

OBIECTIVE DE REFERINȚĂ ȘI EXEMPLE DE ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

1. Cunoașterea și înțelegerea conceptelor, a terminologiei și a procedurilor de calcul

Obiective de referință	Exemple de activități de învățare
<p><i>La sfârșitul clasei a VIII-a elevul va fi capabil</i></p> <p>1.1. să opereze cu mulțimi pe axa numerelor reale</p> <p>1.2. să folosească metode adecvate în demonstrarea unor inegalități, identități sau identități condiționate</p> <p>1.3. să utilizeze elemente de calcul algebric în rezolvarea ecuațiilor și a sistemelor de ecuații</p> <p>1.4. să identifice funcții liniare și să opereze cu acestea</p> <p>1.5. să efectueze calcule cu numere reale</p> <p>1.6. să utilizeze matematica în rezolvarea problemelor puse la alte discipline</p> <p>1.7. să utilizeze, teoreme, leme, axiome și tehnici adecvate în demonstrarea problemelor de geometrie în spațiu</p> <p>1.8. să recunoască și să utilizeze proprietățile figurilor și corpurilor geometrice în demonstrații</p>	<p><i>Pe parcursul clasei a VIII-a se recomandă următoarele activități</i></p> <p>-scrierea unei mulțimi de numere reale data sub forma implicită ca interval -efectuarea unor operații cu intervale</p> <p>-demonstrarea unor inegalități folosind inegalități cunoscute; a mediilor, a lui Cauchy-Buniakovsky, a lui Minkovski, a lui Holder -demonstrarea identităților folosind calculul algebric -discutarea comparativă a mai multor soluții pentru aceeași problemă</p> <p>-exerciții de rezolvare a unor ecuații cu parametru -abordarea unor sisteme de ecuații cit mai diverse și încadrarea lor în tiparele clasice</p> <p>-determinarea unor funcții liniare în anumite condiții și reprezentarea lor grafică -reprezentarea grafică a unor funcții definite pe reuniune de intervale -rezolvarea unor ecuații funcționale</p> <p>-exerciții de evaluare a rezultatelor unor calcule</p> <p>-reprezentarea grafică a unor date statistice -calculul volumelor unor obiecte</p> <p>-probleme de paralelism în spațiu, dreapta-dreapta, dreapta-plan, plan-plan -probleme de perpendicularitate în spațiu, dreapta-plan, plan-plan, dreapta-dreapta -determinarea unor secțiuni cu plane în corpuri geometrice</p> <p>-calculul lungimilor de segmente, a unor arii și volume folosind proprietățile asemănării -rezolvarea problemelor de maxim și minim în geometrie</p>

2.Dezvoltarea capacității de a emite judecăți de valoare pentru rezolvarea problemelor inventiv și euristic-creative

<p style="text-align: center;">Obiective de referință</p> <p><i>La sfârșitul clasei a VIII-a elevul va fi capabil :</i></p> <p>2.1.să analizeze, să elaboreze strategii de rezolvare și să rezolve probleme cu grad sporit de dificultate</p> <p>2.2 să formuleze probleme, generalizări în anumite ipoteze sau să stabilească condițiile necesare și/ sau suficiente pentru o concluzie fixată</p> <p>2.3.să identifice metode de lucru pentru clase de probleme</p>	<p style="text-align: center;">Exemple de activități de învățare</p> <p><i>Pe parcursul clasei a VIII-a se recomandă următoarele activități :</i></p> <ul style="list-style-type: none"> -înțelegerea problemei prin analizarea ipotezei și concluziei -elaborarea unui plan de rezolvare și rezolvarea problemei -verificarea rezultatului și analiza rezolvării -formularea unor probleme -formularea unor concluzii în ipoteze date -formularea unor condiții necesare și/ sau suficiente pentru o concluzie dată -rezolvarea mai multor probleme folosind aceeași metodă -rezolvarea unei probleme folosind mai multe metode -analiza eficienței metodelor
--	--

3.Dezvoltarea capacității de a face conexiuni cognitive în cadrul disciplinei și a ariei curriculare

<p style="text-align: center;">Obiective de referință</p> <p><i>La sfârșitul clasei a VIII-a elevul va fi capabil :</i></p> <p>3.1.să utilizeze raționamete, judecăți, soluții optime pentru rezolvarea unor probleme dificile din domeniile studiate</p> <p>3.2.să-și formeze o gândire creativă, abstractă, și flexibilă</p>	<p style="text-align: center;">Exemple de activități de învățare</p> <p><i>Pe parcursul clasei a VIII-a se recomandă următoarele activități</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - folosirea intuiției și perspicacității în alegerea modului de abordare a unei probleme -combinarea elementelor cunoscute și crearea altora noi -rezolvarea unor probleme teoretice complexe prin stabilirea unor relații între cunoștințe
---	--

4.Dezvoltarea capacității de a comunica utilizând limbajul matematic

Obiective de referință	Exemple de activități de învățare
<p><i>La sfârșitul clasei a VIII-a elevul va fi capabil :</i></p> <p>4.1.să-și însușească terminologia specifică limbajului matematic</p> <p>4.2.să discute corectitudinea unui demers matematic, argumentându-și opiniile</p>	<p><i>Pe parcursul clasei a VIII-a se recomandă următoarele activități</i></p> <p>-corelarea limbajului literar cu limbajul matematic, și redactarea unui text folosind simbolurile consacrate specifice matematicii</p> <p>-discutarea metodei și eventual descrierea algoritmului folosit</p> <p>-studierea unor metode alternative</p>

5.Dezvoltarea interesului și a motivației pentru studiul și aplicarea matematicii în contexte variate

Obiective de referință	Exemple de activități de învățare
<p><i>La sfârșitul clasei a VIII-a elevul va fi capabil :</i></p> <p>5.1.să sesizeze importanța raționamentului logico-matematic în diferite domenii</p> <p>5.2.să manifeste perseverență și gândire creativă în rezolvarea unei probleme</p> <p>5.3.să manifeste interes pentru folosirea tehnologiilor informației în studiul matematicii</p>	<p><i>Pe parcursul clasei a VIII-a se recomandă următoarele activități</i></p> <p>-brainstorming : metode matematice utilizate într-un anumit domeniu</p> <p>-activitate-proiect: concepte și metode matematice necesare într-un anumit domeniu</p> <p>-utilizarea mai multor metode pentru rezolvarea unei probleme</p> <p>-discutarea mai multor moduri de rezolvare a unei probleme</p> <p>-utilizarea unor soft-uri pentru învățarea matematicii; explorarea internetului</p>

CONȚINUTURI

ALGEBRĂ

- 1.Ecuatii diofantice
- 2.Funcții parte întreagă, funcții parte fracționară
- 3.Ecuatii funcționale
- 4.Inegalități
 - Inegalitatea mediilor
 - Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovsky
 - Inegalitatea lui Minkovsky
 - Inegalitatea lui Holder
- 5.Identități ; identități condiționate
- 6.Ecuatii și sisteme care se rezolvă prin metode speciale

GEOMETRIE

- 1.Probleme de maxim și minim
- 2.Paralelism în spațiu
 - Dreapta paralelă cu un plan
 - Teoreme de paralelism
 - Plane paralele
 - Tetraedrul
- 3.Perpendicularitate în spațiu
 - Dreapta perpendiculară pe un plan
 - Plane perpendiculare
 - Tetraedre speciale
 - Proiecții
- 4.Distanțe și unghiuri în spațiu
- 5.Poliedre
- 6.Secțiuni în poliedre
- 7.Corpuri rotunde-secțiuni
- 8.Probleme de maxim și minim

ALGEBRĂ

1. Ecuatii funcționale

Problema determinării expresiei prin care este dată o funcție care îndeplinește o egalitate este o ecuație funcțională. Chiar dacă există clasificări ale ecuațiilor funcționale, soluționarea problemelor de acest tip lasă o libertate destul de mare gândirii și ingeniozității rezolvatorului. Aceste probleme dezvoltă gândirea abstractă, obligând de multe ori elevii să facă artificii algebrice destul de delicate. Prezentăm în cele ce urmează câteva probleme de acest tip.

Probleme rezolvate

R1.1. Să se determine funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică egalitatea $f(3x-1) = x^2 + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Soluție.

Facem înlocuirea $3x - 1 = t$, $x = \frac{t+1}{3}$ și obținem:

$$f(t) = \left(\frac{t+1}{3}\right)^2 + 2 = \frac{t^2 + 2t + 7}{3}.$$

Deci am obținut funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 7}{3}$.

R1.2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $a \cdot f(x) + b \cdot f(3-x) = -3x + 5$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, dacă $f(1) = 2$ și $f(2) = 5$.
- Aflați $f(x)$, oricare ar fi x real cu a și b determinați la a).

[C.M. 1994]

Soluție.

$$\text{a) } \begin{cases} x=1, & af(1) + bf(2) = 2 \\ x=2, & af(2) + bf(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 5b = 2 \\ 5a + 2b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{7} \\ b = \frac{4}{7} \end{cases}$$

- Facem înlocuirea $3-x = t \Rightarrow x = 3-t$.

Obținem: $af(3-t) + bf(t) = -3(3-t) + 5$.

Revenim la variabila x și înlocuim pe a și b cu valorile obținute anterior:

$$-\frac{3}{7}f(3-x) + \frac{4}{7}f(x) = 3x - 4$$

Se ajunge la sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} -3f(3-x) + 4f(x) = 21x - 28 \\ -3f(x) + 4f(3-x) = -21x + 35 \end{cases}$$

și apoi $f(x) = 3x + 1$.

R1.3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care verifică relația:

$$f(x - y) + f(2x + y) = 6x + 10, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se determine funcția f .

[C.M. 1992]

Soluție.

$$\text{Dacă } x = y = 0, \text{ avem } 2f(0) = 10 \Rightarrow f(0) = 5.$$

$$\text{Dacă } x = y, \text{ avem } f(0) + f(3x) = 6x + 10$$

$$\text{Deci } f(3x) = 6x + 5 \Rightarrow f(x) = 2x + 5.$$

R1.4. Să se determine funcțiile f și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ știind că

$$2f(x) + f(1 - y) + g(x) - g(y) = 3(x + 1)^2 - 6y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Soluție.

$$\text{Dacă } y = x, \text{ obținem } 2f(x) + f(1 - x) + g(x) - g(x) = 3(x + 1)^2 - 6x \Rightarrow$$

$$2f(x) + f(1 - x) = 3x^2 + 3 \quad (1)$$

Dacă înlocuim pe x cu $1 - x$ în relația (1) se va obține:

$$2f(1 - x) + f(x) = 3(1 - x)^2 + 3 \quad (2)$$

Din (1) și (2) avem $f(x) = x^2 + 2x$.

Determinăm funcția g :

$$\text{facem } y = 0, \text{ atunci } 2f(x) + f(1) + g(x) - g(0) = 3(x + 1)^2 \Rightarrow$$

$$2(x^2 + 2x) + 3 + g(x) - g(0) = 3(x + 1)^2 \Rightarrow g(x) = x^2 + 2x + g(0)$$

$$\text{Dacă } g(0) = k, k \in \mathbb{R}, \text{ atunci } g(x) = x^2 + 2x + k, k \in \mathbb{R}.$$

Observație: În timp ce funcția f este unic determinată, pentru g există o mulțime de funcții care verifică relația dată.

R1.5. Să se determine funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, care verifică relația:

$$f(x) - f\left(\frac{x+3}{1-x}\right) - f\left(\frac{x-3}{1+x}\right) = x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

[C.M. 1986]

Soluție.

$$\text{Facem înlocuirea } \frac{x+3}{1-x} = t \Leftrightarrow x = \frac{t-3}{t+1}.$$

$$f\left(\frac{t-3}{1+t}\right) - f(t) - f\left(\frac{t+3}{t-1}\right) = \frac{t-3}{1+t}.$$

Revenim la variabila x și obținem relația:

$$f\left(\frac{x-3}{1+x}\right) - f(x) - f\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = \frac{x-3}{1+x}, \quad (1)$$

Aplicăm aceeași substituție în relația (1) și obținem:

$$f\left(\frac{x+3}{1-x}\right) - f(x) - f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = \frac{x+3}{1-x}, \quad (2)$$

Adunând relațiile (1) și (2) se găsește relația prin care este dată funcția f:

$$-2f(x) = \frac{x-3}{x+1} - \frac{x+3}{x-1} \Rightarrow f(x) = \frac{4x}{x^2-1}.$$

R1.6. Determinați funcția f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ care îndeplinește condițiile:

$$f(2002) = 2003 \text{ și } f(x+1) = f(x) + \frac{x}{1001}, \forall x \in \mathbb{N}.$$

Soluție.

$$x = 1, \quad f(2) = f(1) + \frac{1}{1001}$$

$$x = 2, \quad f(3) = f(2) + \frac{2}{1001}$$

.....

$$x = n-1, \quad f(n) = f(n-1) + \frac{n-1}{1001}$$

După adunarea egalităților avem:

$$f(n) = f(1) + \frac{1+2+\dots+n-1}{1001} = f(1) + \frac{n(n-1)}{2002}.$$

$$\text{Pentru } x = 2002, \quad f(2002) = f(1) + \frac{2002 \cdot 2001}{2002} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2003 = f(1) + 2001 \Rightarrow f(1) = 2.$$

Revenind la variabila x și folosind rezultatele anterioare putem scrie funcția f:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad f(x) = 2 + \frac{x(x-1)}{2002}.$$

Bibliografie

1. Pop Vasile "Ecuatii funcționale", Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2002.
2. B.M.Bătinețu Giurgiu, I.Crângașu, M.Bătinețu Giurgiu, C.Ursu "Culegere de probleme, clasa a IX-a", Ed.Portofranco, Galați, 1992.

2. Funcția “parte întreagă”, funcția “parte fracționară”

2.1. Funcțiile “parte întreagă” și “parte fracționară”

Vom defini partea întreagă și partea fracționară a unui număr real și vom pune în evidență câteva proprietăți ale lor. Apoi vom defini și vom reprezenta grafic funcția “parte întreagă” și funcția “parte fracționară”.

Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $[x]$ este partea întreagă a lui x și

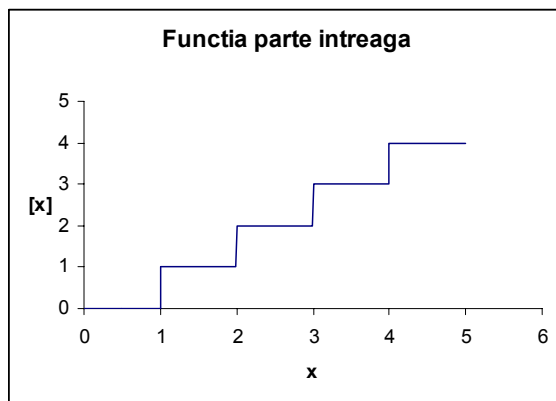
$$[x] = \begin{cases} n & \text{dacă } n \leq x < n+1 \\ -n-1 & \text{dacă } -n-1 \leq x < -n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $\{x\}$ este partea fracționară a lui x și $\{x\} = x - [x]$.

Funcția f care asociază fiecărui număr real x partea întreagă a sa, adică $[x]$, se numește funcția “parte întreagă”:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = [x].$$

Graficul funcției “parte întreagă”



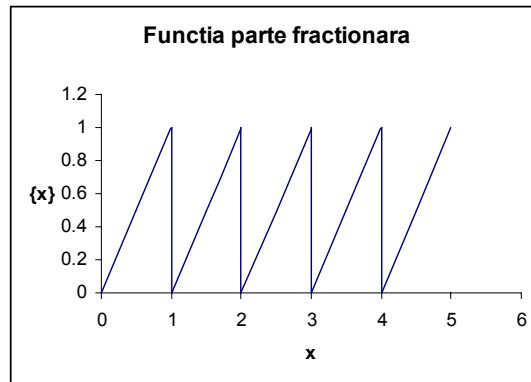
Funcția g care asociază fiecărui număr real x partea fracționară a sa, se numește funcția “parte fracționară”.

$$g : \mathbb{R} \rightarrow [0,1), g(x) = \{x\},$$

explicitarea funcției g :

$$g(x) = \begin{cases} x + n, & \text{dacă } x \in [-n, -n+1) \\ \dots\dots\dots \\ x + 1, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ x, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ x - 1, & \text{dacă } x \in [1, 2) \\ \dots\dots\dots \\ x + n, & \text{dacă } x \in [n, n+1) \end{cases}$$

Graficul funcției “parte fracționară”:



2.2. Proprietățile părții întregi a unui număr real.

Proprietatea 1. $(\forall) x \in [k, k+1), k \in \mathbb{Z}$ avem egalitatea $[x] = k$

Proprietatea 2. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, și $x, y \in [k, k+1), k \in \mathbb{Z}$ atunci $[x] = [y]$

Proprietatea 3. Dacă $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, atunci $[x] < 0$

Dacă $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, atunci $[x] \geq 0$

Proprietatea 4. $(\forall) x \in \mathbb{R}$ există egalitatea $[[x]] = [x]$

Proprietatea 5. $(\forall) x \in \mathbb{R}$ sunt adevărate inegalitățile:

1) $[x] \leq x < [x] + 1$ și 2) $x - 1 < [x] \leq x$

Proprietatea 6. $(\forall) x \in \mathbb{R}$ și $k \in \mathbb{Z}$ are loc egalitatea: $[x + k] = [x] + k$

Demonstrație.

