OBIECTIVE DE REFERINȚĂ ŞI EXEMPLE DE ACTIVITĂȚI DE ÎNVAȚARE

1. *Cunoaşterea şi înțelegerea conceptelor, a terminologiei şi a procedurilor de calcul*

Obiective de referință *La sfârțitul clasei a VI-a elevul va fi capabil :*	**Exemple de activități de învățare** *Pe parcursul clasei a VI-a se recomandă următoarele activități :*
1.1.să utilizeze noțiuni de logica	-rezolvarea unor probleme de logica
1.2.să folosească metode şi principii adecvate în rezolvarea unor probleme	-rezolvarea unor probleme folosind principiul parității sau partiția în clase - folosirea metodei reducerii la absurd în anumite demonstrații -probleme care se rezolvă folosind principiul lui Diriclet -probleme care se rezolvă folosind principiul invariantului -rezolvarea de probleme folosind regula de trei simplă sau regulă de trei compusă -probleme de ordonare prin comparare -probleme de numărare
1.3.să folosească diferite metode de rezolvare a ecuațiilor şi inecuațiilor şi să utilizeze ecuații şi inecuații pentru rezolvarea problemelor	-rezolvarea unor ecuații şi inecuații dificile folosind diverse tehnici -rezolvarea unor probleme cu ajutorul ecuațiilor -formularea unor probleme pornind de la o ecuație
1.4.să aplice criterii, proprietăți şi noțiuni de divizibilitate în demonstrații	-exerciții de recunoaştere a unor numere naturale sau expresii divizibile cu alte numere date folosind criteriile de divizibilitate sau descompunerile în factori -exerciții de calcul a numărului de divizori a unui număr folosind descompunerea în produs de puteri de numere prime
1.5.să efectueze calcule cu numere întregi şi raționale pozitive	-calculul unor sume folosind diverse tehnici -exerciții de determinare a valorii unor expresii -calculul unor probabilități
1.6.să utilizeze matematica în rezolvarea problemelor puse la alte discipline	- rezolvarea unor probleme de mişcare care îşi au originea în fizică folosind relațiile ce se stabilesc între mărimi : proporționalitate directă sau inversă -probleme cu conținut practic care se rezolvă folosind reducerea la scară

1.7.să folosească metode specifice în rezolvarea problemelor de geometrie 1.8.să recunoască şi să utilizeze proprietățile figurilor geometrice în demonstrații	-probleme de numărare şi interpretarea lor folosind noțiunea de probabilitate -rezolvarea problemelor cu procente -rezolvarea problemelor de coliniaritate şi concurență -probleme de construcții geometrice -rezolvarea de probleme folosind metoda triunghiurilor congruente -folosirea criteriilor de paralelism în rezolvarea unor probleme -folosirea în demonstrații a proprietăților triunghiului isoscel şi a triunghiului echilateral

***2**.Dezvoltarea capacității de a emite judecați de valoare pentru rezolvarea problemelor inventiv şi euristic-creative*

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a VI-a elevul va fi capabil*	***Exemple de activități de învățare*** *Pe parcursul clasei a VI-a se recomandă următoarele activități :*
2.1.să analizeze, să elaboreze strategii de rezolvare şi să rezolve probleme dificile	-analizarea problemei în scopul înțelegerii ei -elaborarea unui plan de rezolvare şi rezolvarea problemei -verificarea rezultatului obținut şi analiza rezolvării
2.2.să formuleze probleme pornind de la un model sau enunț parțial	-formularea unor concluzii pornind de la o ipoteza data -deducerea unor condiții necesare şi suficiente pentru demonstrarea unei concluzii
2.3.să găsească metode de lucru valabile pentru clase de probleme	-identificarea unor algoritmi de rezolvare valabili pentru clase de probleme -analizarea mai multor metode de rezolvare şi alegerea celei mai eficiente

3.*Dezvoltarea capacității de a face conexiuni cognitive în cadrul disciplinei şi a ariei curriculare*

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a VI-a elevul va fi capabil :*	***Exemple de activități de învățare*** *Pe parcursul clasei a VI-a se recomandă următoarele activități :*
3.1.să utilizeze raționamente inductive în rezolvarea problemelor dificile din domeniile studiate	-exerciții şi probleme în rezolvarea cărora se folosesc diferite raționamente -folosirea soluțiilor unei probleme pentru rezolvarea altora din aceeaşi sferă cognitivă
3.2.să-şi însuşească o gândire flexibilă şi abstractă specifică matematicii	-probleme din algebră care se rezolvă cu metode geometrice sau probleme de geometrie care se rezolvă algebric

4.Dezvoltarea capacității de a comunica utilizând limbajul matematic

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a VI-a elevul va fi capabil :*	**Exemple de activități de învățare** *Pe parcursul clasei a VI-a se recomanda urmatoarele activitat*
4.1.să diferențieze informațiile matematice dintr-un enunț după natura lor	-sesizarea informațiilor cu caracter general dintr-o ipoteza -redactarea demonstrațiilor sau rezolvărilor utilizând terminologia adecvată
4.2.să formuleze reciproce ale unor propoziții şi să studieze valoarea lor de adevăr	-formularea de propoziții reciproce, analizarea lor şi stabilirea valorii lor de adevăr

5.Dezvoltarea interesului şi a motivației pentru studiul şi aplicarea matematicii în contexte variate

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a VI-a elevul va fi capabil :*	**Exemple de activități de învățare** *Pe parcursul clasei a VI-a se recomandă următoarele activități*
5.1.să sesizeze importanta aplicării noțiunilor de matematica în probleme cu conținut practic	-argumentarea prin exemplificare
5.2.să manifeste originalitate în abordarea unor metode alternative de rezolvare	-utilizarea unor metode variate în rezolvarea unei probleme
5.3 să manifeste interes pentru folosirea tehnologiilor informației în studiul matematicii	-utilizarea unor soft-uri pentru învățarea matematicii

CONȚINUTURI

ALGEBRĂ

GEOMETRIE

1. Calculul unor sume de numere

În multe probleme elevii aplică în rezolvarea lor calculul unor sume de numere naturale consecutive, numere pare consecutive, numere impare consecutive, dar şi sume de numere raționale pozitive.

Parcurgând această temă se face o pregătire pentru înțelegerea ulterioară a demonstrației relative la calculul unor sume de numere folosind metoda inducției matematice.

1.1.Introducerea simbolului sumă şi a proprietăților lui

În matematică pentru prescurtarea scrierii unor sume se foloseşte simbolul „$\sum$”.

Prin $\sum_{k=1}^{n} a_k$ înțelegem sumă de a_k de la k =1 până la k = n.

Prezentăm în continuare câteva exemple de folosire a acestui simbol:

a) Suma primelor n numere naturale:

$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + n$ se scrie $\sum_{k=1}^{n} k$

b) Suma pătratelor primelor numere naturale:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2$ se scrie $\sum_{k=1}^{n} k^2$

c) Suma cuburilor primelor n numere naturale se scrie:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^3$ se scrie $\sum_{k=1}^{n} k^3$

Alte exemple de utilizare a simbolului sumă:

d) $$\sum_{k=1}^{p} 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1}_{\text{p termeni}} = p$$

e) $$\sum_{i=p}^{q} (-1)^{2i} = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1}_{\text{de q – p ori}} = q - p$$

f) $$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$$

1.2. Proprietăți ale simbolului sumă

1. Suma unei sume (diferențe) este egală cu suma (diferența) sumelor:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

2. Dacă toți termenii sumei conțin acelaşi factor el poate fi scos ca factor comun în afara sumei:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Probleme rezolvate

R1.3.1.Suma primelor n numere naturale se calculează după formula:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

<u>Demonstrație</u>:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &= 1 + 2 + 3 \ldots. + (n-1) + n \\ \sum_{k=1}^{n} k &= n + (n-1) + (n-2) + \ldots. + 2 + 1\end{aligned}\right| +$$

$$2\cdot\sum_{k=1}^{n} k = (n+1) + (n+1) + \ldots. + (n+1)$$

$$2\cdot\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1) \quad :|2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

R1.3.2. Suma pătratelor primelor n numere naturale este dată de formula:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (2)$$

<u>Demonstrație:</u>

Calculăm mai întâi suma:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \ldots. + 2n - 1$$

Ținând seama de formula (1) şi de proprietățile simbolului sumă avem:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} (-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (-1) = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n =$$

$$= n(n+1) - n = n^2 + n - n = n^2$$

Aşadar pentru orice $k \geq 1$, avem:

$$1 + 3 + 5 + \ldots. + (2k-1) = k^2 \qquad (3)$$

Folosind relația (3) avem:

$$\begin{array}{ll} 1 & = 1^2 \\ 1 + 3 & = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 & = 3^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots + (2k - 1) & = k^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots + (2k - 1) + \ldots + (2n - 1) = n^2 & \end{array}$$

$$1\cdot n + 3(n - 1) + 5(n - 2) + \ldots\ldots + (2k - 1)(n - k + 1) + \ldots\ldots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Relația precedentă se poate scrie prescurtat astfel:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)(n - k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad (4)$$

Ținând seama de proprietățile sumei relația (4) se poate scrie:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)(n - k + 1) = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)(n + 1) + \sum_{k=1}^{n} (-2k^2 + k) =$$

$$= (n + 1)\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) - 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = (n + 1)\cdot n^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Deci $(n + 1)\cdot n^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \Leftrightarrow$

$$3\cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = n^2(n + 1) + \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$3\cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \quad \Big|: 3 \quad \text{de unde}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

R1.3.3. Numărul triunghiular este un număr de forma $\frac{n(n+1)}{2}$, unde n este un număr natural.

Denumirea este justificată pentru că aceste numere pot fi materializate în triunghiuri dreptunghice alcătuite din puncte. Se observă că numerele triunghiulare se obțin prin adunarea succesivă a numerelor din şirul natural:

$$1;\ 1 + 2 = 3;\ 1 + 2 + 3 = 6;\ 1 + 2 + 3 + 4 = 10\ ;\ldots\ldots;\ 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Trebuie calculată suma: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k$

Ținând seama de formulele (1) şi (2), obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2n+4}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Bibliografie

D. Constantinescu, *Olimpiada de matematică clasele V-VIII*, Ed. Teora 1999, pag 28-52;pag 125-138

D. Andrica, V. Berinde, Al. Blaga, G.Both, O. Pop, *Concursul Grigore Moisil Ed. I-XV*, Ed. Hub –Press 22 Baia-Mare 2001, pag 39,45,78

D. Brânzei şi colectivul: *Matematica în concursurile şcolare*, Ed. Paralela 45, 2000,2001,2002 pag 27-54,119-135(2000);pag 27-54,117-130(2001);pag 18-34,82-92(2002)

D. Brânzei, D. Zaharia, M. Zaharia : *Aritmetică-Algebră-Geometrie*, Ed.Paralela 45 2002, pag 5-21

Acad. N. Teodorescu coordonator *Culegere de probleme pentru clasele V-VIII*, SSM 1987, pag 53-68

Foaia matematică (Chişinău) 3/1996, pag 24-31

2 Divizibilitatea în mulțimea numerelor naturale

Dintre toate operațiile aritmetice, cea mai capricioasă este împărțirea.

Ea dispune de proprietăți speciale, de un caracter deosebit.

Toate particularitățile împărțirii au favorizat apariția unor noțiuni ca: numere prime, cel mai mare divizor comun, cel mai mic multiplu comun, criterii de divizibilitate.

Dezvoltarea teoriei divizibilității a dus treptat la o serioasă extindere a întregii teorii a numerelor.

În multe probleme de determinare a unor numere naturale folosim noțiunile studiate la divizibilitatea numerelor.

Reamintim teorema împărțirii cu rest şi cele mai importante noțiuni ale divizibilității numerelor.

2.1. Teorema împărțirii cu rest

Pentru oricare două numere naturale a şi b cu $b \neq 0$, există şi sunt unice două numere naturale q şi r astfel încât $a = b \cdot q + r$ şi $r < b$.

a deîmpărțitul
b împărțitorul
q câtul împărțirii
r restul împărțirii

Proprietatea 2.1.1. Dacă adăugăm lui a un multiplu a lui b, restul împărțirii nu se schimbă.

Fie $a = b \cdot q + r \;\; | + m \cdot b$

$$a + m \cdot b = b \cdot q + r + m \cdot b = b(q + m) + r = b \cdot q_1 + r$$

Proprietatea 2.1.2. Dacă înmulțim deîmpărțitul şi împărțitorul cu un număr, restul se înmulțeşte cu acel număr.

Din $a = b \cdot q + r \;\; | \cdot m$, obținem

$$a \cdot m = b \cdot q \cdot m + r \cdot m, \text{ unde } r \cdot m < m \cdot b$$

Proprietatea 2.1.3. Dacă numerele a şi b se împart cu un număr atunci şi restul se împarte cu acel număr.

Fie $a = b \cdot q + r$, $r < b$

Dacă $a = m \cdot a_1$ şi $b = m \cdot b_1$, atunci avem $a_1 \cdot m = b_1 \cdot m \cdot q + r \;\; | : m$,

$$a_1 = b_1 \cdot q + \frac{r}{m}$$

Proprietatea 2.1.4. Dacă două numere dau acelaşi rest la împărțirea cu un număr m, diferența lor este divizibilă cu m.

Din $a = m \cdot q_1 + r$ şi $b = m \cdot q_2 + r$ deducem

$$\begin{array}{r} a = m \cdot q_1 + r \quad - \\ b = m \cdot q_2 + r \quad \\ \hline a - b = m\,(q_1 - q_2) \end{array}$$

2.2. Divizibilitatea în N

Definiția 2.2.1. Numărul natural a este divizibil cu numărul natural b dacă există numărul natural c astfel încât $a = b \cdot c$

Notăm: $a \vdots b$ (a se divide cu b)

$b \mid a$ (b divide pe a)

b este divizorul lui a

a este multiplul lui b

Obs. Numărul natural a este divizibil cu numărul natural b dacă restul împărțirii lui a la b este zero.

<u>Proprietăți</u>

Propoziția 2.2. 1. Dacă a este divizor a lui b şi c atunci este divizor şi a lui $b \pm c$.

Din $a \mid b \Rightarrow b = m_1 \cdot a$

$a \mid c \Rightarrow c = m_2 \cdot a$

Însumând cele două egalități membru cu membru obținem:

$b + c = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = a (m_1+m_2)= m_3 \cdot a$

Scăzând cele două egalități, rezultă că :

$b - c = m_1 \cdot a - m_2 \cdot a = a(m_1-m_2) = a \cdot m_3 \quad (b \geq c)$

Propoziția 2.2.2. Dacă a este divizor a lui b şi c , oricare ar fi numerele naturale x şi y, a va fi divizor şi pentru $b \cdot x + c \cdot y$.

Din $a \mid b \Rightarrow b = m_1 \cdot a$

$a \mid c \Rightarrow c = m_2 \cdot a$

Înmulțim prima egalitate cu x şi a doua cu y şi obținem :

$b \cdot x = m_1 \cdot a \cdot x$

$c \cdot y = m_2 \cdot a \cdot y$

Adunăm membru cu membru şi obținem :

$b \cdot x + c \cdot y = m_1 \cdot a \cdot x + m_2 \cdot a \cdot y = a (m_1 \cdot x + m_2 \cdot y) = m \cdot a \Rightarrow a \mid (b \cdot x + c \cdot y)$

Propoziția 2.2.3. Dacă a este divizor a lui b şi b divizor a lui c atunci a este divizor a lui c.

Din $a \mid b \Rightarrow b = m_1 \cdot a$

$b \mid c \Rightarrow c = m_2 \cdot b$

Înlocuind în egalitatea a doua pe b obținem:

$c = m_1 \cdot m_2 \cdot a = m \cdot a \Rightarrow a \mid c$

Proprietatea 2.2.4. Dacă $a \mid b$ şi $b \mid a$ atunci $a = b$.

Din $a \mid b \Rightarrow b = m_1 \cdot a$

$b \mid a \Rightarrow a = m_2 \cdot b$

Substituind în prima egalitate pe a obținem :

$b = m_1 \cdot m_2 \cdot b \mid : b$

$1 = m_1 \cdot m_2 ; m_1, m_2 \in \mathbf{N} \Rightarrow m_1 = m_2 = 1 \Rightarrow a = b$

Definiția 2.2.2. N umărul natural p , $p \geq 2$ este prim dacă se divide numai cu 1 şi cu el însuşi.

1 şi p se numesc divizorii împățirii.

Obs : 1^0. Un număr care nu este prim se numeşte compus.

2^0. Numărul 2 este singurul număr natural prim şi par.

Propoziția 2.2.5. Cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a şi b este un număr natural d , care :

divide pe a şi b ;

este divizibil cu orice divizor a lui a şi b.

Notăm : c.m.m. d.c. sau (a; b)

Obs : 1^0 . Dacă (a; b) = 1 , atunci numerele a şi b se numesc prime între ele .

Propoziția 2.2.6. Cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b este un număr natural m , care :

este multiplu a lui a şi b ;

orice alt multiplu a lui a şi b se divide cu el .

Notație : c.m.m.m. c. sau [a; b]

Propoziția 2.2.7. Dacă a şi b sunt numere naturale atunci avem :

$$a\cdot b = (a\ ;\ b)\cdot[a;\ b]$$

2.3. Determinarea unor numere prime în condiții date

Probleme rezolvate

R2.3.1. Determinați numerele prime a şi b ştiind că 28 a + 21b =2030.

Soluție: $\left.\begin{array}{l} 2030 \,\vdots\, 2 \\ 28a \,\vdots\, 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 21b \,\vdots\, 2$,dar $21 \,\vdots\, \cancel{2}$

atunci, $b \,\vdots\, 2$ şi b este număr prim atunci b = 2.

Înlocuim în egalitatea dată şi obținem :

$28a+21\cdot2 = 2030$

$28a = 2030 - 42$

$28a =1988 \,|: 28$

$a = 71$

Numerele sunt : a = 71 , b = 2 .

R2.3.2. Să se găsească numerele naturale p astfel încât numerele p , $p^2 + 4$, $p^2 + 6$ să fie simultan prime .

Soluție :

($\forall$) p număr natural prim el are una din formele: 5k , 5k + 1 , 5k + 2 , 5k + 3 , 5k + 4.

Vom demonstra că p are forma 5k şi cum p este prim rezultă că p = 5 .

Fie $p = 5k + 1 \Rightarrow p^2 = (5k + 1)^2 =M_5 + 1 \Rightarrow$

$P^2 +4 =M_5+1 + 4 =M_5 + 5 = M_5 \Rightarrow (p^2 + 4) \,\vdots\, 5$

b) $p = 5k + 2 \Rightarrow p^2 = (5k +2)^2 =M_5 + 4 \Rightarrow p^2 +6 = M_5 + 10 = M_5$

$\Rightarrow (p^2 + 6) \,\vdots\, 5$

c) $p = 5k + 3 \Rightarrow p^2 = (5k + 3)^2 = M_5 + 9 \Rightarrow$

$p^2 +6 = M_5+ 9+ 6 = M_5 + 15 = M_5 \Rightarrow (p^2 + 6) \,\vdots\, 5$

d) $p = 5k + 4 \Rightarrow p^2 = (5k + 4)^2 = M_5 + 16 \Rightarrow p^2 +4 =$

$= M_5 + 16 + 4 = M_5 + 20 = M_5 \Rightarrow \quad (p^2 + 4) \vdots 5$

Din a), b) , c), d) rezltă că p este de forma p =5k şi p număr prim atunci p =5 şi $p^2 + 4 = 29$, $p^2 + 6 = 31$, deci sunt numere prime.

<u>A doua soluție :</u>

Ultima cifră a lui p poate fi 2 sau cifra impară : 1, 3, 5, 7, 9, atunci pătratul lui va avea ultima cifră 4, 1, 9, 5 $\Rightarrow$ $u(p^2) = 4 \Rightarrow u(p^2 + 6) = 0 \Rightarrow$ $(p^2 + 6) \vdots 5$; $u(p^2) = 1 \Rightarrow u(p^2 + 4) = 5 \Rightarrow (p^2 + 4) \vdots 5$, $u(p^2) = 9 \Rightarrow$ $u(p^2 + 6) = 5 \Rightarrow (p^2 - 6) \vdots 5$; $u(p^2) = 5 \Rightarrow u(p) = 5$ şi p este prim $\Rightarrow$ p=5.

R2.3.3. Să se determine toate numerele naturale n şi p pentru care numerele:

p , $p + 3^n$, $p + 3^{n+1}$. $p + 3^{n+2}$. $p + 3^{n+3}$ sunt prime.

Soluție:

Dacă p este număr impar atunci numerele $p + 3^n$, $p + 3^{n+1}$, $p + 3^{n+2}$, $p + 3^{n+3}$ sunt numere pare , deci nu sunt prime rezultă că p este număr par şi prim deci p =2

Ultima cifră a puterilor consecutive a lui 3 poate fi : 1,3,7,9 atunci unul dintre numerele $p + 3^n$, $p + 3^{n+1}$, $p + 3^{n+2}$ sau $p + 3^{n+3}$ va avea ultima cifră 5 deci va fi divizibil cu 5 şi atunci nu va fi prim decât în cazul în care este egal cu 5.

A tunci : $p + 3^n = 5 \Rightarrow 2 + 3^n = 5 \Rightarrow 3^n = 3 \Rightarrow n = 1$

$\Rightarrow p = 2$; $p + 3^n = 5$; $p + 3^{n+1} = 11$; $p + 3^{n+2} = 29$ şi $p + 3^{n+3} = 83$ sunt numere prime .

Dacă $p + 3^{n+1} = 5 \Rightarrow 3^{n+1} = 3 \Rightarrow n = 0$, atunci avem :

$p = 2$
$p + 3^n = 3$
$p + 3^{n+1} = 5$
$p + 3^{n+2} = 11$
$p + 3^{n+3} = 29$ sunt numere prime .

Dacă $p + 3^{n+2} = 5 \Rightarrow 3^{n+2} = 3$ imposibil.

Soluțiile sunt : 1) $p = 2$ şi 2) $p = 2$
$n = 0$ $\quad$ $n = 1$

2.4.Probleme care se rezolvă folosind teorema împărțirii cu rest, cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun

Probleme rezolvate

R2.4.1. Determinați cel mai mic număr natural care împărțit la numerele naturale a, b, c dă resturile a – k ; b – k ; c – k , $k \in N^*$ şi $k < \min(a,b,c)$.

Soluție:

Fie n numărul căutat, atunci avem:

$$\left.\begin{array}{l} n = a\cdot c_1 + a - k \\ n = b\cdot c_2 + b - k \\ n = c\cdot c_3 + c - k \end{array}\right| + k \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n + k = a(c_1 + 1) = Ma \\ n + k = b(c_2 + 1) = Mb \\ n + k = c(c_3 + 1) = Mc \end{array}\right| \Rightarrow$$

n + k este multiplu comun al numerelor a, b, c, şi pentru că este cel mai mic rezultă că n + k =[a, b, c] $\Rightarrow$ n = [a,b,c] – k.

În condiţiile în care $n_1 \le n \le n_2$ vom determina multiplii comuni care îndeplinesc condiţia dată , apoi calculăm numărul n.

Exemplu: Aflaţi cel mai mic număr natural care împărţit pe rând la 5,6,7,8, dă resturile 4,5,6,7.

Soluţie :

Fie n numărul , atunci:

$$\left.\begin{array}{l} n = c_1\cdot 5 + 4 \\ n = c_2\cdot 6 + 5 \\ n = c_3\cdot 7 + 6 \\ n = c_4\cdot 8 + 7 \end{array}\right| +1 \Rightarrow \begin{array}{l} n + 1 = 5(c_1 + 1) = M_5 \\ n + 1 = 6(c_2 + 1) = M_6 \\ n + 1 = 7(c_3 + 1) = M_7 \\ n + 1 = 8(c_4 + 1) = M_8 \end{array} \Rightarrow$$

n + 1 multiplu comun al numerelor 5,6,7,8 şi pentru că este cel mai mic rezultă că n + 1 =[5,6,7,8] $\Rightarrow$ n + 1 = 840 $\Rightarrow$ n = 839 .

În cazul în care se impune condiţia ca n să fie cuprins spre exemplu între 800 şi 2003 atunci n + 1 $\in$ { 840; 2·840; 3·840 } problema având trei soluţii distincte.

R2.4.2. Determinaţi cel mai mic număr natural care împărţit la numerele naturale a, b, c obţinem de fiecare dată restul r , r < min (a,b,c) .

Soluţie:

Fie n numărul care trebuie determinat :

$$\left.\begin{array}{l} n = a\cdot c_1 + r \\ n = b\cdot c_2 + r \\ n = c\cdot c_3 + r \end{array}\right| -r \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n - r = a\cdot c_1 = M_a \\ n - r = b\cdot c_2 = M_b \\ n - r = c\cdot c_3 = M_c \end{array}\right| \Rightarrow$$

n – r este multiplu comun al numerelor a, b, c şi pentru că este cel mai mic $\Rightarrow$ n – r = [a,b,c] $\Rightarrow$ n = [a, b,c] + r.

Dacă asupra lui n se impune o condiţie vom considera toţi multiplii comuni care îndeplinesc condiţia pentru a determina numărul n .

Exemplu: Determinaţi numerele naturale cuprinse între 1200 şi 5200 care împărţite la 20 ;28 ;36 să dea de fiecare dată restul 5.

Soluţie:

Fie n numărul, atunci avem :

$$\left.\begin{array}{l} n = 20\cdot c_1 + 5 \\ n = 28\cdot c_2 + 5 \\ n = 36\cdot c_3 + 5 \end{array}\right| -5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n - 5 = 20\cdot c_1 = M_{20} \\ n - 5 = 28\cdot c_2 = M_{28} \\ n - 5 = 36\cdot c_3 = M_{36} \end{array} \Rightarrow \right|$$

$\Rightarrow$ n – 5 este multiplu comun al numerelor 20;28; 36.

Aflăm c.m.m.m.c al numerelor [20;28;36] =1260

n – 5 $\in$ {1260;1260·2;1260·3;1260·4}

n – 5 = 1260 $\Rightarrow$ n = 1265

n – 5 = 2520 $\Rightarrow$ n = 2525

n – 5 = 3780 $\Rightarrow$ n = 3785

n – 5 = 5040 $\Rightarrow$ n = 5045

Problema are patru soluţii: 1265 ; 2525 ; 3785 şi 5045

R2.4.3.Numerele a,b,c împărţite la acelaşi număr natural dau resturile r_1, r_2 , r_3 . Să se afle numărul la care au fost împărţite.

Soluţie:

Fie n împărţitorul, n < min (a;b; c)

$a = n\cdot c_1 + r_1 \ | \ -r_1 \qquad a - r_1 = n\cdot c_1 \Rightarrow n \mid a-r_1$

$b = n\cdot c_2 + r_2 \ | \ -r_2 \quad \Rightarrow \quad b - r_2 = n\cdot c_2 \Rightarrow n \mid b-r_2$

$c = n\cdot c_3 + r_3 \ | \ -r_3 \qquad c - r_3 = n\cdot c_3 \Rightarrow n \mid c-r_3$

$\Rightarrow$ n este divizor comun al numerelor $a - r_1$, $b - r_2$, $c - r_3$, şi n >max ($r_1;r_2;r_3$)

Aflăm cc.m.m.d.c. al numerelor $a- r_1$; $b- r_2$; $c- r_3$; şi luăm pentru n valorile celui mai mare divizor comun şi divizorii săi mai mari decât max (r_1,r_2 ,r_3).

Exemplu: Numerele 1333 şi 351 dau resturile 13 şi respectiv 15 la împărţirea cu acelaşi număr natural diferit de zero. Aflaţi acest număr.

Soluţie :

Fie n împărţitorul , n > 15 $\Rightarrow$ $1333 = n\cdot c_1 - 13$ |-13 $\quad 1320 = n\cdot c_1$

$351 = n\cdot c_2 - 15$ |-15 $\Rightarrow$ $336 = n\cdot c_2$

$\Rightarrow$ n | 1320 şi n | 336 $\Rightarrow$ n divizor comun al numerelor 1320 şi 336.

Aflăm c.m.m.d.c a celor două numere: $(1320; 336) = 2^3\cdot 3 = 24$.

Singura soluţie este n =24 pentru că divizorii ceilalţi alui 24 sunt mai mici decât 15.

2.5. Determinarea a două numere naturale când cunoaştem c.m.m.d.c. al lor şi produsul sau suma numerelor

Probleme rezolvate

R2.5.1. Determinaţi numerele a şi b naturale pentru care: (a, b) = 15 şi $a\cdot b = 6300$

Soluţie:

Din (a;b) =15 $\Rightarrow$ $a = 15\cdot k$ şi $b = 15\cdot p$ unde k, p $\in N^*$ şi (k; p) = 1

Înlocuim pe a şi b în relaţia $a\cdot b = 6300$ şi obţinem : $15 k\cdot 15p = 6300$ | :225

$k\cdot p = 12 \Rightarrow$ 1) k =1, p = 12 $\Rightarrow$ a= 15, b =180

2) k =12, p = 1 $\Rightarrow$ a = 180, b = 15

3) k = 3, p = 4 $\Rightarrow$ a = 45, b = 60

4) k = 4, p = 3 $\Rightarrow$ a = 60, b = 45

R2.5 2. Să se afle numerele a şi b naturale , ştiind că cel mai mic multiplu comun al lor este m şi produsul lor este p.

Soluţie:

Dacă a, b $\in$ **N*** atunci $[a;b]\cdot(a;b) = a\cdot b$

Din această relaţie rezultă că $(a;b) = \dfrac{ab}{[a;b]}$, notam $\dfrac{a\cdot b}{[a;b]} = \dfrac{p}{m} = c \Rightarrow$ $(a;b) = c \Rightarrow a = c\cdot k$, $b = c\cdot p$, k,p $\in N^*$, (k;p) = 1.

Rezolvarea se face analog cu problema precedentă.

R2.5.3. Determinați numerele naturale a şi b ştiind că (a; b) = d şi a + b = s.

Soluție:

(a; b) = d $\Rightarrow$ a = d·k , b = d·p , unde k,p $\in$ **N** şi (k;p) =1

Înlocuim pe a şi b în a + b = s şi obținem : d·k + d·p = s | :d ,

k + p = $\frac{s}{d} \in \mathbf{N}$, pentru că d | s. Determinăm perechile de numere (k;p) ce verifică egalitatea , apoi numerele a şi b.

2.6. Fracții reductibile . Fracții ireductibile

Pentru a demonstra că o fracție este ireductibilă trebuie să arătăm că numărătorul şi numitorul ei sunt numere prime între ele , numărătorul şi numitorul fiind numere naturale .

Fie a, b $\in$**N***, a şi b sunt prime între ele dacă (a; b) = 1 unde (a; b) este c.m.m.d.c. al numerelor a şi b.

Probleme rezolvate

R2.6.1. Se consideră fracția : $\frac{5n+3}{3n+2}$, n $\in$**N***. Arătați că fracția este ireductibilă.

Soluție:

Presupunem că ($\exists$) d astfel încât :

d | 5n + 3 şi d | 3n +2 $\Rightarrow$

d | 3(5n + 3) şi d | 5(3n + 2) $\Rightarrow$

d | 5(3n + 2) – 3(5n +3) $\Rightarrow$

d | 15n +10- 15n –9 $\Rightarrow$d | 1 $\Rightarrow$ d =1 $\Rightarrow$ numărătorul şi numitorul sunt numere naturale prime între ele rezultă că fracția este ireductibilă.

R2.6.2.Arătați că fracția : $\frac{10n+3}{15n+4}$, n $\in$N este ireductibilă.

Soluție:

Calculăm c.m.m.m.c al numerelor 10 şi15 $\Rightarrow$[10 ; 15] = 30 , 30:10 =3; 30 : 15 = 2 . Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor 10n +3 şi 15n +4

$\Rightarrow$ d |10n + 3 şi d | 15n+4$\Rightarrow$

d | 3(10n + 3) şi d | 2(15n +4) $\Rightarrow$

d | 30n + 9 - 30n – 8 $\Rightarrow$

d |1 $\Rightarrow$ d =1 $\Rightarrow$ fracția este ireductibilă.

<u>Reductibilitatea fracțiilor</u>

Pentru a arăta că o fracție care depinde de o variabilă naturală este reductibilă, procedăm astfel:

Fie fracția: $\frac{3n+1}{2n+3}$, n $\in \mathbf{N}$.

Determinați numerele naturale n pentru care fracția este reductibilă.

Soluție:

Fie d divizorul comun al numerelor 3n +1 şi 2n + 3 $\Rightarrow$

d | 3n + 1 şi d | 2n + 3 $\Rightarrow$

d | 2(3n + 1) şi d | 3(2n + 3) $\Rightarrow$

d | 6n – 9 – 6n – 2 $\Rightarrow$

d | 7 $\Rightarrow$ d = 7 pentru că 7 este număr prim $\Rightarrow$

7 |3n + 1 şi 7 | 2n + 3

7 | (3n + 1) – (2n + 3)

7 | 3n + 1 - 2n -3

7 | n – 2 $\Rightarrow$ n – 2 = 7k , k $\in \mathbf{N}$ $\Rightarrow$

n = 7k+ 2 $\Rightarrow$ n $\in$ {2;9;16;23;……;7k+2;……}

Cel mai mic număr pentru care fracția este reductibilă este n =2.

Bibliografie

C. Năstăsescu,C. Niță, C. Vraciu, *Aritmetică şi algebră*, EDP 1993

D. Buşneag, F. Boboc, D. Piciu, *Aritmetică şi teoria numerelor*, Ed. Universitaria Craiova 1999

D. V. George, *Cunoştințe vechi şi noi despre divizibilitate*, Ed. Ştiințifică şi enciclopedică 1990

I. Petrică şi colectivul, *Manual pentru clasa a VI-a*, Ed. Petrion 1998

C. Popovici, I. Ligor, V. Alexianu, Matematică-Aritmetică-Algebră, EDP Bucureşti 1996

G. Turcitu, I. Rizea, C. Basarab, M. Duncea, *Manual clasa a VI-a*, Ed. Radical 1998

T. Udrea, D. Nuțescu, *Manual clasa a VI-a*, EDP 1998

Gheorghe şi Alina Drugan; Ion şi Mihaela Ghica, *Matematica în concursurile şcolare*, Ed. Teora 1998, pag 34-38

A. Blaga, O.Pop, R. Pop. G. Buth, *Matematica-Auxiliar la manualele de matematică*, Ed. Gil Zalău 2001, pag 20-28

D. Brânzei, D. şi M. Goleşteanu, S. Ulmeanu, V. Gorgotă, I. Şerdean: *Matematica în concursurile şcolare*, Ed. Paralela 45, 2000,2001,2002

D. Andrica, E. Jecan, D. Vâlcan, I. Bogdan, *Probleme calitative în matematica de gimnaziu*,Ed. Gil Zalău 1998, pag 21-44

C. Moroti, M. Giurgiu, D. Radu, R. Ştefan, A. Ciupitu, G. Drugan, I. Ghica, *Matematică-exerciții şi probleme pentru clasa a VI-a*, Ed. Meteor Press 2002, pag 12-17

3.Câteva principii şi metode de rezolvare a problemelor de matematică

3.1. Principiul parității

În matematica elementară întâlnim multe probleme care folosesc noțiunea de paritate. Principiul parității constă în separarea cazurilor pare şi impare dintr-o situație. Regulile parității:

- suma a două numere pare este un număr par
- suma a două numere impare este un număr par
- suma dintre un număr par şi altul impar este un număr impar
- produsul a două numere pare este un număr par
- produsul a două numere impare este un număr impar
- produsul dintre un număr par şi un număr impar este un număr par.

Prezentăm în continuare câteva probleme rezolvate care folosesc principiul parității.

R3.1.1. Demonstrați că dacă suma a două numere întregi este un număr impar, produsul lor este un număr par.

Soluție. Fie *a* şi *b* numerele. Din ipoteză $a+b=2n+1$, $n\in\mathbf{N}$. Deci unul din numerele a sau b este par. Fie $a=2k$. Atunci $b=2n+1-a=2n+1-2k=2(n-k)+1$, adică b este impar. Atunci $a\cdot b$ este produsul dintre un număr par şi altul impar, deci va fi impar.

R3.1.2. Demonstrați că 2^n $(n\geq 2, n\in\mathbf{N})$ se poate scrie ca o sumă de două numere naturale impare consecutive, iar 3^n se poate scrie ca o sumă de trei numere naturale consecutive şi ca sumă a trei numere impare consecutive.

Soluție. Pentru orice $n\geq 2$, $n\in\mathbf{N}$, 2^n este număr par. Avem:

$$2^n=2\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}+2^{n-1}=(2^{n-1}-1)+(2^{n-1}+1)$$

Pentru $n\geq 2$, $n\in\mathbf{N}$, $2^{n-1}-1$ şi $2^{n-1}+1$ sunt impare consecutive.

Pentru orice $n\geq 2$, $n\in\mathbf{N}$, $3^n\in\mathbf{N}$ şi

$$3^n=3\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1}=(3^{n-1}-1)+3^n+(3^{n-1}+1)$$

Numerele $3^{n-1}-1$, 3^n şi $3^{n-1}+1$ sunt consecutive pentru $n\geq 2$.

Mai avem că

$$3^n=3^{n-1}\cdot 3=3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1}=(3^{n-1}-2)+3^{n-1}+(3^{n-1}+2),$$

unde $3^{n-1}-2, 3^{n-1}, 3^{n-1}+2$ sunt impare consecutive.

R3.1.3. Se consideră şirul numerelor naturale de la 1 la 1979 adică: 1,2,3,4,...,1977,1978,1979. Luați la întâmplare oricare două numere din acest şir şi înlocuiți-le cu modulul diferenței lor. La fiecare operație de acest fel numărul numerelor din şir scade cu unu (fiindcă am înlocuit două numere cu unul) şi vom obține, în final, un singur număr. Arătați că acest număr este par.

Soluție. La fiecare etapă a operației descrise, numărul numerelor impare din şir rămâne neschimbat sau descreşte cu doi, deoarece dacă, în primul caz, luăm un număr par şi unul impar, modulul diferenţei lor este impar, deci numărul impar l-am înlocuit cu altul impar, iar în al doilea caz dacă luăm două numere impare, modulul diferenţei lor este un număr par, deci numărul numerelor impare scade cu doi. În şirul 1,2,3,...,1979 avem (1+1979):2 numere impare, adică 990.

La fiecare pas rămâne un număr par de numere impare şi atunci ultimul număr va fi cu siguranţă par.

R3.1.4. Se consideră numerele impare $k, n_1, n_2, ..., n_k$. Să se demonstreze că printre numerele: $\frac{n_1+n_2}{2}, \frac{n_2+n_3}{2}, ..., \frac{n_{k-1}+n_k}{2}, \frac{n_k+n_1}{2}$ există un număr impar de numere impare.

Soluţie. Suma a două numere impare este un număr par, deci numerele $\frac{n_1+n_2}{2}, \frac{n_2+n_3}{2}, ..., \frac{n_k+n_1}{2}$ sunt naturale. Să presupunem că printre acestea se află un număr par de numere impare. Atunci suma lor

$$\frac{n_1+n_2}{2}+\frac{n_2+n_3}{2}+...+\frac{n_k+n_1}{2}=n_1+n_2+...+n_k$$

este un număr par. Dar aceeaşi sumă este suma unui număr impar de numere impare deci este un număr impar. Contradicţie. Deci presupunerea făcută a fost falsă, deci printre numerele considerate în ipoteză există un număr impar de numere impare.

3.2. Probleme de numărare

Probleme de numărare întâlnim în diverse situaţii din viaţa cotidiană. În matematica şcolară sunt frecvente problemele de numărare ca de exemplu: numărul divizorilor unui număr, numărul triunghiurilor, numărul patrulaterelor dintr-o anumită configuraţie, numărul cifrelor unui număr, numărul termenilor unui şir, etc. Prezentăm în continuare câteva probleme care conduc la operaţia de numărare.

3.2.1. Numărul divizorilor şi suma divizorilor unui număr natural

3.2.1.1. a) Numărul divizorilor unui număr natural

Fie *a* un număr natural compus ce are următoarea descompunere în factori primi: $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot ....\cdot p_n^{\alpha_n}$, unde $p_1, p_2, ..., p_n$ sunt numere prime iar $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}$. Pentru a obţine numărul divizorilor lui *a* formăm tabelul:

$$\begin{array}{lllllll} p_1^0 & p_1^1 & p_1^2 & ... & p_1^{\alpha_1} & & \alpha_1+1 \text{ termeni} \\ \mathrm{p}_2^0 & p_2^1 & p_2^2 & ... & p_2^{\alpha_2} & & \alpha_2+1 \text{ termeni} \\ ... & ... & ... & ... & ... & & \\ \mathrm{p}_\mathrm{n}^0 & p_n^1 & p_n^2 & ... & p_n^{\alpha_n} & & \alpha_n+1 \text{ termeni} \end{array} \tag{1}$$

Observăm că:

1) Oricare număr din tabel este un divizor pentru *a*.

2) Linia întâi conține α_1+1 termeni, linia a doua conține α_2+1 termeni,..., ultima linie conține α_n+1 termeni.

3) Dacă înmulțim pe rând fiecare număr din linia întâi cu fiecare număr din linia a doua obținem $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)$ divizori ai lui *a*. Înmulțind apoi pe fiecare din aceste numere cu fiecare număr din linia a treia obținem $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)$ numere şi fiecare din acestea sunt divizori ai lui *a*. Continuând raționamentul obținem $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)...(\alpha_n+1)$ numere care sunt divizori ai lui *a*.

4) În numărul acestor divizori este inclus numărul însuşi şi divizorul 1.

Am obținut astfel următoarea

Teorema 3.2.1. Numărul divizorilor numărului $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot....\cdot p_n^{\alpha_n}$ este $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_n+1)$.

3.2.1.2. b) Suma divizorilor unui număr natural

Să calculăm întâi suma:

$$S=1+x+x^2+...+x^n \tag{2}$$

Avem

$$x\cdot S=x+x^2+...+x^{n-1}+x^n+x^{n+1} \tag{3}$$

Din (3) şi (2) scăzute membru cu membru obținem:

$$x\cdot S-S=(x+x^2+x^3+...+x^n+x^{n+1})-(1+x+x^2+...+x^n)$$

care se mai scrie $S(x-1)=x^{n+1}-1$, de unde

$$S=\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \tag{4}$$

cu $x\neq 1$.

Scriem produsul de *n* sume, având termenii pe cele *n* linii din tabelul (1) şi obținem:

$$(1+p_1+p_1^2+...+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+...+p_2^{\alpha_2})...(1+p_n+p_n^2+...+p_n^{\alpha_n}) \tag{5}$$

Cu relația (4), (5) devine

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot...\cdot\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}$$

Am obținut astfel

Teorema 3.2.2. Suma divizorilor numărului $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot....\cdot p_n^{\alpha_n}$ este

$$S=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot...\cdot\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}$$

Probleme rezolvate

R3.2.1. Fie S suma divizorilor naturali ai numărului 2001. Să se arate că $5 \cdot S$ este număr natural pătrat perfect.

Soluție. Fiindcă $2001=3^1 \cdot 23^1 \cdot 29^1$, suma divizorilor numărului 2001 este:

$$S = \frac{3^2-1}{3-1} \cdot \frac{23^2-1}{23-1} \cdot \frac{29^2-1}{29-1} = 4 \cdot 24 \cdot 30$$

Atunci $5 \cdot S = (2^3 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 120^2$, deci $5 \cdot S$ este pătrat perfect.

R3.2.2. Să se arate că pătratul produsului tuturor divizorilor naturali ai numărului 2001 este 2001^8.

Soluție. Avem următoarea

Lema 3.2.1. Dacă $d_1, d_2, ..., d_n$ sunt toți divizorii naturali ai numărului n atunci avem relația:

$$(d_1 \cdot d_2 ... d_k)^2 = n^k \qquad (*)$$

Fiindcă 1 şi n sunt şi ei divizori, considerând $d_1 < d_2 < ... < d_k$ obținem:

$$d_1 = \frac{n}{d_k}, d_2 = \frac{n}{d_{k-1}}, ..., d_k = \frac{n}{d_1}$$

relații care înmulțite membru cu membru dau

$$d_1 \cdot d_2 ... d_k = \frac{n}{d_k} \cdot \frac{n}{d_{k-1}} ... \frac{n}{d_1}$$

de unde $(d_1 \cdot d_2 ... d_k)^2 = n^k$.

În cazul nostru $2001 = 3^1 \cdot 23^1 \cdot 29^1$, numărul divizorilor lui 2001 este: (1+1)(1+1)(1+1)=8. Pentru cei opt divizori naturali ai numărului 2001 avem relația (*)

$$(d_1 \cdot d_2 ... d_8)^2 = 2001^8.$$

3.3. Principiul lui Dirichlet

Matematicianul german Peter Gustav Dirichlet (1805-1859) a elaborat un principiu extrem de simplu cu aplicații neaşteptate în variate domenii, principiu care-i poartă numele şi pe care-l enunțăm mai jos, fiind o metodă de demonstrație de tipul următor.

"Dacă repartizăm $n+1$ obiecte în n cutii, atunci cel puțin două obiecte vor fi în aceeaşi cutie."

Justificare: Considerăm cazul cel mai nefavorabil aşezând în fiecare cutie câte un obiect. Deci am folosit n cutii şi n obiecte. Obiectul cu numărul $n+1$ trebuie pus şi el într-o cutie oarecare. Dar în acea cutie există deja un obiect. Aşadar în acea cutie există deja un obiect pus anterior. În acea cutie vor fi două obiecte.

Forma generală a principiului lui Dirichlet este următoarea:

"Dacă aşezăm $kn+1$ obiecte în n cutii, atunci cel puțin $k+1$ obiecte, $k \in \mathbf{N}$, vor fi în aceeaşi cutie."

În literatura matematică principiul lui Dirichlet este întâlnit şi sub denumirea de "principiul cutiei", cu precizarea că denumirea de "cutie" desemnează "grupe de obiecte", stabilite după anumite criterii, iar "obiectele" desemnează lucruri, numere, figuri geometrice, etc. Prezentăm în continuare câteva probleme ale căror soluții se bazează pe principiul de mai sus.

Probleme rezolvate

R3.3.1. La un turneu de şah au participat $n \geq 2$ şahişti. Să se demonstreze că în orice moment al turneului dinaintea ultimei runde cel puțin doi şahişti au acelaşi număr de victorii.

Soluție. În orice moment al turneului dinaintea ultimei runde, fiecare şahist a jucat maximum $n-2$ partide şi a putut obține $0,1,2,...,n-2$ victorii, deci în total $n-1$ posibilități (cutii). Fiindcă la turneu au participat *n* şahişti rezultă că cel puțin doi şahişti au acelaşi număr de victorii înaintea ultimei runde.

R3.3.2. Arătați că în orice mulțime formată din 5 numere naturale există două a căror diferență este divizibilă cu 4.

Soluție. La împărțirea unui număr cu 4 obținem unul din resturile 0,1,2,3 (deci patru cutii). Fiindcă avem 5 numere (5 obiecte şi 4 cutii) rezultă că cel puțin două numere vor da acelaşi rest la împărțirea cu 4. Ele sunt de forma $x = 4k + r$ şi $y = 4l + r$. Atunci diferența lor este $x - y = 4(k - l)$, adică un număr divizibil cu 4.

R3.3.3. Într-o şcoală sunt 367 elevi. Să se demonstreze că există cel puțin doi elevi care-şi serbează ziua în aceeaşi zi a anului.

Soluție. Un an are 365 sau 366 zile. Considerând cazul cel mai nefavorabil când în fiecare zi a anului ar fi născut câte un elev, înseamnă că în total ar fi născuți 365 sau 366 elevi, dar în total sunt 367 elevi. Deci al 367-lea elev a fost şi el născut într-o zi a anului în care a mai fost născut un elev. Deci într-o zi s-au născut 2 elevi, deci cei doi îşi vor serba ziua de naştere în aceeaşi zi.

R3.3.4. Fiind date $n+1$ numere naturale $(n \neq 0)$ atunci cel puțin două dintre ele dau acelaşi rest la împărțirea cu *n*.

Soluție. Folosim teorema împărțirii cu rest. Fiind date numerele naturale *a* şi *b* $(b \neq 0)$ există în mod unic numerele naturale *q* şi *r* astfel ca

$$a = b \cdot q + r \quad \text{cu} \quad r < b .$$

În cazul problemei noastre numerele fiind împărțite la *n* există pentru rest *n* valori posibile: 0,1,2,...,*n*-1. Fiindcă împărțim *n*+1 numere vor exista *n*+1 resturi, dintre care cel mult *n* sunt diferite. Rezultă că cel puțin două dintre cele *n*+1 numere împărțite la *n* dau acelaşi rest.

R3.3.5. Să se arate că oricum am alege 7 numere pătrate perfecte (distincte) există cel puțin două a căror diferență se divide cu 10.

Soluție. Dacă *a* este numărul a cărui pătrat este a^2 atunci la împărțirea cu 10 a lui *a* obținem unul din resturile: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Atunci a^2, la împărțirea cu 10 va da unul din resturile: 0,1,4,5,6,9. Fiindcă avem 7 pătrate perfecte şi numai resturile 0,1,4,5,6,9, deci există cel puțin două pătrate perfecte care dau acelaşi rest la împărțirea cu 10, deci diferența lor se divide cu 10.

3.4. Principiul invariantului

Invariantul este o mărime, o relație, sau o proprietate care rămâne neschimbată în urma aplicării sau intervenției unei transformări.

Deci o situație inițială este supusă în mod repetat unor transformări. De obicei se cere să se demonstreze că în urma acestor transformări nu se poate ajunge la o anumită formă. Aceasta se poate face alegând caracteristica obiectului care a fost supus transformării, adică "invariantul" transformării. Dacă în final obiectul nu posedă "invariantul" atunci el nu poate fi obținut în urma transformărilor descrise.

Probleme rezolvate

R3.4.1. Considerăm un număr natural căruia îi schimbăm în mod arbitrar ordinea cifrelor. Este posibil ca diferența dintre numărul inițial şi cel final să fie 2003?

Soluție. Restul împărțirii numărului la 9 este acelaşi cu restul împărțirii sumei cifrelor sale la 9. Suma cifrelor este aceeaşi, rezultă că restul împărțirii numărului la 9 este un invariant.

R3.4.2. Pe o tablă sunt scrise semne de "+" şi "–". Ştergem două semne şi le înlocuim cu un semn, după următoarea regulă: dacă cele două semne şterse sunt identice le înlocuim cu "+", iar dacă ştergem două semne diferite le înlocuim cu "–". Arătați că ultimul semn care rămâne după un număr de paşi nu depinde de ordinea alegerii perechilor.

Soluție. În acest caz paritatea numărului de minusuri va fi invariantul. Dacă la început numărul de minusuri este impar, ultimul semn care va rămâne este minus, iar dacă la început numărul de minusuri este par, la sfârşit va rămâne plus.

R3.4.3. Trei greieri se găsesc pe o dreaptă în ordinea: A, B, C. Ei încep să sară capra, adică să sară unul peste altul (dar nu peste doi odată). Pot fi în aceeaşi ordine după 2003 sărituri?

Soluție. În urma unei sărituri de acest fel numărul perechilor de greieri inversați creşte sau se micşorează cu 1 (proprietatea invariantă). După un număr impar de sărituri (2003) va exista un număr impar de perechi de greieri inversați. Deci nu se poate obține ordinea inițială (ce nu conține o astfel de pereche).

