalizare. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$, $n \in \mathbf{N}$.

Remarcă. Calculul sumei $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n+1}$ se face dând factor comun pe 2 şi aplicând generalizarea:

$$2(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n) = 2(2^{n+1} - 1)$$

Generalizare.

$2^p + 2^{p+1} + 2^{p+2} + ... + 2^{p+n} = 2^p(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n) = 2^p(2^{n+1} - 1)$, $n, p \in \mathbf{N}^*$

Model 2. Problema care se pune este de a calcula suma

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} + a^n,\ n \in \mathbf{N},\ a \in \mathbf{N}^*$$

Soluție. Se înmulţeşte această egalitate cu *a* (baza puterilor):

$$a\cdot S = a + a^2 + a^3 + a^4 + ... + a^n + a^{n+1}$$

Se face diferența $a\cdot S - S = a^{n+1} - 1$ sau $S(a-1) = a^{n+1} - 1$, deci $S = (a^{n+1} - 1) : (a-1)$.

Observație. Să se afle suma primelor 2003 puteri consecutive cu baza 3, 5, 8, 9:

$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2003} = (3^{2004} - 1) : 2$

$1 + 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{2003} = (5^{2004} - 1) : 4$

$1 + 8 + 8^2 + 8^3 + ... + 8^{2003} = (8^{2004} - 1) : 7$

$1 + 9 + 9^2 + 9^3 + ... + 9^{2003} = (9^{2004} - 1) : 8$

Probleme rezolvate

R1.4.2.1. Să se determine numărul natural *n*, ştiind că

$$2+2^2+2^3+...+2^n=1022$$

Soluţie. Se ştie că $1+2+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$, deci $2+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-2$ şi egalitatea devine $2^{n+1}-2=1022$ sau $2^{n+1}=1024$, deci $2^{n+1}=2^{10}$; rezultă $n=9$.

R1.4.2.2. Comparaţi *a* şi *b*, dacă $a=2^{51}\cdot 2^{52}\cdot 2^{53}\cdot ...\cdot 2^{100}$ şi $b=1+2+2^2+2^3+...+2^{3774}$.

Soluţie. Aplicând reguli de calcul cu puteri $a=2^{51+52+53+...+100}$, deci $a=2^{151\cdot 50:2}$, efectuând $a=2^{3775}$.

Se ştie $1+2+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$, deci $b=2^{3775}-1$.
Rezultă că $a>b$.

R1.4.2.3. Scrieţi 2001^{2002} ca sumă de 2001 numere naturale consecutive.

Soluţie. $2001^{2002}=2001\cdot 2001^{2001}=(\underbrace{1+1+...+1}_{2001\text{ termeni}})\cdot 2001^{2001}=$

$$=\underbrace{2001^{2001}+2001^{2001}+...+2001^{2001}}_{2001\text{ termeni}}=$$

$$=(2001^{2001}-1000)+(2001^{2001}-999)+...+(2001^{2001}-1)+2001^{2001}+$$
$$+(2001^{2001}+1)+(2001^{2001}+1)+...+(2001^{2001}+1000).$$

R1.4.2.4. Aflaţi numărul natural *n*, ştiind că:

$$4+5^0+4\cdot 5+4\cdot 5^2+4\cdot 5^3+...+4\cdot 5^{5n-1}+2\cdot 5^{4n}=4375$$

Soluţie. Aplicăm formula învăţată

$$1+a+a^2+a^3+...+a^n=(a^{n+1}-1):(a-1)$$

şi egalitatea devine $4+1+4\cdot 5(1+5+5^2+...+5^{5n-2})+2\cdot 5^{4n}=4375$, sau $5+4\cdot 5[(5^{5n-1}-1):4]+2\cdot 5^{4n}=4375$; avem mai departe $5+5(5^{5n-1}-1)+2\cdot 5^{4n}=4375$ şi efectuând calculele $5^{5n}+2\cdot 5^{4n}=5^5+2\cdot 5^4$ (se scrie numărul 4375 în baza 5), de unde $n=1$.

R1.4.2.5. Determinaţi *n* natural, astfel încât:

$$(1+2^2+2^4+...+2^{1980})\cdot n=2+2^2+2^3+...+2^{1982}$$

Soluţie. Pentru a calcula suma $S=1+2^2+2^4+...+2^{1980}$ procedăm în felul următor: înmulţim egalitatea cu 2^2 şi avem $2^2\cdot S=2^2+2^4+2^6+...+2^{1980}+2^{1982}$; scădem $2^2\cdot S-S$ şi vom obţine $2^2\cdot S-S=2^{1982}-1$ sau $3S=2^{1982}-1$, $S=(2^{1982}-1):3$. Egalitatea devine: $[(2^{1982}-1):3]\cdot n=2(1+2+2^2+...+2^{1981})$; avem mai departe $[(2^{1982}-1):3]\cdot n=2(2^{1982}-1)$. Această egalitate se înmulţeşte cu 3 şi rezultă

$(2^{1982}-1)\cdot n = 6(2^{1982}-1)$, adică $n=6$.

R1.4.2.6. Calculați suma $S = 24\cdot 5^{2002} + 8\cdot 3^{2001} + 24\cdot 5^{2000} +$
$+ 8\cdot 3^{1999} + ... + 24\cdot 5^4 + 8\cdot 3^3 + 24\cdot 5^2 + 8\cdot 3$

Soluție. Deoarece bazele puterilor care apar sunt 3 şi 5 se scrie $24 = 25-1$ şi $8 = 9-1$. Avem
$S = (25-1)\cdot 5^{2002} + (9-1)\cdot 3^{2001} + (25-1)\cdot 5^{2000} + (9-1)\cdot 3^{1999} + ... +$
$+ (25-1)\cdot 5^4 + (9-1)\cdot 3^3 + (25-1)\cdot 5^2 + (9-1)\cdot 3$. Efectuăm calculele:
$S = 5^{2004} - 5^{2002} + 3^{2003} - 3^{2001} + 5^{2002} - 5^{2000} + 3^{2001} - 3^{1999} + ... +$
$+ 5^6 - 5^4 + 3^5 - 3^3 + 5^4 - 5^2 + 3^3 - 3$, deci $S = 5^{2004} + 3^{2003} - 5^2 - 3$.

1.5. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte

Numărul natural *n* este pătrat perfect dacă există un număr natural *a* astfel încât $n = a^2$.

Remarcă. Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. De aici, deducem că un număr care are ultima cifră 2, 3, 7 sau 8 nu este pătrat perfect.

Este util să reţinem următoarele:

1) Dacă numărul *n* este pătrat perfect şi dacă *p* este un număr prim care divide pe *n*, atunci p^2 divide pe *n*.

2) Între două pătrate perfecte a două numere consecutive nu se află un alt pătrat perfect.

Numărul natural *n* este cub perfect dacă există un număr natural *a* astfel încât $n = a^3$.

Model 1. Să se arate că numărul

$$A = 2(1+2+3+...+2000+2001)+2002$$

este pătrat perfect.

Soluție. Pentru a arăta că *A* este pătrat perfect, pe baza definiției, trebuie scris $A = b^2$, *b* natural.

Aplicăm 1+2+3+...+2000+2001=2001·2002:2 şi avem
A=2·(2001·2002:2)+2002 sau *A*=2001·2002+2002, se dă factor comun
A=2002(2001+1), deci $A=2002^2$, pătrat perfect.

Model 2. Să se arate că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:

$$A = 67^{38} + 92^{43},\ B = 5^{34} + 5^{17},\ C = 2^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+1}\cdot 3^n,\ n \in \mathbf{N}.$$

Soluție. Pentru a arăta că *A* nu este pătrat perfect, determinăm ultima cifră a lui *A*. Ştim că $u(67^{38}) = u(7^{4\cdot 9+2}) = 9$ şi
$u(92^{43}) = u(2^{43}) = u(2^{4\cdot 10+3}) = 8$; rezultă că $u(A) = u(9+8) = 7$. Un număr care are ultima cifră 7 nu poate fi pătrat perfect.

Această metodă, de determinare a ultimei cifre, nu se poate aplica pentru a arăta că *B* nu este pătrat perfect, pentru că $u(B) = 0$. Avem $B = 5^{17}(5^{17}+1)$.

Observăm că $5^{17} \cdot 5^{17} < 5^{17} \cdot (5^{17} + 1) < (5^{17} + 1)(5^{17} + 1)$ (deoarece $5^{17} < 5^{17} + 1$), deci $(5^{17})^2 < B < (5^{17} + 1)^2$; $(5^{17})^2$ şi $(5^{17} + 1)^2$ sunt pătrate perfecte a două numere consecutive, deci *B* nu este pătrat perfect.

Pentru a arăta că *C* nu este pătrat perfect procedăm astfel: $C = 2^n \cdot 3^n \cdot (3 + 2)$ sau $C = 2^n \cdot 3^n \cdot 5$; *C* se divide cu 5, dar nu se divide cu 5^2, deci *C* nu este pătrat perfect.

Probleme rezolvate

R1.5.1. Arătaţi că suma primelor *n* numere naturale impare:

$$S = 1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1,\ n \in \mathbf{N}^*$$

este pătrat perfect.

Soluţie. Se calculează *S* suma primelor *n* numere impare, făcând grupuri de câte 2 termeni şi avem $S = (2n - 1 + 1) \cdot n : 2$ sau $S = 2n \cdot n : 2$, deci $S = n^2$ este pătrat perfect.

R1.5.2. Arătaţi că suma primelor *n* numere naturale pare

$S = 2 + 4 + 6 + ... + 2n,\ n \in \mathbf{N}^*$

nu este pătrat perfect.

Soluţie. Calculăm $S = 2(1 + 2 + 3 + ... + n)$ sau $S = 2[n(n+1) : 2]$, deci $S = n(n+1)$. Se observă că $n \cdot n < n(n+1) < (n+1)(n+1)$, adică *S* este cuprinsă între două pătrate perfecte a două numere naturale consecutive, deci *S* nu este pătrat perfect.

R1.5.3. Determinaţi toate numerele naturale de 3 cifre scrise în baza 10, care adunate cu răsturnatele lor dau pătrate perfecte.

Soluţie. Dacă un număr de trei cifre este $\overline{abc}$, atunci răsturnatul lui este $\overline{cba}$ (*a*, *b*, *c* cifre). Deoarece $\overline{abc} + \overline{cba} = k^2$, rezultă succesiv $100a + 10b + c + 100c + 10b + a = k^2$, $101a + 20b + 101c = k^2$, $101(a + c) + 20b = k^2$. Ţinând cont că ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, rezultă:

$a + c = 1, b = 1$ sau $a = 1, c = 0, b = 1$, adică $\overline{abc} = 110$

$a + c = 4, b = 4$ sau $a = 1, c = 3, b = 4$, adică $\overline{abc} = 143$

$(k^2 = 484)$ $a = 2, c = 2, b = 4$, adică $\overline{abc} = 242$

$a = 3, c = 1, b = 4$, adică $\overline{abc} = 341$

$a + c = 5, b = 6$ sau $a = 1, c = 4, b = 6$, $\overline{abc} = 164$

$(k^2 = 625)$ $a = 2, c = 3, b = 6$, $\overline{abc} = 263$

$a = 3, c = 2, b = 6$, $\overline{abc} = 362$

$a = 4, c = 1, b = 6$, $\overline{abc} = 461$

$a+c=6$ nu conduce la soluție pentru că 626, 646, 666, 686, 706, 726, 746, 766 şi 786 nu sunt pătrate perfecte.

$$\begin{array}{ll} a+c=9, b=9 \text{ sau} & a=1, c=8, b=9 \Rightarrow \overline{abc}=198 \\ (k^2=1089) & a=2, c=7, b=9 \Rightarrow \overline{abc}=297 \\ & a=3, c=6, b=9 \Rightarrow \overline{abc}=396 \\ & a=4, c=5, b=9 \Rightarrow \overline{abc}=495 \\ & a=5, c=4, b=9 \Rightarrow \overline{abc}=594 \\ & a=6, c=3, b=9 \Rightarrow \overline{abc}=693 \\ & a=7, c=2, b=9 \Rightarrow \overline{abc}=792 \\ & a=8, c=1, b=9 \Rightarrow \overline{abc}=891 \end{array}$$

R1.5.4. Să se afle numărul $\overline{ab}$, ştiind că $\overline{ab}+\overline{ba}$ este pătrat perfect şi $\overline{ab}-\overline{ba}$ este cub perfect.

Soluție. Scriem $\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=11(a+b)$ şi $\overline{ab}-\overline{ba}=(10a+b)-(10b+a)=10a+b-10b-a=9(a-b)$.

$\overline{ab}+\overline{ba}$ este pătrat perfect, deci $a+b=11$ şi $\overline{ab}-\overline{ba}$ este cub perfect, deci $a-b=3$. Rezultă $a=7$ şi $b=4$, deci $\overline{ab}=74$.

R1.5.5. Să se arate că $A=x^4+2(5y+2)$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi numerele naturale *x* şi *y*.

Soluție. Fie $A=x^4+10y+2$. Se ştie că *x* fiind un număr natural, ultima cifră a lui x^4 poate fi numai 0, 1, 5 sau 6. Deci $u(x^4)\in\{0,1,5,6\}$, $u(10y)=0$, deci $u(A)\in\{2,3,7,8\}$, rezultă că *A* nu poate fi pătrat perfect.

1.6. Sisteme de numerație

Sistemul de numerație cu baza 10 (sistemul zecimal)

Sistemul de numerație folosit cu precădere în practică este sistemul zecimal, adică sistemul cu baza 10. Baza unui sistem de numerație este numărul care arată câte unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior. Sistemul zecimal este pozițional. Acest sistem utilizează pentru scrierea numerelor zece semne (cifre arabe): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de unde vine şi denumirea sistemului.

Un număr natural *N* se scrie în sistemul zecimal în mod unic sub forma: $N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0$ sau sub forma prescurtată $N=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$, unde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ sunt cifre, $0\le a_i\le 9$, pentru orice $i\in\{0,1,\ldots,n\}$, $n\in\mathbf{N}$, $a_n\ne 0$. Când cifrele unui număr sunt notate prin litere, atunci pentru a distinge acest număr de produsul acelor litere, îl vom supralinia. De exemplu, $\overline{abcd}$ înseamnă $a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+d$, $a,b,c,d\in\{0,1,...,9\}$, $a\neq 0$.

Sisteme de numeraţie cu altă bază

Ca bază a unui sistem de numeraţie se poate alege orice număr natural mai mare decât 1.

S-au folosit şi se folosesc şi alte sisteme de numeraţie: caldeenii au folosit un sistem cu baza 60; de la acest sistem a rămas tradiţia împărţirii orei în 60 de minute şi a minutului în 60 de secunde. La popoare din America de Nord, America Centrală şi de Sud, Africa, au fost găsite sisteme de numeraţie cu bazele 5 şi 20.

Astfel, dacă alegem ca bază a unui sistem de numeraţie numărul $b\in\mathbf{N}, b\geq 2$, atunci exprimarea unui număr natural *N* în această bază se face, scriindu-l în mod unic, în felul următor:

(*) $$N=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+...+a_1b+a_0,$$

sau sub formă prescurtată $N=\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0}_{(b)}$, unde $a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0$ sunt cifrele numărului, astfel ca $0\leq a_i\leq b-1$, pentru orice $i\in\{0,1,...,n\}$, $n\in\mathbf{N}$, $a_n\neq 0$, iar indicele din paranteză, dreapta jos, reprezintă baza sistemului de numeraţie. În general, pentru scrierea numerelor în sistemul zecimal nu se specifică baza.

Numerele 1,2,...,*b*-1 se numesc şi cifre semnificative.

Orice număr natural scris sub forma (*) spunem că este scris sub formă sistematică (sau formă polinomială).

Exemplu. Numărul $2345_{(6)}$ se scrie sub formă sistematică în baza 6 astfel: $2345_{(6)}=2\cdot 6^3+3\cdot 6^2+4\cdot 6+5$.

Remarcă. Dacă baza unui sistem de numeraţie este mai mare decât 10, atunci se pot introduce simboluri noi pentru cifrele corespunzătoare numerelor 10, 11,..., *b*-1 sau acestea se pot scrie cu paranteze şi considerate ca cifre.

Exemplu. Dacă sistemul de numeraţie are baza 16 (sistem folosit în tehnica de calcul), semnele (cifrele) folosite pentru scrierea unui număr natural în această bază sunt: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*A,B,C,D,E,F*, unde *A*=10, *B*=11, *C*=12, *D*=13, *E*=14, *F*=15.

Scrierea unui număr natural *N* în baza *b*, sub forma $N=\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0}_{(b)}$ mai poartă denumirea de scriere poziţională, deoarece fiecare cifră ocupă o anumită poziţie (un anumit ordin) în reprezentarea numărului. Astfel, cifra a_0 indică unităţi de ordinul întâi, a_1 indică unităţi de ordinul doi ş.a.m.d., cifra a_n indică unităţi de ordinul $n+1$.

Observaţie. În sistemul de numeraţie cu baza *b*, o unitate de un ordin oarecare este formată din *b* unităţi de ordin inferior.

Exemplu. $678_{(9)}$ se citeşte şase şapte opt în baza 9 şi nu şase sute şaptezeci şi opt unităţi în baza 9.

Pentru unele sisteme de numerație se folosesc denumiri: sistem binar (baza 2), sistem ternar (baza 3), sistem octal (baza 8), sistem zecimal (baza 10), sistem hexazecimal (baza 16), sistem sexagesimal (baza 60) etc.

Dintre toate aceste sisteme de numerație, o importanță deosebită în tehnică o are sistemul binar, folosit la calculatoarele electronice.

Trecerea unui număr dintr-un sistem de numerație în alt sistem de numerație

Pentru a trece numărul $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}_{(b)}$ în baza 10, efectuăm calculele din relația (*).

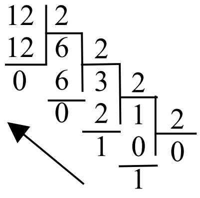
Exemple. $1765_{(8)} = 1 \cdot 8^4 + 7 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 5 = 1013_{(10)} = 1013$

$1111001_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 121$

Pentru a trece numărul *N* din baza 10 în baza *b* se aplică următorul algoritm: se împarte *N* la *b*, iar câtul obținut se împarte la *b* ş.a.m.d. până când se obține câtul 0. Resturile scrise în ordine inversă decât efectuarea operațiilor, reprezintă cifrele numărului căutat în baza *b*.

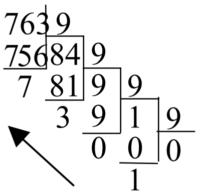
Această succesiune de împărțiri poartă numele de algoritmul sistemelor de numerație.

Exemple. 1) Trecem numărul 12 din baza 10 în baza 2.
$12=2 \cdot 6+0$, $6=2 \cdot 3+0$, $3=2 \cdot 1+1$, $1=2 \cdot 0+1$. Deci $12=1100_{(2)}$.
Calculele anterioare se pot aranja şi astfel:



sensul citirii

2) Trecem numărul 763 din baza 10 în baza 9.
$763=9 \cdot 84+7$, $84=9 \cdot 9+3$, $9=9 \cdot 1+0$, $1=9 \cdot 0+1$. Deci $763=1037_{(9)}$



Pentru a trece un număr *N* din baza *b* în baza *c*, trecem numărul din baza *b* în baza 10, iar numărul astfel obținut îl trecem în baza *c* folosind algoritmul sistemelor de numerație.

Exemple. 1) Trecem numărul $124_{(5)}$ în baza 7.

Trecând $124_{(5)}$ în baza 10 obținem $124_{(5)} = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 4 = 39$.

Îl trecem pe 39 din baza 10 în baza 7:

39=7·5+4, 5=7·0+5. Deci $124_{(5)}=54_{(7)}$.

2) Trecem numărul $214_{(6)}$ în baza 8.

Trecând mai întâi în baza 10, obţinem $214_{(6)}=2\cdot6^2+1\cdot6+4=82$. Îl trecem pe 82 din baza 10 în baza 8.

82=8·10+2, 10=8·1+2, 1=8·0+1. Deci $214_{(6)}=122_{(8)}$.

Remarcă. Pentru rezolvarea problemei de trecere dintr-o bază *b* în alta *b*' putem proceda şi astfel: scriem numărul sub forma sistematică în baza *b* şi trecerea tuturor cifrelor numărului inclusiv a bazei în noul sistem de numeraţie cu baza *b*', după care se efectuează calculele cerute în baza *b*'.

Exemplu. Trecem numărul $246_{(8)}$ în baza 5.

$$246_{(8)}=2\cdot8^2+4\cdot8+6=2_{(5)}\cdot13_{(5)}^2+4_{(5)}\cdot13_{(5)}+11_{(5)}=$$
$$=2_{(5)}\cdot224_{(5)}+112_{(5)}+11_{(5)}=1003_{(5)}+123_{(5)}=1131_{(5)}$$

Operaţii cu numere scrise în diverse baze

Regulile de calcul pentru operaţiile cunoscute se aplică şi numerelor scrise într-o altă bază *b*, dar trebuie alcătuite în prealabil table de adunare şi de înmulţire a numerelor în sistemul de numeraţie respecţi

De exemplu, tablele de adunare şi de înmulţire în sistemul binar (cu baza 2) şi în sistemul ternar (cu baza 3) sunt următoarele:

+	0	1
0	0	1
1	0	10

•	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Probleme rezolvate

R1.6.1. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei:

$$1212_{(3)}+1313_{(4)}+1414_{(5)}+1515_{(6)}+1616_{(7)}=2000003_{(3)}$$

Soluţie. Trecem toate numerele în baza 10:

$1212_{(3)}=1\cdot3^3+2\cdot3^2+1\cdot3+2=50$, $1313_{(4)}=1\cdot4^3+3\cdot4^2+1\cdot4+3=119$,

$1414_{(5)}=1\cdot5^3+4\cdot5^2+1\cdot5+4=234$, $1515_{(6)}=1\cdot6^3+5\cdot6^2+1\cdot6+5=407$,

$1616_{(7)}=1\cdot7^3+6\cdot7^2+1\cdot7+6=650$ şi $2000003_{(3)}=2\cdot3^6+2=1460$.