Notăm $x = \alpha + m$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $m \in [0, 1)$ \mathbb{P} $[x] = \alpha$

$[x + k] = [\alpha + m + k] = [(\alpha + k) + m] = \alpha + k = [x] + k$

Proprietatea 7. $(\forall) x \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x], \text{ (identitatea lui Hermit)}$$

Demonstrație.

Considerăm două cazuri:

$$\text{I. } x - [x] < \frac{1}{2}$$

$$\left[x + \frac{1}{2} \right] = [x], \quad [2x] = 2 \cdot [x],$$

în această situație avem:

$$[2x] - [x] = 2[x] - [x] = [x] = \left[x + \frac{1}{2} \right] \Rightarrow [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x].$$

$$\text{II. } x - [x] \geq \frac{1}{2}$$

$$\left[x + \frac{1}{2} \right] = [x] + 1, \quad [2x] = 2 \cdot [x] + 1,$$

acum obținem:

$$[2x] - [x] = 2[x] + 1 - [x] = [x] + 1 = \left[x + \frac{1}{2} \right] \Rightarrow [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x].$$

Proprietatea 7 se poate generaliza și obținem identitatea lui Hermit în caz general:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx], \quad (\forall)x \in \mathbb{R}, (\forall)n \in \mathbb{N}.$$

Proprietatea 8. $(\forall)x, y \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

$$[x + y] \geq [x] + [y].$$

Demonstrație.

Scriem x și y astfel: $x = [x] + \{x\}$ și $y = [y] + \{y\}$, $0 \leq \{x\} < 1$, $0 \leq \{y\} < 1$.

$$x + y = [x] + [y] + \{x\} + \{y\} \Rightarrow x + y \geq [x] + [y] \left. \begin{array}{l} \\ [x] + [y] \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x + y] \geq [x] + [y].$$

Probleme rezolvate

R2.1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x + 1] + [x - 2] - [x - 3] = 2;$

b) $[x + 3] - [x - 5] = 8;$

c) $[x + 4] - [x + 1] = 2.$

Soluție. În rezolvarea ecuațiilor ne folosim de egalitatea

$$[x + k] = [x] + [k], \quad (\forall)x \in \mathbb{R}, (\forall)x \in \mathbb{Z}.$$

a) $[x + 1] = [x] + 1; [x - 2] = [x + (-2)] = [x] - 2,$

$$[x + 3] = [x] + 3.$$

$$\text{Ecuația inițială devine: } [x] + 1 + [x] - 2 - [x] - 3 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x] = 6 \Leftrightarrow 6 \leq x < 7 \Leftrightarrow x \in [6, 7).$$

b) $[x] + 3 - [x] + 5 = 8 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

c) $[x] + 4 - [x] - 1 = 2 \Leftrightarrow 3 = 2 \Rightarrow x \in \emptyset$

R2.2. Să se rezolve ecuația $\left[\frac{x-1}{2} \right] = \left[\frac{x+1}{3} \right].$

Soluție.

$$\text{Notăm } \left[\frac{x-1}{2} \right] = \left[\frac{x+1}{3} \right] = k$$

$$\left[\frac{x-1}{2} \right] = k \Leftrightarrow k \leq \frac{x-1}{2} < k+1 \Leftrightarrow 2k+1 \leq x < 2k+3 \Leftrightarrow -2k-3 < -x < -2k-1$$

$$\left[\frac{x+1}{3} \right] = k \Leftrightarrow k \leq \frac{x+1}{3} < k+1 \Leftrightarrow 3k-1 \leq x < 3k+2$$

adunând obținem: $-1 < k < 4$ dar $k \in \mathbb{Z}$ atunci $k \in \{0,1,2,3\}$.

Studiem cele patru situații:

$$\mathbf{k = 0}, \left[\frac{x-1}{2} \right] = 0 \text{ și } \left[\frac{x+1}{3} \right] = 0$$

$$\left[\frac{x-1}{2} \right] = 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x-1}{2} < 1 \Leftrightarrow x \in [1,3)$$

$$\left[\frac{x+1}{3} \right] = 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x+1}{3} < 1 \Leftrightarrow x \in [-1,2).$$

Soluția ecuației în acest caz $S_1 = [1,3) \cap [-1,2) = [1,2)$.

$$\mathbf{k = 1}, \left[\frac{x-1}{2} \right] = 1 \text{ și } \left[\frac{x+1}{3} \right] = 1$$

$$\left[\frac{x-1}{2} \right] = 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x-1}{2} < 2 \Leftrightarrow x \in [3,5)$$

$$\left[\frac{x+1}{3} \right] = 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x+1}{3} < 2 \Leftrightarrow x \in [2,5).$$

$S_2 = [3,5) \cap [2,5) = [3,5)$.

$$\mathbf{k = 2}, \left[\frac{x-1}{2} \right] = 2 \text{ și } \left[\frac{x+1}{3} \right] = 2$$

$$\left[\frac{x-1}{2} \right] = 2 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{x-1}{2} < 3 \Leftrightarrow x \in [5,8)$$

$$\left[\frac{x+1}{3} \right] = 2 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{x+1}{3} < 3 \Leftrightarrow x \in [5,7).$$

$S_3 = [5,8) \cap [5,7) = [5,7)$.

$$\mathbf{k = 3}, \left[\frac{x-1}{2} \right] = 3 \text{ și } \left[\frac{x+1}{3} \right] = 3$$

$$\left[\frac{x-1}{2} \right] = 3 \Leftrightarrow 3 \leq \frac{x-1}{2} < 4 \Leftrightarrow x \in [7,9)$$

$$\left[\frac{x+1}{3} \right] = 3 \Leftrightarrow 3 \leq \frac{x+1}{3} < 4 \Leftrightarrow x \in [8,11).$$

$$S_4 = [7,9) \cap [8,11) = [8,9).$$

$$\text{Soluția finală va fi: } S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = [1,2) \cup [3,7) \cup [8,9)$$

R2.3. Să se rezolve inecuația $x[x] + 2x - 3[x] \leq 6$.

Soluție. Ducem pe 6 în primul membru al inegalității și transformăm în produs.

$$x[x] + 2x - 3[x] - 6 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x([x] + 2) - 3([x] + 2) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 3)([x] + 2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \leq 0 \\ [x] + 2 \geq 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ [x] + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3 \leq 0 \\ [x] + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 3] \\ x \in [-2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2, 3]$$

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ [x] + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [3, +\infty) \\ x \in [-\infty, -1) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Soluția inecuației este $S = [-2, 3]$.

R2.4. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2[x] + 3[y] = 5 \\ [x] + 2[y] = 4 \end{cases}$$

[G.M.1979]

Soluție.

Notăm $[x] = a$ și $[y] = b$.

Obținem sistemul:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ a + 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [x] = -2 \\ [y] = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2, -1) \\ y \in [3, 4) \end{cases}$$

R2.5. Să se determine $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\left[a + \frac{1}{x} \right] + [a(x-1)] = [ax], (\forall) a \in \mathbb{R}.$$

[D.M. Bătinețu Giurgiu]

Soluție.

Facem notația $a = [a] + \{a\} = k + \{a\}$, $\{a\} \in [0, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pentru $x = 1$, ecuația devine: $[a + 1] + [a \cdot 0] = [a] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [a + 1] = [a]$, imposibil.

Pentru $x = 2$, ecuația devine: $\left[a + \frac{1}{2} \right] + [a] = [2a]$.

$$\left[a + \frac{1}{2} \right] = \begin{cases} [a], \text{ dacă } \{a\} \in \left[0, \frac{1}{2} \right) \\ [a] + 1, \text{ dacă } \{a\} \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right) \end{cases}$$

$$[2a] = \begin{cases} 2 \cdot [a], & \text{daca } \{a\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 2 \cdot [a] + 1, & \text{daca } \{a\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

Rezolvăm ecuația în două cazuri:

dacă $\{a\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$: $[a] + [a] = 2[a]$, adevărat (\forall) $a \in \mathbb{R}$.

dacă $\{a\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$: $[a] + 1 + [a] = 2[a] + 1$, adevărat (\forall) $a \in \mathbb{R}$.

Pentru $x \geq 3$ arătăm că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât egalitatea dată nu este adevărată.

Fie $k \in \mathbb{Z}$, $\{a\} \in \left(\frac{x-2}{x}, \frac{x-2}{x-1}\right)$ și $a = k + \{a\}$, $[a] = k$,

atunci $\left[a + \frac{1}{x}\right] = k$,

$$[a(x-1)] = [(k + \{a\})(x-1)] = [(x-1)k + (x-1)\{a\}] = (x-1)k + x - 3.$$

$$[ax] = [(k + \{a\})x] = [kx + \{a\}x] = kx + x - 2.$$

$$[ax] - [a(x-1)] = kx - x - 2 - kx + k - x + 3 = k + 1 = [a] + 1 \neq [a].$$

Bibliografie

1. D.Bușneag, I.Maștei “*Teme pentru cercurile și concursurile de matematică ale elevilor*”, Ed.Scrisul românesc, Craiova, 1983.
2. Gh.Andrei, I.Cucurezeanu, C.Caragea “*Probleme de algebră, gimnaziu, liceu*”, Ed.GIL, Zalău, 1996.
3. Gh. Schneider “*Probleme de algebră*” volumul 2, Ed.Apollo, Craiova, 1990.
4. L.Pârșan, C.G.Lazeanu “*Probleme de algebră și trigonometrie*”, Ed.Facla, Timișoara, 1983.

3. Ecuții diofantiene

Rezumat – în cadrul temei se vor prezenta principalele metode de rezolvare a ecuațiilor diofantiene precum și alte ecuații care se reduc la acestea. Se prezintă și câteva ecuații remarcabile (ecuația Pitagorică, ecuații de tip $ax+by=c$) și aplicații ale acestora.

3.1. Proprietățile divizibilității în Z (a,b din Z)

$$3.1.1 \quad a \mid b \Leftrightarrow (\exists) c \in Z \text{ a.î. } b=ac$$

$$3.1.2 \quad \text{Dacă } d \mid a, d \mid b \Rightarrow d \mid \alpha a + \beta b, (\forall) \alpha, \beta \in Z$$

$$3.1.3 \quad \begin{array}{l} a \mid bc \\ (a,b)=1 \\ c \in Z \end{array} \quad \left| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} a \mid c \end{array} \right.$$

$$3.1.4 \quad \begin{array}{l} a \mid c \\ b \mid c \\ (a,b)=1 \end{array} \quad \left| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} ab \mid c \end{array} \right.$$

$$3.1.5 \quad a, b \in N; \quad d=(a,b) \Rightarrow (\exists) x, y \in Z \text{ a.î. } d=ax+by$$

$$3.1.6 \quad a, b \in N; \quad (a,b)=1 \Leftrightarrow (\exists) x, y \in Z \text{ a.î. } ax+by=1$$

3.2. Metode elementare de rezolvare a ecuațiilor diofantice

Ecuții diofantice – ecuații cu coeficienții întregi care se rezolvă în Z

3.2.1. Metoda descompunerii

Punem o ecuație diofantiană de forma $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ sub forma

$$f_1(x_1, \dots, x_n) \cdot f_2(x_1, \dots, x_n) \cdot \dots \cdot f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = a \in Z \Rightarrow f_i(x_1, \dots, x_n) \in D(a).$$

Ecuțiile respectiv sistemul de ecuații la care s-a ajuns sunt mult mai ușor de rezolvat.

Exemplu: Rezolvați în Z ecuația $6xy-3x-4y=5$. (1)

Rezolvare.

Ecuția (1) este echivalentă cu $(2y-1)(3x-2)=7$

$$\text{Cazul I} \quad \begin{cases} 2y-1=1 \\ 3x-2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases} \quad \text{etc.}$$

3.2.2. Rezolvarea ecuațiilor diofantice cu ajutorul inegalităților

- constă în determinarea unor intervale în care se află necunoscutele prin utilizarea unor inegalități adecvate

Exemplu

Determinați toate perechile (x,y) de numere întregi astfel încât $x^3+y^3=(x+y)^3$

Rezolvare

$(k,-k), k \in Z$ soluție pentru ecuație

$x+y \neq 0$ ecuația se reduce la ecuația $x^2 - xy + y^2 = x + y \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow (x-1)^2 \leq 1, (y-1)^2 \leq 1 \Rightarrow x, y \in \{0, 1, 2\}$
 Soluțiile convenabile sunt în acest caz $(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$

3.3. Ecuații diofantice remarcabile

3.3.1. Ecuații de tipul $ax+by=c, a, b \in \mathbb{Z}^*, c \in \mathbb{Z} (1)$

Observații

- orice ecuație de tipul $ax+by=c, a, b \in \mathbb{Z}^*, c \in \mathbb{Z}$ se poate aduce la o ecuație de tipul

$a'x+b'y=c'$ unde $(a', b', c')=1$

- ecuația (1) are soluții $\Leftrightarrow d \mid c$ unde $d=(a, b)$ (evidentă din proprietățile divizibilității)

Fie (x_0, y_0) o soluție particulară a ecuației (1)

Demonstrăm că există o astfel de soluție particulară .

Fie $d=(a, b) \Rightarrow (\exists) x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ a.î. $ax_1+by_1=d \mid (-d)$

$$d \mid c \Rightarrow c=dd_1$$

$$\Rightarrow ax_1d_1+by_1d_1=dd_1=c$$

$$x_1d_1=x_0$$

$$y_1d_1=y_0$$

Fie $d=(a, b)$

$$a=da'$$

$$b=db' \quad (a, b')=1$$

$$c=dc'$$

$$(1) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a'x+b'y=c' \\ a'x_0+b'y_0=c' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Scădere}} \left. \begin{array}{l} a'(x-x_0) = -b'(y-y_0) \quad (2) \\ a' \mid b'(y_0-y) \\ (a', b')=1 \end{array} \right\} \Rightarrow a' \mid y_0-y \Rightarrow (\exists) k \in \mathbb{Z}'$$

astfel încât $y_0-y=ka' \Rightarrow y=y_0-ka' (3)$

“(3) \rightarrow (2)” $a'(x-x_0)=b'ka' \Rightarrow x=x_0+kb', k \in \mathbb{Z}$

Mulțimea soluțiilor ecuației diofantiene este $S=\{(x_0+kb', y_0-ka') \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exemplu: Rezolvați ecuația $5x-3y=2$ în \mathbb{Z} .

3.3.2. Ecuația pitagorică

$x^2+y^2=z^2$ (studiată de către Pitagora în legătură cu triunghiurile dreptunghice ale căror laturi au lungimile numere naturale, ecuație cunoscută de pe vremea vechilor babilonieni).

Demonstrația destul de laborioasă o vom omite , dăm însă soluția acestei ecuații în mulțimea numerelor întregi:

$$S=\{k(m^2-n^2), 2kmn, k(m^2+n^2) \mid k, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Proprietăți: Fie $a, b \in \mathbb{Q}$

$d \in \mathbb{N}$, d nu este pătrat perfect

$$(a + b\sqrt{d})^n = a_n + b_n\sqrt{d} \quad \text{unde } a_n, b_n \in \mathbb{Q}, n \geq 1$$

Atunci $(a - b\sqrt{d})^n = a_n - b_n\sqrt{d}$ unde a_n, b_n sunt cele de mai sus.