R3.4.4. O cameră are dimensiunile podelei de 7m şi 10m. În cele patru colțuri ale camerei se aşează câte un dulap având baza pătrat cu latura de 1m. Să se arate că rămâne din suprafața podelei nu poate fi acoperită cu plăci dreptunghiulare de dimensiuni 3m×1m.

Soluție. Se împarte camera într-o rețea de pătrate cu latura 1m pe care le vopsim în trei culori: roşu, alb, negru ca mai jos:

RANRANRANR
ANRANRANRA
NRANRANRAN
RANRANRANR
ANRANRANRA
NRANRANRAN
RANRANRANR

Obținem 24 de R, 23 de A, 23 de N. Eliminând colțurile rămân 20 de pătrățele roşii, 23 de pătrățele albe, 23 de pătrățele negre. Dar oricum am aşeza o placă de 3×1 ea acoperă un pătrățel roşu, unul alb şi unul negru. Dacă s-ar putea acoperi suprafața cu un număr întreg de plăci ar trebui să existe acelaşi număr de pătrățele pentru fiecare culoare.

3.5. Probleme de logică

Am inclus aici câteva probleme a căror rezolvare se realizează printr-o serie de judecăți logice ce solicită inventivitate, perspicacitate, etc. şi foarte puțin calcul.

Probleme rezolvate

R3.5.1. Mama a observat că din dulap au dispărut cinci tablete de ciocolată. Ele puteau fi luate de cei trei copii: A, B, C. Fiind traşi la răspundere, ei au dat mai întâi următoarele răspunsuri:
A: N-am luat nici o ciocolată!
B: N-am luat nici o ciocolată!
C: N-am luat nici o ciocolată!

După un nou "interogatoriu" copiii au făcut următoarele declarații:
A: B a luat mai multe tablete decât C!
B: (către A): Minți!
C: Toate au fost luate de A şi B!
A (către C): Minți!

Aflați câte tablete de ciocolată au fost luate de către fiecare copil, ştiind că fiecare a făcut atâtea declarații false câte tablete de ciocolată a luat.

Soluție. Fiindcă au "dispărut" 5 ciocolate şi s-au făcut 7 declarații, rezultă că cinci declarații erau false iar 2 (7-5) adevărate.

La al doilea "interogatoriu" prima afirmație a lui A este fie adevărată şi atunci afirmația lui B este falsă, fie este falsă şi atunci afirmația lui B este adevărată. Tot din "interogatoriul" al doilea afirmația lui C este fie adevărată şi atunci cea de-a doua afirmație a lui A este falsă, fie este falsă şi atunci cea de-a doua afirmație a lui A este adevărată. Deci rezultă că cele două afirmații adevărate au fost făcute la cel de-al doilea "interogatoriu", deci la primul "interogatoriu" toți copiii au făcut declarații false, de unde rezultă că fiecare din cei trei copii a luat cel puțin o ciocolată. Deci a doua afirmație a lui C este falsă, deci C a luat două tablete de ciocolată. B face numai două afirmații, deci el nu poate lua mai multe ciocolate decât C, rezultă că la al doilea "interogatoriu" prima afirmație a lui A este falsă, deci afirmația lui B este adevărată. Deci A a luat două ciocolate, B a luat o ciocolată, iar C a luat două ciocolate.

R3.5.2. Într-un bloc locuiesc familiile A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, R. La parter şi la fiecare etaj locuiesc câte două familii. Se mai ştie că: Familia A locuieşte cu două etaje mai jos ca familia B, iar aceasta cu şase etaje mai sus ca familia C. Familiile F şi G locuiesc la acelaşi etaj. Familia M locuieşte cu patru etaje mai sus ca familia N şi cu două etaje mai jos ca familia F. Un etaj deasupra familiei N locuieşte familia O. Familia A locuieşte cu trei etaje mai sus ca familia R, iar familia P locuieşte cu cinci etaje mai jos decât familia G.

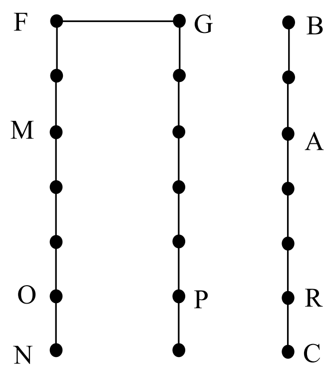
a) Câte etaje are blocul?

b) La ce etaj locuieşte familia A?

Soluţie. a) Fiindcă la parter şi la fiecare etaj locuiesc două familii, iar în tot blocul locuiesc 16 familii, rezultă că blocul are opt nivele (parter şi şapte etaje).

b) Diagramele alăturate (stabilite conform enunţului) pun în evidenţă modul cum sunt distribuite în bloc familiile N, O, M, F, G, P precum şi C, R, A, B. Blocul având opt nivele, rezultă că familia N poate locui numai la parter sau la etajul întâi. Aceeaşi remarcă şi pentru familia C. Familiile N şi C nu pot locui la acelaşi nivel, pentru că ar trebui ca familiile O, P, R să locuiască la acelaşi etaj, situaţie imposibilă, pentru că la un nivel pot locui numai două familii. Dacă familia N locuieşte la parter atunci familia C ar trebui să locuiască la etajul întâi, situaţie imposibilă deoarece ar rezulta că familiile O, P, C locuiesc la acelaşi etaj. Dacă familia N locuieşte la etajul întâi, atunci familia C locuieşte la parter. Urmărind comparativ diagramele observăm că este o situaţie posibilă pentru că la un nivel pot locui numai două familii.

Acestea fiind precizate putem stabili distribuţiile familiilor în bloc: Familiile F şi G la etajul şapte, familia B la etajul şase, familia M la etajul cinci, familia A la etajul patru, familiile P şi O la etajul doi, familiile N şi R la etajul întâi, iar familia C la parter. În cele şase locuri neocupate se vor distribui familiile D, E, H, I, K, L după voie.



R3.5.3. La un turneu de fotbal participă 15 echipe, fiecare dintre acestea jucând cu toate celelalte. Pentru victorie se acordă 3 puncte, pentru meci egal 2 puncte, iar pentru înfrângere un punct. În clasamentul întocmit la sfârşitul turneului nu există echipe cu acelaşi număr de puncte. Ştiind că ultima echipă are 21 de puncte, să se arate că prima a făcut cel puţin un meci nul.

Soluţie. Fiecare echipă a disputat 14 meciuri. Numărul meciurilor disputate a fost $\frac{14 \cdot 15}{2} = 105$ deoarece fiecare meci a fost numărat de două ori (şi când a jucat A cu B şi când a jucat B cu A). Fiindcă echipa clasată pe ultimul loc are 21 de puncte, iar în clasament nu sunt echipe cu acelaşi număr de puncte rezultă că numărul de puncte este mai mare sau egal cu

$$21+(21+1)+(21+2)+...(21+14)=21\cdot 15+\frac{14\cdot 15}{2}=420$$

Fiindcă la fiecare meci s-au acordat 4 puncte, rezultă că numărul de puncte acordat a fost 105·4=420. Deci echipele au obţinut punctajele: 21, 22,23,...,34, 35.

Să arătăm că echipa de pe locul întâi cu 35 puncte a făcut cu siguranţă cel puţin un meci nul. Presupunem că nu a făcut nici un meci nul. Atunci dacă x este numărul victoriilor şi y numărul înfrângerilor avem:

$$x+y=14 \quad \text{şi} \quad 3x+y=35,$$

de unde $x=\frac{21}{2}$ şi $y=\frac{7}{2}$. Dar x, y trebuie să fie naturale. Deci presupunerea făcută este falsă, atunci echipa de pe locul întâi a făcut cel puţin un meci nul.

R3.5.4. La un concurs de atletism participă trei echipe: A_1, A_2, A_3, fiecare cu trei concurenţi. Concurentul care soseşte primul primeşte 18 puncte, cel care soseşte al doilea 16 puncte, cel care soseşte al treilea 14 puncte,..., cel care soseşte ultimul primeşte două puncte. Punctajul unei echipe este suma punctelor obţinute de cei trei reprezentanţi ai săi. Aflaţi ce loc a ocupat fiecare echipă ştiind că:

i) Primele trei locuri au fost ocupate de concurenţi de la echipe diferite.

ii) Fiecare concurent de la echipa A_2 avea în faţa sa un concurent de la echipa A_1.

iii) Concurenţii echipei A_3 au sosit unul după altul.

Soluţie. Din prima şi a treia condiţie rezultă că cei trei reprezentanţi ai echipei A_3 au sosit al treilea, al patrulea şi al cincilea. Din primele două condiţii rezultă că primul a sosit un concurent de la echipa A_1, iar al doilea un concurent de la echipa A_2. Din cele de mai sus şi din a doua condiţie rezultă că al şaselea şi al optulea au sosit concurenţii de la echipa A_1, iar al şaptelea şi al nouălea au fost concurenţii de la echipa A_2. Deci echipa A_1 a acumulat 18+8+4=30 (puncte), echipa A_2 a acumulat 16+6+2=24 (puncte), iar echipa A_3 a acumulat 14+12+10=36 (puncte). Deci pe locul întâi se află echipa A_3, pe locul doi echipa A_1, iar pe locul trei echipa A_2.

R3.5.5. Opt şahişti participă la un turneu, jucând fiecare cu fiecare. Pentru fiecare victorie un jucător primeşte un punct, pentru remiză un jumătate de punct, iar pentru înfrângere nu primeşte nici un punct. La sfârşitul turneului primii doi clasaţi au obţinut punctaje diferite, iar cel de-al doilea a obţinut atâtea puncte câte au obţinut ultimii patru şahişti împreună. Să se afle cum s-a încheiat partida dintre şahiştii clasaţi pe locurile trei şi cinci.

Soluţie. Fiindcă au fost opt jucători şi fiecare a jucat cu fiecare, un şahist a jucat şapte partide şi ar fi putut câştiga cel mult şapte puncte (când învingea în toate cele şapte partide). Ultimii patru şahişti au jucat între ei şase partide. (Dacă A,B,C,D sunt ultimii şahişti, au jucat: A cu B, A cu D, B cu C, B cu D şi C cu D).

Deci ultimii patru şahişti au realizat împreună cel puțin şase puncte. Deci şahistul de pe locul doi a obținut cel puțin şase puncte (deoarece el a obținut un număr egal de puncte cu suma ultimilor patru). Fiindcă primii doi jucători au punctaje diferite înseamnă că al doilea a obținut exact şase puncte, căci dacă obținea 6,5 puncte primii doi aveau acelaşi punctaj, iar dacă ar fi obținut şapte puncte era pe primul loc. Deci şahiştii de pe ultimele patru locuri au obținut exact şase puncte, aceasta înseamnă că ei au pierdut toate partidele jucate împotriva primilor patru clasați. Deci şahistul de pe locul cinci a pierdut partida susținută cu cel de pe locul trei.

R3.5.6. În trei coşuri sunt mere. Câte mere sunt în fiecare coş ştiind că în primele 2 împreună este un măr, în ultimele 2 împreună este cel puțin un măr, iar în ultimul şi al treilea împreună, numai unul.

Soluție. Dacă mărul din primele 2 coşuri s-ar afla în primul coş, atunci din a treia condiție ar rezultat că în al treilea coş nu se află nici un măr, deci al doilea şi al treilea coş ar fi goale şi astfel nu ar avea loc a doua condiție. În concluzie primul coş este gol, al doilea coş conține un măr, iar al treilea coş conține tot un măr.

3.6. Probleme de ordonare

Pentru a stabili care dintre două numere *a* şi *b* este mai mare, putem folosi mai multe procedee, dintre care cele mai des întrebuințate sunt:

1) Stabilim semnul diferenței $a-b$.

Dacă $a-b>0$, atunci $a>b$.

Dacă $a-b=0$, atunci $a=b$.

Dacă $a-b<0$, atunci $a<b$.

2) Dacă numerele *a* şi *b* sunt pozitive şi $b\neq 0$, comparăm raportul $\frac{a}{b}$ cu 1.

Dacă $\frac{a}{b}<1$, atunci $a<b$.

Dacă $\frac{a}{b}=1$, atunci $a=b$.

Dacă $\frac{a}{b}>1$, atunci $a>b$.

3) În unele situații este suficient să demonstrăm existența unui număr *c* situat între cele două numere (exemplu: din $a<c<b$, rezultă $a<b$).

În unele situații avem nevoie de metode ingenioase pentru a rezolva problemele. Există cazuri când operația de ordonare ajută la dovedirea egalității a două numere *x* şi *y* prin stabilirea simultană a inegalităților $x\leq y$ şi $y\geq x$.

Probleme rezolvate

R3.6.1. Comparați numerele 31^{11} cu 17^{14}.

Soluție. $31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} < 2^{56} = (2^4)^{14} = 16^{14} < 17^{14}$.

R3.6.2. Scrieți în ordine crescătoare numerele:

$$4^{22}, 3^{34}, 2^{44}, 63^7.$$

Soluție. $63^7 < 64^7 = (2^6)^7 = 2^{42} < 2^{44} = (2^2)^{22} = 4^{22} < 2^{51} = (2^3)^{17} =$ $= 8^{17} < 9^{17} = (3^2)^{17} = 3^{34}$. Deci $63^7 < 2^{44} = 4^{22} < 3^{34}$.

R3.6.3. Să se arate că pentru orice numere naturale *a* și *b* avem

$$\frac{a+2^{360}}{a3^{240}} < \frac{b+5^{1800}}{b+7^{1440}}$$

Soluție. $2^{360} = (2^3)^{120} = 8^{120}$; $3^{240} = (3^2)^{120} = 9^{120}$.

Atunci obținem că $2^{360} < 3^{240}$, de unde rezultă că $a+2^{360} < a+3^{240}$ și deci

$$\frac{a+2^{360}}{b+3^{240}} < 1$$

$5^{1800} = (5^5)^{360} = 3125^{360}$; $7^{1440} = (7^4)^{360} = 2401^{360}$

Rezultă că $5^{1800} > 7^{1440}$, de unde rezultă că $b+5^{1800} > b+7^{1440}$ și deci $\frac{b+5^{1800}}{b+7^{1400}} > 1$.

Deci prima fracție din ipoteză este subunitară iar a doua este supraunitară și atunci relația cerută este adevărată.

R3.6.4. Comparați fracțiile *A* și *B* unde

$$A = \frac{2+2^2+2^3+\ldots+2^{1997}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{1997}}} \quad \text{și} \quad B = \frac{3+3^2+\ldots+3^{1331}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{1331}}}$$

Soluție. Amplificăm prima fracție cu 2^{1998} și a doua cu 3^{1332} și obținem:

$$A = \frac{2^{1998}(2+2^2+2^3+\ldots+2^{1997})}{2^{1998}+2^{1997}+\ldots+2} = 2^{1998} = (2^3)^{666} = 8^{666}$$

$$B = \frac{3^{1332}(3+3^2+\ldots+3^{1331)}}{3+3^2+\ldots+3^{1331}} = 3^{1332} = (3^2)^{666} = 9^{666}.$$

Deci $A > B$.

3.7. Metoda reducerii la absurd

Metoda reducerii la absurd este o metodă specifică de demonstrație în matematică. La baza acestei metode stă una din legile fundamentale ale logicii clasice: legea terțului exclus, ce are următorul enunț:

Din două propoziții contradictorii una este adevărată, cealaltă falsă, iar a treia posibilitate nu există.

Legea terțului exclus nu ne precizează care din cele două propoziții este adevărată şi care este falsă.

Când la două propoziții contradictorii aplicăm legea terțului exclus este suficient să stabilim că una dintre ele este falsă pentru a deduce că cealaltă este adevărată.

Metoda reducerii la absurd constă în a admite în mod provizoriu, ca adevărată propoziția contradictorie propoziției de demonstrat, apoi pe baza acestei presupuneri se deduc o serie de consecințe care duc la un rezultat absurd, deoarece ele contrazic sau ipoteza problemei date sau un adevăr stabilit mai înainte. Mai departe raționăm astfel: dacă presupunerea ar fi fost adevărată, atunci în urma raționamentelor logic corecte ar fi trebuit să ajungem la o concluzie adevărată, deoarece am ajuns la o concluzie falsă, înseamnă că presupunerea noastră a fost falsă. Aceasta duce la concluzia că presupunerea făcută nu este posibilă şi rămâne ca adevărată concluzia propoziției date.

Metoda reducerii la absurd nu se reduce la propoziția că "a demonstra o propoziție este acelaşi lucru cu a demonstra contrara reciprocei ei", deoarece pot apărea şi situații în care nu se contrazice ipoteza ci o altă propoziție (un rezultat cunoscut, o axiomă, o teoremă). Metoda reducerii la absurd se foloseşte atât în rezolvarea problemelor de calcul (de aflat) cât şi la rezolvarea problemelor de "demonstrat". Metoda este des utilizată în demonstrarea teoremelor reciproce, precum şi în demonstrarea teoremelor de unicitate.

Probleme rezolvate

R3.7.1. Arătați că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ fracția $\frac{39n+4}{26n+3}$ este ireductibilă.

Soluție. Presupunem că fracția este reductibilă şi fie $d=(39n+4, 26n+3)$ cu $d \in \mathbf{N}^*$, $d \neq 1$. Din $d \mid (39n+4)$ şi $d \mid (26n+3)$ obținem că $d \mid (78n+8)$ şi $d \mid (78n+9)$, de unde rezultă că $d \mid [78n+9-(78n+8)]$, deci $d \mid 1$, de unde rezultă $d=1$. Fals.

R3.7.2. Să se arate că nu există numere întregi a pentru care numerele $\frac{14a+5}{9}$ şi $\frac{17a-5}{12}$ să fie simultan întregi.

Soluție. Presupunem că există numere întregi a astfel ca $\frac{14a+5}{9}$ şi $\frac{17a-5}{12}$ să fie simultan întregi, adică pentru $b, c \in \mathbf{Z}$, $\frac{14a+5}{9}=b$ şi $\frac{17a-5}{12}=c$, de unde $14a+5=9b$ şi $17a-5=12c$ şi scăzând prima relație din a doua obținem: $3a-10=12c-9b$, de unde $10=3a-12c+9b$ sau $10=3(a-4c+3b)$. Atunci obținem că 3 divide pe 10, ceea ce este absurd.

R3.7.3. Considerăm trei drepte diferite d_1, d_2, d_3 concurente într-un punct O. Arătați că cel puțin unul din unghiurile formate are măsura mai mare sau cel puțin egală cu 60°.

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem concluzia falsă, adică nu există un unghi cu măsura mai mare sau egală cu 60°. Atunci cele șase unghiuri formate ar avea suma măsurilor mai mică decât 360°. Am ajuns la o contradicție deoarece suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este 360°. Deci presupunerea făcută este falsă, deci există cel puțin un unghi cu măsura de 60°.

4. Rapoarte şi proporții

Rapoarte

- Raportul numerelor raționale *a* şi *b*, $b \neq 0$, este expresia $\frac{a}{b}$; *a* şi *b* se numesc termenii raportului.
- Câtul termenilor unui raport se numeşte valoarea raportului.

  Exemplu: valoarea raportului $\frac{3,5}{7}$ este 0,5.
- Termenii unui raport se exprimă întotdeauna cu aceeaşi unitate de măsură.

Aplicațiile rapoartelor în practică sunt: scara unui plan, scara unei hărți, probabilitatea realizării unui eveniment, procente, titlul unui aliaj.

4.1. Scara unui plan

Prin scara unui plan înțelegem raportul dintre distanța din plan şi distanța din realitate dintre aceleaşi două puncte, ambele distanțe fiind exprimate cu aceeaşi unitate de măsură.

Remarcă. De obicei, numărătorul raportului prin care se exprimă scara este 1.

Model. Figura de mai jos reprezintă planul unui apartament. Acest plan este realizat la scara $\frac{1}{100}$. Aceasta înseamnă că la 1 cm din desen corespund, în realitate, 100cm. Cu alte cuvinte, în plan lungimea sufrageriei este de 5cm, iar în realitate este de 500cm, adică de 5m.

La planul din figură să se determine:

a) lățimea, în centimetri, a dormitorului

b) dimensiunile, în centimetri, ale bucătăriei

c) perimetrul, în centimetri, a holului

d) aria, în cm^2 a sufrageriei.

Soluție.

a) Lățimea dormitorului de 3m, din realitate, este în plan de 3cm.

b) Dimensiunile de 2m şi 3m ale bucătăriei, din realitate, sunt în plan de 2cm, respectiv 3cm.

c) Holul are dimensiunile de 8m şi 2m, în realitate, deci în plan ele vor fi 8cm şi 2cm, rezultă că perimetrul holului în plan este de 20cm.

d) Sufrageria are dimensiunile de 5m şi 4m, în realitate, deci în plan 5cm şi 4cm, rezultă că aria sufrageriei în plan este $20cm^2$.

Probleme rezolvate

R4.1.1. Care este scara planului unei grădini, dacă o latură a grădinii, care are 125m, este reprezentată în plan printr-un segment lung de 25cm?

Soluție. Aplicând definiția scării unui plan, ca fiind raportul dintre distanța din plan şi distanța din realitate, ambele exprimate în aceeaşi unitate de măsură, scara planului este $\frac{25}{12500}$, adică $\frac{1}{500}$.

R4.1.2. O grădină în formă de dreptunghi, are pe un plan cu scara de $\frac{1}{300}$ dimensiunile de 4cm şi 5cm. Ce suprafață, în hectare, are grădina în teren?

Soluție. În planul cu scara $\frac{1}{300}$, lungimea de 1 cm corespunde la 300 cm din realitate. Dimensiunile grădinii vor fi $4 \cdot 300$cm şi $5 \cdot 300$cm, adică 12m şi 15m. Aria grădinii este de 0,018ha.

R4.1.3. Planul unui parc are scara de $\frac{1}{200}$.

a) În plan se află un loc de formă circulară, cu raza de 1m, ce reprezintă lacul. Câți centimetri are raza cercului în plan?

b) Spațiul de joacă pentru copii este, în teren, un pătrat cu aria de 100m^2. Ce arie are în plan spațiul de joacă pentru copii?

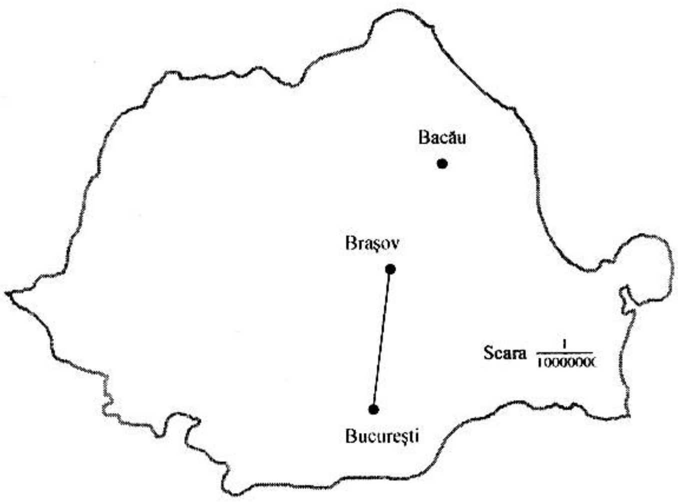
Soluție. a) În planul cu scara de $\frac{1}{200}$, lungimea de 1cm corespunde la 200cm din teren. Dacă raza cercului este în teren 1m, adică 100cm, ea corespunde în plan unei lungimi de 0,5cm.

b) Latura pătratului din teren are 10m, deci 1000cm, iar în plan latura pătratului are 1000:200=5cm. Rezultă că aria pătratului în plan este de 25cm^2.

4.2. Scara unei hărți

Prin scara unei hărți înțelegem raportul dintre distanța de pe hartă şi distanța din realitate dintre aceleaşi două puncte, distanțele fiind măsurate cu aceeaşi unitate de măsură, iar numărătorul raportului prin care se exprimă scara este 1.

Model. În figura de mai jos, harta României este realizată la scara $\frac{1}{10000000}$, aceasta însemnând că la 1cm de pe hartă corespund 10000000cm=100km în realitate (teren).



De exemplu, distanța pe şosea, dintre Bucureşti şi Braşov, pe hartă, este 17mm, iar distanța din teren d o determinăm astfel:

$$\frac{1}{10000000} = \frac{1,7}{d} \Rightarrow d = 17000000\text{cm} = 170\text{km}.$$

Distanța reală dintre oraşele Bacău şi Bucureşti este de 300km. Care este distanța, în centimetri, pe harta cu scara $\frac{1}{10000000}$?

Avem $\frac{1}{10000000} = \frac{x}{30000000} \Rightarrow x = 3\text{cm}$.

4.3. Probabilitate

Definiție. Probabilitatea realizării unui eveniment este raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului şi numărul cazurilor posibile (ale experienței).

Remarcă. Probabilitatea realizării unui eveniment este un număr mai mare sau egal cu 0 şi mai mic sau egal cu 1.

- Evenimentul imposibil are probabilitatea 0.
- Evenimentul sigur are probabilitatea 1.

Model. Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 50. Care este probabilitatea ca extrăgând o singură bilă numărul obținut să fie pătrat perfect?

Soluție. În total, există 50 cazuri posibile şi 7 cazuri favorabile (apariția numărului 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49) deci probabilitatea cerută este $p = \frac{7}{50}$.

Probleme rezolvate

R4.3.1. Care este probabilitatea ca aruncând două zaruri, să obținem două fețe însumând: a) 9 puncte; b) un număr prim de puncte.

Soluție. La aruncarea a două zaruri există 6·6=36 cazuri posibile.

a) Numărul cazurilor favorabile obținerii sumei 9 puncte este 4 (3+6, 4+5, 5+4, 6+3), deci probabilitatea cerută este $\frac{4}{36}$, adică $\frac{1}{9}$.

b) Numărul cazurilor favorabile obținerii sumei un număr prim de puncte este 15 (1+1, 1+2, 2+1, 1+4, 2+3, 3+2, 4+1, 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1, 5+6, 6+5), rezultă că probabilitatea cerută este $\frac{15}{36}$, adică $\frac{5}{12}$.

R4.3.2. Într-un coş sunt 6 plicuri albe şi 4 plicuri roşii. Un copil, legat la ochi, extrage două plicuri. Calculați probabilitatea evenimentelor:

E_1 : să extragă două plicuri de aceeaşi culoare

E_2 : să extragă două plicuri de culori diferite.

Soluție. Numărul cazurilor posibile este 9·10=90.

a) Numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului E_1 : 6·5+4·3=42, probabilitatea realizării evenimentului E_1 este $\frac{42}{90}$, adică $p(E_1)=\frac{7}{15}$.

b) Numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului E_2 : 6·4+4·6=48 (sau 90-42); probabilitatea realizării evenimentului E_2 este $\frac{48}{90}$, adică $p(E_2)=\frac{8}{15}$.

Remarcă. Probabilitatea realizării evenimentului E_2 se putea calcula şi $1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$, pentru că singurele situații posibile la extragerea a două plicuri din coş este ca ele să fie de aceeaşi culoare sau de culori diferite.

R4.3.3. O carte cu 270 de pagini este deschisă la întâmplare. Să se determine probabilitatea evenimentelor următoare:

A: numărul paginii din stânga este număr par

B: numărul paginii din dreapta este multiplu de 5

C: numărul paginii din stânga este multiplu de 6

D: numărul paginii din dreapta este divizibil cu 7.

Soluție. Numărul paginii din stânga este întotdeauna par, deci $P(A)=1$.

Numărul paginii din dreapta este întotdeauna număr impar, deci trebuie să numărăm multipli impari ai lui 5, mai mici sau egali cu 265; ei sunt 5·1, 5·3, 5·5,..., 5·53=265, deci în total $\frac{53-1}{2}+1=27$ cazuri favorabile, de unde $P(B)=\frac{27}{135}=\frac{1}{5}$.

Numărul paginii din stânga este număr par întotdeauna şi el trebuie să fie multiplu de 6 mai mic decât 270; obținem 6·1, 6·2, 6·3,..., 6·45=270, 45 cazuri favorabile, de unde $P(C)=\frac{45}{135}=\frac{1}{3}$.

Numărul paginii din dreapta este număr impar, divizibil cu 7 şi mai mic decât 270, obținem 7·1, 7·3, 7·5,..., 7·37, deci în total $\frac{37-1}{2}+1=19$ cazuri favorabile, de unde $P(D)=\frac{19}{135}$.

4.4. Procente

Definiție. Un raport de forma $\frac{p}{100}$, $p \in \mathbf{Q}$, $p \geq 0$, se numeşte raport procentual. Scrierea *p*% înseamnă $\frac{p}{100}$ şi se citeşte "*p* la sută" sau "*p* procente".

Pentru a afla cât reprezintă *p*% dintr-un număr dat *a*, calculăm $\frac{p}{100}\cdot a$.

Pentru a afla un număr necunoscut *x* când ştim că *p*% din *x* reprezintă *b*, calculăm $x=b:\frac{p}{100}$.

Model 1. La faza națională a olimpiadei de matematică participă 600 de elevi. Din numărul total de participanți 5% primesc premiul I, 10% premiul al II-lea, 15% premiul al III-lea şi 20% premii speciale şi mențiuni. Câți elevi primesc premiul I, dar premiul al II-lea, dar premiul al III-lea? Ce procent din numărul elevilor care au primit premii speciale şi mențiuni reprezintă numărul elevilor cu premiul I?

Soluție. Pentru a afla câți elevi au obținut premii şi mențiuni, avem: $\frac{5}{100}\cdot 600=30$ elevi primesc premiul I, $\frac{10}{100}\cdot 600=60$ elevi primesc premiul al II-lea, $\frac{15}{100}\cdot 600=90$ elevi primesc premiul al III-lea şi $\frac{20}{100}\cdot 600=120$ elevi primesc premii speciale şi mențiuni.

Apoi, $\frac{x}{100}\cdot 120=30$, de unde $x=25$, deci 25% din numărul elevilor care au primit mențiuni şi premii speciale reprezintă numărul elevilor care au primit premiul I.

Model 2. Pentru a cumpăra un tricou, o persoană plăteşte 150000lei, ceea ce reprezintă 30% din suma pe care o are. Ce sumă are persoana?

Soluție. Ştim că $\frac{30}{100}\cdot s = 150000$, unde s este suma pe care o are persoana. De aici rezultă că $s = 150000\cdot\frac{100}{30}$, deci $s = 500000$, persoana deține suma de 500000lei.

Probleme rezolvate

R4.4.1. O suprafață de 150ha este arată în trei zile, astfel: în prima zi 40% din suprafață, a doua zi 30% din rest, iar a treia zi ce a mai rămas.

a) Câte hectare s-au arat zilnic?

b) Ce procent din întreaga suprafață s-a arat a doua zi? Dar a treia zi?

Soluție. a) În prima zi s-au arat $\frac{40}{100}\cdot 150 = 60$ ha. Restul după prima zi este 150-60=90ha. În a doua zi s-au arat $\frac{30}{100}\cdot 90 = 27$ ha, iar a treia zi restul, adică 90-27=63ha.

b) Avem $\frac{x}{100}\cdot 150 = 27$, de unde rezultă că $x = 18$, deci a doua zi s-a arat 18% din suprafața totală.

La fel, $\frac{y}{100}\cdot 150 = 63$, de unde rezultă $y = 42$, deci a treia zi s-a arat 42% din suprafața totală (sau 100%-40%-18%).

R4.4.2. După ce un turist a parcurs 38% dintr-un drum, constată că i-au mai rămas de parcurs cu 4,8 km mai mult decât a parcurs. Ce lungime are drumul şi cât a parcurs turistul?

Soluție. Dacă dintr-un drum se parcurg 38%, rezultă că rămâne din el de parcurs 62%, deci 4,8km reprezintă diferența dintre partea rămasă şi partea parcursă, deci 24% din drum. Avem $\frac{24}{100}\cdot x = 4{,}8$, unde x este lungimea drumului. Rezultă $x = 20$, drumul are o lungime de 20km.

Turistul a parcurs $\frac{38}{100}\cdot 20 = 7{,}6$ km.

R4.4.3. După două reduceri consecutive de prețuri, prima de 10%, iar a doua de 20%, un obiect costă 153000lei. Care a fost prețul inițial al acestui obiect?

Soluție. Notăm cu x prețul inițial al obiectului. Prima reducere de preț este $\frac{10}{100}\cdot x$ şi prețul obiectului după prima reducere este de $\frac{90}{100}\cdot x$; a doua reducere este de $\frac{20}{100}\cdot\frac{90}{100}\cdot x=\frac{18}{100}x$, iar după a doua reducere costul obiectului este $\frac{90}{100}x-\frac{18}{100}x=\frac{72}{100}x$, ceea ce reprezintă 153000lei.

Avem $\frac{72}{100}\cdot x=153000$, de unde rezultă $x=212500$, deci prețul inițial al obiectului a fost 212500lei.

Remarcă. Problema poate fi rezolvată şi folosind metoda mersului invers. Prețul final, 153000lei reprezintă 80% din prețul obiectului după prima ieftinire. Se poate calcula prețul după prima ieftinire $153000:\frac{80}{100}=191250$ lei. Prețul de 191250lei reprezintă 90% din prețul inițial. Calculăm prețul inițial $191250:\frac{90}{100}=212500$ lei.

R4.4.4. Un autocar are de parcurs un traseu în patru etape, astfel: în prima etapă parcurge 30% din traseu, în a doua etapă parcurge 20% din rest, în a treia etapă 25% din noul rest şi îi mai rămân pentru a patra etapă 126km de parcurs. Ce lungime are drumul?

Soluție. Se notează cu *x* lungimea drumului. În prima etapă se parcurge $\frac{30}{100}\cdot x$, rest $\frac{70}{100}\cdot x$; în a doua etapă se parcurge $\frac{20}{100}\cdot\frac{70}{100}\cdot x=\frac{14}{100}x$, rest $\frac{70}{100}x-\frac{14}{100}x=\frac{56}{100}x$; în a treia etapă se parcurge $\frac{25}{100}\cdot\frac{56}{100}\cdot x=\frac{14}{100}x$, rest $\frac{56}{100}x-\frac{14}{100}x=\frac{42}{100}x$, ceea ce reprezintă 126km. Avem $\frac{42}{100}x$=126, de unde $x=126\cdot\frac{100}{42}$, $x=300$. Lungimea drumului a fost de 300km.

R4.4.5. Numărul $\overline{bc}$ reprezintă 4% din numărul $\overline{abc}$. Să se calculeze $a+b+c\ \ (b\neq 0)$.

Soluție. Ştim că $\overline{bc}=\frac{4}{100}\cdot\overline{abc}$, deci $\overline{bc}=\frac{1}{25}(100a+\overline{bc})$, de unde rezultă că $\overline{bc}=4a+\frac{1}{25}\cdot\overline{bc}$, adică $\frac{24}{25}\overline{bc}=4a$. De aici se deduce că $\overline{bc}\vdots 25$, pentru că 4*a* este natural.

Dacă $\overline{bc}=25$ rezultă că 24=4*a*, deci *a*=6, $a+b+c=13$. Dacă $\overline{bc}=50$ sau $\overline{bc}=75$ nu se obține *a* cifră.

4.5. Titlul unui aliaj

Definiție. Titlul unui aliaj este raportul dintre masa metalului prețios conținut de aliaj şi masa aliajului.

$$\text{Titlul aliajului} = \frac{\text{masa metalului pretios}}{\text{masa aliajului}}, \text{ deci } T = \frac{m}{M}.$$

Observație. Asemănător titlului unui aliaj, se poate defini concentrația unei soluții (amestec).

$$\text{Concentrația soluției (amestecului)} = \frac{\text{masa substantei}}{\text{masa solutiei (amestecului)}}$$

Model.

1. Se face un aliaj, topind la un loc, 16g aur şi 234g cupru. Care este titlul aliajului?

Soluție. $\text{Titlul aliajului} = \dfrac{\text{masa metal pretios}}{\text{masa aliajului}}$, deci $T = \dfrac{16}{16+234} = \dfrac{16}{250}$, de unde rezultă titlul aliajului 0,064.

2. Concentrația de sare dintr-o soluție este 17%. Ce cantitate de sare se găseşte în 27,5kg de soluție?

Soluție. Concentrația soluției reprezintă raportul dintre masa substanței şi masa soluției. Avem $\dfrac{17}{100} = \dfrac{x}{27{,}5}$, de unde $x \cdot 100 = 17 \cdot 27{,}5$, deci $x = 4{,}675$. În 27,5kg soluție se află 4,675g sare.

Probleme de amestec şi aliaje

Frecvent în practică se întâlnesc probleme de acest tip. În funcție de datele şi cerințele lor în general, aceste probleme se împart în două categorii.

Probleme de amestec şi aliaj de categoria I

În aceste probleme se cunosc:

a) cantitățile care se amestecă: $m_1, m_2, ..., m_n$

b) calitățile lor: $c_1, c_2, ..., c_n$.

Se cere: c) calitatea amestecului.

Calitatea diverselor produse, substanțe, aliaje etc. care se amestecă, se exprimă prin: grade de temperatură, lei, grade de tărie sau în cazul aliajelor prin titlu.

Teorema 4.5.1. Dacă amestecăm produse de calitățile $c_1, c_2, ..., c_n$ în cantitățile $m_1, m_2, ..., m_n$ $(n \in \mathbf{N})$, atunci calitatea amestecului este dată de relația:

$$C = \frac{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2 + ... + m_n c_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} \qquad (1)$$

Demonstrație. Vom demonstra teorema în ipoteza că produsele respective sunt aliaje cu titlurile $t_1, t_2, ..., t_n$ (deci $c_1 = t_1$, $c_2 = t_2, ...,$ $c_n = t_n$) şi în cantitățile $m_1, m_2, ..., m_n$. Deci să arătăm că titlul noului aliaj este:

$$T = \frac{m_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2 + ... + m_n t_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

Fie $t_1 = \frac{m_1^{'}}{m_1}$, $t_2 = \frac{m_2^{'}}{m_2}, ...,$ $t_n = \frac{m_n^{'}}{m_2}$, unde $m_1^{'}, m_2^{'}, ..., m_n^{'}$ sunt cantitățile de metal prețios din fiecare aliaj. Masa totală a metalului prețios din aliajul obținut prin topire la un loc a aliajelor date este:

$$m = m_1^{'} + m_2^{'} + ... + m_n^{'} = m_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2 + ... + m_n \cdot t_n$$

Masa totală a aliajului nou obținut este $M = m_1 + m_2 + ... + m_n$. Deci titlul noului aliaj este:

$$T = \frac{m}{M} = \frac{m_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2 + ... + m_n \cdot t_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

Observații. 1) Expresia (1) exprimă media aritmetică ponderată a numerelor $c_1, c_2, ..., c_n$ care au ponderile $m_1, m_2, ..., m_n$.

2) Media aritmetică ponderată se obține de fapt ca o medie aritmetică obişnuită ținând seama că fiecare număr intră în această medie cu o anumită pondere.

3) Media aritmetică a unor numere este o medie aritmetică ponderată în care fiecare pondere este egală cu 1.

Probleme de amestec şi aliaj de categoria a II-a

În aceste probleme se cunosc:

a) calitățile produselor care se amestecă

b) calitatea amestecului

c) cantitatea totală a amestecului.

Se cer: d) cantitățile care se amestecă.

Teorema 4.5.2. Dacă amestecăm două produse de calități c_1, respectiv c_2, în cantitățile m_1, respectiv m_2 şi obținem un amestec de calitate *c*, atunci are loc relația:

$$\frac{c - c_2}{c_1 - c} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (2)$$

Demonstrație. Din teorema (1) obținem $c=\dfrac{m_1c_1+m_2c_2}{m_1+m_2}$, care prin înlocuire în relația (2) conduce la o propoziție adevărată:

$$\frac{c-c_2}{c_1-c}=\frac{\dfrac{m_1c_1+m_2c_2}{m_1+m_2}-c_2}{c_1-\dfrac{m_1c_1+m_2c_2}{m_1+m_2}}=\frac{m_1c_1+m_2c_2-m_1c_2-m_2c_2}{m_1c_1+m_2c_1-m_1c_1-m_2c_2}=\frac{m_1(c_1-c_2)}{m_2(c_1-c_2)}=\frac{m_1}{m_2}$$

Probleme rezolvate

R4.5.1. Se amestecă 5kg de bomboane cu prețul 54000lei/kg cu 2kg de bomboane cu prețul de 48000lei/kg și cu 3kg de bomboane cu prețul de 66000lei/kg. Cât este prețul unui kilogram de bomboane ce rezultă în urma amestecului celor trei calități de bomboane?

Soluție. Folosim relația (1) și obținem prețul unui kilogram de amestec: $\dfrac{5\cdot 54000+2\cdot 48000+3\cdot 66000}{5+2+3}=56400$ lei.

R4.5.2. Un aliaj de fier și nichel are titlul de 0,600, iar un alt aliaj din aceleași metale are titlul 0,250. Se topesc aceste aliaje împreună și rezultă un alt aliaj cu masa de 14kg. Cât este masa fiecărui aliaj, dacă titlul noului aliaj este 0,300?

Soluție. Vom folosi formula (2), unde $c=0{,}300$, $c_1=0{,}600$, $c_2=0{,}250$, m_1 este masa primului aliaj, m_2 este masa celui de al doilea aliaj. Deci: $\dfrac{0{,}300-0{,}250}{0{,}600-0{,}300}=\dfrac{m_1}{m_2}$. Obținem $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{1}{6}$. Știind că $m_1+m_2=14$ și $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{1}{6}$, obținem $m_1=2$ kg și $m_2=12$ kg.

Remarcă. Problema se poate rezolva și cu ajutorul formulei (1). Fie m_1,m_2 masele celor două aliaje folosite. Vom avea $\dfrac{m_1\cdot 0{,}600+m_2\cdot 0{,}250}{m_1+m_2}=0{,}300$ și $m_1+m_2=14$. Dacă $m_2=14-m_1$, avem $m_1\cdot 0{,}6+(14-m_1)\cdot 0{,}25=0{,}3\cdot 14$, de unde $m_1\cdot 0{,}6-m_1\cdot 0{,}25=0{,}7$, deci rezultă $m_1=2$ și $m_2=12$.

R4.5.3. Se topesc împreună două aliaje formate din aceleași metale, care au masele de 3kg și respectiv 2kg. Titlul primului aliaj este 0,150, iar titlul noului aliaj este 0,400. Aflați titlul celui de al doilea aliaj.

Soluție. Aplicăm formula (1), unde $m_1=3$ kg, $t_1=0{,}150$, $m_2=2$ kg și $T=0{,}400$. Avem: $T=\dfrac{m_1t_1+m_2t_2}{m_1+m_2}$, iar prin înlocuire se obține:

$\frac{3 \cdot 0{,}150 + 2 \cdot t_2}{3+2} = 0{,}400$. Efectuând calculele $2t_2 + 0{,}45 = 2$, de unde rezultă că $t_2 = 0{,}775$. Titlul celui de al doilea aliaj este 0,775.

R4.5.4. O soluție de apă cu alcool cântărește 600g și are concentrația de 0,250. Cât alcool trebuie să adăugăm pentru a se obține o soluție cu concentrația de 0,400?

Soluție. Se calculează cantitatea de alcool existentă în 600g soluție, ținând cont de definiția concentrației (raport dintre masa alcoolului și masa soluției). Avem: $0{,}250 = \frac{a}{600}$, de unde $a = 150$ g alcool. Notăm cu x cantitatea de alcool care se adaugă pentru a obține o soluție de concentrație 0,400 și avem: $0{,}400 = \frac{150 + x}{600 + x}$, de unde $150 + x = 0{,}4x + 240$, deci $0{,}6x = 90$, iar $x = 150$. Trebuie să adăugăm 150g de alcool pentru a obține o soluție de concentrație 0,400.

R4.5.5. Un inel din aur de 14 carate are 6g. Printr-o nouă prelucrare inelul are 18 carate. Să se afle masa inelului după prelucrare.

Soluție. Facem precizarea că în tehnică, atunci când metalul prețios dintr-un aliaj este aurul, titlul se exprimă în carate (k). Aurul pur are titlul 24k, deci dacă un aliaj are titlul 18k, înseamnă că din întreaga masă a aliajului 18 părți sunt aur, iar 6 părți sunt din metal neprețios; titlul este $\frac{18}{24} = 0{,}750$ sau 18k.

În cazul acestei probleme se pot ivi două situații:

a) Printr-un procedeu oarecare se separă metalul neprețios din conținutul inelului și se îndepărtează din acesta o cantitate, astfel încât aliajul respectiv să aibă 18k.

Fie x cantitatea de metal neprețios care se îndepărtează pentru ca inelul să aibă titlul de 18k. Inelul conține: $\frac{14}{24} \cdot 6\text{g} = 3{,}5$ g aur. Deci, $(6 - x) \cdot \frac{18}{24} = 3{,}5$, de unde se obține $x = 1\frac{1}{3}$ g. Inelul va cântări $6 - 1\frac{1}{3} = 4\frac{2}{3}$ g.

b) Se adaugă aur pur astfel încât aliajul obținut să aibă titlul de 18k. Fie y cantitatea de aur pur ce trebuie adăugată. Deci, $(6 + y) \cdot \frac{18}{24} = 3{,}5 + y$. Rezolvând această ecuație se obține $y = 4$. Inelul va avea în final masa 6+4=10g.

4.6. Proporții

Definiție. Egalitatea a două rapoarte se numește proporție.
Termenii celor două rapoarte se numesc termenii proporției.
Orice proporție are patru termeni.

Forma generală a unei proporții este: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $a,b,c,d\in\mathbf{Q}$, $b\neq 0$, $d\neq 0$.

Termenii *a* şi *d* se numesc extremii proporției.

Termenii *b* şi *c* se numesc mezii proporției.

Proprietatea fundamentală a proporțiilor: în orice proporție produsul extremilor este egal cu produsul mezilor.

Aflarea unui termen necunoscut al unei proporții: fiind dată proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, conform proprietății fundamentale a proporțiilor $a\cdot d=b\cdot c$, de unde rezultă că $a=\frac{bc}{d}$, $d=\frac{bc}{a}$, $b=\frac{ad}{c}$ şi $c=\frac{ad}{b}$.

Deci: $\text{un extrem}=\frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celalalt extrem}}$

$$\text{un mez}=\frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celalalt mez}}$$

Definiție. Unul dintre extremii sau mezii, egali între ei, ai unei proporții se numeşte media proporțională (geometrică) a celorlalți doi termeni.

Proporții derivate cu aceeaşi termeni

Regulă. Dacă într-o proporție se schimbă extremii între ei lăsând mezii neschimbați, se obține tot o proporție, numită proporție derivată cu aceiaşi termeni ca proporția inițială.

Din proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, aplicând regula de mai sus obținem proporția $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ cu aceiaşi termeni ca proporția inițială.

Regulă. Dacă într-o proporție se schimbă mezii între ei lăsând extremii neschimbați, se obține tot o proporție, numită proporție derivată cu aceiaşi termeni ca proporția inițială.

Din proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, aplicând regula de mai sus obținem proporția $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ cu aceiaşi termeni ca proporția inițială.

Regulă. Dacă într-o proporție se schimbă extremii între ei şi mezii între ei, se obține tot o proporție, numită proporție derivată cu aceiaşi termeni ca proporția inițială.

Din proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, aplicând regula de mai sus obținem proporția $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$ cu aceiaşi termeni ca proporția inițială.

Remarcă. Ultima regulă de obținere a proporțiilor derivate cu aceiaşi termeni se mai poate enunța şi astfel: dacă într-o proporție se inversează rapoartele se obține tot o proporție numită proporție derivată cu aceiaşi termeni ca proporția inițială.

Observație. În general, fiind date patru numere distincte a,b,c,d, care formează proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, cu aceste numere se mai pot forma proporțiile:

1) $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$ şi

2) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$, $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$, $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$.

Ultimele proporții sunt identice cu cele de la 1), datorită simetriei relației de egalitate.

Model. Scrieți toate proporțiile cu termenii: 3, 6, 7, 14.

Soluție. Se constată că 3·14=6·7. Dacă 3 şi 14 sunt extremi, iar 6 şi 7 sunt mezi, avem $\frac{3}{6}=\frac{7}{14}$. Obținem:

$\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$ (prin schimbarea extremilor între ei)

$\frac{3}{7}=\frac{6}{14}$ (prin schimbarea mezilor între ei)

$\frac{14}{7}=\frac{6}{3}$ (prin inversarea rapoartelor)

Dacă 3 şi 14 sunt mezi, iar 6 şi 7 sunt extremi, avem $\frac{6}{3}=\frac{14}{7}$. Obținem:

$\frac{7}{3}=\frac{14}{6}$ (prin schimbarea extremilor între ei)

$\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$ (prin schimbarea mezilor între ei)

$\frac{7}{14}=\frac{3}{6}$ (prin inversarea rapoartelor).

Proporții derivate cu alți termeni

Fie proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Conform proprietății fundamentale a proporțiilor, avem $a\cdot d=b\cdot c$.

Regula 1. Dacă amplificăm unul din rapoartele unei proporții cu un număr, diferit de zero, obținem o proporție cu alți termeni.

Avem $a \cdot d = b \cdot c$. Înmulțind ambii membri ai egalității cu numărul *n*, obținem $adn = bcn$, de unde rezultă $\frac{a}{b} = \frac{cn}{dn}$ sau $\frac{an}{bn} = \frac{c}{d}$.

Prin procedeul indicat de regula 1 se poate obține o infinitate de proporții cu alți termeni decât cei ai proporției inițiale.

Exemplu. Fie proporția $\frac{5}{20} = \frac{3}{12}$. Prin amplificarea primului raport cu 2, obținem $\frac{10}{40} = \frac{3}{12}$, o proporție cu alți termeni. Prin amplificarea celui de al doilea raport cu 10, obținem $\frac{5}{20} = \frac{30}{120}$, o proporție cu alți termeni.

Regula 2. Dacă simplificăm unul din rapoartele unei proporții cu un număr, diferit de zero, obținem o proporție cu alți termeni.

Fie proporția $\frac{a}{b} = \frac{d}{d}$, avem $a \cdot d = b \cdot c$. Înmulțim ambii membri ai egalității cu $\frac{1}{n}$ $(n \neq 0)$, obținem $\frac{a \cdot d}{n} = \frac{b \cdot c}{n}$, ceea ce se poate scrie $\frac{a}{n} \cdot d = \frac{b}{n} \cdot c$ sau $\frac{a:n}{b:n} = \frac{c}{d}$. Asemănător, $\frac{a}{b} = \frac{c:n}{d:n}$.

Exemplu. Fie proporția $\frac{9}{15} = \frac{6}{10}$. Prin simplificarea primului raport cu 3, obținem $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, o proporție cu alți termeni. Prin simplificarea celui de al doilea raport cu 2, obținem $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, o proporție cu alți termeni.

Regula 3. Dacă înmulțim ambii numărători (sau ambii numitori) ai unei proporții cu un număr, diferit de zero, obținem tot o proporție, dar cu alți termeni.

Fie proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, avem $a \cdot d = b \cdot c$. Înmulțim ambii membri ai proporției cu *n* şi obținem $adn = bcn$, de unde prin înmulțirea ambilor membri cu $\frac{1}{bd}$ şi realizarea simplificărilor, obținem $\frac{adn}{bd} = \frac{bcn}{bd}$, adică $\frac{an}{b} = \frac{cn}{d}$.

Asemănător din $ad = bc$, prin înmulțirea ambilor membri cu $\frac{1}{bdn}$ şi efectuarea simplificărilor, obținem $\frac{ad}{bdn} = \frac{bc}{bdn}$, adică $\frac{a}{bn} = \frac{c}{dn}$.

Exemplu. Fie proporția $\frac{2}{5}=\frac{10}{25}$.