Membrul stâng devine 50+119+234+407+650=1460.

Propoziţia este adevărată.

R1.6.2. Scrieţi numărul 2003 ca sumă de puteri ale lui 2 cu exponenţi diferiţi.

Soluţie. Trecem 2003 din baza 10 în baza 2.

2003=2·1001+1, 1001=2·500+1, 500=2·250+0, 250=2·125+0

125=2·62+1, 62=2·31+0, 31=2·15+1, 15=2·7+1, 7=2·3+1, 3=2·1+1, 1=2·0+1. Deci 2003=11111010011$_{(2)}$ şi se poate scrie 2003=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4+2+2^0.

R1.6.3. Aflaţi *x, y, z* numere naturale care verifică egalitatea:

$$2^{3x+2}+2^{2y+1}+2^z=416.$$

Soluţie. Trecem 416 din baza 10 în baza 2. Se obţine: 416=110100000$_{(2)}$. Egalitatea devine: $2^{3x+2}+2^{2y+1}+2^z=2^8+2^7+2^5$. Sunt posibile următoarele cazuri:

$$3x+2=8, 2y+1=7, z=5 \Rightarrow x=2, y=3, z=5$$

$$3x+2=8, 2y+1=5, z=7 \Rightarrow x=2, y=2, z=7$$

$$3x+2=5, 2y+1=7, z=8 \Rightarrow x=1, y=3, z=8$$

R1.6.4. Comparaţi numerele:

$$n_1=1981^{1980}+1981^{1983} \text{ şi } n_2=1981^{1981}+1981^{1982}$$

Soluţie. Aceste numere se pot compara foarte uşor dacă trecem numerele în baza 1981; ţinând cont că 1981=10$_{(1981)}$ obţinem

$$n_1=1\underbrace{00...0}_{1980}{}_{(1981)}+1\underbrace{00...0}_{1983}{}_{(1981)}=1001\underbrace{00...0}_{1980}{}_{(1981)}$$

$$n_2=1\underbrace{00...0}_{1981}{}_{(1981)}+1\underbrace{00...0}_{1982}{}_{(1981)}=11\underbrace{00...0}_{1981}{}_{(1981)}.$$

Numărul n_1 are 1984 cifre în baza 1981, iar numărul n_2 are 1983 cifre în baza 1981, deci $n_1>n_2$.

Remarcă. Este foarte util de reţinut această metodă de comparare a sumei de puteri cu aceeaşi bază, trecând numerele într-o bază egală cu baza puterii.

R1.6.5. a) Se dă numărul $E_1=2^7-2^6-2$. Să se scrie acest număr ca o sumă de puteri naturale consecutive ale lui 2.

b) Se cere acelaşi lucru pentru $E_2=2^n-2^{n-1}-2$, unde $n\in\mathbf{N}$ şi $n\geq 3$.

Soluţie. a) Folosind scrierea binară şi efectuând calculele se obţine:

$$E_1=10000000_{(2)}-1000000_{(2)}-10_{(2)}=1000000_{(2)}-10_{(2)}=111110_{(2)}=$$

$$=2^5+2^4+2^3+2^2+2 \text{ (s-a ţinut cont că } 10_{(2)}-1_{(2)}=1_{(2)}).$$

b) Procedând la fel pentru E_2 obţinem:

$$E_2=1\underbrace{00...0}_{n}{}_{(2)}-1\underbrace{00...0}_{n-1}{}_{(2)}-10_{(2)}=1\underbrace{00...0}_{n-1}{}_{(2)}-10_{(2)}=\underbrace{11...1}_{n-2}0_{(2)}=$$

$$=2^{n-2}+2^{n-3}+...+2^2+2.$$

R1.6.6. Într-un sistem de numeraţie de bază *x*, avem egalitatea

$$107_{(x)}+45_{(x)}=154_{(x)}$$

Să se afle baza sistemului şi să se verifice.

Soluţie. Scriem numerele sub formă sistematică în baza *x* şi punem condiţia ca *x* să fie natural şi mai mare ca cea mai mare dintre cifrele numerelor:

$1\cdot x^2+0\cdot x+7+4\cdot x+5=1\cdot x^2+5\cdot x+4$, $x\in\mathbf{N}$, $x>7$. Se obţine $x^2+4x+12=x^2+5x+4$ sau $4x+12=5x+4$, ce conduce la $x=8$.

Verificare: $107_{(8)} + 45_{(8)} = 1 \cdot 8^2 + 7 + 4 \cdot 8 + 5 = 108$, iar $154_{(8)} = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 4 = 108$.

R1.6.7. În ce bază are loc inegalitatea 11+22+33>223?

Soluție. Fie x baza sistemului de numerație căutată. Se impune condiția x număr natural, $x > 3$:

$$11_{(x)} + 22_{(x)} + 33_{(x)} > 123_{(x)},\ x \in \mathbf{N},\ x > 3.$$

Scriem numerele sub formă sistematică și avem:
$x + 1 + 2x + 2 + 3x + 3 > 1 \cdot x^2 + 2x + 3$ sau $4x + 3 > x^2$.

Inegalitatea este verificată pentru $x = 4$, iar pentru $x > 5$ avem $x^2 > 4x + 3$. Soluția este 4.

R1.6.8. Determinați *x* și *y*, dacă

$$11_{(x)} + 22_{(y)} = 21_{(8)} \text{ și } 33_{(x)} + 44_{(y)} = 43_{(9)}.$$

Soluție. Condițiile ce se impun sunt *x, y* naturale, $x > 3, y > 4$. Scriem numerele sub formă sistematică și avem: $x + 1 + 2y + 2 = 2 \cdot 8 + 1$ și $3x + 3 + 4y + 4 = 4 \cdot 9 + 3$; efectuând calculele se obține $x + 2y = 14$ și $3x + 4y = 32$. Înmulțim prima egalitate cu 3 și apoi scădem cele două egalități membru cu membru. Se obține $2y = 10$, deci $y = 5$ și $x = 4$.

R1.6.9. Un comerciant vinde zahăr, pe care îl primește în saci de 80 kg. Pentru a putea cântări orice greutate între 1 și 80 kg (număr natural) se folosește de un cântar cu greutăți (nu balanță!).

a) Care este numărul minim de greutăți de care are nevoie?

b) Câte greutăți trebuie să aibă, dacă pe fiecare o are în două exemplare?

Soluție. a) Sunt necesare cel puțin 7 greutăți, care pot fi de câte: 1,2,4,8,16,32 și 64 kg (sau ultima orice număr *k*, $17 \leq k \leq 64$). Pentru a cântări orice greutate de la 1 la 63 kg sunt necesare minim 6 greutăți, ele fiind de 1,2,4,8,16 și 32 kg, deoarece orice număr între 1 și 63 se scrie în baza 2 cu cel mult 6 cifre:
$63=111111_{(2)}$.

A pune sau nu o anumită greutate pe cântar înseamnă a lua cifra 1 respectiv 0 în numărul de kilograme scris în baza 2 pe poziția corespunzătoare greutății respective.

Pentru a cântări greutăți mai mari este necesară cel puțin o greutate, care poate fi de 80-63=17 kg sau 2^6=64 kg și atunci putem cântări cantități până la 127 kg.

b) Sunt necesare cel puțin 8 greutăți, câte două de fiecare din: 1,3,9,27 kg. O anumită greutate într-o cântărire poate:

- lipsi de pe cântar (0)
- apar un exemplar pe cântar (1)
- apar două exemplare pe cântar (2),

ce ne conduce la a raționa cu numere în baza 3.

Avem $80=2(1+3+9+27)=2222_{(3)}$ și pentru a scrie orice număr în baza 3 între 1 și 80 avem nevoie de 4 cifre (8 greutăți, căci fiecare e luată în dublu exemplar).

1.7. Criptaritm

Problemele ce apar în această temă se referă la determinarea cifrelor unui număr natural, scris în baza 10, folosind operațiile definite în mulțimea numerelor naturale. Cifrele necunoscute sunt reprezentate prin litere. Literele de acelaşi fel semnifică cifre egale, dar litere diferite nu semnifică neapărat cifre diferite.

Model. 1) Să se determine numerele naturale de 2 cifre $\overline{ab}$ cu proprietatea $\overline{ab}+\overline{ba}=154$.

Soluție. Scriem numerele în baza 10; avem $10a+b+10b+a=154$ sau $11(a+b)=154$ sau $a+b=14$. Această egalitate este verificată de: $a=5, b=9; a=6, b=8; a=7, b=7; a=8, b=6$ şi $a=9, b=5$.
Soluțiile problemei sunt: 59, 68, 77, 86, 95.

2) Să se reconstituie adunarea:

$$BALADA+LADA+ADA+DA+A=257605$$

Soluție. Literele *B, A, L, D* reprezintă cifre. Adunarea se poate scrie:

$$\begin{array}{cccccccc} B & A & L & A & D & A & + \\ & & L & A & D & A & \\ & & & A & D & A & \\ & & & & D & A & \\ & & & & & A & \\ \hline 2 & 5 & 7 & 6 & 0 & 5 & \end{array}$$

$A+A+A+A+A\in\{5,15,25,35,45\}$

$A=1\Rightarrow 4D\in\{0,10,20,30\}$, de unde avem $D=0$ conduce la $3A=6, A=2$ nu e posibil

$D=5\Rightarrow 3A+2=6$ imposibil

$A=3\Rightarrow 1+4D\in\{0,10,20,30\}$ imposibil pentru că $1+4D$ este impar

$A=5\Rightarrow 2+4D\in\{0,10,20,30\}$

$2+4D=10\Rightarrow D=2$

$A=5, D=2\Rightarrow 3\cdot5+1=16, 1+2L=7\Rightarrow L=3, B=2$

$1+2L\in\{17,27\}$ nu este posibil pentru că $A=5$.

$A=7\Rightarrow 3+4D\in\{0,10,20,30\}$ imposibil

$A=9\Rightarrow 4+4D\in\{0,10,20,30,40\}\Rightarrow D\in\{4,9\}$

$D=4\Rightarrow 4+4D=20\Rightarrow 2+3A=2+3\cdot9=29$ imposibil

$D=9\Rightarrow 4+4D=40\Rightarrow 4+3A=4+3\cdot9=31$ imposibil

Rezultă $B=2, A=5, L=3, D=2$.

Verificare: 253525+3525+525+25+5=257605

Probleme rezolvate

R1.7.1. Aflați numerele de 4 cifre $\overline{abcd}$, care verifică relația:

$$\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d=3102$$

Soluție. Se scrie sub formă sistematică în baza 10 şi se obține: $1000a+200b+30c+4d=3102$ sau $2(500a+100b+15c+2d)=3102$, de unde $500a+100b+15c+2d=1551$. Suma din membrul stâng este 1551, rezultă că a poate lua valorile 1, 2 sau 3. Analizăm pe rând toate situațiile ce pot apărea:

Dacă $a=1$ se obține $100b+15c+2d=1051$. Datorită faptului că $15c+2d\le 15\cdot 9+2\cdot 8$, adică $15c+2d\le 153$, rezultă că $100b\ge 1051-153$, $100b\ge 898$, deci b ia valoarea 9. Pentru $b=9$, se obține mai departe $15c+2d=151$. Ştim că $2d\le 18$, deci $15c\ge 151-18=123$, rezultă că $c=9$. Înlocuind pe c cu 9 se obține $2d=151-135$, $2d=16$, adică $d=8$. Rezultă $\overline{abcd}=1998$.

Dacă $a=2$, se obține $100b+15c+2d=551$. Judecând asemănător, $15c+2d\le 153$, deci $100b\ge 398$, deci b poate fi 4 sau 5.

Pentru $b=4$, avem $15c+2d=151$, ce conduce la $c=9$ şi $d=8$, în mod asemănător. Rezultă $\overline{abcd}=2498$.

Pentru $b=5$, avem $15c+2d=51$, dar $2d\le 18$, rezultă că $15c\ge 51-18$, $15c\ge 23$ şi $15c$ trebuie să fie impar (suma dintre $15c$ şi număr par $2d$ este un număr impar). Deducem că $c=3$. Înlocuim şi avem $45+2d=51$, deci $2d=6$, $d=3$. Rezultă $\overline{abcd}=2533$.

Pentru $c=5$ vom obține $15c>51$, nu conduce la soluție.

Problema are 3 soluții: 1988, 2498, 2533.

Verificare: 1998+998+98+8=3102
2498+498+98+8=3102
2533+533+33+3=3102

R1.7.2. Determinați cifra x, ştiind că numărul $\overline{x9}\cdot\overline{x1}+16$, scris în baza 10, este pătrat perfect.

Soluție. Numărul dat se poate scrie $\overline{x9}\cdot(10x+1)+16$. Efectuând înmulțirile avem

$$\overline{x9}\cdot 10x+\overline{x9}+16=(10x+9)\cdot 10x+10x+9+16=100x^2+90x+10x+25=$$
$$=100x^2+100x+25=25(4x^2+4x+1)=25(4x^2+2x+2x+1)=$$
$$=25[2x(2x+1)+(2x+1)]=25\cdot(2x+1)^2=[5(2x+1)]^2=(10x+5)^2=\overline{x5}^2.$$

Numărul dat este pătrat perfect oricare ar fi cifra x diferită de 0. Soluția problemei este $x\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

R1.7.3. Determinați numărul $\overline{xy}$, ştiind că $3\cdot\overline{xy}+\overline{yx}=114$.

Soluție. Se scriu numerele în baza 10; avem

$$3\cdot(10x+y)+10y+x=114 \text{ sau } 31x+13y=114.$$

Pentru că suma din membrul stâng are valoarea 114, rezultă că $31x\leq 114$, deci x poate fi 1, 2 sau 3.

Pentru $x=1$ se obține $13y=83$ imposibil.

Pentru $x=2$ se obține $13y=52$, adică $y=4$ şi $\overline{xy}=24$.

Pentru $x=3$ se obține $13y=21$ imposibil.

Soluția problemei: 24.

Verificare: $3\cdot 24+42=72+42=114$.

R1.7.4. Suma dintre numărul de 3 cifre $\overline{abc}$ şi răsturnatul său este 645. Care sunt numerele care îndeplinesc această condiție şi care este suma lor? $(a\neq 0, c\neq 0)$

Soluție. Numărul $\overline{abc}$ verifică egalitatea $\overline{abc}+\overline{cba}=645$ ($a\neq 0$, $c\neq 0$). Avem $100a+10b+c+100c+10b+a=645$ sau $101(a+c)+20b=645$. Se observă că $101(a+c)=645-20b$ sau $101(a+c)=5(129-4b)$, de unde rezultă că $101(a+c)$ se divide cu 5, deci $a+c$ se divide cu 5, $a+c\in\{5,10,15\}$ (fiind suma a două cifre). Dacă $a+c=5$, avem $20b=140$, deci $b=7$. Atunci $a=1$, $b=7$, $c=4$ sau $a=2$, $b=7$, $c=3$ sau $a=3$, $b=7$, $c=2$ sau $a=4$, $b=7$, $c=1$;

$\overline{abc}\in\{174,273,372,471\}$. Suma acestor numere este (174+471)+(273+372), adică 2·645=1290.

R1.7.5. Determinați numărul de 3 cifre $\overline{abc}$ şi numărul de 2 cifre $\overline{xy}$, pentru care $\overline{abc}+\overline{bc}+c=2^{\overline{xy}}+57$.

Soluție. Se ştie că $2^{10}=1024$, iar $2^{11}=2048$; suma $\overline{abc}+\overline{bc}+c$ ia cea mai mare valoare 999+99+9=1107, deci nu poate fi mai mare sau egală cu 2048. Avem $\overline{xy}=10$. Egalitatea devine $\overline{abc}+\overline{bc}+c=1081$ sau

$$\begin{array}{r} \overline{abc}\ + \\ \overline{bc} \\ c \\ \hline 1981 \end{array}$$

Adunăm unitățile $3c\in\{1,11,21\}$. Singura posibilitate este $c=7$. rezultă $2+2b\in\{8,18\}$, adică $b=3$ sau $b=8$. Dacă $b=3$, atunci a ar trebui să fie 10, ceea ce este imposibil, a fiind cifră. Deci, $b=8$ şi $a+1=10$, $a=9$. Numărul $\overline{abc}=987$.

Verificare: 987+87+7=1081.

R1.7.6. Determinați cifrele nenule *x, y, z* ştiind că

$$\overline{xx}\cdot\overline{yy}=\overline{xzzx}$$

Soluție. Numerele $\overline{xx}$ și $\overline{yy}$ se mai pot scrie $11x$, respectiv $11y$, iar $\overline{xzzx} = 1000x + 100z + 10z + x = 1001x + 110z$. Egalitatea din enunț devine $11x \cdot 11y = 1001x + 110z$. Avem $11^2 \cdot x \cdot y = 11 \cdot (91x + 10z)$ sau $11xy = 91x + 10z$. Vom avea mai departe $11xy - 91x = 10z$, deci $x(11y - 91) = 10z$. Pentru a fi posibilă diferența $11y - 91$, când y este cifră, rezultă $y = 9$. Prin înlocuire se ajunge la $x \cdot 8 = 10 \cdot z$, verificată numai de cifrele $x = 5$ și $z = 4$. Soluția este $x = 5, y = 9, z = 4$.

Verificare: 55·99=5445.

R1.7.7. Determinați numerele de două cifre $\overline{ab}$, cu proprietatea

$$\overline{ab}^2 = \overline{cde} \text{ și } \overline{ba}^2 = \overline{edc}.$$

Soluție. Numerele $\overline{cde}$ și $\overline{edc}$ sunt pătrate perfecte. Ultima cifră a unui pătrat perfect este 0,1,4,5,6,9, dar $c \neq 0$, $e \neq 0 \Rightarrow e, c \in \{1,4,5,6,9\}$.

Dacă $c = 1$, avem $\overline{ab}^2 = \overline{1de}$ și $\overline{ba}^2 = \overline{ed1}$, de unde a poate fi 1 sau 9.

Pentru $a = 9$, $\overline{9b}^2$ nu este de 3 cifre. Deci $a = 1$. Avem: $\overline{1b}^2 = \overline{1de}$ și $\overline{b1}^2 = \overline{ed1}$. Numerele ce verifică cele două egalități sunt $\overline{ab} \in \{11,12,13\}$.

Dacă $c = 4$, avem $\overline{ab}^2 = \overline{4de}$ și $\overline{ba}^2 = \overline{ed4}$, de unde a poate fi 2 sau 8, dar cum $\overline{8b}^2$ nu este de 2 cifre, rezultă că $a = 2$. Avem $\overline{2b}^2 = \overline{4de}$ și $\overline{b2}^2 = \overline{ed4}$. Numerele ce verifică cele două egalități sunt $\overline{ab} \in \{21,22\}$.

Dacă $c = 5$, avem $\overline{ab}^2 = \overline{5de}$ și $\overline{ba}^2 = \overline{ed5}$, de unde a ar putea fi 5, dar $\overline{5b}^2$ nu este de 3 cifre.

Dacă $c = 6$, avem $\overline{ab}^2 = \overline{6de}$ și $\overline{ba}^2 = \overline{ed6}$, care conduce la a ar fi 6, dar $\overline{6b}^2$ nu este de 3 cifre.

Dacă $c = 9$ avem $\overline{ab}^2 = \overline{9de}$ și $\overline{ba}^2 = \overline{ed9}$, de unde a poate fi 3 sau 7, dar cum $\overline{7b}^2$ nu este de 3 cifre, rezultă $a = 3$. Avem $\overline{3b}^2 = \overline{9de}$ și $\overline{b3}^2 = \overline{ed9}$. Numărul ce verifică relația este $\overline{ab} = 31$.

Problema are 6 soluții: $\overline{ab} \in \{11,12,13,21,22,31\}$.

1.8. Principiul lui Dirichlet (Principiul cutiei)

1.8.1. PRINCIPIUL LUI DIRICHLET (Principiul cutiei) este o metodă de rezolvare a unor probleme folosind un raționament de tipul următor:

Dacă în două "cutii" se găsesc trei obiecte (sau mai multe), atunci există o "cutie" care conține cel puțin două obiecte, sau

Fiind date n "căsuțe" și n+1 obiecte, atunci cel puțin o "căsuță" conține două obiecte.

1.8.2.Teoremă : Fie A o mulțime nevidă, iar A_1 , A_2 , … , A_n o partiție a lui A, adică : $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$ și $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru orice i $\in N^*$, j $\in N^*$ și i $\neq$ j.

Dacă avem n+1 elemente din A, notate a_0 , a_1 , … , a_n, atunci există cel puțin o submulțime A_k (k $\in N^*$) a partiției care să conțină cel puțin două elemente ale mulțimii $\{a_0 , a_1 , \dots , a_n\}$.

1.8.3. Probleme rezolvate

R1.8.3.1. Se consideră 7 numere naturale. Demonstrați că printre numerele naturale date cel puțin două dau același rest la împărțirea cu 6.

Soluție : La împărțirea cu 6 a unui număr natural se poate obține unul din resturile : 0, 1, 2, 3, 4 sau 5.