Aplicație

Demonstrați că ecuația $x^2 - 3y^2 = 1$ are o infinitate de soluții întregi iar ecuația $x^2 - 3y^2 = -1$ nu are soluții întregi

Rez.

$$\left. \begin{array}{l} (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} \\ (2 - \sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3} \\ n \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow a_n^2 - 3b_n^2 = 1$$

$x^2 - 3y^2 = -1 \Rightarrow x^2 = M_3 + 2$ imposibil un pătrat perfect având forma $3n+1$ respectiv $3n$.

Probleme rezolvate

R3.3.1. Determinați toate perechile de numere întregi (x, y) care verifică egalitatea:

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 27$$

Rezolvare

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 27 \Leftrightarrow 2x^2 - 4xy - xy + 2y^2 = 27 \Leftrightarrow (2x - y)(x - 2y) = 27.$$

$$\text{Cazul I } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 27 \end{cases} \quad (\text{metoda descompunerii})$$

Celelalte cazuri se tratează similar.

R3.3.2. Determinați soluțiile întregi ale ecuației

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy) : (1)$$

Rezolvare

$$(1) \Leftrightarrow x^2 y^2 - 2xy + 1 + x^2 + y^2 - 2xy + 2(x - y)(1 - xy) = 4 \Leftrightarrow$$

$$(xy - 1)^2 + (x - y)^2 - 2(x - y)(xy - 1) = 4 \Leftrightarrow [xy - 1 - (x - y)]^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$xy - 1 - x + y = \pm 2 \Leftrightarrow x(y - 1) + y - 1 = \pm 2 \Leftrightarrow (x + 1)(y - 1) = \pm 2$$

rezolvare imediată.

$$\text{Cazul I } \begin{cases} x + 1 = 1 \\ y - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

Analog se tratează și celelalte cazuri.

R3.3.3. Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$$

Rezolvare

$$x^2 y^2 - 14xy + 49 = x^2 + y^2 + 2xy \Leftrightarrow (xy)^2 - 12xy + 49 = (x + y)^2 \Leftrightarrow$$

$$(xy - 6)^2 - (x + y)^2 = 13 \Leftrightarrow (x + y - xy + 6)(x + y + xy - 6) = 13$$

$$C1 \begin{cases} x + y - xy + 6 = 1 \\ x + y + xy - 6 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

sistem simetric

$$t^2 - 7t + 12 = 0 \text{ cu soluția } \begin{matrix} t_1 = 3 \\ t_2 = 4 \end{matrix}. \text{ În acest caz printre soluții sunt}$$

perechile (3,4),(4,3).

Analog se tratează restul cazurilor.

R3.3.4. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale nenule ecuația:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$$

Rezolvare

$2 \leq x \leq y \leq z$ (fără a restrânge generalitatea) aflând apoi soluțiile în celelalte cazuri se obțin prin permutări circulare.

$$\frac{3}{x} \geq \frac{3}{5} \Rightarrow x \in \{2,3,4,5\}, \text{ etc.}$$

R3.3.5. Determinați numerele prime p și q a.î $p+q=(p-q)^3$

$$(p - q)((p - q)^2 + 1) = 2p$$

$$p - q \geq 1, (p - q)^2 + 1 \geq 2$$

$$p - q < p \Rightarrow p - q = 2 \Rightarrow p = 5, q = 3$$

R3.3.6. Determinați numerele naturale nenule a și b dacă numerele $\frac{a^2 + b}{b^2 - a}$ și

$\frac{b^2 + a}{a^2 - b}$ sunt întregi.

Rezolvare

Cazul 1 $a = b$ $a \neq 0,1$

$$(a^2 - a) \mid (a^2 + a)$$

$$a(a - 1) \mid a(a + 1) \Rightarrow \begin{matrix} a - 1 \mid a + 1 \\ a - 1 \mid a - 1 \end{matrix} \mid \Rightarrow (a - 1) \mid 2 \Rightarrow a - 1 \in \{1,2\} \Rightarrow$$

$$a - 1 \in \{1,2\} \Rightarrow a \in \{2,3\}$$

convenabile perechile (2,2),(3,3)

Cazul 2 Pentru fixarea ideilor fie $b > a$.

$$a^2 + b \geq b^2 - a \Rightarrow b + a \geq (b - a)(b + a) \Rightarrow \begin{array}{l} 1 \geq b - a \\ b > a \end{array} \left| \Rightarrow b = a + 1 \right.$$

$$n_1 = \frac{a^2 + b}{b^2 - a}$$

$$n_2 = \frac{b^2 + a}{a^2 - b}$$

$$n_1 = 1, n_2 = \frac{a^2 + 3a + 1}{a^2 - a - 1} = 1 + \frac{4a + 2}{a^2 - a - 1} \in Z$$

$$4a + 2 \geq a^2 - a - 1 \Leftrightarrow a^2 - 5a - 3 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 5 \Rightarrow \frac{4a + 2}{a^2 - a - 1} \in Z \Leftrightarrow a = 1,$$

sau $a=2$.

Soluțiile în acest caz sunt (1,2),(2,3) și pentru $b < a$ (2,1),(3,2)

Bibliografie

1. *O introducere în studiul ecuațiilor diofantiene* – T. Andreescu, O. Andrica
2. *Probleme de teoria numerelor și combinatorică pentru juniori* – L. Panaitopol, D. Șerbănescu
3. *Probleme de aritmetică și teoria numerelor* – I. Cucurezeanu
4. *Algebră Clasa a VIII –a* – I. Negrilă, M. Negrilă, Editura Paralela 45-2002
5. *Olimpiadele balcanice de matematică pentru juniori* – D. Brânzei, I. Șerdean, V. Șerdean
6. *Algebră. Geometrie. Olimpiade și concursuri* – Arthur Balăucă – Editura Taida Iași 2002

4. Inegalități algebrice

Primele inegalități pe care elevii de gimnaziu le întâlnesc sunt $a^2 \geq 0$, care este adevărată pentru orice număr real a și $|x| \geq 0$, care sunt foarte importante în demonstrarea altor inegalități.

În cadrul temei vom prezenta proprietățile relației de inegalitate, inegalități remarcabile și exemple rezolvate cu aportul lor, apoi un set de probleme propuse spre rezolvare.

4.1. Proprietățile relației: “ $x < y$ ” (inegalitate strictă)

- i) $x \not< x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ (ireflexivă)
- ii) $x < y \Rightarrow z > x$
- iii) $x < y$ și $y < z \Rightarrow x < z$ (tranzitivă)

Proprietățile relației “ $x \leq y$ ” (inegalitate nestrictă)

- i) $x \leq x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ (reflexivă)
- ii) $x \leq y$ și $y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetrică)
- iii) $x \leq y$ și $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivă)

4.2. Proprietăți ale inegalităților în legătură cu operațiile definite pe \mathbb{R}

- i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
- ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. Dacă $x \leq y$ atunci $\begin{cases} xz \leq yz \text{ dacă } z \geq 0 \\ xz \geq yz \text{ dacă } z < 0 \end{cases}$
- iii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ dacă $x \leq y, xy > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$
- iv) $\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $x \leq y, a \leq b$ atunci $x + a \leq y + a$
- v) Dacă $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ și $0 \leq a \leq b; 0 \leq x \leq y$ atunci $ax \leq by$
- vi) $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Dacă $x \leq y$ atunci $x^{2k+1} \leq y^{2k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$
- vii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Dacă $0 \leq x \leq y$ atunci $x^n < y^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Inegalități care se rezolvă pe baza proprietăților operațiilor în \mathbb{R}

Probleme rezolvate

R4.2.1. Să se arate că dacă $1 < a, 2c < a+1, b < c$, atunci:

1. $a > b$;
2. $a+c > b+1$;
3. $a+1 > b+c$;
4. $a+1 > 2b$;
5. $2a+c > 3b$;

6. $2a+2>3b+c$;

7. $2a+1>3b$;

8. $a+c+1>3b$.

(G.M. 8/1978)

Soluție

$$\begin{array}{l} 1. \text{ Din } a > 1 \quad | \quad + \\ \quad \text{și } a+1 > 2c \quad | \\ \Rightarrow 2a+1 > 2c+1 \quad | \quad -1 \\ \Leftrightarrow 2a > 2c \quad | \quad :2 \\ \Leftrightarrow a > c \end{array}$$

Din $a > c$ și $c > b \Rightarrow a > b$

2. Din $a > 1$ și $c > b$ obținem $a+c > b+1$

$$\begin{array}{l} 3. \text{ Din } a+1 > 2c \quad | \quad + \\ \quad \text{și } c > b \quad | \\ \text{avem: } a+c+1 > 2c+b \quad | \quad -c \\ \Rightarrow a+1 > c+b \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4. \text{ Din } c > b \text{ și } a+1 > b+c \Rightarrow a+c+1 > 2b+c \quad | \quad -c \\ \Rightarrow a+1 > 2b \end{array}$$

5. Din $a+c > b+1$ și $a+1 > 2b \Rightarrow 2a+c+1 > 3b+1 \Rightarrow 2a+c > 3b$

6. Din $a+1 > b+c$ și $a+1 > 2b \Rightarrow 2a+2 > 3b+c$

7. Din $a > b$ și $a+1 > 2b \Rightarrow 2a+1 > 3b$

8. Din $c > b$ și $a+1 > 2b \Rightarrow a+c+1 > 3b$

R4.2.2. Să se arate că dacă $x \in [-3;4]$ și $y \in [-5;2]$, atunci:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y \in [-5;67]$$

Soluție

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 = (x+2)^2 + (y-1)^2 - 5$$

$$\text{Din } -3 \leq x \leq 4 \quad | +2 \Rightarrow -1 \leq x+2 \leq 6 \Rightarrow 0 \leq (x+2)^2 \leq 36 \quad (1)$$

$$\text{Din } -5 \leq y \leq 2 \quad | -1 \Rightarrow -6 \leq y-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (y-1)^2 \leq 36 \quad (2)$$

Adunând inegalitățile (1) și (2) obținem:

$$0 \leq (x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 72 \quad | -5 \Rightarrow -5 \leq (x+2)^2 + (y-1)^2 - 5 \leq 67$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y \in [-5;67]$$

4.3. Inegalități care se rezolvă pe baza inegalităților:

1) $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0$

2) $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0$

3) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $a \geq b$ și $c \geq d$ atunci $ac \geq bd$

Probleme rezolvate

R4.3.1. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

Soluție

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

R4.3.2. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ atunci avem:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

Soluție

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \mid \cdot 2 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 + c^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq 0$$

R4.3.3. Să se arate că oricare ar fi numerele reale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$,

$$\text{atunci } (a_1^2 + 1)(a_2^2 + 1)(a_3^2 + 1) \dots (a_n^2 + 1) \geq 2^n a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

(G.M. 10/1975)

Soluție

$$(a_1 - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow a_1^2 - 2a_1 + 1 \geq 0 \Rightarrow a_1^2 + 1 \geq 2a_1$$

Analog:

$$a_2^2 + 1 \geq 2a_2$$

$$a_n^2 + 1 \geq 2a_n$$

$$\text{Obținem: } (a_1^2 + 1)(a_2^2 + 1)(a_3^2 + 1) \dots (a_n^2 + 1) \geq 2^n a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

4.4. Inegalități care se rezolvă pe baza inegalității mediilor

Probleme rezolvate

R4.4.1 Inegalitatea mediilor

Dacă a și b sunt numere reale strict pozitive atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \text{ unde:}$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = m_h \text{ (media armonică)}$$

$$\sqrt{ab} = m_g \text{ (media geometrică)}$$

$$\frac{a+b}{2} = m_a \text{ (media aritmetică)}$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = m_p \text{ (media pătratică)}$$

Soluție

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Big| \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leq ab \Big| : (ab) \Leftrightarrow \frac{4ab}{(a+b)^2} \leq 1 \Big| \cdot (a+b)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Big| \cdot 2 \Leftrightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Big| \cdot 4 \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Big| \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Big| \cdot 4 \Leftrightarrow (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad (3)$$

Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă că $m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p$

Inegalitatea mediilor pentru n numere reale pozitive

Dacă a_1, a_2, \dots, a_n sunt numere reale pozitive avem:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

4.5. Inegalități care se rezolvă pe baza inegalității lui Cauchy-Buniakowski

Probleme rezolvate

R4.5.1. Inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski

Fie a_1, a_2, b_1, b_2 numere reale, atunci avem inegalitatea:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă numerele a_1, a_2 sunt proporționale cu b_1, b_2 .

Soluție

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

Efectuăm calculele și obținem:

$$a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 \leq a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \quad \text{de unde}$$

obținem:

$$2a_1 b_1 a_2 b_2 \leq a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \quad \text{care este echivalentă cu : } (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0$$

Fie $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k \Rightarrow a_1 = k b_1 ; a_2 = k b_2$ și înlocuind în inegalitate rezultă:

$$(b_1^2 k + b_2^2 k)^2 \leq (b_1^2 k^2 + b_2^2 k^2)(b_1^2 + b_2^2) \text{ sau } k^2 (b_1^2 + b_2^2)^2 \leq k^2 (b_1^2 + b_2^2)^2$$

adică egalitate.

Reciproc:

Dacă are loc egalitatea avem $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = 0$

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

În cazul general se scrie:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

R4.5.2. Inegalitatea lui Hölder

Fie a_1, a_2, b_1, b_2 numere reale pozitive. Demonstrați inegalitatea:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Egalitatea are loc dacă a_1, a_2 sunt direct proporționale cu b_1, b_2 .

Soluție

În inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski aplicăm radical în fiecare membru

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

$$\sqrt{(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

R4.5.3. Inegalitatea lui Minkovski

Fie a_1, a_2, b_1, b_2 numere reale pozitive. Demonstrați inegalitatea:

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Soluție

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Ridicăm la pătrat fiecare membru și obținem:

$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$ de unde prin efectuarea calculelor obținem:

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2 \leq a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$$

$$\Rightarrow 2a_1b_1 + 2a_2b_2 \leq 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \quad | :2$$

$$\Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \quad \text{inegalitatea lui Hölder}$$

Bibliografie

- I. Crăciunel, L. Nicolescu, P. Simion, T. Spircu, *Matematică-Algebră-Manual pentru clasa a VIII-a*, EDP 1988
- M. Becheanu, C. Niță, M. Ștefănescu, A. Dincă, I. Purdea, I.D. Ion, N. Radu, C. Vraciu, *Algebră pentru perfecționarea profesorilor*, EDP 1983
- D. Radu, E. Radu, *Matematică-manual pentru clasa a VIII-a*, Ed. Teora 1999
- M. Singer, C. Voica, C. Voica, *Matematică-manual pentru clasa a VIII-a*, Ed. Sigma 1999
- Gheorghe și Alina Drugan; Ion și Mihaela Ghica, *Matematica în concursurile școlare*, Ed. Teora 1998, pag 109-124
- D. Brânzei și colectivul: *Matematica în concursurile școlare*, Ed. Paralela 45, 2001,2002 pag 55-84(2001);pag 35-55(2002)
- Foaia matematică*(Chișinău),5/1996, pag 18
- Foaia matematică*(Chișinău),3/1996, pag 23
- M. Chiriță, T. Bulzan, L. Ganga, V. Tudoran, *Inegalități matematice*, Ed. Felix 1998
- A. Bălăucă, I. Țicalo, *Matematică-Algebră*, Ed. Remos Chișinău 1995, pag 20-26, pag 37-43
- C. Hărăbor, D.Săvulescu, I. Cheșcă, A.Țifrea: *Matematică pentru clasele V-VIII-Olimpiadele județene, interjudețene, naționale*, Ed. Teora 1996, pag 233-235

5. Ecuații și sisteme de ecuații. Metoda ecuațiilor, sistemelor de ecuații în rezolvarea unor probleme

Rezumat:

-în cadrul temei se vor prezenta principalele tipuri de sisteme, respectiv metode de rezolvare, discuție după unul sau doi parametri.

Ecuații și sisteme de ecuații

5.1. Formule de calcul prescurtat - utilizate în rezolvarea unor sisteme

$$\begin{aligned}a^n - b^n &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), n \geq 2 \\a^{2n+1} + b^{2n+1} &= (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}) \\a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = \\&= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2]\end{aligned}$$

5.2. Metode de rezolvare a sistemelor de tipul $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ în mulțimea numerelor reale.

5.2.1. Metoda reducerii

Sistemul are soluție unică dacă și numai dacă $ab' - a'b \neq 0$.