Prin înmulțirea numărătorilor cu 3, obținem $\frac{6}{5}=\frac{30}{25}$, iar prin înmulțirea numitorilor cu 4, obținem $\frac{2}{20}=\frac{10}{100}$, proporții derivate cu alți termeni.

Regula 4. Dacă împărțim ambii numărători (sau ambii numitori) ai unei proporții cu un număr, diferit de zero, obținem tot o proporție, dar cu alți termeni.

Fie proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, avem $a\cdot d=b\cdot c$. Înmulțind ambii membri cu $\frac{1}{n}$ $(n\neq 0)$, obținem $\frac{ad}{n}=\frac{bc}{n}$, ceea ce se poate scrie $\frac{a}{n}\cdot d=b\cdot\frac{c}{n}$. După înmulțirea ambilor membri cu $\frac{1}{bd}$ şi realizarea simplificărilor, obținem $\frac{\frac{a}{n}\cdot d}{bd}=\frac{b\cdot\frac{c}{n}}{bd}$, adică $\frac{a:n}{b}=\frac{c:n}{d}$.

Asemănător din $ad=bc$, înmulțind ambii membri cu $\frac{1}{n}$, $(n\neq 0)$, obținem $a\cdot\frac{d}{n}=\frac{b}{n}\cdot c$. După înmulțirea ambilor membri cu $\frac{1}{\frac{b}{n}\cdot\frac{d}{n}}$ şi efectuarea simplificărilor obținem: $\frac{a\cdot\frac{d}{n}}{\frac{b}{n}\cdot\frac{d}{n}}=\frac{\frac{b}{n}\cdot c}{\frac{b}{n}\cdot\frac{d}{n}}$, adică $\frac{a}{b:n}=\frac{c}{d:n}$.

Exemplu. Fie proporția $\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$.

Prin împărțirea numărătorilor cu 4, obținem $\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$, iar prin împărțirea numitorilor cu 3, obținem $\frac{4}{2}=\frac{8}{4}$, proporții derivate cu alți termeni.

Observații. Cu ajutorul celor patru reguli se pot obține o infinitate de proporții derivate cu alți termeni decât ai proporției inițiale.

Fie proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Conform celor patru reguli se pot obține următoarele proporții derivate cu alți termeni:

$\frac{a}{b}=\frac{cn}{dn}$; $\frac{an}{bn}=\frac{c}{d}$; $\frac{a:n}{b:n}=\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}=\frac{c:n}{d:n}$, $\frac{an}{b}=\frac{cn}{d}$; $\frac{a}{bn}=\frac{c}{dn}$; $\frac{a:n}{b}=\frac{c:n}{d}$; $\frac{a}{b:n}=\frac{c}{d:n}$ $(n\neq 0)$.

Proprietate. Fiind dată proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, din ea se pot deduce următoarele proporții derivate cu alți termeni:

P.1. $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$

Fie proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, avem $a\cdot d=b\cdot c$, conform proprietății fundamentale a proporțiilor. Adunând la ambii membri produsul *ac*, rezultă $ad+ac=bc+ac$, de unde scoțând factor comun, $a(d+c)=c(b+a)$. Împărțind ambii membri cu $(b+a)(d+c)$ avem $\frac{a(d+c)}{(b+a)(d+c)}=\frac{c(b+a)}{(b+a)(d+c)}$, adică $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$.

P.2. $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. Se demonstrează asemănător, adunând produsul *bd* în ambii membri ai egalității $ad=bc$. Avem $ad+bd=bc+bd$, scoatem factor comun $d(a+b)=b(c+d)$, iar după înmulțirea ambilor membri cu $\frac{1}{bd}$, obținem $\frac{d(a+b)}{bd}=\frac{b(c+d)}{bd}$, adică $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

P.3. $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$ ($a-b\neq 0,\quad c-d\neq 0$). Se demonstrează asemănător celorlalte. Se scad din *ac* ambii membri ai egalității $ad=bc$, rezultă $ac-ad=ac-bc$, scoțând factor comun obținem $a(c-d)=c(a-b)$. Împărțind ambii membri cu $(c-d)(a-b)$, avem $\frac{a(c-d)}{(c-d)(a-b)}=\frac{c(a-b)}{(c-d)(a-b)}$, adică $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$.

P.4. $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$. Se demonstrează scăzând produsul *bd* din ambii membri ai egalității $ad=bc$, rezultă $ad-bd=bc-bd$, scoțând factor comun avem $d(a-b)=b(c-d)$, iar după împărțirea ambilor membri cu *bd*, avem $\frac{d(a-b)}{bd}=\frac{b(c-d)}{bd}$, adică $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

P.5. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ ($a-b\neq 0$, $c-d\neq 0$). Se demonstrează împărțind membru cu membru egalitățile de la P.2 şi P.4, adică: $\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}}=\frac{\frac{c+d}{d}}{\frac{c-d}{d}}$, care se poate scrie $\frac{a+b}{b}\cdot\frac{b}{a-b}=\frac{c+d}{d}\cdot\frac{d}{c-d}$, adică $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

P.6. $\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$ ($a+b\neq 0$, $c+d\neq 0$). Se demonstrează inversând rapoartele în proporția de la P.5.

P.7. $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$ ($c+d\neq 0$, $c-d\neq 0$). Se demonstrează schimbând mezii între ei în proporția de la P.5.

Model. Fie proporția $\frac{12}{8}=\frac{6}{4}$. Să se obțină proporții derivate cu alți termeni.

Soluție.

Aplicând R.1 (*n*=3), avem $\frac{12}{8}=\frac{3\cdot 6}{3\cdot 4}$ şi obținem $\frac{12}{8}=\frac{18}{12}$.

Aplicând R.2 (*n*=4), avem $\frac{12:4}{8:4}=\frac{6}{4}$ şi obținem $\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$.

Aplicând R3. (*n*=5), avem $\frac{12\cdot 5}{8}=\frac{6\cdot 5}{4}$ şi obținem $\frac{60}{8}=\frac{30}{4}$.

Aplicând R.4 (*n*=2), avem $\frac{12}{8:2}=\frac{6}{4:2}$ şi obținem $\frac{12}{4}=\frac{6}{2}$.

Aplicând P.1, avem $\frac{12}{8+12}=\frac{6}{4+6}$ şi obținem $\frac{12}{20}=\frac{6}{10}$.

Aplicând P2., avem $\frac{12+8}{8}=\frac{6+4}{4}$ şi obținem $\frac{20}{8}=\frac{10}{4}$.

Aplicând P.3, avem $\frac{12}{12-8}=\frac{6}{6-4}$ şi obținem $\frac{12}{4}=\frac{6}{2}$.

Aplicând P.4 avem $\frac{12-8}{8}=\frac{6-4}{4}$ şi obținem $\frac{4}{8}=\frac{2}{4}$.

Aplicând P.5 avem $\frac{12+8}{12-8}=\frac{6+4}{6-4}$ şi obținem $\frac{20}{4}=\frac{10}{2}$.

Aplicând P.6, avem $\frac{12-8}{12+8}=\frac{6-4}{6+4}$ şi obținem $\frac{4}{20}=\frac{2}{10}$.

Aplicând P.7, avem $\frac{12+8}{6+4}=\frac{12-8}{6-4}$ şi obţinem $\frac{20}{10}=\frac{4}{2}$.

Probleme rezolvate

R4.6.1. Se dă $\frac{a}{b}=0{,}6$. Să se afle $\frac{2a+3b}{3b}$.

Soluţia 1. Din $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$, prin înmulţirea numărătorilor cu 2, vom avea $\frac{2a}{b}=\frac{6}{5}$, iar prin înmulţirea numitorilor cu 3, obţinem $\frac{2a}{3b}=\frac{6}{15}$ sau $\frac{2a}{3b}=\frac{2}{5}$. Adunăm numitorii la numărător şi obţinem $\frac{2a+3b}{3b}=\frac{2+5}{5}$, de unde $\frac{2a+3b}{3b}=\frac{7}{5}$.

Soluţia 2. Din $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$, schimbând mezii între ei obţinem $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=k$ (s-a notat prin *k* valoarea rapoartelor $\frac{a}{3}$ şi $\frac{b}{5}$). Din $\frac{a}{3}=k$ rezultă $a=3k$, iar din $\frac{b}{5}=k$ rezultă $b=5k$. Atunci: $\frac{2a+3b}{3b}=\frac{2\cdot 3k+3\cdot 5k}{3\cdot 5k}=\frac{21k}{15k}=\frac{7}{5}$.

Soluţia 3. Din $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$ rezultă $a=\frac{3b}{5}$ şi atunci:

$$\frac{2a+3b}{3b}=\frac{2\cdot\frac{3b}{5}+3b}{3b}=\frac{b\left(\frac{6}{5}+3\right)}{3b}=\frac{21}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{5}.$$

R4.6.2. Să se afle numerele naturale *x* şi *y*, diferite de 0, astfel ca $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ şi $\frac{4x+y+5(x+y)}{24}=3$.

Soluţia 1. Din $\frac{4x+y+5(x+y)}{24}=3$, obţinem prin efectuarea calculelor de la numărător $\frac{9x+6y}{24}=3$ sau $\frac{3(3x+2y)}{24}=3$, adică $\frac{3x+2y}{8}=3$, de unde rezultă că $3x+2y=24$. Dar $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ şi conform proprietăţii fundamentale a proporţiilor

$3x = 2y$, care se înlocuieşte în relaţia precedentă obţinându-se $2y + 2y = 24$ sau $y = 6$. Dar $x = \frac{2y}{3}$, deci $x = 4$.

Soluţia 2. Notăm $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = k$ deci obţinem $x = 2k$ şi $y = 3k$. Atunci $\frac{4x + y + 5(x + y)}{24} = 3$ devine $\frac{4 \cdot 2k + 3k + 5(2k + 3k)}{24} = 3$, iar după efectuarea calculelor obţinem $\frac{36k}{24} = 3$, de unde $k = 2$. Din $x = 2k$ şi $y = 3k$ vom obţine $x = 4$, $y = 6$.

R4.6.3. Să se afle trei numere, ştiind că raportul dintre primul şi al doilea este 0,(6), raportul dintre al doilea şi al treilea este 0,8(3), iar produsul dintre primul şi al treilea număr este 9331,2.

Soluţie. Notăm în ordine cele trei numere cu *x, y, z*. Din datele problemei, obţinem $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, $\frac{y}{z} = \frac{5}{6}$ şi $xz = 9331{,}2$. Din $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ şi $\frac{z}{y} = \frac{6}{5}$, prin înmulţire membru cu membru se obţine $\frac{xz}{y^2} = \frac{4}{5}$, de unde rezultă $\frac{9331{,}2}{y^2} = \frac{4}{5}$, deci $y^2 = 11664$, sau $y^2 = (2^2 \cdot 3^3)^2$. Obţinem $y = 108$ sau $y = -108$. Din $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, rezultă $x = \frac{2y}{3}$, deci $x = 72$ sau $x = -72$. Din $\frac{y}{z} = \frac{5}{6}$, rezultă $z = \frac{6y}{5}$, deci $z = 129{,}6$ sau $z = -129{,}6$.

R4.6.4. Ştiind că $\frac{20a + 9b}{3b - 2a} = 5$, să se arate că *a* este 20% din *b*.

Soluţie. Din relaţia dată rezultă că $20a + 9b = 5(3b - 2a)$, iar după efectuarea calculelor $20a + 9b = 15b - 10a$, de unde $30a = 6b$ sau $\frac{a}{b} = \frac{6}{30}$, deci $\frac{a}{b} = \frac{1}{5}$. Se schimbă mezii între ei şi se obţine $\frac{a}{1} = \frac{b}{5} = k$, de unde $a = k$ şi $b = 5k$. Vom avea: $\frac{x}{100} \cdot b = a$, adică $\frac{x}{100} \cdot 5k = k$, de unde $x = 20$, deci 20% din *a* reprezintă *b*.

R4.6.5. Să se afle ariile a două dreptunghiuri, ştiind că raportul lungimilor lor este $\frac{4}{3}$, raportul lăţimilor lor este $\frac{7}{9}$, iar diferenţa ariilor este 4.

Soluție. Notăm L şi L' lungimile celor două dreptunghiuri şi l, l' lățimile celor două dreptunghiuri. Avem raportul lungimilor $\frac{L}{L'}=\frac{4}{3}$ şi raportul lățimilor $\frac{l}{l'}=\frac{7}{9}$. Diferența ariilor celor două dreptunghiuri este $Ll-L'l'=4$. Din $\frac{L}{L'}=\frac{4}{3}$ şi $\frac{l}{l'}=\frac{7}{9}$, prin înmulțirea membru cu membru, obținem $\frac{Ll}{L'l'}=\frac{28}{27}$, apoi facem proporții derivate $\frac{Ll-L'l'}{L'l'}=\frac{28-27}{27}$, adică $\frac{4}{L'l'}=\frac{1}{27}$, deci $L'l'=108$. Din $Ll-108=4$, rezultă $Ll=112$. Deci ariile celor două dreptunghiuri sunt 112 şi 108.

R4.6.6. Suma a două fracții cu acelaşi numărător este $1\frac{1}{15}$. Raportul numitorilor este $\frac{1}{3}$. Să se afle cele două fracții.

Soluție. Fie $\frac{a}{b}$ şi $\frac{a}{c}$ cele două fracții $(b,c\neq 0)$. Avem $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{16}{15}$, de unde rezultă că $\frac{a(b+c)}{bc}=\frac{16}{15}$. Raportul numitorilor este $\frac{b}{c}=\frac{1}{3}$, de unde proporția $\frac{b+c}{c}=\frac{4}{3}$. Prin înlocuire în relația dinainte, avem $\frac{a}{b}\cdot\frac{4}{3}=\frac{16}{15}$, de unde $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$. Suma celor două fracții este $\frac{16}{15}$, deci $\frac{a}{c}=\frac{16}{15}-\frac{4}{5}$, $\frac{a}{c}=\frac{4}{15}$. Fracțiile sunt $\frac{4}{5}$ şi $\frac{4}{15}$.

4.7. Şir de rapoarte egale

Definiție. Un şir de rapoarte cu aceeaşi valoare, scrise sub forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots$, se numeşte şir de rapoarte egale.

Observații. 1) Orice pereche de rapoarte din şir formează o proporție.

2) Amplificând succesiv un raport cu mai multe numere diferite de zero, se obține un şir de rapoarte egale:

$$\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}=\frac{ak}{bk}=\ldots$$

Fie şirul de rapoarte egale $\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}=\frac{ak}{bk}$. Să considerăm raportul dintre suma numărătorilor şi suma numitorilor $\frac{a+an+ak}{b+bn+bk}$. Scoatem factorul comun a la numărător şi b la numitor şi obținem $\frac{a(1+n+k)}{b(1+n+k)}$, care se simplifică şi rezultă $\frac{a}{b}$.

Deci, $\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}=\frac{ak}{bk}=\frac{a+an+ak}{b+bn+bk}$.

Proprietatea şirului de rapoarte egale. Într-un şir de rapoarte egale, raportul dintre suma numărătorilor şi suma numitorilor este egal cu fiecare din celelalte rapoarte.

În general, dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, atunci $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$.

Model. Ştiind că $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{3}{4}$, să se calculeze:

a) $\frac{a+c+e}{b+d+f}$; b) $\frac{3a+4c+5e}{3b+4d+5f}$; c) $\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}$.

Soluție. a) Dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, atunci $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$, dar $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$, deci $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{3}{4}$.

b) Dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, atunci prin amplificarea primului raport cu 3, al celui de al doilea cu 4 şi al celui de al treilea cu 5, se obține $\frac{3a}{3b}=\frac{4c}{4d}=\frac{5e}{5f}$, de unde rezultă că $\frac{3a}{3b}=\frac{4c}{4d}=\frac{5e}{5f}=\frac{3a+4c+5e}{3b+4d+5f}$, dar $\frac{3a}{3b}=\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$, deci $\frac{3a+4c+5e}{3b+4d+5f}=\frac{3}{4}$.

c) Dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{3}{4}$, rezultă că $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{e^2}{f^2}=\frac{9}{16}$, prin ridicarea la pătrat a fiecărui raport. Rezultă, aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale că $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{e^2}{f^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+d^2+f^2}$, dar $\frac{a^2}{b^2}=\frac{9}{16}$, deci $\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+d^2+f^2}=\frac{9}{16}$.

Remarcă. Dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$, atunci $\frac{ma}{mb}=\frac{nc}{nd}=\frac{pe}{pf}=k$, de unde $\frac{ma+nc+pe}{mb+nd+pf}=k$, $m,n,p\neq 0$.

Probleme rezolvate

R4.7.1. Ştiind că $\frac{2a}{3}=\frac{3b}{5}=\frac{5c}{4}$ şi că $a+b+c=119$, să se afle *a, b, c.*

Soluția 1. Dacă $\frac{2a}{3}=\frac{3b}{5}=\frac{5c}{4}$, atunci $\frac{a}{\frac{3}{2}}=\frac{b}{\frac{5}{3}}=\frac{c}{\frac{4}{5}}$, de unde rezultă aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale

$$\frac{a}{\frac{3}{2}}=\frac{b}{\frac{5}{3}}=\frac{c}{\frac{4}{5}}=\frac{a+b+c}{\frac{3}{2}+\frac{5}{3}+\frac{4}{5}}=\frac{119}{\frac{119}{30}}=119\cdot\frac{30}{119}=30.$$

Din $\frac{a}{\frac{3}{2}}=30$, rezultă *a*=45, din $\frac{b}{\frac{5}{3}}=30$, rezultă *b*=50 şi din $\frac{c}{\frac{4}{5}}=30$, rezultă *c*=24.

Soluția 2. Notăm valoarea comună a rapoartelor cu *k* şi avem: $\frac{2a}{3}=\frac{3b}{5}=\frac{5c}{4}=k$, de unde $a=\frac{3k}{2}$, $b=\frac{5k}{3}$, $c=\frac{4k}{5}$. Înlocuind în $a+b+c=119$, se obține $\frac{3k}{2}+\frac{5k}{3}+\frac{4k}{5}=119$, de unde se obține după efectuarea calculelor $\frac{111k}{30}=119$, adică *k*=30. Atunci $a=\frac{3\cdot 30}{2}=45$, $b=\frac{5\cdot 30}{3}=50$ şi $c=\frac{4\cdot 30}{5}=24$.

R4.7.2. Să se determine numerele *x, y, z* naturale, ştiind că $\frac{x}{3}=\frac{y}{8}$, $\frac{y}{6}=\frac{z}{2}$ şi a) $x+y+z=123$; b) $5x+y-8z=25$; c) $x^2+y^2+z^2=6489$.

Soluție. Fiind date proporțiile $\frac{x}{3}=\frac{y}{8}$ şi $\frac{y}{6}=\frac{z}{2}$ se poate forma un şir de rapoarte egale astfel: înmulțim numitorii primei proporții cu 3 şi înmulțim numitorii celei de a doua proporții cu 4, vom obține două proporții derivate cu alți termeni şi anume, $\frac{x}{9}=\frac{y}{24}$ şi $\frac{y}{24}=\frac{z}{8}$, de unde rezultă $\frac{x}{9}=\frac{y}{24}=\frac{z}{8}$.

a) Aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale, obținem:
$\frac{x}{9}=\frac{y}{24}=\frac{z}{8}=\frac{x+y+z}{9+24+8}=\frac{123}{41}=3$, de unde *x*=27, *y*=72, *z*=24.

b) Avem $\frac{x}{9}=\frac{y}{24}=\frac{z}{8}=k$, k fiind valoarea comună a fiecărui raport, atunci $x=9k$, $y=24k$, $z=8k$. Prin înlocuire în $5x+y-8z=25$, se obține $45k+24k-64k=25$, adică $5k=25$, de unde k=5. Avem $x=9\cdot 5=45$, $y=24\cdot 5=120$ şi $z=8\cdot 5=40$.

Remarcă. Dacă $\frac{x}{9}=\frac{y}{24}=\frac{z}{8}$, atunci prin amplificarea primului raport cu 5 şi al celui de al treilea lui 8, obținem $\frac{5x}{45}=\frac{y}{24}=\frac{8z}{64}$, de unde aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale se obține

$$\frac{5x}{45}=\frac{y}{24}=\frac{8z}{64}=\frac{5x+y-8z}{45+24-64}=\frac{25}{5}=5.$$

Avem $\frac{x}{9}=5$, deci x=45, $\frac{y}{24}=5$, deci y=120 şi $\frac{z}{8}=5$, deci z=40.

c) Dacă $\frac{x}{9}=\frac{y}{24}=\frac{z}{8}$, atunci $\frac{x^2}{81}=\frac{y^2}{576}=\frac{z^2}{64}$ şi aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale $\frac{x^2}{81}=\frac{y^2}{576}=\frac{z^2}{64}=\frac{x^2+y^2+z^2}{81+576+64}=\frac{6489}{721}=9$. Avem $\frac{x^2}{81}=9$, x natural, deci $\frac{x}{9}=3$, de unde x=27, $\frac{y^2}{576}=9$, y natural, deci $\frac{y}{24}=3$, de unde y=72, $\frac{z^2}{64}=9$, z natural, deci $\frac{z}{8}=3$, de unde z=24.

Remarcă. Dacă $\frac{x}{9}=\frac{y}{24}=\frac{z}{8}=k$, atunci $x=9k$, $y=24k$, $z=8k$. Prin înlocuire în $x^2+y^2+z^2=6489$, vom avea $81k^2+576k^2+64k^2=6489$ adică $721k^2=6489$, de unde k=3. Obținem x=27, y=72, z=24.

R4.7.3. Fie $\frac{x}{0,(1)}=\frac{y}{0,(3)}$ şi $\frac{y}{0,(5)}=\frac{z}{0,(7)}$ cu $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$. Să se afle *x, y, z*, ştiind că $x+y+z=123$.

Soluție. Efectuând transformările, se obține $\frac{x}{\frac{1}{9}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}$ şi $\frac{y}{\frac{5}{9}}=\frac{z}{\frac{7}{9}}$. Înmulțim ambii membri ai celor două egalități cu $\frac{1}{9}$ şi obținem $\frac{1}{9}\cdot\frac{x}{\frac{1}{9}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{9}$, adică $\frac{x}{1}=\frac{y}{3}$ şi

$\frac{1}{9}\cdot\frac{y}{\frac{5}{9}}=\frac{1}{9}\cdot\frac{z}{\frac{7}{9}}$, adică $\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$. În egalitatea $\frac{x}{1}=\frac{y}{3}$ înmulțim fiecare membru cu $\frac{1}{5}$ şi obținem $\frac{1}{5}\cdot\frac{x}{1}=\frac{1}{5}\cdot\frac{y}{3}$, adică $\frac{x}{5}=\frac{y}{15}$ (1).

În egalitatea $\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$, înmulțim fiecare membru cu $\frac{1}{3}$ şi obținem $\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{7}$, adică $\frac{y}{15}=\frac{z}{21}$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă şirul de rapoarte egale $\frac{x}{5}=\frac{y}{15}=\frac{z}{21}$ şi aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale avem

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{15}=\frac{z}{21}=\frac{x+y+z}{5+15+21}=\frac{123}{41}=3.$$

Deci, $\frac{x}{5}=3$, de unde x=15, $\frac{y}{15}=3$, de unde y=45 şi $\frac{z}{21}=3$, de unde z=63.

R4.7.4. Fie *a, b, c* trei numere nenule, astfel încât:

$$2a=5b=9c=x(a+b+c).$$

Să se determine valoarea lui *x*.

Soluție. Relația dată se poate scrie $\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{1}{5}}=\frac{c}{\frac{1}{9}}=\frac{a+b+c}{\frac{1}{x}}$. Aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale: $\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{1}{5}}=\frac{c}{\frac{1}{9}}=\frac{a+b+c}{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}}$, rezultă că $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}$, adică $\frac{1}{x}=\frac{73}{90}$, de unde $x=\frac{90}{73}$.

R4.7.5. Să se afle numere *a, b, c*, ştiind că $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}$ şi $abc=576$.

Soluție. Notăm $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}=k$, de unde $a=3k$, $b=4k$ şi $c=6k$. Înlocuind în $abc=576$, se obține $3k\cdot 4k\cdot 6k=576$, de unde rezultă $k^3=8$, deci k=2. Avem $a=3\cdot 2=6$, $b=4\cdot 2=8$, $c=6\cdot 12=72$.

4.8. Proporționalitate directă. Proporționalitate inversă

Definiție. Între două mulțimi finite de numere există o proporționalitate directă, dacă se poate forma un şir de rapoarte egale, diferite de zero, astfel încât numărătorii rapoartelor să fie elementele unei mulțimi, iar numitorii elementele celeilalte mulțimi.

Exemplu. Între mulțimile {2,6,4} şi {10,30,20} se stabileşte o proporționalitate directă, deoarece $\frac{2}{10}=\frac{6}{30}=\frac{4}{20}$.

Observație. Dacă elementele unei mulțimi *A* finite de numere se pot obține prin înmulțirea elementelor unei mulțimi *B* cu un număr dat *n* ($n\neq 0$), atunci între cele două mulțimi există o proporționalitate directă.

Într-adevăr, fie mulțimea $B=\{a,b,c\}$. Prin înmulțirea elementelor ei cu numărul *n* ($n\neq 0$), obținem mulțimea $A=\{an,bn,cn\}$. Cu elementele celor două mulțimi, *A* şi *B*, se poate forma un şir de rapoarte egale $\frac{a}{an}=\frac{b}{bn}=\frac{c}{cn}$ (valoarea rapoartelor este $\frac{1}{n}$); deci între cele două mulțimi *A* şi *B* am stabilit o proporționalitate directă.

Exemple. 1) Între mulțimea ciocolatelor şi mulțimea costurilor lor se stabileşte o proporționalitate directă.

2) Între viteza de deplasare şi spațiul parcurs de un mobil în mişcare uniformă, se stabileşte o proporționalitate directă.

3) Între spațiul parcurs de un mobil cu viteză constantă şi timpul în care se efectuează deplasarea se stabileşte o proporționalitate directă.

4) Între numărul de robinete cu acelaşi debit şi volumul de lichid acumulat se stabileşte o proporționalitate directă.

Model. Să se determine trei numere direct proporționale cu 3, 9, 12, dacă suma lor este 40.

Soluție. Fie *x, y, z* cele trei numere. Vom avea $\frac{x}{3}=\frac{y}{9}=\frac{z}{12}$ şi $x+y+z=40$. Aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale, avem $\frac{x}{3}=\frac{y}{9}=\frac{z}{12}=\frac{z+y+z}{3+9+12}=\frac{40}{24}=\frac{5}{3}$. Se deduce că $x=\frac{3\cdot 5}{3}=5$, $y=\frac{9\cdot 5}{3}=15$ şi $z=\frac{12\cdot 5}{3}=20$.

Remarcă. Se poate aplica şi metoda: $\frac{x}{3}=\frac{y}{9}=\frac{z}{12}=k$, de unde $x=3k$, $y=9k$, $z=12k$ şi înlocuind în $x+y+z=40$, obținem $24k=40$, deci $k=\frac{5}{3}$. Rezultă $x=5$, $y=15$, $z=20$.

Definiție. Între două mulțimi finite de numere există o proporționalitate inversă, dacă se poate forma un şir de produse egale, diferite de zero, astfel încât mulțimea primilor factori ai produselor să fie una din mulțimi, iar mulțimea celorlalți factori ai produselor să fie cealaltă mulțime.

Exemplu. Între mulțimile {9,12,18} şi {4,3,2} se stabileşte o proporționalitate inversă, deoarece 9·4=12·3=18·2.

Observație. Dacă împărțim un număr dat, diferit de zero, cu elementele unei mulțimi finite de numere nenule, obținem o altă mulțime astfel încât între cele două mulțimi să existe o proporționalitate inversă.

Într-adevăr, numărul *n* împărțit succesiv la elementele mulțimii *A*={*a,b,c*}, se obține mulțimea $B=\left\{\frac{n}{a},\frac{n}{b},\frac{n}{c}\right\}$. Cu elementele acestor două mulțimi putem forma un şir de produse a căror valoare este *n*; deci $a\cdot\frac{n}{a}=b\cdot\frac{n}{b}=c\cdot\frac{n}{c}$ (valoarea produselor este *n*); deci între cele două mulțimi *A* şi *B* s-a stabilit o proporționalitate inversă.

Exemple. 1) Între numărul robinetelor, cu acelaşi debit şi timpul de umplere al unui rezervor se stabileşte o proporționalitate inversă.

2) Între numărul muncitorilor şi timpul de realizare a unei anumite lucrări, se stabileşte o proporționalitate inversă.

3) Între viteza constantă de parcurgere a unei distanțe şi timpul de deplasare, se stabileşte o proporționalitate inversă.

4) Între numărul de bancnote şi valoarea bancnotelor cu care se plăteşte o anumită sumă, se stabileşte o proporționalitate inversă.

Remarcă. Între elementele mulțimilor $A=\{a,b,c\}$ şi $B=\{m,n,p\}$ se stabileşte o proporționalitate inversă, deci $a\cdot m=b\cdot n=c\cdot p$. Această relație este echivalentă cu: $a:\frac{1}{m}=b:\frac{1}{n}=c:\frac{1}{p}$ sau $\frac{a}{\frac{1}{m}}=\frac{b}{\frac{1}{n}}=\frac{c}{\frac{1}{p}}$, de unde rezultă că între elementele mulțimilor {*a,b,c*} şi $\left\{\frac{1}{m},\frac{1}{n},\frac{1}{p}\right\}$ s-a stabilit o proporționalitate directă.

Model. Două numere sunt invers proporționale cu numerele 0,2 şi 0,5. Suma dintre dublul primului număr şi al doilea număr este 24. Să se afle aceste numere.

Soluție. Notând *x* primul număr şi *y* al doilea număr, relațiile dintre acestea, conform problemei sunt: $x\cdot\frac{1}{5}=y\cdot\frac{1}{2}$ şi $2x+y=24$. Avem $\frac{x}{5}=\frac{y}{2}=k$, de unde $x=5k$, $y=2k$ şi prin înlocuire în $2x+y=24$ se obține $10k+2k=24$, deci $k=2$. Numerele sunt $x=10$, $y=4$.

Probleme rezolvate

R4.8.1. Un şir de 5 numere este format astfel încât primele 3 numere sunt direct proporţionale cu 4, 5, 6, iar ultimele 3 numere sunt invers proporţionale cu 4, 5, 6.

a) Să se afle cele mai mici 5 numere naturale care satisfac cerinţele puse.

b) Să se afle cele 5 numere care satisfac condiţiile cerute, dacă suma lor este 476.

Soluţie. a) Fie *a, b, c, d, e* cele 5 numere. Conform enunţului $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}$ şi $\frac{c}{\frac{1}{4}}=\frac{d}{\frac{1}{5}}=\frac{e}{\frac{1}{6}}$. În ultimul şir de rapoarte egale înmulţim toţi numitorii cu 60 şi obţinem $\frac{c}{15}=\frac{d}{12}=\frac{e}{10}$. Pentru a obţine un raport comun aflăm c.m.m.m.c. al numerelor 6 şi 15 (numitorii lui *c*), care este 30. În relaţia $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}$, înmulţim toţi numitorii cu 30:6=5 şi în relaţia $\frac{c}{15}=\frac{d}{12}=\frac{e}{10}$ înmulţim toţi numitorii cu 30:15=2 şi obţinem: $\frac{a}{20}=\frac{b}{25}=\frac{c}{30}$ şi $\frac{c}{30}=\frac{d}{24}=\frac{e}{20}$, de unde rezultă că: $\frac{a}{20}=\frac{b}{25}=\frac{c}{30}=\frac{d}{24}=\frac{e}{20}$.
Cele mai mici numere naturale care satisfac această condiţie, vor fi cele pentru care valoarea comună a rapoartelor este 1; deci numerele căutate sunt 20, 25, 30, 24, 20.

b) Din $\frac{a}{20}=\frac{b}{25}=\frac{c}{30}=\frac{d}{24}=\frac{e}{20}=\frac{a+b+c+d+e}{20+25+30+24+20}=\frac{476}{119}=4$, rezultă *a*=80, *b*=100, *c*=120, *d*=96, *e*=80.

R4.8.2. Să se determine numărul $\overline{abc}$, ştiind că numerele $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ sunt direct proporţionale cu numerele 3, 2, 6, iar suma cifrelor numărului $\overline{abc}$ este divizibilă cu 7.

Soluţie. Scriem că $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ sunt direct proporţionale cu 3, 2, 6 şi apoi aplicăm proprietatea şirului de rapoarte egale:

$$\frac{\overline{ab}}{3}=\frac{\overline{bc}}{2}=\frac{\overline{ca}}{6}=\frac{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}}{3+2+6}=\frac{10a+b+10b+c+10c+a}{11}=$$

$=\frac{11(a+b+c)}{11}=a+b+c$. Dar, suma cifrelor este divizibilă cu 7 şi este un număr mai mic decât 27 (suma maximă este suma cifrelor numărului 999). Această sumă poate fi 7, 14 sau 21.

a) Dacă $a+b+c=7$, atunci $\overline{ab}=21$, $\overline{bc}=14$, $\overline{ca}=42$, adică a=2, b=1, c=4, deci $\overline{abc}=214$.

b) Dacă $a+b+c=14$, atunci $\overline{ab}=42$, $\overline{bc}=28$, $\overline{ca}=84$, adică a=4, b=2, c=8, deci $\overline{abc}=428$.

c) Dacă $a+b+c=21$, atunci $\overline{ab}=63$, $\overline{bc}=42$, $\overline{ca}=126$, imposibil.

VI.R4.8.3. O sumă de bani a fost distribuită la trei persoane direct proporțional cu numerele $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}$. În acest mod o persoană constată că primeşte cu 46200 lei mai mult decât dacă aceeaşi sumă s-ar fi distribuit invers proporțional cu 12, 10, respectiv 15.

a) Care a fost suma de bani?

b) Cât a primit fiecare din cele trei persoane?

Soluție. Notăm cu s suma totală de bani, cu a, b, c sumele ce revin celor trei persoane distribuite direct proporțional cu $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}$ şi cu x, y, z sumele ce revin celor trei persoane dacă ar fi distribuite invers proporțional cu 12, 10, 15. Avem:

$$\frac{a}{\frac{1}{6}}=\frac{b}{\frac{1}{5}}=\frac{c}{\frac{1}{3}}=\frac{a+b+c}{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}}=\frac{s}{\frac{7}{10}} \quad (1) \text{ şi}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{12}}=\frac{y}{\frac{1}{10}}=\frac{z}{\frac{1}{15}}=\frac{x+y+z}{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}=\frac{s}{\frac{1}{4}} \quad (2).$$

Din relația (1) rezultă că $a=\frac{5s}{21}$. $b=\frac{2s}{7}$ şi $c=\frac{10s}{21}$, iar din relația (2) rezultă că $x=\frac{s}{3}$, $y=\frac{2s}{5}$ şi $z=\frac{4s}{15}$. Comparăm sumele obținute de fiecare persoană prin cele două procedee de împărțire: $\frac{5s}{21}<\frac{s}{3}$, $\frac{2s}{7}<\frac{2s}{5}$ şi $\frac{10s}{21}>\frac{4s}{15}$. Doar a treia persoană primeşte mai mult prin împărțirea sumei direct proporțional cu numerele $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}$. Deci, 46200lei reprezintă diferența dintre cele două sume, avem $\frac{10s}{21}-\frac{4s}{15}=46200$. Efectuând calculele obținem $\frac{150s}{21\cdot15}-\frac{84s}{21\cdot15}=46200$, de unde $\frac{66s}{21\cdot15}=46200$; rezultă $s=\frac{46200\cdot21\cdot15}{66}$, deci s=700·21·15, s=220500. Suma inițială a fost de 220500lei.

b) Pentru a calcula ce sumă revine fiecărei persoane, avem $a=\frac{5\cdot 220500}{21}=52500$; $b=\frac{2\cdot 220500}{7}=63000$ şi $c=\frac{10\cdot 220500}{21}=105000$. Cele trei persoane au primit 52500lei, 63000lei şi 105000lei.

R4.8.4. Numerele $x+y, y+z, z+x$ sunt direct proporționale cu numerele 4, 6, 8.

a) Aflați valoarea raportului $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$.

b) Dacă $a,b,c\in\{1,2,...,9\}$, $a\neq b\neq c\neq a$, să se determine valorile maxime şi minime ale raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2}$.

Soluție. a) Avem $\frac{x+y}{4}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{8}=k$, de unde $x+y=4k$, $y+z=6k$ şi $z+x=8k$, iar prin adunare membru cu membru a celor trei egalități obținem $2x+2y+2z=18k$, deci $x+y+z=9k$. Dacă $x+y+z=9k$ şi $x+y=4k$, rezultă că $z=5k$. Dacă $x+y+z=9k$ şi $y+z=6k$, rezultă că $x=3k$. Dacă $x+y+z=9k$ şi $z+x=8k$, rezultă că $y=k$. Se obține $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{3k^2+15k^2+5k^2}{9k^2+k^2+25k^2}=\frac{23}{35}$.

b) Valoarea maximă a raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2}$ se obține când *b*=9, *c*=8 şi *a*=7 (deoarece $xz>yz>xy$) şi este

$$\frac{7\cdot 3k^2+9\cdot 15k^2+8\cdot 5k^2}{35k^2}=\frac{196}{35}=\frac{28}{5}.$$

Valoarea minimă a raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{a^2+b^2+c^2}$ se obține când *b*=1, *c*=2 şi *a*=3 (deoarece $xz>yz>xy$) şi este $\frac{3\cdot 3k^2+1\cdot 15k^2+2\cdot 5k^2}{35k^2}=\frac{34}{35}$.

R4.8.5. Aflați numerele *a, b, c* naturale, ştiind că numerele a^3, b^2, c sunt direct proporționale cu 8, 4, 2 şi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{24}{c}$.

Soluție. Avem $\frac{a^3}{8}=\frac{b^2}{4}=\frac{c}{2}=k^6$, de unde rezultă că $a^3=8k^6$, $b^2=4k^6$ şi $c=2k^6$, deci $a=2k^2$, $b=2k^3$ şi $c=2k^6$. Prin înlocuire în relația $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{24}{c}$, se obține $\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{2k^3}=\frac{24}{2k^6}$. După efectuarea calculelor obținem $\frac{k+1}{2k^3}=\frac{24}{2k^6}$, de unde rezultă că $k^3(k+1)=24$, dar *k* fiind număr natural avem $k^3(k+1)=2^3\cdot 3$, deci *k*=2. Se obține *a*=8, *b*=16, *c*=128.

R4.8.6. Se dau numerele naturale *a, b, c, d* astfel încât $5\cdot a=b\cdot 7$, *c* este 60% din *b*, iar raportul dintre *c* şi *d* este 1,5. Să se arate că *a, b, c, d* sunt invers proporționale cu numerele 0,(142857); 0,2; $\frac{1}{3}$; 0,5.

Soluție. Dacă $5\cdot a=b\cdot 7$, atunci $\frac{a}{7}=\frac{b}{5}$. Se ştie că *c* este 60% din *b*, deci $c=\frac{3}{5}\cdot b$, de unde rezultă că $\frac{b}{5}=\frac{c}{3}$. Avem $\frac{c}{d}=\frac{3}{2}$, de unde $\frac{c}{3}=\frac{d}{2}$. Se poate scrie următorul şir de rapoarte egale: $\frac{a}{7}=\frac{b}{5}=\frac{c}{3}=\frac{d}{2}$. Conform definiției proporționalității directe rezultă că numerele *a, b, c, d* sunt direct proporționale cu 7, 5, 3, 2, de unde rezultă că *a, b, c, d* sunt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{7},\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$. Ținând cont că $\frac{1}{7}=0,(142857)$, $\frac{1}{5}=0,2$ şi $\frac{1}{2}=0,5$, avem *a, b, c, d* sunt invers proporționale cu numerele 0,(142857); 0,2; $\frac{1}{3}$; 0,5.

4.9. Regula de trei simplă. Regula de trei compusă

Regula de trei simplă

Vom considera probleme în care intervin două mulțimi de câte două numere între care există o proporționalitate directă sau o proporționalitate inversă, iar unul din numerele unei mulțimi este necunoscut.

Procedeul care se foloseşte pentru determinarea numărului necunoscut dintr-una din două mulțimi, alcătuite fiecare din câte două elemente, între care există o proporționalitate directă sau inversă, se numeşte regula de trei simplă.

Aplicarea acestui procedeu, numit regula de trei simplă, porneşte de la aşezarea datelor problemei într-o schemă, care conduce la aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporție (în cazul mărimilor direct proporționale) sau la aflarea unui factor necunoscut al unui produs, când cunoaştem produsul şi celălalt factor (în cazul mărimilor invers proporționale). Practic, schema conduce la rezolvarea unei ecuații cu o singură necunoscută.

Model 1. 18kg de mere costă 126000lei. Cât costă 13kg de mere de aceeaşi calitate?

Soluţie. Această problemă poate fi rezolvată prin metoda reducerii la unitate:

1) Aflăm preţul unui kilogram de mere. 126000:18=7000lei.

2) Aflăm preţul a 13kg de mere. 7000·13=91000lei.

Prin regula de trei simplă, datele problemei se aşează astfel:

18kg mere.............................126000lei
13kg mere............................. x

Această schemă se citeşte: "Dacă 18kg de mere costă 126000lei, atunci 13kg de mere vor costa x lei".

Stabilim ce fel de proporţionalitate există între cele două mulţimi: a cantităţilor şi a costurilor. Pentru aceasta considerăm mulţimea cantităţilor $\{18,13\}$ şi mulţimea costurilor $\{126000,x\}$. Între aceste două mulţimi există o proporţionalitate directă, deoarece putem forma un şir de rapoarte egale, $\frac{126000}{18}=\frac{x}{13}$, valoarea lor comună fiind tocmai preţul unui kilogram de mere. Apoi aflăm termenul necunoscut al proporţiei: $x=\frac{126000\cdot 13}{18}$, deci x=91000(lei).

Model 2. 15 muncitori pot termina o lucrare în 20 zile. În câte zile vor termina lucrarea 25 de muncitori?

Soluţie. Această problemă poate fi rezolvată prin metoda reducerii la unitate:

1) Aflăm în câte zile termină lucrarea un muncitor. 15·20=300zile.

2) Aflăm în câte zile termină lucrarea 25 muncitori. 300:25=12zile.

Prin regula de trei simplă datele problemei se aşează astfel:

15 muncitori.............................20 zile
25 muncitori............................. x

Această schemă se citeşte astfel: "Dacă 15 muncitori termină lucrarea în 20 de zile, atunci 25 muncitori o vor termina în x zile".

Stabilim ce fel de proporţionalitate există între cele două mulţimi: a numărului de muncitori şi a numărului de zile în care ei pot termina lucrarea. Pentru aceasta considerăm mulţimile $\{15,25\}$ şi $\{20,x\}$. Între aceste două mulţimi există o proporţionalitate inversă, deoarece putem forma un şir de produse egale $15\cdot 20=25\cdot x$, valoarea lor comună fiind tocmai numărul de zile în care un muncitor poate termina lucrarea. Apoi, aflăm factorul necunoscut: $x=\frac{15\cdot 20}{25}$, deci x=12(zile).

În practică, există obiceiul ca, după determinarea tipului de proporţionalitate, modul de aflare a necunoscutei să fie indicat, direct pe schemă, printr-o săgeată care indică înmulţirea şi scrierea literelor "d.p." (pentru proporţionalitate directă), respectiv "i.p." (pentru proporţionalitate inversă).

Model 1.

d.p.

18kg mere.............................126000lei

13kg mere.............................. x

$$x=\frac{126000\cdot 13}{18}=91000\text{lei}$$

Model 2.

i.p.

15muncitori..............................20zile

25muncitori............................. x

$$x=\frac{20\cdot 15}{25}=12\text{zile}$$

Probleme rezolvate

R4.9.1. Un motociclist mergând cu viteza de 60km/h străbate o distanță în 48minute. Cu ce viteză trebuie să meargă pentru a parcurge aceeaşi distanță în 45minute?

Soluție. Efectuăm transformările:

$$48\min=\frac{48}{60}\text{ h}=\frac{4}{5}\text{ h, } 45\text{min}=\frac{45}{60}\text{ h}=\frac{3}{4}\text{ h.}$$

Prin regula de trei simplă, datele problemei se aşează astfel:

i.p.

$\frac{4}{5}$ h..............................60km/h

$\frac{3}{4}$ h............................. x

$$x=\frac{60\cdot\frac{4}{5}}{\frac{3}{4}}=60\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}=64\text{ (km/h)}$$

R4.9.2. Un muncitor efectuează 130 piese în 4 ore 20 min. Câte piese realizează muncitorul în 8 ore?

Soluție. Efectuăm transformarea: 4 h 20 min= $4\frac{20}{60}\,\text{h} = 4\frac{1}{3}\,\text{h}$.

Prin regula de trei simplă, datele problemei se aşează astfel:

d.p.

$4\frac{1}{3}$ h.............................130piese

8h x

$$x = \frac{130 \cdot 8}{\frac{13}{3}} = 130 \cdot 8 \cdot \frac{3}{13} = 240 \text{ (piese)}$$

Probleme propuse

P4.9.1. Dacă din 80kg făină se produc 180 pâini, ce cantitate de făină este necesară pentru obținerea a 72 de pâini?

P4.9.2. Trei robinete, având acelaşi debit, umplu un rezervor în 6ore. În cât timp vor umple rezervoarele două robinete cu acelaşi debit?

P4.9.3. Un copil a economisit 15 bancnote de câte 10000lei. Câte bancnote de 50000lei primeşte în schimbul lor?

P4.9.4. Un muncitor face în 6 ore, 108 piese. Dacă lucrează în acelaşi ritm câte piese, de acelaşi fel, face în 5 ore?

P4.9.5. La o fermă se planificase o cantitate de furaje pentru 40 vite pe timp de 60 zile. Pentru câte zile va ajunge aceeaşi cantitate de furaje, dacă s-au mai cumpărat 8 vite?

P4.9.6. Pentru transportul lemnelor de la munte la un depozit s-au comandat 40 de vagoane cu o capacitate de 15t fiecare. S-au folosit, însă, vagoane cu o capacitate de 20t. Câte vagoane au fost necesare?

P4.9.7. O brigadă de 24 de muncitori trebuia să sape 120m de şanț. 4 muncitori nu au lucrat. Câți metri de şanț au săpat ceilalți muncitori?

P4.9.8. La un magazin s-a adus 500 sticle de ulei pentru care trebuia să se încaseze 19.000.000lei. După ce s-au vândut 300 sticle, ce sumă urmează să se încaseze?

P4.9.9. La acoperirea unei podele erau necesari 50m linoleum lat de 0,75m. Câți metri linoleum sunt necesari pentru acoperirea aceleiaşi podele, dacă se foloseşte linoleum lat de 1,2m?

P4.9.10. Din 120kg apă de mare se obțin 300g sare. Ce cantitate de apă de mare este necesară pentru a obține 15kg sare?

Răspunsuri

R: P4.9.1. 32kg făină
R: P4.9.2. 9 ore
R: P4.9.3. 3 bancnote
R: P4.9.4. 90 piese
R: P4.9.5. 50 zile
R: P4.9.6. 30 vagoane
R: P4.9.7. 100m
R: P4.9.8. 7.600.000lei
R: P4.9.9. 31,25m
R: P4.9.10. 6000kg

Regula de trei compusă

Vom considera acum probleme în care intervin mai multe mulțimi de câte două numere, între unele din ele existând o proporționalitate directă, iar între altele o proporționalitate inversă.

Regula de trei compusă este un procedeu de aflare a unui număr necunoscut, într-o problemă în care intervin mai multe mărimi, cu câte două valori, între unele existând o proporționalitate directă, iar între altele o proporționalitate inversă.

Aplicarea acestui procedeu, numit regula de trei compusă, porneşte de la aşezarea datelor problemei într-o schemă; apoi, se stabilesc tipurile de proporționalitate ce există între mărimea necunoscută şi fiecare din celelalte mărimi, indicându-se înmulțirea prin săgeți, iar în final se efectuează înmulțirile şi împărțirile ce conduc la aflarea numărului necunoscut. La acest procedeu s-a ajuns datorită modului de rezolvare a acestui tip de probleme cu ajutorul aplicării succesive a regulii de trei simplă.

Model. Cinci muncitori pot termina o lucrare în 15zile, dacă lucrează câte 8ore pe zi. În cât timp vor termina aceeaşi lucrare 10 muncitori, lucrând câte 6ore pe zi?

Soluție. Datele problemei se aşează după următoarea schemă:

5 muncitori.............................8h/zi.............................15zile
10muncitori.............................6h/zi............................. x

Pentru a avea doar două mărimi şi a putea aplica, astfel, regula de trei simplă, considerăm constant numărul muncitorilor şi problema se transformă în:

i.p.
5 muncitori.............................8h/zi.............................15zile

5 muncitori.............................6h/zi............................. y

$$y = \frac{15 \cdot 8}{6} = 20 \text{ (zile)}$$

Deci, 5 muncitori, lucrând câte 6 ore pe zi termină lucrarea în 20 de zile. Acum numărul de 6h/zi, fiind constant, trebuie să aflăm în cât timp vor termina lucrarea cei 10 muncitori:

i.p.

5 muncitori.............................6h/zi.............................20zile

10muncitori.............................6h/zi............................. x

$$x = \frac{20 \cdot 5}{10} = 10 \,(\text{zile})$$

Practic, regula de trei compusă cuprinde următoarele etape:

1) Aşezarea datelor problemei în schemă:

5 muncitori.............................8h/zi.............................15zile
10muncitori.............................6h/zi............................. x

2) Stabilirea tipului de proporționalitate ce există între mulțimea ce conține necunoscuta şi, succesiv, celelalte mulțimi:

- între mulțimea zilelor şi cea a muncitorilor există o proporționalitate inversă
- între mulțimea zilelor şi cea a orelor de lucru zilnic există o proporționalitate inversă.

Precizăm aceste proporționalități prin săgeți, pe schemă:

i.p.

i.p.

5 muncitori.............................8h/zi.............................15zile

10muncitori.............................6h/zi............................. x

$$x = \frac{15 \cdot 5 \cdot 8}{10 \cdot 6} = 10 \,(\text{zile})$$

Remarcă. Aceeaşi problemă se poate rezolva prin metoda reducerii la unitate făcând următorul raționament: dacă 5 muncitori, lucrând câte 8h/zi, termină lucrarea în 15zile, atunci 1muncitor, lucrând câte 8h/zi, termină lucrarea în $5 \cdot 15$zile. Rezultă că 1muncitor, lucrând câte o oră pe zi, termină lucrarea în $5 \cdot 15 \cdot 8$zile. Rezultă, în continuare, că un muncitor, lucrând câte 6h/zi, va termina lucrarea în $\frac{5 \cdot 15 \cdot 8}{6}$ zile.

Deci, 10muncitori, lucrând câte 6h/zi, va termina lucrarea în $\frac{5\cdot 15\cdot 8}{6\cdot 10}$ zile, adică în 10zile. Acest raționament se aşează sub forma următoarei scheme:

5muncitori..........................8h/zi.........................15zile
10muncitori........................6h/zi......................... x

---

1muncitor..........................8h/zi.........................15·5
1muncitor..........................1h/zi.........................15·5·8
1muncitor..........................6h/zi......................... $\frac{15\cdot 5\cdot 8}{6}$
10muncitori........................6h/zi......................... $\frac{15\cdot 5\cdot 8}{6\cdot 10}=10$ zile

Probleme rezolvate

R4.9.3. Într-o tabără, în 12zile, 150 de elevi consumă 900kg pâine. Ce cantitate de pâine este necesară pentru 70 de elevi, pentru 18 zile?