Considerăm "cutia 0" cea formată din toate numerele, din cele date, care dau restul 0 la împărțirea cu 6. Analog considerăm:

"Cutia 1" formată din toate numerele, din cele date, care dau restul 1 la împărțirea cu 6.

"Cutia 2" formată din toate numerele, din cele date, care dau restul 2 la împărțirea cu 6.

"Cutia 3" formată din toate numerele, din cele date, care dau restul 1 la împărțirea cu 6.

"Cutia 4" formată din toate numerele, din cele date, care dau restul 1 la împărțirea cu 6.

"Cutia 5" formată din toate numerele, din cele date, care dau restul 1 la împărțirea cu 6.

Avem astfel 6 cutii în care trebuie plasate 7 numere. Va exista cel puțin o cutie care conține două sau mai multe numere care dau același rest la împărțirea cu 6.

Generalizare : Fie n+1 numere. Să se arate că există cel puțin două numere, din cele date care dau același rest prin împărțirea la n.

R1.8.3.2. Într-o pădure de conifere cresc 800000 de brazi. Fiecare brad are cel mult 500 000 de ace. Să se demonstreze, că există cel puțin doi brazi cu același număr de ace.

Soluție: Presupunem contrariul, adică presupunem că nu există doi brazi din această pădure cu un număr egal de ace. Atunci cel mult un brad (un brad sau nici unul) va avea un ac. La fel, cel mult un brad va avea două ace, ş.a.m.d. , cel mult un brad va avea 499 999 ace, cel mult un brad va avea 500 000 ace. Deci, cel mult 500 000 au un număr de ace între 1 şi 500 000. Cum în total sunt 800 000 brazi, şi deoarece fiecare brad are cel mult 500 000 ace, rezultă că vor fi cel puţin doi brazi cu acelaşi număr de ace.

Observaţie: Se observă cu uşurinţă, că soluţia nu ţine esenţial de numerele concrete 800 000 (numărul de copaci) şi 500 000 (numărul maximal de ace).

Rezolvăm problema utilizând principiul lui Dirichlet. Avem 500 000 cutii numerotate respectiv 1,2,3,...,500 000. Plasăm (virtual) în aceste cutii 800 000 brazi în modul următor: în cutia cu indicele *s* se repartizează brazii cu *s* ace. Deoarece brazii, adică "obiecte", sunt mai multe decât cutii, rezultă că cel puţin o cutie va conţine cel puţin două obiecte, adică cel puţin doi brazi. Deoarece în una şi aceeaşi cutie sunt brazi cu număr egal de ace, deducem că există cel puţin doi brazi cu acelaşi număr de ace.

R1.8.3.3. Să se demonstreze, că printre orice şase numere întregi există două numere a căror diferenţă este divizibilă prin 5.

Soluţie : Considerăm 5 cutii etichetate cu numerele 0,1,2,3,4, care reprezintă resturile împărţirii la 5. Repartizăm în aceste cutii şase numere întregi arbitrare, în dependenţă de restul împărţirii la 5, adică în aceeaşi cutie se plasează numerele cu acelaşi rest de împărţire la 5. Cum numere ("obiecte") sunt mai multe decât cutii, conform principiului lui Dirichlet, există o cutie ce conţine mai mult decât un obiect. Deci, există (cel puţin) două numere plasate în aceeaşi cutie. Prin urmare, există două numere cu acelaşi rest la împărţirea prin 5. Atunci, diferenţa lor este divizibilă prin 5.

R1.8.3.4. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 1$, există un număr natural format din cifrele 0 şi 5, divizibil prin *n*.

Soluţie : Fie numerele naturale

$$a_1 = 50,\ a_2 = 5050, \ldots,\ a_n = \underbrace{5050\ldots50}_{de\ n\ ori}$$

şi repartizăm aceste "obiecte" în "cutii" numerotate cu numerele 0,1,...,*n*-1 (care reprezintă resturile împărţirii la *n*). În cutia *s* plasăm numărul a_k, care dă restul împărţirii la *k* numărul *s*.

Dacă în cutia cu indicele 0 este un "obiect" (adică un număr), atunci problema este rezolvată. În caz contrar *n* "obiecte" sunt plasate în *n*-1 "cutii". În baza principiului lui Dirichlet există două "obiecte" (numere) plasate în aceeaşi cutie. Deci, există două numere care dau acelaşi rest la împărţirea prin *n*. Diferenţa lor va fi divizibilă prin *n* şi se observă că diferenţa numerelor formate din cifrele 0 şi 5 la fel va fi un număr format din cifrele 0 şi 5.

R1.8.3.5. Într-o sală sunt *n* persoane ($n \geq 2$). Să se demonstreze că printre ei se vor găsi doi oameni cu acelaşi număr de cunoscuţi (se presupune că dacă persoana *A* este cunoscut al lui *B*, atunci şi *B* este cunoscut al lui *A*; nimeni nu este considerat ca fiind cunoscut al lui însuşi).

Soluţie : Desemnăm prin *m* numărul persoanelor ce au cel puţin o cunoştinţă în sală (acestea vor fi "obiectele"). Fiecare dintre aceste *m* persoane poate avea 1,2,...,*m*-1 cunoscuţi ("cutiile" vor fi numărul de cunoştinţe).

Conform principiului lui Dirichlet există două persoane cu acelaşi număr de cunoscuţi.

La rezolvarea unor probleme este util de aplicat principiul lui Dirichlet generalizat.

Dacă plasăm pn+1 obiecte în n cutii, atunci cel puţin o cutie va conţine cel puţin "p+1" obiecte.

R1.8.3.6. Într-o clasă sunt 40 de elevi. Există oare o lună a anului, în care cel puţin 4 elevi îşi sărbătoresc ziua de naştere ?

Soluţie : "Cutiile" sunt lunile anului iar "obiectele" sunt elevii. Repartizăm "obiectele" în "cutii" în dependenţă de luna de naştere. Aşa cum luni, deci cutii, sunt 12, iar elevi, adică obiecte 40 = 12·3+4, conform principiului lui Dirichlet există o cutie (o lună) cu cel puţin 3+1=4 obiecte.

2. Mulţimi

2.1. Operaţii cu mulţimi

Considerăm cunoscute definiţiile reuniunii, intersecţiei şi diferenţei a două mulţimi:

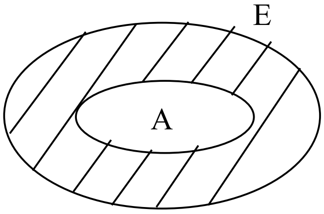
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$$

Complementara unei mulţimi. Fie $A \subseteq E$. Se numeşte complementara mulţimii *A* în raport cu *E*, mulţimea notată $C_E A$, unde

$$C_E A = E \setminus A = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin E\}.$$



Proprietăţi.

1) $A \cap C_E A = \varnothing$;

2) $A \cup C_E A = E$;

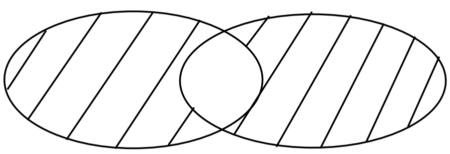
3) $C_E(C_E A) = A$

4) $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$;

5) $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

Diferenţa simetrică. Se numeşte diferenţa simetrică a două mulţimi *A* şi *B*, mulţimea elementelor lor necomune. Notăm

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Proprietăţi

1) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

2) $A \Delta A = \varnothing$.

Produsul cartezian. Se numeşte produsul cartezian a două mulţimi *A* şi *B*, mulţimea de perechi (a,b), $a \in A$ şi $b \in B$.

Notăm $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$.

Model. Fie $A = \{x \mid x = 2n, n < 5\}$ şi $B = \{y \mid y = 6k, k < 3\}$.

Să se determine $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B, A \times B$.

Soluție. Avem $A = \{0,2,4,6,8\}$ şi $B = \{0,6,12\}$. Folosind definițiile operațiilor, se obține $A \cup B = \{0,2,4,6,8,12\}$, $A \cap B = \{0,6\}$, $A \setminus B = \{2,4,8\}$, $B \setminus A = \{12\}$, $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{2,4,8,12\}$ sau
$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{2,4,8,12\}$ şi
$A \times B = \{(0,0),(0,6),(0,12),(2,0),(2,6),(2,12),(4,0),(4,6),(4,12),(6,0),(6,6),$
$(6,12),(8,0),(8,6),(8,12)\}$.

Operațiile cu mulțimi au următoarele proprietăți:

- Intersecția, reuniunea, diferența simetrică a mulțimilor este comutativă

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A, \quad A\Delta B = B\Delta A$$

- Diferența şi produsul cartezian nu sunt comutative:

$$A \setminus B \neq B \setminus A \text{ şi } A \times B \neq B \times A$$

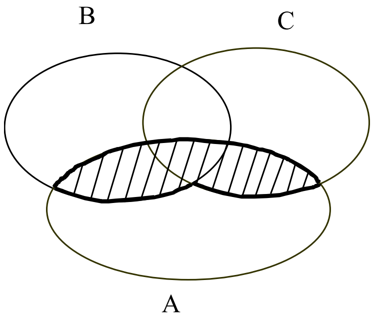
- Intersecția, reuniunea şi diferența simetrică sunt asociative:

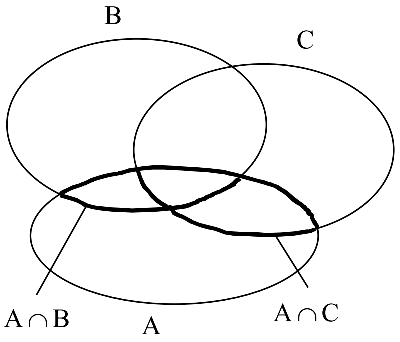
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

- Intersecția este distributivă față de reuniune:

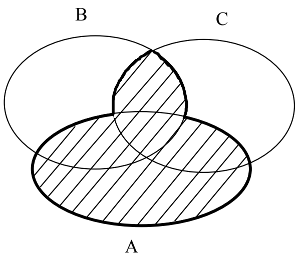
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

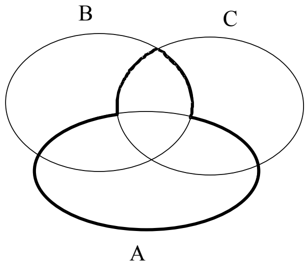




- Reuniunea este distributivă față de intersecție:

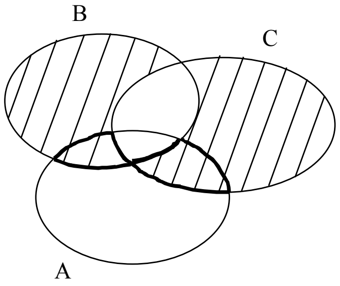
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

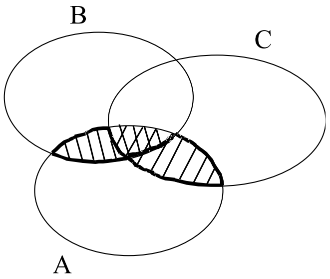




- Intersecția este distributivă față de diferența simetrică

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$





Cardinalul unei mulțimi finite reprezintă numărul elementelor din acea mulțime. Fie dată o mulțime *A*, notăm cardinalul său prin $cardA$.

Proprietăți

1) $card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$

2) $card(A \cup B \cup C) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B) -$
$- card(B \cap C) - card(A \cap C) + card(A \cap B \cap C)$

3) $card(A \setminus B) = cardA - card(A \cap B)$

4) $card(A \times B) = cardA \cdot cardB$

Numărul submulțimilor unei mulțimi cu *n* elemente este 2^n.

Probleme rezolvate

R2.1.1. Fie $E = \{0,1\}$. Determinați toate submulțimile acestei mulțimi și apoi arătați că reuniunea, intersecția și diferența simetrică a oricăror două submulțimi ale lui *E* este tot o submulțime a lui *E*.

Soluție. $cardE = 2$, deci *E* are 2^2=4 submulțimi: $\varnothing$, $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, *E*.

În tabelele următoare este reprezentată reuniunea, intersecția și diferența simetrică a oricăror două submulțimi.

$\cup$	$\varnothing$	A	B	E
$\varnothing$	$\varnothing$	A	B	E
A	A	A	E	E
B	B	E	B	E
E	E	E	E	E

$\cap$	$\varnothing$	A	B	E
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
A	$\varnothing$	A	$\varnothing$	A
B	$\varnothing$	$\varnothing$	B	B
E	$\varnothing$	A	B	E

Δ	$\varnothing$	A	B	E
$\varnothing$	$\varnothing$	A	B	E
A	A	$\varnothing$	E	B
B	B	E	$\varnothing$	A
E	E	B	A	$\varnothing$

Remarcă. Mulțimea submulțimilor unei mulțimi *E* se mai numește și mulțimea părților mulțimii *E* și se notează cu $P(E)$. Dacă *E* are *n* elemente, atunci $P(E)$ are 2^n elemente $(n \in \mathbf{N})$.

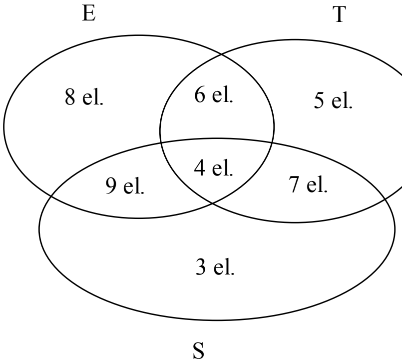
R2.1.2. Dacă $card(A \cup B) = 20$, $cardA = 16$, $cardB = 17$, să se determine $card(A \cap B)$, $card(A \setminus B)$, $card(B \setminus A)$, $card(A \Delta B)$.

Soluție. Avem $card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$, deci $card(A \cap B) = 16 + 17 - 20 = 13$. Din $card(A \setminus B) = cardA - card(A \cap B)$ și

$card(B \setminus A) = cardB \setminus (cardA \cap B)$, se obține $card(A \setminus B) = 3$ și $card(B \setminus A) = 4$. Atunci $card(A \Delta B) = 3 + 4 = 7$.

R2.1.3. În clasa a V-a sunt în total 53 de elevi. 27 dintre ei au fost în excursie, 22 elevi au fost la teatru, iar 23 au participat la serata de poezie. 11 dintre ei au fost şi la serată şi la teatru, 10 au fost şi la teatru şi în excursie, 13 au participat şi în excursie şi la serată, iar 4 elevi au participat la toate cele trei acțiuni. Câți elevi nu au participat la nici una din activități?

Soluție. Noțiunile învățate permit utilizarea diagramelor Venn-Euler la rezolvarea problemelor. Reprezentăm prin diagrame mulțimea *E* a elevilor care au fost în excursie, respectiv prin *T* şi *S* mulțimea elevilor care au fost la teatru, respectiv la serată. Din enunțul problemei rezultă: $cardE = 27$, $cardT = 22$, $cardS = 23$, $card(E \cap T \cap S) = 4$.



Indicăm în figura numărul elementelor fiecărei mulțimi:

1) 11-4=7 este numărul elevilor care au fost la teatru şi la serată, dar nu au fost în excursie.

2) 13-4=9 este numărul elevilor care au fost în excursie şi la serată, dar nu au fost la teatru.

3) 10-4=6 este numărul elevilor care au fost la teatru şi în excursie, dar nu au fost la serată.

4) 27-(6+4+9)=8 elevi au fost numai în excursie.

5) 22-(6+4+7)=5 elevi au fost numai la teatru.

6) 23-(9+4+7)=3 elevi au fost numai la serată.

7) 53-(8+6+5+7+4+9+3)=11 elevi nu au fost la nici una din activități.

R2.1.4. Într-o sală sunt 80 de persoane. Fiecărei persoane i se distribuie cel mult o revistă şi un ziar. S-au distribuit 50 de ziare şi 47 de reviste.

a) Care este cel mai mic număr de persoane care pot primi în acelaşi timp un ziar şi o revistă?

b) Care este numărul maxim de persoane care pot primi în acelaşi timp un ziar şi o revistă?

Soluție. Reprezentăm mulțimea *Z* a persoanelor care primesc ziare şi mulțimea *R* a persoanelor care primesc reviste.

a) Întrebarea din enunț poate fi interpretată matematic astfel: intersecția mulțimilor *Z* şi *R* trebuie să conțină un număr minim de elemente. Aceasta se întâmplă în cazul în care fiecare din cele 80 persoane va primi un ziar sau o revistă. Deoarece numărul persoanelor este mai mic decât numărul total de ziare şi reviste, urmează că unele persoane vor primi şi câte o revistă şi câte un ziar. Deci, numărul minim de persoane care pot primi atât un ziar cât şi o revistă este 47+50-80=17. $card(Z \cap R) = 17$.

b) Numărul maxim de persoane care pot primi în acelaşi timp un ziar şi o revistă se determină în cazul în care fiecare persoană care primeşte o revistă primeşte şi un ziar. Numărul maxim de elemente al intersecției mulțimilor este 47. $card(Z \cap R) = 47$.

Răspuns: a) 17 persoane; b) 47 persoane.

R2.1.5. Fie *A* o mulțime de numere naturale cu proprietățile:

a) $80 \in A$; b) Dacă $7x + 3 \in A$, atunci $x \in A$;

c) Dacă $x \in A$, atunci $\{7x + 4, 7x + 5\} \subset A$.

Arătați că 4001 şi 4002 sunt elemente ale lui *A*.

Soluție. Dacă $80 \in A$ şi 80=7·11+3, rezultă conform condiției b) că $11 \in A$. Dacă $11 \in A$, atunci $\{7 \cdot 11 + 4, 7 \cdot 11 + 5\} \subset A$, conform condiției b). Avem $\{81, 82\} \subset A$. Dacă $81 \in A$ atunci, conform condiției b), $\{7 \cdot 81 + 4, 7 \cdot 81 + 5\} \subset A$, adică $\{571, 572\} \subset A$. Dacă $571 \in A$, atunci conform condiției b), $\{7 \cdot 571 + 4, 7 \cdot 571 + 5\} \subset A$, adică $\{4001, 4002\} \subset A$.

R2.1.6. Fie mulțimea $X = \{1, 3, 5, 7, ..., 2n + 1, ...\}$. Construim $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3, 5\}$, $A_3 = \{7, 9, 11\}$,...

a) Scrieți A_4 şi A_5.

b) Calculați suma elementelor mulțimii A_{20}.

Soluție. a) Avem $A_4 = \{13, 15, 17, 19\}$ şi $A_5 = \{21, 23, 25, 27, 29\}$.

b) Pentru scrierea elementelor mulțimilor $A_1, A_2, ..., A_{19}$ s-au folosit 1+2+3+...+19 numere impare, adică 19·20:2=190 numere impare. Mulțimea A_{20} are 20 elemente şi primul element este al 191-lea număr impar, adică 2·190+1=381. Ultimul element al 20-lea din mulțimea A_{20} este 2·209+1=419. Avem: $A_{20} = \{381, 383, ..., 419\}$. Suma elementelor mulțimii A_{20} este (381+419)·20:2, adică 8000.

R2.1.7. Ce concluzie se poate trage din afirmațiile următoare?

a) Toți rățoii marcați cu *B* sunt ai doamnei Bond.

b) Rățoii nu au niciodată guler pe gât, decât dacă sunt marcați cu *B*.

c) Doamna Bond nu are rățoi cenuşii.

(Lewis Carroll)

Soluție. Să notăm cu *M* mulțimea tuturor rățoilor existenți la un moment dat, *B*={rățoii marcați cu *B*}, *G*={rățoii cu guler} şi *C*={rățoii cenuşii}.

În limbajul teoriei mulțimilor, vom putea identifica mulțimea *B*, ținând seama de condiția a), cu mulțimea rățoilor aparținând doamnei Bond.

Condiția b) se poate scrie $C_M B \subset C_M G$, fiindcă cei care nu sunt în *B* nu au în mod sigur guler, dar şi în *B* pot exista rățoi fără guler. Deducem $G \subset B$, deci mulțimea celor cu guler este inclusă în cea a celor marcați cu *B*.

Dar, din condiția c) deducem $B \cap C = \varnothing$, deci *B* şi *C* sunt disjuncte. În consecință, $G \cap C = \varnothing$, deci *G* şi *C* sunt disjuncte şi astfel concluzia este: "nici un rățoi cenuşiu nu are guler".

Comentariu. Problema pare a fi un nonsens, privită prin prisma limbajului curent. Ce concluzie se poate trage din faptul că doamna Bond nu are rățoi cenuşii şi rățoii nu poartă guler decât dacă sunt marcați cu *B*; deci dacă sunt ai acestei doamne?

Totuşi, analizând mai bine avertismentul că doamna Bond nu are rățoi cenuşii şi că rățoii care au guler sunt dintre rățoii acesteia, rezultă că rățoii cenuşii nu pot avea guler.

Această analiză verbală este modelată prin relația de incluziune, pe de o parte şi prin cea de disjuncție, pe de altă parte.

Problema pare o glumă paradoxală, dar constituie un exemplu frapant de logică a unor propoziții paradoxale.