Dacă sistemul trebuie rezolvat într-o mulțime $N \times M \subseteq R \times R$ verificăm dacă soluția unică aparține $N \times M$ (deci sistemul are cel mult o soluție).

Dacă $ab' - a'b = 0$ sistemul ori nu are nici o soluție, ori o infinitate de soluții (dacă se rezolvă într-o mulțime $N \times M \subseteq R \times R$ verificăm care dintre soluții aparțin lui $N \times M$).

5.2.2. Metoda substituției

$$\begin{cases} ax + by = c(1) \\ a'x + b'y = c'(2) \end{cases}$$

Presupunem $a \neq 0$. Atunci $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}(3)$. Introducem relația (3) în (2) și obținem o

ecuație de tipul $AY + B = 0$ care are exact o soluție (dacă ecuația e de gradul I, $A \neq 0$) sau o infinitate de soluții sau nici una (după caz ca și la metoda reducerii).

5.3. Metoda soluției unice

5.3.1. Orice ecuație de gradul I are cel mult o soluție, indiferent de mulțimea în care o rezolvăm

5.3.2. Orice sistem de ecuații de gradul I:

- are o soluție
- nu are nici o soluție
- o infinitate de soluții (dacă o rezolvăm în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) respectiv dacă o rezolvăm în $\mathbb{N} \times \mathbb{M}$ scoatem relația între necunoscute și verificăm care dintre soluții aparține lui $\mathbb{N} \times \mathbb{M}$.

5.3.3. Orice ecuație de forma $ax+b=0$:

- are o soluție
- nici o soluție
- un număr de soluții = card A, unde A este mulțimea pe care rezolvăm ecuația

5.4. Sisteme formate dintr-o ecuație de gradul I și una de gradul al II-lea

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ mx^2 + ny^2 + pxy + qx + ry + s = 0 \end{cases}$$

Se scoate x în funcție de y (sau y în funcție de x din prima ecuație) și înlocuim în a doua obținând o ecuație de gradul doi.

5.5. Sisteme omogene

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \mid d' \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \mid -d \end{cases}$$

Dacă d sau $d' = 0$, verificăm dacă (0,0) este soluție $y \neq 0$ împărțim ecuația

corespunzătoare celui d sau d' nul cu y^2 și notăm $\frac{x}{y} = t$. Se determină t și se obțin

două sisteme de tipul anterior.

Dacă d, $d' \neq 0$, operăm ca mai sus, prima ecuație o înmulțim cu d' , a doua cu $-d$, le adunăm și obținem o ecuație de tipul $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$. Împărțim ecuația cu x^2 sau y^2 ((0,0) nu convine în caz contrar $d=d'=0$ ctr.).

Pentru fixarea ideilor împărțim ecuația cu y^2 ($A \neq 0$ spre exemplu)

$$\frac{x}{y} = t \quad At^2 + B + C = 0, \text{ de unde obținem } t_1 \text{ și } t_2$$

Ecuației $x=yt_{1,2}$ îi atașăm una din ecuațiile inițiale.

5.6. Sisteme simetrice elementare

$$x+y=S$$

$$xy=P$$

Îi atașăm ecuației $t^2 - St + P = 0$

Soluția sistemului este mulțimea $A=\{(t_1,t_2);(t_2,t_1)\}$.

Prin sistem simetric înțelegem un sistem în care dacă schimbăm necunoscutele între ele obținem același sistem.

Obs.: $x^2 + y^2 = S^2 - 2P$

$$x^3 + y^3 = S^3 - 3PS$$

Probleme rezolvate

R5.7.1. Rezolvați ecuația:

a) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \dots + \frac{x+n}{n+1} = n$, $n \geq 2$

b) $\frac{x+1}{2} + \frac{2x+1}{3} + \dots + \frac{nx+1}{n+1} = n$, $n \geq 2$

Rezolvare:

Ambele sunt ecuații de gradul I –au cel mult o soluție $x=1$ soluție unică.

R5.7.2. Să se arate că oricare ar fi a aparținând mulțimii numerelor reale, soluția ecuației

$$(a+x)^2 + (2a+x)^2 + \dots + (na+x)^2 = (a-1-x)^2 + (2a-1-x)^2 + \dots + (na-1-x)^2$$

nu depinde de a.

Rezolvare:

Ecuația este de tipul $Ax+B=0$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ soluție}$$

$x=0$ nu este soluție, deci, ecuația are soluția unică $x = -\frac{1}{2}$

R5.7.3. Rezolvați sistemul:
$$\begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}, & (1) \ a \neq \pm b \\ ax + by = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Rezolvare:

$$a \neq \pm b \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0.$$

Metoda I

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \text{ soluție } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ nu e soluție } \Rightarrow S = \{(a,b)\}$$

Metoda a-II-a (1) \Leftrightarrow

$$\begin{cases} (a-b)x + (a+b)y = a^2 + b^2 & | -a \\ ax + by = a^2 + b^2 & | a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -xa(a-b) - a(a+b)y = -a(a^2 + b^2) \\ a(a-b)x + (a-b)by = (a-b)(a^2 + b^2) \end{cases}$$

$$-(a^2 + b^2)y = -b(a^2 + b^2)$$

R5.7.4. Rezolvați și discutați sistemul:

$$\begin{cases} m^2x - y = m \\ m(x + y) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Rezolvare:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2x - y = m \\ -m^2x - m^2y = -m \end{cases}$$

$$-(1 + m^2)y = 0$$

$$y=0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m^2x = m \\ mx = 1 \\ m \neq 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{1}{m}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{m}, 0 \right) \right\}.$$

R5.7.5. Rezolvați și discutați sistemul:

$$\begin{cases} kx + y = 3 \\ x + ky = 3 \end{cases} \quad (1)$$

Rezolvare:

$$\begin{cases} kx + y = 3 & | -1 \\ x + ky = 3 & | k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -kx - y = -3 \\ kx + k^2y = 3k \end{cases}$$

$$(k^2 - 1)y = 3(k - 1)$$

caz I: $k=1$
 $0=0$
 $x+y=3 \Rightarrow S=\{(x,3-x)|x \in \mathbb{R}\}.$

caz II: $k=-1 \Rightarrow 0=-6$ fals $S=\emptyset$

caz III: $k \neq \pm 1$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{k+1} \Rightarrow kx = 3 \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) \Leftrightarrow x = \frac{3}{k+1} \Rightarrow S = \left\{ \left(\frac{3}{k+1}, \frac{3}{k+1} \right) \right\}.$$

R5.7.6. Rezolvați sistemele:

$$a) \begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0 \\ y - x = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$b) \begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$c) \begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = -5 \\ xy = 12 \end{cases} \quad (3)$$

Rezolvare:

a)

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$2(x+1)^2 - x(x+1) - (x+1)^2 + 2x - 2(x+1) + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \Rightarrow y = -4$$

$$S = \{(-5, -4)\}$$

$$b) \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 2 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 - x(2-x) + (2-x)^2 = 1 \end{cases} \quad c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 3x^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = -5 \mid \cdot 12 \\ xy = 12 \mid \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{36x^2 - 24y^2 = -60}{36x^2 + 5xy - 24y^2 = 0}$$

$$y=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ nu convine}$$

$y \neq 0$ împărțim ultima relație cu y^2 și notăm $\frac{x}{y} = t$. Obținem $36t^2 + 5t - 24 = 0$, cu

$$t_1 = \frac{3}{4} \text{ și } t_2 = -\frac{8}{9}.$$

$$\text{Caz I: } \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ \frac{3}{4}y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ y = \pm 4 \end{cases}$$

$$y_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 3$$

$$y_2 = -4 \Rightarrow x_2 = -3$$

$$\text{Caz II : } \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{8}{9} \\ -\frac{8}{9}y^2 = 12 \text{ fals} \end{cases} \quad S = \{(3,4); (-3,-4)\}.$$

Rezolvați sistemul b) care este și simetric prin altă metodă

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 3PS = 2 \\ S^2 - 3P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S(S^2 - 3P) = 2 \\ S^2 - 3P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}$$

Ecuția atașată:

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$t_1 = t_2 = 1$$

$$S = \{(1,1)\}.$$

R5.7.7. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4x - 3(y^2 - y - 1) = 0 \\ 4x^2 + 4x + (y^2 - y - 1) = 4 \mid \cdot 3 \end{cases}$$

Rezolvare:

$$4x^2 + 4x = 3 \Rightarrow x_1, x_2$$

Analog se determină y_1, y_2

$$S = \{(x_1, y_1); (x_1, y_2); (x_2, y_1); (x_2, y_2)\}.$$

$$\text{R5.7.8. Se consideră sistemul } \begin{cases} x + 2y = m - 2 \\ x^2 + y^2 - mx - 2y = 3 \end{cases} \quad m \in R$$

- să se rezolve sistemul
- să se determine valorile parametrului m pentru care sistemul admite numai soluții numere întregi negative
- să se determine valorile parametrului real m pentru care sistemul admite o soluție (x, y) cu $x=y$.

Rezolvare:

$$\text{a) } x = m - 2 - 2y$$

$$(m - 2)^2 - 4(m - 2)y + 4y^2 + y^2 - m(m - 2) + 2my - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5y^2 + y(2m - 4m + 8 - 2) + m^2 - 4m + 4 - m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5y^2 - 2(m - 3)y + 1 - 2m = 0$$

$$\Delta = 4(m^2 - 6m + 9 - 5 + 10m) = 4(m + 2)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{2(m - 3) \pm 2(m + 2)}{10} = \frac{m - 3 \pm (m + 2)}{5}$$

$$y_1 = -1 \Rightarrow x_1 = m - 2 + 2 = m$$

$$y_2 = \frac{2m - 1}{5} \Rightarrow x_2 = m - 2 - \frac{4m - 2}{5} = \frac{5m - 10 - 4m + 2}{5} = \frac{m - 8}{5}.$$

b) $m < 0, m \in \mathbb{Z}$

$$5 \mid 2m-1$$

$$5 \mid m-8$$

$$\text{Condițiile } 2m-1 < 0$$

$m-8 < 0$, sunt implicate de condiția $m < 0$.

$$5 \mid m-8 \Rightarrow m-8=5k \Rightarrow m=5k+8, k < -2$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$2m-1=10k+16-1=10k+15 : 5$$

$$\Rightarrow m \in \{5k+8 \mid k \in \mathbb{Z}, k < -2\}.$$

c) $x=y \Leftrightarrow m=-1$ sau

$$\frac{2m-1}{5} = \frac{m-8}{5} \quad \text{etc.}$$

R5.7.9. Să se determine numerele reale a și b știind că $a+b \in \mathbb{Z}$ și $a^2 + b^2 = 2$.

Rezolvare:

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \leq 4 \Rightarrow |a+b| \leq 2 \Leftrightarrow a+b \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

(s-a folosit inegalitatea între media aritmetică și cea pătratică).

$$\text{Caz I: } \begin{cases} a+b=0 \\ a^2+b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ 2a^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ a=\pm 1 \end{cases} \quad \text{Perechile căutate sunt: } (1,-1); (-1,1).$$

$$\text{Caz II: } \begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ a^2+(1-a)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ 2a^2-2a-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ a=\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$a = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{etc.}$$

R5.7.10. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemele de ecuații

$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = ax + by + cz = 1$ unele a, b, c sunt numere reale nu toate nule.

Rezolvare:

Inegalitatea C.B.S.

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (ax + by + cz)^2 = 1 = ax + by + cz$$

Are loc egalitatea \Leftrightarrow există $k \in \mathbb{R}^*$ astfel încât: $x=ka$

$$y=kb$$

$$z=kc.$$

$$k(a^2 + b^2 + c^2) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Soluția sistemului este $\left(\frac{a}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c}{a^2 + b^2 + c^2}\right)$.

Bibliografie

Olimpiadele de matematică 2002 - Editura Gil - T. Andreescu, B. Enescu, A. Jorza, O. Pop.

Olimpiadele balcanice de matematică pentru juniori - D. Brânzei, I. Serdean, V. Șerdean.

Olimpiadele de matematică 2000-2001 - Editura Gil - T. Andreescu, B. Enescu, M. Lascu, O. Pop.

Olimpiadele de matematică concursuri interjudețene - Editura Paralela 45 (2000-2001) - D. Brânzei, I. Serdean, Sorin Ulmeanu, V. Gorgota.

Algebră - Geometrie clasa a VIII-a - I. Negrilă, M. Negrilă - Editura Paralela 45, 2002.

Algebră – Geometrie. Olimpiade și concursuri - Arthur Bălăucă - Editura Taida, Iași 2002.

GEOMETRIE

1. Probleme de numărare

Rezumat: În cadrul temei se vor prezenta elementele de bază ale combinatoricii, regula sumei, produsului, precum și aplicarea lor în diferite probleme de algebră, aritmetică, respectiv geometrie combinatorică (probleme de numărare, colorare, descompunere).

1.1 Reprezentarea regulii sumei, respectiv produsului, și aplicații ale acestor reguli în studierea unor probleme de combinatorică, respectiv a unor probleme de numărare

1.1.1. Regula sumei

Dacă un anumit obiect poate fi ales în m moduri, iar un alt obiect poate fi ales în n moduri, atunci alegerea "lui A sau B" poate fi realizată în $m+n$ moduri (trebuie avut grijă ca nici o alegere a lui A să nu coincidă cu nici o alegere a lui B). Dacă totuși există astfel de coincidențe, atunci regula sumei de mai sus dă $m+n-k$ moduri de alegere "a lui A sau B" unde k este numărul de coincidențe.

1.1.2. Regula produsului

Dacă un obiect A se poate alege în m moduri și dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în n moduri, atunci alegerea perechii (A,B) în această ordine poate fi realizată în $m \cdot n$ moduri.

1.1.3. Principiul cutiei (Dirichlet)

Dacă n cutii și mai mult de $n+1$ obiecte trebuie aranjate în cele n cutii, atunci cel puțin 2 obiecte se află în aceeași cutie.

1.1.4. Principiul inducției matematice

Fie $P(n), n \geq k$ o propoziție matematică, $k \in \mathbb{N}$ fixat, $n \in \mathbb{N}$.

Dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

I. $P(k)$ "A"

II. Dacă $P(p)$ "A", $(\forall) p = \overline{k, n}$ atunci $P(n+1)$ "A"

Atunci $p(n)$ "A", $(\forall) n \geq k$

Schiță de demonstrație $P(k)$ "A" $\Rightarrow P(k+1)$ "A" $\Rightarrow P(k+2)$ "A" $\Rightarrow \dots$

1.1.5. Principiul includerii și excluderii

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|$$

unde $A, B, C, A_1, A_2, \dots, A_n$ mulțimi finite

1.2. Probleme rezolvate (Algebră)

1.2.1. Mulțimi ordonate

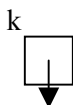
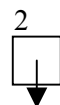
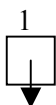
O mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunerea elementelor sale este o combinație (sau mulțime ordonată).

Se numește aranjament de n elemente luate câte k orice combinație alcătuită din k elemente ale mulțimii A .

Două aranjamente de n elemente luate câte k se deosebesc prin natura elementelor sau prin ordinea lor.

A_n^k = numărul aranjamentelor de n elemente luate câte $k = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-$

$$-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$



n moduri

$n-1$ moduri

$n-k+1$ moduri

Prima poziție a unui aranjament se poate completa în n moduri.

A doua poziție în $n-1$ moduri... etc.

Total, conform regulii produsului $= n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$,

$0! = 1, 1! = 1$.

1.2.2. Permutări

Pentru $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ considerăm un aranjament de n elemente luate câte n . Acest aranjament se numește permutare de n elemente.

Numărul permutărilor de n elemente $= P_n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!, P_n = n!, n \geq 1$.

1.2.3. Numărul de funcții $f: A \rightarrow B$ ($|A|=m, |B|=n$)

Numărul de funcții $f: A \rightarrow B$ ($|A|=m, |B|=n$) este n^m .

Rezolvare

$$B^A = \{f: A \rightarrow B\}$$

$$|B^A| = |B|^{|A|}$$

$$A = \{a_1, \dots, a_m\}, B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

$f: A \rightarrow B$ este bine determinată dacă știm care sunt valorile lui $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)$ care se pot alege conform regulii produsului dintre elementele lui B în număr de $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{m \text{ ori}} = n^m$ moduri $\Rightarrow |B^A| = n^m$.