Soluție. 1) Aşezarea datelor problemei în schemă

150elevi.............................12zile.............................900kg
70elevi...............................18zile............................. x

2) Stabilirea tipului de proporționalitate ce există între mulțimea ce conține necunoscuta şi, succesiv, celelalte mulțimi, precizând aceste proporționalități prin săgeți, pe schemă:

150elevi.............................12zile.............................900kg
d.p. d.p.
70elevi...............................18zile............................. x

---

$$x=\frac{900\cdot 70\cdot 18}{150\cdot 12}=630\text{ kg}$$

R4.9.4. 6 muncitori pot termina o lucrare în 12zile. După 4zile de lucru echipei de muncitori i se alătură încă 2 muncitori. În cât timp se va executa toată lucrarea?

Soluție. Dacă echipa poate termina lucrarea în 12zile, atunci după 4zile de lucru echipa a efectuat $\frac{4}{12}$, adică $\frac{1}{3}$ din lucrare. Deci, trebuie să aflăm în câte zile 8 muncitori fac $\frac{2}{3}$ din lucrare.

Aşezăm datele problemei şi stabilim tipul de proporţionalitate ce există între mulţimea ce conţine necunoscuta şi, succesiv, celelalte mulţimi, precizând aceste proporţionalităţi prin săgeţi, pe schemă:

i.p.

6muncitori.............................1lucrare.............................12zile

d.p.

8muncitori............................. $\frac{2}{3}$ lucrare............................. x

$$x = \frac{12 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3}}{8 \cdot 1} = 6\,\text{zile}$$

Lucrarea s-a efectuat în 4zile+6zile, deci în 10zile.

R4.9.5. O echipă de 20 muncitori, lucrând câte 6ore pe zi, pot face 24piese în 10zile. Câte zile sunt necesare pentru ca o altă echipă de 15 muncitori să facă 360piese, lucrând câte 8ore pe zi?

Soluţie. Aşezăm datele problemei în schemă şi stabilim tipul de proporţionalitate ce există între mulţimea ce conţine necunoscuta şi, succesiv, celelalte mulţimi, precizând aceste proporţionalităţi prin săgeţi, pe schemă:

i.p.

i.p.

20muncitori....................6h/zi....................240piese....................10zile

d.p.

15muncitori....................8h/zi....................360piese.................... x

$$x = \frac{10 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 360}{15 \cdot 8 \cdot 240} = 15\,\text{zile}$$

5. Numere întregi

În cadrul temei se vor studia şi aplica noțiunile de număr întreg, opusul unui număr, modulul unui număr întreg, divizibilitatea în mulțimea numerelor întregi, determinarea valorii unei expresii ce depind de un exponent natural, rezolvarea de ecuații şi inecuații.

5.1. Divizibilitatea în $\mathbb{Z}$

Reamintim noțiunile necesare abordării temei.

Mulțimea numerelor întregi se notează cu $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{,\ldots., -3; -2; -1; 0; +1; +2; +3; \ldots.\}$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$

Definiția 5.1.1. Opusul unui număr întreg a este numărul întreg –a cu proprietatea că punctele de pe axă corespunzătoare numerelor a respectiv –a se află la egală distanță față de origine.

Exemplu: opusul numărului 7 este numărul –7

opusul numărului –6 este 6.

Scriem: $-(-2) = 2$.

Definiția 5.1.2. Distanța pe axă între punctul corespunzător numărului întreg a şi origine se numeşte modulul numărului a sau valoarea absolută şi se notează cu $|a|$.

Exemple: $|5| = 5$; $|1| = 1$; $|0| = 0$; $|-3| = 3$; $|-1| = 1$; $|7| = 7$.

Definiția 5.1.3.

$$(\forall)\ a \in \mathbb{Z};\ |a| = \begin{cases} a \text{ dacă } a > 0 \\ 0 \text{ dacă } a = 0 \\ -a \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$$

Proprietăți:

1. Modulul oricărui număr întreg pozitiv este mai mare decât zero.

   $(\forall)\ a \in \mathbb{Z}^*;\ |a| \geq 0$
2. Modulul unui număr întreg este egal cu zero dacă şi numai dacă numărul este egal cu zero.

   $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. Două numere opuse au modulele egale.

   $(\forall)\ a \in \mathbb{Z};\ |a| = |-a|$
4. Dacă o sumă de module este egală cu 0 atunci fiecare modul este egal cu zero.
5. Dacă $|a_1| + |a_2| + \ldots. + |a_n| = 0$ atunci $|a_1| = 0$ şi $|a_2| = 0$ şi … $|a_n| = 0$

Definiția 5.1.4. Numărul întreg a divide numărul întreg b dacă există numărul întreg c astfel încât $b = a\cdot c$.

Notăm: $a|b$ (numărul a divide numărul b).

$b \vdots a$ (numărul b se divide cu numărul a).

Numărul a se numeşte divizorul lui b, iar b este multiplul lui a dar şi a lui c.

Exemplu: $-7|28$ pentru că există numărul $4 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $28 = (-7)\cdot 4$

<u>Proprietăţi ale relaţiei de divizibilitate:</u>

1. $1|a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$;
2. $a|a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$;
3. $a|0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}^*$;
4. Dacă $a|b$ şi $b|c$ atunci $a|c$, $(\forall)$ $a, b \in \mathbb{Z}^*$ şi $c \in \mathbb{Z}$;
5. Dacă $a|b$ şi $b|a$ atunci $a = \pm b$, $(\forall)$ $a, b \in \mathbb{Z}^*$;
6. Dacă $a|b$ sau $a|c$ atunci $a|b\cdot c$, $(\forall)$ $a \in \mathbb{Z}^*$şi $b, c \in \mathbb{Z}$;
7. Dacă $a|b$ şi $a|c$ atunci $a|(b\pm c)$, $(\forall)$ $a \in \mathbb{Z}^*$şi $b, c \in \mathbb{Z}$;
8. Dacă $a|c$ şi $b|c$ şi $(a; b) = 1$ atunci $(a\cdot b)|c$, $(\forall)$ $a, b \in \mathbb{Z}^*$şi $b, c \in \mathbb{Z}$;
9. Dacă $a|1$ sau $a|-1$ atunci $a = \pm 1$.
10. $a|b \Leftrightarrow (-a)|b \Leftrightarrow a|(-b) \Leftrightarrow (-a)|(-b)$.

Definiţia 5.1.5. Un număr întreg d este divizor comun al numerelor a şi b dacă $d|a$ şi $d|b$.

Definiţia 5.1.6. Numărul întreg d este cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b dacă:

1) $d|a$ şi $d|b$;
2) orice divizor d' a lui a şi b, comun, divide pe d.

Definiţia 5.1.7. Două numere întregi nenule a şi b se numesc prime între ele dacă $(a; b) = \pm 1$.

Definiţia 5.1.8. Numărul întreg m este cel mai mic multiplu comun al numărului a şi b dacă:

1) a şi b au multiplu comun pe m;
2) orice alt multiplu comun a lui a şi b este şi multiplul lui m.

Probleme rezolvate

R5.1.1. Determinaţi mulţimea divizorilor numărului:

a) 12; b) –20; c) 7

Soluţie:

$D_{12} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$.

$D_{-20} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 5; \pm 10; \pm 20\}$.

$D_7 = \{\pm 1; \pm 7\}$. Numărul 7 se numeşte prim pentru că are ca divizor numai pe ± 1 şi ± 7.

R5.1.2. Determinaţi $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(2n + 1)|(3n + 4)$.

Soluţie:

$2n + 1|3n + 4$ şi $2n + 1|2n + 1$ atunci

$$\left.\begin{array}{c} 2n + 1|2(3n + 4) \\ \text{şi} \\ 2n + 1|3(2n + 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2n + 1|6n + 8 - (6n + 3)$$

$\Rightarrow 2n + 1|6n + 8 - 6n - 3$

$\Rightarrow 2n + 1|5 \Rightarrow 2n + 1 \in D_5 = \{ \pm 1; \pm 5\}$

$2n + 1 = 1 \mid -1$	$2n + 1 = -1 \mid -1$	$2n + 1 = 5$	$2n + 1 = -5$
$2n = 0 \mid : 2$	$2n = -2 \mid : 2$	$2n = 5 - 1$	$2n = -6 \mid : 2$
$n = 0$	$n = -1$	$n = 4 \mid :2$	$n = -3$
		$n = 2$	

$n \in \{0, -1, 2, -3\}$
Soluția a II-a:
Determinați numerele întregi n pentru care:

$$\frac{3n+4}{2n+1} \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3n+4}{2n+1} \in \mathbb{Z} \text{ dacă } \frac{2(3n+4)}{2n+1} \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{6n+8}{2n+1} = \frac{6n+3+5}{2n+1} = \frac{6n+3}{2n+1} + \frac{5}{2n+1} =$$

$$= 3 + \frac{5}{2n+1} \in \mathbb{Z} \text{ dacă } \frac{5}{2n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$2n + 1 \mid 5 \Rightarrow 2n + 1 \in D_5 = \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow$

$\Rightarrow n \in \{0; -1; 2; -3\}$.

R5.1.3. Determinați numerele întregi x şi y astfel încât: $(x + y)(2y - 1) = 43$
Soluție:
Din $43 = (x + 1)(2y - 1)$ rezultă că
$x + 1 \mid 43$ şi $2y - 1 \mid 43$ şi $x + 1$ şi $2y - 1$ au acelaşi semn, atunci avem:

1) $\begin{cases} x + 1 = 1 \\ 2y - 1 = 43 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 1 = 43 \\ 2y - 1 = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 1 = -1 \\ 2y - 1 = -43 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 1 = -43 \\ 2y - 1 = -1 \end{cases}$

Soluțiile sunt:

1) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 22 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 42 \\ y = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -21 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = -44 \\ y = 0 \end{cases}$

R5.1.4. Determinați $n \in \mathbb{Z}$ pentru care fracția $\frac{2n+5}{n+1}$ este reductibilă.

Soluție:

Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor 2n + 5 şi n + 1 atunci avem:

$d|2n + 5$ şi $d|n + 1 \Rightarrow$

$d|2n + 5$ şi $d|2(n + 1) \Rightarrow$

$d|2n + 5 - 2(n + 1) \Rightarrow$

$d|2n + 5 - 2n - 2 \Rightarrow$

$d|3$, 3 este număr prim, rezultă că $d = 3$.

Atunci $3|2n + 5$ şi $3|n + 1 \Rightarrow$

$3|2n + 5 - (n + 1) \Rightarrow$

$3|2n + 5 - n - 1 \Rightarrow$

$3|n + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow n + 4 = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n = 3k - 4$

5.2. Determinarea valorii unei expresii ce depinde de un exponent natural

Definiția 5.2.1. Dacă a este număr întreg şi n număr natural, $n \geq 2$ atunci puterea n a lui a este: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$

a – se numeşte baza puterii;
n – exponentul puterii.

- Dacă $a > 0$ atunci $a^n > 0$
- Dacă $a < 0$ atunci $\begin{cases} a^n > 0 \text{ dacă } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ a^n < 0 \text{ dacă } n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$
- Oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$ şi $n = 1$ avem $a^1 = a$.
- Oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}^*$ şi $n = 0$ avem $a^0 = 1$.
- 0^0 nu are sens.

Reguli de calcul cu puteri

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $a \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$;
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ şi $n \in \mathbb{N}$;
5. $(a:b)^n = a^n : b^n$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$;

Probleme rezolvate

R5.2.1. Fie $E(n) = (-1)^n \cdot n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze:

$E(1) + E(2) + E(3) + \ldots + E(2003)$

Soluție:

$E(1) = (-1)^1 \cdot 1 = -1$
$E(2) = (-1)^2 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$
$E(3) = (-1)^3 \cdot 3 = -1 \cdot 3 = -3$ +
$E(4) = (-1)^4 \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$
$\vdots$
$E(2003) = (-1)^{2003} \cdot 2003 = -1 \cdot 2003 = -2003.$

$E(1) + E(2) + E(3) + E(4) + \ldots + E(2001) + E(2002) + E(2003) =$
$= (-1 + 2) + (-3 + 4) + \ldots + (-2001 + 2002) - 2003 =$
$= \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{1001 \text{ termeni}} - 2003 =$
$= 1001 - 2003 = -1002$

R5.2.2. Calculați:

$[\,|2^{333} - 3^{222}| + |27^{75} - 81^{15}| + |729^{17} - 512^{37}| - 3^{225} + 9^{30}] : (2 \cdot 3^{222} - 4^{167})$

Soluție:

$\left.\begin{array}{l} 2^{333} = (2^3)^{111} = 8^{111} \\ 3^{222} = (3^2)^{111} = 9^{111} \end{array}\right\} \Rightarrow 8^{111} < 9^{111} \Rightarrow$

$2^{333} < 3^{222} \Rightarrow 2^{333} - 3^{222} < 0 \Rightarrow$
$|2^{333} - 3^{222}| = -2^{333} + 3^{222}$

$\left.\begin{array}{l} 27^{75} = (3^3)^{75} = 3^{225} \\ 81^{15} = (3^4)^{15} = 3^{60} \end{array}\right\} \Rightarrow 3^{225} > 3^{60} \Rightarrow 27^{75} > 81^{15}$

$\Rightarrow 27^{75} - 81^{15} > 0 \Rightarrow |27^{75} - 81^{15}| = 27^{75} - 81^{15}$

$729^{37} = 3^{6 \cdot 37} = 3^{222} > 2^{333} \Rightarrow$
$512^{37} = 2^{9 \cdot 37} = 2^{333}$

$3^{222} - 2^{333} > 0 \Rightarrow |3^{222} - 2^{333}| = 3^{222} - 2^{333}$

Avem:

$(3^{222} - 2^{333} + 3^{225} - 3^{60} + 3^{222} - 2^{333} - 3^{225} + 3^{60}) : (2 \cdot 3^{222} - 4^{167}) =$
$= (2 \cdot 3^{222} - 2 \cdot 2^{333}) : (2 \cdot 3^{222} - 2^{334}) = (2 \cdot 3^{222} - 2^{334}) : (2 \cdot 3^{222} - 2^{334}) = 1$

R5.2.3. Fie numărul:

$A = 243(-1)^n - 342(-1)^{n+1} + 456 \cdot (-1)^{k^2 - k + 1990} - 654 \cdot (-1)^{p^2 + p + 1}$

unde $k, p, n \in \mathbb{N}$. Arătați că $A \,\vdots\, 5$.

Soluție:

$k^2 - k + 1990 = k(k - 1) + 1990$

$\left.\begin{array}{l} k(k-1) \,\vdots\, 2 \text{ (produs de nr.nat.consec.)} \\ 1990 \,\vdots\, 2 \\ \Rightarrow (k^2 - k + 1990) \,\vdots\, 2 \Rightarrow (-1)^{k^2 - k + 1990} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$p^2 + p + 1 = p(p + 1) + 1$

$p(p + 1) \,\vdots\, 2$ (produs de nr.nat.consec.) $\Rightarrow p(p + 1) + 1$ impar $\Rightarrow (-1)^{p^2 + p + 1} = -1$

Atunci: $A = (-1)^n \cdot 243 - 342 \cdot (-1)^{n+1} + 456 + 654 = 243 \cdot (-1)^n - 342 \cdot (-1)^{n+1} + 1110 =$
$= (-1)^n[243 - 342 \cdot (-1)] + 1110 = (-1)^n \cdot 585 + 1110$

1) n nr. pare $\Rightarrow A = 585 + 1110 = 1695$
2) n nr. impare $\Rightarrow A = -585 + 1110 = 525$

5.3. Ecuații în mulțimea numerelor întregi. Inecuații în mulțimea numerelor întregi

În cadrul temei se vor studia ecuații de forma $ax + b = 0$, $x \in \mathbb{Z}$ ($a \in \mathbb{Z}^*$; $b \in \mathbb{Z}$) $ax + b = c$, $x \in \mathbb{Z}$ ($a \in \mathbb{Z}^*$; $b, c \in \mathbb{Z}$), şi ecuații reductibile la acestea, ecuații de forma $ax^2+b = 0$, $x\in \mathbb{Z}$ ($a \in \mathbb{Z}^*$; $b \in \mathbb{Z}$), ecuații cu modul, $(ax + b)(cx + d) = m$, $x \in \mathbb{Z}$($a, c \in \mathbb{Z}^*$; $b,d \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$).

Definiția 5.3.1. O ecuație este o propoziție cu o variabilă scrisă sub forma unei egalități, semnul egal apare o singură dată în scrierea ei.

Exemplu:
1) $3x – 6 = 0$ $\quad x \in \mathbb{Z}$;
2) $2x – 7 = 4$ $\quad x \in \mathbb{Z}$
3) $2(x + 1) = 3x$ $x \in \{1, 2, 3\}$
4) $x^2 – 4 = 0$ $\quad x \in \{–1; –2; 2; 5\}$

Variabila într-o ecuație se numeşte necunoscută.
Există ecuații cu o necunoscută, cu două necunoscute şi aşa mai departe.
Necunoscutele se notează cu: x, y, z …
Mulțimea valorilor necunoscutelor pentru care propoziția este adevărată este mulțimea soluțiilor ecuației.

Exemplu: $2(x + 1) = 3x$
pt. $x = 1$ $\quad 2(1 + 1) = 3\cdot1$, pt $x = 2$ $2(2 + 1) = 3\cdot2$
$2\cdot2 = 3\cdot1$ (F) $\quad 2\cdot3 = 3\cdot2$ (A)
pt. $x = 3$ $\quad 2(3 + 1) = 3\cdot3$;
$2\cdot4 = 3\cdot3$ (F)

Mulțimea soluțiilor este $\{2\}$. Şi se notează $S = \{2\}$.
A rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor.

Definiția 5.3.2. Două ecuații cu o necunoscută sunt echivalente dacă au aceeaşi mulțime de soluții.

O ecuație de forma $ax + b = 0$, $x \in \mathbb{Z}$, unde a şi b sunt numere întregi, iar $a \neq 0$, va fi numită ecuație liniară cu o necunoscută (sau ecuație de gradul I cu o necunoscută).

<u>Proprietăți de echivalență:</u>

1. Dacă adunăm sau scădem acelaşi număr întreg în fiecare membru al unei ecuații, obținem o ecuație, echivalentă cu prima.
2. Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei ecuații cu acelaşi număr întreg, diferit de zero, obținem o ecuație echivalentă cu prima.

Probleme rezolvate

R5.3.1. Rezolvarea ecuației $ax + b = 0$, $x \in \mathbb{Z}$, ($a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}$)

$ax + b = 0 \,|\, –b$
$ax + b – b = –b$
$ax = –b \,|\, :a$
$x = –b : a$

- Dacă $a|b$ atunci $x = –b : a$ este soluția.
- Dacă $a\nmid b$ atunci ecuația nu are soluții în $\mathbb{Z}$.

R5.3.2. Rezolvarea ecuației:

$ax + b = c$, $x \in \mathbb{Z}$ ($a \in \mathbb{Z}^*$, $b,c \in \mathbb{Z}$).
$ax + b = c \,|\, –b$
$ax + b – b = c – b$
$ax = c – b \,|\, :a$

- Dacă $a|(c – b)$ atunci ecuația are soluția: $x = (c – b) : a$
- Dacă $a \nmid (c – b)$ atunci ecuația nu are soluție în $\mathbb{Z}$.

Exemple:

1) $2x - 4 = 0 | +4$
$2x - 4 + 4 = 0 + 4$
$2x = 4 | :2$
$x = 4 : 2$
$x = 2 \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow S = \{2\}$

2) $3x + 7 = 0 | -7$
$3x + 7 - 7 = 0 - 7$
$3x = - 7 | :3$
$x = -7 : 3 \notin \mathbb{Z}$
$\Rightarrow S = \varnothing$

3) $5x + 21 = 6 | -21$
$5x + 21 - 21 = 6 - 21$
$5x = -15 | :5$
$x = -3 \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow S = \{-3\}$

4) $7x + 11 = -4 | -11$
$7x + 11 - 11 = -4 - 11$
$7x = -15 | :7$
$x = -13 : 7 \notin \mathbb{Z}$
$\Rightarrow S = \varnothing$

R5.3.3. Ecuații care se rezolvă prin metode speciale:

1. Dacă x, y $\in \mathbb{Z}$, rezolvați ecuațiile:
   a) $x \cdot y = 5$
   Trebuie să determinăm două numere întregi a căror produs este egal cu 5
   Soluțiile sunt:

1) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$

$S = \{(1; 5); (5; 1); (-1; -5); (-5; -1)\}$

   b) $2xy - 3x = 7$
   Scoatem factor comun şi obținem $x \cdot (2y - 3) = 7$, avem următoarele situații:

1) $\begin{cases} x = 1 \\ 2y - 3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2y = 7 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 7 \\ 2y - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ 2y = 1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = -1 \\ 2y - 3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 2y = -7 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = -7 \\ 2y - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ 2y = -1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 1 \end{cases}$

$S = \{(1; 5); (7; 2); (-1; -2); (-7; 1)\}$

   c) Rezolvați în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuațiile

$2xy - 3x - 4y + 9 = 0$
$2xy - 3x - 4y + 6 + 3 = 0$
$x(2y - 3) - 2(2y - 3) = -3$
$(2y - 3)(x - 2) = -3$
Avem următoarele situații:

1) $\begin{cases} 2y - 3 = -1 \\ x - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -1 + 3 \\ x = 3 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 2 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2y - 3 = 3 \\ x - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3 + 3 \\ x - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 6 \\ x = -1 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2y - 3 = 1 \\ x - 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 + 3 \\ x = -3 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 4 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2y - 3 = -3 \\ x - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -3 + 3 \\ x = 1 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

$S = \{(5; 1); (1; 3); (-1; 2); (3; 0)\}$

2. Ecuații cu modul:

Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $|x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$

Aplicăm proprietatea modulului:

$(\forall)\ x \in \mathbb{Z}$, avem $|x| = |-x|$

b) $|x - 3| = 3 \Leftrightarrow (x - 3) = \pm 3$

1) $x - 3 = 3 \Leftrightarrow x = 3 + 3 \Leftrightarrow x = 6$

2) $x - 3 = -3 \Leftrightarrow x = 3 - 3 \Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0, 6\}$

c) $(\forall)\ x \in \mathbb{Z}$, avem $|x| \geq 0$

Dacă $|x + 5| = -2 \Rightarrow S = \emptyset$ pentru că $|x + 5| \geq 0\ (\forall)\ x \in \mathbb{Z}$

d) $|x - 2| + |y + 1| = 0$

$(\forall)\ a_1, a_2, \ldots, a_n$, dacă $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

Din $|x - 2| + |y + 1| = 0 \Rightarrow$

$|x - 2| = 0 \Rightarrow$

şi

$|y + 1| = 0$

$x - 2 = 0 \Rightarrow$

şi

$y + 1 = 0$

$x = 2$

şi

$y = -1$

$S = \{(2; -1)\}$

e) $|x + 1| + |y - 2| = 2$

Dacă $x, y \in \mathbb{Z}$ şi $|x + 1| + |y - 2| = 2$, atunci avem:

1) $\begin{cases} |x + 1| = 0 \\ |y - 2| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - 2 = \pm 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - 2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} |x + 1| = 2 \\ |y - 2| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = \pm 2 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 1 = -2 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} |x + 1| = 1 \\ |y - 2| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = \pm 1 \\ y - 2 = \pm 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 1 = 1 \\ y - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 1 = 1 \\ y - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 1 = -1 \\ y - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 1 = -1 \\ y - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Probleme propuse

Rezolvați cu $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

P5.3.1. $5(x - 1) = 2x + 7$

P5.3.2. $2(4x + 1) = 2(5x - 7)$

P5.3.3. $2(-x + 5) = -8(3x + 2) + 56$

P5.3.4. $5(x - 2) - 7(x + 3) = 35$

P5.3.5. $3(x + 1) - 1 = x + 6$

P5.3.6. $(x - 1)(x + 2) = 0$

P5.3.7. $(-2x + 8)(3x + 9) = 0$

P5.3.8. $xy - 2x = -7$

P5.3.9. $xy + x - 2y - 4 = 0$

P5.3.10. $xy - x + 3y - 3 = 0$

P5.3.11. $|x - 2| = 3$

P5.3.12. $|3x - 1| = 14$

P5.3.13. $|2x - 6| = -8$

P5.3.14. $2 - 10 + 3|x| = -5$

P5.3.15. $|-x| = 3$

P5.3.16. $10 - |x + 2| = 8$

P5.3.17. $2|x - 1| + 3|1 - x| = 10$

P5.3.18. $3|x - 2| - 2|2 - x| = 11$

P5.3.19. $|x - 3| + |x + 5| = 0$

P.5.3.20. $|x| + |y - 2| = 3$

P5.3.21. $|x - 1| + |y + 3| = 1$

P5.3.22. $||x + 2| - 1| = 3$

P5.3.23. $|x + 5| \cdot |3y - 12| = 0$

P5.3.24. Se dau mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{Z} / 2x - 1 \mid (-8)\}$, $B = \{y \in \mathbb{Z} / -12 \vdots (3y - 1)\}$

a) Determinați elementele celor două mulțimi;

b) Aflați $A \cup B$ şi $A \cap B$.

P5.3.25.

a) $|x - y| + (2x - 6)^2 = 0$

b) $|x - 3| + (2x - y)^2 = 0$

P5.3.26. $3x - 2y = 15$ şi $|x| = 5$

Inecuații în mulțimea numerelor întregi

Definiția 5.3.3. O propoziție cu o variabilă scrisă sub forma unei inegalități se numeşte inecuație.

Exemple: $ax + b > 0$, $ax + b < 0$; $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$ în care $a, b \in \mathbb{Z}$, sunt fixate, $a \neq 0$, iar x este variabila întreagă, x se numeşte necunoscuta inecuației.
Pentru a rezolva o inecuație folosim **proprietățile inegalității numerelor întregi**:

⁕ oricare ar fi a, b, c $\in \mathbb{Z}$ şi a > b atunci a + c > b + c

⁕ oricare ar fi a, b $\in \mathbb{Z}$, c $\in \mathbb{Z}_+^*$, şi a > b, atunci a:c > b:c, dacă c divide pe a şi c divide pe b.

⁕ oricare ar fi a, b $\in \mathbb{Z}$ şi c $\in \mathbb{Z}_-^*$ şi a > b, atunci a:c < b.c, dacă c divide pe a şi c divide pe b.

Probleme rezolvate

R5.3.4. Rezolvați inecuația: $5x + 3 \leq 3x - 5$, $x \in \mathbb{Z}$.
Soluție:

$$5x + 3 \leq 3x - 5 \,|\, -3x$$
$$5x + 3 - 3x \leq 3x - 5 - 3x$$
$$5x - 3x + 3 \leq -5 \,|\, -3$$
$$2x + 3 - 3 \leq -5 - 3$$
$$2x \leq -8 \,|\, :2$$
$$x \leq -4$$

$x \in \{\ldots, -5, -4\} \Rightarrow S = \{\ldots, -5, -4\}$

R5.3.5. Rezolvați inecuația:

$|x - 3| \leq 3$, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

1) $|x - 3| = 3 \Rightarrow x - 3 = \pm 3 \Rightarrow$ a) $x = 6$
b) $x = 0$

2) $|x - 3| = 2 \Rightarrow x - 3 = \pm 2 \Rightarrow$ a) $x = 5$
b) $x = 1$

3) $|x - 3| = 1 \Rightarrow x - 3 = \pm 1 \Rightarrow$ a) $x = 4$
b) $x = 2$

4) $|x - 3| = 0 \Rightarrow x = 3$

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

R5.3.6. Determinați numerele întregi care verifică inegalitatea: $|x|(y - 2) > 0$
Soluție:

$$\left.\begin{array}{l} |x|(y-2) > 0 \\ |x| > 0, \text{ dacă } x \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y - 2 > 0 \\ y > 2 \end{array}$$

1) Dacă $x \in \mathbb{Z}^*$ atunci $y \in \{3, 4, 5, \ldots\}$
2) Dacă $x = 0 \Rightarrow$ inecuația nu are soluție.

Bibligrafie

C. Hărăbor, D.Săvulescu, I. Cheşcă, A.Ţifrea: *Matematică pentru clasele V-VIII-Olimpiadele judeţene,interjudeţene,naţionale*, Ed. Teora 1996, pag 72-76

D. Andrica, E. Jecan, D. Vâlcan, I. Bogdan, *Probleme calitative în matematica de gimnaziu*, Ed. Gil Zalău 1998, pag 21-43

Gheorghe şi Alina Drugan; Ion şi Mihaela Ghica, *Matematica în concursurile şcolare*, Ed. Teora 1998, pag 5-23

D. Brânzei, D. Zaharia, M. Zaharia : *Aritmetică-Algebră-Geometrie*, Ed.Paralela 45 2002, pag 5-43

D. Andrica, V. Berinde, Al. Blaga, G.Both, O. Pop, *Concursul Grigore Moisil* Ed. I-XV, Ed. Hub –Press 22 Baia-Mare 2001, pag 9,12,40

C. Moroti, M. Giurgiu, D. Radu, R. Ştefan, A. Ciupitu, G. Drugan, I. Ghica, *Matematică-exerciţii şi probleme pentru clasa a VI-a,* Ed. Meteor Press 2002, pag 44-49, semII

D. Miheţ, D. Angelescu, I. Chera, C. Popescu şi colectivul, *Olimpiadele de matematică 1990-1998, clasa a VI-a*, Ed. Gil Zalău 1999, pag 37-43

C. Hărăbor, D.Săvulescu, I. Cheşcă, A.Ţifrea: Mate*matică pentru clasele V-VIII-Olimpiadele judeţene,interjudeţene,naţionale*, Ed. Teora 1996, pag 72-76

D. Brânzei şi colectivul: *Matematica în concursurile şcolare*, Ed. Paralela 45, 2000,2001,2002 pag 27-54,119-135(2000);pag 27-54,117-130(2001);pag 18-34,82-92 (2002)

D. Brânzei, D. Zaharia, M. Zaharia : *Aritmetică-Algebră-Geometrie*, Ed.Paralela 45 2002, pag 5-43

C. Popovici, I. Ligor, V. Alexianu, *Matematică-Aritmetică-Algebră*, EDP Bucureşti 1996

G. Turcitu, I. Rizea, C. Basarab, M. Duncea, *Manual clasa a VI-a*, Ed. Radical 1998

T. Udrea, D. Nuţescu, *Manual clasa a VI-a*, EDP 1998

D. Brânzei, D. Zaharia, M. Zaharia : *Aritmetică-Algebră-Geometrie* PII, Ed. Paralela 45 2002, pag 39-43

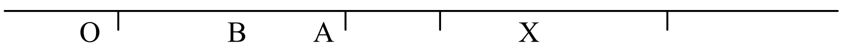
GEOMETRIE

1. Segmente

În cadrul temei se vor studia noțiunile de punct, dreaptă, plan, semidreaptă, segment de dreaptă, dar şi aplicații în care se vor determina pozițiile unor puncte pe o dreaptă, lungimea unui segment, distanța dintre mijloacele a două segmente şi congruența a două segmente.

1.1 Puncte, drepte, semidrepte, segmente de dreaptă

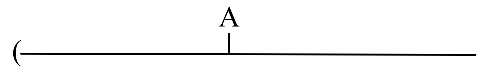
În vederea abordării temei reamintim noțiunile absolut necesare.
Considerăm figura:



Vom spune că punctul B este între O şi A.

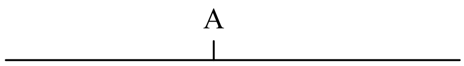
Definiția 1.1.1 Fiind date punctele O şi A pe o dreaptă, mulțimea formată din punctele dreptei OA situate între O şi A împreună cu punctele X de pe dreaptă pentru care A este între O şi X se numeşte semidreaptă. Punctul O este originea semidreptei –

Semidreaptă deschisă



Notație: (OA- semidreaptă deschisă

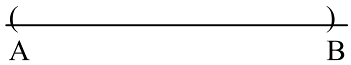
Semidreapta închisă:



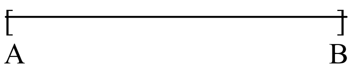
Notație: [OA- semidreaptă închisă ; [OA = (OA $\cup \{A\}$

O definiție mai puțin riguroasă dar uşor de reținut de către elevi este: semidreapta este o parte dintr-o dreaptă, limitată la unul dintre capete, numit originea semidreptei.

Definiția 1.1.2 Fiind date două puncte A şi B, mulțimea punctelor ce aparțin dreptei AB situate între A şi B se numeşte segment deschis şi se notează (AB)



Segmentul închis [AB] = (AB) $\cup \{A, B\}$

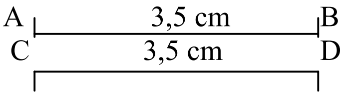


Punctele A şi B se numesc extremitățile sau capetele segmentului.

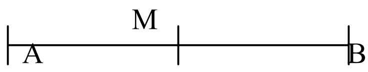
Definiția 1.1.3 Distanța dintre punctele a şi B exprimată într-o unitate de măsură se numeşte lungimea segmentului [AB].

Notație: AB = 5 cm.

Definiția 1.4. Două segmente se numesc congruente dacă au măsuri egale. Notăm [AB] ≡ [CD].



Definiția 1.1.5 Mijlocul unui segment este un punct care împarte segmentul în două segmente congruente.



Notăm M este mijlocul segmentului [AB] sau M≡ (AB) și [AM] ≡[MB]

Definiția 1.1.6 Fiind date două segmente, vom num segmentul sumă al lor un segment care are măsura egală cu suma măsurilor celor două segmente, iar segmentul diferență segmentul care are măsura egală cu diferența măsurilor segmentelor date.

Dacă AB = 15 cm, CD =7 cm şi MN= 22 cm, atunci MN=AB+CD (22=15+7), [MN] este segmentul sumă.

Dacă AB = 15 cm, CD =7 cm şi PQ=8 cm, atunci PQ=AB – CD (8=15 – 7), [PQ] este segmentul diferență

Probleme rezolvate

R1.1.1 Fiind date 10 puncte distincte două câte două şi necoliniare trei câte trei, aflați numărul de drepte determinate de câte două dintre ele.

Soluție

Două puncte distincte determină o dreaptă şi numai una. Fie $A_1,A_2,A_3.......,A_{10}$ cele 10 puncte punctul A_1 determină cu punctele $A_2,A_3.......,A_{10,}$ 9 drepte.

Mergând cu raționamentul din fiecare punct putem duce (10-1) drepte, însă în acest caz fiecare dreaptă o considerăm de două ori, deci numărul dreptelor este dat de

$$\frac{10(10-1)}{2}=\frac{10\cdot 9}{2}=45$$

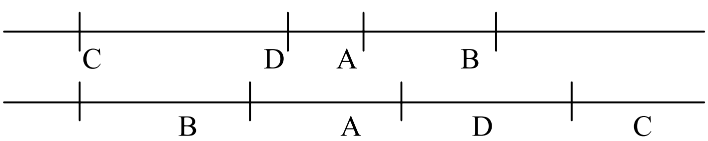
Dacă numărul punctelor este *n* atunci numărul dreptelor este $\frac{n(n\text{-}1)}{2}$.

R1.1.2 Considerăm punctele A,B,C,D pe dreapta d, astfel încât AB=a cm, AC=b cm, BD=c cm, BC=(a+b)cm, CD=(a+b-c)cm şi AD=(c-a)cm. Determinați ordinea punctelor pe dreaptă.

Soluție

Din AB=a, AC=b şi BC=a+b rezultă că A este între B şi C.

Dacă B aparține lui (AD) atunci CD=a+b+c ceea ce este fals.



Dacă C este între B şi D atunci CD=c-a-b ceea ce este fals, deci D este între B şi C şi cum AD=c-a rezultă că D este între Aşi C deci ordinea punctelor este:

1) C,D,A,B sau 2) B,A,D,C

R1.1.3 Punctul M_1 este mijlocul segmentului [AB], punctul M_2 este mijlocul segmentului $[AM_1]$.

Repetând procedeul punctul M_{10} este, mijlocul segmentului AM_9. Dacă $AB=2^{11}\cdot 3$cm, calculați măsura segmentului AM_{10}.

Soluție $AM_1 = \frac{AB}{2}; \quad AM_1 = \frac{2^{11}\cdot 3}{2};$

$$AM_1 = \frac{AM_1}{2}; \quad AM_1 = \frac{2^{11}\cdot 3}{2^2};$$

$$AM_3 = \frac{AM_2}{2}; \quad AM_3 = \frac{2^{11}\cdot 3}{2^3};$$

....

$$AM_{10} = \frac{AB}{2}; \quad AM_{10} = \frac{2^{11}\cdot 3}{2^{10}} = 2\cdot 3 = 6;$$

Bibliografie

I. Petrică şi colectivul, *Manual pentru clasa a VI-a*, Ed. Petrion 1998

G. Turcitu, I. Rizea, C. Basarab, M. Duncea, *Manual clasa a VI-a*, Ed. Radical 1998

T. Udrea, D. Nuțescu, *Manual clasa a VI-a*, EDP 1998

D. Brânzei, D. Zaharia, M. Zaharia : *Aritmetică-Algebră-Geometrie*, Ed.Paralela 45 2002, pag 97-109

C. Hărăbor, D.Săvulescu, I. Cheşcă, A.Țifrea: *Matematică pentru clasele V-VIII-Olimpiadele județene,interjudețene,naționale*, Ed. Teora 1996, pag 107

D. Brânzei, D. şi M. Goleşteanu, S. Ulmeanu, V. Gorgotă, I. Şerdean: *Matematica în concursurile şcolare*, Ed. Paralela 45, 2000,2001,2002

D. Constantinescu: *Olimpiadele şcolare*, Ed. Teora 1997-2002

D. Miheț, N. Angelescu, I. Chera, C. Popescu şi colectivul:*Olimpiadele de matematică 1990-1998*, Ed. Gil Zalău ,clasa a VI-a, pag 56-61

Edwin E. Moise, Floyd I. Downs jr. : *Geometria* , EDP 1983, pag 38-59

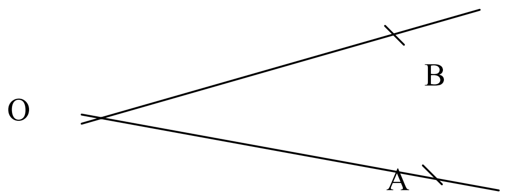
2. Unghiul

În cadrul temei se vor utiliza noțiunile de unghi, unghiuri adiacente, bisectoarea unui unghi, măsura unui unghi, unghiuri congruente, unghi ascuțit, drept, obtuz, unghiuri opuse la vârf, unghiuri în jurul unui punct, drepte perpendiculare, mediatoarea unui segment şi aplicații în care se vor determina măsuri de unghiuri, congruența unor unghiuri, perpendicularitatea unor drepte şi coliniaritatea unor puncte.

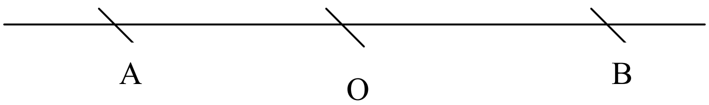
2.1 Noțiuni teoretice necesare abordării temei

Definiția 2.1.1

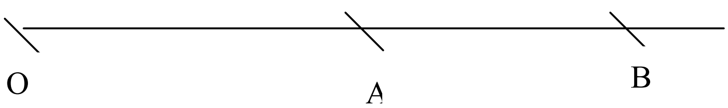
Se numeşte <u>unghi</u> figura geometrică formată din două semidrepte închise care au aceeaşi origine.



[OA şi [OB –laturile unghiului
O – vârful unghiului
Notație: ∠AOB
<u>Unghi alungit</u>



∠AOB este alungit dacă laturile lui sunt semidrepte opuse
<u>Unghi nul</u>



∠AOB este unghi nul dacă [OA=[OB (semidreptele coincid)

Unitatea de măsură pentru unghiuri este gradul. Unghiul de un grad reprezintă a 180-a parte dintr-un unghi alungit.

Definiția 2.1.2

Măsura unui unghi este un număr care ne arată de câte ori se cuprinde unitatea de măsură în unghiul pe care îl măsurăm.

Notație: Dacă unghiul AOB are măsura de 30 de grade notăm m($\angle$AOB)=30^0

Observație:

1^0 Măsura unui unghi alungit este 180^0

2^0 Măsura unui unghi nul este 0^0

Definiția 2.1.3

Două unghiuri se numesc congruente dacă au măsurile egale

Notație: $\angle$AOB $\equiv\angle$ A'O'B' (unghiul AOB este congruent cu unghiul A'O'B')

Definiția 2.1.4.

Se numeşte bisectoare interioară a unui unghi nenul o semidreaptă interioară unghiului, cu originea în vârful unghiului, care formează cu laturile acestuia două unghiuri congruente.

Definiția 2.1.5

Unghiul care are măsura de 90^0 se numeşte unghi drept.

Definiția 2.1.6

Unghiul cu măsura cuprinsă între 0^0 şi 90^0 se numeşte unghi ascuțit.

Definiția 2.1.7

Unghiul cu măsura cuprinsă între 90^0 şi 180^0 se numeşte unghi obtuz.

Definiția 2.1.8

Două unghiuri se numesc adiacente dacă au vârf comun, o latură comună şi interioarele disjuncte.

Definiția 2.1.9

Două unghiuri se numesc complementare dacă suma măsurilor lor este 90^0.

Definiția 2.1.10

Două unghiuri se numesc suplementare dacă suma măsurilor lor este 180^0.

Definiția 2.1.11

Două unghiuri se numesc opuse la vârf dacă au acelaşi vârf şi laturile unuia se găsesc în prelungirea laturilor celuilalt.

Propoziția 2.1.1

Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente.

Propoziția 2.1.2

Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este 360^0.

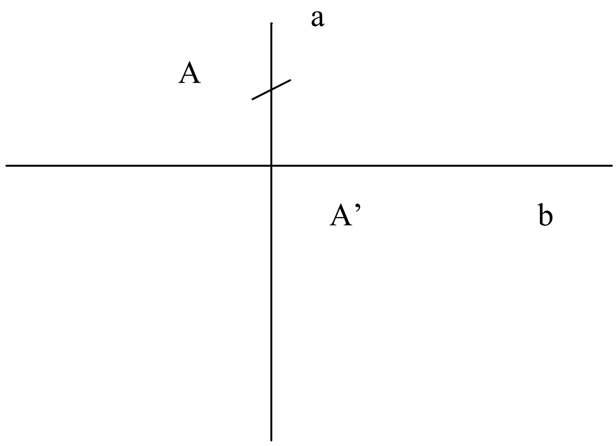
Definiția 2.1.12

Două drepte se numesc perpendiculare dacă formează un unghi drept.

Notație: $a\perp b$ (dreptele a şi b sunt perpendiculare)

Definiția 2.1.13

Prin distanța de la un punct la o dreaptă înțelegem distanța de la acel punct la piciorul perpendicularei pe acea dreaptă.



$a \perp b$, $A \in a$

$a \cap b = \{A'\}$

A' este piciorul perpendicularei din A pe b

AA' este distanța de la punctul A la dreapta b şi notăm AA' =d(A;b)

Definiția 2.1.14

Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul acestuia.

Probleme rezolvate

R2.1.1 Se consideră punctele A,O,B coliniare în această ordine. În acelaşi semiplan determinat de dreapta AB se duc semidreptele [OC şi [OD astfel încât [OC este în interiorul unghiului $\angle AOD$, iar $m(\angle COD)=90^0$. Dacă [OE şi [OF sunt bisectoarele unghiurilor $\angle AOC$ respectiv $\angle BOD$ să se afle măsura unghiului $\angle EOF$.

Soluție

$\angle AOB$ alungit $\Rightarrow m(\angle AOB)=180^0$

$m(\angle AOC)+m(\angle BOD) =180^0 - m(\angle COD)=180^0 - 90^0 =90^0$

[OE bisectoarea $\angle AOC \Rightarrow m(\angle AOE)=m(\angle EOC)=\dfrac{m(\angle AOC)}{2}$

[OF bisectoarea $\angle BOD \Rightarrow m(\angle BOF)=m(\angle FOD)=\dfrac{m(\angle BOD)}{2}$

$m(\angle EOF)=m(\angle COD)+m(\angle EOC)+m(\angle DOF)=$

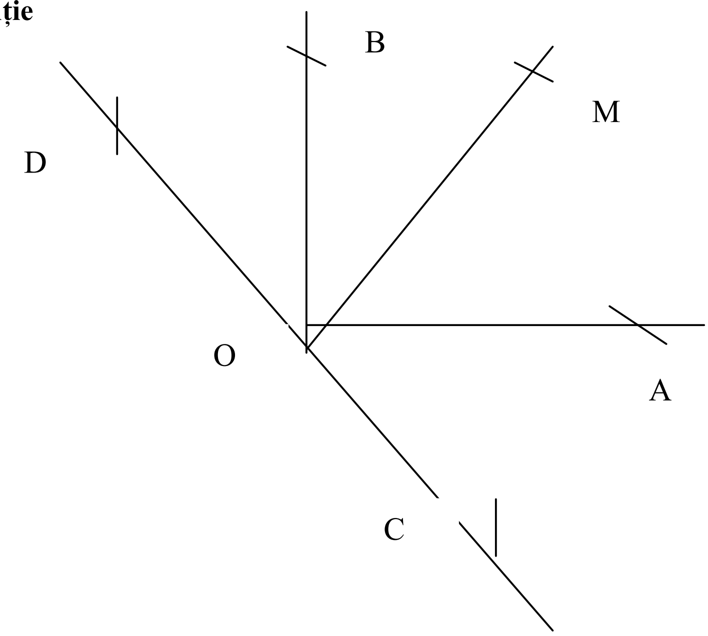
$$= 90^0+\frac{m(\angle AOC)+m(\angle BOD)}{2} = 90^0 + \frac{90^0}{2} = 135^0$$

R2.1.2 Se consideră unghiul drept $\angle AOB$ şi d o dreaptă care trece prin O şi nu are puncte în interiorul unghiului sau pe laturile acestuia. Fie punctul C pe dreapta d, situat în semiplanul determinat de dreapta OB şi punctul A, iar D un punct pe dreapta d astfel ca semidreptele [OC şi [OD să fie opuse.

a) Demonstrați că unghiul $\angle AOC$ este ascuțit;

b) Dacă punctul M este în interiorul unghiului $\angle AOB$ astfel încât $\angle AOC$ să fie congruent cu $\angle AOM$, demonstrați că [OB este bisectoarea unghiului $\angle MOD$.

Soluție



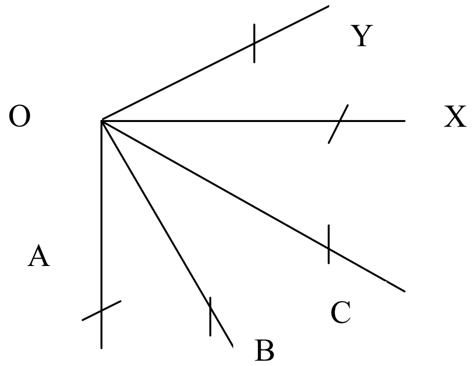
a) $\angle COD$ – unghi alungit$\Rightarrow$m($\angle COD$)=180^0
$\angle AOB$ – unghi drept $\Rightarrow$ m($\angle AOB$)=90^0
m($\angle AOC$)=180^0 – [m($\angle AOB$)+m($\angle BOD$)]=
=180^0 – m($\angle AOB$) - m($\angle BOD$)= 180^0 – 90^0 – m($\angle BOD$)=
=90^0- m($\angle BOD$) $\Rightarrow$ m($\angle AOC$)<$90^0$$\Rightarrow$$\angle AOC$ – unghi ascuțit

b) m($\angle AOC$)+m($\angle BOD$)=180^0 – m($\angle AOB$)=180^0 – 90^0=90^0
m($\angle BOD$)=90^0 – m($\angle AOC$) (1)
m($\angle AOM$)+m($\angle MOB$)=$90^0$$\Rightarrow$ m($\angle BOM$)=90^0 – m($\angle AOM$) (2)
m($\angle AOM$)=m($\angle AOC$) (3)
Din relațiile (1), (2) şi (3) $\Rightarrow$ m($\angle MOB$)=m($\angle BOD$)$\Rightarrow$ [OB bisectoarea $\angle MOD$

R2.1.3 Se consideră unghiul ascuțit $\angle XOY$. În semiplanul determinat de [OX şi în care nu se află semidreapta [OY , se duc perpendicularele [OA şo [OB respectiv pe [OX şi [OY. Se notează cu [OC bisectoarea unghiului $\angle BOX$.

a) Dacă măsura $\angle AOC$ este cu 16^0 mai mare decât măsura $\angle XOY$, determinați m($\angle XOY$);
b) Arătați că dacă [OB este bisectoarea $\angle AOC$, atunci [OX este bisectoarea $\angle COY$

Soluție



$OA \perp OX \Rightarrow m(\angle AOX)=90^0 \Rightarrow m(\angle AOB)=90^0 - m(\angle XOB)$ (1)

$OB \perp OY \Rightarrow m(\angle BOY)=90^0 \Rightarrow m(\angle XOY)=90^0 - m(\angle BOX)$ (2)

Din relațiile (1) şi (2) $\Rightarrow m(\angle AOB)=m(\angle XOY)$

$m(\angle AOC)=m(\angle AOB)+m(\angle BOC)=m(\angle XOY)+m(\angle BOC)$ (3)

$m(\angle AOC) - m(\angle XOY)=16^0$ (4)

Înlocuind $m(\angle AOC)$ din relația (3) în relația (4) obținem:

$m(\angle XOY)+m(\angle BOC) - m(\angle XOY)=16^0 \Rightarrow m(\angle BOC)=16^0$

$\Rightarrow m(\angle BOX)=2m(\angle BOC)=32^0$

$m(\angle XOY)=90^0 - m(\angle BOX)=90^0 - 32^0=58^0$

Bibliografie

I. Petrică şi colectivul, *Manual pentru clasa a VI-a*, Ed. Petrion 1998

G. Turcitu, I. Rizea, C. Basarab, M. Duncea, *Manual clasa a VI-a*, Ed. Radical 1998

T. Udrea, D. Nuțescu, *Manual clasa a VI-a*, EDP 1998

D. Brânzei, D. Zaharia, M. Zaharia : *Aritmetică-Algebră-Geometrie*, Ed.Paralela 45 2002, pag 110-124

C. Hărăbor, D.Săvulescu, I. Cheşcă, A.Țifrea: *Matematică pentru clasele V-VIII-Olimpiadele județene,interjudețene,naționale*, Ed. Teora 1996, pag 108-109, 109-112

D. Brânzei, D. şi M. Goleşteanu, S. Ulmeanu, V. Gorgotă, I. Şerdean: *Matematica în concursurile şcolare*, Ed. Paralela 45, 2000,2001,2002

D. Constantinescu: *Olimpiadele şcolare*, Ed. Teora 1997-2002

D. Miheț, N. Angelescu, I. Chera, C. Popescu şi colectivul: *Olimpiadele de matematică 1990-1998*, Ed. Gil Zalău, clasa a VI-a, pag 61-70,71-77

Edwin E. Moise, Floyd I. Downs jr. : *Geometria* , EDP 1983, pag 81-105

3. Geometria bazată pe raționament şi demonstrații

În problemele de geometrie ne vom baza, în stabilirea unor proprietăți pe judecată (raționament). Punctele principale de plecare ale judecăților pe care le vom face vor fi cazurile de congruență ale triunghiurilor oarecare. Scopul urmărit va fi acela de a forma şi dezvolta raționamentul geometric şi de a deduce cu ajutorul lui proprietățile cele mai importante ale figurilor geometrice.