2.2. Determinarea elementelor unei mulțimi în condiții date

Model. Să se determine mulțimile *A* şi *B*, ştiind că îndeplinesc, în acelaşi timp, condițiile:

a) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

b) $A \cap B = \{3,5,7\}$

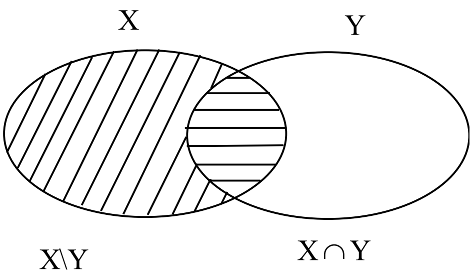
c) $A \setminus B = \{1,2,6\}$

Soluție. Din condiția b) rezultă conform definiției intersecției a două mulțimi că elementele 3, 5, 7 sunt comune, deci $\{3,5,7\} \subset A$ şi $\{3,5,7\} \subset B$. Din condiția c) rezultă, conform definiției diferenței $A \setminus B$, că elementele $1,2,6 \in A$ şi $1,2,6 \notin B$. În reuniunea celor două mulțimi este şi elementul 4; folosind b) şi c) rezultă că 4 nu este element comun, nu aparține mulțimii $A \setminus B$, deci 4 este element al lui *B* şi nu este element al lui *A*. Rezultă că:

$$A = \{1,2,3,5,6,7\} \text{ şi } B = \{3,4,5,7\}.$$

Verificare: $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A \cap B = \{3,5,7\}$ şi $A \setminus B = \{1,2,6\}$.

Remarcă. O altă soluție poate fi dată plecând de la următoarea proprietate: oricare ar fi mulțimile *X* şi *Y*, avem $X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y)$. Se verifică uşor printr-o diagramă:



Atunci $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)=\{1,2,6\}\cup\{3,5,7\}=\{1,2,3,5,6,7\}$ şi $B=\{3,4,5,7\}$ (deoarece $B\setminus A=\{4\}$).

Probleme rezolvate

R2.2.1. Să se determine mulţimile *A* şi *B*, ştiind că îndeplinesc în acelaşi timp condiţiile:

a) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

b) $A\cap B=\{3,4,5,6\}$

c) $A\cap\{6,7,8,9\}=\{6,7\}$

d) $B\cap\{1,2\}\neq\emptyset$

Soluţie. Din condiţia b) rezultă că elementele 3, 4, 5, 6 sunt comune, deci $\{3,4,5,6\}\subset A$ şi $\{3,4,5,6\}\subset B$.

Din condiţia c) rezultă că elementele $6,7\in A$.

Din condiţia d), care se poate transcrie: $B\cap\{1,2\}=\{1\}$ sau $B\cap\{1,2\}=\{2\}$ sau $B\cap\{1,2\}=\{1,2\}$, se deduce că $1\in B$ sau $2\in B$ sau $\{1,2\}\subset B$.

Problema are 3 soluţii:

I. $A=\{2,3,4,5,6,7\}$ şi $B=\{1,3,4,5,6\}$

II. $A=\{1,3,4,5,6,7\}$ şi $B=\{2,3,4,5,6\}$

III. $A=\{3,4,5,6,7\}$ şi $B=\{1,2,3,4,5,6\}$

R2.2.2. Să se determine mulţimile *A* şi *B*, ştiind că îndeplinesc simultan condiţiile:

a) $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$

b) $A\cap B=\{1,2\}$

c) $A\setminus B$ are un element

d) Suma elementelor din *B* este număr par.

Soluţie. Din condiţia b) rezultă că elementele 1 şi 2 sunt comune, deci $\{1,2\}\subset A$ şi $\{1,2\}\subset B$. Din condiţia a) şi c) rezultă că dintre elementele 3, 4, 5 un element aparţine lui *A* şi celelalte două aparţin lui *B*. Din condiţia d) şi având 1+2+3+4=10, 1+2+4+5=12, dar 1+2+3+5=11, rezultă că $\{3,4\}\subset B$ sau $\{4,5\}\subset B$. Deci, problema are două soluţii:

I. $A=\{1,2,5\}, B=\{1,2,3,4\}$

II. $A=\{1,2,3\}, B=\{1,2,4,5\}$

R2.2.3. Să se determine mulțimile *A* şi *B*, ştiind că îndeplinesc simultan condițiile:

a) $A\cup B=\{0,1,2,3,4,5\}$

b) $C\cup D=\{6,7,8,9,10,11\}$

c) $(A\cap B)\times(C\cap D)=\{(2,8),(2,9),(3,8),(3,9)\}$

d) $(A\setminus B)\times(C\setminus D)=\{(0,6),(0,7),(1,6),(1,7)\}$

Soluție. Din condițiile c) şi d) şi ținând cont de definiția produsului cartezian a două mulțimi, rezultă că:

$$A\cap B=\{2,3\},\ C\cap D=\{8,9\},\ A\setminus B=\{0,1\}\ \text{şi}\ C\setminus D=\{6,7\}.$$

În continuare se pune problema determinării mulțimilor *A* şi *B* care îndeplinesc simultan condițiile:

$$A\cup B=\{0,1,2,3,4,5\},\ A\cap B=\{2,3\}\ \text{şi}\ A\setminus B=\{0,1\},$$

şi a mulțimilor *C* şi *D*, care îndeplinesc simultan condițiile:

$$C\cup D=\{6,7,8,9,10\},\ C\cap D=\{8,9\}\ \text{şi}\ C\setminus D=\{6,7\}.$$

Folosind $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$, obținem $A=\{0,1,2,3\}$ şi atunci $B=\{2,3,4,5\}$. În mod analog, $C=\{6,7,8,9\}$ şi $D=\{8,9,10\}$.

R2.2.4. Să se determine mulțimile *A, B, C*, dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A\cup B\cup C=\{2,4,6,8,10,12\}$

b) $A\cap B=\{2,4\}$

c) $B\cap C=\{2,6,8\}$

d) $A\cap C=\{2,10\}$

Soluție. Folosind definiția intersecției a două mulțimi, din condițiile b), c), d) rezultă că $\{2,4,10\}\subset A$, $\{2,4,6,8\}\subset B$ şi $\{2,6,8,10\}\subset C$.

Din condiția a) rezultă că elementul 12 trebuie să aparțină unei mulțimi, dar folosind b), c), d) rezultă că 12 nu poate fi element comun a două mulțimi, deci problema are 3 soluții.

I. $A=\{2,4,10,12\}, B=\{2,4,6,8\}, C=\{2,6,8,10\}$

II. $A=\{2,4,10\}, B=\{2,4,6,8,12\}, C=\{2,6,8,10\}$

III. $A=\{2,4,10\}, B=\{2,4,6,8\}, C=\{2,6,8,10,12\}$.

R2.2.5. Să se determine mulțimile *A, B, C*, dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$

b) $A\cap B\cap C=\{5\}$

c) $A\setminus B=\{1,3,6\}$

d) $A\setminus C=\{1,2,4\}$.

Soluție. Din condiția b) rezultă că 5 este element comun al celor trei mulțimi, deci $3 \in A, 3 \in B, 3 \in C$.

Folosind definiția diferenței a două mulțimi din condițiile b) şi c) rezultă că $\{1,3,6\} \subset A, \{1,3,6\} \not\subset B, \{1,2,4\} \subset A, \{1,2,4\} \not\subset C$.

Din condiția c) rezultă că elementele 2 şi 4 sunt comune mulțimilor *A* şi *B* (ele aparțin mulțimii *A* din condiția d), dar nu aparțin mulțimii $A \setminus B$).

Din condiția d) rezultă că elementele 3 şi 6 sunt comune mulțimilor *A* şi *C* (ele aparțin mulțimii *A* din condiția c), dar nu aparțin mulțimii $A \setminus C$). Se obține:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\},\ B = \{2,4,5\},\ C = \{3,5,6\}.$$

R2.2.6. Să se determine *n* număr natural, ştiind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $n \in A$

b) $A \cap B = \{3,4\}$

c) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,n\}$

d) $cardA = cardB$

e) suma elementelor necomune ale celor două mulțimi este aceeaşi.

Soluție. Din condiția b) rezultă că elementele 3 şi 4 sunt comune celor două mulțimi, $\{3,4\} \subset A$ şi $\{3,4\} \subset B$. Se ştie că $n \in A$, iar celelalte elemente 1, 2, 5 trebuie să îndeplinească: $n+1=2+5$ sau $n+2=1+5$ sau $n+5=1+2$, deci $n=6$ sau $n=4$, imposibil deoarece deja $4 \in A$ şi ultima variantă este imposibilă. Deci, $n=6$ şi $A=\{3,4,6,1\}$, $B=\{3,4,2,5\}$.

3. Divizibilitatea în mulţimea numerelor naturale

3.1. Criteriile de divizibilitate cu 10, 2, 5, 100, 4, 25, 9, 3, 8, 7, 11, 13, 27, 37

3.1.1. Criteriul general de divizibilitate a numerelor naturale

Prin criteriu de divizibilitate a unui număr natural m printr-un număr natural d se înţelege o condiţie necesară şi suficientă pentru ca numărul m să se împartă exact prin numărul d (notaţie: $m = M(d)$).

În sistemul zecimal, numărul $m = \overline{a_n a_{n-1}...a_{k+1}a_k a_{k-1}...a_1 a_0}$ se poate scrie în mod unic sub forma:

$m = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} +...+a_{k+1}.10^{k+1} + a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} +...+ a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$

unde a_n , a_{n-1},…, a_0 $\in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$cu $a_n \neq 0$, iar numărul $d<m$ se poate scrie (scrierea nu este unică) sub forma de $d=10^k+q$, unde $k \leq n$ este număr natural, iar q este număr natural .

3.1.2.Criteriul general de divizibilitate a unui număr natural *m* prin numărul natural *d*

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca numărul natural m să fie divizibil prin numărul natural d este ca suma:

$S=\overline{a_{k-1}a_{k-2}...a_1.a_0}$ - q $\overline{a_{2k-1}.a_{2k-2}.....a_{k+1}a_k}$ + q^2 $\overline{a_{3k-1}a_{3k-2}...a_{2k+1}a_{2k}}$ - - q^3 $\overline{a_{4k-1}a_{4k-2}...a_{3k+1}a_{3k}}$

Să fie multiplu de d, unde $d= 10^k+q$, $k \leq n$ este un număr natural iar q este un număr natural .

Demonstraţie:

Numărul m se poate scrie astfel:

$m= a_n .10^n + a_{n-1}.10^{n-1} +…+a_{k+1} .10^{k+1} + a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} +…+ a_2.10^2 + a_1.10 + a_0 = = a_{k-1}.10^{k-1} + a_{k-2}.10^{k-2} + … + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0) + 10^k . (a_{2k-1}.10^{k-1} + a_{2k-2}.10^{k-2} + +… + a_{k+2}.10^{k+2} + +a_{k+1}.10 + a_k) + 10^{2k}(a_{3k-1}.10^{k-1} + a_{3k-2}.10^{k-2} + … + a_{2k+2}.10^2 + a_{2k+1}.10 + a_{2k})$ $+ … = \overline{a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0} + 10^k . \overline{a_{2k-1}.a_{2k-2}.....a_{k+1}a_k} + 10^{2k}\overline{a_{3k-1}a_{3k-2}...a_{2k+1}a_{2k}} + …$ $= \overline{a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0} + [(10^k+q)-q] .\overline{a_{2k-1}a_{2k-2}...a_{k+1}a_k} + +[(10^{2k}-q^2) + q^2]$ $\overline{a_{3k-1}a_{3k-2}...a_{2k+1}a_{2k}} + [(10^{3k}+p^3) -p^3] \overline{a_{4k-1}a_{4k-2}...a_{3k+1}a_{3k}} + … =$ $=M(10^k+q)+s=M(d)+s$ ceea ce trebuia demonstrat. În demonstraţie s-au folosit proprietăţile: $10^{2lk}-q^{2l}=M(10^k+q)$ şi $10^{(2l+1)k}+q^{2l+1}=M(10^k+q)$, $\forall$ $l \in \mathbf{N}$.

3.1.3. Aplicaţii ale criteriului general de divizibilitate

3.1.3.1. Criteriul de divizibilitate prin 10, respectiv prin 2 sau 5

Dacă se alege q=0 şi k=1 în criteriul general de divizibilitate rezultă:

Pentru ca un număr natural m să fie divizibil prin 10*, respectiv prin* 2 *sau* 5 *este necesar şi suficient ca ultima cifră a lui să fie* 0*, respectiv ca ultima cifră a lui n să fie divizibilă* *prin* 2 *sau* 5. Prin urmare numerele naturale divizibile cu 10 sunt de forma m=$\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 0}$, numerele naturale divizibile cu 2 au ultima cifră 0, 2, 4, 6, 8 iar numerele naturale divizibile cu 5 au ultima cifră 0 sau 5.

3.1.3.2. Criteriul de divizibilitate prin 100, respective prin 4 sau 25

Dacă se alege q=0 şi k=2 în criteriul general de divizibilitate rezultă:

Pentru ca un număr natural m să fie divizibil prin 100, *respectiv* 4 *sau* 25 *este necesar şi suficient ca ultimele două cifre ale lui m să fie* 0, *respectiv ca numărul format din ultimele două cifre ale lui m să fie divizibile prin* 4 *sau* 25.

Numerele naturale divizibile cu 100 au forma:

$m=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_3 a_2 00}$ iar numerele naturale divizibile cu 25 au una dintre formele $m_1=\overline{a_n a_{n-1} ... a_3 a_2 00}$, $m_2=\overline{a_n a_{n-1} ... a_3 a_2 25}$, $m_3=\overline{a_n a_{n-1} ... a_3 a_2 50}$, sau $m_4=\overline{a_n a_{n-1} ... a_3 a_2 75}$.

3.1.3.3. Criteriul de divizibilitate prin 9, respectiv 3

Dacă se alege q=-1 şi k=1 în criteriul general de divizibilitate rezultă:

Pentru ca un număr natural m=$\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 0}$ *să fie divizibil prin* 9 *respectiv prin divizorul său* 3 *este necesar şi suficient ca suma* $a_0 + a_1 + ... + a_{n-1} + a_n$ *să fie divizibilă prin* 9 *respectiv* 3.

Exemplu: 139977=*M*9 deoarece:

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$=7+7+9+9+3+1=36=*M*9

3.1.3.4. Criteriul de divizibilitate prin 11

Dacă se alege q =1 şi k =1 în criteriul general de divizibilitate rezultă:

Pentru ca numărul natural m=$\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 0}$ *să fie divizibil prin* 11 *este necesar şi suficient ca s=*$a_0 - a_1 + .a_2 - a_3 + a_4 - ...$ *să fie divizibilă prin* 11.

Exemplu: 563618=*M*11 deoarece a_0- a_1+a_2- a_3+a_4- a_5=(a_0+a_2+a_4) – (a_1+a_3+a_5) = (8+6+6) – (1+3+5)=20-9=11=M11

3.1.3.5. Criteriul de divizibilitate prin 8

Dacă se alege q=-2 şi k=1 în criteriul de divizibilitate rezultă:

Pentru ca numărul natural m=$\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0}$ *să fie divizibil prin* 8 *este necesar şi suficient ca* a_0 +2a_1+4a_2 *să fie divizibilă prin* 8 .

Observaţie: $a_0 +2a_1+4a_2 = a_0 +2(a_1+2a_2)=a_0+2(a_1+10a_2-8a_2)=$

$= a_0+2(a_1+10a_2)- 2 \cdot 8\, a_2=\{[a_0+2\,\overline{a_2 a_1}\,]- 2 \cdot 8\, a_2\} \vdots\ 8$

şi prin urmare un număr natural este divizibil prin 8 dacă şi numai dacă suma dintre dublul numărului de două cifre, format din cifra sutelor şi cifra zecilor, plus numai numărul reprezentat de cifra unităților este un număr divizibil prin 8.

Exemplu: $453864 \vdots 8$?

Soluție:

a) $a_0=4$,$a_1=6$, $a_2=8$.

$a_0+2a_1+4a_2=48 \vdots 8 \Rightarrow 453864 \vdots 8$

b) Avem:

$2\cdot 86$ +4=172+4=176

$2\cdot 17$ +6=40$\vdots 8$ rezultă că $453864 \vdots 8$.

3.1.4. Criterii de divizibilitate cu 7,11,13,27 şi 37

3.1.4.1. Criteriul de divizibilitate cu 7,11 sau 13

Numărul natural m=$\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ se divide cu 7,11 sau 13 dacă şi numai dacă $\overline{a_n a_{n-1}...a_4 a_3}$ - $\overline{a_2 a_1 a_0}$ se divide cu 7,11, respectiv 13.

Demonstrație :

Avem

$$m= a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 10^2 + 10^3 \cdot \left(a_3 + a_4 \cdot 10 + \cdots + a_n \cdot 10^{n-3}\right) =$$

$$= \overline{a_2 a_1 a_0} + (1001-1) \cdot \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_4 a_3} =$$

$$= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \cdot \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_4 a_3} - (\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_4 a_3} - \overline{a_2 a_1 a_0})$$

şi deci pentru $d \in \{ 7, 11, 13 \}$ avem $m \vdots d \Leftrightarrow (\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_4 a_3} - \overline{a_2 a_1 a_0}) \vdots d$.

3.1.4.2. Criteriul de divizibilitate cu 27 sau 37

Numărul natural m=$\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ se divide cu 27sau 37 dacă şi numai dacă $\overline{a_n a_{n-1}...a_4 a_3}$ + $\overline{a_2 a_1 a_0}$ se divide cu 27 respectiv 13.

Exemplu: Să se decidă dacă numărul 1 236 133 este sau nu divizibil cu 37.

Soluție: Avem: 1+ 236 + 133 = 370. Cum 370 $\vdots$ 37, numărul dat este divizibil cu 37.

3.1.5. Teoreme de divizibilitate

Teorema 1: Dacă fiecare termen al unei sume/diferențe este divizibil prin acelaşi număr, atunci şi suma/diferența se divide prin acel număr.

Teorema 2: Într-o sumă/diferență de doi termeni, dacă suma/diferența şi unul din termeni se divid prin acelaşi număr, atunci şi celălalt termen se divide prin numărul dat.

Teorema 3: Pentru ca un produs să fie divizibil printr-un număr este suficient ca unul din factorii produsului să fie divizibil cu acel număr.

Teorema 4: Într-o împărţire cu rest, dacă deîmpărţitul şi împărţitorul se divid printr-un număr dat, atunci şi restul se divide prin acel număr.

3.1.6. Proprietăţi:

(**r**) Relaţia de divizibilitate este reflexivă: *Orice număr se divide cu el însuşi.*

(**a**) Relaţia de divizibilitate este antisimetrică: *Dacă a divide pe b şi b divide pe a atunci a = b.*

(**t**) Relaţia de divizibilitate este tranzitivă: *Dacă a divide pe b şi b divide pe c, atunci a divide pe c.*

3.1.7. Observaţie (*Criteriul de divizibilitate cu* 19)

Un număr este divizibil cu 19 dacă şi numai dacă numărul zecilor numărului adunat cu de două ori numărul reprezentat de cifra unităţilor este un număr divizibil cu 19.

Exemplu: Să se decidă dacă numărul 47 063 este sau nu divizibil cu 19.

Soluţie: Avem: $4\,706 + 3\cdot 2 = 4\,712$

$$471 + 2 \cdot 2 = 475$$
$$47 + 5 \cdot 2 = 57$$
$$5 + 7 \cdot 2 = 19.$$

Cum $19 \,\vdots\, 19$, numărul dat este divizibil cu 19.

3.2. Numărul şi suma divizorilor unui număr natural. număr perfect

3.2.1. Notaţie: Pentru un număr natural *n* vom nota cu $\tau(n)$ *numărul divizorilor săi naturali.*

3.2.2. Teoremă:

Pentru $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ avem relaţia $\tau(n)=(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\dots\cdot(\alpha_k+1)$.

3.2.3. Exemple:

(1) Determinaţi numărul divizorilor numărului 360. Scrieţi prin enumerarea elementelor, mulţimea D_{360} .

Soluţie:

Din numărul divizorilor lui 360 este (3+1)·(2+1)·(1+1) rezultă că 360 are 24 de divizori.

(2) Câţi divizori, în mulţimea numerelor naturale, are numărul $2^{10}\cdot 5^9 + 2^9\cdot 5^8$?

Soluție:

Numărul se scrie $2^9 \cdot 5^8 \cdot 11$ şi numărul are 180 de divizori.

(3) Determinați toate numerele naturale de forma $a = 2^m \cdot 3^n$, unde m şi n sunt numere naturale, care au exact 8 divizori.

Soluție:

Din $(m+1) \cdot (n+1) = 8$, găsim: 3^7, 54, 24, 2^7.

(4) Determinați toate numerele naturale divizibile cu 10 şi care au 4 divizori.

(G.M. 2-3/1993)

Soluție:

Din $A = a^m \cdot b^n \cdot 2^x \cdot 5^y$ şi $(m+1)(n+1)(x+1)(y+1) = 4$ şi $x + 1 \geq 2$, $y + 1 \geq 2$, obținem: $m = 0$, $n = 0$, $x = 1$, $y = 1 \Rightarrow A = 10$.

3.2.4. Notație: Pentru un număr natural *n* vom nota cu $\sigma(n)$ *suma divizorilor săi naturali.*

3.2.5. Teoremă:

Pentru $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ avem relația

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

3.2.6. Exemplu: Să se determine suma divizorilor naturali ai numărului natural 28.

Soluție: Suma divizorilor naturali ai numărului natural este: 1+2+4+7+14+28=56.

3.2.7. Definiție: Un număr natural se numeşte *perfect* dacă $\sigma(n) = 2 \cdot n$.

3.2.8. Observație: Numerele perfecte au fost studiate încă din antichitate când erau cunoscute numerele perfecte mai mici decât 10 000 şi anume: 6, 28, 496, 8 128.

3.3. Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.)

Fie numerele 12 şi 18. Există numere naturale, divizori comuni ai celor două numere ?

Avem: $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

Divizorii comuni sunt dați de $D_{12;\,18} = D_{12} \cap D_{18}$.

Avem: $D_{12} \cap D_{18} = \{1, 2, 3, 6\}$.