1.2.4. Funcții injective

$$f: A \rightarrow B \text{ injectivă} \Leftrightarrow (\forall) x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow (\forall) x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\Leftrightarrow \text{ecuația } f(x)=y \text{ are cel mult o soluție în } A.$$

Funcții surjective

$$f: A \rightarrow B \text{ surjectivă} \Leftrightarrow (\forall) y \in B, \text{ ecuația } f(x)=y \text{ are cel puțin o soluție în } A$$

$$\Leftrightarrow \text{Im } f = B$$

Funcții bijective

$$f: A \rightarrow B \text{ bijectivă} \Leftrightarrow \text{funcție injectivă} + \text{surjectivă}$$

$$\Leftrightarrow (\forall) y \in B, \text{ ecuația } f(x)=y \text{ are exact o soluție în } A.$$

Numărul de funcții injective $= A_m^n, n \leq m$.

$$f: A \rightarrow B \text{ a.î. } |A|=n, |B|=m.$$

Numărul de funcții bijective

$$f: A \rightarrow B, |A|=|B|=n \text{ este } P_n = n!.$$

Observații

$$f: A \rightarrow B \text{ bijectivă} \Rightarrow |A|=|B|, A, B \text{-finite}$$

1.2.5. Combinări

Dacă A este o mulțime cu n elemente, atunci submulțimile lui A formate din k elemente $0 \leq k \leq n$ se numesc combinări de n elemente luate câte k .

Numărul lor se notează $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!}$ deoarece nu contează ordinea

$$\text{elementelor} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, 0 \leq k \leq n, n \in \mathbb{N}.$$

1.2.6. Mulțimea părților unei mulțimi date

$$\text{Fie } A \text{ o mulțime. } P(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

Dacă $|A|=n$, atunci $|P(A)|=2^n$.

Rezolvare

I. Verificăm dacă $P(0)$ este adevărată.

$A = \emptyset, |A|=0$ Singura submulțime a lui A este \emptyset

$\Rightarrow |P(A)|=1=2^0$ adevărată.

II. Presupunem că dacă $|A|=p, 0 \leq p \leq n$, atunci $|P(A)|=2^p, A$ este o mulțime oarecare

Fie B a.î. $|B|=n+1, B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$.

$P(B) = T \cup S$

$T = \{\text{mulțimea submulțimilor lui } B, \text{ cu proprietatea că } a_{n+1} \notin \text{unei altfel de submulțimi}\}$.

$S = \{\text{mulțimea submulțimilor lui } B, \text{ cu proprietatea că } a_{n+1} \in \text{unei altfel de submulțimi}\}$.

$|S|=|T|$

$S = \{U \cup \{a_{n+1}\} | U \in T\}$

$|T| = |P(\{a_1, \dots, a_n\})| = 2^n \Rightarrow |P(B)| = |T \cup S| = |T| + |S| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Din I și II $\Rightarrow |P(A)| = 2^{|A|} (\forall) A$ mulțime finită

Observație. Din această relație rezultă $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

Probleme rezolvate

R1.2.1. Se consideră un tablou în formă de pătrat astfel încât pe fiecare linie și fiecare coloană să avem n căsuțe ($n \geq 2$) care se completează cu numere întregi. Determinați în câte moduri poate fi completat tabloul dacă produsul numerelor de pe fiecare linie, coloană este 5 sau -5.

Rezolvare

Pentru început determinăm numărul de aranjări ale numerelor 5 sau -5. Dacă pe o linie, coloană apare 5 sau -5, atunci pe acea linie, coloană nu va mai apărea 5 sau -5.

Este suficient să vedem în câte moduri putem completa liniile cu 5, respectiv -5.

Linia 1 – 2^n posibilități de completare cu 5 sau -5

Linia 2 – $2(n-1)$ posibilități de completare cu 5 sau -5

.....
Linia n – 2 posibilități de completare cu 5 sau -5

Din regula produsului rezultă că avem $2^n \cdot n!$ posibilități de completare cu 5 sau -5

În continuare pentru fiecare completare a unei linii cu 5 sau -5 mai avem 2^{n-1} posibilități de completare cu 1, -1 = numărul funcțiilor definite pe o mulțime cu $n-1$ elemente (pozițiile rămase libere) cu valori în mulțimea $\{-1, 1\}$.

În total numărul de completări este $2^n \cdot n! \cdot 2^{n-1} = 2^{n^2} \cdot n!$

R1.2.2. Fie $n \geq 3$ un număr întreg. Demonstrați că este posibil ca eliminând cel mult două dintre elementele mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ să obținem o mulțime care are suma elementelor pătrat perfect.

Rezolvare

$$S = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} < \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Se consideră $S, S-1, S-2, \dots, S-2n+1$ sumele formate cu elementele mulțimii A din care ori nu scoatem nici un element, ori un element, respectiv 2 elemente (am ales aici sumele distincte).

Presupunem că nici un număr nu este pătrat perfect $\Rightarrow (\exists) k \leq n$ a.î. $(k-1)^2 < S-2n+1 < S-2n < \dots < S < k^2$.

Numerele dintre cele două pătrate perfecte sunt în număr de $k^2 - (k-1)^2 + 1 - 2 = 2k - 2$ numere \Rightarrow contradicție, ele fiind cel puțin $S - S + 2n - 1 + 1 = 2n$ numere și $2k - 2 < 2n$. Deci cel puțin unul dintre numerele de mai sus este pătrat perfect.

R1.2.3. La un turneu de tenis au participat de două ori mai mulți băieți decât fete. Fiecare pereche de participanți a jucat exact o dată și nu au fost rezultate egale. Raportul dintre numărul victoriilor obținute de fete, față de cele obținute de băieți a fost de $\frac{7}{5}$. Câți participanți au fost la acest turneu?

Rezolvare

n -numărul fetelor

$2n$ -numărul băieților

$3n$ -număr participanți

Numărul total de meciuri = $C_{3n}^2 = \frac{3n(3n-1)}{2}$. Numărul total de victorii ale băieților reprezintă $\frac{5}{12}$ din total, deci $\frac{5}{12} C_{3n}^2 = \frac{5n(3n-1)}{8}$. Mecurile jucate între

băieți sunt în număr de $C_{2n}^2 = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ - considerate victorii ale băieților.

$$\frac{5n(3n-1)}{8} \geq n(2n-1) \Leftrightarrow 15n-5 \geq 16n-8 \Leftrightarrow n \leq 3.$$

Analizăm cazurile $n=1$, $n=2$, nu convin. $n=3$ convine. Numărul participanților este 9.

R1.2.4. Se consideră un dreptunghi de dimensiuni $1 \times n$, $n \geq 1$ număr natural și dale pătrate de dimensiuni 1×1 de patru culori. Se pavează dreptunghiul cu dale astfel încât oricare două dale alăturate să aibă culori diferite.

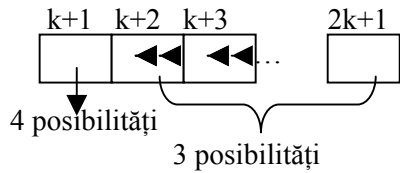
a) Câte pavări simetrice există?

b) Câte pavări au proprietatea că oricare trei dale consecutive au culori diferite?

Rezolvare

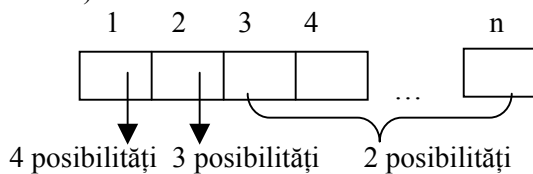
a) Cazul I $n=2k$, imposibilă efectuarea unei pavări simetrice ca mai sus, cele două dale din mijloc având aceeași culoare

Cazul II $n=2k+1$ - vom discuta modalitățile de pavare în funcție de dala din mijloc spre dreapta, ținând cont că pavarea este simetrică.



Total, conform regulii produsului $4 \cdot 3^k$ posibilități.

b)



Total, $4 \cdot 3 \cdot 2^{n-2} = 3 \cdot 2^n$ posibilități.

R1.2.5. Să se determine numărul de diagonale ale unui patrulater convex cu n laturi.

Rezolvare

Numărul de diagonale = numărul de segmente determinate de cele n vârfuri din care

scoatem cele n laturi $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

R1.2.6. Care sunt poligoanele convexe care au proprietatea: numărul diagonalelor lor este egal cu numărul punctelor de intersecție ale acestor diagonale situate în interiorul poligonului și nu există trei diagonale concurente în interiorul poligonului?

Rezolvare

$$\text{Numărul diagonalelor} = \frac{n(n-3)}{2}$$

Numărul punctelor date = C_n^4 = deoarece intersecția a două diagonale în interiorul patrulaterului convex reprezintă intersecția diagonalelor în patrulaterul convex determinat de 4 vârfuri ale poligonului corespunzătoare celor două diagonale și reciproc 4 vârfuri ale poligonului determină două diagonale care se intersectează în interiorul poligonului.

Deci rămâne de rezolvat ecuația $C_n^4 = \frac{n(n-3)}{2}$, $n \geq 4 \Leftrightarrow (n-1)(n-2) = 12 \Leftrightarrow n = 5$

Poligoanele căutate sunt pentagoanele convexe.

R1.2.7. Care este numărul maxim de unghiuri ascuțite pe care le poate avea un poligon convex cu n laturi?

Rezolvare

Considerăm că poligonul are k unghiuri ascuțite. Deci suma unghiurilor sale este mai mică decât $k \cdot 90^\circ + (n-k) \cdot 180^\circ$. Pe de altă parte suma unghiurilor unui poligon cu n laturi

este egală cu $(n-2) \cdot 180^\circ$. Deci $(n-2) \cdot 180^\circ < k \cdot 90^\circ + (n-k) \cdot 180^\circ \Rightarrow k < 4 \Rightarrow k=3$ numărul maxim (vezi cazul unui triunghi ascuțitunghic).

R1.2.8. Fiecărui punct din plan i se asociază un număr real astfel încât numărul asociat centrului cercului înscris într-un triunghi să fie egal cu media aritmetică a numerelor asociate vârfurilor triunghiului, oricare ar fi acesta. Să se arate că tuturor punctelor din plan le este asociat același număr.

Rezolvare

Fie ABCDEF hexagon regulat

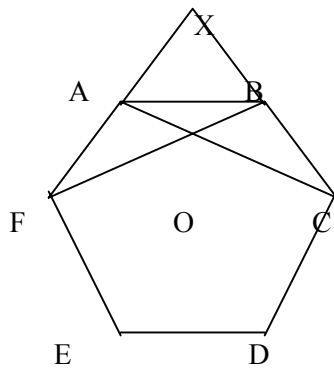
D, E alese arbitrar, de la ele pornind construcția.

A(a), B(b), C(c), D(d), E(e), X(x) unde $\{X\} = AF \cap BC$

ΔACE și ΔBDF - triunghiuri echilaterale cu centrul O $\Rightarrow a + c + e = b + f + d$.

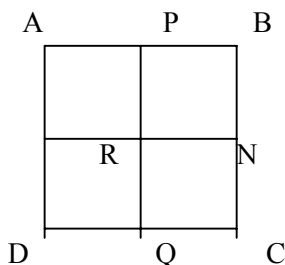
ΔXBF și ΔXAC - au aceeași centru pentru cercurile înscrise datorită simetriei față de dreapta OX. $x + b + f = x + a + c \Rightarrow b + f = a + c \Rightarrow d = e$ q.e.d, D și E fiind alese arbitrar.

O este centrul hexagonului regulat



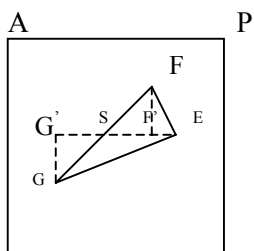
R1.2.9. În interiorul unui pătrat de latură 1 se consideră 9 puncte. Să se arate că putem alege 3 dintre acestea să fie vârfurile unui triunghi cu aria cel mult egală cu $1/8$.

Rezolvare



Se iau mijloacele laturilor pătratului ca în figură.

Conform principiului lui Dirichlet, cel puțin 3 se află într-un pătrat mic.



M R

Ducem $ES \parallel MR$ (cazul când una din laturile triunghiului este paralelă cu o latură a pătratului sau inclusă în ea este trivial).

$$A_{[EFG]} = A_{[FES]} + A_{[ESG]} = \frac{h_1 SE}{2} + \frac{h_2 SE}{2} = \frac{SE(h_1 + h_2)}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ q.e.d. } FF' = h_1 \quad GG' = h_2$$



Bibliografie

Manual cls. X-a - M.Ganga-Editura Math Press

Probleme elementare de matematică -M.Ganga-Editura Math Press 2003

Probleme de teoria numerelor și combinatorică pentru juniori- L.Panaitopol,

D.Șerbănescu

Olimpiade balcanice pentru juniori- D.Brânzei, I.Șerdean, V. Șerdean

2. Paralelism în spațiu

În cadrul temei vom prezenta principalele teoreme de paralelism respectiv teorema de paralelism a unei drepte cu un plan, plane paralele și alte teoreme de paralelism deosebit de utile în rezolvarea problemelor, definiția corpurilor geometrice, a secțiunilor în corpuri geometrice, determinarea unor distanțe în spațiu, a unghiului a două drepte.

2.1. Drepte paralele

Definiția 2.1.1. Două drepte coplanare care nu au nici un punct comun se numesc drepte paralele.

Axioma 2.1.1. (Axioma paralelelor – Axioma lui Euclid) Printr-un punct exterior unei drepte putem construi o singură paralelă la dreapta dată.

2.2. Dreaptă paralelă cu un plan

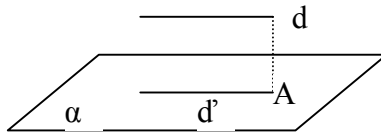
Definiția 2.2.1 O dreaptă este paralelă cu un plan dacă nu are nici un punct comun cu planul.

Notăție: Dacă $d \cap \alpha = \emptyset$, notăm $d \parallel \alpha$ sau $\alpha \parallel d$.

În rezolvarea problemelor apelăm mai puțin la definiție și mai mult la teorema de paralelism.

Teorema 2.2.1 Dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă inclusă într-un plan atunci ea este paralelă cu planul sau inclusă în plan.

Demonstrație:



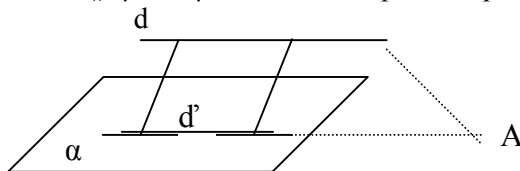
Fie planul α și dreapta $d \not\subset \alpha$. Fie d' o dreaptă inclusă în α și $d \parallel d'$.

Dreptele d și d' sunt coplanare, $(d; d') = \beta$. Presupunem că $d \parallel \alpha$, atunci $d \cap \alpha = \emptyset$

$\Rightarrow A \in d \subset \beta$, dar $A \in \alpha \cap \beta \Rightarrow A \in d'$ atunci $d \cap d' = \{A\}$, contrazice ipoteza, rezultă că presupunerea este falsă. $\Rightarrow d \parallel \alpha$.

Teorema 2.2.2 Fie d o dreaptă paralelă cu un plan α , iar β un plan care conține dreapta d . Atunci $\alpha \parallel \beta$ sau β intersectează pe α după o dreaptă d' și $d \parallel d'$.

Demonstrație



Presupunem că $\alpha \not\parallel \beta$, atunci $\alpha \cap \beta = d'$ și demonstrăm că $d \parallel d'$.

Presupunem că $d \not\parallel d'$, d și d' sunt coplanare $\Rightarrow d \cap d' = \{A\}$. Din $A \in d$ și

$A \in d' \subset \alpha; \Rightarrow A \in \alpha; \Rightarrow A \in d \subset \alpha$, contradicție cu $d \parallel \alpha; \Rightarrow$ presupunerea este falsă $\Rightarrow d \parallel d'$.

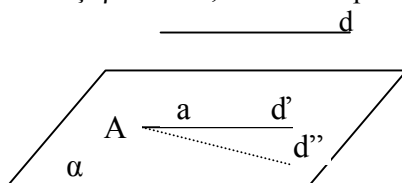
Teorema 2.2.3 Fie d o dreaptă inclusă, sau paralelă cu un plan α și fie d' o dreaptă paralelă cu d , dusă printr-un punct A al planului α , atunci d este inclusă în planul α .