În matematică (deci şi în geometrie) se întâlnesc unele propoziții care exprimă adevăruri ce se admit fără demonstrații şi care se numesc "axiome" (Cuvântul "axiomă" vine din limba greacă: axioma = opinie, teză admisă. Termenul a fost folosit, începând din sec. 6-5 î.H. de către matematicii din şcoala lui Pitagora). Spre exemplu: "Prin două puncte distincte "trece" o singură dreaptă" (axioma dreptei).

Propoziții matematice care exprimă adevăruri ce trebuie să fie dovedite se numesc "teoreme" (cuvântul "teoremă" vine din limba greacă: theorema = examinare, cercetare. Termenul a fost folosit pentru prima dată de filozoful grec Aristotel în sec. 4 î.H.). Spre exemplu: "Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente".

În enunțul fiecărei teoreme deosebim două părți: "ipoteza" (sau premisa), care este formată din toate faptele pe care enunțul teoremei le presupune adevărate şi "concluzia", care este formată din ceea ce enunțul teoremei afirmă că se poate deduce din ipoteză. (Cuvântul "ipoteză" este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: hypo = sub şi thesis = punere. Cuvântul "premisă" vine din limba latină: praemisus = pus înainte, anterior. Cuvântul "concluzie" vine din limba latină: conclusio = încheiere).

În exemplul de mai sus, ipoteza este: "două unghiuri sunt opuse la vârf", iar concluzia: "aceste două unghiuri sunt congruente".

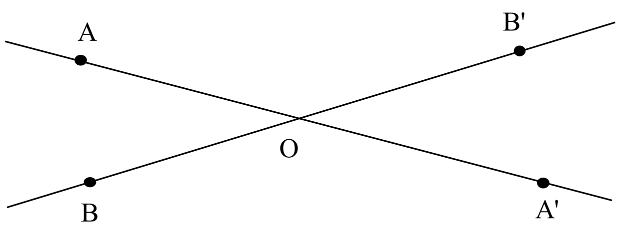
În unele cazuri teoremele sunt enunțate sub forma unor propoziții ipotetice (condiționale): ipoteza începe cu cuvântul "dacă", iar concluzia cu cuvântul "atunci". Cum teoreme se întâlnesc şi în aritmetică, nu numai în geometrie, vom da un exemplu de teoremă prezentă sub forma unei propoziții ipotetice (condiționale), întâlnită la aritmetică în clasa a V-a: "Dacă un număr este divizibil cu 3 şi cu 5, atunci el este divizibil cu 15". Se reține cu uşurință că "un număr este divizibil cu 3 şi cu 5" este ipoteza, iar "el este divizibil cu 15" este concluzia.

Teoremele trebuie să fie "demonstrate", adică adevărurile din concluzie trebuie să fie "dovedite" cu ajutorul unor argumente, care sunt adevărurile din ipoteză şi alte adevăruri (axiome sau teoreme demonstrate anterior).

Pentru primul exemplu:

Ipoteză. $\angle AOB$ şi $\angle A'OB'$ opuse la vârf

Concluzie. $\angle AOB \equiv \angle A'OB'$.



Demonstrație. Ştim că m($\angle$AOB)+m($\angle$AOB')=180°, iar m($\angle$A'OB') + m($\angle$AOB') =180°, deci m($\angle$AOB)=m($\angle$A'OB'), de unde rezultă că $\angle$AOB≡$\angle$A'OB'.

Pentru al doilea exemplu:

Ipoteză. $n \vdots 3$, $n \vdots 5$

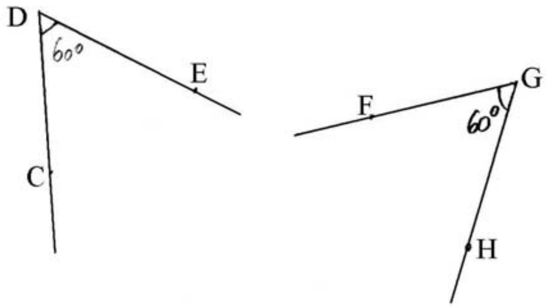
Concluzie: $n \vdots 15$

Demonstrație. Ştim că: "dacă *n* se divide cu *a* şi *b*, iar *a* şi *b* sunt prime între ele, atunci *n* se divide cu produsul $a \cdot b$".

$n \vdots 3, n \vdots 5, (3,5) = 1 \Rightarrow n \vdots 15$.

Dacă se schimbă între ele ipoteza şi concluzia unei teoreme, se obține o propoziție nouă, care se numeşte "propoziție reciprocă" (Cuvântul "reciprocă" vine din limba latină: reciprocus = care se întoarce de unde a venit, care inversează).

Spre exemplu, "reciproca" primului exemplu ar afirma că: "Dacă două unghiuri sunt congruente, atunci ele sunt opuse la vârf". Această propoziție este falsă, deoarece concluzia ei nu este întotdeauna adevărată. Pentru a dovedi falsitatea ei este suficient să dăm un singur exemplu din care să rezulte aceasta. Dacă vom privi, spre exemplu, unghiurile $\angle$CDE şi $\angle$FGH, care sunt congruente (având aceeaşi măsură), ne vom da seama imediat că ele nu sunt opuse la vârf:



Un exemplu care arată că uneori concluzia unei propoziții nu este adevărată, se numeşte contraexemplu.

Dacă reciproca unei teoreme este o propoziție falsă, atunci această reciprocă nu este teoremă şi deci teorema dată nu admite "teoremă reciprocă".

"Reciproca" celui de al doilea exemplu afirmă că: "Dacă un număr este divizibil cu 15, atunci el este divizibil cu 3 şi cu 5". Această propoziție este adevărată:

Ipoteză. $n \vdots 15$

Concluzie: $n \vdots 3$ şi $n \vdots 5$.

Demonstrație. Ştim că: "dacă *n* se divide cu *m*, atunci *n* se divide cu toți divizorii lui *m*".

$n \vdots 15, 15 \vdots 3, 15 \vdots 5 \Rightarrow n \vdots 3$ şi $n \vdots 5$.

Dacă reciproca unei teoreme este o propoziție adevărată, atunci această reciprocă devine "teoremă reciprocă".

Se obişnuieşte ca, faţă de teorema reciprocă, teorema iniţială să se numească "teoremă directă". Se mai spune că cele două teoreme sunt una reciproca celeilalte, ceea ce înseamnă că oricare dintre ele ar putea fi considerată teoremă directă.

Dacă teorema directă şi reciproca ei sunt ambele adevărate, atunci le putem concentra într-o singură teoremă, folosind în formularea enunţului expresia "dacă şi numai dacă". Iată un exemplu: "Un număr este divizibil cu 15 dacă şi numai dacă el este divizibil cu 3 şi cu 5". Pentru demonstrarea unei astfel de teoreme trebuie să facem, de fapt, două demonstraţii: directa şi reciproca.

Sunt situaţii când o teoremă (propoziţie) poate să admită mai multe reciproce. Aceasta se întâmplă atunci când ipoteza sau concluzia teoremei (propoziţiei) date (sau chiar ambele) conţine (conţin) două sau mai multe afirmaţii (părţi). În acest caz, numim propoziţie reciprocă a unei propoziţii date acea propoziţie în care "ipoteza" este formată din concluzia propoziţiei date (sau numai o parte a concluziei) şi o parte din ipoteza propoziţiei date, iar "concluzia" este formată din partea rămasă a ipotezei propoziţiei date (şi ceea ce a mai rămas din concluzia propoziţiei date).

3.1 Congruenţa triunghiurilor

Cazurile de congruenţă a triunghiurilor oarecare

Fie ABC şi MNP două triunghiuri oarecare. Notaţia $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ o citim: "triunghiul ABC este congruent cu triunghiul MNP" şi înţelegem prin aceasta şase congruenţe, care au loc în acelaşi timp şi anume:

$$[AB] \equiv [MN], \quad [BC] \equiv [NP], \quad [CA] \equiv [PM];$$

$$\angle BAC \equiv \angle NMP, \quad \angle ABC \equiv \angle MNP, \quad \angle ACB \equiv MPN.$$

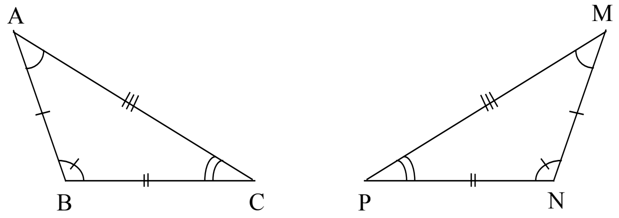
Pentru a scrie cele şase congruenţe se ţine seama că:

1) Laturile şi unghiurile celor două triunghiuri se corespund în ordinea dată (scrisă) de congruenţa celor două triunghiuri. Ele se mai numesc şi elemente (laturi sau unghiuri) "omoloage". (Cuvântul "omolog" vine din limba greacă: homologus = în armonie).

2) Laturile şi unghiurile celor două triunghiuri congruente, care se corespund (omoloage), sunt congruente.

Se observă că din $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ nu rezultă $\Delta ABC \equiv \Delta MPN$, dar rezultă că $\Delta ACB \equiv \Delta MPN$ şi încă alte patru astfel de relaţii ($\Delta BAC \equiv \Delta NMP$, $\Delta BCA \equiv \Delta NPM$, $\Delta CAB \equiv \Delta PMN$, $\Delta CBA \equiv \Delta PNM$).

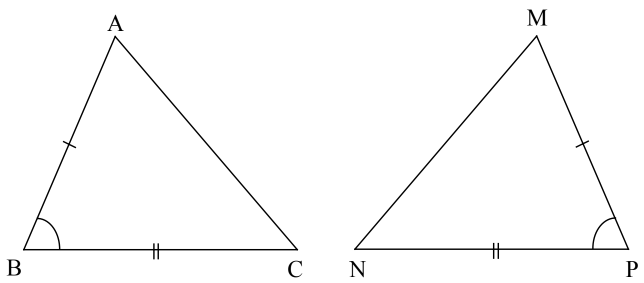
Ilustrăm grafic elementele care sunt respectiv congruente:



Pentru a arăta că două triunghiuri sunt congruente nu este necesar să demonstrăm toate cele şase congruenţe între elementele lor.

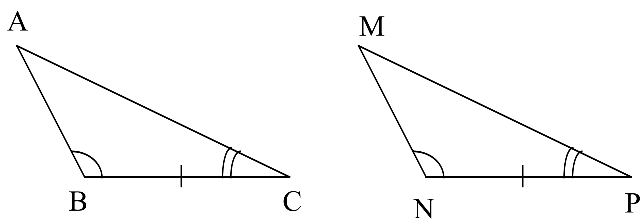
Următoarele afirmaţii, care se numesc "cazurile de congruenţă a triunghiurilor oarecare" sunt adevărate:

Cazul 1 (LUL). Două triunghiuri oarecare care au câte două laturi şi unghiul cuprins între ele respectiv congruente sunt congruente.



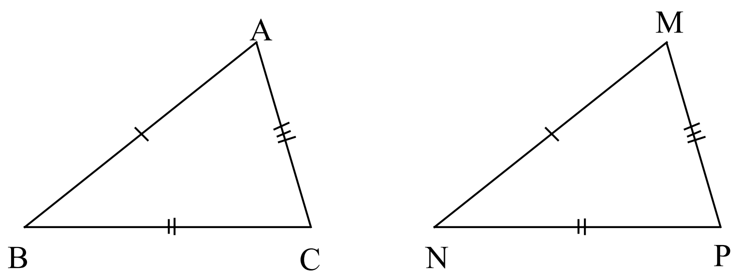
Dacă [AB]≡[NM], [BC]≡[NP] şi ∠ABC≡∠MNP, atunci rezultă că ΔABC≡ΔMNP. Ca urmare, rezultă că [AC]≡[MP], ∠ACB≡∠MPN şi ∠BAC≡∠NMP.

Cazul 2 (ULU). Două triunghiuri oarecare care au câte o latură şi unghiurile alăturate ei respectiv congruente sunt congruente.



Dacă [BC]≡[NP], ∠ABC≡∠MNP, ∠ACB≡∠MPN, atunci rezultă că ΔABC≡ΔMNP. Ca urmare, rezultă că [AB]≡[MN], [AC]≡[MP] şi ∠BAC≡∠NMP.

Cazul 3 (LLL). Două triunghiuri oarecare care au laturile respectiv congruente sunt congruente.

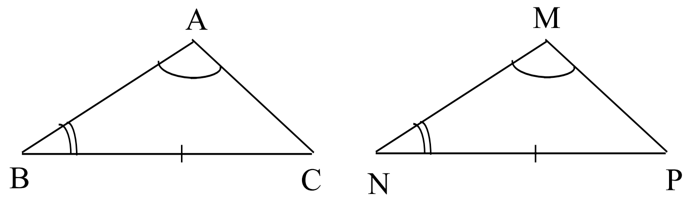


Dacă [AB]≡[MN], [BC]≡[NP], [AC]≡[MP], atunci rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$. Ca urmare, rezultă că $\angle BAC \equiv \angle NMP$, $\angle ABC \equiv \angle MNP$ şi $\angle ACB \equiv \angle MPN$.

Se obişnuieşte a se rezuma astfel: cazaul 1: LUL (adică, latură-unghi-latură), cazul 2: ULU (unghi-latură-unghi) şi cazul 3: LLL (latură-latură-latură).

Aceste trei cazuri rezultă direct din construcția triunghiului.

Remarcă. Cazul LUU (latură-unghi-unghi): Două triunghiuri oarecare care au câte o latură, unghiul opus ei şi un unghi alăturat ei, respectiv congruente sunt congruente.



Dacă [BC]≡[NP], $\angle BAC \equiv \angle NMP$, $\angle ABC \equiv \angle MNP$, atunci rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$. Ca urmare, [AB]≡[MN], [AC]≡[MP] şi $\angle ACB \equiv \angle MPN$.

Observații. Cazul LUU nu rezultă din construcția triunghiului, dar considerând că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°, adică

$$m(\angle BAC)+m(\angle ABC)+m(\angle ACB)=180°$$

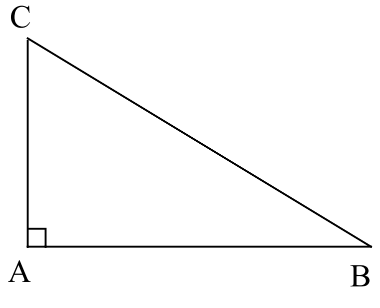
şi $m(\angle NMP)+m(\angle MNP)+m(\angle MPN)=180°$ şi ținând cont că $m(\angle BAC)=m(\angle NMP)$ şi $m(\angle ABC)=m(\angle MNP)$, rezultă că şi $m(\angle ACB)=m(\angle MPN)$. Deci, acest caz se reduce la ULU.

Cazurile de congruență a triunghiurilor dreptunghice

Definiție. Triunghiul care are un unghi drept se numeşte triunghi dreptunghic.

Laturile unui triunghi dreptunghic ABC, ($m(\angle A)=90°$) se numesc:

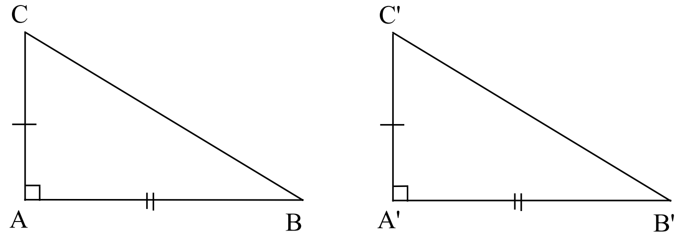
- catete – laturile alăturate unghiului drept
- ipotenuză – latura opusă unghiului drept.



[AB], [AC] sunt catete
[BC] este ipotenuza.

Toate triunghiurile dreptunghice au câte un unghi drept. Este de aşteptat ca în cazul particular al triunghiurilor dreptunghice, atât cazurile de construcție cât şi cazurile de congruență să fie redate într-o formă simplificată.

Cazul C.C. (catetă-catetă): Dacă două triunghiuri dreptunghice au catetele respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.



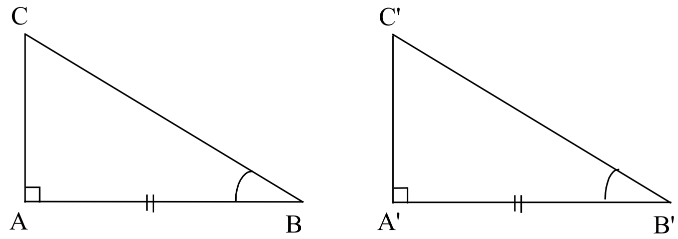
Fie triunghiurile dreptunghice ABC şi A'B'C' cu m(∠BAC)=m(∠B'A'C')=90°, [AB]≡[A'B'] şi [AC]≡[A'C']. Putem afirma conform cazului de congruență LUL a triunghiurilor oarecare că ΔABC≡ΔA'B'C'.

Acest caz este o aplicație directă a cazului LUL de la congruența triunghiurilor oarecare.

Cazul C.U. (catetă-unghi): Dacă două triunghiuri dreptunghice au o catetă şi un unghi ascuțit, la fel aşezat față de catetă, respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

Avem două posibilități:

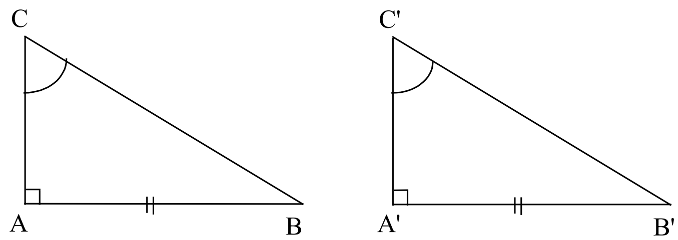
I. Triunghiurile dreptunghice ABC şi A'B'C' au congruente o catetă şi unghiul ascuțit alăturat ei:



Fie triunghiurile dreptunghice ABC şi A'B'C' cu m(∠BAC)=m(∠B'A'C')=90°, [AB]≡[A'B'] şi ∠ABC≡∠A'B'C'. rezultă, conform cazului de congruență ULU a triunghiurilor oarecare, că ΔABC≡ΔA'B'C'.

Acest caz este o aplicație directă a cazului ULU de la congruența triunghiurilor oarecare.

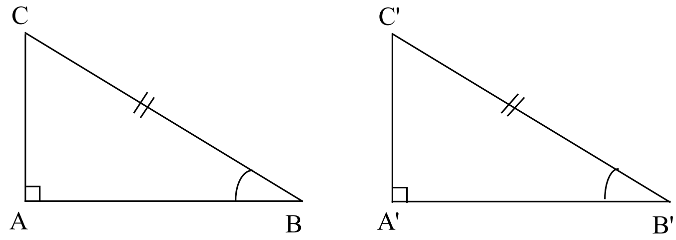
II. Triunghiurile dreptunghice ABC şi A'B'C' au congruente o catetă şi unghiul ascuțit opus ei:



Fie triunghiurile dreptunghice ABC şi A'B'C' cu m(∠BAC)=m(∠B'A'C')=90°, [AB]≡[A'B'] şi ∠ACB≡∠A'C'B'. Rezultă, conform cazului de congruență LUU a triunghiurilor oarecare, că ΔABC≡ΔA'B'C'.

Acest caz este o aplicație directă a cazului LUU de la congruența triunghiurilor oarecare.

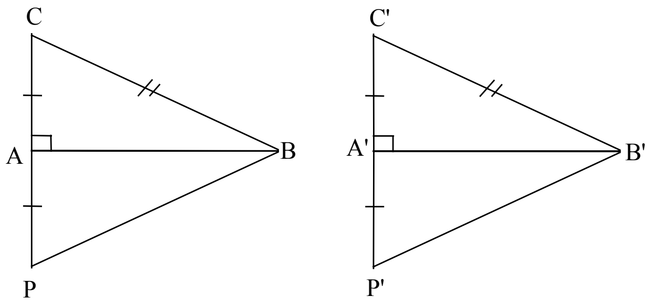
Cazul I.U. (ipotenuză-unghi): Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuza şi un unghi, diferit de unghiul drept, respectiv congruente, atunci sunt congruente.



Fie triunghiurile ABC şi A'B'C' cu m(∠BAC)=m(∠B'A'C')=90°, [BC]≡[B'C'] şi ∠ABC≡∠A'B'C'. Rezultă, conform cazului de congruență LUU a triunghiurilor oarecare, că ΔABC≡ΔA'B'C'.

Acest caz este o aplicație directă a cazului LUU de la congruența triunghiurilor oarecare.

Cazul I.C. (ipotenuză-catetă): Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuza şi o catetă respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.



Fie triunghiurile dreptunghice ABC şi A'B'C' cu m(∠BAC)=m(∠B'A'C')=90°, [BC]≡[B'C'] şi [AC]≡[A'C']. Trebuie să demonstrăm că ΔABC≡ΔA'B'C'.

Prelungim [AC] cu [AP]≡[AC] şi [A'C'] cu [A'P']≡[A'C']; cum [AC]≡[A'C'], rezultă că [AP]≡[A'P'] şi [CP]≡[C'P']. Ştim că [AC]≡[AP], m(∠BAC)=m(∠BAP)=90°, [AB] latură comună, rezultă ΔABC≡ΔABP, conform cazului de congruență catetă-catetă. De aici, [BC]≡[BP] (1).

Vom demonstra la fel că triunghiurile A'B'C' şi A'B'P' sunt congruente: [A'C']≡[A'P'], m(∠B'A'C')=m(B'A'P')=90° şi [A'B'] latură comună, rezultă că ΔA'B'C'≡ΔA'B'P', conform cazului de congruență catetă-catetă. De aici, [B'C']≡[B'P'] (2).

Din [BC]≡[B'C'] şi relațiile (1) şi (2) rezultă că [BP]≡[B'P'].

Vom demonstra că triunghiurile BPC şi B'P'C' sunt congruente: [BC]≡[B'C'], [BP]≡[B'P'] şi [CP]≡[C'P'], rezultă conform cazului de congruență LLL că ΔBPC≡ΔB'P'C'. De aici, ∠ACB≡∠A'C'B'.

Acum putem arăta că triunghiurile ABC şi A'B'C' sunt congruente: [AC]≡[A'C'], [BC]≡[B'C'] şi ∠ACB≡∠A'C'B', rezultă conform cazului de congruență LUL că ΔABC≡ΔA'B'C', ceea ce trebuia să demonstrăm.

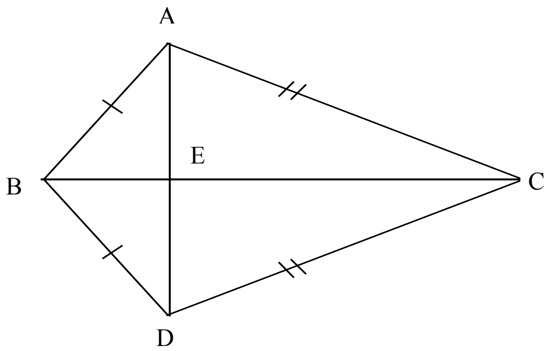
Probleme rezolvate

R3.1.1 În figura alăturată [AB]≡[BD], [AC]≡[DC]. Atunci:

a) ΔABC≡ΔDBC

b) ΔABE≡ΔDBE

c) ΔACE≡ΔDCE.



Soluție. a) Dacă [AB]≡[BD], [AC]≡[DC], [BC] latură comună, atunci rezultă, conform cazului de congruență LLL, că ΔABC≡ΔDBC.

b) Din a), ΔABC≡ΔDBC, rezultă că ∠ABC≡∠DBC sau ∠ABE≡∠DBE. Dacă [AB]≡[BD], ∠ABE≡∠DBE şi [BE] este latură comună, rezultă conform cazului de congruență LUL, că ΔABE≡ΔDBE.

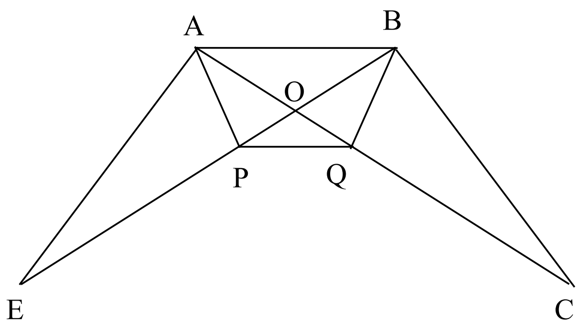
c) Din b), ΔABE≡ΔDBE, rezultă că [AE]≡[DE]. Dacă [AC]≡[CD], [AE]≡[DE] şi [CE] este latură comună rezultă conform cazului de congruență LLL, că ΔACE≡ΔDCE.

R3.1.2 În figura alăturată: ΔAPB≡ΔBQA şi [AC]≡[BE]. Atunci:

a) ΔAPE≡ΔBQC

b) ΔBAE≡ΔABC

c) ΔAPQ≡ΔBQP.



Soluție. a) Ştim că ΔAPB≡ΔBQA, de unde rezultă că [AP]≡[BQ], [PB]≡[QA], ∠PAB≡∠QBA. ∠APB≡∠BQA şi ∠PBA≡∠QAB. Ştim că

$[AC] \equiv [BE]$ şi $[AQ] \equiv [PB]$, iar prin scădere membru cu membru $AC - AQ = BE - PB$, de unde rezultă că $[QC] \equiv [EP]$. $m(\angle APE)=180°-m(\angle APB)$ şi $m(\angle BQC)=180°-m(\angle BQA)$, dar $\angle APB \equiv \angle BQA$, de unde rezultă că $\angle APE \equiv \angle BQC$.

Am arătat că $[AP] \equiv [BQ]$, $[EP] \equiv [CQ]$ şi $\angle APE \equiv \angle BQC$, deci, conform cazului de congruenţă LUL, rezultă că $\Delta APE \equiv \Delta BQC$.

b) Ştim că $\angle PAB \equiv \angle QBA$, iar din a) rezultă că $\angle PAE \equiv \angle QBC$, iar prin însumare, $m(\angle PAB)+m(\angle PAE)=m(\angle QBA)+m(\angle QBC)$, de unde rezultă că $m(\angle BAE)=m(\angle ABC)$, deci $\angle BAE \equiv \angle ABC$. Avem $[AB]$ latură comună, $\angle BAE \equiv \angle ABC$ şi $\angle ABE \equiv \angle BAQ$ (este de fapt, $\angle PBA \equiv \angle QAB$) şi conform cazului de congruenţă ULU rezultă că $\Delta BAE \equiv \Delta ABC$.

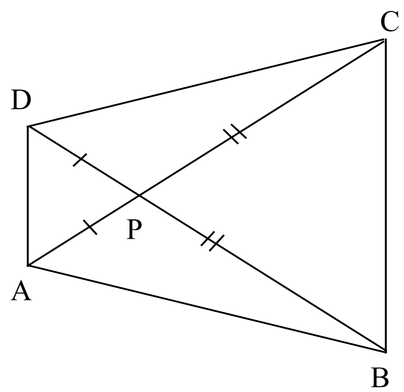
c) Ştim că $[AP] \equiv [BQ]$, $[AQ] \equiv [BP]$, din $\Delta APB \equiv \Delta BQA$ şi $[PQ]$ este latură comună, deci $\Delta APQ \equiv \Delta BQP$, conform cazului LLL de congruenţă a triunghiurilor.

R3.1.3 În figura alăturată: $[DP] \equiv [AP]$, $[PB] \equiv [PC]$. Atunci:

a) $\Delta DPC \equiv \Delta APB$

b) $\Delta CDA \equiv \Delta BAD$

c) $\Delta DCB \equiv \Delta ABC$.



Soluţie. a) Ştim că $[DP] \equiv [AP]$, $[PC] \equiv [PB]$ şi $\angle DPC \equiv \angle APB$, fiind unghiuri opuse la vârf, rezultă că $\Delta DPC \equiv \Delta APB$, conform cazului de congruenţă LUL.

b) Se dă: $DP=AP$, $PB=PC$ şi prin adunare membru cu membru rezultă $DP+PB=AP+PC$, adică $DB=AC$, de unde rezultă că $[DB] \equiv [AC]$.

Ştim că $[DB] \equiv [AC]$, $[AB] \equiv [DC]$ (din a) $\Delta DPC \equiv \Delta APB$) şi $[AD]$ latură comună, rezultă că $\Delta CDA \equiv \Delta BAD$, conform cazului LLL de congruenţă a triunghiurilor.

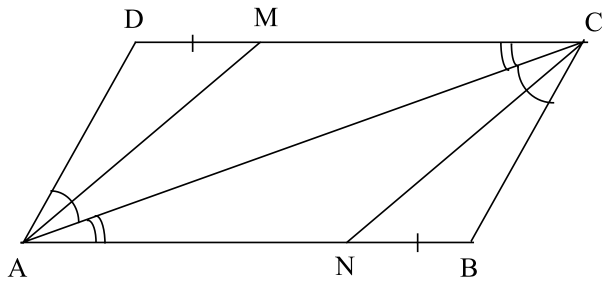
c) Ştim că $[DB] \equiv [AC]$, $[DC] \equiv [AB]$ (din a)) şi $[BC]$ latură comună, rezultă că $\Delta DCB \equiv \Delta ABC$, conform cazului LLL de congruenţă a triunghiurilor.

R3.1.4 În figura alăturată: $\angle DAC \equiv \angle BCA$, $\angle DCA \equiv \angle BAC$, $[DM] \equiv [BN]$. Atunci:

a) $\Delta ADC \equiv \Delta CBA$

b) $\Delta AMC \equiv \Delta CNA$

c) $\Delta ADM \equiv \Delta CBN$.



Soluție. a) Ştim că $\angle DAC \equiv \angle BCA$, $\angle DCA \equiv \angle BAC$ şi [AC] latură comună, rezultă că $\Delta ADC \equiv \Delta CBA$, conform cazului ULU de congruență a triunghiurilor.

b) Din a) rezultă că [AB]≡[DC], ştim că [DM]≡[BN], deci $AB - BN = DC - DM$, de unde AN=CM, deci [AN]≡[CM]. Avem: [AN]≡[CM], [AC] latură comună şi $\angle MCA \equiv \angle NAC$, de unde rezultă conform cazului LUL, că $\Delta AMC \equiv \Delta CNA$.

c) Din a) rezultă că [AD]≡[BC]; din c) rezultă că [AM]≡[CN] şi se dă [DM]≡[BN], deci $\Delta ADM \equiv \Delta CBN$, conform cazului LLL de congruență a triunghiurilor.

3.2. Metoda triunghiurilor congruente

În geometrie se foloseşte o metodă de stabilire a adevărului caracteristică ştiințelor matematice: demonstrația. Demonstrația este o succesiune de judecăți, de argumente prin care se stabileşte un adevăr. În particular metoda triunghiurilor congruente este o metodă de demonstrație prin care se demonstrează de regulă că două segmente sau două unghiuri sunt congruente.

Pentru rezolvarea problemelor de geometrie:

- citiți cu atenție problemele şi folosind instrumentele potrivite, desenați figura geometrică
- figura desenată să respecte proporțiile elementelor date în enumțul problemei
- figura să fie suficient de mare şi clară
- pentru a demonstra că două segmente sau că două unghiuri sunt congruente, căutați să le încadrați în două triunghiuri a căror congruență poate fi demonstrată
- veți trage concluzia că segmentele sau unghiurile respective sunt congruente, dacă sunt elemente omoloage în triunghiuri congruente.

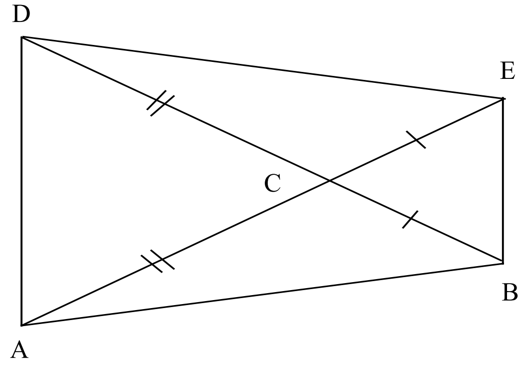
Probleme rezolvate

R3.2.1 Fie segmentele [AE] şi [BD] care au un punct comun C, astfel încât [AC]≡[CD] şi [CB]≡[CE]. Să se demonstreze că:

a) [AB]≡[DE]

b) $\angle DEB \equiv \angle ABE$

c) ∠CAD≡∠CDA.



Ipoteză: [AE]∩[BD]={C}
[AC]≡[CD]
[CB]≡[CE]

Concluzie: a) [AB]≡[DE]
b) ∠DEB≡∠ABE
c) ∠CAD≡∠CDA.

Demonstrație. a) Pentru a demonstra că două segmente sunt congruente căutăm să le încadrăm în două triunghiuri a căror congruență poate fi demonstrată.

Vom demonstra că triunghiurile ACB şi DCE sunt congruente, deoarece: [AC]≡[DC], [CB]≡[CE] şi ∠ACB≡∠DCE, fiind unghiuri opuse la vârf; rezultă conform cazului de congruență LUL că ΔACB≡ΔDCE, de unde rezultă că [AB]≡[DE].

b) Pentru a demonstra că două unghiuri sunt congruente căutăm să le încadrăm în două triunghiuri a căror congruență poate fi demonstrată. Vom arăta că triunghiurile DEB şi ABE sunt congruente.

Avem [AC]≡[CD] şi [EC]≡[CB], din ipoteză, de unde AC+CE=DC+CB, deci AE=DB, adică [AE]≡[DB]. Deci, [AE]≡[DB], [AB]≡[DE] (din punctul a) al problemei) şi [BE] latură comună, rezultă că ΔDEB≡ΔABE, conform cazului de congruență a triunghiurilor LLL. De aici rezultă că: ∠DEB≡∠ABE.

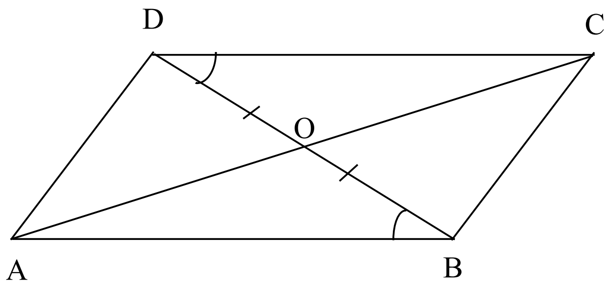
c) Pentru a demonstra că două unghiuri sunt congruente căutăm să le încadrăm în două triunghiuri a căror congruență poate fi demonstrată. Vom arăta că triunghiurile EAD şi BDA sunt congruente.

Avem [AE]≡[BD], [DE]≡[AB] (din punctul a) al problemei) şi [AD] latură comună, rezultă că ΔEAD≡ΔBDA, conform cazului de congruență a triunghiurilor LLL. De aici rezultă că: ∠CAD≡∠CDA.

R3.2.2 În ΔABD, O este mijlocul laturii [BD]. Se prelungeşte segmentul [AO] cu segmentul [OC] astfel încât ∠CDB≡∠ABD. Să se arate că:

a) [DC]≡[AB]

b) ∠OBC≡∠ODA.



Ipoteză: ΔABD

$O \in [BD]$, $[OB] \equiv [OD]$

$O \in [AC]$

$\angle CDB \equiv \angle ABD$

Concluzie: a) $[DC] \equiv [AB]$

b) $\angle OBC \equiv \angle ODA$

Demonstrație. a) Vom demonstra că triunghiurile ODC şi OBA sunt congruente. Avem: $[OD] \equiv [OB]$, $\angle CDO \equiv \angle ABO$ (din ipoteză) şi $\angle DOC \equiv \angle BOA$, fiind unghiuri opuse la vârf. Rezultă conform cazului de congruență a triunghiurilor ULU că $\Delta ODC \equiv \Delta OBA$. De aici rezultă că $[DC] \equiv [AB]$.

b) Din $\Delta ODC \equiv \Delta OBA$ rezultă că $[OC] \equiv [OA]$. Vom demonstra că triunghiurile AOD şi COB sunt congruente: $[OD] \equiv [OB]$ (din ipoteză), $[OA] \equiv [OC]$ şi $\angle AOD \equiv \angle COB$, fiind unghiuri opuse la vârf. Rezultă conform cazului de congruență a triunghiurilor LUL că $\Delta AOD \equiv \Delta COB$. De aici rezultă că $\angle ODA \equiv \angle OBC$.

R3.2.3 Fie segmentele congruente [OA] şi [OB], astfel încât $m(\angle AOB) < 90°$; $AE \perp OB$, $E \in OB$, $BF \perp OA$, $F \in OA$, $AE \cap BF = \{P\}$.

Să se demonstreze că:

a) $[AE] \equiv [BF]$

b) [OP este bisectoarea unghiului AOB.

Ipoteză: $[OA] \equiv [OB]$, $m(\angle AOB) < 90°$

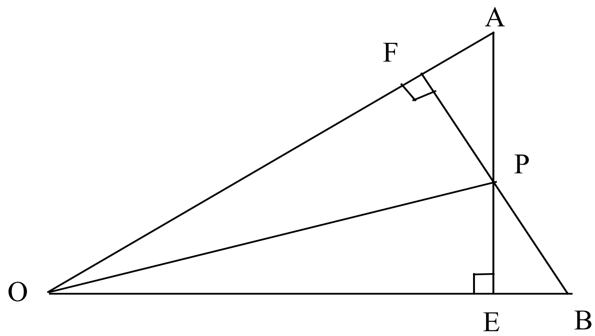
$AE \perp OB$, $E \in OB$

$BF \perp OA$, $F \in OA$

$AE \cap BF = \{P\}$

Concluzie: a) $[AE] \equiv [BF]$

b) $\angle AOP \equiv \angle BOP$



Demonstrație. a) Vom demonstra că triunghiurile AEO și BFO sunt congruente. Știm că [OA]≡[OB], m(∠AEO)=m(∠BFO)=90° și ∠AOB unghi comun (din ipoteză), de unde rezultă conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice I.U. că ΔAEO≡ΔBFO, de unde [AE]≡[BF].

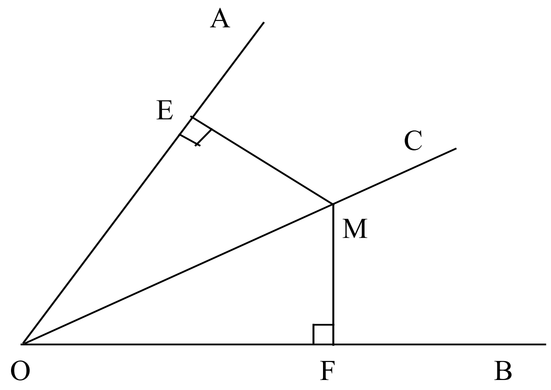
b) Din congruența ΔAEO≡ΔBFO rezultă că [OE]≡[OF]. Știm că OA=OB, OF=OE, rezultă că OA-OF=OB-OE, deci FA=EB, de unde [FA]≡[EB].

Avem: m(∠PFA)=m(∠PEB)=90° (din ipoteză), [FA]≡[EB] și ∠FPA≡∠EPB (unghiuri opuse la vârf), de unde rezuzltă conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice C.U. că ΔAFP≡ΔBEP. De aici rezultă că [PF]≡[PE]. Avem: [PF]≡[PE], m(∠PFO)=m(∠PEO)=90° (din ipoteză) și [OP] latură comună, de unde rezultă, conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice I.C. că ΔPFO≡ΔPEO. De aici rezultă că ∠FOP≡∠EOP sau ∠AOP≡∠BOP.

R3.2.4 Dacă un punct aparține bisectoarei unui unghi, atunci el este egal depărtat de laturile unghiului.

Reciproc: Dacă un punct din interiorul unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului, atunci punctul aparține bisectoarei unghiului.

Ipoteză: ∠AOC≡∠COB
M∈[OC
ME⊥OA, E∈OA
MF⊥OB, F∈OB
Concluzie: [ME]≡[MF]



Demonstrație. Vom demonstra că triunghiurile MEO și MFO sunt congruente: m(∠MEO)=m(∠MFO)=90°, ∠MOE≡∠MOF (din ipoteză), [OM] este latură comună, rezultă conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice I.U. că ΔMEO≡ΔMFO. De aici rezultă că [ME]≡[MF].

Reciproc:

Ipoteză: ∠AOB
M∈Int∠AOB
ME⊥OA, E∈[OA]
MF⊥OB, F∈[OB]
[ME]≡[MF]

Concluzie: ∠MOA≡∠MOB

Demonstrație. Vom demonstra că triunghiurile MEO și MFO sunt congruente: m(∠MEO)=m(∠MFO)=90°, [ME]≡[MF] (din ipoteză), [OM] este latură comună, rezultă conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice I.C. că ΔMEO≡ΔMFO. De aici rezultă că ∠MOE≡∠MOF sau ∠MOA≡∠MOB.

Observație. Cele două teoreme de mai sus pot fi formulate într-o singură teoremă care se numește proprietatea bisectoarei unui unghi: Un punct aparține bisectoarei unui unghi dacă și numai dacă este egal depărtat de laturile unghiului.

Remarcă. Se numește loc geometric o mulțime de puncte care sunt caracterizate printr-o aceeași proprietate. Deci, bisectoarea unui unghi este locul geometric al punctelor din interiorul unghiului egal depărtate de laturile unghiului.

Pentru ca figura presupusă să fie loc geometric, trebuie satisfăcute următoarele două propoziții:

a) orice punct al figurii să aibă proprietatea enunțată

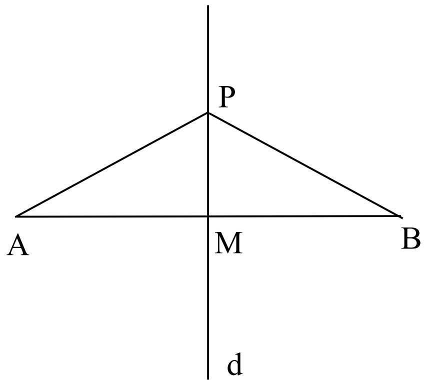
b) orice punct care are proprietatea enunțată să aparțină figurii.

R3.2.5 Dacă un punct aparține mediatoarei unui segment, atunci el este egal depărtat de extremitățile segmentului.

Reciproc: Dacă un punct este egal depărtat de extremitățile unui segment, atunci punctul aparține mediatoarei segmentului.

Ipoteză: [AB]
d⊥AB

$d \cap AB = \{M\}$
$[MA] \equiv [MB]$
$P \in d$
Concluzie: $[PA] \equiv [PB]$



Demonstrație. Vom demonstra că triunghiurile PMA şi PMB sunt congruente: $m(\angle PMA)=m(\angle PMB)=90°$, $[MA]\equiv[MB]$ (din ipoteză) și $[PM]$ latură comună, rezultă că $\Delta PMA\equiv\Delta PMB$, conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice C.C. De aici rezultă că $[PA]\equiv[PB]$.

Reciproc:

Ipoteza: $[AB]$
$[PA]\equiv[PB]$
Concluzie: P aparține mediatoarei segmentului $[AB]$.

Demonstrație. Construim perpendiculara din P pe AB, care intersectează AB în M. Vom demonstra că triunghiurile PMA şi PMB sunt congruente: $m(\angle PMA)=m(\angle PMB)=90°$, $[PA]\equiv[PB]$ (din ipoteză) și $[PM]$ latură comună, rezultă că $\Delta PMA\equiv\Delta PMB$, conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice I.C. De aici rezultă că $[AM]\equiv[MB]$, dar $PM\perp AB$, rezultă că PM este mediatoarea segmentului $[AB]$.

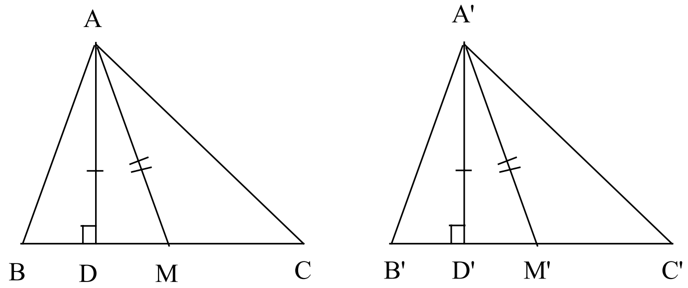
Observație. Cele două enunțuri de mai sus pot fi formulate într-o singură teoremă care se numeşte proprietatea mediatoarei unui segment: Un punct aparţine mediatoarei unui segment dacă şi numai dacă este egal depărtat de extremitățile segmentului.

Remarcă. Mediatoarea unui segment este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de extremitățile segmentului.

R3.2.6 Fie triunghiurile ABC şi A'B'C' în care construim $AD\perp BC$, $D\in BC$, $A'D'\perp B'C'$, $D'\in B'C'$ şi medianele $[AM]$ şi $[A'M']$. Dacă $[BC]\equiv[B'C']$, $[AD]\equiv[A'D']$, $[AM]\equiv[A'M']$, demonstrați că $\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$.

Ipoteză: ΔABC, $\Delta A'B'C'$
$AD\perp BC$, $D\in BC$
$A'D'\perp B'C'$, $D'\in B'C'$
$M\in[BC]$, $[MB]\equiv[MC]$

M'∈[B'C'], [M'B']≡[M'C']
[BC]≡[B'C']
[AD]≡[A'D']
[AM]≡[A'M']



Demonstrație. Dacă [BC]≡[B'C'] şi M, M' sunt mijloacele segmentelor [BC], respectiv [B'C'] rezultă că [BM]≡[MC]≡[B'M']≡[M'C']. Putem demonstra că triunghiurile ADM şi A'D'M' sunt congruente, deoarece: m(∠ADM)=m(∠A'D'M')=90°, [AD]≡[A'D'] şi [AM]≡[A'M'] (din ipoteză), rezultă, conform cazului de congruență I.C. că ΔADM≡ΔA'D'M'. De aici rezultă că: [DM]≡[D'M']. Dar [BM]≡[B'M'], de unde BM-DM=B'M'-D'M', deci BD=B'D', atunci [BD]≡[B'D'].

Putem demonstra că triunghiurile ADB şi A'D'B' sunt congruente, deoarece: m(∠ADB)=m(∠A'D'B')=90°, [AD]≡[A'D'] (din ipoteză) și [BD]≡[B'D'], rezultă conform cazului de congruență C.C. că ΔADB≡ΔA'D'B'. De aici rezultă că [AB]≡[A'B'] şi ∠ABC≡∠A'B'C'.

Acum putem demonstra că triunghiurile ABC şi A'B'C' sunt congruente, deoarece: [AB]≡[A'B'], ∠ABC≡∠A'B'C' şi [BC]≡[B'C'] (din ipoteză), rezultă conform cazului de congruență LUL că ΔABC≡ΔA'B'C'.

3.3 Paralelism

3.3.1 Drepte paralele

Reamintim următoarele definiții şi teoreme ce se vor folosi în acest paragraf:

- Două drepte distincte care au intersecția egală cu mulțimea vidă se numesc drepte paralele.
- Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele.
- Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri alterne externe congruente, atunci dreptele sunt paralele.
- Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri corespondente congruente, atunci dreptele sunt paralele.
- Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.

• Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri externe de aceeaşi parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.

• Axioma paralelelor (axioma lui Euclid). Printr-un punct exterior unei drepte date se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă.

Observație. Axioma lui Euclid ne asigură atât de existența unei paralele dusă printr-un punct exterior la dreaptă, cât şi de unicitatea acestei paralele.

Euclid (Eukleides) a fost matematician grec (sec. 3 î.H.). El a întemeiat o şcoală în Alexandria (Egipt). Este autorul primei expuneri sistematice a cunoştințelor de geometrie intitulată "Elemente", care a constituit cartea de căpătâi a geometriei timp de 2000 de ani.

• Consecințele axiomei paralelelor:

1) Două drepte paralele cu o a treia sunt paralele între ele.

2) Dacă două drepte sunt paralele, atunci orice dreaptă care se intersectează cu una dintre ele se va intersecta şi cu cealaltă.

• Dacă două drepte paralele sunt intersectate de o secantă, atunci ele formează unghiuri alterne interne congruente două câte două, unghiuri alterne externe congruente două câte două, unghiuri corespondente congruente două câte două, unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei suplementare şi unghiuri externe de aceeaşi parte a secantei suplementare.

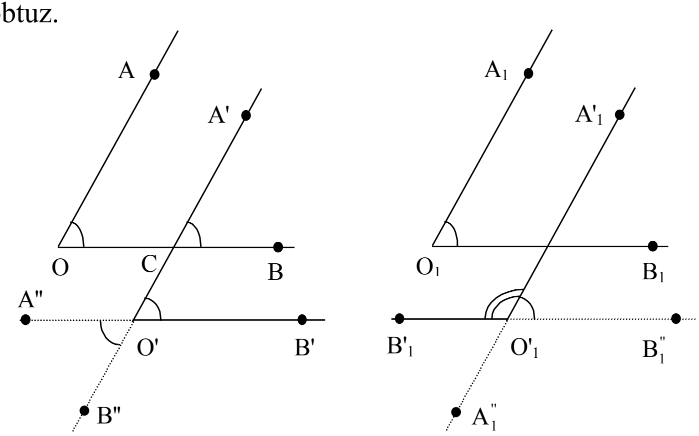
Remarcă. Teoremele de mai sus pot fi enunțate şi în felul următor:

Două drepte tăiate de o secantă sunt paralele dacă şi numai dacă unghiurile:

a) alterne interne sunt congruente două câte două;
b) alterne externe sunt congruente două câte două;
c) corespondente sunt congruente două câte două;
d) interne de aceeaşi parte a secantei sunt suplementare;
e) externe de aceeaşi parte a secantei sunt suplementare.

Unghiuri cu laturile respectiv paralele

Teoremă. Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente dacă sunt ambele ascuțite sau ambele obtuze şi sunt suplementare dacă unul este ascuțit, iar celălalt este obtuz.



Demonstrație. În primul caz, când ambele unghiuri sunt ascuțite, de exemplu: fie $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ două unghiuri astfel încât $OA \| O'A'$ şi $OB \| O'B'$. Notând $OB \cap O'A' = \{C\}$, din $OA \| O'A'$ intersectate de secanta OB rezultă $\angle AOB \equiv \angle A'CB$ (unghiuri corespondente), apoi din $OB \| O'B'$ intersectate de secanta O'A' rezultă $\angle A'CB \equiv \angle A'O'B'$ (unghiuri corespondente), deci $\angle AOB \equiv \angle A'O'B'$.

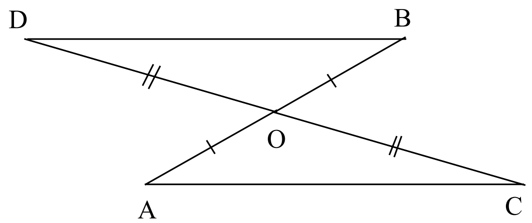
Teorema este adevărată şi pentru $\angle A''O'B''$, care este opus la vârf un unghiul $\angle A'O'B'$, adică avem $\angle AOB \equiv \angle A''O'B''$.

În al doilea caz, când un unghi este ascuțit şi celălalt obtuz, fie $\angle A_1O_1B_1$ şi $\angle A_1^{'}O_1^{'}B_1^{'}$ două unghiuri astfel încât $O_1A_1 \| O_1^{'}A_1^{'}$, $O_1B_1 \| O_1^{'}B_1^{'}$, $m(\angle A_1O_1B_1) < 90°$, $m(\angle A_1^{'}O_1^{'}B_1^{'}) > 90°$. Fie $[O_1^{'}B_1^{''}$ semidreapta opusă semidreptei $[O_1^{'}B_1^{'}$; rezultă că unghiurile $\angle A_1O_1B_1 \equiv \angle A_1^{'}O_1^{'}B_1^{''}$, fiind unghiuri cu laturile respectiv paralele ambele ascuțite, dar $\angle A_1^{'}O_1^{'}B_1^{''}$ şi $\angle A_1^{'}O_1^{'}B_1^{'}$ sunt unghiuri suplementare, atunci şi $\angle A_1O_1B_1$ şi $\angle A_1^{'}O_1^{'}B_1^{'}$ sunt suplementare.