3.3.1. Definiție: Cel mai mare dintre divizorii comuni ai mai multor numere date se numeşte *cel mai mare divizor comun*.

Notăm: c.m.m.d.c. (12;18) = 6 sau, mai simplu: (12;18) = 6 citim: *cel mai mare divizor comun al numerelor* 12 şi 18 este 6.

Cel mai mare divizor comun a două sau mai multe numere naturale date reprezintă cel mai mare număr natural care divide fiecare din numerele date.

3.3.2.Exerciţii:

1. Să se scrie prin enumerarea elementelor: $D_{6;\,10}$; $D_{3;\,21}$; $D_{15;\,20}$; $D_{12;\,25}$; $D_{4;\,27}$.

2. Să se determine cel mai mare divizor comun al numerelor: a) 9 şi 21; b) 20 şi 16; c) 12 şi 39; d) 15; 25 şi 30; e) 18; 9 şi 27; f) 14 şi 45; g) 8; 12 şi 33.

3. Să se determine cel mai mare divizor comun al numerelor: a) 4 şi 12; b) 27 şi 9; c) 20; 10 şi 40; d) 12; 6 şi 24; e) 15 şi 45; f) 81 şi 27; g) 42; 2 şi 30; h) 33; 66 şi 11.

Analizând exerciţiul 3 reţinem:

Dacă un număr din cele date este divizor al fiecăruia din celelalte numere, atunci acesta este cel mai mare divizor comun al numerelor date.

4. Folosind observaţia desprinsă din exerciţiul 3, să se determine valoarea logică a propoziţiilor următoare:

p_1: (45; 9) = 9 ,
p_2: (25; 125) = 125 ,
p_3: (64; 32; 16) = 16 ,
p_4: (119; 17; 34) = 17 .

3.3.3.Determinarea celui mai mare divizor comun folosind descompunerea numerelor în produse de factori primi

Prin procedeul expus mai sus, dacă numerele sunt mici, determinarea celui mai mare divizor comun este relativ simplă.

Dăm, în continuare, un alt procedeu pentru aflarea celui mai mare divizor comun, fără a scrie mulţimea divizorilor fiecărui număr.

Fie numerele 180 şi 630.

Pentru a determina cel mai mare divizor comun al numerelor date: descompunem numerele în produse de factori numere prime: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, divizorii comuni trebuie să conţină cel puţin unul din factorii primi comuni cu exponentul cel mai mic. Dacă ei ar conţine, de exemplu, şi factorul 7, ar fi divizori ai numărului 630, dar nu şi ai numărului 180, dacă ar conţine factorul 2^2 ei ar fi divizori pentru 180 dar nu şi pentru 630. Aşadar, cel mai mare divizor comun, fiind cel mai mare număr care divide fiecare din numerele date, va conţine factorii primi comuni cu exponentul cel mai mic.

3.3.4.Concluzie: *Pentru a determina c.m.m.d.c. al mai multor numere date descompunem numerele în produse de factori numere prime, apoi efectuăm produsul factorilor primi comuni, considerați o singură dată, cu exponentul cel mai mic.*

Exemple:

(1) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$\underline{630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$

$(180; 630) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

(2) $a = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

$\underline{b = 2^2 \cdot 3 \cdot 11}$

$(a; b) = 2^2 \cdot 3 = 12$

(3) $a = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$\underline{b = 7 \cdot 11}$

$(a; b) = 1$

Numerele a şi b din exemplul (3) au un singur divizor comun, pe 1.

3.3.5. Definiție: Numerele pentru care cel mai mare divizor comun al lor este 1 se numesc *numere prime între ele.*

3.4. Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c)

Fie numerele 3 şi 7. Există numere naturale multiplii comuni ai numerelor 3 şi 7?

Avem: $M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \dots, 3n, \dots\}$,

$M_7 = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, \dots, 7n, \dots\}$

Multiplii comuni sunt dați de $M_{3;\,7} = M_3 \cap M_7$,

$M_{3;\,7} = M_3 \cap M_7 = \{0, 21, 42, \dots, 21n, \dots\}$.

3.4.1.Definiție: Cel mai mic dintre multiplii comuni, diferit de zero, al mai multor numere naturale date, se numeşte *cel mai mic multiplu comun*.

Notăm: c.m.m.m.c. [3; 7] = 21 ,sau, simplu: [3; 7] = 21 ,
citim: cel mai mic multiplu comun al numerelor 3 şi 7 este 21.

Numărul 21 este cel mai mic număr natural care se divide prin fiecare din numerele date.

3.4.2. Exerciții:

1. Să se determine primii 6 multipli comuni ai numerelor 5 şi 8.
2. Să se determine primii 5 multiplii comuni, diferiți de 0, ai numerelor 9 şi 15.
3. Să se scrie enumerând elementele: $M_{3;\,4}$; $M_{4;\,6}$; $M_{8;\,10}$; $M_{5;\,6}$, specificând de fiecare dată cine este c.m.m.d.c. al numerelor date.

3.4.3.Determinarea celui mai mic multiplu comun folosind descompunerea numerelor în produse de factori primi

Fie numerele 180 şi 630.

Pentru a determina cel mai mic multiplu comun al numerelor date:

- descompunem numerele în produse de factori numere prime: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$,
- multipli comuni trebuie să conţină factori primi comuni şi necomuni cu exponentul cel mai mare. Cel mai mic multiplu comun, fiind cel mai mic număr care se divide cu fiecare din numerele date, va conţine factorii primi comuni şi necomuni, o singură dată, cu exponentul cel mai mare.

3.4.5.Concluzie: *Pentru a determina c.m.m.m.c. al mai multor numere date: descompunem numerele în produse de factori numere prime, apoi efectuăm produsul factorilor primi comuni şi necomuni, consideraţi o singură dată, cu exponentul cel mai mare.*

Exemple:

(1) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$\underline{630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$

$[180; 630] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1\ 260$

(2) $a = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

$\underline{b = 2^2 \cdot 3 \cdot 11}$

$[a; b] = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 = 13\ 200$

(3) $a = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$\underline{b = 7 \cdot 11}$

$[a; b] = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 34\ 650$

Numerele a şi b din exemplul (3) nu au factori primi comuni, c.m.m.m.c. este egal cu produsul numerelor.

3.4.6. Exerciţii:

Să se calculeze c.m.m.m.c. al numerelor:

a) $a = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ şi $b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$,
b) $a = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 13$ şi $b = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$,
c) $a = 3 \cdot 11 \cdot 19$ şi $b = 2^3 \cdot 5 \cdot 31$,
d) 420 şi 588 ,
e) 360 şi 504 ,
f) 900 şi 450 ,
g) 144; 36 şi 72 ,
h) 625 şi 750 ,
i) 216 şi 160 ,
j) 200 şi 441 ,
k) 297 şi 260 ,
l) 315; 405 şi 675 ,
m) 540; 558 şi 576 ,

n) 348; 612 şi 984 ,
o) 27; 121 şi 260 ,
p) 10 875 şi 1 500 ,
r) 9 656; 14 484 şi 24 140 ,
s) 1 638; 663 şi 897 .

Observaţie: Date fiind două numere naturale ***a*** şi ***b***, avem: (***a***; ***b***) · [***a***; ***b***] = ***a*** · ***b***. Verificaţi proprietatea folosind, din exerciţiul de mai sus: d), e), f) h), i), j) şi k).

3.5. Divizibilitatea unei expresii cu un număr

3.5.1. Algoritm: 1. Se pune în evidenţă numărul – factor al expresiei date
2. Se descompune numărul în produse de factori numere prime între ele şi se verifică divizibilitatea expresiei prin fiecare factor.

3.5.2. Exemple:

(1) Stabiliţi dacă numărul E = $\overline{abcd}+\overline{dcba}$ se divide cu 11.

Soluţie: E = 1001·(a + d) + 110·(b + c), număr divizibil cu 11.

(2) Demonstraţi că numărul
S = (2001 + 2000 – 1999 – 1998) + (1997 + 1996 – 1995 – 1994) + … + (5 + 4 – 3 – 2) + 1 este divizibil cu 2001.

(GM 9-10/2001, p. 370)

Soluţie: În fiecare paranteză rezultatul este 4. Avem (2001 - 1): 4 = 500 (paranteze). Avem S = 500 · 4 + 1 = 2001.

(12288) Fie $S=\overline{ab4}+\overline{aba}+\overline{a1b}$. Dacă termenii sumei sunt numere scrise în baza 10, stabiliţi dacă suma este sau nu un număr divizibil cu 7.

Soluţie: Suma este echivalentă cu: 7·(43a+3b+2), număr divizibil cu 7.

3.6. Determinarea a două numere naturale când se cunosc c.m.m.d.c./c.m.m.m.c. şi respectiv suma/produsul lor

3.6.1. Algoritm: Se exprimă numerele ca produse dintre c.m.m.d.c. şi două numere prime între ele .

3.6.2. Exemplu:

Suma a două numere naturale este 1 089 iar c.m.m.d.c. al lor este 121. Să se afle numerele.

Soluție: Fie x şi y cele două numere. Avem x = 121a şi y = 121b, cu (a,b) = 1, 121(a+b) = 1089, de unde a+b = 9. Avem posibilitățile: a = 1, b = 8; a = 2, b = 7; a = 3, b = 6; a = 4, b = 5, de unde, numerele căutate sunt: 121 şi 968; 242 şi 847; 484 şi 605

3.7. Exerciții şi probleme propuse

1. Decideți dacă numărul $A = 2907^{100} + 2908^{101} + 2909^{102} + 2900^{103}$ este sau nu divizibil cu 10.

2. Numerele de forma $\overline{ab00}$ divizibile cu 9 sunt: ………………………

3. Dacă numărul $\overline{1a2a3a4a5a6a7a8a9}$ este divizibil cu 9, atunci a = …
.

4.Numărul $5^{101} \cdot 2^{100} + \boldsymbol{a}$ este divizibil cu 9 dacă şi numai dacă ***a*** este:
a) 4; b) 5; c) 3; d) 9 .

5.Valoarea de adevăr a propoziției:
p: „Orice număr natural care se divide prin 8 şi 6, se divide prin 48” este ….

6. Câte numere naturale de forma $\overline{7x2y}$, scrise în baza 10, există ? Câte dintre ele se divid cu 2 ? Câte se divid cu 4 ? Câte se divid cu 5 ? Câte se divid cu 10 ? Câte se divid cu 9 ?

7. Numărul numerelor naturale formate din trei cifre, divizibile cu 9 şi care au cifra unităților 9 este egal cu ….

8. Să se determine cel mai mare număr de forma $\overline{7x2y}$ multiplu al lui 9.

9. Determinați toate numerele n = $\overline{a2345b}$ divizibile cu 9. Câte dintre ele sunt divizibile cu 72 ?

10. Câte numere de forma $\overline{abc2}$ sunt divizibile cu 4 şi au proprietatea că $\overline{ab}$ este un pătrat perfect.

11. Stabiliți care din numerele date sunt divizibile cu 8: 392; 984; 1 220; 2 464; 337; 3 968; 9 768; 7 680; 34 416; 28 728; 17 776; 16 208; 5 992; 2 648.

12. Determinați toate numerele de forma: a) $\overline{25x2}$; b) $\overline{x408}$; c) $\overline{12x32}$ divizibile cu 8.

13. Numărul numerelor naturale de forma $\overline{3xyz136}_{10}$ divizibile cu 8 este egal cu….

14. Considerăm numerele: 517; 1 001; 222; 4 697; 6 105; 3 839; 4 444; 803; 661; 961 796; 7 967 036; 411. Organizați numerele în trei coloane:

(1) numere divizibile cu 11,
(2) numere divizibile cu 11 şi 2,
(3) numere care nu se divid cu 11.

15. Determinați toate numerele de forma $\overline{23x511}$ divizibile cu 11.

16. Stabiliți dacă numărul E = $\overline{abcd}+\overline{dcba}$ se divide cu 11.

17. Stabiliți care din numerele care urmează sunt divizibile cu 7: 371; 146; 329; 273; 644; 555; 798; 252; 616; 917; 1 792; 1 200; 413; 2 156; 511; 488; 16 408.

18. Determinați numerele de forma: a) $\overline{x6\ 543}$; b) $\overline{x7302}$; c) $\overline{4\ 23x}$; d) $\overline{14250x}$; e) $\overline{124x4}$; f) $\overline{5x102}$ divizibile cu 7.

19. Determinați D = $\overline{1212x6}-\overline{9x67}$, ştiind că fiecare termen este divizibil cu 7.

20. Fie $S=\overline{ab4}+\overline{aba}+\overline{a1b}$. Dacă termenii sumei sunt numere scrise în baza 10, stabiliți dacă suma este sau nu un număr divizibil cu 7.

21. Fie E = $\overline{1a5b}+\overline{15ab}+\overline{1b5a}+\overline{1ab6}-a$. Dacă toți termenii sunt numere scrise în baza 10, stabiliți dacă E este sau nu un număr divizibil cu 7.

22. Să se determine toate numerele de forma $\overline{2yz}$ divizibile cu 6 şi care nu se divid cu 9.

23. Considerăm toate numerele naturale formate din două cifre.
a) câte din aceste numere sunt multipli ai lui 6 ?
b) câte din numerele considerate sunt divizibile cu 2 dar nu se divid cu 3?
c) determinați suma numerelor multipli ai lui 3 dar care nu sunt multipli ai lui 2.

24. Determinați numărul numerelor naturale nenule cel mult egale cu 1000:

a) care se divid şi cu 3 şi cu 5.
b) care nu se divid nici prin 3, nici prin 5.
c) care nu se divid nici cu 2 şi nici cu 5.

25. Numerele de forma $\overline{xy15}$ divizibile cu 15 sunt ………………………

26. Determinați cifrele *a* şi *b* ştiind că numărul $\overline{3a7b}$ este divizibil cu 15.

27. Dacă $\overline{4xy} \vdots 45$, atunci $x =\dots , y = \dots; x =\dots , y = \dots; \; x = \dots , y =\dots$.

28. Să se determine x şi y astfel ca numărul $\overline{4x5y}$ să fie divizibil cu 18.

29. Să se determine numerele de forma $\overline{abab}$ care sunt divizibile cu 12.

30. Determinaţi cifrele a, b şi c ştiind că $\overline{1a3bc}$ este divizibil cu 75.

31. Determinaţi cifrele x şi y astfel încât $\overline{x1999y}$ să se dividă cu 55.

32. Determinaţi numerele de forma $\overline{1099abc}$ divizibile cu 280.

33. Câte numere de forma $\overline{abbac}$ sunt divizibile cu 440 ?

34. Găsiţi toate numerele de forma $\overline{2001xyz}$, scrise în baza zece, care se divid cu 120.

35. Aflaţi toate numerele de forma $\overline{2551xyz}$, scrise în baza zece, care se divid cu 125.

36. Determinaţi un număr scris cu zece cifre distincte, multiplu de 125. Câte astfel de numere există ?

37. Demonstraţi că numărul $\overline{abab} - \overline{baba}$ se divide cu 909.
38. Numărul $\overline{abc}$ are cifrele distincte şi strict mai mici decât 6. Dacă $\overline{abc}$ se divide cu ($a + b + c$), să se arate că $\overline{(b+c)(c+a)(a+b)}$ se divide cu ($a + b + c$).

(GM 11/1999, p. 454)

39. În sistemul de numeraţie zecimal, aflaţi cifrele nenule a şi b astfel încât $(\overline{ab} + \overline{ba}) \vdots$ 187

40. Fie x, y şi z cifre consecutive în sistemul de numeraţie zecimal astfel încât $\overline{xy} = z + 19$. Să se arate că numărul $\overline{xyz}$ este divizibil cu 19.

41. Să se demonstreze că:
a) $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}^*$, numerele de forma A = $10^n + 62$ se divid cu 18.
b) $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}^*$, numerele de forma N = $10^{3n} - 385$ se divid cu 15.
c) $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, numerele de forma $5^{n+2}+5^{n+1}+5^n$ se divid cu 31.
d) $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}^*$, numărul A = $6^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 2^n \cdot 3^{n+2}$ se divide cu 13.
e) Numerele de forma a = $72^n + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+1} + 8^{n+1} \cdot 9^n$, n $\in$ $\mathbb{N}^*$, se divid cu 15.
f) Numerele de forma A = $3^{2n+1} \cdot 5^{3n+2} - 9^{n+1} \cdot 5^{3n+1}$ se divid cu 90, $\forall$n$\in$$\mathbb{N}^*$.
g) $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}^*$, numerele de forma

$A = 5^{2n} \cdot 7^{2n+1} \cdot 11^{2n} + 25^{n} \cdot 7^{2n} \cdot 11^{2n+1} - 5^{2n+1} \cdot 49^{n} \cdot 121^{n}$ se divid cu 5 005.

h) $\forall$ n $\in$ ***N**** , numerele $A = 3^{4n+4} \cdot 11^{2n} \cdot 125^{n} + 4 \cdot 5^{3n+2} \cdot 81^{n} \cdot 121^{n}$ se divid cu 1991 ?

42. Dacă n $\in$ ***N***, demonstrați că:

$A = 7^{n} \cdot 3^{n+1} + 3^{n} \cdot 7^{n+1} + 7 \cdot 21^{n}$ este divizibil cu 17.
$B = 5^{n} \cdot 7^{n+1} + 7^{n} \cdot 5^{n+1} + 17 \cdot 35^{n}$ este divizibil cu 29.

43. Dacă n $\in$ ***N***, demonstrați că:

$a = 5^{n+1} \cdot 7^{n+1} + 5^{n+2} \cdot 7^{n+2} + 25 \cdot 35^{n}$ este divizibil cu 257.
$b = 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 27 \cdot 15^{n}$ este divizibil cu 39.

44. Dacă $E = 2^{n+1} \cdot 3^{n} + 2^{n} \cdot 3^{n+1} + 6^{n+1}$, unde n $\in$ ***N****

a) să se decidă dacă E este sau nu un număr divizibil cu 33;
b) să se calculeze E pentru n = 1.

45. Să se arate că numerele de forma

$A = \overline{abc2} + \overline{abc2}^{2} + \overline{abc2}^{3} + ... + \overline{abc2}^{1000}$ se divid cu 10.

46. Fie $a = 2 \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+5} + 5^{n-3} \cdot 5^{4}$.

a) Să se scrie numărul ***a*** ca produs de factori diferiți de 1.
b) Să se arate că ***a*** este multiplu de 313.

(G.M. 1/1992)

47. Dacă $S = 5^{n+1} \cdot 3^{n} \cdot 2^{n} + 5^{n} \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{n+2}$, n $\in$ ***N***. Să se determine numerele naturale pentru care $1271 \mid S$.

48. Considerăm numerele $a = 2 \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+5} + 5^{n-3} \cdot 5^{4}$, cu n $\in$ ***N***. Este numărul a divizibil prin 313 ? dar prin 1 565 ?

49. Știind că $\overline{abcde}$ este un număr divizibil cu 41, să se arate că şi numărul $\overline{bcdea}$ este un număr divizibil cu 41.

50. Arătați că numărul $a = (3^{n} + 3^{n+1} + 3^{n+2})^{2}$ se divide cu 169, oricare ar fi numărul natural n.

51. Determinați numerele prime a, b şi c, ştiind că a + b = 108 şi a – b – c = 32.

(GM 5-6/2000, p. 242)

52. Determinați numerele prime a, b şi c, ştiind că 4a + 5b + 15c = 75.

53. Determinați numerele prime a, b şi c astfel încât a + 10b + 12 c = 92.

54. Determinați numerele prime $\overline{ab}$, $\overline{ba}$ şi x ştiind că $5 \cdot \overline{ab} - 7 \cdot x = \overline{ba}$.

55. Determinați numerele naturale ***n*** pentru care fiecare din numerele: n+1, n+3, n+13, n+19, n+25 este număr prim.

56. Determinați numerele naturale prime pentru care numerele n+1, n^2+3, n^3+5, n^4+7 şi n^5+9 sunt simultan numere prime.

(GM 4/1993)

57. Fie a un număr prim şi n $\in$ ***N****. Să se determine a şi n dacă este verificată relația $a^{2n} - 4 = 3 \cdot (4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{1991})$.

(GM 1/1993)

58. Să se găsească toate perechile de numere naturale a căror sumă este 87, ştiind că diferența numerelor este un divizor al lui 87.

59. Numerele 2 435, 342 şi 4 527, împărțite la acelaşi număr natural, dau respectiv resturile 35, 42 şi 27. Să se afle numărul la care au fost împărțite.

60. Numerele 9 551, 898 şi 1 959, împărțite la acelaşi număr dau, respectiv, resturile: 31, 82, 55. Să se determine cel mai mic împărțitor.

61. Patru autobuze pleacă, din acelaşi loc şi în acelaşi timp, în patru direcții diferite. Plecările au loc pentru fiecare traseu la următoarele intervale de timp: 5 minute, 8 minute, 12 minute şi 18 minute. O plecare simultană are loc la ora 7 dimineața. Care sunt orele zilei la care au loc celelalte plecări simultane ?

62. Suma a două numere naturale este 1 089 iar c.m.m.d.c. al lor este 121. Să se afle numerele.

63. Să se găsească numerele naturale a şi b în fiecare din următoarele situații:

(1) (a,b) = 18 şi a + b = 180.

(2) (a,b) = 8 şi $a \cdot b = 1344$, unde (a,b) reprezintă c.m.m.d.c. al numerelor a şi b.

64. Determinați numerele naturale a şi b astfel încât $a^2 + b^2 = 832$ şi (a,b) = 18.

65. Determinați numerele naturale a şi b, care satisfac simultan:
(a, b) = 28 şi [a, b] = 784.

66. Determinați toate numerele naturale a, b şi c, ştiind că au loc simultan:
(a, b) = 4, (a, c) = 6, (b, c) = 10, unde (a, b) reprezintă c.m.m.d.c. al numerelor a şi b.