Demonstrație:

1° Cazul $d \subset \alpha$

Fie $\beta = (d; d')$. Planele α și β coincid, având dreapta a și punctul A în comun.

Rezultă $d' \subset \alpha$



2° Cazul $d \not\subset \alpha$

Notăm $\beta = (d; d')$. Dacă $\beta \cap \alpha = d''$, atunci conform teoremei precedente rezultă $d \parallel d'$. Dacă d și d'' nu coincid atunci prin A trec două paralele la d , ceea ce contrazice axioma paralelelor rezultă că $d' = d''$.

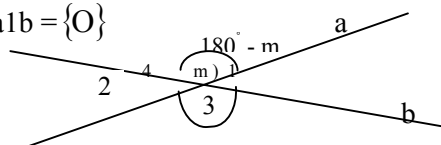
Teorema 2.2.4. Dacă a, b, c , sunt trei drepte astfel încât $a \parallel b$ și $b \parallel c$ atunci $a \parallel c$ (transitivitatea relației de paralelism).

Teorema 2.2.5 Fie $\widehat{X O Y}$ și $\widehat{X' O' Y'}$ două unghiuri diferite.

Dacă $O X \parallel O' X'$ și $O Y \parallel O' Y'$, atunci unghiurile $\widehat{X O Y}$ și $\widehat{X' O' Y'}$ sunt congruente sau suplementare.

2.3 Măsura unghiului a două drepte în spațiu

Fie dreptele a și b astfel încât $a \cap b = \{O\}$
 Atunci $\widehat{O_1} \equiv \widehat{O_2}$ (opuse la vârf)
 $\widehat{O_3} \equiv \widehat{O_4}$ (opuse la vârf)



Definiția 2.3.1.: Cea mai mică dintre măsurile m și $180^\circ - m$ se numește măsura unghiului dreptelor concurente a și b .

Observații: 1° Dacă $m=90^\circ$ atunci $a \perp b$;

2° Dacă $m = 0^\circ$ atunci $a \parallel b$;

Definiția 2.3.2.: Măsura unghiului dreptelor a și b este măsura unghiului dreptelor a' și b' paralele cu a și b , duse printr-un punct oarecare P . (conform teoremei unghiurilor cu laturile paralele).

Dacă $m(a; b) = 90^\circ \Rightarrow a \perp b$;

Probleme rezolvate

R2.4.1. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $BC=BD$. Bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ și $\angle ABD$ intersectează pe AC în P și respectiv pe AD în Q .

1. Demonstrați că $PQ \parallel (BCD)$
2. Perpendicularele duse din A pe bisectoarele BP și respectiv BQ intersectează pe BP în E și pe BC în M , și respectiv pe BQ în F și pe BD în N , determinați poziția dreptei EF față de planul (ACD) .
3. Determinați intersecția planelor (PCD) și (MNF) .

Soluție:

1. În $\triangle ABC$, (BP este bisectoare)

$$\Rightarrow T. \text{ bisectoarei: } \frac{BC}{BA} = \frac{CP}{PA} \quad (1)$$

În $\triangle ABD$, (BQ este bisectoare)

$$\Rightarrow T. \text{ bisectoarei: } \frac{BD}{BA} = \frac{DQ}{QA} \quad (2)$$

$BC = BD$ (ip). (3)

Din relațiile (1), (2), și (3)

$$\Rightarrow \frac{CP}{PA} = \frac{DQ}{QA}$$

$$\begin{array}{l} \text{R.T. Thales} \\ \hline \hline \end{array} \left. \begin{array}{l} PO \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\triangle ACD$

$$PQ \parallel (BCD).$$

2. În $\triangle ABM$, BE bisectoare și înălțime $\Rightarrow \triangle ABM$ isoscel
 $\Rightarrow BE$ - mediană $\Rightarrow AE = EM$ (3)

În $\triangle ABN$, BF bisectoare și înălțime $\Rightarrow BF$ - mediană $\Rightarrow AF = FN$ (4)

Din relațiile (3) și (4) $\Rightarrow EF$ -linie mijlocie în $\triangle AMN \Rightarrow EF \parallel MN$

$MN \subset (BCD)$

$\triangle ABM$ isoscel $\Rightarrow BM = BA$

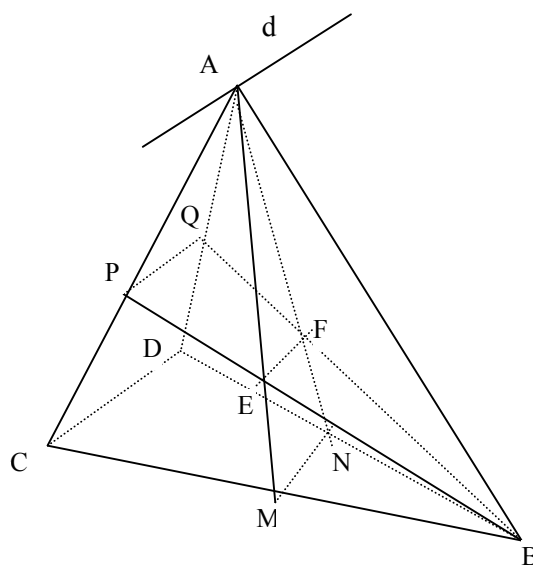
$\triangle ABN$ isoscel $\Rightarrow BN = BA$

$$\left. \begin{array}{l} BM = BA \\ BN = BA \end{array} \right\} BM = BN,$$

iar din ipoteză $BC=BD \Rightarrow MN \parallel CD$ și $CD \subset (ACD) \Rightarrow MN \parallel (ACD)$

$MN \parallel EF$

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel (ACD) \\ MN \parallel EF \end{array} \right\} \Rightarrow EF \parallel (ACD).$$



$$\left. \begin{array}{l}
3. \ CD \parallel MN \\
\ CD \subset (ACD) \\
\ MN \subset (AMN) \\
A \in (AMN) \cap (ACD) \\
\text{Dar } (AMN) = (MNF) \text{ și } (PCD) = (ACD) \\
\Rightarrow (ACD) \cap (MNF) = d
\end{array} \right\} \Rightarrow (AMN) \cap (ACD) = d \\
A \in d \text{ și } d \parallel CD \parallel MN$$

R2.4.2.: Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D. Printr-un punct M de pe segmentele (AB) se duce un plan paralel cu AC și BD. Acest plan intersectează pe BC în Q, pe CD în P și pe AD în N.

- 1) Să se arate că MNPQ este paralelogram;
- 2) În ce condiții patrulaterul MNPQ este dreptunghi?
- 3) În cazul $AM = x$, $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm, $BD = 7$ cm, să se calculeze, în funcție de x , perimetrul patrulaterului MNPQ.

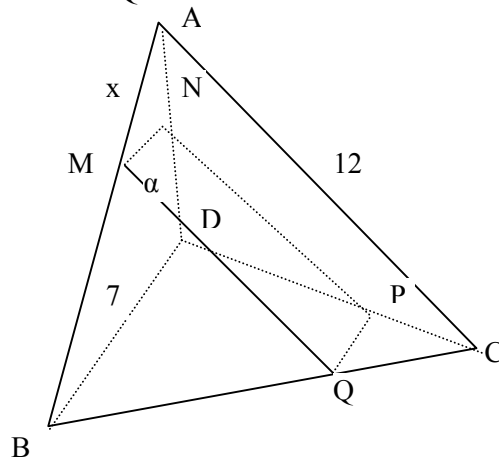
Soluție:

1. Notăm cu α planul ce trece prin M și $A \parallel AC$ și $\alpha \parallel BD$

$$\left. \begin{array}{l}
BD \parallel \alpha \\
(ABD) \cap \alpha = \{MN\} \\
\Rightarrow MN \parallel BD \quad (1)
\end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l}
BD \parallel \alpha \\
(BCD) \cap \alpha = \{PQ\} \\
\Rightarrow PQ \parallel BD \quad (2)
\end{array} \right\}$$

Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow MN \parallel PQ$ (3)



$$\left. \begin{array}{l}
AC \parallel \alpha \\
(ABC) \cap \alpha = \{MQ\} \\
\Rightarrow MQ \parallel AC \quad (4)
\end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l}
AC \parallel \alpha \\
(ACD) \cap \alpha = \{NP\} \\
\Rightarrow NP \parallel AC \quad (5)
\end{array} \right\}$$

Din relațiile (4) și (5) $\Rightarrow NP \parallel AC$ (6)

Din relațiile (3) și (6) \Rightarrow MNPQ este paralelogram

2. $\left. \begin{array}{l} MN \parallel BD \\ MQ \parallel AC \\ MN \perp MQ \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp AC$
Deci MNPQ este dreptunghi dacă $AC \perp BD$.

3. Din $MN \parallel BD$ în $\Delta ABD \Rightarrow$ T.F.A. $\Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABD$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BD} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{MN}{7} \Rightarrow MN = \frac{7x}{5}$$

Din $MQ \parallel AC$ în $\triangle ABC \Rightarrow$ T.f.a. $\triangle BMQ \sim \triangle BAC$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{12} \Rightarrow \frac{5-x}{5} = \frac{MQ}{12} \Rightarrow MQ = \frac{12(5-x)}{5}$$

$$p_{MNPQ} = 2MN + 2MQ = 2 \cdot \frac{7x}{5} + 2 \cdot \frac{12(5-x)}{5} = \frac{14x + 120 - 12x}{5} = \frac{2x + 120}{5}$$

R2.4.3.: Fie O și G centrele de greutate ale triunghiurilor BDC și respectiv ACD situate în plane diferite. Dacă N este mijlocul segmentului [CD], iar $M \in (AB)$ astfel

încât $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$ și $MN \cap AO = \{E\}$, demonstrați că $EG \parallel (BCD)$.

Soluție

O centrul de greutate al

$$\triangle BCD \Rightarrow \frac{BO}{ON} = \frac{2}{1}$$

G. Centrul de greutate al

$$\triangle ACD \Rightarrow \frac{AG}{GN} = \frac{2}{1}$$

$$\text{dar } \frac{BO}{ON} = \frac{AG}{GN} = \frac{2}{1} \Rightarrow$$

R.T. Thales în $\triangle ABN \Rightarrow OG \parallel AB$

Fie $OG \cap MN = \{S\}$

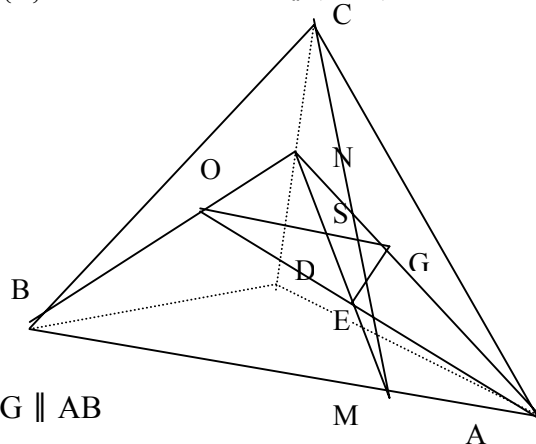
În $\triangle NBM$, $OS \parallel BM \Rightarrow$ (T.F.A) $\triangle NOS \sim \triangle NBM$

$$\Rightarrow \frac{OS}{BM} = \frac{ON}{NB} = \frac{1}{3} \Rightarrow OS = \frac{BM}{3}$$

$$\text{Din } \frac{AM}{AB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow BM = \frac{3AB}{5}$$

$$\text{atunci înlocuind în relația } OS = \frac{BM}{3} \Rightarrow OS = \frac{\frac{3AB}{5}}{3} = \frac{AB}{5} \left. \begin{array}{l} \\ AM = \frac{2}{5} AB \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OS}{AM} = \frac{1}{2}$$

$$\text{din } OS \parallel AM \Rightarrow \triangle AEM \sim \triangle OES \Rightarrow \frac{OS}{AM} = \frac{OE}{EA} = \frac{1}{2}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Dacă } \frac{OE}{EA} = \frac{1}{2} = \frac{NG}{GA} \Rightarrow \text{R.T.Thales- } \Delta ANO \text{ } EG \parallel NO \\ NO \subset (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow EG \parallel (BCD)$$

2.4. Plane paralele

Definiția 2.4.1 : Două plane α și β sunt paralele dacă nu au nici un punct comun.

Notăm: $\alpha \parallel \beta$. Dacă $\alpha \cap \beta = \emptyset$ atunci $\alpha \parallel \beta$.

În rezolvarea problemelor nu este suficientă definiția pentru a determina soluția unei probleme, fiind nevoie de o teoremă care să justifice paralelismul planelor.

Lema 2.4.1. (teoremă ajutătoare). Dacă a și b sunt două drepte paralele, iar α și β două plane astfel încât $a \subset \alpha$ și $b \subset \beta$ și $\alpha \cap \beta = c$, atunci c este paralelă cu a și b .

Teorema 2.4.1. Dacă un plan conține două drepte concurente, paralele cu celălalt plan atunci planele sunt paralele.

Demonstrație: fie planul α astfel încât $a, b \subset \alpha$, $a \cap b = \{O\}$ și O' exterior planului α .

Prin O' ducem dreptele $a' \parallel a$ și $b' \parallel b$,

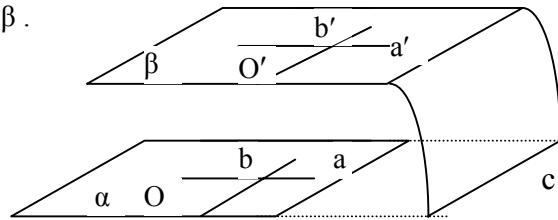
rezultă că $a' \parallel \alpha$ și $b' \parallel \alpha$

Dreptele a' și b' determină planul β .

Dacă $\alpha \not\parallel \beta$ atunci se intersectează după dreapta c , atunci conform lemei (2.3.1)

rezultă că $c \parallel a$ și $c \parallel b$, dar $a \cap b = \{O\}$

contrazice axioma paralelelor rezultă că presupunerea este falsă $\Rightarrow \alpha \parallel \beta$.



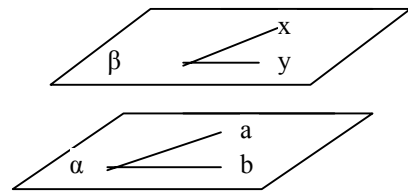
Teorema 2.4.2. Fiind date un plan α și un punct A exterior planului, există un plan unic, ce conține punctul A și este paralel cu planul α

Demonstrație :

Prin A ducem dreptele Ax și Ay paralele cu α , atunci $\beta \parallel \alpha$, $\beta = (Ax; Ay)$. Vom demonstra că planul β este unic. Fie a și b incluse în planul α și $a \parallel Ax$ și $b \parallel Ay$

Orice plan γ care conține pe A și este paralel cu

α , este paralel cu a și b . Conform teoremei (2.2.3) planul γ trebuie să conțină dreptele Ax și Ay prin urmare $\gamma = \beta$

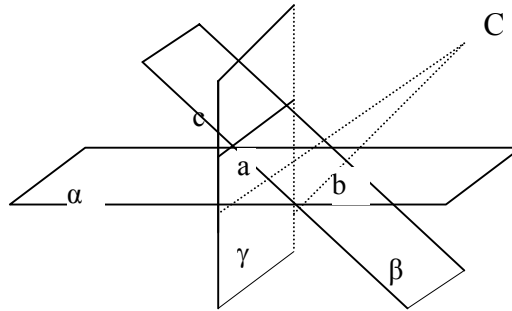


Teorema 2.4.3 Dacă două plane sunt paralele, orice plan care intersectează pe primul îl intersectează și pe al doilea și dreptele de intersecție sunt paralele.

Teorema 2.4.4. Două plane distincte paralele cu al treilea sunt paralele între ele.

Teorema 2.4.5. Dacă trei plane nu au toate trei un punct comun dar se taie două câte două atunci dreptele de intersecție sunt paralele.

Demonstrație : presupunem că $a \not\parallel b$, atunci $a \cap b = \{C\}$, dar în aceste condiții $C \in \alpha \cap \beta \cap \gamma$, contrazice ipoteza , rezultă că presupunerea este falsă $\Rightarrow a \parallel b$, analog $a \parallel b \parallel c$.



Teorema 2.4.6 (teorema lui Thales în spațiu). Mai multe plane paralele determină pe două drepte oarecare, care le intersectează pe acestea, segmente proporționale.