Teorema este adevărată şi pentru $\angle A_1^{''}O_1^{'}B_1^{''}$, care este opus la vârf cu unghiul $\angle A_1^{'}O_1^{'}B_1^{'}$, adică avem $m(\angle A_1O_1B_1) + m(\angle A_1^{''}O_1^{'}B_1^{''}) = 180°$.

Model 1. Segmentel [AB] şi [CD] au acelaşi mijloc O. Să se demonstreze că AC||BC.

Ipoteză: $AB \cap CD = \{O\}$
$[OA] \equiv [OB]$
$[OC] \equiv [OD]$
Concluzie: $AC \| BD$

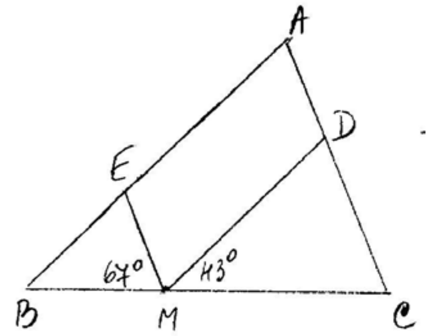


Demonstrație. Putem demonstra că triunghiurile AOC şi BOD sunt congruente: $[OA] \equiv [OB]$, $[OC] \equiv [OD]$ (din ipoteză), $\angle AOC \equiv \angle BOD$ (opuse la vârf), atunci $\Delta AOC \equiv \Delta BOD$ (cazul LUL), de unde rezultă că $\angle OAC \equiv \angle OBD$; deci, dreptele AC şi BD intersectate de secanta AB formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, rezultă că $AC \| BD$.

Model 2. În triunghiul ABC, $D \in (AC)$, $E \in (AB)$, $M \in (BC)$, astfel încât $DM \| AB$, $EM \| AC$. Dacă $m(\angle EMB) = 67°$ şi $m(\angle DMC) = 43°$, să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Ipoteză: ΔABC, $D \in (AC)$, $E \in (AB)$, $M \in (BC)$
$DM \| AB$, $EM \| AC$
$m(\angle EMB) = 67°$
$m(\angle DMC) = 43°$
Concluzie: $m(\angle BAC)$

m(∠ABC)
m(∠ACB)



Demonstrație. Dreptele paralele DM şi AB intersectate de secanta BC formează o pereche de unghiuri corespondente congruente, deci m(∠DMC)=m(∠ABC)=43°; dreptele paralele EM şi AC intersectate de secanta BC formează o pereche de unghiuri corespondente congruente, deci m(∠EMB)=m(∠ACB)=67°. Putem afla m(∠EMD):

m(∠EMD)=180°-(m(∠DMC)+m(∠EMB)),

m(∠EMD)=180°-(67°+43°)=180°-110°=70°.

Dreptele paralele AB şi DM tăiate de secanta EM formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, deci m(∠BEM)=m(∠EMD)=70°; dreptele paralele EM şi AC tăiate de secanta AB formează o pereche de unghiuri corespondente congruente, deci m(∠BEM)=m(∠BAC)=70°.

Măsurile unghiurilor triunghiului ABC sunt: m(∠BAC)=70°, m(∠ABC)=43° şi m(∠ACB)=67°.

Probleme rezolvate

R3.3.1 Să se demonstreze că paralele duse prin vârfurile unui triunghi la laturile opuse determină un triunghi în care vârfurile triunghiului dat sunt mijloace de laturi.

Ipoteză: ΔABC

$A \in PN$, $PN \parallel BC$

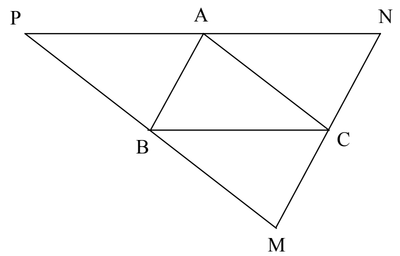
$B \in PM$, $PM \parallel AC$

$C \in MN$, $MN \parallel AB$

Concluzie: $[AP] \equiv [AN]$

$[BP] \equiv [BM]$

$[CM] \equiv [CN]$



Demonstrație. Dreptele paralele PN şi BC intersectate de secanta AC formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, $\angle NAC \equiv \angle ACB$; dreptele paralele AB şi MN intersectate de secanta AC formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, $\angle ACN \equiv \angle BAC$.

Avem: $\angle NAC \equiv \angle ACB$, $\angle ACN \equiv \angle BAC$, [AC] latură comună, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta CNA$ (cazul ULU), de unde rezultă că:

$$[AN] \equiv [BC] \tag{1}$$

şi

$$[CN] \equiv [AB] \tag{2}$$

Dreptele paralele PN şi BC intersectate de secanta AB formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, $\angle PAB \equiv \angle ABC$; dreptele paralele PM şi AC intersectate de secanta AB formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, $\angle PBA \equiv \angle BAC$.

Avem: $\angle PAB \equiv \angle ABC$, $\angle PBA \equiv \angle BAC$, [AB] latură comună, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta BAP$ (cazul ULU), de unde

$$[AP] \equiv [BC] \tag{3}$$

şi

$$[BP] \equiv [AC] \tag{4}$$

Dreptele paralele AB şi MN intersectate de secanta BC formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, $\angle BCM \equiv \angle ABC$; dreptele paralele PM şi AC intersectate de secanta BC formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, $\angle CBM \equiv \angle ACB$.

Avem: $\angle BCM \equiv \angle ABC$, $\angle CBM \equiv \angle ACB$, [BC] latură comună, atunci $\Delta MCB \equiv \Delta ABC$ (cazul ULU), de unde

$$[CM] \equiv [AB] \tag{5}$$

şi

$$[BM] \equiv [AC] \tag{6}$$

Din relaţiile (1) şi (3) rezultă că $[AN] \equiv [AP]$.

Din relaţiile (2) şi (5) rezultă că $[CN] \equiv [CM]$.

Din relaţiile (4) şi (6) rezultă că $[BP] \equiv [BM]$.

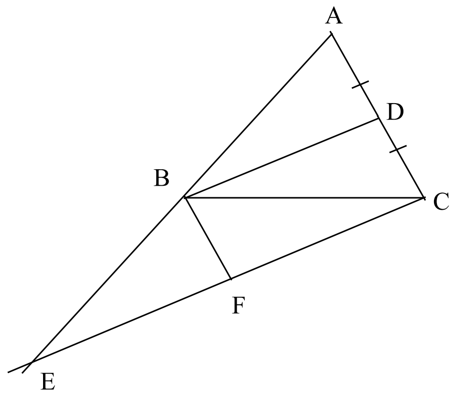
R3.3.2 În triunghiul ABC, [BD] este mediană, $D \in (AC)$. Construim $CE \| BD$, unde $E \in AB$. Demonstraţi că B este mijlocul segmentului [AE].

Ipoteză: ΔABC

$D \in (AC)$, $[DA] \equiv [DC]$

$CE \| BC$, $E \in AB$

Concluzie: $[AB] \equiv [BE]$



Demonstraţie. Pentru demonstrarea acestei probleme facem următoarea construcţie auxiliară: $BF \| AC$, $F \in (CE)$.

Vom demonstra că triunghiurile BCD şi CBF sunt congruente: $\angle DBC \equiv \angle BCF$ (unghiuri alterne interne, $BD \| CE$ şi BC secantă), $\angle DCB \equiv \angle CBF$ (unghiuri alterne interne, $BF \| AC$ şi BC secantă), [BC] latură comună, atunci $\Delta BCD \equiv \Delta CBF$ (cazul ULU), de unde rezultă că $[CD] \equiv [BF]$, dar $[CD] \equiv [AD]$ (din ipoteză), deci $[AD] \equiv [BF]$.

Vom demonstra că triunghiurile FBE şi DAB sunt congruente: $[AD] \equiv [BF]$, $\angle EBF \equiv \angle BAD$ (unghiuri corespondente, $BF \| AC$ şi AE secantă), $\angle EFB \equiv \angle ECA$ (unghiuri corespondente, $BF \| AC$ şi EC secantă), dar $\angle ECA \equiv \angle BDA$ (unghiuri corespondente, $BD \| EC$ şi AC secantă), deci $\angle EFB \equiv \angle BDA$; atunci $\Delta FBE \equiv \Delta DAB$ (cazul ULU), de unde rezultă că $[BE] \equiv [AB]$.

R3.3.3 Fie M, N, P mijloacele laturilor [AB], [BC], [AC] ale unui triunghi ABC. Fie D şi E astfel încât $[MD] \equiv [MC]$, $M \in (DC)$, $[PE] \equiv [PN]$, $P \in (NE)$. Să se demonstreze că punctele A, D, E sunt coliniare.

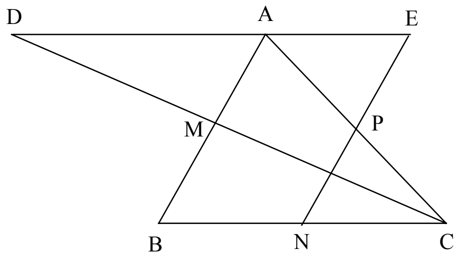
Ipoteză: ΔABC

$M \in (AB)$, $[MA] \equiv [MB]$

$N \in (BC)$, $[NB] \equiv [NC]$

P∈AC), [PA]≡[PC]
M∈(DC), [MC]≡[MD]
P∈(EN), [PN]≡[PE]

Concluzie: A, D, E coliniare



Demonstrație. Vom demonstra că triunghiurile MAD şi MBC sunt congruente: [MA]≡[MB], [MD]≡[MC] (din ipoteză), ∠AMD≡∠BMC (unghiuri opuse la vârf), atunci ΔMAD≡ΔMBC (cazul LUL), de unde rezultă că ∠MAB≡∠MBC, deci dreptele AD şi BC intersectate de secanta AB formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, rezultă că AD||BC.

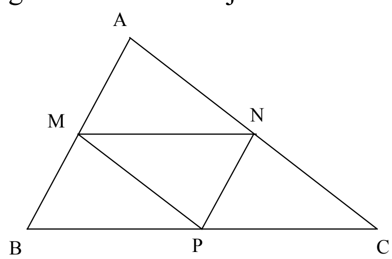
Vom demonstra că triunghiurile APE şi CPN sunt congruente: [AP]≡[PC], [PE]≡[PN] (din ipoteză), ∠APE≡∠NPC (unghiuri opuse la vârf), atunci ΔAPE≡ΔCPN (cazul LUL), de unde rezultă că ∠EAP≡∠PCN, deci dreptele AE şi BC intersectate de secanta AC formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, rezultă că AE||BC.

Avem AD||BC, AE||BC şi conform axiomei paralelelor, dreptele AD şi AE coincid, deci A, D, E sunt coliniare.

3.3.2. Linia mjlocie într-un triunghi

Într-un triunghi, segmentul determinat de mijloacele a două laturi se numeşte linie mijlocie.

Remarcă. Un triunghi are trei linii mijlocii.

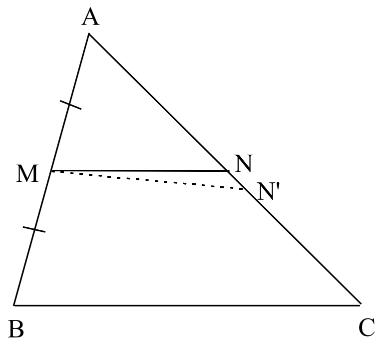


Fie M, N, P mijloacele laturilor [AB], [AC], respectiv [BC] ale triunghiului ABC. Segmentele [MN], [NP], [PM] sunt cele trei linii mijlocii ale triunghiului ABC.

Teoremă. Segmentul care uneşte mijloacele a două laturi ale unui triunghi este paralel cu cea de a treia latură şi are lungimea egală cu jumătate din lungimea acestei laturi.

Conform acestei teoreme, avem MN||BC, $MN = \frac{BC}{2}$, NP||AB, $NP = \frac{AB}{2}$, MP||AC, $MP = \frac{AC}{2}$.

Reciproca. Dacă prin mijlocul M al laturii [AB] din triunghiul ABC, se duce MN||BC, N∈(AC), atunci N este mijlocul laturii (AC) şi $MN = \frac{BC}{2}$.



Demonstraţie. Demonstraţia se face prin metoda reducerii la absurd. Presupunem că N nu este mijlocul laturii [AC], atunci există un punct N', N'∈(AC), N'≠N, astfel încât [N'A]≡[N'C]. Conform definiţiei liniei mijlocii, rezultă că [MN'] este linie mijlocie, deci MN'||BC, dar MN||BC (din ipoteză) şi MN'≠MN; contradicţie cu axioma paralelelor.

Presupunerea făcută este falsă, rezultă că N este mijlocul lui [AC]; deci [MN] este linie mijlocie, atunci $MN = \frac{BC}{2}$.

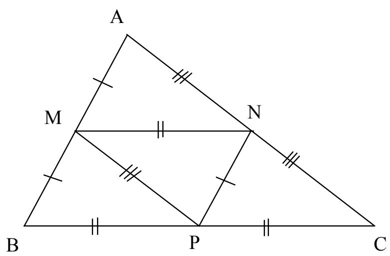
Model. Fie M, N, P mijloacele laturilor [AB], [AC] respectiv [BC] ale triunghiului ABC.

a) Arătaţi că unghiurile triunghiurilor AMN, MBP, NPC, PNM sunt congruente cu unghiurile triunghiului ABC.

b) Triunghiurile AMN, MBP, NPC, PNM sunt congruente. (Triunghiul PNM se numeşte triunghi median sau triunghi complementar triunghiului ABC, M, N, P fiind "picioarele" medianelor triunghiului ABC).

Ipoteză: ΔABC
M∈(AB), [MA]≡[MB]
N∈(AC), [NA]≡[NC]
P∈(BC), [PB]≡[PC]

Concluzie: a) ΔAMN, ΔMBP, ΔNPC, ΔPNM au unghiurile congruente cu unghiurile ΔABC
b) ΔAMN≡ΔMBP≡ΔNPC≡ΔPNM.



Demonstrație. a) Conform definiției liniei mijlocii, [MN], [NP] şi [MP] sunt liniile mijlocii ale triunghiului ABC, deci MN||BC, NP||AB şi MP||AC.

În triunghiul AMN avem: $\angle MAN \equiv \angle BAC$, $\angle AMN \equiv \angle ABC$ (unghiuri corespondente, MN||BC, AB secantă), $\angle ANM \equiv \angle ACB$ (unghiuri corespondente, MN||BC, AC secantă).

În triunghiul MBP, la fel, avem: $\angle MBP \equiv \angle ABC$, $\angle BMP \equiv \angle BAC$, $\angle BPM \equiv \angle ACB$ (unghiuri corespondente, MP||AC, AB secantă, respectiv BC).

În triunghiul NPC, la fel, avem: $\angle PCN \equiv \angle ACB$, $\angle PNC \equiv \angle BAC$, $\angle NPC \equiv \angle ABC$ (unghiuri corespondente, NP||AB, AC secantă, respectiv BC).

În triunghiul MPN avem: $\angle MPN \equiv \angle PNC$ (alterne interne, MP||AC, PN secantă), dar $\angle PNC \equiv \angle BAC$, atunci $\angle MPN \equiv \angle BAC$; $\angle MNP \equiv \angle NPC$ (alterne interne, MN||BC, PN secantă), dar $\angle NPC \equiv \angle ABC$, atunci $\angle MNP \equiv \angle ABC$; $\angle NMP \equiv \angle MPB$ (alterne interne, MN||BC, MP secantă), dar $\angle MPB \equiv \angle ACB$, atunci $\angle NMP \equiv \angle ACB$.

c) Segmentele [MN], [NP], [MP] sunt liniile mijlocii ale triunghiului ABC, rezultă că $MN = \frac{BC}{2} = BP = PC$, $NP = \frac{AB}{2} = AM = MB$, $MP = \frac{AC}{2} = AN = NC$.

Avem $\Delta AMN \equiv \Delta MBP \equiv \Delta NPC \equiv \Delta PNM$ (cazul LLL).

Probleme rezolvate

R3.3.4 În triunghiul ABC punctele D şi E sunt mijloacele laturilor [AB], respectiv [BC]. Dacă G este punctul de intersecție al dreptelor AE şi CD, demonstrați că $2\cdot DG=GC$ şi $2\cdot EG=GA$.

Ipoteză: ΔABC

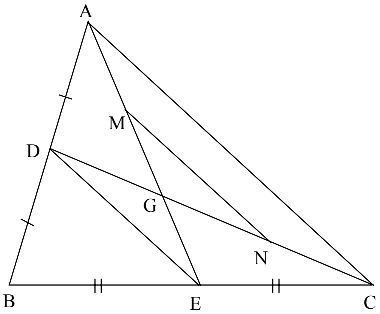
$E\in(BC)$, $[BE]\equiv[EC]$

$D\in(AB)$, $[DA]\equiv[DB]$

$AE\cap CD=\{G\}$

Concluzie: $2\cdot DG=GC$

$2\cdot EG=GA$



Demonstrație. Fie M și N mijloacele segmentelor [AG], respectiv [CG]. Segmentele [MN] și [DE] sunt linii mijlocii în triunghiurile GAC, respectiv ABC, de unde rezultă că MN||AC, $MN = \frac{AC}{2}$ și DE||AC, $DE = \frac{AC}{2}$, deci MN||DE, [MN]≡[DE].

Vom demonstra că triunghiurile GMN și GED sunt congruente: [MN]≡[DE], ∠GMN≡∠GED, ∠GNM≡∠GDE (alterne interne, MN||DE, ME secantă, respectiv ND), atunci ΔGMN≡ΔGED, de unde rezultă că [GM]≡[GE] și [GN]≡[GD], dar [GM]≡[AM] și [GN]≡[NC], deci GA=2·GM=2·EG și GC=2·GN=2·GD.

R3.3.5 Să se demonstreze că dreapta determinată de vârful A al unui triunghi ABC și mijlocul medianei din B intersectează latura [BC] într-un punct E, astfel încât $BE = \frac{1}{3}BC$.

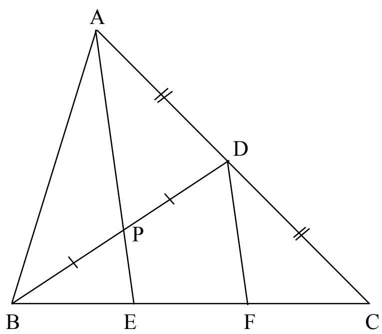
Ipoteză: ΔABC

D∈(AC), [DA]≡[DC]

P∈(BD), [PB]≡[PD]

AP∩BC={E}

Concluzie: $BE = \frac{1}{3}BC$



Demonstrație. Fie DF||AE, F∈(BC).

În ΔAEC aplicăm reciproca liniei mijlocii: D este mijlocul laturii [AC], DF||AE, F∈(EC), atunci F este mijlocul laturii [EC], deci [EF]≡[FC].

În ΔBDF aplicăm reciproca liniei mijlocii: P este mijlocul laturii [BD], PE||DF, $E\in(BF)$, atunci E este mijlocul laturii [BF], deci $[BE]\equiv[EF]$, dar $[EF]\equiv[FC]$, rezultă că $BE = EF = FC = \frac{1}{3}BC$.

R3.3.6 Două triunghiuri ABC şi ADE au mediana [AM] comună, $\{M\}=BC\cap DE$. Fie P, Q, R, S, respectiv mijloacele laturilor [AB], [AC], [AD], [AE]. Arătaţi că RQ||PS şi $[RQ]\equiv[PS]$.

Ipoteză: ΔABC, ΔADE

$\{M\}=BC\cap DE$

$[MB]\equiv[MC]$

$[MD]\equiv[ME]$

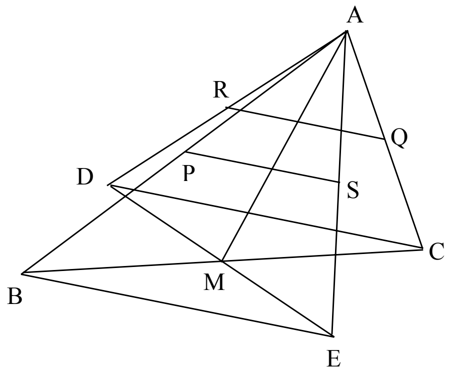
$P\in(AB)$, $[PA]\equiv[PB]$

$Q\in(AC)$, $[QA]\equiv[QC]$

$R\in(AD)$, $[RA]\equiv[RD]$

$S\in(AE)$, $[SA]\equiv[SE]$

Concluzie: RQ||PS, $[RQ]\equiv[PS]$



Demonstraţie. Din ipoteză avem $[MB]\equiv[MC]$ şi $[ME]\equiv[MD]$, iar $\angle BME\equiv\angle CMD$ (unghiuri opuse la vârf), atunci $\Delta BME\equiv\Delta CMD$, de unde rezultă că $[BE]\equiv[CD]$ şi $\angle MBE\equiv\angle MCD$, deci dreptele CD şi BE intersectate de secanta BC formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, rezultă că ele sunt paralele, CD||BE. Segmentele [RQ] şi [PS] sunt linii mijlocii în triunghiurile ADC, respectiv ABE, deci RQ||DC, $RQ = \frac{1}{2}DC$ şi PS||BE, $PS = \frac{1}{2}BE$, dar DC||BE şi $[DC]\equiv[BE]$, rezultă că RQ||PS şi $[RQ]\equiv[PS]$.

3.3.3. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

În rezolvarea problemelor din acest paragraf vom folosi următoarele rezultate, demonstrate la orele de geometrie:

- Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°.

  Consecinţe:

1) Toate unghiurile triunghiului echilateral au măsura de 60°.

2) În orice triunghi dreptunghic, unghiurile ascuțite sunt complementare. Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic isoscel au măsura de 45°.

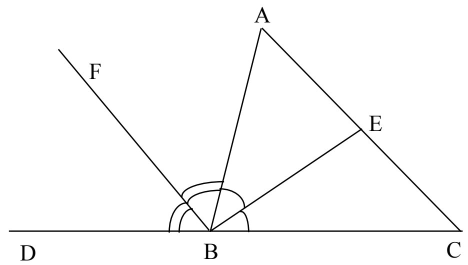
3) În orice triunghi poate exista cel mult un unghi drept sau obtuz.

• Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu suma măsurilor celor două unghiuri ale triunghiului, neadiacente lui.

Remarcă. • Bisectoarea unui unghi exterior al unui triunghi se numeşte bisectoare exterioară a triunghiului, corespunzătoare unghiului respectiv.

[BE este bisectoare interioară

[BF este bisectoare exterioară



• Bisectoarea interioară şi bisectoarea exterioară duse din acelaşi vârf al unui triunghi sunt perpendiculare.

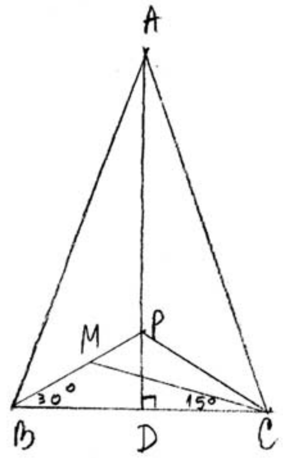
Demonstrație. Unghiurile $\angle ABC$ şi $\angle ABD$ sunt adiacente suplementare, deci $m(\angle ABC)+m(\angle ABD)=180°$. de unde avem $\frac{1}{2}m(\angle ABC)+\frac{1}{2}m(\angle ABD)=90°$, adică $m(\angle ABE)+m(\angle ABF)=90°$, deci $m(\angle EBF)=90°$, de unde rezultă că $BE\perp BF$.

Probleme rezolvate

R3.3.7 În interiorul unui triunghi isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$ şi $m(\angle BAC)<120°$, se consideră un punct M, astfel încât $m(\angle MBC)=30°$ şi $m(\angle MCB)=15°$. Notăm cu P intersecția dreptei BM cu înălțimea din A a triunghiului ABC. Să se afle măsurile unghiurilor $\angle PMC$ şi $\angle BPC$.

Ipoteză: ΔABC: $[AB]\equiv[AC]$
$m(\angle BAC)<120°$
$M\in Int\Delta ABC$
$m(\angle MBC)=30°$
$m(\angle MCB)=15°$
$AD\perp BC$, $D\in(BC)$
$AD\cap BM=\{P\}$

Concluzie: $m(\angle PMC)$, $m(\angle BPC)$



Demonstrație. Unghiul $\angle PMC$ este unghi exterior triunghiului MBC, de unde rezultă că $m(\angle PMC)=m(\angle MBC)+m(\angle MCB)=30°+15°=45°$.

Vom demonstra că triunghiurile ADB și ADC sunt congruente: $m(\angle ADB)=m(\angle ADC)=90°$, $[AB]\equiv[AC]$ (din ipoteză), [AD] este latură comună, atunci $\Delta ADB\equiv\Delta ADC$ (cazul I.C.), de unde rezultă că $[DB]\equiv[DC]$.

Acum putem demonstra congruența triunghiurilor PDB și PDC: $m(\angle PDB)=m(\angle PDC)=90°$ (din ipoteză), $[DB]\equiv[DC]$, [PD] latură comună, atunci $\Delta PDB\equiv\Delta PDC$ (C.C.), de unde rezultă că $\angle PBC\equiv\angle PCB$, dar $m(\angle PBC)=30°$ (din ipoteză), atunci

$$m(\angle BPC)=180°-2m(\angle PBC)=180°-2\cdot 30°=120°.$$

R3.3.8 În triunghiul ABC avem $m(\angle B)=3m(\angle A)$. Mediatoarea laturii [BC] intersectează dreapta AC în punctul E, astfel încât $\angle BAE\equiv\angle BEA$. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

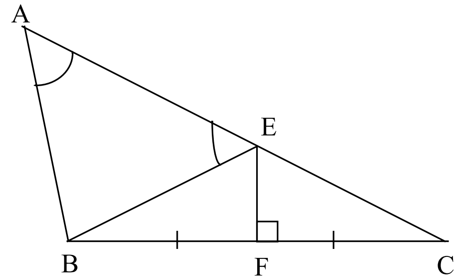
Ipoteză: ΔABC: $m(\angle B)=3m(\angle A)$

$F\in(BC)$, $[FB]\equiv[FC]$

$FE\perp BC$, $E\in(AC)$

$\angle BAE\equiv\angle BEA$

Concluzie: $m(\angle BAC)$, $m(\angle ABC)$, $m(\angle ACB)$



Demonstrație. Notăm $m(\angle BAC)=x$, atunci $m(\angle ABC)=3x$ și $m(\angle BEA)=x$. Dacă suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°, atunci $m(\angle ACB)=180°-(m(\angle BAC)+m(\angle ABC))$, deci $m(\angle ACB)=180°-4x$ și $m(\angle ABE)=180°-$

$(m(\angle BAE)+m(\angle BEA))$, deci $m(\angle ABE)=180°-2x$. Atunci, $m(\angle EBC)=m(\angle ABC)-m(\angle ABE)$, deci $m(\angle EBC)=3x-(180°-2x)$, efectuând calculele se obține

$$m(\angle EBC)=5x-180°. \qquad (1)$$

Vom demonstra că triunghiurile EFB şi EFC sunt congruente: $m(\angle EFB)=m(\angle EFC)=90°$, $[FB]\equiv[FC]$ (din ipoteză), $[EF]$ latură comună, atunci $\Delta EFB\equiv\Delta EFC$ (cazul C.C.), de unde rezultă că $\angle EBF\equiv\angle ECB$, dar $m(\angle ECB)=m(\angle ACB)=180°-4x$, atunci

$$m(\angle EBF)=m(\angle EBC)=180°-4x \qquad (2)$$

Din relațiile (1) şi (2) deducem că $5x-180°=180°-4x$ sau $9x=360°$, de unde $x=40°$.

Vom avea: $m(\angle ABC)=3\cdot 40°=120°$, $m(\angle BAC)=40°$, $m(\angle C)=20°$.

R3.3.9 Unghiurile A, B, C ale unui triunghi ABC au măsurile invers proporționale cu numerele 0,(3); $\frac{1}{7}$; 0,125. Fie $M\in(AB)$ şi $N\in(AC)$, astfel încât $m(\angle ACM)=40°$ şi $m(\angle ABN)=20°$. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ABC şi măsura unghiului $\angle ANM$.

Ipoteză: $\{m(\angle A),m(\angle B),m(\angle C)\}$, i.p. $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{8}\right\}$

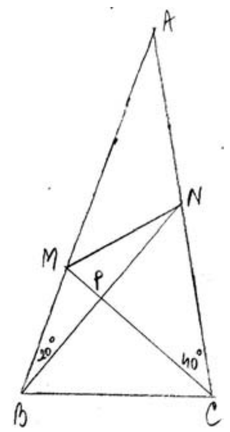
$M\in(AB)$, $N\in(AC)$

$m(\angle ACM)=40°$

$m(\angle ABN)=20°$

Concluzie: $m(\angle A)$, $m(\angle B)$, $m(\angle C)$

$m(\angle ANM)$



Demonstrație. Între mulțimile $\{m(\angle A),m(\angle B),m(\angle C)\}$ şi $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{8}\right\}$ se stabileşte o proporționalitate inversă, atunci între $\{m(\angle A),m(\angle B),m(\angle C)\}$ şi $\{3,7,8\}$ se stabileşte o proporționalitate directă, deci se poate scrie:

$\frac{\text{m}(\angle \text{A})}{3}=\frac{\text{m}(\angle \text{B})}{7}=\frac{\text{m}(\angle \text{C})}{8}$, de unde aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale, avem mai departe:

$$\frac{\text{m}(\angle \text{A})}{3}=\frac{\text{m}(\angle \text{B})}{7}=\frac{\text{m}(\angle \text{C})}{8}=\frac{m(\angle A)+m(\angle B)+m(\angle C)}{3+7+8}=\frac{180^\circ}{18}=10^\circ$$

Din $\frac{m(\angle A)}{3}=10^\circ$, rezultă că m(∠A)=30°; din $\frac{m(\angle B)}{7}=10^\circ$, rezultă că m(∠B)=70°; din $\frac{m(\angle C)}{8}=10^\circ$, rezultă că m(∠C)=80°.

Ştim că m(∠ACM)=40°, atunci m(∠MCB)=m(∠ACB)-m(∠ACM), efectuând obţinem m(∠MCB)=40°.

Ştim că m(∠ABN)=20°, atunci m(∠NBC)=m(∠ABC)-m(∠ABN), efectuând obţinem m(∠NBC)=50°.

Fie BN∩CM={P}. În triunghiul PBC:

m(∠PBC)+m(∠PCB)=50°+40°=90°,

deci m(∠BPC)=90°, de unde rezultă că CP⊥BN. În triunghiul CPN, m(∠PCN)=40° şi m(∠CPN)=90°, rezultă că

m(∠CNP)=90°-m(∠PCN)=50°.

Vom demonstra că triunghiurile CPB şi CPN sunt congruente: m(∠CPB)=m(∠CPN)=90°, [CP] latură comună şi m(∠CBP)=m(∠CNP)=50°, atunci ΔCPB≡ΔCPN (cazul C.U.), de unde rezultă că [PB]≡[PN]. Acum putem demonstra că triunghiurile MPB şi MPN sunt congruente: m(∠MPB)=m(∠MPN)=90°, [MP] latură comună şi [PB]≡[PN], atunci ΔMPB≡ΔMPN (cazul C.C.), de unde rezultă că ∠MNP≡∠MBP, dar m(∠MBP)=20°, de unde rezultă că ∠MNP≡∠MBP, dar m(∠MBP)=20°, atunci m(∠MNP)=20°. Acum putem afla m(∠ANM): m(∠ANM)=180°-m(∠MNP)+m(∠PNC)), înlocuind obţinem m(∠ANM)=180°-(20°+50°), deci m(∠ANM)=110°.

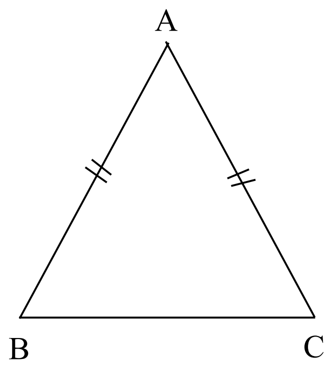
3.4. Triunghiul isoscel şi triunghiul echilateral

În rezolvarea problemelor din acest paragraf vom folosi următoarele definiţii şi teoreme ce sunt demonstrate în manuale:

Definiţie. Triunghiul care are două laturi congruente se numeşte triunghi isoscel.

Notaţie. ΔABC, [AB]≡[AC]

[BC] se numeşte baza triunghiului isoscel.



Teoremă. Unghiurile opuse laturilor congruente ale unui triunghi isoscel sunt congruente.

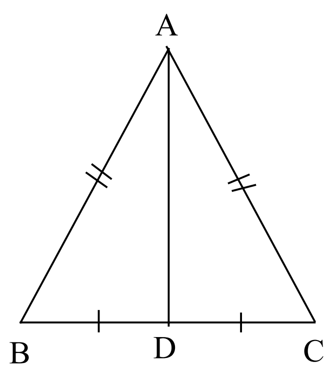
Reciproc. Dacă un triunghi are două unghiuri congruente, atunci el este triunghi isoscel (laturile opuse unghiurilor congruente sunt congruente).

Remarcă. Un triunghi este isoscel dacă şi numai dacă are două unghiuri congruente.

Teoremă. Dacă un triunghi este isocel şi se consideră bisectoarea unghiului opus bazei, atunci ea este şi mediana corespunzătoare bazei şi înălțimea corespunzătoare bazei şi este inclusă în mediatoarea bazei.

Afirmațiile de mai sus rămân valabile şi pentru mediana corespunzătoare bazei şi pentru înălțimea corespunzătoare bazei.

Teoremă. Dacă un triunghi este isoscel şi se consideră mediana corespunzătoare bazei, atunci ea este şi bisectoarea unghiului opus bazei şi înălțimea corespunzătoare bazei şi este inclusă în mediatoarea bazei.

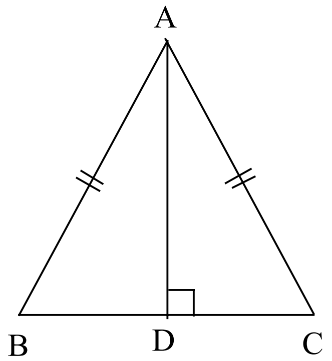


Demonstrație. Fie ΔABC isoscel, $[AB]\equiv[AC]$ şi $[AD]$ mediana corespunzătoare bazei $[BC]$; $D\in(BC)$ şi $[DB]\equiv[DC]$. Avem conform cazului de congruență a triunghiurilor LLL că $\Delta ADB\equiv\Delta ADC$, de unde rezultă că $\angle BAD\equiv\angle CAD$, $\angle ADB\equiv\angle ADC$, dar $m(\angle ADB)+m(\angle ADC)=180°$, deci $m(\angle ADB)=m(\angle ADC)=90°$, $AD\perp BC$; $AD\perp BC$ şi $[DB]\equiv[DC]$, $D\in(BC)$, rezultă că dreapta AD este mediatoarea segmentului $[BC]$.

Teoremă. Dacă un triunghi este isoscel şi se consideră înălțimea corespunzătoare bazei, atunci ea este şi bisectoarea unghiului opus bazei şi mediana corespunzătoare bazei şi este inclusă în mediatoarea bazei.

Demonstrație. Fie ΔABC isoscel, $[AB]\equiv[AC]$ şi $[AD]$ înălțimea corespunzătoare bazei, $AD\perp BC$, $D\in(BC)$.

Avem conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice I.C., că $\Delta ADB \equiv \Delta ADC$, de unde rezultă că $\angle BAD \equiv \angle CAD$ şi $[BD] \equiv [CD]$; $AD \perp BC$ şi $[DB] \equiv [DC]$, $D \in (BC)$, rezultă că dreapta AD este mediatoarea segmentului [BC].



Observație. În triunghiul isoscel ABC, $[AB] \equiv [AC]$, dreapta AD, care conține atât bisectoarea unghiului $\angle BAC$, cât şi înălțimea, mediana şi mediatoarea corespunzătoare laturii [BC], este axă de simetrie a triunghiului.

Vom demonstra şi alte proprietăți ale triunghiului isoscel.

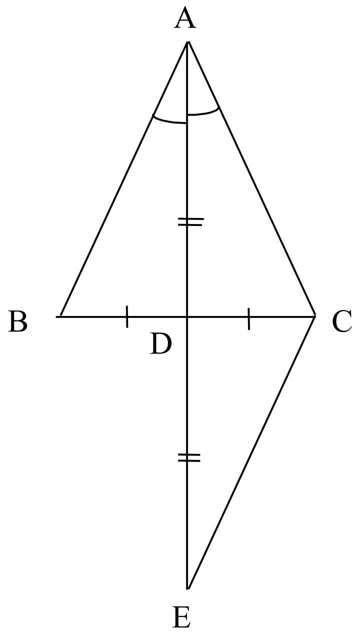
Teoremă. Dacă într-un triunghi bisectoarea unui unghi este şi mediana corespunzătoare laturii opuse unghiului, atunci triunghiul este isoscel.

Ipoteză: ΔABC

$\angle BAD \equiv \angle CAD$, $D \in (BC)$

$[DB] \equiv [DC]$

Concluzie: $[AB] \equiv [AC]$



Demonstrație. Demonstrarea acestei teoreme necesită o construcție auxiliară: fie $E \in AD$, $D \in (AE)$, $[AD] \equiv [DE]$.

Vom demonstra că triunghiurile ADB şi EDC sunt congruente: $[AD] \equiv [DE]$ (prin construcție), $[BD] \equiv [CD]$ (din ipoteză) şi $\angle ADB \equiv \angle EDC$ (unghiuri opuse la vârf); rezultă conform cazului de congruență a triunghiurilor LUL că $\Delta ADB \equiv \Delta EDC$. De aici, rezultă că $[AB] \equiv [CE]$ şi $\angle BAD \equiv \angle CED$, dar $\angle BAD \equiv \angle CAD$ (din ipoteză), atunci $\angle CED \equiv \angle CAD$, deci ΔCAE este un triunghi isoscel, $[CA] \equiv [CE]$. Avem: $[AB] \equiv [CE]$ şi $[AC] \equiv [CE]$, de unde rezultă că $[AB] \equiv [AC]$.

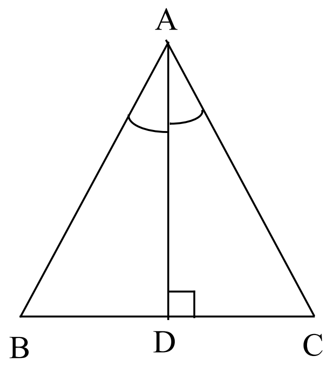
Teoremă. Dacă într-un triunghi bisectoarea unui unghi este şi înălțime, atunci triunghiul este isoscel.

Ipoteză: ΔABC

$\angle BAD \equiv \angle CAD$, $D \in (BC)$

$AD \perp BC$

Concluzie: $[AB] \equiv [AC]$



Demonstrație. Se poate demonstra că triunghiurile ADB şi ADC sunt congruente: $m(\angle ADB)=m(\angle ADC)=90°$ (din ipoteză), $\angle BAD \equiv \angle CAD$ (din ipoteză), [AD] latură comună; rezultă conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice C.U. că $\Delta ADB \equiv \Delta ADC$, de unde $[AB] \equiv [AC]$.

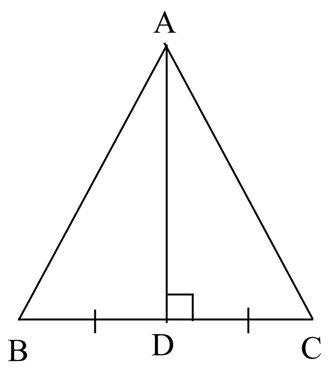
Teoremă. Dacă într-un triunghi mediana corespunzătoare unei laturi este şi înălțime, atunci triunghiul este isoscel.

Ipoteză: ΔABC

$D \in (BC)$, $[DB] \equiv [DC]$

$AD \perp BC$

Concluzie: $[AB] \equiv [AC]$

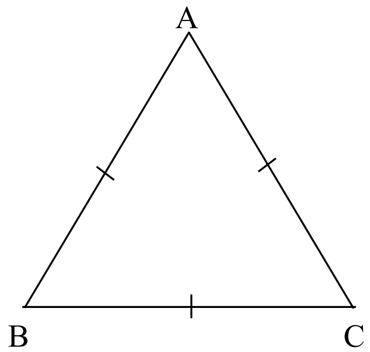


Demonstrație. Vom demonstra că triunghiurile ADB şi ADC sunt congruente: $m(\angle ADB)=m(\angle ADC)=90°$ (din ipoteză), $[DB] \equiv [DC]$ (din ipoteză), [AD] latură comună; rezultă conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice C.C. că $\Delta ADB \equiv \Delta ADC$, de unde $[AB] \equiv [AC]$.

În rezolvarea problemelor din acest paragraf sunt utile definiția triunghiului echilateral şi următoarele proprietăți ale sale, considerate cunoscute:

Definiție. Triunghiul care are toate laturile congruente se numeşte triunghi echilateral.

Notație. [AB]≡[BC]≡[AC]



Teoremă. Unghiurile unui triunghi echilateral sunt congruente, având măsurile egale cu 60°.

Reciproc. Dacă într-un triunghi unghiurile sunt congruente, atunci triunghiul este echilateral.

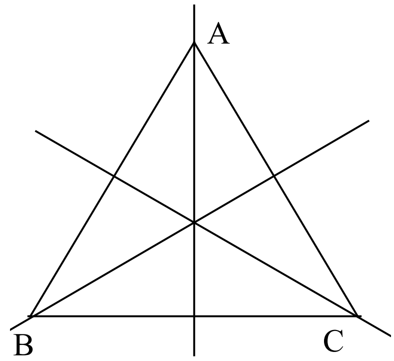
Observație. Reciproca de mai sus se poate enunța şi în felul următor: dacă un triunghi are două unghiuri cu măsurile de 60°, atunci el este echilateral. (Este evident că şi al treilea unghi al triunghiului are măsura de 60°, deci cele trei unghiuri ale triunghiului sunt congruente).

Remarcă. Un triunghi isoscel care are un unghi cu măsura de 60° este un triunghi echilateral.

Comparând definiția triunghiului echilateral cu cea a triunghiului isoscel vor rezulta noi proprietăți specifice triunghiului echilateral (deoarece triunghiul echilateral poate fi considerat ca fiind triunghi isoscel cu oricare din laturi ca bază):

Teoremă. Într-un triunghi echilateral toate liniile importante ce pornesc din acelaşi vârf coincid.

Observație. Triunghiul echilateral are trei axe de simetrie.



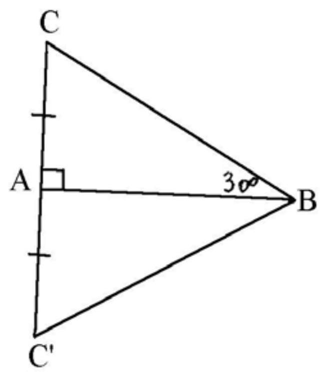
Cu ajutorul proprietăților triunghiului isoscel şi echilateral putem demonstra două proprietăți ale triunghiului dreptunghic ce vor fi foarte des folosite în rezolvarea problemelor de geometrie.

Teoremă. Dacă într-un triunghi dreptunghic măsura unui unghi este de 30°, atunci lungimea catetei opuse acestui unghi este jumătate din lungimea ipotenuzei.

Ipoteză: ΔABC: $m(\angle A)=90°$

$m(\angle B)=30°$

Concluzie: $AB=\frac{BC}{2}$



Demonstrație. Fie $C'\in AC$, astfel încât $A\in(CC')$, $[AC]\equiv[AC']$.

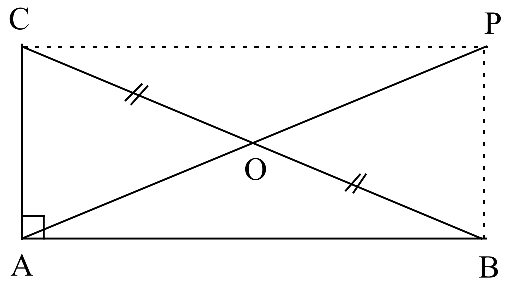
În triunghiul BCC', [BA] este înălțime (din ipoteză) şi mediană (din construcție), deci el este un triunghi isoscel, dar $m(\angle BCA)=60°$, rezultă că ΔBCC este triunghi echilateral. Avem $AC=\frac{CC'}{2}$ (din construcție), dar CC'=BC, rezultă că $AC=\frac{BC}{2}$.

Teoremă. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din lungimea ipotenuzei.

Ipoteză: ΔABC: $m(\angle A)=90°$

$O \in (BC)$, $[OB] \equiv [OC]$

Concluzie: $AO = \dfrac{BC}{2}$



Demonstrație. Fie $P \in AO$, astfel încât $O \in (AP)$ şi $[OA] \equiv [OP]$. Vom demonstra că triunghiurile AOB şi POC sunt congruente: $[AO] \equiv [PO]$ (prin construcție), $[BO] \equiv [CO]$ (din ipoteză), $\angle AOB \equiv \angle COP$ (unghiuri opuse la vârf); rezultă conform cazului de congruență a triunghiurilor LUL că $\Delta AOB \equiv \Delta POC$, de unde $[AB] \equiv [PC]$ şi $\angle OAB \equiv \angle OPC$; din ultima congruență rezultă că $CP \parallel AB$ (deoarece tăiate de secanta AP formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente). Avem $AB \perp AC$, $CP \parallel AB$, atunci $CP \perp AC$. Vom demonstra că triunghiurile PCA şi BAC sunt congruente: $m(\angle PCA)=m(\angle BAC)=90°$, $[AC]$ latură comună, $[PC] \equiv [BA]$; atunci, conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice C.C. avem că $\Delta PCA \equiv \Delta BAC$, deci $[AP] \equiv [BC]$ şi cum $AO = \dfrac{AP}{2}$, rezultă că $AO = \dfrac{BC}{2}$.

Observație. Se remarcă relația $[AO] \equiv [BO] \equiv [CO]$, punctul O este egal depărtat de punctele A, B, C, este centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC.

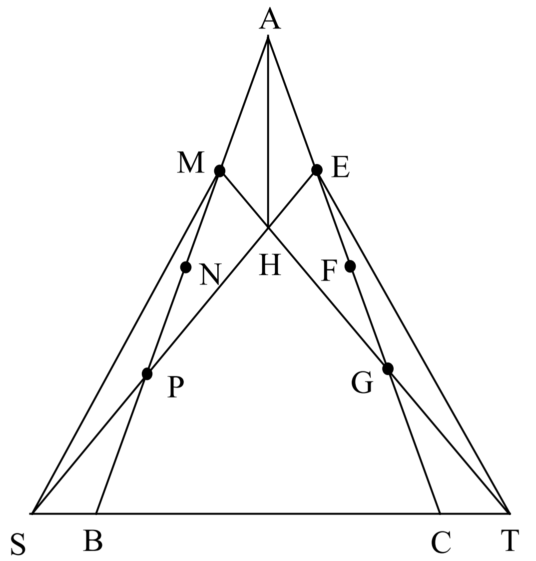
Probleme rezolvate

R3.4.1 Se dă triunghiul isoscel ABC, cu [AB]≡[AC]. Pe latura [AB] se iau punctele M, N, P, astfel încât [AM]≡[MN]≡[NP]≡[PB] şi pe latura [AC] se iau punctele E, F, G, astfel încât [AE]≡[EF]≡[FG]≡[GC]. Fie {S}=PE∩BC, {T}=MG∩BC şi {H}=EP∩MG. Arătaţi că:

a) [MG]≡[PE]; b) [MT]≡[ES]; c) AH⊥BC; d) ΔSMP≡ΔTEG.

Ipoteză: ΔABC: [AB]≡[AC]
M, N, P∈(AB)
[AM]≡[MN]≡[NP]≡[PB]
E, F, G∈(AC)
[AE]≡[EF]≡[FG]≡[GC]
PE∩BC={S}
MG∩BC={T}
EP∩MG={H}

Concluzie: a) [MG]≡[PE]
b) [MT]≡[ES]
c) AH⊥BC
d) ΔSMP≡ΔTEG.



Demonstraţie. a) Avem

$$AM = MN = NP = PB = \frac{AB}{4} \text{ şi } AE = EF = FG = GC = \frac{AC}{4},$$

dar AB=AC, de unde rezultă că

$$AM = MN = PB = AE = EF = FG = GC = \frac{AB}{4} \quad (1).$$

Vom demonstra că triunghiurile AMG şi AEP sunt congruente: [AM]≡[AE], $\angle$A este unghi comun, $AG = AP = \frac{3AB}{4}$ (din relația (1)), atunci, conform cazului de congruență a triunghiurilor LUL avem că ΔAMG≡ΔAEP, de unde rezultă că [MG]≡[PE].

b) Din ΔAMG≡ΔAEP, rezultă că $\angle$AMG≡$\angle$AEP, de unde şi suplementele lor vor fi egale, deci $\angle$BMT≡$\angle$CES.

Avem: $\angle$BMT≡$\angle$CES, $\angle$MBT≡$\angle$ECS (la baza triunghiului isoscel ABC), $MB = EC = \frac{3AB}{4}$ (din relația (1)). Atunci, conform cazului de congruență a triunghiurilor ULU, ΔMBT≡ΔECS, de unde rezultă că [MT]≡[ES].

c) Din ΔMBT≡ΔECS rezultă că $\angle$MTS≡$\angle$EST, atunci triunghiul HST este isoscel, având două unghiuri congruente, deci [HT]≡[HS]; dar [MT]≡[ES] şi scăzând membru cu membru obținem MT-HT=ES-HS, de unde MH=EH. Avem: $AM = AE = \frac{AB}{4}$ (din relația (1)), [MH]≡[EH], [AH] latură comună, atunci ΔAMH≡ΔAEH (cazul LLL de congruență a triunghiurilor), de unde rezultă că $\angle$MAH≡$\angle$EAH. Avem: în triunghiul isoscel ABC de bază [BC], [AH este bisectoarea unghiului BAC, deci AH este şi înălțimea corespunzătoare bazei, prin urmare AH⊥BC.

d) Din ΔAEP≡ΔAMG, rezultă că $\angle$APE≡$\angle$AGM, deci ele au suplemente egale, prin urmare $\angle$MPS≡$\angle$EGT.

Din ΔAEP≡ΔAMG, rezultă că [PE]≡[GM]; avem [ES]≡[MT] şi scăzând membru cu membru se obține ES-PE=MT-GM, de unde [PS]≡[GT].

Avem: $MP = EG = \frac{AB}{2}$ (din relația (1)), $\angle$MPS≡$\angle$EGT, [PS]≡[GT], atunci, rezultă conform cazului de congruență LUL a triunghiurilor că ΔSMP≡ΔTEG.

R3.4.2 Demonstrați că două triunghiuri ABC şi A'B'C' care au perimetrele egale, [CA]≡[C'A'] şi $\angle$C≡$\angle$C', sunt congruente.