67. Să se determine numerele naturale a şi b ştiind că $3a + 5b = 180$ şi $(a,b) = 10$.

68. Fie x, y şi z numere naturale nenule şi $a = 3x+4y+5z$, $b = 2x+5b+8c$.

a) Calculaţi a + 2b şi 3a – b.

b) Dacă a se divide cu 7, este adevărat că şi b este divizibil cu 7? Justificaţi.

c) Dacă b se divide cu 7, este adevărat că şi a este divizibil cu 7? Justificaţi.

69. Determinaţi numerele prime a, b şi c astfel încât $3a + 6b + 2c = 27$.

70. Determinaţi numerele prime a, b şi c, ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile: $a + b + c = 86$ şi $a + c = 55$.

71 .Să se determine numărul natural A de forma $A = 2^a \cdot 3^b$, ştiind că numărul 2A are cu trei divizori mai mulţi decât A, iar 3A are cu patru divizori mai mulţi decât A.

72. Să se găsească cel mai mic număr natural cu 16 divizori pozitivi, care are în descompunerea sa doar factorii 2, 3 şi 83.

73. Să se afle produsul minim a patru numere prime distincte a căror sumă este 34.

74. Să se determine p număr prim, astfel încât $3^p + p^3$ să fie număr prim.

75. Să se determine $n, p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numerele: n , $n + 2^p$, $n + 2^{p+1}$, $n + 2^{p+2}$ să fie simultan numere prime.

(G.M. 7-8/1993)

SOLUŢII:

1. Cifra unităţilor numărului este 0. **2.** Din $a + b = 9$, $a \neq 0$, găsim: 1800, 2700, 3600, 4500, 5400, 6300, 7200, 8100, 9000. Din $a + b = 18$, $a \neq 0$, găsim: 9900. **3.** Din $(45+8a) \vdots 9 \Rightarrow a = 0$ sau $a = 9$. **4.** a). **5.** F. Exemplu: numărul 24 îndeplineşte condiţiile, dar 24 nu este divizibil prin 48. **6.** 100, 50, 30, 20, 100. **7.** Cum cifra sutelor este nenulă, suma cifrelor necunoscute poate fi 9 sau 18. Obţinem 10 numere. **8.** 7929. **9.** Numerele căutate sunt: 123453, 223452, 323451, 423450, 423459, 523458, 623467, 723456, 823455, 923454. Se divide cu 72 numărul 723456. **10.** Pătratele perfecte care interesează în problemă sunt: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Numărul format din ultimele două cifre poate fi: 12, 32, 52, 72, sau 92. Se obţin 30 de numere. **11.** 392, 2454, 3968, 9768, 7680, 34416, 28728, 17776, 16208, 5992, 2648. **12.** a) 2512, 2552, 2592; b) 1408, 2408, 3408, 4408, 5408, 6408, 7408, 8408, 9408; c) 12232, 12432, 12632, 12832. **13.** Numerele de forma dată sunt divizibile cu 125 oricare ar fi cifrele x, z şi z. Obţinem 3000 de numere. **14.** **(1)** 517, 1001, 4697, 6105, 3839, 4444, 803, 961796, 7967036; **(2)** 4444, 961796, 7967036; **(3)** 222, 661, 411. **15.** 236511. **16.** $E = 1001\cdot(a + d) + 110\cdot(b + c)$, număr divizibil cu 11. **17.** 371, 329, 273, 644, 798, 252, 616, 917, 1792, 413, 2156, 511, 16408. **18.** a) **4**6543, b) **5**7302, c) 423**5**, d) 14250**6**, e) 124**7**4, f) 5**3**102. **19.** Găsim două soluţii: 111559 sau 111629. **20.** Suma este echivalentă cu: 7·(43a+3b+2), număr divizibil cu 7. **21.** Valoarea expresiei este egală cu: 7·(658+30a+17b). **22.** Dacă z = 0, găsim: 210, 240; dacă z = 2, obținem: 222, 282; dacă z = 6, avem: 246, 276; dacă z = 8, numerele sunt: 228, 258. **23.** a) Numărul numerelor divizibile cu 6 se obține din: 6·2, 6·3,…, 6·16; sunt 16-1=15 astfel de numere. b) Sunt 45 de numere divizibile sau cu 2 sau cu 3. Deoarece 15 numere se divid cu 6, acestea fiind scoase, obținem 30 de numere. c) Numerele divizibile cu 3 şi sare nu se divid cu 2 sunt: 3·5, 3·7, …, 3·33 şi obținem suma 3·(5+7+…+33) =3·19·13 = 741. **24.** a) 66 de numere, b) 934 de numere, c) 100 de numere. **25.** Din x + y = 0 ⇒ x = y = 0, imposibil; din x + y = 3, obținem: 1215, 2115; din x + y = 6, găsim: 1515, 2415, 3315, 4215, 5115, 6015; din x + y = 9, obținem: 1815, 2715, 3615, 4515, 5415, 6315, 7215, 8115, 9015; dacă x + z = 12, obținem: 9315, 8415, 7515, 6615, 5715, 4815, 3915; dacă x + y = 18, găsim: 9915. **26.** Dacă b = 0 ⇒ a ∈ {2, 5, 8}, dacă b = 5 ⇒ a ∈{0,3,6,9}. **27.** y = 0 ⇒ x = 5, y = 5 ⇒ x = 0 sau x = 9. **28.** y = 2 ⇒ x ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}; y = 2 ⇒ x = 7; y = 4 ⇒ x = 5; y = 6 ⇒ x = 3; y = 8 ⇒ x = 1. **29.** Dacă b = 0 atunci (2a+0) $\vdots$ 3, de unde a ∈{3,6,9}; dacă b = 2 ⇒ (2a+4)$\vdots$3, de unde a∈{1,4,7}; dacă b = 4 ⇒ (2a+8)$\vdots$3, de unde a∈{2,5,8}; dacă b = 6 ⇒ (2a+12)$\vdots$3, de unde a∈{3,6,9}; dacă b = 8 ⇒ (2a+16)$\vdots$3, de unde a∈{1,4,7}. **30.** Dacă $\overline{bc}$ = 00, atunci a∈{2,5,8}; dacă $\overline{bc}$ = 25, atunci a∈{1,4,7}; dacă $\overline{bc}$ = 50, atunci a∈{0,3,6,9}; Dacă $\overline{bc}$ = 75, atunci a∈{2,5,8}. **31.** Dacă y = 0 ⇒ x = 3; dacă y = 5 ⇒ x = 8. **32.** Avem c = 0. Din $\overline{1099ab}\,\vdots\,28$ găsim condițiile: (3a+b)$\vdots$7 şi (2a+b)$\vdots$4, de unde obținem: a = 2 şi b = 8; a = 5 şi b = 6; a = 8 şi b = 4. **33.** Avem c = 0 şi $\overline{abba}\,\vdots$ 11 oricare ar fi cifrele a şi b, a ≠ 0. Din $\overline{abba}\,\vdots$ 4, folosind condiția (2b+a)$\vdots$4, obținem: dacă a = 2⇒ b∈{1,3,5,7,9}; dacă a = 4⇒ b∈{0,2,4,6,8}; dacă a = 6 ⇒ b ∈{1,3,5,7,9}; dacă a = 8 ⇒ b ∈{0,2,4,6,8}. **34.** z = 0. Dacă y = 0, x este 1, 4 sau 7; dacă y = 0, x este 2, 5 sau 8; dacă y = 4, x este 0, 3, 6 sau 9; dacă y = 6, x este 1, 4 sau 7; dacă y = 8, x este 2, 5 sau 8. **35.** Ultimele trei cifre sunt: 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875. **36.** Prima cifră este diferită de 0. Se găsesc $9\cdot10^6\cdot8$ numere. **37.** Obținem 909(a-b). **38.** Rezultă din: $\overline{abc} + \overline{(b+c)(c+a)(a+b)} = 111\cdot(a+b+c)$. **39.** Din 11·(a + b) multiplu al lui 187, obținem (a + b) un număr diferit de 0 divizibil cu 17, deci: a = 8, b = 9 sau a = 9, b = 8. **40.** z = 0. Obținem numărul: 190. **41.** **a)** Suma cifrelor numărului este 9. **b)** Dacă n = 1, avem 615 $\vdots$ 15; dacă n > 1, diferența este un număr de forma $\overline{99...9615}$, număr divizibil cu 15. **c)** $5^n\cdot31$. **d)** $6^n\cdot13$. **e)** $72^n\cdot15$. **f)** $9^n\cdot5^{3n}\cdot30$. **g)** $5^{2n}\cdot7^{2n}\cdot11^{2n}\cdot13$. **h)** $81^n\cdot121^n\cdot125^n\cdot181$; 1991 = 11 · 181. **42.** $A = 17\cdot21^n$, $B = 29\cdot35^n$. **43.** $a = 1285\cdot35^n$, $b = 1117\cdot15^n$. **44.** **a)** $E = 6^n\cdot11$; **b)** E = 66. **45.** Grupăm termenii câte patru. **46.** Avem: $a = 5^{n+1}\cdot(2+3\cdot625+1) = 5^{n+1}\cdot2\cdot3\cdot313$. **47.** Avem $41\cdot15^n$ şi 1271 = 41·51. **48.** $a = 5^{n+1}\cdot1878$. Avem 1878 $\vdots$ 313 şi 1878 nu este divizibil la 1565. **49.** Fie $A = \overline{abcde}$, $B = \overline{bcdea}$. Avem: B = 10A + a – 10000000a = 10A – 99999 · a. Cum A $\vdots$ 41, prin ipoteză şi 99999 $\vdots$ 41 ⇒ B $\vdots$ 41. **50.** $a = 3^{3n}\cdot169$. **51.** Din a + b = 108 ⇒ a şi b sunt prime impare, deci a – b este număr par. Din a – b – c = 32 ⇒ c este număr prim par, deci: c = 2. Din a + b = 108 şi a – b = 34, găsim: a = 71, b = 37. **52.** Din 4a = 5(15 – b – 3c), a prim şi a divizibil prin 5 ⇒ a = 5.

În continuare avem: $b + 3c = 11$, $c < 5$, deci $c \in \{2, 3\}$. Dacă $c = 2$, atunci $b = 5$. Dacă $c = 3$, atunci $b = 2$. **53.** Din 10b, 12c şi 92 numere pare $\Rightarrow$ a este număr par prim. Cum a este număr prim par $\Rightarrow a = 2$. Avem apoi: $5b + 6c = 45$. Cum 5b şi 45 sunt divizibile cu $5 \Rightarrow 6c \vdots 5$, deci $c \vdots 5$, de unde $c = 5$, apoi $b = 3$. **54.** Avem: $5\cdot(10\cdot a + b) - 7\cdot x = 10\cdot b + a$, de unde $7\cdot(7\cdot a - x) = 5\cdot b$. Cum $5\cdot b$ se divide cu 7 şi b este număr prim $\Rightarrow b = 7$. În continuare: $7\cdot a - x = 5$, a fiind cifră şi $\overline{7a}$ este număr prim $\Rightarrow$ a este cifră impară. Cum 7a şi 5 sunt impare $\Rightarrow$ x este număr par prim $\Rightarrow x = 2$, apoi: $a = 1$. Aşadar, $x = 2$, $\overline{ab} = 17$ şi $\overline{ba} = 71$. **55.** Pentru $n = 4$. **56.** Pentru $n = 1 \Rightarrow n^2+3 = 4$ care nu este număr prim. Pentru $n = 3$, găsim numerele prime: 3, 7, 13, 23, 41. Pentru $n \geq 3$, dacă $n = 3k$, $k \in \mathbf{N}$, $n^2 + 3$ nu este prim; dacă $n = 3k+1$, $k \in \mathbf{N}$, $n^3 + 5 = M_3 + 1 + 3 = M_3$ nu este prim, dacă $n = 3k + 2$, $k \in \mathbf{N}$, numărul $n + 1$ nu este prim. Aşadar, singura soluție este $n = 2$. **57.** Din $3\cdot(4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{1991})$ număr par $\Rightarrow a^{2n} - 4$ trebuie să fie număr par, de unde a trebuie să fie număr par şi prim, deci: $a = 2$. Avem: $2^{2n} - 4 = 4^n - 4$. Fie $x = 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{1991}$, de unde: $x = 4 + 4 \cdot (4 + 4^2 + \ldots + 4^{1990})$, $x = 4 + 4 \cdot (x - 4^{1991})$ şi $x = (4^{1992} - 4): 3$, $4^n = 4 + 4^{1992} - 4 \Rightarrow n = 1992$. **58.** Din $a+b = 87$ şi $87 \vdots (a-b)$, $a > b$, deducem: $a-b = 1$, $a-b = 3$, $a-b = 29$, $a-b = 87$. Obținem perechile: $a = 44$, $b = 43$; $a = 45$, $b = 42$; $a = 58$, $b = 29$; $a = 87$, $b = 0$. **59.** Din $2435 = nq_1+35$, $342 = nq_2 + 42$ şi $4527 = nq_3 + 27$, deducem: $2400 = nq_1$, $300 = nq_2$ şi $4500 = nq_3$. Cmmdc al numerelor 2400, 300 şi 4500 este 300, deci: $n = 300$. Numărul găsit nu este unic; oricare alt număr mai mare decât 35, 42 şi 27 şi este divizor al lui 300 satisface cerințele problemei. Aşadar: $n \in \{50,60,75,100,150,300\}$. **60.** 272. **61.** $[5,8,12,18] = 360$ (minute). La orele: 7, 13, 19, 01. **62.** Fie x şi y cele două numere. Avem $x = 121a$ şi $y = 121b$, cu $(a,b) = 1$, $121(a+b) = 1089$, de unde $a+b = 9$. Avem posibilitățile: $a = 1$, $b = 8$; $a = 2$, $b = 7$; $a = 3$, $b = 6$; $a = 4$, $b = 5$, de unde, numerele căutate sunt: 121 şi 968; 242 şi 847; 484 şi 605. **63. a)** Din $a = 18m$, $b = 18n$, $(m,n) = 1$ şi $a+b = 180 \Rightarrow m+n = 10$, de unde, perechile de numere sunt: 18 şi 162; 54 şi 126. b) Găsim perechile de numere: 8 şi 168; 24 şi 56. **64.** Fie $a = 8m$, $b = 8n$, cu $(m,n) = 1$. Găsim: $m^2 + n^2 = 13$, de unde $m^2 = 13 - n^2$, $n^2 < 13 \Rightarrow n \in \{1,2,3\}$. Obținem numerele: 16 şi 24 **65.** Folosim $ab = (a,b) \cdot [a,b]$, apoi urmăm calea exercițiului 70. Găsim perechile de numere: 28 şi 784; 56 şi 392; 112 şi 196. **66.** a este multiplu de 4 şi 6, deci $a = 12m$, b este multiplu de 4 şi 10, deci $b = 20n$, c este multiplu de 6 şi 10, deci $c = 30p$, unde m, n şi p sunt numere naturale nenule. **67.** Din $a = 6m$, $b = 10n$, $(m,n) = 1$, deducem: $3m+5 n = 18$. Cum $3m = 18-5n \Rightarrow$ n poate fi: 1, 2 sau 3. Singura soluție este: $a = 10$, $b = 30$. **68.** a) $a+2b = 7(x+2y+3z)$, $3a+b = 6x+8y+10z$. b) Din $7 \mid a$ şi $7 \mid (a+2b)$, $(a,b) = 1 \Rightarrow 7 \mid b$. c) Din $7 \mid (a+2b)$, $7 \mid b \Rightarrow 7 \mid a$. **69.** Din $2c = 3(9 - a - 2b) \Rightarrow 3 \mid c$ şi cum c este număr prim $\Rightarrow c = 3$. Avem: $a + 2b = 7$. Cum a şi b sunt cifre deducem: $a = 3$ şi $b = 2$. **70.** Cele trei numere sunt: 2, 31 şi 53. **71.** A are $(a+1)(b+1)$ divizori, 2A are $(a+2)(b+1)$ divizori, 3A are $(a+1)(b+2)$ divizori. Din $(a+2)(b+1) - (a+1)(b+1) = 3$ şi $(a+1)(b+2) - (a+1)(b+1) = = 4$, găsim: $(b+1)(a+2-a-1) = 3$, de unde $b = 2$; $(a+1)(b+2-b-1) = 4$, de unde $a = 3$. Numărul căutat este 72. **72.** Din $A = 2^x \cdot 3^y \cdot 83^z$, cu numărul divizorilor $(x+1)(y+1)(z+1) = 16$, cu $x+1 \geq 2$, $y+1 \geq 2$, $z+1 \geq 2$ (fiecare număr conține fiecare din factorii dați cel puțin cu exponentul 1). Din $2 < 3 < 83$ şi A cel mai mic $\Rightarrow$ x

$\geq y \geq z$. Avem: $16 = 16\cdot1\cdot1 = 8\cdot2\cdot1 = 4\cdot2\cdot2$. Din $x+1 = 16 \Rightarrow x = 15$, $y+1 = 1 \Rightarrow y = 0$ nu convine. La fel dacă $x+1 = 8$, $z + 1 = 1$. Convenabilă este situația: $x+1 = 4$, $y+1 = 2$, $z+1 = 2$. Obținem numărul $A = 1992$. **73.** 34 fiind număr par $\Rightarrow$ 2 nu poate fi termen al sumei. Căutăm numerele printre: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …. Fie $a < b < c < d$ cele patru numere. Avem: $d = 34–(a+b+c)$, valoarea minimă pentru $a+b+c$ este 15, de unde: $d \leq 34–15 = 19$. Aşadar, $\{a, b, c, d\} \subset \{3,5,7,11,13,17,19\}$. De aici obținem numerele: 3, 5, 7, 19 cu produsul 1995, sau 3, 7, 11, 13 cu produsul 3003. Valoarea minimă este 1995. **74.** Fie $A = 3^p + p^3$. Dacă $p = 2$, obținem $A = 17$ număr prim. Dacă $p \geq 3$ şi p număr prim el este de forma $4k+1$ sau $4k+3$, $k\in\mathbf{N}$. Avem: $A = 3^p + 1 + p^3 –1$. Cum $3^p + 1 = (4-1)^p + 1 = M_4 – 1 + 1 = M_4$,$p^3 – 1 =(4k+1)^3 – 1 = M_4$ şi $p^3 – 1 = (4k+3)^3 –1 = M_4 + 27 – 1 = M_2$. Aşadar, pentru oricare $n \geq 3$ numerele de forma dată sunt compuse. Singura soluție este $p = 2$.**75.** Numărul n fiind prim, el este de forma $3k+1$ sau $3k+2$. Analizând numerele găsim singura soluție $n = 3$, $p = 1$ sau $n = 3$, $p = 2$.

4. Numere raționale pozitive

4.1. Determinarea unei fracții folosind divizibilitatea în mulțimea numerelor naturale

Amintim rezultatele teoretice care vor fi necesare în rezolvarea problemelor prezentate la această temă:

- O pereche de numere naturale a şi b, cu $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$ se numeşte fracție.

Orice fracție reprezintă un număr, care se numeşte număr fracționar. Vom folosi cuvântul "fracție" şi pentru a desemna un număr.

- Fracțiile se clasifică astfel: subunitare $(a < b)$, echiunitare $(a = b)$ şi supraunitare $(a > b)$.
- Două fracții $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ sunt echivalente şi scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dacă $a \cdot d = b \cdot c$ $(a, b, c, d \in N,\ b, d \neq 0)$.
- A amplifica o fracție cu un număr diferit de 0 înseamnă a înmulți atât numărătorul cât şi numitorul cu acel număr.
- A simplifica o fracție cu un număr diferit de 0 înseamnă a împărți atât numărătorul cât şi numitorul cu acel număr.
- Prin amplificarea şi simplificarea unei fracții cu un număr se obține o fracție echivalentă cu fracția dată.
- O fracție $\frac{a}{b}$ se numeşte ireductibilă, dacă $c.m.m.d.c.(a, b) = 1$.

Vom prezenta câteva probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea în mulțimea numerelor naturale legate de clasificarea fracțiilor:

Model 1. Să se afle x şi y numere naturale astfel încât:

a) fracția $\frac{6}{(x+1)(y-2)}$ să fie echiunitară

b) fracția $\frac{4}{(x-1)(y-2)}$ să fie supraunitară

c) fracția $\frac{(x+1)(y-2)}{3}$ să fie subunitară.

Soluție. a) O fracție $\frac{a}{b}$ este echiunitară dacă $a = b$; deci fracția este echiunitară dacă $(x+1)(y-2) = 6$. Rezultă că $x+1$ şi $y-2$ sunt divizori naturali ai lui 6, deci avem următoarele posibilități:

$x+1 = 1, y-2 = 6$, de unde $x = 0$ şi $y = 8$

$x+1=2, y-2=3$, de unde $x=1$ şi $y=5$
$x+1=3, y-2=2$, de unde $x=2$ şi $y=4$
$x+1=6, y-2=1$, de unde $x=5$ şi $y=3$

b) Fracţia $\frac{a}{b}$ este supraunitară dacă $a>b$, deci valorile posibile ale produsului $(x-1)(y-2)$ sunt 1, 2 şi 3. Avem următoarele situaţii:

$x-1=1, y-2=1$, de unde $x=2$ şi $y=3$
$x-1=1, y-2=2$, de unde $x=2$ şi $y=4$
$x-1=2, y-2=1$, de unde $x=3$ şi $y=3$
$x-1=1, y-2=3$, de unde $x=2$ şi $y=5$
$x-1=3, y-2=1$, de unde $x=4$ şi $y=3$.

c) Fracţia $\frac{a}{b}$ este subunitară dacă $a<b$, deci valorile posibile ale produsului $(x+1)(y-2)$ sunt 0, 1 şi 2. Avem următoarele situaţii:

$x+1=1, y-2=1$, de unde $x=0$ şi $y=3$
$x+1=1, y-2=2$, de unde $x=0$ şi $y=4$
$x+1=2, y-2=1$, de unde $x=1$ şi $y=3$
$y-2=0, x+1$ orice număr natural, de unde $y=2, x\in\mathbf{N}$
$x+1$ nu poate fi 0 pentru $x\in\mathbf{N}$.