Demonstrație:

Fie $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ și distincte două câte două.

Dreptele d_1 și d_2 sunt distincte și taie cele

Trei plane A_1, B_1, C_1 respectiv A_2, B_2, C_2 .

Ducem prin A_2 dreapta d_1' cu β și γ . Atunci

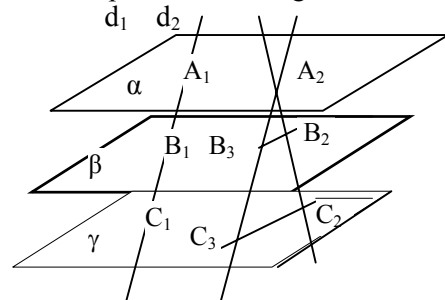
în $\Delta A_2 C_2 C_3$ avem $B_2 B_3 \parallel C_2 C_3$ rezultă

$$\text{Conform teoremei lui Thales că } \frac{A_2 B_3}{B_3 C_3} = \frac{A_2 B_2}{B_2 C_2} \quad (1)$$

Dar $A_1 B_1 \parallel A_2 B_3$, $B_1 C_1 \parallel B_3 C_3$ și

$A_1 A_2 \parallel B_1 B_3 \parallel C_1 C_3$ atunci $A_1 B_1 B_3 A_2$ și $B_1 C_1 C_3 B_3$ sunt paralelograme

$$\Rightarrow A_1 B_1 = A_2 B_3 \text{ și } B_1 C_1 = B_3 C_3, \text{ înlocuind în relația (1) obținem } \frac{A_1 B_1}{B_1 C_1} = \frac{A_2 B_2}{B_2 C_2}$$



Probleme rezolvate

R2.7.1 Fie α și β două plane paralele, iar A și $B \in \alpha$; C și $D \in \beta$ astfel încât A, B, C, D să fie necoplanare. Dacă M este mijlocul lui (AC) și N este mijlocul lui (BD) iar $AN \cap \beta = \{F\}$, $BM \cap \beta = \{E\}$, demonstrați că:

1° $ABCE$ și $ABDF$ sunt paralelograme;

2° $(AED) \parallel (BCF)$;

3° $\Delta ADE \equiv \Delta BCF$

Soluție :

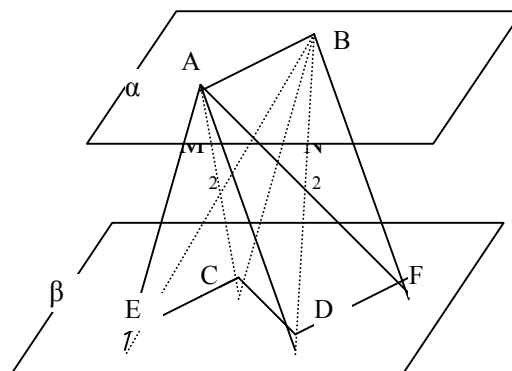
$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ \alpha \parallel \beta \\ (ABC) \cap \alpha = AB \\ (ABC) \cap \beta = CE \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel CE \quad (1)$$

$$\Delta AMB \equiv \Delta CME \text{ (ULU)}$$

$$(AM) \equiv (MC)$$

$$\hat{M}_1 \equiv \hat{M}_2 \text{ (opuse la vârf)}$$

$$\hat{A} \equiv \hat{C} \text{ (alt. int.)}$$



$\Rightarrow (AB) \equiv (CE)$ (2). Din relațiile (1) și (2) \Rightarrow ABCE paralelogram
 Analog demonstrăm că ABFD este paralelogram.

2° ABCE –paralelogram $\Rightarrow AE \parallel BC$
 ABFD- paralelogram $\Rightarrow AD \parallel CF$ $\Rightarrow (ADE) \parallel (BCF)$

3° ΔADE $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{EAD} \equiv \widehat{CBF} \text{ (au lat. paralele)} \\ (AE) \equiv (BC) \text{ (op.în } \square) \\ (AD) \equiv (BF) \text{ (op.în } \square) \end{array} \right\} \text{(L.U.L.)} \Rightarrow \Delta ADE \equiv \Delta BCF$

R2.7.2. În triunghiul ABC, $a^2b - c^2b + a^2c - b^2c = b^3 + c^3$.

Fie D \notin (ABC) și G_1, G_2, G_3 respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor DBC, DAB, DAC. Să se arate că:

1° $(G_1, G_2, G_3) \parallel (ABC)$;

2° $G_1G_2 \perp G_1G_3$;

1° În ΔDBC , DM este mediană, $M \in BC$ și G_1 este

centrul de greutate $\Rightarrow \frac{DG_1}{G_1M} = \frac{2}{1}$ (1)

În ΔDAB , DN este mediană, $N \in AB$ și G_2 este

centrul de greutate $\Rightarrow \frac{DG_2}{G_2N} = \frac{2}{1}$ (2)

iar în triunghiul DAC, DP este mediană, $P \in AC$ și G_3 este centrul de greutate.

$\frac{DG_3}{G_3P} = \frac{2}{1}$ (3) din relațiile (1), (2), (3)

$$\Rightarrow \frac{DG_1}{G_1M} = \frac{DG_2}{G_2N} = \frac{DG_3}{G_3P} = \frac{2}{1}$$

Aplicăm reciproca teoremei lui Thales în triunghiurile DMN și DNP și rezultă că:

$G_1G_2 \parallel MN$; $MN \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABC)$

$G_2G_3 \parallel NP$; $NP \subset (ABC) \Rightarrow G_2G_3 \parallel (ABC)$

$\Rightarrow (G_1 G_2 G_3) \parallel (ABC)$

2° Din $a^2b - c^2b + a^2c - b^2c = b^3 + c^3$. Rezultă că

$$a^2(b+c) - bc(b+c) = (b+c)(b^2 - bc + c^2) : (b+c)$$

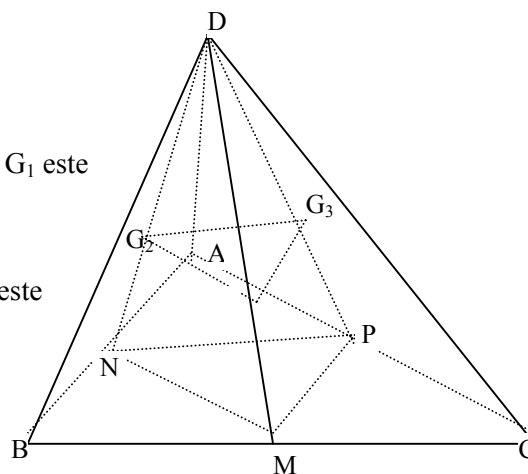
și obținem $a^2 - bc = b^2 - bc + c^2$

$a^2 = b^2 + c^2$ Din R.T.P. $\Rightarrow \Delta ABC$ dreptunghic în A.

Din $G_1G_2 \parallel MN$; $MN \parallel AC \Rightarrow G_1G_2 \parallel AC$ (4)

$G_1G_3 \parallel MP$; $MP \parallel AB \Rightarrow G_1G_3 \parallel AB$ (5)

Din relațiile (4) și (5) și $AC \perp AB$ rezultă că $G_1G_2 \perp G_1G_3$

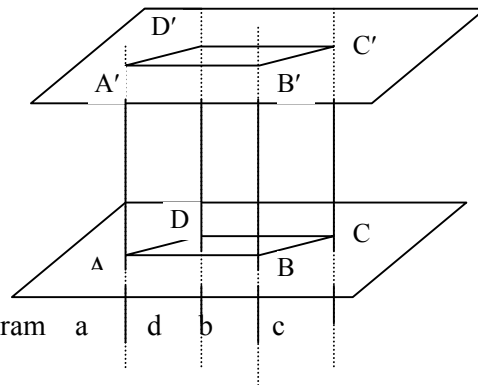


R2.7.3. Dacă patru drepte paralele intersectează un plan α în vârfurile A,B,C,D ale unui paralelogram, atunci, ele determină pe orice plan care le intersectează vârfurile unui paralelogram. Dreptele a și AB determină un plan (a;AB), dreptele d și CD determină planul (d; CD) și $a \parallel d, AB \parallel CD \Rightarrow$ planele (d;CD) și (a; AB) sunt paralele, analog planele (a;AB) \parallel (b;BC), atunci orice plan β care intersectează dreptele va determina:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \cap (a;AB) = A'B' \\ \beta \cap (d;CD) = C'D' \\ (a;AB) \parallel (d;CD) \end{array} \right\} \Rightarrow A'B' \parallel C'D' \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta \cap (a;AD) = A'D' \\ \beta \cap (b;BC) = B'C' \\ (a;AD) \parallel (b;BC) \end{array} \right\} \Rightarrow A'D' \parallel B'C' \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow A'B'C'D'$ este paralelogram



Bibliografie

- D.Brânzei și colectivul, Planul și spațiul euclidian; Ed. Academiei 1986
D.Brânzei și colaboratorii, Bazele raționamentului geometric, Ed. Academiei 1983
J. Hadamard, *Lecții de geometrie elementară, Geometrie în spațiu*, Ed. Tehnică 1961
A.N. Kolmogorov, A.F. Semenovici, F.F. Naghibiu, R.S. Cerkosov, V.A. Gușev, *Geometrie pentru clasele VI-VIII*, EDP 1979
K. Teleman, M. Florescu, C. Rădulescu, D. Moraru, E. Stătescu, *Matematică-geometrie și trigonometrie clasa a X-a*, EDP 1979
M. Miculița, *Introducere în geometria tetraedrului*, Ed. Minied, Iași 1994
I. Cuculescu și colectivul, *Matematică- Geometrie- Manual pentru clasa a VIII-a*, EDP 1997
A. Negrilă, M. Negrilă, *Algebră-Geometrie - clasa a VIII-a*, Ed. Paralela 45/ 2002
A. Bălăucă, I. Țicalo, *Matematică-Geometrie în spațiu*, Ed. Axa Botoșani 1996 pag 7-11
D. Brânzei și colectivul: *Matematica în concursurile școlare*, Ed. Paralela 45, 2001,2002 pag 55-84(2001);pag 56-73(2002)
Gh. Țițeica, *Probleme de geometrie*, Ed. Tehnică 1981,pag 90-95
C. Hărăbor, D.Săvulescu, I. Cheșcă, A.Țifrea: *Matematică pentru clasele V-VIII - Olimpiadele județene, interjudețene, naționale*, Ed. Teora 1996, pag 278-279
E. Feru, I. Olivotto, *Cum gândim problemele de geometrie în spațiu*, Ed. Art București 1994, pag 9-11

3. Perpendicularitate în spațiu

Tema va cuprinde principalele teoreme de perpendicularitate și anume: teorema de perpendicularitate a unei drepte pe un plan, teorema celor trei perpendiculare, plane perpendiculare, unghiul unei drepte cu un plan, unghiul a două plane, proiecții, teoreme deosebit de utile în abordarea problemelor de perpendicularitate și studiul corpurilor geometrice.

3.1. Dreaptă perpendiculară pe un plan

Definiția 3.1.1. Două drepte a și b din spațiu sunt perpendiculare dacă paralelele duse printr-un punct P la ele sunt perpendiculare.

Definiția 3.1.2. O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă este perpendiculară pe orice dreaptă a planului.

Notăție: $d \perp \alpha$ sau $\alpha \perp d$

În rezolvarea de probleme nu este eficientă definiția fiind necesară teorema de perpendicularitate care reduce condiția la perpendicularitatea dreptei pe două drepte concurente din acel plan.

Teorema 3.1.1. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente dintr-un plan, atunci dreapta este perpendiculară pe plan.

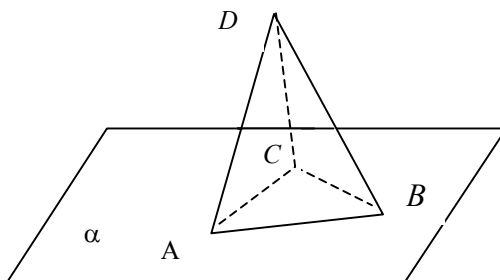
Teorema 3.1.2. Dintr-un punct M se poate duce pe un plan α , o unică perpendiculară.

Teorema 3.1.3. Două plane perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele între ele.

Teorema 3.1.4. Există un plan unic perpendicular într-un punct pe o dreaptă.

Teorema 3.1.5. Două drepte perpendiculare pe un plan sunt paralele.

Definiția 3.1.3. Fie un plan α și trei perpendiculare necoliniare A, B, C . Dacă D este un punct ce nu aparține planului α , atunci planele $(DAB), (DBC), (DAC)$ vor intersecta α după triunghiul ABC . Mulțimea punctelor interioare triunghiurilor DAB, DBC, DAC, ABC reunită cu mulțimea punctelor segmentelor $[AB], [BC], [CA]; [DA], [DB], [DC]$, formează tetraedrul $DABC$ sau $ABCD$.



Elementele tetraedrului:

- vârfurile: A, B, C, D
- fețele tetraedrului: $\Delta DAB, \Delta DAC, \Delta DBC, \Delta ABC$

- muchiile tetraedrului: [DA], [DB], [DC], [AB], [AC], [BC]
- baza tetraedrului: ΔABC , dar oricare față poate fi baza
- înălțimea este perpendiculara din vârf pe bază.

Tetraedrul regulat este tetraedrul cu toate muchiile congruente.

Definiția 3.1.4. Fiind dat un poligon convex $A_1A_2\dots A_n$ conținut într-un plan α și un punct V ce nu aparține lui α , interioarele triunghiurilor $V A_1A_2, V A_2A_3, \dots, V A_{n-1}A_n$, reunite cu interiorul poligonului convex dat și cu mulțimea punctelor segmentelor $[A_1A_2], [A_2A_3], \dots, [A_nA_1]; [VA_1], \dots, [VA_n]$; formează o piramidă de bază $A_1A_2\dots A_n$ și vârf V .

Definiția 3.1.5. Fie α și β două plane paralele și un poligon $A_1A_2\dots A_n$, situat în planul α și o dreaptă d ce intersectează α într-un singur punct. Prin fiecare punct P al poligonului $A_1A_2\dots A_n$ construim un segment PP' paralel cu d și $P' \in \beta$. Mulțimea punctelor P' formează în planul β un poligon $A'_1A'_2\dots A'_n$ congruent cu $A_1A_2\dots A_n$.

Mulțimea tuturor segmentelor PP' reunită cu mulțimea punctelor interioare celor două poligoane convexe congruente se numește PRISMĂ.

Elementele prisme:

- * bazele prisme sunt poligoanele: $A_1A_2\dots A_n$ și $A'_1A'_2\dots A'_n$
- * fețele laterale sunt paralelogramele: $A_1A_2A'_2A'_1; \dots; A_nA_1A'_1A'_n$
- * **muchii laterale** sunt segmentele: $[A_1A'_1]; [A_2A'_2]; \dots; [A_nA'_n]$
- * **muchii bazelor** sunt segmentele: $[A_1A_2]; [A_2A_3]; \dots; [A_nA_1]; [A'_1A'_2]; [A'_2A'_3]; \dots; [A'_nA'_1]$
- * **înălțimea prisme** este distanța dintre baze.

Prisma dreaptă este prisma care are înălțimea egală cu lungimea muchiei laterale.

Paralelipipedul este prisma care are toate fețele paralelograme.

Paralelipipedul dreptunghic este prisma cu toate fețele dreptunghiuri.

Cubul este paralelipipedul dreptunghic cu toate muchiile congruente.

Probleme rezolvate

R3.2.1. Dreptunghiurile ABCD și CDEF sunt situate în plane diferite.

Demonstrați că:

1) $CD \perp (ADE)$

2) $m(\angle(CD; AE)) = 90^\circ$

3) $AB \perp (BCF)$

Soluție:

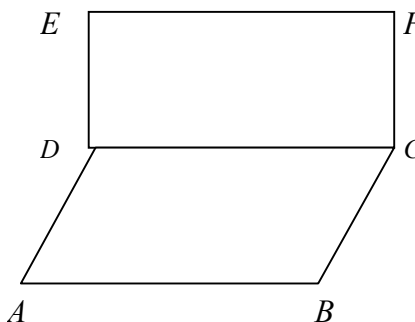
1) ABCD dreptunghi $\Rightarrow CD \perp AD$

CDEF dreptunghi $\Rightarrow CD \perp DE$

$\Rightarrow CD \perp (ADE)$.