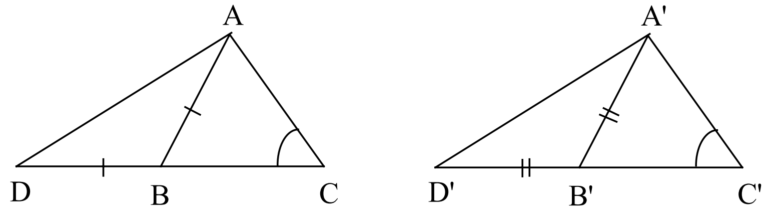
Ipoteză: ΔABC, ΔA'B'C'

$P_{ABC}=P_{A'B'C'}$

[CA]≡[C'A]

$\angle$C≡$\angle$C'

Concluzie: ΔABC≡ΔA'B'C'



Demonstrație. Se consideră punctele D şi D' astfel încât $B\in(DC)$, $[BD]\equiv[AB]$, $B'\in(D'C')$, $[B'D']\equiv[A'B']$; $DC=DB+BC=AB+BC=P_{ABC}-AC$ şi $D'C'=D'B'+B'C'=A'B'+B'C'=P_{A'B'C'}-A'C'$, dar $[AC]\equiv[A'C']$ (din ipoteză), de unde rezultă că $[DC]\equiv[D'C']$.

Vom demonstra că triunghiurile ADC şi A'D'C' sunt congruente: $[DC]\equiv[D'C']$, $[AC]\equiv[A'C']$ şi $\angle C\equiv\angle C'$ (din ipoteză); atunci avem $\Delta ADC\equiv\Delta A'D'C'$ (cazul LUL), de unde rezultă că $\angle ADC\equiv\angle A'D'C'$ şi $\angle DAC\equiv\angle D'A'C'$.

Triunghiul ABD este isoscel, $[AB]\equiv[BD]$, atunci unghiurile de la bază sunt congruente, $\angle BDA\equiv\angle BAD$; la fel, triunghiul A'B'D' este isoscel, $[A'B']\equiv[B'D']$, atunci $\angle B'D'A'\equiv\angle B'A'D'$, dar $\angle ADB\equiv\angle A'D'B'$, deci $\angle ADB\equiv\angle A'D'B'\equiv\angle BAD\equiv\angle B'A'D'$ şi $\angle DAC\equiv\angle D'A'C'$, de unde rezultă că $\angle BAC\equiv\angle B'A'C'$ (diferențe de unghiuri congruente).

Avem: $\angle BAC\equiv\angle B'A'C'$, $[AC]\equiv[A'C']$ şi $\angle C\equiv\angle C'$, atunci $\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$ (cazul ULU de congruență a triunghiurilor).

R3.4.3 În triunghiul ABC, cu $AB=\frac{2}{3}AC$ şi $m(\angle BAC)=60°$, ducem mediana $[CM]$, $M\in(AB)$. Demonstrați că $[CM]\equiv[CB]$.

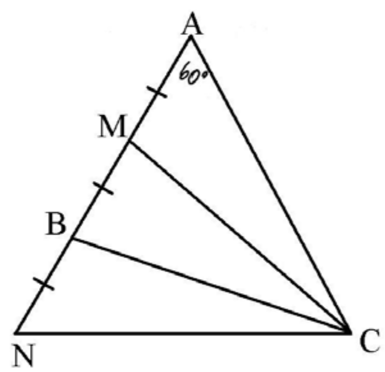
Ipoteză: ΔABC

$AB=\frac{2}{3}AC$

$m(\angle BAC)=60°$

$M\in(AB)$: $[MA]\equiv[MB]$

Concluzie: $[CM]\equiv[CB]$



Demonstrație. Se face o construcție auxiliară: se ia $N\in AB$, $B\in(MN)$ şi $[BM]\equiv[BN]$, dar $MB=MA=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}AC=\frac{1}{3}AC$, deci

$AM = MB = BN = \frac{1}{3}AC$, de unde rezultă că $AN = 3AM = 3 \cdot \frac{1}{3}AC$, AN=AC.
Avem: [AN]≡[AC] şi m(∠BAC)=60°, de unde rezultă că ΔANC este echilateral.

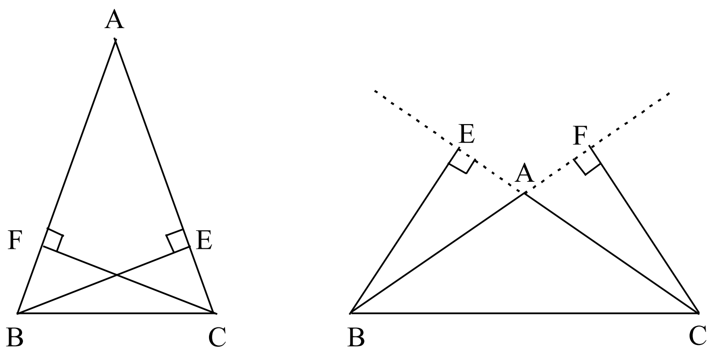
Avem: [AM]≡[BN], ∠MAC≡∠BNC (unghiuri ale triunghiului echilateral ANC) şi [AC]≡[NC], atunci ΔMAC≡ΔBNC (conform cazului LUL de congruență a triunghiurilor), de unde rezultă că [CM]≡[CB].

R3.4.4 Un triunghi este isoscel dacă şi numai dacă are două înălțimi congruente.

I. Înălțimile corespunzătoare laturilor congruente ale unui triunghi isoscel sunt congruente.

Ipoteză: ΔABC: [AB]≡[AC]
BE⊥AC, E∈AC
CF⊥AB, F∈AB
Concluzie: [BE]≡[CF]

Distingem două cazuri, după cum m(∠BAC)<90° sau m(∠BAC)>90°:



Demonstrație. Arătăm că triunghiurile FBC şi ECB sunt congruente: m(∠CFB)=m(∠BEC)=90°, [BC] latură comună, ∠FBC≡∠ECB (la baza triunghiului isoscel), atunci ΔFBC≡ΔECB (cazul I.U.), de unde rezultă că [CF]≡[BE].

II. Dacă un triunghi are două înălțimi congruente, atunci el este triunghi isoscel.

Ipoteză: ΔABC
BE⊥AC, E∈AC
CF⊥AB, F∈AB
[BE]≡[CF]
Concluzie: [AB]≡[AC]

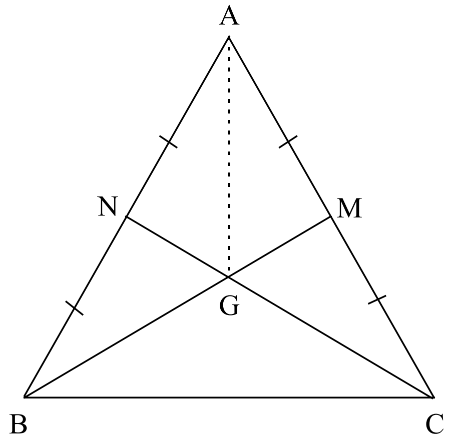
Demonstrație. Arătăm că triunghiurile FBC şi ECB sunt congruente: m(∠CFB)=m(∠BEC)=90°. [BC] latură comună, [CF]≡[BE], atunci ΔFBC≡ΔECB (cazul I.C.), de unde rezultă că ∠FBC≡∠ECB, deci ΔABC este isoscel, [AB]≡[AC], având două unghiuri congruente.

Remarcă. Demonstrațiile celor două probleme de mai sus se pot face considerând triunghiurile AEB şi AFC.

R3.4.5 Un triunghi este isoscel dacă şi numai dacă are două mediane congruente.

I. Medianele corespunzătoare laturilor congruente ale unui triunghi isoscel sunt congruente.

Ipoteză: ΔABC: [AB]≡[AC]
M∈(AC), [MA]≡[MC]
N∈(AB), [NA]≡[NB]
Concluzie: [BM]≡[CN]



Demonstrație. Avem: $AM = MC = \frac{1}{2}AC$, $AN = NB = \frac{1}{2}AB$, dar AB=AC, deci [AM]≡[MC]≡[AN]≡[NB].

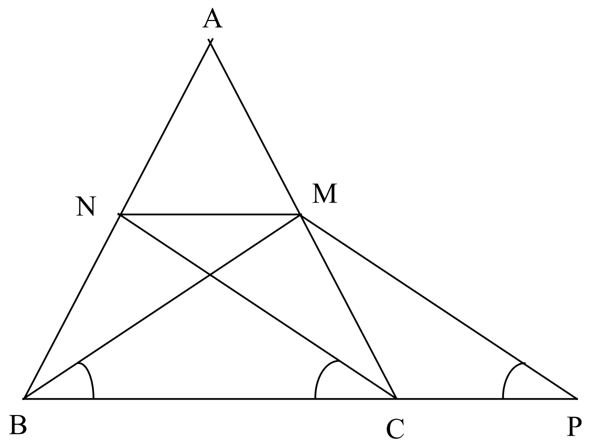
Vom demonstra că triunghiurile NBC şi MCB sunt congruente: [BC] latură comună, [NB]≡[MC], ∠NBC≡∠MCB (la baza triunghiurilui isoscel ABC), atunci ΔNBC≡ΔMCB, de unde rezultă că [BM]≡[CN].

Remarcă. Demonstrația se putea face considerând triunghiurile AMB şi ANC.

Observație. Notăm BM∩CN={G}, centrul de greutate al triunghiului ABC. În plus se poate demonstra că ΔGBC este isoscel (din ΔNBC≡ΔMCB rezultă că ∠NCB≡∠MBC) şi că AG⊥BC ($NG = NC - GC = MB - GB = MG$; [AN]≡[AM] şi [AG] latură comună, atunci ΔANG≡ΔAMG (LLL), de unde rezultă că ∠NAG≡∠MAG, dar ΔABC este isoscel de bază [BC], deci bisectoarea unghiului BAC este şi înălțime, atunci AG⊥BC).

II. Dacă un triunghi are două mediane congruente, atunci el este isoscel.

Ipoteză: ΔABC
M∈(AC). [MA]≡[MC]
N∈(AB), [NA]≡[NB]
[BM]≡[CN]
Concluzie: [AB]≡[AC]



Demonstrație. Pentru a putea arăta că triunghiurile NBC și MCB sunt congruente, trebuie să demonstrăm că ∠NCB≡∠MBC.

Construcția auxiliară: fie MP||NC, P∈BC. Avem ∠NCB≡∠MPB, fiind unghiuri corespondente și ∠PMC≡∠NCB, fiind unghiuri alterne interne.

Conform definiției, [MN] este linie mijlocie în ΔABC, deci MM||BC, de unde rezultă că ∠NMC≡∠MCP, unghiuri alterne interne.

Avem: ∠NMC≡∠MCP, ∠NCM≡∠PMC, [MC] latură comună, atunci ΔNMC≡ΔPCM (ULU), de unde rezultă că [MP]≡[NC], dar [MB]≡[NC], deci [MP]≡[MB]. Triunghiul MBP este isoscel, [MP]≡[MB], de unde rezultă că ∠MPB≡∠MBC, dar ∠MPB≡∠NCB, deci ∠MBC≡∠NCB. Avem: ∠MBC≡∠NCB, [BC] latură comună, [MB]≡[NC] (din ipoteză), atunci ΔNBC≡ΔMCB (cazul LUL), de unde rezultă că ∠NBC≡∠MCB, deci ΔABC este isoscel, [AB]≡[AC] deoarece are două unghiuri congruente.

R3.4.6 Un triunghi este isoscel dacă și numai dacă are două bisectoare congruente.

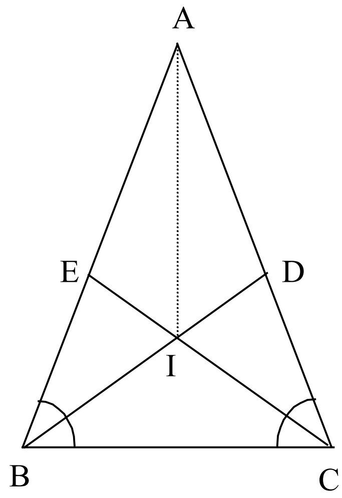
I. Bisectoarele unghiurilor congruente ale unui triunghi isoscel sunt congruente.

Ipoteză: ΔABC: [AB]≡[AC]
∠ABD≡∠DBC, D∈(AC)
∠ACE≡∠ECB, E∈(AB)
Concluzie: [BD]≡[CE]

Demonstrație. Unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt congruente și [BD, [CE sunt bisectoarele lor, deci ∠ABD≡∠DBC≡∠ACE≡∠ECB. Avem: ∠EBC≡∠DBC (la baza triunghiului isoscel), ∠ECB≡∠DBC, [BC] latură comună, atunci ΔEBC≡ΔDCB (ULU), de unde rezultă că [BD]≡[CE].

Remarcă. Demonstrația se putea face considerând triunghiurile ADB şi AEC.

Observație. Notăm BD∩CE={I}, centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Avem ∠IBC≡∠ICB, de unde rezultă că triunghiul IBC este isoscel. Se mai poate demonstra că AI⊥BC ($EI = EC - IC = DB - IB = DI$; $AE = AB - EB = AC - DC = AD$; [AI] latură comună, atunci ΔAIE≡ΔAID (LLL), de unde rezultă că ∠EAI≡∠DAI, dar ΔABC este isoscel de bază [BC], bisectoarea unghiului BAC este şi înălțime, deci AI⊥BC).



II. Dacă un triunghi are două bisectoare congruente, atunci el este isoscel.

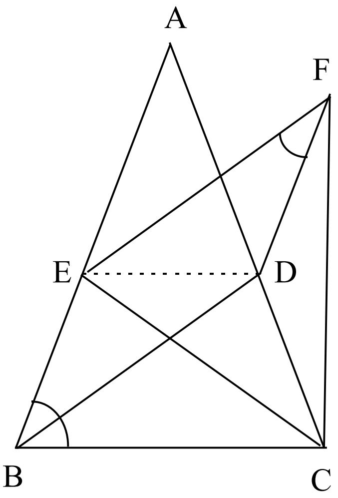
Ipoteză: ΔABC

∠ABD≡∠DBC, D∈(AC)

∠ACE≡∠ECB, E∈(AB)

[BD]≡[CE]

Concluzie: [AB]≡[AC]



Demonstrație. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că $[AB] \not\equiv [AC]$. Ar însemna, de exemplu, că AC<AB. Ar rezulta că m(∠ABC)<m(∠ACB), deci m(∠DBC)<m(∠ECB) (1) şi s-ar obține DC<EB (2).

Vom considera paralele prin D la BE şi prin E la BD şi vom nota cu F intersecția acestor paralele.

Avem: $\angle BED \equiv \angle EDF$ (alterne interne), $\angle BDE \equiv \angle DEF$ (alterne interne) şi [DE] latură comună, atunci $\Delta EDB \equiv \Delta DEF$ (cazul ULU), de unde rezultă $[BE] \equiv [DF]$.

Inegalitatea (2) s-ar scrie $DC<DF$, atunci în ΔCDF, am avea $m(\angle DFC)<m(\angle DCF)$ (3).

Din $\Delta EDB \equiv \Delta DEF$ rezultă că $\angle EBD \equiv \angle EFD$, dar şi $\angle EBD \equiv \angle DBC$, atunci $\angle EFD \equiv \angle DBC$. Ținând seama de (1) am putea scrie: $m(\angle EFD)<m(\angle ECB)$ sau $m(\angle EFD)<m(ECD)$ (4).

Adunând membru cu membru inegalitățile (3) şi (4) am obține: $m(\angle DFC)+m(\angle EFD)<m(\angle DCF)+m(\angle ECD)$ sau $m(\angle EFC)<m(\angle ECF)$. Ar însemna că în triunghiul ECF: $EC<EF$ (unghiului cu măsură mai mică i se opune o latură mai mică). Dar cum $[EC] \equiv [BD]$ (din ipoteză), ar însemna că $BD<EF$, ceea ce este absurd deoarece $[BD] \equiv [EF]$ (din $\Delta EDB \equiv \Delta DEF$).

Am ajuns la un rezultat absurd pentru că am pornit de la o presupunere falsă, anume aceea că $[AB] \not\equiv [AC]$. Deci, triunghiul ABC este isoscel, $[AB] \equiv [AC]$.

R3.4.7 În triunghiul dreptunghic ABC, $m(\angle A)=90°$ şi $m(\angle B)=15°$; se construiesc înălțimea [AD], bisectoarea [AE] şi mediana [AO]. Dacă DE=a şi CD=b, să se calculeze perimetrul triunghiului AOE.

Ipoteză: ΔABC: $m(\angle A)=90°$

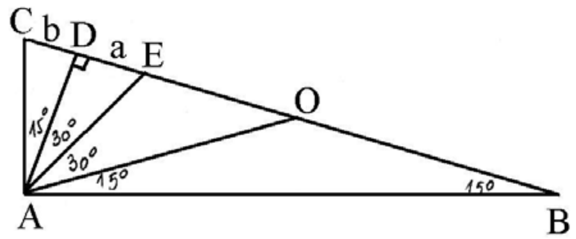
$m(\angle B)=15°$

$AD \perp BC$, $D \in (BC)$

$\angle CAE \equiv \angle EAB$, $E \in (BC)$

$O \in (BC)$, $[OB] \equiv [OC]$

Concluzie: P_{AOE}



Demonstrație. Mediana corespunzătoare ipotenuzei are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei, deci AO=OB=OC, de unde rezultă că ΔAOB este isoscel şi $m(\angle OAB)=m(\angle OBA)=15°$, iar $m(\angle AOC)=30°$, fiind unghi exterior triunghiului OAB.

Avem [AE bisectoarea unghiului $\angle BAC$, deci

$$m(\angle EAB)=m(\angle EAC)=45°,\ m(\angle OAB)=15°,$$

atunci

$$m(\angle EAO)=45°-15°=30°,\ \text{dar } m(\angle EOA)=30°,$$

deci triunghiul AOE este isoscel, $[AE] \equiv [EO]$.

Avem triunghiul dreptunghic ADC (m(∠ADC)=90°) şi m(∠C)=75°, deci m(∠CAD)=15°, iar m(∠DAE)=m(∠CAE)-m(∠CAD)=45°-15°=30°. În triunghiul dreptunghic ADE (m(∠ADE)=90°), m(∠DAE)=30°, iar DE=a, rezultă că AE=2DE=2a (cateta opusă unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză), dar [AE]≡[EO], atunci AE=EO=2a.

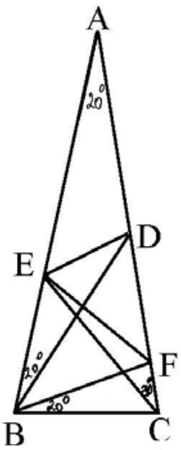
Ştim că CD=b, DE=a, EO=2a, OC=CD+DE+EO, deci OC=b+3a, dar OC=OA, rezultă OA=3a+b. Putem calcula perimetrul triunghiului AOE:

$$P_{AOE}=AO+AE+EO=3a+b+2a+2a=7a+b.$$

R3.4.8 În triunghiul ABC, [AB]≡[AC], m(∠BAC)=20°. Fie E∈(AB) şi D∈(AC), astfel încât m(∠ACE)=30°. m(∠ABD)=20°. Aflaţia măsura unghiului ∠AED.

Ipoteză: ΔABC: [AB]≡[AC]
m(∠BAC)=20°
E∈(AB)
D∈(AC)
m(∠ACE)=30°
m(∠ABD)=20°

Concluzie: m(∠AED)



Demonstraţie. În triunghiul isoscel ABC, [AB]≡[AC], m(∠BAC)=20°, atunci $m(\angle ABC)=m(\angle ACB)=\dfrac{180°-20°}{2}=80°$, m(∠ACE)=30°, rezultă că m(∠ECB)=m(∠ACB)-m(∠ACE)=80°-30°=50°.

În triunghiul BEC calculăm

m(∠BEC)=180°-m(∠EBC)+m(∠ECB))=180°-(80°+50°)=50°,

deci m(∠BEC)=m(∠BCE)=50°, atunci ΔBEC este isoscel, [BC]≡[BE] (1).

Construim F∈(AC) astfel încât m(∠FBC)=20°. dar m(BCF)=80°, rezultă că m(∠BFC)=180°-(m(∠BCF)+m(∠FBC))=180°-100°=80°, atunci ΔBFC este isoscel, [BC]≡[BF] (2).

Din (1) şi (2) rezultă că $[BF]\equiv[BE]$ şi cum $m(\angle EBF)=60°$, atunci ΔBEF este echilateral, $[EF]\equiv[BF]$ (3).

Avem:

$$m(\angle DBF)=m(\angle EBC)-(m(\angle EBD)+m(\angle FBC))=80°-2\cdot 20°=40°$$

şi $m(\angle BDC)=180°-(m(\angle DBC)+m(\angle DCB))=180°-(60°+80°)=40°$, deci ΔFDB este isoscel, $[FD]\equiv[FB]$ (4).

Din (3) şi (4) rezultă că $[EF]\equiv[FD]$, deci ΔFED este isoscel, dar $m(\angle EFD)=180°-(m(\angle EFB)+m(\angle BFC))=180°-(60°+80°)=40°$, atunci

$m(\angle FED)=m(\angle FDE)=\dfrac{180°-40°}{2}=70°$, şi cum $m(\angle FEB)=60°$, rezultă că

$$m(\angle AED)=180°-(m(\angle FEB)+m(\angle FED))=$$
$$=180°-(60°+70°)=180°-130°=50°.$$

3.5. Patrulatere

Importanța se reflectă în locul pe care-l ocupă în programa şcolară, patrulaterele fiind studiate atât în clasa a VI-a cât şi în clasa a VII-a. Poate şi multitudinea aplicațiilor practice îi conferă temei un mare avantaj.

Vom reaminti câteva definiții şi teoreme de care avem nevoie în abordarea temei.

Definiția 3.5.1. Un patrulater se numeşte convex dacă, oricare ar fi o latură a sa, celelalte două vârfuri, nesituate pe latura considerată, se află de aceeaşi parte a dreptei în care este inclusă latura respectivă.

Teorema 3.5.1. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este de 360°.

Paralelogramul

Definiția 3.5.2. Patrulaterul convex cu laturile opuse paralele se numeşte paralelogram.

Proprietăți

Teorema 3.5.2. În orice paralelogram laturile opuse sunt congruente şi reciprocele:

- orice patrulater convex în care laturile opuse sunt congruente este paralelogram
- orice patrulater convex în care două laturi opuse sunt congruente şi paralele este paralelogram.

Teorema 3.5.3. În orice paralelogram unghiurile opuse sunt congruente şi reciproc, orice patrulater convex în care unghiurile opuse sunt congruente este paralelogram.

Teorema 3.5.4. În orice paralelogram diagonalele se intersectează în părți congruente şi reciproc, orice patrulater convex în care diagonalele se intersectează în părți congruente este paralelogram.

Construcția paralelogramelor

1) Trasăm două drepte paralele pe care le intersectăm cu alte două drepte paralele. Punctele de intersecție vor fi vârfurile paralelogramului.

2) Desenăm două segmente paralele şi congruente. Extremitățile lor vor fi vârfurile paralelogramului.

3) Intersectăm două segmente necongruente care au acelaşi mijloc. Extremitățile acestor segmente vor fi vârfurile paralelogramului.

Dreptunghiul

Definiția 3.5.3. Paralelogramil cu un unghi drept se numeşte dreptunghi.

Proprietăți

Teorema 3.5.5. În orice dreptunghi toate unghiurile sunt congruente şi deci drepte şi reciproc orice patrulater convex în care toate unghiurile sunt congruente şi deci drepte este dreptunghi.

Teorema 3.5.6. În orice dreptunghi diagonalele sunt congruente şi reciproc, orice paralelogram cu diagonalele congruente este dreptunghi.

Construcția dreptunghiului

1) Desenăm un triunghi dreptunghic şi prin vârfurile unghiurilor ascuțite ducem paralele la catete care se vor intersecta într-un punct ce va fi al patrulea vârf al dreptunghiului (vârfurile triunghiului dreptunghic vor fi celelalte trei vârfuri).

2) Desenăm două segmente congruente care să aibă acelaşi mijloc. Extremitățile lor vor fi vârfurile dreptunghiului.

Rombul

Definiția 3.5.4. Paralelogramul care are două laturi consecutive congruente se numeşte romb.

Proprietăți

Teorema 3.5.7. Într-un romb toate laturile sunt congruente şi reciproc orice patrulater cu toate laturile congruente este romb.

Teorema 3.5.8. Într-un romb diagonalele sunt perpendiculare şi reciproc, orice paralelogram cu diagonalele perpendiculare este romb.

Teorema 3.5.9. Într-un romb diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor şi reciproc, orice paralelogram în care o diagonală este şi bisectoarea unui unghi este romb.

Construcția rombului

1) Desenăm două drepte perpendiculare. Fixăm pe fiecare dreaptă două puncte simetrice față de a doua dreaptă astfel ca segmentele formate pe prima dreaptă să nu fie congruente cu cele de pe a doua dreaptă. Cele patru puncte sunt vârfurile rombului.

2) Desenăm un triunghi isoscel (vârfurile lui vor fi trei dintre vârfurile rombului). Construim simetricul vârfului triunghiului față de bază. Acesta va fi al patrulea vârf al rombului.

Pătratul

Definiția 3.5.5. Dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente se numeşte pătrat.

Construcția pătratului

1) Desenăm două drepte perpendiculare, iar cu centrul în punctul lor de intersecție trasăm un cerc. Intersecțiile cercului cu cele două drepte perpendiculare vor fi cele patru vârfuri ale pătratului.

2) Desenăm un unghi drept şi luăm pe laturile lui două segmente congruente, ambele având unul din capete în vârful unghiului. Prin capetele segmentelor diferite de vârful unghiului ducem paralele la laturile unghiului care se vor intersecta într-un punct (al patrulea vârf al pătratului).

3) Desenăm un triunghi dreptunghic isoscel şi apoi construim simetricul unghiului drept față de ipotenuză.

Trapezul

Definiția 3.5.6. Patrulaterul care are două laturi paralele şi celelalte două neparalele.

Trapezul este isoscel când laturile neparalele sunt congruente.

Teorema 3.5.10. Unghiurile alăturate bazelor unui trapez isoscel sunt congruente şi reciproc, dacă unghiurile alăturate bazelor unui trapez sunt congruente, trapezul este isoscel.

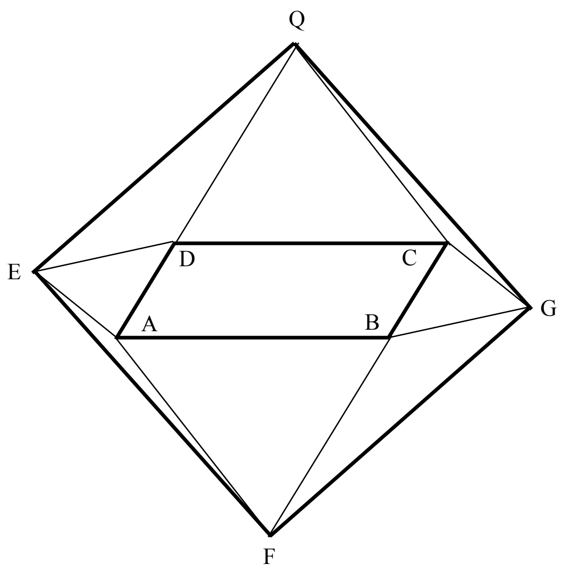
Teorema 3.5.11. Diagonalele unui trapez isoscel sunt congruente şi reciproc dacă diagonalele unui trapez sunt congruente trapezul este isoscel.

Vom prezenta în continuare probleme rezolvate în care sunt evidențiate proprietățile patrulaterelor.

Probleme rezolvate

R3.5.1 Pe laturile unui paralelogram, ca baze, se construiesc în afară triunghiuri echilaterale. Să se demonstreze că vârfurile acestor triunghiuri, diferite de vârfurile paralelogramului sunt vârfurile unui paralelogram.

Demonstrație. Fie ABCD paralelogramul şi triunghiurile ABF, ADE, DQC, CBG, echilaterale construite pe laturile paraleloagramului.



Avem: ΔFGB≡ΔQED (LUL), deoarece

(BF)≡(QD)

∠FBG≡∠QDE (240°-m(∠B) şi 240°-m(∠D), ∠D≡∠B)

(BG)≡(DE)

Din congruența triunghiurilor de mai sus obținem că

(FG)≡(EQ) (1)

Şi triunghiurile AEF şi CGQ sunt congruente (LUL), deoarece

(AE)≡(CG)

(∠EAF)≡(∠GCQ)

(AF)≡(CQ)

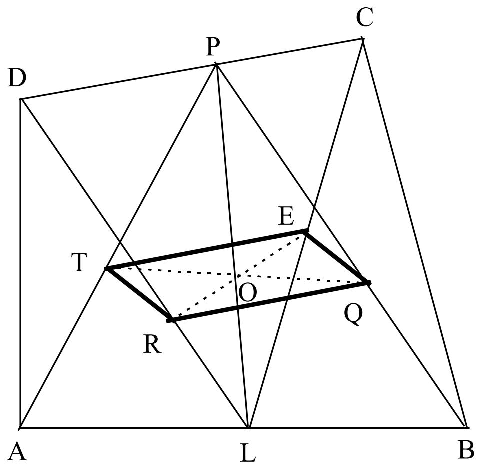
Din congruența triunghiurilor AEF şi CGQ rezultă

(EF)≡(GQ) (2)

Din relațiile (1) şi (2) rezultă că patrulaterul EQGF are laturile opuse congruente şi deci este paralelogram.

R3.5.2 În patrulaterul convex ABCD, L este mijlocul laturii (AB) şi P este mijlocul laturii (CD). Să se demonstreze că mijloacele segmentele AP, CL, BP, DL sunt vârfurile unui paralelogram.

Demonstrație. Fie T mijlocul lui (AP), R mijlocul lui (DL), E mijlocul lui (LC), iar Q mijlocul lui (PB) şi O mijlocul lui (PL).



În triunghiul APL, [TO] este linie mijlocie. Deci TO||AL şi $TO = \frac{AL}{2}$. În triunghiul LPB, [OQ] este linie mijlocie. deci OQ||LB şi $OQ = \frac{LB}{2}$. Prin punctul O trece o singură paralelă la AB, deci punctele T, O, Q sunt coliniare. Fiindcă (AL)≡(LB) şi $TO = \frac{AL}{2}$ iar $OQ = \frac{LB}{2}$, obținem că (TO)≡(QO), adică O este mijlocul segmentului (TQ) (1).

În triunghiul DLP, (RO) este linie mijlocie, deci

$$RO \| DP \quad \text{şi} \quad RO = \frac{DP}{2}.$$

În triunghiul PLC, (OE) este linie mijlocie, deci

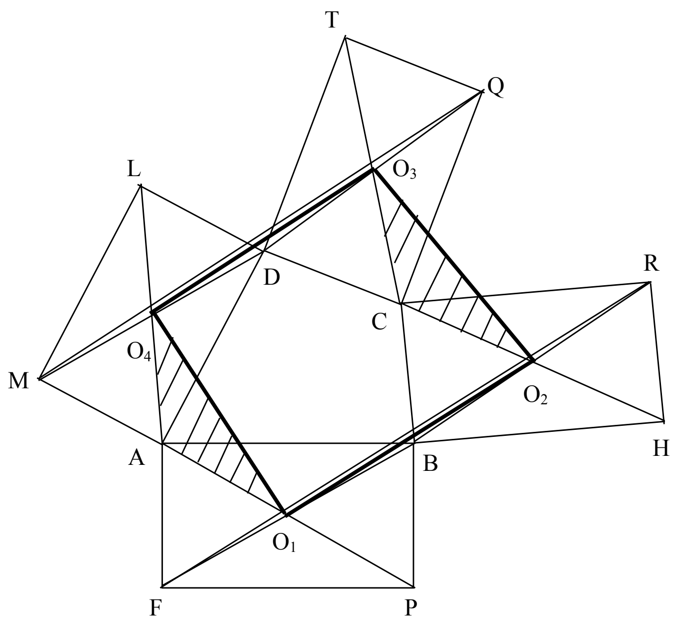
$$OE \| PC, \quad OE = \frac{PC}{2}.$$

Prin O trece o singură paralelă la DC, rezultă că punctele R, O, E sunt coliniare. Din (DP)≡(PC) şi $RO = \frac{DP}{2}$, $EO = \frac{PC}{2}$ rezultă

$$(RO) \equiv (OE) \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că diagonalele patrulaterului TRQE se taie în părți congruente, deci el este paralelogram.

R3.5.3 Se consideră patrulaterul convex ABCD în care m(∠A)+m(∠C)=180°. În exteriorul patrulaterului se construiesc dreptunghiurile ABPF, BCRH, CDTQ, DAML astfel ca (BP)≡(CD), (AM)≡(BC), (DT)≡(AB), (CR)≡(AD). Demonstrați că centrele acestor dreptunghiuri sunt vârfurile unui nou dreptunghi.



Fie O_1, O_2, O_3, O_4 centrele dreptunghiurilor ABPF, CBHR, CQTD, DLMA. Trebuie să arătăm că $O_1O_2O_3O_4$ este dreptunghi, adică paralelogram cu un unghi drept.

$[O_1O_2]$ este linie mijlocie în triunghiul FBR. Deci $O_1O_2 = \frac{FR}{2}$.

În triunghiul MQD, $[O_4O_3]$ este linie mijlocie, deci $O_4O_3 = \frac{MQ}{2}$.

Pentru a demonstra că $[O_1O_2] \equiv [O_4O_3]$ este suficient să arătăm că $[FR] \equiv [MQ]$.

Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este 360°.

În punctul B, $m(\angle ABP)+m(\angle ABC)+m(\angle CBH)+m(\angle HBP)=360°$, dar $m(\angle ABP)+m(\angle CBH)=180°$, deci

$$m(\angle ABC)+m(\angle HBP)=180° \tag{1}$$

Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este 360°. Deci

$$m(\angle ABC)+m(\angle BCD)+m(\angle CDA)+m(\angle DAB)=360°.$$

Din ipoteză $m(\angle DAB)+m(\angle BCD)=180°$, şi atunci obţinem că

$$m(\angle ABC)+m(\angle CDA)=180° \tag{2}$$

Comparând relaţiile (1) şi (2) obţinem:

$$m(\angle HBP)=m(\angle CDA) \tag{3}$$

Din triunghiurile dreptunghice congruente FPB şi QCD ce au $(FP) \equiv (CQ)$ şi $(BP) \equiv (CD)$ obţinem că

$$(\angle FBP) \equiv (\angle QDC), \quad (FB) \equiv (DQ) \tag{4}$$

Şi triunghiurile dreptunghice BRH şi DMA sunt congruente, având $(BH) \equiv (AD)$ şi $(RH) \equiv (AM)$ şi atunci

$$(\angle RBH) \equiv (\angle MDA), \quad (BR) \equiv (MD) \tag{4*}$$

Atunci

$$m(\angle FBR)=360°-[m(\angle FBP)+m(\angle PBH)+m(\angle HBR)] \quad (5)$$

iar

$$m(\angle MDQ)=360°-[m(\angle QDC)+m(\angle CDA)+m(\angle MDA)] \quad (6)$$

Din (5) şi (6) obţinem că

$$\angle FBR \equiv \angle MDQ \quad (7)$$

deoarece $(\angle FBP)\equiv(\angle QDC)$, $(\angle PBH)\equiv(\angle CDA)$ şi $(\angle HBR)\equiv(\angle MDA)$.

Din relaţiile (4), (4*), (7) obţinem că:

$$\Delta FBR \equiv \Delta QDM \quad (LUL) \quad (8)$$

Din congruenţa triunghiurilor de la (8) obţinem că $(FR)\equiv(QM)$, de unde $\frac{FR}{2}=\frac{QM}{2}$, adică

$$O_1O_2=O_4O_3 \quad (9)$$

Analog se arată că şi $(O_1O_4)\equiv(O_3O_2)$.

Atunci patrulaterul $O_1O_2O_3O_4$, având laturile opuse congruente este paralelogram. Pentru a fi dreptunghi mai trebuie să arătăm că are şi un unghi drept. Avem $m(\angle O_2O_1O_4)=m(\angle AO_1B)-[m(\angle AO_1O_4)+m(\angle BO_1O_2)]$ şi

$$m(\angle O_4O_3O_2)=m(\angle CO_3D)+m(\angle CO_3O_2)+m(\angle DO_3O_4).$$

Triunghiurile AO_1O_4 şi CO_3O_2 sunt congruente deoarece

$$AO_1=\frac{AP}{2}=\frac{CT}{2}=CO_3$$

$$AO_4=\frac{AL}{2}=\frac{CH}{2}=CO_2$$

$$O_1O_4=O_2O_3$$

Din congruenţa celor două triunghiuri rezultă că $\angle AO_1O_4\equiv\angle CO_3O_2$.

Analog se arată că $\angle BO_1O_2\equiv\angle DO_3O_4$. Atunci

$$m(\angle O_4O_1O_2)+m(\angle O_2O_3O_4)=m(\angle AO_1B)+m(\angle CO_3D)$$

Triunghiurile O_1BP şi DO_3C, având toate laturile congruente sunt congruente, de unde rezultă că $m(\angle DO_3C)\equiv m(\angle BO_1P)$. Obţinem

$$m(\angle O_4O_1O_2)+m(\angle O_2O_3O_4)=m(\angle AO_1B)+m(BO_1P)=180°$$

Deci $m(\angle O_4O_1O_2)+m(\angle O_2O_3O_4)=180°$. Dar într-un paralelogram unghiurile opuse sunt congruente, deci $\angle O_4O_1O_2\equiv\angle O_2O_3O_4$ atunci fiind şi suplementare rezultă că $m(\angle O_4O_1O_2)=90°$.

Paralelogramul $O_4O_1O_2O_3$ având un unghi drept este dreptunghi.

R3.5.4 Se consideră pătratul ABCD iar M şi N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AD. Dacă $BD\cap CN=\{L\}$, $BD\cap CM=\{K\}$ şi $BC\cap NK=\{T\}$ să se arate că patrulaterul ALCK este romb.

Demonstraţie. Fie O intersecţia diagonalelor pătratului ABCD.

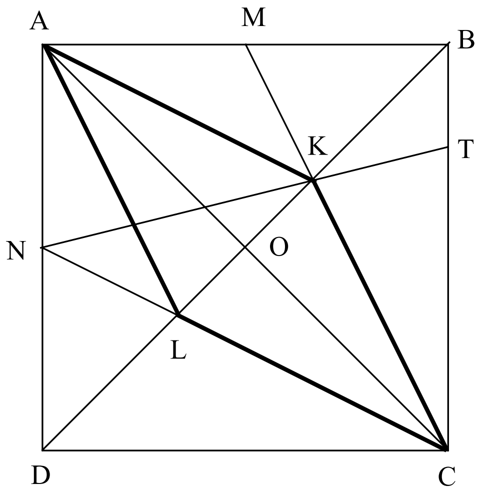
În triunghiul ABC, CM şi BO sunt mediane, rezultă că punctul K este centrul de greutate al triunghiului. Deci

$$OK=\frac{1}{3}OB \quad (1)$$

În triunghiul ADC, CN şi DO sunt mediane, rezultă că punctul L este centrul de greutate al triunghiului. Deci

$$OL = \frac{1}{3} DO \qquad (2)$$

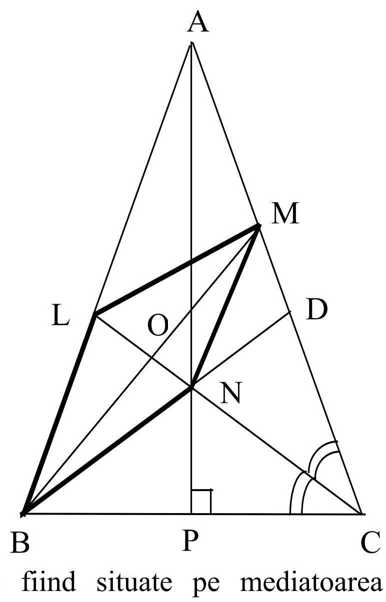
Dar (OB)≡(DO) şi atunci din (1) şi (2) obţinem că OK=OL, adică O este mijlocul segmentului (LK). Dar (OA)≡(OC) şi AC⊥LK. Patrulaterul ALCK are diagonalele perpendiculare şi se înjumătăţesc, rezultă că el este romb.



R3.5.5 Se consideră triunghiul isoscel ABC cu (AB)≡(AC) şi AB=2BC. Se duce înălţimea AP, mediana BM, şi bisectoarea CL. Pe latura AC se ia un punct D astfel ca (BD)≡(BC).

Fie {N}=BD∩CL. Să se demonstreze că patrulaterul BLMN este romb.

Demonstraţie. Fie {O}=LN∩BM. În triunghiul isoscel BCM cu (BC)≡(CM), CL este bisectoare, deci şi mediană şi înălţime. Rezultă că diagonalele patrulaterului LBNM sunt perpendiculare.



Punctele N şi L fiind situate pe mediatoarea segmentului [BM] avem relaţiile:(NB)≡(NM) şi (LM)≡(LB). Triunghiul ABC fiind isoscel cu ∠B≡∠C, iar triunghiul CBD isoscel cu ∠BCD≡∠CDB, rezultă că ∠CBD≡∠CAB.

În triunghiul isoscel BCM avem:

$$m(\angle CMB) \equiv m(\angle CBM) \qquad (1)$$

Unghiul CMB este exterior ΔBMA, atunci

$$m(\angle CMB)=m(\angle MAB)+m(\angle MBA) \quad (2)$$

şi

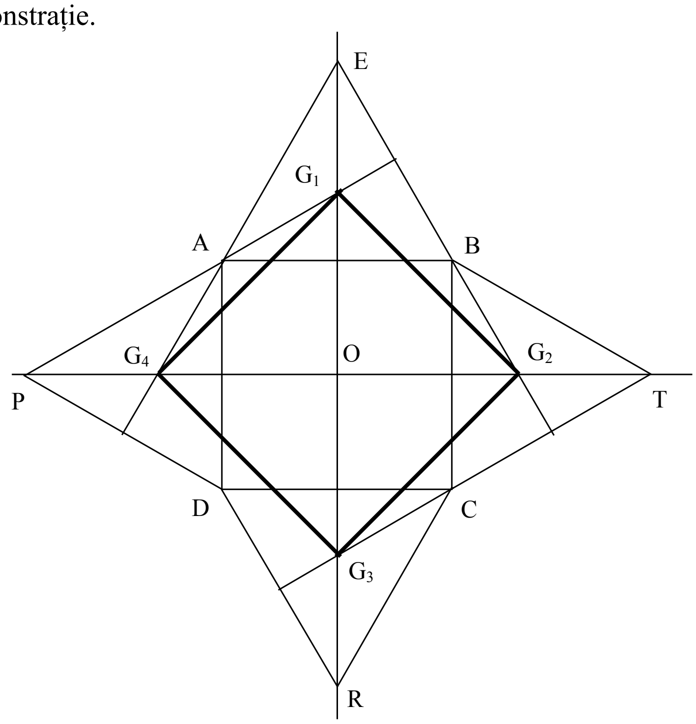
$$m(\angle CBM)=m(\angle CAB)+m(\angle DBM) \quad (3)$$

Din (1), (2) şi (3) rezultă că $m(\angle MBA)=m(\angle DBM)$, adică (BM este bisectoarea $\angle NBL$.

În triunghiul BLN, (BO fiind bisectoare şi înălţime rezultă că el este isoscel cu $(BL)\equiv(BN)$. Obţinem că patrulaterul BNML are toate laturile congruente şi deci el este paralelogram în care diagonalele sunt perpendiculare, deci el este romb.

R3.5.6 Pe laturile unui pătrat ABCD se construiesc, în exterior triunghiurile echilaterale ABE, BCT, CDR, DAP, care au respectiv centrele de greutate G_1,G_2,G_3,G_4. Demonstraţi că patrulaterul $G_1G_2G_3G_4$ este pătrat.

Demonstraţie.



Triunghiurile echilaterale ABE, BCT, CDR, DAP sunt congruente. Atunci segmentele AG_1, BG_1, BG_2, CG_2, CG_3, DG_3, DG_4, AG_4 sunt congruente având fiecare lungimea ca fiind $\frac{2}{3}$ din înălţimea unui triunghi echilateral (din cele considerate). Unghiurile $\angle G_4AG_1$, $\angle G_1BG_2$, $\angle G_3CG_2$, $\angle G_4DG_3$ sunt congruente având măsura (30°+90°+30°) 150°. (Am ţinut seama că mediana în triunghiul echilateral este şi bisectoare.) Atunci triunghiurile isoscele G_4AG_1, G_1BG_2, G_2CG_3, G_3DG_4 sunt congruente (LUL). Din congruenţa celor patru triunghiuri de mai sus obţinem că $(G_1G_2)\equiv(G_2G_3)\equiv(G_3G_4)\equiv(G_4G_1)$, adică patrulaterul $G_1G_2G_3G_4$ este romb.

În triunghiul isoscel G_1AB avem $m(\angle G_1AB)=m(\angle G_1BA)=30°$. Din triunghiul isoscel AG_1G_4 cu $m(\angle G_1AG_4)=150°$ obținem $m(\angle AG_1G_4)=15°$.

Analog din triunghiul isoscel G_1GB_2 obținem $m(\angle BG_1G_2)=15°$. Atunci $m(\angle G_4G_1G_2)=m(\angle AG_1B)-[m(\angle AG_1G_4)+m(\angle BG_1G_2)]=$
$=120°-(15°+15°)=90°$.

Am obținut că rombul $G_1G_2G_3G_4$ are un unghi drept, deci este pătrat.

Prin vârfurile unui pătrat ABCD se duc dreptele AE, BF, CT, DL cu $E\in(BC)$, $F\in(CD)$, $T\in(AD)$, $L\in(AB)$, astfel încât

$$m(\angle BAE)=m(\angle DCT)=m(\angle ADL)=m(\angle CBF)=30°.$$

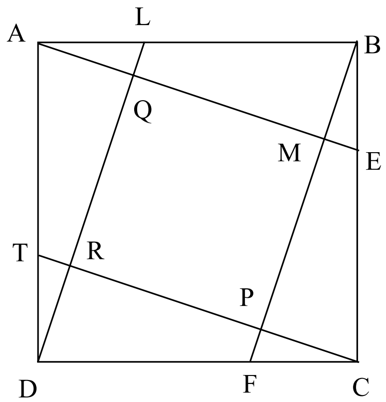
Dacă $\{M\}=AE\cap BF$, $\{P\}=BF\cap CT$, $\{R\}=CT\cap DL$, $\{Q\}=DL\cap AE$, să se demonstreze că MPRQ este pătrat.

Demonstrație. Avem $m(\angle DAE)=60°$, $m(\angle DTC)=60°$ şi au poziția de unghiuri corespondente, rezultă că

$$AE\|TC \qquad (1)$$

Şi unghiurile $\angle FBA$ şi $\angle DLA$ au măsura 60° şi deci

$$LD\|BF \qquad (2)$$



Din relațiile (1) şi (2) rezultă că QMPR este paralelogram având laturile opuse paralele.

Triunghiurile dreptunghice ADL, BFC, CTD, ABE sunt congruente (C.U.). Atunci obținem că

$$(AL)\equiv(FC)\equiv(TD)\equiv(BE) \qquad (3)$$

Atunci şi

$$(BL)\equiv(DF)\equiv(AT)\equiv(CE) \qquad (4)$$

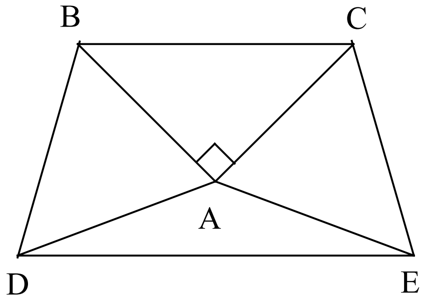
Din relațiile (3) şi (4) rezultă că $(QM)\equiv(MP)\equiv(PR)\equiv(QR)$ (paralele cuprinse între paralele). Atunci paralelogramul QMPR este romb.

În triunghiul FPC, $m(\angle FPC)=180°-(30°+60°)=90°$.
Deci $m(\angle RPM)=90°$. Rombul QMPR având un unghi drept este pătrat.

R3.5.7 Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $m(\angle A)=90°$. Pe laturile (AB) şi (AC) construim spre exterior triunghiurile echilaterale ABD respectiv ACE. Să se demonstreze că patrulaterul BCED este trapez isoscel.

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că (AD)≡(AE), deci ADE este isoscel cu m(∠DAE)=360°-(90°+60°+60°)=150°.

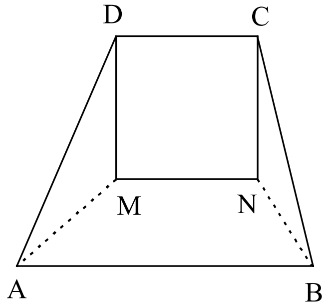
Atunci m(∠EDA)=m(∠DEA) (15°).



Avem m(∠EDB)+m(∠CBD)=(15°+60°)+(45°+60°)=180°, adică unghiurile ∠EDB şi ∠CBD sunt interne de aceeaşi parte a secantei suplementare şi deci DE||BC, adică BCED este trapez. Dar (BD)≡(CE) şi atunci trapezul BCED este isoscel.

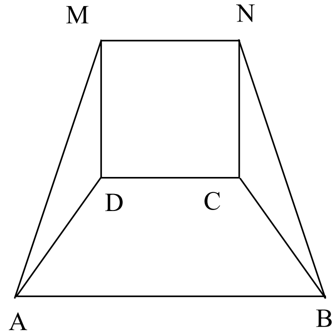
Pe baza mică [CD] a trapezului isoscel ABCD se construieşte pătratul CDMN. Demonstrați că patrulaterul ABMN este trapez isoscel.

Demonstrație. a) Pătratul este construit spre interior.



Din MN||DC şi AB||DC rezultă că MN||AB, deci ABNM este trapez. Trapezul ABCD fiind isoscel are unghiurile alăturate unei baze congruente. Deci ∠ADC≡∠BCD, de unde rezultă că ∠ADM≡∠BCN. Atunci ΔADM≡ΔBCN (LUL) având (AD)≡(BC) (ABCD – trapez isoscel), ∠ADM≡∠BCN, (DM)≡(CN) ca laturi ale pătratului DCNM. Din congruența celor două triunghiuri rezultă că (AM)≡(BN), adică trapezul ABNM este isoscel.

b) Pătratul este construit spre exterior.



Trapezul ABCD fiind isoscel are unghiurile alăturate unei baze congruente. Deci

$$\angle ADC \equiv \angle BCD \qquad (1)$$

Atunci $m(\angle MDA)=360°-[90°+m(\angle ADC)]$ sau

$$m(\angle MDA)=270°-m(\angle ADC) \qquad (2)$$

Analog

$$m(\angle NCB)=270°-m(\angle BCD) \qquad (3)$$

Din relațiile (1), (2) şi (3) obținem:

$$\angle MDA \equiv \angle NCB \qquad (4)$$

Atunci $\Delta MDA \equiv \Delta NCB$ (LUL), având $(MD)\equiv(MC)$, laturi ale pătratului MNCD, $\angle MDA \equiv \angle NCB$ din relația (4), $(AD)\equiv(CB)$ din trapezul isoscel ABCD.

Din congruența celor două triunghiuri obținem că

$$(MA)\equiv(NB) \qquad (5)$$

Fiindcă $DC \| MN$, $DC \| AB$ obținem

$$MN \| AB \qquad (6)$$

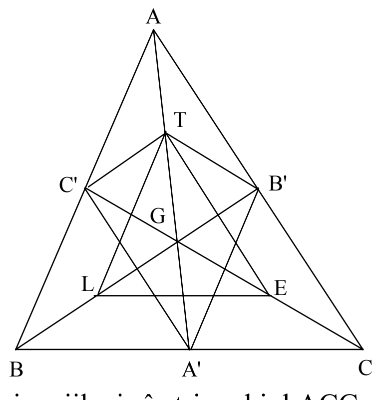
Din relațiile (5) şi (6) rezultă că trapezul ABNM este isoscel.