Alt tip de probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea în mulţimea numerelor naturale sunt legate de simplificarea fracţiilor:

Model 2. Arătaţi că următoarele fracţii se pot simplifica:

a) $\frac{n^2+n}{2n+4}\ (n\in\mathbf{N})$

b) $\frac{10^n-1}{18}\ (n\in\mathbf{N})$

c) $\frac{123412341234}{876587658765}$

d) $\frac{3^1+3^3+3^5+\ldots+3^{155}}{91}$

e) $\frac{9^{40}-7^{40}}{30}$

f) $\frac{2^{n+1}\cdot3^n+2^n\cdot3^{n+1}+6^{n+1}}{2^{n+2}\cdot3^{n+2}+5\cdot6^{n+1}}\ (n\in\mathbf{N})$

Soluție. a) Numărătorul se poate scrie $n(n+1)$. Produsul a două numere naturale consecutive este par. Numitorul se scrie $2(n+2)$, deci este divizibil cu 2. Fracția se poate simplifica cu 2.

b) Se observă că $10^n-1=1\underbrace{0...0}_{n\ cifre}-1=\underbrace{99...9}_{n\ cifre}$, pentru $n\geq 1$, iar pentru $n=0$, $10^n-1=0$, deci numărătorul se divide cu 9 pentru orice $n\in\mathbf{N}$; fracția se simplifică cu 9.

c) Numărătorul se divide cu 1234, iar numitorul se divide cu 8765; obținem $\frac{1234\cdot 100010001}{8765\cdot 100010001}$, deci fracția se poate simplifica cu 100010001.

d) Suma de la numărător are (155-1):2+1 termeni, adică 78 termeni; 78 se divide cu 3, deci se pot face grupe de câte 3 termeni, deoarece $3+3^3+3^5=273=3\cdot 7\cdot 13$, iar $91=7\cdot 13$. Numărătorul se scrie:

$$(3^1+3^3+3^5)+(3^7+3^9+3^{11})+...+(3^{151}+3^{153}+3^{155})=$$
$$=273+3^6(3^1+3^3+3^5)+...+3^{150}(3+3^3+3^5)=$$
$$=3\cdot 7\cdot 13(1+3^6+...+3^{150})$$. Fracția se simplifică cu $7\cdot 13$.

e) Se stabilește ultima cifră a numărului $9^{40}-7^{40}$: $u(9^{40})=1$ și $u(7^{40})=u(7^{4\cdot 10})=1$, deci $u(9^{40}-7^{40})=0$, numărătorul se divide cu 10, deci fracția se poate simplifica cu 10.

f) Se poate scrie $\frac{2^n\cdot 2\cdot 3^n+2^n\cdot 3^n\cdot 3+2^n\cdot 3^n\cdot 6}{2^n\cdot 2^2\cdot 3^n\cdot 3^2+5\cdot 2^n\cdot 3^n\cdot 6}$ și în continuare $\frac{2^n\cdot 3^n\cdot(2+3+6)}{2^n\cdot 3^n(4\cdot 9+5\cdot 6)}$, adică $\frac{2^n\cdot 3^n\cdot 11}{2^n\cdot 3^n\cdot 66}$, fracția se poate simplifica cu $2^n\cdot 3^n\cdot 11\cdot$

Probleme rezolvate

R4.1.1. Determinați cea mai mică și cea mai mare fracție de forma $\frac{\overline{1x3y}}{\overline{6ab4}}$ care se poate simplifica cu 36.

Soluție. Trebuie să se determine numerele de forma $\overline{1x3y}$ și $\overline{6ab4}$ divizibile cu 36; 36=4·9, 4 și 9 sunt prime între ele. Avem $\overline{1x3y}\vdots 4$ și $\overline{1x3y}\vdots 9$; numerele care îndeplinesc condițiile sunt 1332 și 1836. Iar, la numitor $\overline{6ab4}\vdots 4$ și $\overline{6ab4}\vdots 9$. Numerele care îndeplinesc condițiile sunt 6804, 6624, 6444, 6264, 6084 și 6984.

Cea mai mică fracție care îndeplinește condiția cerută este $\frac{1332}{6984}$, iar cea mai mare fracție este $\frac{1836}{6084}$.

R4.1.2. Să se arate că fracția:

$$\frac{2^{2n+6}\cdot 5^{2n+1}\cdot 7^{n}+28^{n+1}\cdot 5^{2n+2}+4^{n+1}\cdot 5^{2n+1}\cdot 7^{n+2}}{3^{n}\cdot 7^{n+2}\cdot 11^{n+1}+21^{n+1}\cdot 11^{n+2}-40\cdot 3^{n+3}\cdot 77^{n}}$$

se poate simplifica cu 2000 pentru orice $n\in\mathbf{N}$.

Soluție. Pe baza proprietăților operațiilor cu puteri, avem:

$$\frac{2^{2n}\cdot 5^{2n}\cdot 7^{n}\cdot(2^{6}\cdot 5+2^{2}\cdot 7\cdot 5^{2}+2^{2}\cdot 5\cdot 7)}{3^{n}\cdot 7^{n}\cdot 11^{n}\cdot(7^{2}\cdot 11+3\cdot 7\cdot 11^{2}-40\cdot 3^{3})},$$

de unde rezultă în urma efectuării calculelor fracția $\frac{2^{2n}\cdot 5^{2n}\cdot 2000}{3^{n}\cdot 11^{n}\cdot 2000}$, deci fracția se poate simplifica cu 2000.

R4.1.3. a) Să se efectueze

$$\frac{3+3^{2}+3^{3}+3^{4}+3^{5}+3^{6}+3^{7}+3^{8}+3^{9}+3^{10}}{3+3^{3}+3^{5}+3^{7}+3^{9}}$$

b) Dacă $A=3+3^{2}+3^{3}+...+3^{100}$, să se arate că A se divide cu 12 şi că

$$\frac{A}{3+3^{3}+3^{5}+...+3^{97}+3^{99}}\in\mathbf{N}.$$

Soluție. a) Pentru a simplifica fracția se grupează termenii de la numărător câte 5: $(3+3^{3}+3^{5}+3^{7}+3^{9})+(3^{2}+3^{4}+3^{6}+3^{8}+3^{10})$, de unde rezultă $(3+3^{3}+3^{5}+3^{7}+3^{9})(1+3)$, deci numărătorul este egal cu $(3+3^{3}+3^{5}+3^{7}+3^{9})\cdot 4$. După simplificare se obține 4.

b) Se observă că $3+3^{2}=12$, deci cei 100 termeni ai lui A se grupează câte 2 şi se obține $A=12(1+3^{2}+3^{4}+...+3^{98})$, deci A se divide cu 12. Pentru a simplifica fracția se grupează termenii de la numărător câte 2:
$(3+3^{2})+(3^{3}+3^{4})+(3^{5}+3^{6})+...+(3^{99}+3^{100})$, de unde rezultă
$3(1+3)+3^{2}(1+3)+3^{5}(1+3)+...+3^{99}(1+3)$ sau $4(3+3^{3}+3^{5}+...+3^{99})$.
Fracția se simplifică cu $3+3^{3}+3^{5}+...+3^{99}$. După simplificare se obține 4.

R4.1.4. Să se determine numerele naturale n pentru care următoarele fracții să fie numere naturale:

a) $\frac{15}{2n-1}$; b) $\frac{n+5}{n+1}$; c) $\frac{3n+14}{n-2}$; d) $\frac{2n+3}{3n+2}$.

Soluție. a) Fracția $\frac{15}{2n-1}$ este număr natural dacă $2n-1$ este divizor natural al lui 15, adică $2n-1\in\{1,3,5,15\}$, de unde se obține $n\in\{1,2,3,8\}$.

b) Fracția $\frac{n+5}{n+1}$ se poate scrie $\frac{n+1+4}{n+1}$, adică $1+\frac{4}{n+1}$. Problema se reduce la $n+1$ este divizor natural al lui 4, deci $n+1\in\{1,2,4\}$, de unde $n\in\{0,1,3\}$.

c) Fracția $\frac{3n+14}{n-2}$ se poate scrie $\frac{3n-6+20}{n-2}$, adică $3+\frac{20}{n-2}$. Problema se reduce la $n-2$ este divizor natural al lui 20, deci $n-2 \in \{1,2,4,5,10,20\}$, de unde $n \in \{3,4,6,7,12,22\}$.

d) Dacă $\frac{2n+3}{3n+2}$ este număr natural, atunci şi $3 \cdot \frac{2n+3}{3n+2}$ este natural. Avem $\frac{6n+9}{3n+2} = \frac{6n+4+5}{3n+2} = 2+\frac{5}{3n+2}$ este natural când $3n+2 \in \{1,5\}$, adică pentru $n=1$.

R4.1.5. Să se determine numerele naturale p şi q astfel încât

$$\frac{5^{p+1}+3}{5^q-5^p}=2.$$

Soluție. Egalitatea din enunț se mai poate scrie $5^{p+1}+3=2(5^q-5^p)$. Toate puterile cu exponent natural nenul ale lui 5 au ultima cifră 5, $p+1 \neq 0$, deci $5^{p+1}+3$ are ultima cifră 8. Rezultă că ultima cifră a numărului $2(5^q-5^p)$ este 8 şi ținând cont de relația dată, $p=0$ şi $q=1$.

R4.1.6. Să se determine perechile de numere naturale (x,y), care verifică egalitatea:

$$xy+y-3x=11.$$

Soluție. Egalitatea dată se poate scrie $y(x+1)=3x+11$, de unde $y=\frac{3x+11}{x+1}$ sau $y=3+\frac{8}{x+1}$. Pentru ca y să fie număr natural, avem $x+1 \in D_8$, de unde $x \in \{0,1,3,7\}$. Se deduce soluția problemei: (0,11), (1,7), (3,5), (7,4).

4.2. Fracții reductibile şi fracții ireductibile

O fracție $\frac{a}{b}$, *a, b* numere naturale, $b \neq 0$ este ireductibilă dacă şi *a* şi *b* sunt prime între ele.

O fracție care nu este ireductibilă, deci care se poate simplifica cu un număr natural diferit de 0, se spune că este reductibilă (sau simplificabilă).

Model. a) Să se arate că fracția $\frac{3n+2}{5n+3}$ este ireductibilă pentru orice *n* număr natural.

b) Să se arate că fracția $\frac{(n^2+n)(n+2)}{9}$ este reductibilă pentru orice *n* număr natural.

Soluţie. a) Fie *d* c.m.m.d.c. al numerelor $3n+2$ şi $5n+3$, deci $(3n+2)\vdots d$ şi $(5n+3)\vdots d$. Conform proprietăţilor divizibilităţii numerelor naturale $5(3n+2)\vdots d$ şi $3(5n+3)\vdots d$, ceea ce este echivalent cu $(15n+10)\vdots d$ şi $(15n+9)\vdots d$; atunci *d* divide diferenţa lor, prin urmare $1\vdots d$ şi cum 1 are divizor numai pe 1, rezultă $d=1$. Ştim că *d* este c.m.m.d.c. al numărătorului şi numitorului, atunci acestea sunt prime între ele şi fracţia este ireductibilă.

b) Numărătorul se scrie $n(n+1)(n+2)$. Produsul a trei numere naturale consecutive se divide cu 6, deci fracţia se poate simplifica cu 3.

Probleme rezolvate

R4.2.1. Să se arate că fracţia $\frac{2^{2001}\cdot n+2^{2000}+2^{1999}+...+2^2+2+1}{2^{2000}\cdot n+2^{1999}+2^{1998}+...+2^2+2+1}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$.

Soluţie. Fie *d* c.m.m.d.c. al numărătorului şi numitorului, deci

$$(2^{2001}\cdot n+2^{2000}+2^{1999}+...+2^2+2+1)\vdots d \text{ şi}$$

$$(2^{2000}\cdot n+2^{1999}+2^{1998}+...+2^2+2+1)\vdots d.$$

Atunci ţinând cont de proprietăţile divizibilităţii:

$$(2^{2001}\cdot n+2^{2000}+2^{1999}+...+2^2+2+1)\vdots d \text{ şi}$$

$$2(2^{2000}\cdot n+2^{1999}+2^{1998}+...+2^2+2+1)\vdots d,$$

de unde avem mai departe:

$$(2^{2001}\cdot n+2^{2000}+2^{1999}+...+2^2+2+1)\vdots d \text{ şi}$$

$$(2^{2001}\cdot n+2^{2000}+2^{1999}+...+2^3+2^2+2)\vdots d,$$

atunci şi diferenţa lor se divide cu *d*, deci $1\vdots d$, rezultă că $d=1$. C.m.m.d.c. al numărătorului şi numitorului este 1, deci sunt prime între ele, fracţia este ireductibilă.

R4.2.2. Arătaţi că fracţia:

$$\frac{3\cdot5\cdot7+3\cdot10\cdot14+3\cdot15\cdot21+...+3\cdot125\cdot175}{2\cdot4\cdot6+2\cdot8\cdot12+2\cdot12\cdot18+...+2\cdot100\cdot150}$$

este reductibilă.

Soluţie. Fracţia se poate scrie: $\frac{3\cdot5\cdot7\cdot(1+2\cdot2+3\cdot3+...+25\cdot25)}{2\cdot4\cdot6\cdot(1+2\cdot2+3\cdot3+...+25\cdot25)}$, deci fracţia se poate simplifica cu $1+2^2+3^2+...+25^2$.

R4.2.3. Să se arate că fracţia $\frac{7n+9}{(3n+4)(4n+5)}$ este ireductibilă, pentru orice număr natural *n*.

Soluţie. Se arată că $3n+4$ şi $4n+5$ sunt prime între ele; fie *d* c.m.m.d.c. al numerelor $3n+4$ şi $4n+5$, deci $(3n+4)\vdots d$ şi $(4n+5)\vdots d$, de unde $4(3n+4)\vdots d$ şi

$3(4n+5)\vdots d$, deci $[4(3n+4)-3(4n+5)]\vdots d$, adică $1\vdots d$, de unde $d=1$. C.m.m.d.c. al lui $3n+4$ şi $4n+5$ este 1, deci ele sunt prime între ele. De aici rezultă că $3n+4+4n+5$, adică $7n+9$ şi $(3n+4)(4n+5)$ sunt prime între ele, deci fracţia $\frac{7n+9}{(3n+4)(4n+5)}$ este ireductibilă.

R4.2.4. Aflaţi numerele naturale *n* pentru care fracţia $\frac{3n+5}{2n+7}$ este reductibilă, apoi calculaţi suma primelor 2001 de numere astfel obţinute, considerate în ordine crescătoare.

Soluţie. Fie d c.m.m.d.c. al numerelor $3n+5$ şi $2n+7$, deci $(3n+5)\vdots d$ şi $(2n+7)\vdots d$, de unde $2(3n+5)\vdots d$ şi $3(2n+7)\vdots d$, deci şi diferenţa lor se divide cu *d*, $[(6n+21)-(6n+10)]\vdots d$, adică $11\vdots d$, rezultă că $d=11$ (se cere ca fracţia să fie reductibilă). Se poate scrie $3n+5=11p$ şi $2n+7=11q$, $p\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}^*$, deci $n-2=11(p-q)$ sau $n-2=11k$, $k\in\mathbf{N}$, de unde $n=11k+2$.

Numerele naturale pentru care fracţia dată este reductibilă sunt de forma $n=11k+2$, $k\in\mathbf{N}$. Se cere suma primelor 2001 numere; avem

$$(11\cdot 0+2)+(11\cdot 1+2)+(11\cdot 2+2)+\ldots+(11\cdot 2000+2)=$$

$$=11\cdot(1+2+\ldots+2000)+2\cdot 2001=11\cdot\frac{2000\cdot 2001}{2}+4002=$$

$$=11\cdot 1000\cdot 2001+4002=22015002.$$

R4.2.5. Să se arate că dacă suma a două fracţii ireductibile este un număr natural, atunci cele două fracţii au acelaşi numitor.

Soluţie. Fie $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ cele două fracţii ireductibile, unde $(a,b)=1$ şi $(c,d)=1$. Se dă $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=n$, $n\in\mathbf{N}$, de unde $ad+bc=nbd$ (1).

Din (1) rezultă că $bc=d(nb-a)$, de unde $(bc)\vdots d$, dar $(c,d)=1$, deci $b\vdots d$ (2).

Din (1) rezultă că $ad=b(nd-c)$, de unde $(ad)\vdots b$, dar $(a,b)=1$, deci $d\vdots b$ (3).

Din (2) şi (3) rezultă că $b=d$.

R4.2.6. Fie $A=\{1^{2002},2^{2002},3^{2002},4^{2002},5^{2002}\}$. Să se arate că oricare ar fi $x\in A$, există $y,z\in A$, $x\neq y\neq z\neq x$, astfel încât fracţia $\frac{x+y}{x+z}$ să fie reductibilă.

Soluţie. Dacă $x=1^{2002}$ luăm $y=2^{2002}$ şi $z=3^{2002}$, atunci $u(1^{2002}+2^{2002})=5$ şi $u(1^{2002}+3^{2002})=0$, deci $\frac{x+y}{x+z}$ se simplifică cu 5.

Dacă $x = 2^{2002}$ luăm $y = 1^{2002}$ şi $z = 4^{2002}$, atunci $u(x+y) = 5$ şi $u(x+z) = 0$, deci $\frac{x+y}{x+z}$ se simplifică cu 5.

Dacă $x = 3^{2002}$ luăm $y = 1^{2002}$ şi $z = 4^{2002}$, atunci $u(x+y) = 0$ şi $u(x+z) = 5$, deci $\frac{x+y}{x+z}$ se simplifică cu 5.

Dacă $x = 4^{2002}$ luăm $y = 2^{2002}$ şi $z = 3^{2002}$, atunci $u(x+y) = 0$ şi $u(x+z) = 5$, deci $\frac{x+y}{x+z}$ se simplifică cu 5.

Dacă $x = 5^{2002}$ luăm $y = 1^{2002}$ şi $z = 3^{2002}$, atunci $u(x+y) = 6$ şi $u(x+z) = 4$, deci $\frac{x+y}{x+z}$ se simplifică cu 2.

4.3. Calculul unor sume

În programa şcolară se învaţă adunarea numerelor fracţionare (sau a numerelor raţionale). În acest paragraf se va prezenta calculul unor sume finite care nu va fi făcut respectând algoritmul obişnuit de la orele de clasă.

Model. Să se calculeze $S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{98\cdot 99} + \frac{1}{99\cdot 100}$.

Soluţie. Pentru a calcula această sumă trebuie să folosim următoarea remarcă: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Suma dată se scrie

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right),$$

iar după efectuarea calculelor: $S = 1 - \frac{1}{100}$, adică $S = \frac{99}{100}$.

Generalizare. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = 1 - \frac{1}{n}$

de unde se poate deduce că rezultatul unei astfel de sume este întotdeauna un număr subunitar.

Observaţie. Se poate aplica rezultatul obţinut mai sus pentru calculul următoarelor sume:

$$S_1 = \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{19\cdot 20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$S_2 = \frac{1}{10\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 12} + \frac{1}{12\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{49\cdot 50} = \frac{1}{10} - \frac{1}{50} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$$

$$S_3 = \frac{5}{20\cdot 21}+\frac{5}{21\cdot 22}+\frac{5}{22\cdot 23}+...+\frac{5}{59\cdot 60}=$$

$$=5\cdot\left(\frac{1}{20\cdot 21}+\frac{1}{21\cdot 22}+\frac{1}{22\cdot 23}+...+\frac{1}{59\cdot 60}\right)=$$

$$=5\cdot\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{60}\right)=5\cdot\frac{2}{60}=\frac{1}{6}$$

Remarcă. Dacă numitorul fracției nu este produsul a două numere naturale consecutive, pentru a calcula suma trebuie să știm că:

$$\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k};\quad n,k\in\mathbf{N}^*$$

Vom folosi această remarcă pentru a calcula suma

$$S=\frac{5}{1\cdot 6}+\frac{5}{6\cdot 11}+\frac{5}{11\cdot 16}+...+\frac{5}{101\cdot 106}.$$

Suma devine:

$$S=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)+...+\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{106}\right),$$

iar după efectuarea calculelor: $S=1-\frac{1}{106}$, adică $S=\frac{105}{106}$.

Observații. Să se calculeze

$$S=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{28\cdot 31}.$$

În acest caz nu putem aplica nici una din formulele de mai sus, pentru că la numărător nu este diferența celor doi factori de la numitorul fracției. Atunci vom calcula

$$3\cdot S=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+...+\frac{3}{28\cdot 31},$$

folosind formula $\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k};\quad n,k\in\mathbf{N}^*$ și vom avea:

$$3\cdot S=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+...+\left(\frac{1}{28}-\frac{1}{31}\right),$$

adică $3\cdot S=1-\frac{1}{31}$, deci $3\cdot S=\frac{30}{31}$ și de aici deducem $S=\frac{10}{31}$.