3.6. Concurența liniilor importante în triunghi

Pentru demonstrarea concurenței liniilor importante din triunghi folosim proprietățile patrulaterelor, a liniei mijlocii în triunghi şi proprietățile de loc geometric ale unor linii importante din triunghi.

Teorema 3.6.1. În orice triunghi medianele sunt concurente.

Demonstrație. Fie A',B',C' mijloacele laturilor [BC], [CA], [AB] ale triunghiului ABC, iar G punctul de concurență a medianelor [AA'] şi [CC']. Considerăm punctele T şi E astfel încât T este mijlocul lui [AG] şi E este mijlocul lui [GC].



Atunci [TE] este linie mijlocie în triunghiul ACG. Avem

$$ET \| AC, \quad ET = \frac{1}{2}AC \qquad (1)$$

În triunghiul BCA, [A'C'] este linie mijlocie, rezultă că

$$A'C' \| AC \quad \text{şi} \quad A'C' = \frac{1}{2} AC \qquad (2)$$

Din relațiile (1) şi (2) obținem că patrulaterul C'A'ET este paralelogram având două laturi opuse paralele şi congruente. Cum G este punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului C'A'ET avem relațiile:

$$GA' = GT = \frac{1}{3} AA' \quad \text{şi} \quad GC' = GE = \frac{1}{3} CC' \qquad (3)$$

Fie L mijlocul lui [BG]. Atunci [LT] este linie mijlocie în triunghiul GAB şi putem scrie relațiile:

$$TL \| AB, \quad TL = \frac{AB}{2} \qquad (4)$$

În triunghiul CAB, [A'B'] este linie mijlocie, atunci

$$A'B' \| AB, \quad A'B' = \frac{1}{2} AB \qquad (5)$$

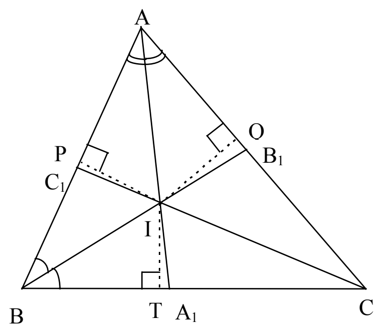
Din (4) şi (5) rezultă că patrulaterul A'B'TL este paralelogram şi

$$GB' = GL = \frac{1}{3} BB' \qquad (6)$$

Din relațiile (3) şi (6) rezultă că $\{G\} = AA' \cap BB' \cap CC'$ şi G se găseşte pe fiecare mediană la $\frac{1}{3}$ de bază şi la $\frac{2}{3}$ de vârf.

Teorema 3.6.2. În orice triunghi bisectoarele interioare sunt concurente.

Demonstrație. Fie $[AA_1$ şi $[BB_1$ bisectoarele unghiurilor $\angle A$ şi $\angle B$, iar I punctul lor de intersecție.



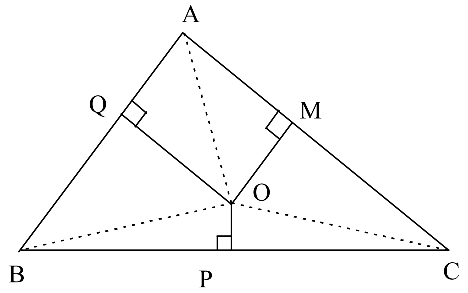
Bisectoarele $[AA_1$ şi $[BB_1$ nu pot fi paralele pentru că ar însemna că $\angle ABB_1$ şi $\angle BAA_1$ ar fi interne de aceeaşi pare a secantei AB, şi suma măsurilor lor ar fi 180° ca şi suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABC, ceea ce este imposibil. Deci $[AA_1$ şi $[BB_1$ sunt concurente în I. Punctele de pe bisectoare fiind egal depărtate de laturi avem relațiile:

$$(IP) \equiv (IT), \quad (IP) \equiv (IQ), \quad \text{cu} \quad IP \perp AB, \quad IT \perp BC, \quad IQ \perp AC \quad \text{şi}$$
$$P \in (AB), \quad Q \in (AC), \quad T \in (BC).$$

Din relațiile de mai sus rezultă că (IT)≡(IQ), deci punctul I se găseşte şi pe bisectoarea ∠ACB.

Teorema 3.6.3. Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente.

Demonstrație. Fie punctele Q şi P mijloacele laturilor [AB] şi [BC] ale triunghiului ABC, iar O punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor [AB] şi [BC]. Aceste două mediatoare sunt concurente, căci dacă ar fi paralele, punctele A, B, C ar fi coliniare, ceea ce este imposibil fiind vârfurile triunghiului ABC.



Punctele de pe mediatoarea unui segment fiind egal depărtate de extremitățile segmentului; avem relațiile:

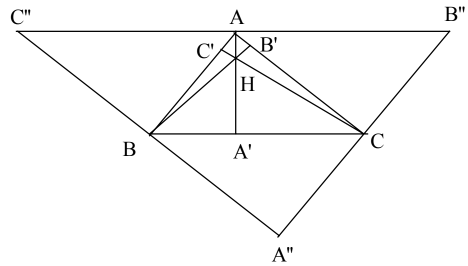
(OA)≡(OB) (OQ fiind mediatoarea laturii AB)

(OB)≡(OC) (OP fiind mediatoarea laturii BC)

Din relațiile de mai sus obținem (OA)≡(OC), adică punctul O este situat pe mediatoarea laturii (AC).

Teorema 3.6.4. Înălțimile unui triunghi sunt concurente.

Demonstrație. Considerăm triunghiul ABC cu înălțimile AA', BB', CC' (AA'⊥BC, BB'⊥AC, CC'⊥AB).



Prin vârfurile triunghiului ABC ducem paralele la laturile opuse care se intersectează două câte două în punctele A", B", C". Patrulaterele ABCB" şi C"BCA, având laturile opuse paralele sunt paralelograme, rezultă că laturile opuse sunt congruente, deci (AB")≡(BC) şi (AC")≡(BC), de unde (AB")≡(AC"), de unde rezultă că A este mijlocul lui [C"B"]. Deci AA' este mediatoarea lui [C"B"] (1).

Din paralelogramele AB"CB şi ACA"B rezultă că (AB)≡(B"C) şi (AB)≡(CA"), de unde (B"C)≡(A"C), adică C este mijlocul lui [A"B"]. Atunci CC' este mediatoarea laturii [A"B"] (2).

Din paralelogramele ACA"B şi ACBC" rezultă că (AC)≡(BA") şi (AC)≡(C"B), de unde (C"B)≡(BA"), adică B este mijlocul lui [C"A"]. Atunci B"B este mediatoarea laturii [C"A"] (3).

Din (1), (2) şi (3) rezultă că înălţimile triunghiului ABC sunt şi mediatoarele laturilor triunghiului $A_1B_1C_1$. Cum concurenţa mediatoarelor a fost demonstrată, rezultă că şi înălţimile sunt concurente.

3.7. Probleme de coliniaritate

Problemele a căror concluzie solicită demonstrarea apartenenţei unor puncte la o aceeaşi dreaptă le vom numi probleme de coliniaritate.

În continuare enumerăm câteva dintre procedeele cele mai des întâlnite pentru soluţionarea problemelor de coliniaritate la nivelul clasei a VI-a:

a) **Demonstrarea coliniarităţii cu ajutorul unghiului alungit (unghiuri adiacente suplementare)**

Dacă punctele A şi B sunt situate de o parte şi de alta a dreptei CD şi $m(\angle ACD)+m(DCB)=180°$, atunci punctele A, C, B sunt coliniare.

b) **Demonstrarea coliniarităţii folosind reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf**

Dacă punctul B este situat pe dreapta EF, iar punctele A şi C sunt situate de o parte şi de alta a dreptei EF şi $\angle ABF\equiv\angle CBE$, atunci punctele A, B, C sunt coliniare.

c) **Demonstrarea coliniarităţii prin identificarea unei drepte ce conţine punctele respective**

d) **Demonstrarea coliniarităţii folosind postulatul lui Euclid**

Dacă dreptele AB şi BC sunt paralele cu o dreaptă d, atunci în baza postulatului lui Euclid, punctele A, B, C sunt coliniare.

e) **Demonstrarea coliniarităţii folosind axioma de construcţie a unghiului**

Dacă B şi C sunt în acelaşi semiplan determinat de dreapta AA' şi $\angle A'AB\equiv\angle A'AC$, atunci A, B, C sunt coliniare.

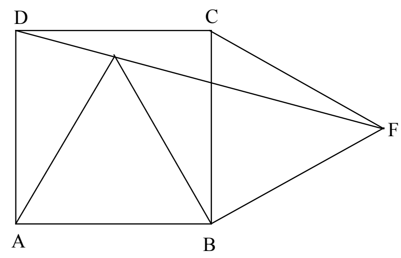
f) **Demonstrarea coliniarităţii punctelor A, B, C demonstrând că AB+BC=AC**

Vom exemplifica procedeele prin probleme rezolvate în continuare.

a) Demonstrarea coliniarităţii cu ajutorul unghiului alungit

R3.7.1 Pe laturile consecutive AB şi BC ale pătratului ABCD se construiesc triunghiurile echilaterale ABE şi BCF, primul interior şi al doilea exterior pătratului. Să se arate că punctele D, E, F sunt coliniare.

Soluţie. Fiindcă triunghiul ABE este echilateral, $m(\angle BAE)=60°$ şi atunci $m(\angle DAE)=90°-60°=30°$. Triunghiul ADE este isoscel cu $(AD)\equiv(AE)$ şi atunci $m(\angle ADE)=m(\angle AED)=(180°-30°):2=75°$. Triunghiul EBF este dreptunghic deoarece $m(\angle EBC)+m(\angle CBF)=30°+60°=90°$. Fiindcă $(EB)\equiv(BF)$, triunghiul EBF este dreptunghic isoscel. Atunci $m(\angle BEF)=45°$. Deci $m(\angle DEA)+m(\angle AEB)+m(\angle BEF)=75°+60°+45°=180°$, adică punctele D, E, F sunt coliniare.



R3.7.2 Să se demonstreze că într-un trapez mijloacele laturilor paralele şi intersecţia diagonalelor sunt trei puncte coliniare.

Soluţie. Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor AC şi BD ale trapezului ABCD, iar L şi T mijloacele bazelor (AB) şi (CD). Deoarece AB||DC rezultă că $\angle DTL \equiv \angle BLT$ (alterne interne), iar $\angle TDB \equiv \angle LBD$ (alterne interne) şi atunci obţinem că

$$\angle DOT \equiv \angle BOL \qquad (1)$$

Mai avem că $\angle AOD \equiv \angle BOC$ (opuse la vârf) (2).

Şi $\angle ALT \equiv \angle CTL$ (alterne interne), $\angle LAC \equiv \angle TCA$, atunci obţinem că

$$\angle AOL \equiv \angle COT \qquad (3)$$

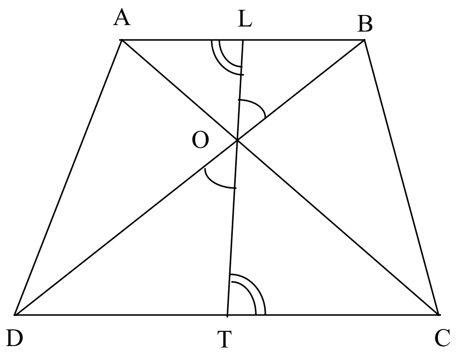
Cu relaţiile (1), (2), (3) în jurul punctului O avem:

$$2m(\angle AOL)+2m(\angle AOD)+2m(\angle DOT)=360°,$$

de unde

$$m(\angle AOL)+m(\angle AOD)+m(\angle DOT)=180°,$$

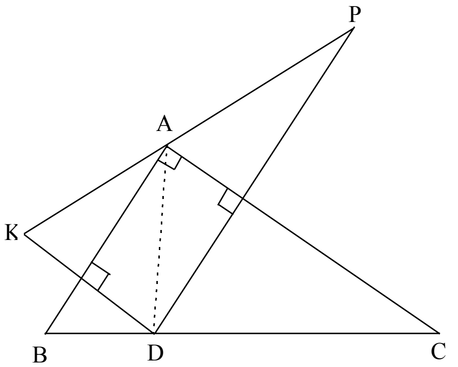
rezultă că punctele T, O, L sunt coliniare.



R3.7.3 Pe ipotenuza (BC) a triunghiului dreptunghic ABC se consideră un punct arbitrar D. Fie K şi P simetricele lui D faţă de AB respectiv AC. Să se arate că punctele K, A, P sunt coliniare.

Soluţie. Punctul A se găseşte pe mediatoarea segmentului [DK], el va fi egal depărtat de capetele segmentului. Deci (AK)≡(AD). În triunghiul ADK, înălţimea AB este şi bisectoare, deci

$$\angle KAB \equiv \angle BAD \qquad (1)$$



Punctul A se găseşte şi pe mediatoarea [DP], rezultă că (AD)≡(AP). În triunghiul isoscel APD, înălţimea AC este şi bisectoare, deci

$$\angle PAC \equiv \angle CAD \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem:

$$m(\angle KAB)+m(\angle BAC)+m(\angle CAP)=2m(\angle BAC)=180°$$

deci punctele K, A, P sunt coliniare.

b) **Demonstrarea coliniarităţii folosind reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf**

R3.7.4 Se consideră patrulaterul ABCD cu E mijlocul lui [AB] şi R mijlocul lui [CD]. Prin E se duc EF paralelă la BC şi EQ paralelă la AD, iar prin vârfurile C şi D se duce câte o paralelă la AB. Obţinem paralelogramul BCFE şi AEQD. Să se arate că vârfurile F şi Q ale acestor paralelograme sunt coliniare cu R.

Demonstraţie. BCFE este paralelogram deci

$$[CF]\equiv[BE] \qquad (1)$$

Din paralelogramul AEQD obţinem

$$[EA]\equiv[QD] \qquad (2)$$

Şi

$$[BE]\equiv[EA] \qquad (3)$$

deoarece E este mijlocul lui AB.

Din (1), (2) şi (3) rezultă că

$$[CF]\equiv[QD] \qquad (4)$$

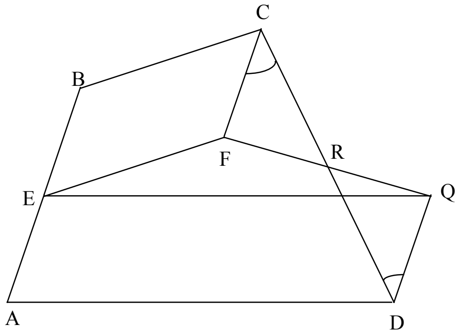
Punctul R este mijlocul lui [CD], deci

$$[CR]\equiv[DR] \qquad (5)$$

Mai avem că CF||BA||QD, deci CF||QD. atunci

$$\angle FCR \equiv \angle QDR \qquad (6)$$

Din (4), (5), (6) obţinem că triunghiurile CFR şi DQR sunt congruente (LUL). Din congruenţa celor două triunghiuri obţinem că ∠CRF≡∠DRQ şi cum F şi Q sunt de o parte şi de alta a dreptei CD, deci punctele C, R, Q sunt coliniare.



c) **Demonstrarea coliniarității prin identificarea unei drepte ce conține punctele respective**

R3.7.5 În triunghiul ABC cu m(∠B)=2m(∠C), notăm cu I intersecția bisectoarelor [BB' şi [AA', B'∈(AC), A'∈(BC). Perpendiculara din B pe AA' intersectează perpendiculara din B' pe BC în D. Să se demonstreze că punctele I, D, C sunt coliniare.

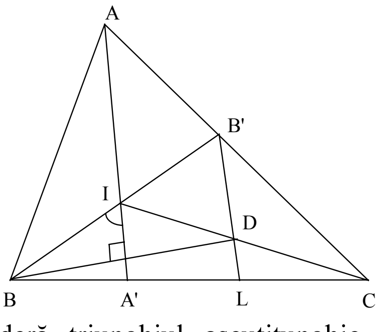
Demonstrație. Din m(∠B)=2m(∠C) rezultă m(∠A'BB')=m(∠C), deci triunghiul B'BC este isoscel şi atunci [B'D va fi bisectoarea ∠BB'C. Unghiul ∠BA'A este exterior triunghoului AA'C şi deci

$$m(\angle BA'A) = m(\angle C) + m\left(\frac{\angle A}{2}\right) \quad (1)$$

Unghiul ∠BIA' este exterior triunghiului ABI. Deci

$$m(\angle BIA') = m(\angle IBA) + m(\angle IAB) = m(\angle C) + m\left(\frac{\angle A}{2}\right) \quad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că triunghiul BIA' este isoscel. Atunci înălțimea BD a triunghiului IBA' este şi bisectoare. Deci punctul D este punctul de intersecție a bisectoarelor [BD şi [B'D ale unghiurilor triunghiului B'BC. Fiindcă [CI este bisectoarea unghiului C ea conține şi punctul D, deci punctele C, D, I sunt coliniare.



R3.7.6 Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC, iar AD bisectoarea unghiului ∠BAC, cu D∈(BC). Fie L şi K simetricul lui D față de AB, respectiv AC, iar Q intersecția paralelei prin L la AC cu paralela prin K la AB. Arătați că punctele A, D, Q sunt coliniare.

Soluție. Fiindcă LD⊥AB şi AB||QK, rezultă că LD⊥QK sau

$$LR \perp QK \quad (1)$$

$R \in KQ$ şi $KD \perp AC$, $LQ \| AC$ rezultă că $KD \perp LQ$ sau

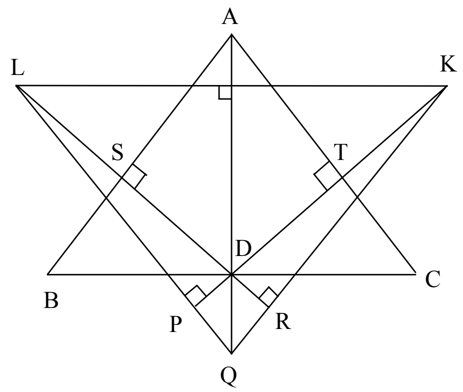
$$KP \perp LQ \quad (2)$$

$P \in LQ$.

Din (1) şi (2) rezultă că punctul D este ortocentrul triunghiului LKQ, de unde $QD \perp LK$.

Fie $\{S\}=AR \cap AB$ şi $\{T\}=KP \cap AC$. Din congruența triunghiurilor dreptunghice ADS şi ADT obținem că $(DS) \equiv (DT)$ sau $2DS=2DT$, care se mai scrie $DL=DK$.

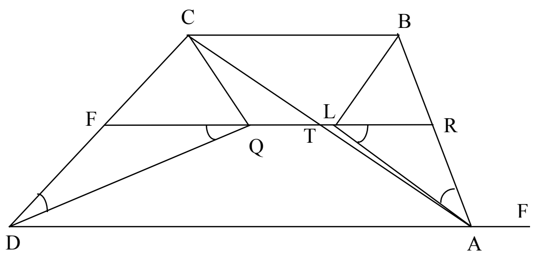
Deci triunghiul LDK este isoscel iar [DA este bisectoare (din $\Delta ADS \equiv \Delta ADT$), ea va fi şi mediatoarea lui (LK). Deci $DA \perp LK$. Din unicitatea perpendicularei din D pe (LK) rezultă că punctele A, D, Q sunt coliniare.



R3.7.7 Fie trapezul ABCD cu $AD \| BC$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor A şi B se intersectează în L, iar bisectoarele interioare din C şi D se intersectează în Q. Dacă T este mijlocul diagonalei (AC). Să se arate că punctele L, T, Q sunt coliniare.

Demonstrație. Fiindcă $DA \| CB$ rezultă că $\angle CBA \equiv \angle BAF$ (alterne interne).

dar $m(\angle DAB)+m(\angle BAF)=180° \Leftrightarrow m(\angle BAL)+m\left(\frac{\angle CBA}{2}\right)=90° \Leftrightarrow$ $m(\angle BAL)+m(\angle LBA)=90°$. Deci $(\angle ALB)=90°$, adică ΔALB este dreptunghic în L. Fie R mijlocul lui (BA). Atunci LR este mediană în triunghiul dreptunghic BLA, deci $LR=\frac{AB}{2}$. Obținem astfel că ΔLRA este isoscel, de unde $\angle RLA \equiv \angle LAR \equiv \angle DAL$, de unde obținem că $RL \| AD$. Fie F mijlocul lui [CD], atunci [QF] este mediană în triunghiul dreptunghic CQD. Obținem $QF=\frac{CD}{2}$, adică triunghiul QFD este isoscel cu $\angle FQD \equiv \angle FDQ \equiv \angle QDA$, de unde rezultă că $FQ \| DA$. [FR] este linie mijlocie în trapez, deci $TR \| AD$. Deci linia mijlocie a trapezului conține punctele Q, L şi T (TR este linie mijlocie în ΔABC, $RT \| BC$).



d) **Demonstrarea coliniarității folosind postulatul lui Euclid**

R3.7.8 În triunghiul ABC, punctele B' şi C' sunt mijloacele segmentelor [AC], respectiv [AB]. Dacă L este simetricul punctului B față de B' şi T este simetricul punctului C față de C', să se demonstreze că punctele T, A, L sunt coliniare.

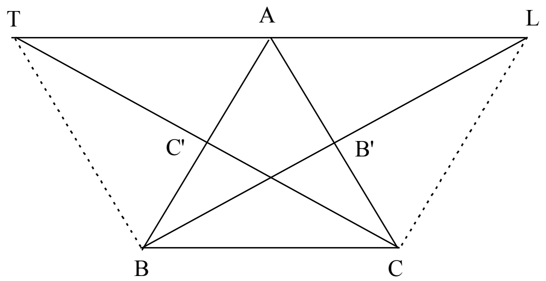
Demonstrație. În patrulaterul ACBT, diagonalele [AB] şi [TC] se taie în părți congruente, rezultă că ACBT este paralelogram. Deci

$$AT \parallel BC \qquad (1)$$

Şi diagonalele patrulaterului ABCL se împjumătățesc şi deci ABCL este paralelogram. Atunci

$$AL \parallel BC \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) ținând seama că prin A trece numai o singură paralelă la BC obținem că punctele T, A, L sunt coliniare.



R3.7.9 Se dă un triunghi ABC. Să se arate că mijloacele laturilor AB, BC şi proiecția vârfului B pe bisectoarea unghiului A sunt trei puncte coliniare.

Demonstrație. Fie T mijlocul lui [AB] şi Q mijlocul lui [BC]. Fie $BL \perp AE$, $L \in (AE)$. Atunci triunghiul ABL este dreptunghic, iar TL este mediană, corespunzătoare ipotenuzei [AB], deci $TL = \frac{AB}{2} = AT$. Obținem astfel că triunghiul ATL este isoscel cu $(TA) \equiv (TL)$, deci

$$\angle TAL \equiv \angle TLA \qquad (1)$$

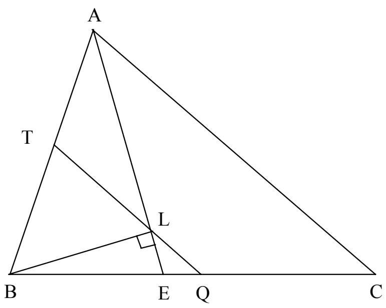
Dar

$$\angle CAL \equiv \angle LAT \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că $\angle CAL \equiv \angle ALT$, deci

$$AC \parallel TL \qquad (3)$$

În triunghiul ABC, [TQ] este linie mijlocie şi atunci



$$AC \parallel TQ \qquad (4)$$

Din (3) şi (4), ţinând seama că prin T trece o singură paralelă la AC obţinem că punctele T, L, Q sunt coliniare.

Pe latura [BC] a triunghiului ABC se consideră un punct D astfel încât BC=3DC. Dacă R este mijlocul medianei CM, $M \in (AB)$, să se arate că punctele A, R, D sunt coliniare.

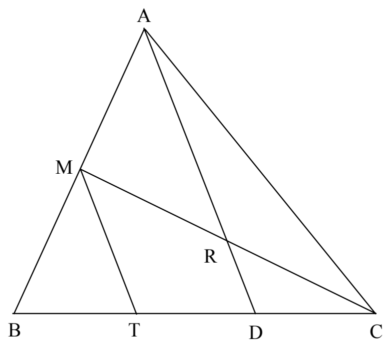
Soluţie. Dacă T este mijlocul lui BD, atunci [MT] este linie mijlocie în triunghiul ABD şi deci

$$AD \parallel MT \qquad (1)$$

În triunghiul CMT, [RD] este linie mijlocie, rezultă că

$$RD \parallel MT \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) şi faptul că prin punctul R trece numai o singură paralelă la MT, rezultă că punctele A, R, D sunt coliniare.



3.8. Probleme de concurenţă

Vom numi problemă de concurenţă o problemă de geometrie a cărei concluzie cere demonstrarea faptului că trei sau mai multe drepte (cercuri) au ca intersecţie acelaşi punct.

Dintre procedeele mai des utilizate pentru demonstrarea concurenţei (la nivelul clasei a VI-a) amintim:

a) Demonstrăm că punctul de intersecţie a două dintre drepte aparţine şi celei de-a treia dreaptă. (Trebuie demonstrat că punctul de intersecţie a două dintre drepte există, iar apartenenţa lui la cea de-a treia dreaptă se demonstrează de obicei arătând că punctele acesteia sunt caracterizate de o anumită proprietate specifică, pe care o are şi punctul obţinut ca intersecţie a celor două drepte.)

b) Demonstrarea concurenţei a trei drepte prin identificarea acestora cu trei ceviene remarcabile concurente (bisectoare, înălţimi, mediane, etc.) dintr-un triunghi din configuraţia problemei.

c) Demonstrarea concurenţei prin coliniaritate.

Vom exemplifica procedeele enunţate mai sus în rezolvarea unor probleme.

Probleme rezolvate

R3.8.1 Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC. Dacă D, E, T sunt simetricele punctului M față de mijloacele laturilor [BC], [CA], [AB], să se demonstreze că dreptele AD, BE, CT sunt concurente.

Demonstrație. Fie G, H, K mijloacele laturilor [AB], [AC], [BC]. Diagonalele patrulaterului AMBT se taie în părți congruente, rezultă că el este paralelogram, deci

$$AT \| MB, \quad (AT) \equiv (MB) \tag{1}$$

Analog patrulaterul MCDB este paralelogram fiindcă diagonalele lui se taie în părți congruente. Atunci

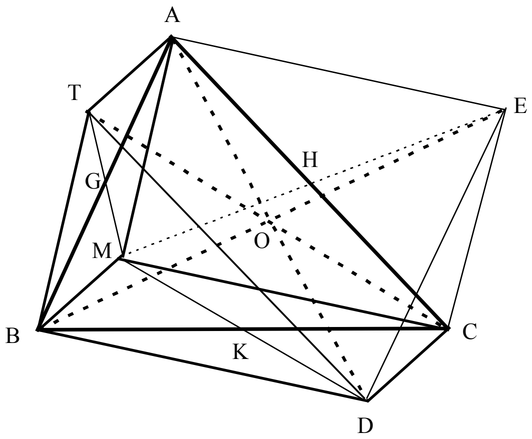
$$MB \| CD, \quad (MB) \equiv (CD) \tag{2}$$

şi

$$BD \| MC, \quad [BD] \equiv [MC] \tag{3}$$

Din (1) şi (2) obținem că patrulaterul ATDC este paralelogram, având 2 laturi opuse paralele şi congruente. Diagonalele lui se intersectează în O. Diagonalele patrulaterului AMCE se taie în părți congruente şi atunci el este paralelogram, deci

$$AE \| MC, \quad (AE) \equiv (MC) \tag{4}$$



Din relațiile (3) şi (4) rezultă că $AE \| BD$ şi $(AE) \equiv (BD)$, atunci ABDE este paralelogram şi BE intersectează pe AD în O. Obținem astfel că dreptele AD, BE, CT sunt concurente în O.

R3.8.2 Pe diagonala (BD) a paralelogramului ABCD se consideră punctele E şi M astfel încât $(BE) \equiv (EM) \equiv (MD)$. Dacă $\{T\} = BC \cap AE$, $\{Q\} = AM \cap CD$, $\{L\} = AB \cap CE$ şi $\{P\} = AD \cap CM$, să se demonstreze că dreptele AC, EM şi LQ sunt concurente.

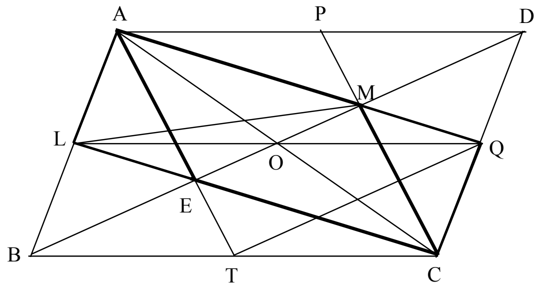
Demonstrație. Triunghiurile ADM şi CBE sunt congruente având $(AD) \equiv (BC)$, $(\angle ADM) \equiv (\angle CBE)$ (alterne interne), $(DM) \equiv (BE)$. Din congruența acestor două triunghiuri obținem că

$$(AM) \equiv (CE) \tag{1}$$

Şi triunghiurile ADE şi CBM sunt congruente având $(AD) \equiv (BC)$, $(\angle ADE) \equiv (\angle CBM)$ şi $(DE) \equiv (BM)$. Din congruența lor obținem că

$$(AE) \equiv (CM) \qquad (2)$$

Din relațiile (1) şi (2) rezultă că patrulaterul AECM, având laturile opuse congruente este paralelogram, şi deci (EM) trece prin mijlocul O al diagonalei (AC). Patrulaterul ALCQ, având laturile opuse paralele este paralelogram (AQ||LC din faptul că AECM este paralelogram). Deci diagonala (LQ) trece prin mijlocul O al diagonalei (AC). Atunci dreptele AC, EM, LQ sunt concurente.



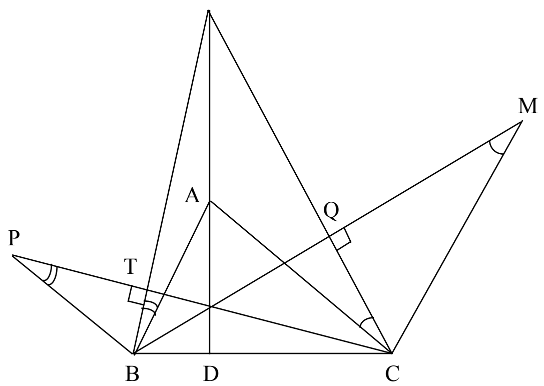
Dreptele care trebuie să demonstrăm că sunt concurente sunt mediane, bisectoare, înălțimi, mediatoare, etc. pentru un anumit triunghi.

R3.8.3 Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A şi AD înălțime, $D \in (BC)$. În C, pe cateta AC se ridică o perpendiculară pe care se consideră un segment $(CM) \equiv (AC)$, iar în B pe cateta AB se construieşte o perpendiculară pe care se ia un segment BP cu $(BP) \equiv (AB)$. Să se demonstreze că dreptele BM, CP şi AD sunt concurente.

Soluție. Prelungim înălțimea DA cu un segment $(AR) \equiv (BC)$. Avem

$$m(\angle RAC) = 180° = m(\angle DAC) = 180° - [90° - m(\angle ACD)] =$$
$$= 90° + m(\angle ACD) = m(\angle BCM)$$

Atunci triunghiurile RAC şi BCM sunt congruente fiindcă au $(RA) \equiv (BC)$, $m(\angle RAC) \equiv m(\angle BCM)$, $(AC) \equiv (MC)$. Din congruența celor două triunghiuri rezultă că $(\angle RCA) \equiv (\angle CMB)$.



Fie $\{Q\} = BM \cap RC$. Atunci

$$m(\angle CQM) = 180° - [m(\angle QCM) + m(\angle CMQ)] =$$
$$= 180° - [m(\angle QCM) + m(\angle RCA)] = 180° - 90° = 90°$$

Deci $BQ \perp RC$, adică BQ este înălțime în triunghiul RBC.

Analog arătăm congruența triunghiurilor RAB şi CBP. Avem

$$m(\angle RAB)=180°-m(\angle DAB)=180°-(90°-m(\angle ABD))=$$
$$=90°+m(\angle ABD)=m(\angle PBD)$$

Deci $\Delta RAB \equiv \Delta CBP$ având $(RA)\equiv(BC)$, $\angle RAB \equiv \angle PBD$ şi $(AB)\equiv(BP)$.

Din congruența acestor triunghiuri obținem: $(\angle ABR)\equiv(\angle BPC)$.

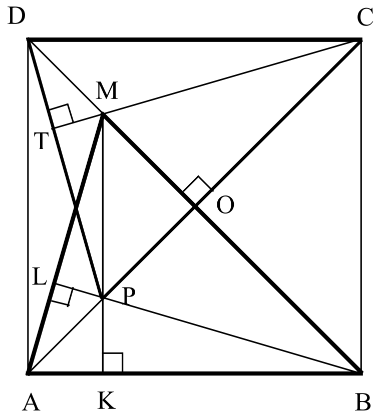
Fie $\{T\}=PC\cap AB$. Avem

$$m(\angle PTB)=180°-[m(\angle TPB)+m(\angle PBT)]=$$
$$=180°-[m(\angle ABR)+m(\angle PBT)]=180°-90°=90°$$

Deci $PT \perp BR$, adică CT este înălțime în triunghiul RBC. Deci dreptele CT, BQ, AD sunt concurente fiind înălțimi în triunghiul RBC.

R3.8.4 Fie M un punct pe diagonala [BD] a pătratului ABCD. Să se demonstreze că perpendicularele duse din M, B, D respectiv pe AB, AM, CM se întâlnesc pe diagonala [AC].

Soluție. Fie L şi K picioarele perpendicularelor duse din B pe MA şi respectiv din M pe AB. În triunghiul MAB înălțimile MK şi BL se intersectează în P. Diagonalele pătratului sunt perpendiculare, deci AO este înălțime în triunghiul MAB, deci perpendicularele PK şi BL din M pe AB, respectiv B pe MA se întâlnesc pe diagonala (AC). Fiindcă $MP \perp AB$, rezultă că $MP \perp DC$. Dar $DM \perp PC$, şi atunci M este ortocentrul triunghiului DCP, rezultă că $CM \perp DP$. Astfel perpendicularele din M, B, D respectiv pe AB, AM, CM se întâlnesc pe (AC).



3.9. Construcții geometrice

Prin probleme de construcție vom înțelege acele probleme de geometrie în care se cere construirea unor figuri geometrice ce satisfac anumite proprietăți, folosind numai rigla şi compasul.

Înainte de a considera probleme de construcție cu rigla şi compasul, Edwin Moise în lucrarea "Geometrie elementară" face câteva precizări:

i) Când vorbim de riglă şi compas, înțelegem o "riglă ideală" şi un "compas ideal", care trasează liniile drepte şi cercurile exact.

ii) Rigla nu are un marcaj pe ea. O putem utiliza pentru a desena drepte între două puncte date, dar aceasta este tot ceea ce putem face cu ea. Nu o putem utiliza pentru a măsura distanțele dintre puncte sau pentru a vedea dacă două segmente sunt congruente.

iii) Compasul se poate utiliza astfel. Fie un punct P şi un punct Q în plan. Putem desena atunci cercul cu centrul în P şi care trece prin Q. Aceasta este tot ce putem face cu el. Altfel spus, dându-se un al treilea punct P' nu este permis să mutăm vârful compasului în P' şi apoi să desenăm un cerc cu centrul în P' şi de rază PQ. Din acest motiv compasul este numit nerigid; nu i se poate muta vârful deoarece "când ridici vârful de pe hârtie, compasul se închide".

Să reamintim câteva dintre construcțiile elementare studiate şi justificate la clasă.

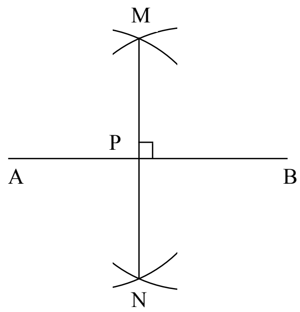
3.9.1. Construcția mediatoarei unui segment şi a mijlocului său

Considerăm un segment [AB].

1) Cu o rază mai mare decât jumătate din lungimea segmentului [AB] desenăm două arce de cerc cu centrul în A deoparte şi de cealaltă a dreptei AB.

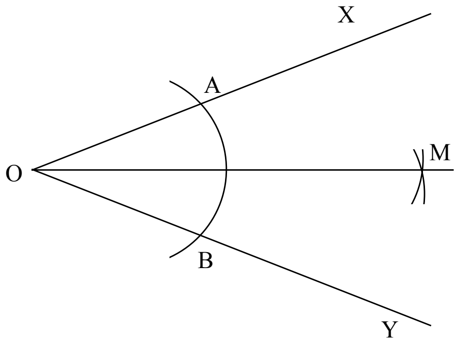
2) Cu aceeaşi rază ca mai sus desenăm două arce de cerc cu centrul în B, de o parte şi de cealaltă a dreptei AB, care intersectează arcele cu centrul în A în M şi N.

3) Dreapta MN este mediatoarea segmentului [AB]. Punctul de intersecție P, dintre AB şi MN este mijlocul segmentului [AB].



3.9.2. Construcția bisectoarei unui unghi dat $\angle XOY$

Considerăm un punct O drept centru şi desenăm un arc de cerc care va intersecta laturile unghiului în A şi B. Cu aceeaşi rază mai mare decât $\frac{1}{2}AB$ desenăm un arc de cerc cu centrul în A şi unul cu centrul în B. Ce două arce se intersectează în M. Semidreapta [OM este bisectoarea unghiului $\angle XOY$.

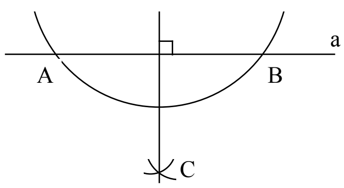


3.9.3. Construcția perpendicularei pe o dreaptă dintr-un punct al ei

Considerăm punctul O pe dreapta a. Cu o deschidere oarecare a compasului se construiesc două arce ale unui cerc cu centrul în O şi care intersectează dreapta a în A şi B. Perpendiculara căutată este mediatoarea segmentului AB.

3.9.4. Construcția perpendicularei pe o dreaptă dintr-un punct exterior al ei

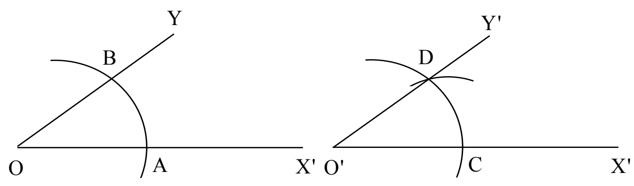
Considerăm o dreaptă a şi un punct O nesituat pe ea. Desenăm un arc de cerc cu centrul în O şi cu raza mai mare decât distanța de la O la a, care intersectează pe a în A şi B. Mai construim un punct C egal depărtat de A şi B şi atunci $OC \perp a$.



3.9.5. Construcția unui unghi congruent cu un unghi dat

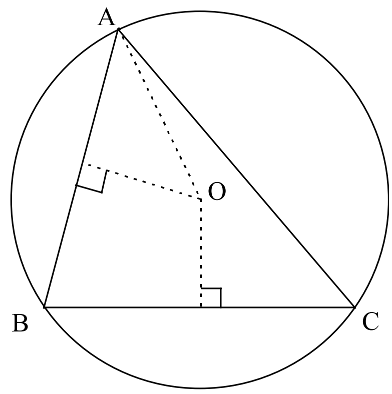
Fiind dat unghiul $\angle XOY$, trebuie să construim un unghi congruent cu el $\angle X'O'Y'$.

Cu centrele în O şi O' desenăm două arce de cerc şi obținem punctele A, B, C. Descriem un arc de cerc cu centrul în C şi raza AB. Obținem astfel punctul D. Latura [O'Y' este semidreapta [O'D.



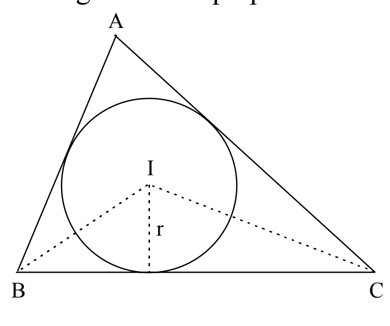
3.9.6. Construcția cercului circumscris triunghiul ABC

Se construiesc mediatoarele a două laturi ale triunghiului. Intersecția lor, O, va fi centrul cercului circumscris. Raza R va fi OA.



3.9.7. Construcția cercului înscris în triunghiul ABC

Se construiesc bisectoarele a două unghiuri. Intersecția lor, I, va fi centrul cercului înscris. Raza, r, va fi lungimea unei perpendiculare duse din I pe o latură.



3.9.8. Construcția centrului de greutate G

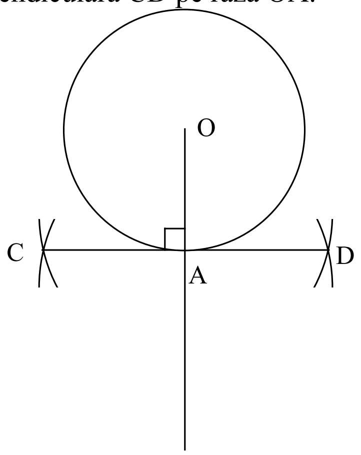
Construim mijloacele a două laturi şi apoi medianele corespunzătoare.

3.9.9. Construcția ortocentrului H

Se construiesc perpendicularele din două vârfuri ale triunghiului pe laturile opuse.

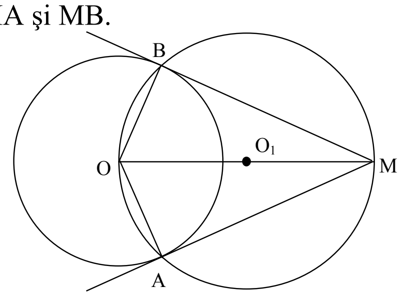
3.9.10. Construcția tangentei la cercul *C*(O,R), într-un punct A al cercului

Se construieşte perpendiculara CD pe raza OA.



3.9.11. Construcția tangentelor la cercul *C*(O,R) dintr-un punct exterior M

Se determină mijlocul segmentului [OM], O_1, şi apoi se construieşte cercul de diametru [OM]. Cercul astfel construit va intersecta cercului *C*(O,R) în A şi B. Tangentele căutate sunt MA şi MB.



3.9.12. Rezolvarea problemelor de construcții geometrice

În rezolvarea problemelor de construcții geometrice parcurgem următoarele etape:

1) Analiza (găsirea soluției). Se consideră figura construită şi identificăm elementele construibile folosind construcțiile elementare.

2) Construcția. Se prezintă succesiunea elementelor care se construiesc.

3) Demonstrația. Conține argumentarea faptului că elementele construite satisfac cerințele enunțate în problemă.

4) Discuția. Se comentează existența soluțiilor şi numărul lor.

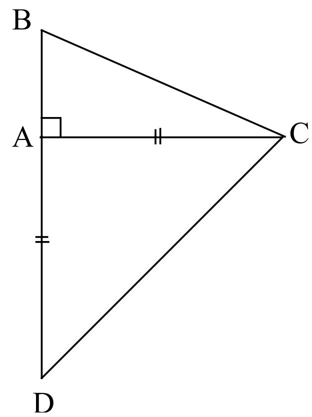
Probleme rezolvate

R3.9.1 Să se construiască un triunghi dreptunghic cunoscând suma lungimilor catetelor (b+c) şi lungimea ipotenuzei (a).

Demonstrație. Considerăm problema rezolvată şi fie BAC triunghiul căutat. Construim triunghiul dreptunghic isoscel DAC cu (AC)≡(AD).

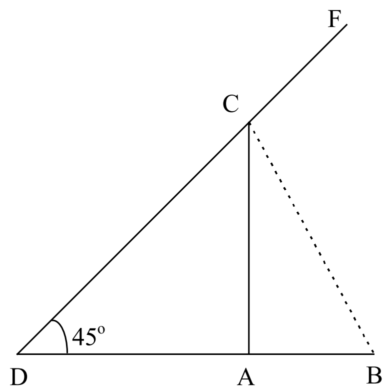
Analizăm triunghiul BCD şi deducem modul de construcție.

Construcția figurii



Pe segmentul DC=c+b (suma lungimilor catetelor), în punctul D, construim un unghi de 45°. Din B se duce un arc de cerc cu raza cât lungimea ipotenuzei a. Triunghiul cerut este ABC.

Discuție. Dacă arcul de cerc taie pe DF într-un singur punct avem soluție, dacă taie pe DF în două puncte, avem două soluții şi dacă nu-l taie în nici un punct nu avem soluție.

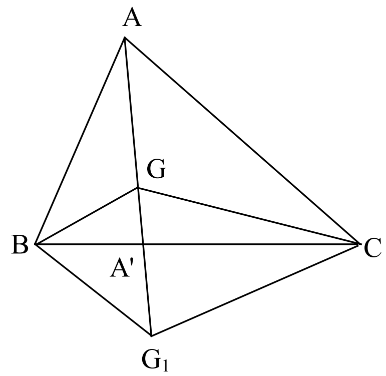


R3.9.2 Să se construiască un triunghi cunoscând lungimile medianelor sale.

Demonstrație. Fie G_1 simetricul centrului de greutate G al triunghiului ABC față de mijlocul A' al laturii [BC]. Atunci

$$GG_1 = 2 \cdot GA' = 2 \cdot \frac{1}{3} m_a = \frac{2}{3} m_a$$

$$GC = \frac{2}{3} \cdot m_c, \quad G_1C = GB = \frac{2}{3} \cdot m_b$$



Construim triunghiul GG_1C de laturi

$$GG_1 = \frac{2}{3} \cdot m_a, \quad GC = \frac{2}{3} \cdot m_c \quad \text{şi} \quad G_1C = \frac{2}{3} \cdot m_b$$

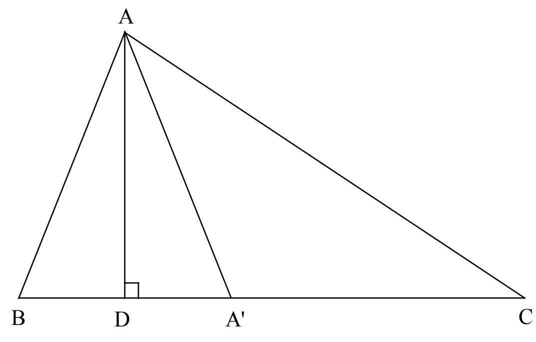
Simetricul lui G_1 față de G ne dă vârful A. Simetricul lui C față de mijlocul lui $[GG_1]$ ne dă vârful B.

Problema este posibilă numai dacă m_a, m_b, m_c satisfac relațiile de condiție dintre laturile unui triunghi.

R3.9.3 Să se construiască un triunghi dreptunghic când se cunosc înălțimea şi mediana ce pleacă din vârful unghiului drept.

Presupunem problema rezolvată. În triunghiul ABC cunoaştem înălțimea AD şi mediana AA'.

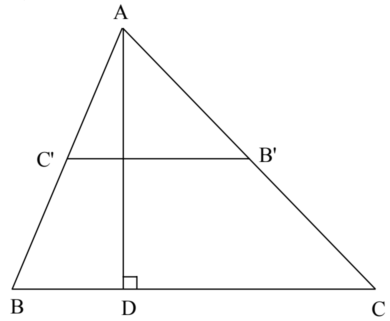
Construcția



Construim triunghiul dreptunghic ADA' în care cunoaştem cateta (AD) şi ipotenuza (AA'). Fiindcă într-un triunghi dreptunghic mediana ce pleacă din vârful unghiului drept are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei, rezultă că putem construi segmentele (A'B) şi (A'C) fiecare congruente cu AA', obţinem astfel vârfurile B şi C şi problema este rezolvată.

R3.9.4 Să se construiască un triunghi ABC cunoscând mijloacele B', C' ale laturilor [AC] şi [AB] precum şi piciorul D al înălţimii care cade din vârful A pe [BC].

Demonstraţie. Presupunem problema rezolvată şi fie ABC triunghiul căutat. În acest triunghi cunoaştem punctul D piciorul înălţimii din A, punctele B' şi C' mijloacele laturilor (AC) respectiv (AB).



Analizând figura deducem că A este simetricul lui D faţă de linia mijlocie [B'C'].

Construcţia

Unim C' cu B'. Construim punctul A ca simetricul lui D faţă de [B'C']. Ducem în D o perpendiculară pe AD. Dreapta AC' întâlneşte perpendiculara în B. Dreapta AB' întâlneşte perpendiculara în C. Triunghiul ABC astfel construit corespunde ipotezei.

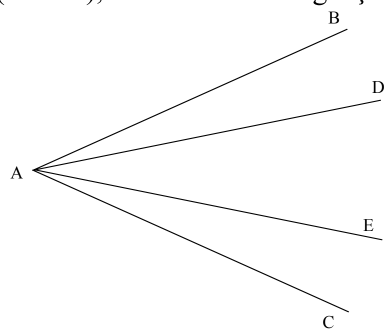
3.9.13. Probleme de construcţii imposibile ale antichităţii

Problemele de construcţie cu rigla şi compasul au preocupat matematicienii Greciei antice, care au dat soluţii la unele, dar la altele, pentru a le putea aborda era nevoie de ramuri ale matematicii pe care grecii nu le descoperiseră.

Dintre problemele de construcţii imposibile ale antichităţii poate cele mai celebre ar fi: problema trisecţiunii unghiului, duplicarea cubului, cuadratura cercului.

i) Trisecţiunea unghiului

Dându-se un unghi $\angle BAC$ se cere să construim semidreptele AD şi AE cu D, E situate în interiorul unghiului BAC astfel încât să avem: $m(\angle BAD)=m(\angle DAE)=m(\angle EAC)$, folosind numai rigla şi compasul.



Problema trisecțiunii unghiului este imposibilă. (Există unele unghiuri pentru care semidreptele care realizează trisecțiunea nu pot fi construite. Sunt unele unghiuri care pot fi împărțite în trei părți congruente, exemplu unghiul drept.)

Problema trisecțiunii unghiului devine posibilă dacă schimbăm puțin ipoteza, în sensul că permitem ca pe riglă să putem face două gradații.

ii) Duplicarea cubului

Fiind dat un segment AB, dorim să construim un segment CD astfel încât cubul cu muchia CD să aibă volumul exact de două ori mai mare decât volumul cubului cu muchia AB, adică $CD^3=2\cdot AB^3$.

iii) Cuadratura cercului

Dându-se un cerc, dorim să construim un pătrat care să aibă aceeaşi arie ca cercul, adică $l^2 = \pi \cdot R^2$, adică $l = R\sqrt{\pi}$.

Problemele de mai sus au fost studiate peste două mii de ani, descoperindu-se în final că sunt imposibile. (Demonstrațiile depăşesc cadrul de față.)

Bibliografie

[1] I. I. Alexandrov, *Probleme de construcții geometrice*, Ed. Tehnică, 1951.

[2] G. Buicliu, *Probleme de construcții geometrice cu rigla şi compasul*, Ed. Tineretului, 1967.

[3] I. Dăncilă, *Construcții cu rigla şi compasul*, Ed. Sigma, 2000.

[4] I. Petersen, *Methodes et theories pour la resolution des problemes de constructions geometriques*. Paris, 1908.

[5] A. Toth, *Noțiuni de teoria construcțiilor geometrice*, E.D.P., 1963.