Probleme rezolvate

R4.3.1. Să se calculeze suma:

$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...1998}$$

Soluție. Calculăm sumele de la numitori, folosind:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2},\ n\in\mathbf{N}.$$

Vom avea mai departe:

$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{2\cdot 3}{2}}+\frac{1}{\frac{3\cdot 4}{2}}+...+\frac{1}{\frac{1998\cdot 1999}{2}},$$

efectuând obținem:

$$S=\frac{1}{1}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+...+\frac{2}{1998\cdot 1999},$$

adică

$$S=2\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{1998\cdot 1999}\right),$$

deci $S=2\cdot\left(1-\frac{1}{1999}\right)$ rezultă $S=2\cdot\frac{1998}{1999}$, $S=\frac{3996}{1999}$.

R4.3.2. Să se compare:

$$a=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{1997\cdot 1999}\quad \text{și}\quad b=1-\frac{1000}{1999}.$$

Soluție. Calculăm $2\cdot a=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+...+\frac{2}{1997\cdot 1999}$, adică $2\cdot a=1-\frac{1}{1999}$ sau $2\cdot a=\frac{1998}{1999}$, de unde $a=\frac{999}{1999}$. Efectuând diferența, rezultă că $b=\frac{999}{1999}$. Rezultă că $a=b$.

R4.3.3. Să se calculeze suma:

$$S=\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+...+\frac{1}{1999\cdot 2002}+\frac{1}{2000\cdot 2003}$$

Soluție. Avem

$$3\cdot S=\frac{3}{2\cdot 5}+\frac{3}{3\cdot 6}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{5\cdot 8}+...+\frac{3}{1998\cdot 2001}+\frac{3}{1999\cdot 2002}+\frac{3}{2000\cdot 2003},$$

adică

$$3\cdot S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{1998}-\frac{1}{2001}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{1999}-\frac{1}{2002}\right)+\left(\frac{1}{2000}-\frac{1}{2003}\right),$$

iar după efectuarea calculelor rezultă că

$$3\cdot S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2001}+\frac{1}{2002}+\frac{1}{2003}\right),$$

de unde

$$S=\frac{13}{36}-\left(\frac{1}{2001}+\frac{1}{2002}+\frac{1}{2003}\right)\cdot\frac{1}{3}.$$

R4.3.4. Să se demonstreze că:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n},\quad n\in\mathbf{N}^*.$$

Remarcă. Această egalitate poartă numele de "Identitatea lui Botez-Catalan".

Soluție. Se poate scrie că

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-$$
$$-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2n}\right).$$

După efectuarea calculelor obținem:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-$$
$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right),$$

adică:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}.$$

R4.3.5. Să se calculeze următoarele sume:

$$S_1=\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{3\cdot4\cdot5}+\frac{2}{4\cdot5\cdot6}+...+\frac{2}{8\cdot9\cdot10}\quad \text{şi}$$
$$S_2=\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{3}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+...+\frac{3}{7\cdot8\cdot9\cdot10}$$

Soluție. Suma S_1 se poate scrie:

$$S_1=\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}\right)+\left(\frac{1}{4\cdot5}-\frac{1}{5\cdot6}\right)+...+\left(\frac{1}{8\cdot9}-\frac{1}{9\cdot10}\right),$$

iar după efectuarea calculelor devine: $S_1=\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{9\cdot10}$, adică $S_1=\frac{1}{6}-\frac{1}{90}$, deci $S_1=\frac{14}{90}$ sau $S_1=\frac{7}{45}$.

Suma S_2 se poate scrie:

$$S_2=\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{7\cdot8\cdot9}-\frac{1}{8\cdot9\cdot10}\right),$$

iar după efectuarea calculelor: $S_2=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{8\cdot9\cdot10}$, adică $S_2=\frac{1}{6}-\frac{1}{720}$, deci $S_2=\frac{119}{720}$.

Remarcă. O altă categorie de exerciții de calcul al unor sume ce apar la concursuri şi olimpiade se bazează pe reguli de calcul cu puteri în mulțimea numerelor naturale. Aceste exerciții sunt de felul următor:

Să se calculeze:

a) $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}, n\in\mathbf{N}^*$

b) $B=\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n-1}{n^3}+\ldots+\frac{n-1}{n^{10}}, n\in\mathbf{N}^*$

c) $C=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\ldots-\frac{1}{2^n}, n\in\mathbf{N}^*$

d) $D=\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n^2}-\ldots-\frac{n-1}{n^{10}}, n\in\mathbf{N}^*$.

Soluție. a) Se aduc fracțiile la acelaşi numitor şi vom avea

$$A=\frac{2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+2+1}{2^n} \text{ sau } A=\frac{2^n-1}{2^n},$$

ținând cont că $1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ (din Capitolul 1, tema 1.4) ($a\in\mathbf{N}^*, n\in\mathbf{N}^*$), suma puterilor consecutive ale unui număr natural.

b) Pentru calculul lui *B* folosim din nou scrierea fiecărui termen ca diferență şi vom avea:

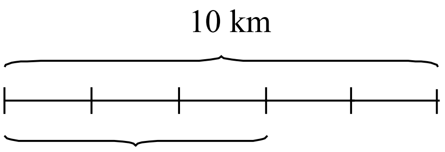
$$B=\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n^8}-\frac{1}{n^9}\right)+\left(\frac{1}{n^9}-\frac{1}{n^{10}}\right),$$

iar după efectuarea calculelor $B=1-\frac{1}{n^{10}}$ sau $B=\frac{n^{10}-1}{n^{10}}$.

4.4. Aflarea unei fracții dintr-un număr

Model. Mihai are de parcurs 30 km până la o cabană. El parcurge trei cincimi din distanță cu bicicleta şi restul drumului cu o maşină. Câți kilometri parcurge cu bicicleta?

Soluție. Pentru a înțelege mai bine, apelăm la un desen ajutător, unde am figurat drumul parcurs de Mihai şi observăm că:



$\frac{5}{5}$ din drum reprezintă 30 km

$\frac{1}{5}$ din drum reprezintă 30:5=6 km

$\frac{3}{5}$ din drum reprezintă 6·3=18 km

Deci, Mihai a parcurs cu bicicleta 18 km.

• Pentru a afla o fracție dintr-un număr înmulțim fracția cu acel număr.

$$\frac{a}{b} \text{ din } A \text{ înseamnă } \frac{a}{b} \cdot A$$

Remarcă. • Pentru a afla un număr când se ştie o fracție din el procedăm astfel:

$$\text{dacă } \frac{a}{b} \text{ din } x \text{ este } B\text{, atunci } x = B : \frac{a}{b}$$

Probleme rezolvate

R4.4.1. Două robinete pot umple împreună un bazin în 16 ore. Dacă robinetele sunt deschise timp de 12 ore şi se opreşte primul atunci al doilea robinet va umple bazinul singur în 20 ore. În cât timp ar umple bazinul fiecare robinet dacă ar curge singur?

Soluție. Dacă cele două robinete pot umple împreună bazinul în 16 ore, atunci într-o oră, împreună, pot umple $\frac{1}{16}$ din bazin. Cele două robinete în 12 ore pot umple $\frac{12}{16}$ din bazin, adică $\frac{3}{4}$ din bazin. Restul, adică $\frac{1}{4}$ din bazin, va fi umplut de al doilea robinet singur în 20 ore, deci al doilea robinet curgând singur va umple bazinul într-un timp de 4 ori mai mare, deci în 80 ore.

Dacă împreună cele două robinete umplu într-o oră $\frac{1}{16}$ din bazin şi al doilea umple într-o oră $\frac{1}{80}$ din bazin, atunci primul robinet umple într-o oră $\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{80}\right)$ din bazin, adică $\frac{1}{20}$ din bazin. Atunci primul robinet va umple bazinul într-un timp de 20 de ori mai mare, adică în 20 de ore.

Răspuns: Primul robinet poate umple bazinul în 20 de ore, curgând singur, iar al doilea în 80 de ore.

R4.4.2. Două robinete R_1 şi R_2 umplu fiecare acelaşi bazin în n_1, respectiv n_2 ore. Să se afle numerele naturale n_1 şi n_2, ştiind că dacă ele curg împreună umplu bazinul în 12 ore.

Soluție. Robinetele R_1 şi R_2 şi R_1+R_2 umplu într-o oră câte $\frac{1}{n_1}$, $\frac{1}{n_2}$ şi $\frac{1}{n_1+n_2}$ din bazin şi avem de rezolvat ecuația:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}=\frac{1}{12}$$

Evident $n_1 \geq 12$ şi $n_2 \geq 12$ şi notăm $n_1=12+k_1$, $n_2=12+k_2$. Avem

$$\frac{1}{12+k_1}+\frac{1}{12+k_2}=\frac{1}{12}.$$

Efectuând calculele obținem

$$12(12+k_2+12+k_1)=(12+k_1)(12+k_2),$$

de unde $k_1k_2=12^2=2^4\cdot 3^2=144$. Numărul k_1 poate fi luat oricare din divizorii lui 14 în 5·3=15 moduri şi k_2 este restul până ce produsul devine 144. Obținem pentru (R_1,R_2) posibilitățile (k_1,k_2) egale cu: (1,144), (2,72), (3,48), (4,36), (6,24), (8,18), (9,16), (12,12). Dacă nu contează numerotarea robinetelor obținem 8 soluții.

Observație. Dacă robinetele R_1 şi R_2 umplu bazinul în *n* ore curgând împreună, numărul soluțiilor este numărul divizorilor lui n^2 $(k_1 \cdot k_2 = n^2)$. Dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ este descompunerea în factori primi a lui *n*, atunci numărul soluțiilor este $N=(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\ldots(2\alpha_k+1)$ (impar), iar dacă nu contează numerotarea robinetelor el este $N'=\frac{N+1}{2}$.

R4.4.3. Un pescar a prins un peşte despre care spune: "Coada are 1 kg, capul cântăreşte cât coada şi jumătate din trunchi, iar trunchiul cât capul şi coada la un loc". Cât cântăreşte peştele?

Soluție. Dacă trunchiul cântăreşte cât capul şi coada, adică cât capul şi 1 kg, iar capul cântăreşte cât coada şi $\frac{1}{2}$ trunchi, rezultă că trunchiul cântăreşte cât $\frac{1}{2}$ trunchi şi

2 kg, deci $\frac{1}{2}$ trunchi reprezintă 2 kg, adică trunchiul are 4 kg, de unde capul cântăreşte 3 kg. Peştele cântăreşte 8 kg.

R4.4.4. Pe piatra funerară a lui Diofant[*]: "Trecătorule! Sub această piatră se odihnesc osemintele lui Diofant, care a murit de bătrâneţe. A şasea parte a vieţii lui a durat copilăria, a douăsprezecea adolescenţa, a şaptea tinereţea. După ce s-a scurs încă jumătate din viaţă s-a însurat, după 5 ani soţia i-a născut un băiat şi când fiul lui a împlinit 4 ani a murit." Câţi ani a trăit Diofant?

Soluţie. Se poate afla ce parte din viaţa lui Diofant reprezintă ultimii 9 ani trăiţi. Până înainte cu 9 ani de a muri a trăit $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)$ din viaţă, adică $\frac{25}{28}$ din viaţă, deci 9 ani reprezintă $\frac{3}{28}$ din viaţă, de unde Diofant a trăit $9:\frac{3}{28}$, adică 84 de ani.

R4.4.5. Cât mai este până la satul următor? "Distanţa până la satul din care vii este o treime din distanţa de la el până la satul în care te duci, iar dacă mai mergi 2 km vei ajunge la jumătatea distanţei dintre ele". Cât i-a mai rămas de mers celui ce a întrebat?

Soluţie. Persoana a parcurs o treime din distanţa dintre cele două sate; 2 km reprezintă diferenţa dintre jumătate din această distanţă şi o treime din ea, adică 2 km reprezintă o şesime din distanţă, rezultă că distanţa dintre cele două sate este de 12 km. Persoana a parcurs 4 km, deci i-a mai rămas de mers 8 km.

R4.4.6. Doi vecini vor să cumpere o maşină cu 7200\$. "Dă-mi $\frac{1}{3}$ din banii tăi şi voi cumpăra eu maşina". "Mai bine dă-mi tu $\frac{3}{4}$ din banii tăi şi voi putea s-o cumpăr eu". Câţi bani are fiecare?

Soluţie. Dacă se notează x şi y sumele celor doi vecini, avem $x+\frac{1}{3}y=\frac{3}{4}x+y=7200$. Din prima egalitate rezultă că $\frac{1}{4}x=\frac{2}{3}y$, adică $x=\frac{8}{3}y$ şi înlocuind obţinem $\frac{8}{3}y+\frac{1}{3}y=7200$, de unde $y=2400$, iar $x=6400$. Primul vecin are 6400\$, iar al doilea 2400\$.

R4.4.7. (Newton) Iarba pe o păşune creşte uniform şi cu aceeaşi viteză. Se ştie că 70 de vaci consumă această iarbă în 24 de zile, iar 30 de vaci o consumă în 60 de zile. Câte vaci consumă această iarbă în 96 de zile?

---

[*] Diofant a fost învăţat grec din antichitate. În matematică numele lui e legat de anumite ecuaţii cu soluţii în mulţimea numerelor întregi, numite ecuaţii diofantice.

Soluție. O vacă consumă într-o zi o rație. În primul caz 70 de vaci consumă în 24 zile 1680 rații, iar în al doilea caz 30 de vaci consumă în 60 zile 1800 rații. O parte din iarbă creşte în perioada păşunatului:

1800-1680=120 de rații. 120 de rații reprezintă cantitatea de iarbă care a crescut în 60-24=36 zile. Iarba creşte în medie $\frac{120}{36}=\frac{10}{3}$ rații pe zi.

Atunci, în 24 de zile cresc $24\cdot\frac{10}{3}=80$ rații, dar inițial păşunea conținea 1600 de rații. În 96 de zile cresc 4·80=320 rații şi 1920 rații sunt consumate în 24 zile de 20 de vaci.

R4.4.8. Cinci prieteni au participat împreună la cumpărarea unui obiect: primul a participat cu jumătate din cât au dat ceilalți; al doilea a participat cu o treime din cât au contribuit ceilalți; al treilea cu o pătrime din contribuția celorlalți; al patrulea cu o cincime din contribuția celorlalți, iar al cincilea a participat cu 75000 lei. Care a fost suma totală şi cu cât a participat fiecare?

Soluție. Dacă primul prieten a contribuit cu jumătate din cât au dat ceilalți, rezultă că primul a contribuit cu $\frac{1}{3}$ din sumă. Analog, al doilea a contribuit cu $\frac{1}{4}$ din sumă, al treilea cu $\frac{1}{5}$ din sumă şi al patrulea cu $\frac{1}{6}$ din sumă. Partea din sumă ce îi revine celui de al cincilea este

$$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=1-\frac{57}{60}=\frac{1}{20}.$$

$\frac{1}{20}$ din sumă reprezintă 75000 lei. Suma totală este 1500000 lei. Primul a contribuit cu 500000 lei, al doilea cu 375000 lei, al treilea cu 300000 lei şi al patrulea cu 250000 lei.

R4.4.9. Doi arabi şedeau sub un palmier şi se pregăteau să mănânce, când un călător a apărut şi i-a rugat să ia masa împreună. Primul arab a scos un ulcior cu lapte, al doilea o pâine şi călătorul a scos 6 curmale. După ce au consumat tot ce aveau în mod egal, călătorul le-a lăsat 20 de monede. Cât a revenit fiecărui arab, dacă 4 ulcioare cu lapte costă cât 3 pâini, iar un ulcior cu lapte costă cât 36 de curmale?

Soluție. Dacă un ulcior cu lapte costă cât 36 de curmale, atunci 3 pâini costă cât 4·36=144 curmale, deci o pâine costă cât 48 curmale. Primul arab are echivalentul a 36 curmale, iar al doilea a 48 curmale. În total cei trei au 90 curmale, deci fiecare mănâncă echivalentul a 30 curmale. Călătorul primeşte 6 curmale de la primul arab şi 18 curmale de la al doilea. Deci 20 monede reprezintă costul a 24 de curmale. Primul primeşte $6\cdot\frac{20}{24}=5$ monede, iar al doilea primeşte $18\cdot\frac{20}{24}=15$ monede.

BIBLIOGRAFIE

[1] Andreescu T., Andrica, D., *O introducere în studiul ecuațiilor diofantiene,* Editura Gil, 2002

[2] Panaitopol, L., Gica, Al., *O introducere în aritmetică şi teoria numerelor*, Editura Universității din Bucureşti, 2001

[3] Chiorean, M., Chiorean, M.C., Lobonț, Gh., Chiorean, M., Achim, C., *Matematică aplicată-disciplina opțională*, Editura Triade, Cluj-Napoca , 2001

[4] Diaconu,I.,*Sisteme de numerație*, Editura Studium,Cluj-Napoca,1996

[5] Mortici, C., *600 de probleme* , Editura Gil, Zalău, 2001

[6] Cucurezeanu, I., *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor*, Editura Telmică, Bucureşti,1976

[7] Hărăbor, C., Săvulesan, D., Cheşcă, I., Țifrea, A., Țifrea, E., *Matematică – clasele V-VIII, olimpiade județene, interjudețene şi naționale*, Editura Scorpion 7, Bucureşti, 1996

[8] Andrica, D., Bogdan, I., Jecan, E., Vălcan, D., *Probleme calitative în matematica de gimnaziu*, Editura Gil, Zalău, 1998

[9] Crişan, D., Mitrea, O., Horja, P., *Culegere de probleme V-VIII – aritmetică şi algebră*, Editura Porus, Bucureşti,1991

[10] Pătraşan, I., Popovici, D., Rotaru, I., Tălău, N., *Olimpiadele doljene de matematică, 1990-1998, clasele V-VIII,* Editura Gil, Zalău, 1999

[11] Țelinoiu, T., *Culegere de exerciții şi probleme de aritmetică, clasele IV-VIII*, Editura Porto-Franco, Galați, 1991

[12] Cohal, T., *Vă place matematica?, Probleme pentru ciclul gimnazial*, Editura Moldova, Iaşi,1991

[13] Guran, E., *Matematică recreativă,* Editura Junimea, Iaşi, 1995

[14] Singer, M., Ghica, I., Drugan, Gh., *Culegere de probleme pentru clasa a-V-a ,* Editura SigmaPrimex, Bucureşti,1999

[15] ***(colectiv), Schneider, V., (coord.), *525 probleme date la olimpiadele de matematică 1990-1998, clasele III-VIII,* (Argeş, Braşov, Bucureşti, Caraş-Severin, Dâmbovița, Dolj, Ialomița, Mehedinți, Prahova, Teleorman, Vâlcea), Editura Valeriu, Craiova 1998

[16] Ghiciu, G., Ghiciu, N., *Matematică exerciții şi probleme cu rezolvări, clasa a-V-a,* Editura Rotech Pro, Bucureşti, 1999

[17] Basarab, C., Basarab, M., Drăcea, D., Niculescu, L., Pătraşcu, I., Şterbeți, C., Tălău, N., Tuțescu, L., *Probleme de matematică pentru gimnaziu, vol. I,* Editura Cardinal, Craiova, 2000

[18] Blaga, Al., Pop, O., Buth, G., Pop, R., *Matematică-auxiliar la manualele de matematică de clasa a-V-a*, Editura Gil, Zalău, 2000

[19] ***(colectiv), *Olimpiadele de matematică, 1990-1998, gimnaziu, clasele IV-V*, Editura Gil, Zalău, 1999

[20] Săvulescu ,D., Marinovici, T., Cojocaru, O., *Matematică-olimpiade băcăuane, gimnaziu 1988-1997*, Editura Paralela 45, Piteşti,1997

[21] ***(colectiv), *Şcoala Vâlceană - olimpiade şi concursuri vâlcene de matematică, gimnaziu-liceu, 1990-1999*, Editura Paralela 45, Piteşti, 1999.

[22] Peligrad, S., Simion, S., Zaharia, D., Zaharia, M., *Aritmetică(partea I şi partea a II-a)*, Editura Paralela 45, 2001

[23] ***(colectiv), Andrica, D., Berinde, V. (coord.), *Concursul interjudețean de matematică ,,Gr. C. Moisil'', edițiile I-XV(1986-2000)*, Editura CUB PRESS 22, Baia Mare, 2001

[24] ***(colectiv), Brânzei, D. (coord.), *Matematica în concursurile şcolare, clasele V-VIII, 1999*, Editura Paralela 45,Pitesti, 1999

[25] ***(colectiv), Brânzei, D. (coord.), *Matematica în concursurile şcolare, clasele V-VIII, 2000*, Editura Paralela 45,Piteşti,2000

[26] ***(colectiv), Brânzei, D. (coord.), *Matematica în concursurile şcolare, clasele V-VIII, 2001*, Editura Paralela 45, Piteşti, 2001

[27] Andreescu, T., Gelca, R., *Mathematical Olympiad Chalenges*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000

[28] Andreescu, T., Feng,Z., *Mathematical Olympiads 1998-1999, Problems and Solutions From Around the World*, Mathematical Asociations of America,2000

[29] Andreescu, T., Kedlaya, K., *Mathematical Contests 1996-1997, Olympiad Problems and Solutions From around the World, the American Mathematics Competitions*, 1998

[30] Róka, S., *2000 feladat az elemi matematika Köcéböl*, Typotex Kiadó, Budapest, 2000.

[32] Gauss, C., Fr., *Cercetări aritmetice*, Editura Amarcord, Timişoara, 1999

[33] Buşneag, D., Maftei, I., *Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor,* Editura Scrisul Românesc, Craiova,1983