2) Din $CD \perp (ADE)$

$AE \subset (ADE) \quad \Bigg| \Rightarrow CD \perp AE \Rightarrow m(\angle(CD; AE)) = 90^\circ$



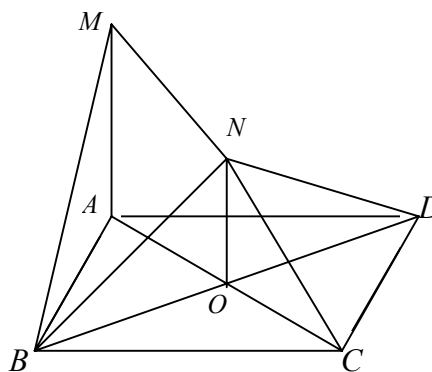
- 3) $CD \perp CF$ (CDEF dreptunghi)
 $CD \perp BC$ (ABCD dreptunghi) $\Rightarrow CD \perp (BCF)$
 Din $CD \perp (BCF)$
 $AB \parallel CD \Rightarrow AB \perp (BCF)$

R3.2.2. În vârful A al dreptunghiului ABCD se ridică perpendiculara MA pe planul dreptunghiului.

- 1) Dacă N este mijlocul segmentului [MC], arătați că $MA \parallel (NBD)$
- 2) Demonstrați că $BC \perp (MAB)$
- 3) Demonstrați că $NO \perp CD$
- 4) Arătați că punctul N este egal depărtat de vârfurile dreptunghiului ABCD.

Soluție:

- 1) $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow$
 $AO = OC$
 $MN = NC \Rightarrow [NO]$ l.m în Δ
 MAC
 $\Rightarrow NO \parallel MA$
 $NO \subset (BND) \Rightarrow MA \parallel (BND)$



- 2) ABCD dreptunghi $\Rightarrow BC \perp AB$
 $MA \perp (ABCD)$
 $BC \subset (ABCD) \Rightarrow MA \perp BC$
 $\Rightarrow BC \perp (MAB).$

- 3) Din $NO \parallel MA$ și $MA \perp (ABCD) \Rightarrow NO \perp (ABCD)$
 $CD \subset (ABCD) \Rightarrow NO \perp CD$

- 4) În ΔAMC , AN este mediană $\Rightarrow AN = NC = \frac{MC}{2}$ (1)

Din $BC \perp (MAB) \Rightarrow BC \perp MB \Rightarrow \Delta MBC$ este dreptunghic și BN este mediană \Rightarrow

$$\Rightarrow BN = \frac{MC}{2} \quad (2)$$

Analog în ΔMDC avem $DN = \frac{MC}{2}$ (3)

Din relația (1), (2), (3) $\Rightarrow NA = NB = NC = ND.$

R3.2.3. Dintr-un punct A exterior planului α se duc, perpendiculara AO și oblicele AB și AC față de acest plan. Fie H, H₁ ortocentrele triunghiurilor ABC și OBC, [AD] și [BE] înălțimi în triunghiul ABC, iar BE₁ înălțime în triunghiul OBC, D \in (BC), E \in (AC), E₁ \in (OC).

Demonstrați că:

- 1) $BC \perp (AOD);$

- 2) $BE_1 \perp (AOC)$;
- 3) $AC \perp (BEE_1)$;
- 4) $HH_1 \perp (ABC)$;
- 5) $\frac{OA}{AD} \cdot \frac{DH_1}{H_1B} \cdot \frac{BE}{EE_1} = 1$.

Soluție:

- 1) $BC \perp AD$ (ip.) (1)
 $\left. \begin{array}{l} AO \perp \alpha \\ BC \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp OA$ (2)
 Din rel. (1) și (2) $\Rightarrow BC \perp (AOD)$
- 2) $BE_1 \perp OC$ (ip.) (3)
 $\left. \begin{array}{l} AO \perp \alpha \\ BE_1 \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AO \perp BE_1$ (4)
 Din rel. (3) și (4) $\Rightarrow BE_1 \perp (AOC)$
- 3) Din $BE_1 \perp (AOC) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AC \perp BE_1 \\ AC \perp BE \text{ (ip.)} \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (BEE_1)$
- 4) Avem $BC \perp (AOD)$ și $HH_1 \subset (AOD) \Rightarrow BC \perp HH_1$ (5)
 Din $AC \perp (BEE_1)$ și $HH_1 \subset (BEE_1) \Rightarrow AC \perp HH_1$ (6)
 Din rel. (5) și (6) $\Rightarrow HH_1 \perp (ABC)$.
- 5) $HH_1 \perp (ABC) \Rightarrow \Delta HH_1D$ dreptunghic
 $\left. \begin{array}{l} AO \perp (OBC) \\ OD \subset (OBC) \end{array} \right\} \Rightarrow AO \perp OD \Rightarrow \Delta AOD$ dreptunghic
 $\left. \begin{array}{l} \Delta DH_1H \left\{ \begin{array}{l} \hat{O} \equiv \hat{H} (90^\circ) \\ \hat{D} \text{ comun} \end{array} \right\} \\ \Delta DAO \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta DH_1H \sim \Delta DAO$
 $\Rightarrow \frac{OA}{HH_1} = \frac{AD}{H_1D} \Rightarrow \frac{OA}{AD} = \frac{HH_1}{H_1D}$ (7)

Triunghiul BH_1H este dreptunghic pentru că $HH_1 \perp (ABC)$, $BH \subset (ABC)$
 $\Rightarrow HH_1 \perp BH$.

Din $BE_1 \perp (AOC)$ și $EE_1 \subset (AOC) \Rightarrow BE_1 \perp EE_1 \Rightarrow \Delta BEE_1$ dreptunghic.

Triunghiurile dreptunghice BH_1H și BEE_1 au unghiul \hat{B} comun, deci sunt

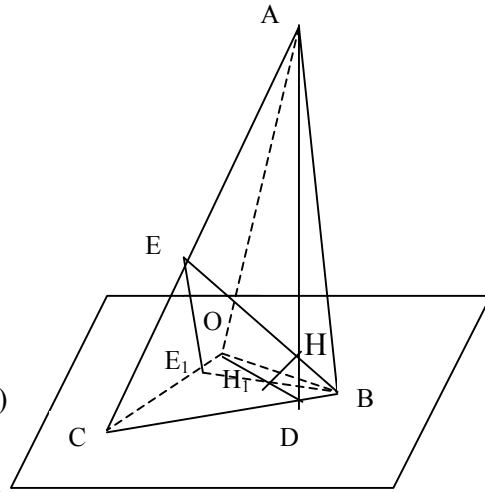
asemenea, rezultă că $\frac{BE}{H_1B} = \frac{EE_1}{HH_1}$ (8).

Înmulțim relațiile (7) și (8) membru cu membru și obținem:

$$\frac{OA}{AD} \cdot \frac{BE}{H_1B} = \frac{HH_1}{H_1D} \cdot \frac{EE_1}{HH_1} \cdot \frac{DH_1}{EE_1}$$

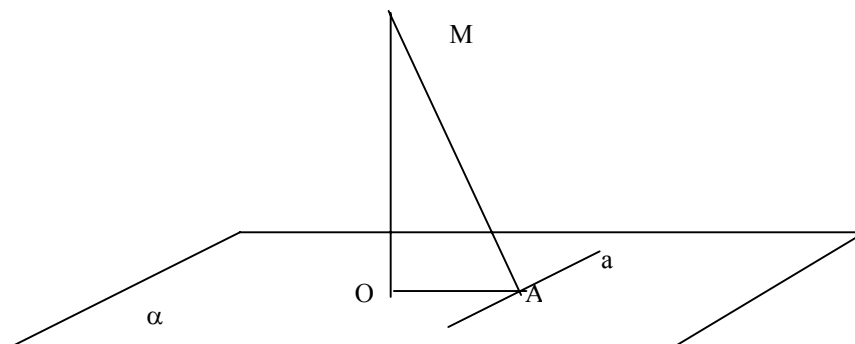
după înmulțire obținem:

$$\frac{OA}{AD} \cdot \frac{BE}{EE_1} \cdot \frac{DH_1}{H_1B} = 1.$$



3.2. Teorema celor trei perpendiculare

Teorema 3.2.1. (Teorema celor trei perpendiculare)



Fie α un plan, M un punct, $M \notin \alpha$ și a o dreaptă, $a \subset \alpha$.

Dacă $MO \perp \alpha$, $O \in \alpha$ și $AO \perp a$, $A \in a$, atunci $MA \perp a$.

Teorema se utilizează la determinarea distanței de la un punct la o dreaptă și determinarea perpendicularei dintr-un punct pe o dreaptă.

Ipoteza teoremei conține trei propoziții: (2) $MO \perp \alpha$; (1) $OA \perp a$; (3) $a \subset \alpha$. Schimbând oricare dintre cele trei propoziții cu concluzia teoremei obținem trei reciproce.

Teorema 3.2.2. (Reciproca (1))

Dacă

$$MO \perp \alpha, O \in \alpha$$

$$MA \perp a, A \in a$$

$$a \subset \alpha$$

atunci $OA \perp a$

Teorema 3.2.3. (Reciproca (2))

Dacă

$$a \subset \alpha$$

$$OA \perp a$$

$$A \in a, O \in \alpha$$

$$MA \perp a$$

$$MO \perp OA$$

atunci $MO \perp \alpha$

Reciproca a II-a este folosită pentru a determina distanța de la un punct la un plan. Ea arată existența perpendicularei dintr-un punct pe un plan și cum se construiește aceasta folosind perpendicularitatea dreptelor.

Teorema 3.2.4. (Reciproca (3))

Dacă

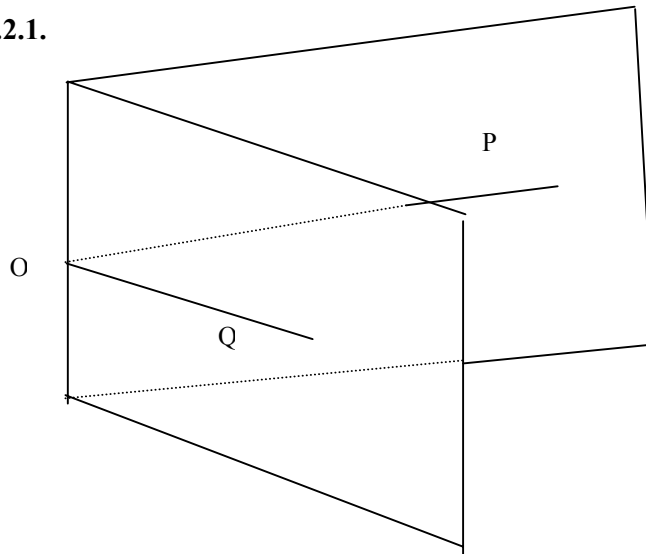
$$MO \perp \alpha, O \in \alpha$$

$$MA \perp a, A \in a$$

$$OA \perp a$$

atunci $a \subset \alpha$

Definiția 3.2.1.



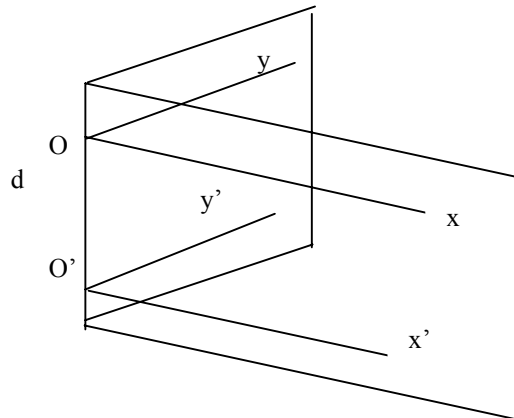
Reuniunea punctelor unei drepte d cu punctele a două semiplane mărginite de dreapta d se numește unghi diedru.

- d – muchia diedrului
- semiplanele sunt fețele diedrului

Dacă $O \in d$ și prin O construim un plan α , perpendicular pe d , atunci intersecția unghiului diedru cu planul α se numește unghi plan corespunzător diedrului.

Teorema 3.2.5. Două unghiuri plane ale aceluiași unghi diedru sunt congruente

Demonstrație



Fie $\angle xOy$ și $\angle x'O'y'$ două unghiuri plane corespunzătoare aceluiași unghi diedru.

Din $d \perp (xOy) \Rightarrow d \perp Ox$ și $d \perp Oy$

Din $d \perp (x'O'y') \Rightarrow d \perp O'x'$ și $d \perp O'y'$

Ox și $O'x'$ coplanare ; Oy și $O'y'$ coplanare

Dacă $d \perp Ox$ și $d \perp O'x' \Rightarrow Ox \parallel O'x'$ (1)

Dacă $d \perp Oy$ și $d \perp O'y' \Rightarrow Oy \parallel O'y'$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \angle xOy \equiv \angle x'O'y'$ (au laturile paralele)

Definiția 3.2.2. Măsura unui unghi diedru este măsura oricărui unghi plan corespunzător unghiului diedru.

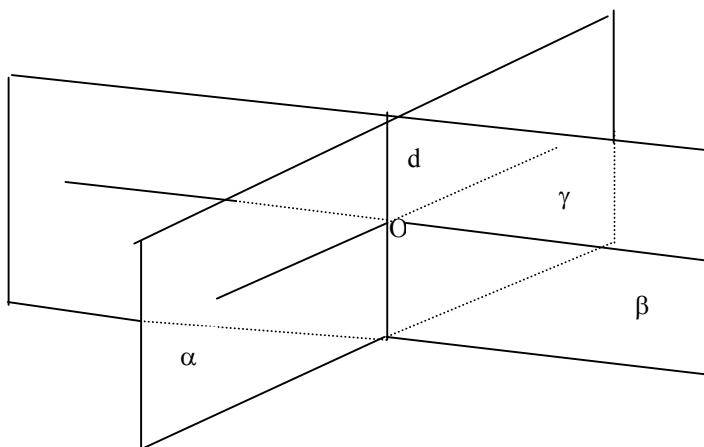
Cum determinăm unghiul plan corespunzător diedrului ?

1) Se determină punctul O pe muchia diedrului în mod convenabil

2) Construim în O perpendicularele pe muchie în fiecare semiplan

3) Unghiul dintre cele două perpendiculare este unghiul plan corespunzător diedrului.

Definiția 3.2.3. Dacă două plane sunt concurente atunci ele formează patru unghiuri diedre. Cea mai mică dintre măsurile celor patru unghiuri se numește unghiul celor două plane



$\alpha \cap \beta = d$, α și β determină 4 unghiuri diedre. Prin O ducem planul $\gamma \perp d$. Atunci intersecția diedrelor cu planul γ sunt unghiuri plane corespunzătoare fiecărui diedru.

Dacă măsura unui unghi este a , $0 < a \leq 90^\circ$, atunci celelalte au măsura de $180^\circ - a$; a ; $180^\circ - a$.

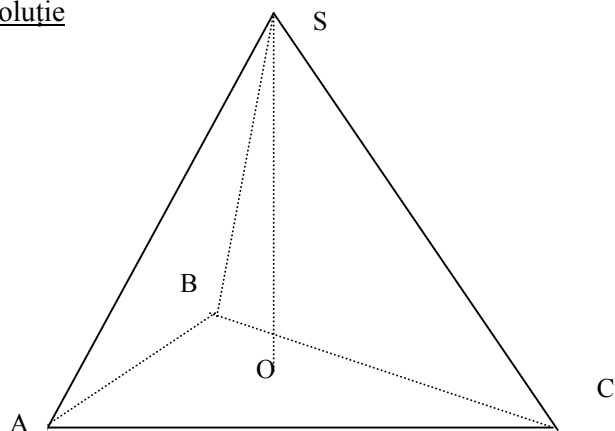
Probleme rezolvate

R3.5.1. Fie un triunghi ABC cu laturile $AB=9$ cm, $AC=10$ cm, $BC=11$ cm. Un punct S care nu aparține planului (ABC) este așezat în spațiu astfel încât $SA=SB=SC=12$ cm.

Să se afle:

1. Distanța de la S la planul (ABC)
2. Distanța de la S la dreapta BC
3. Unghiul format de planul (SBC) și (ABC)

Soluție



1) $SA=SB=SC$ (ip)

Ducem $SO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$

$\Rightarrow O$ este centrul cercului circumscris $\Delta ABC \Rightarrow d(S; (ABC)) = SO$, pentru a determina pe SO avem nevoie de raza cercului circumscris ΔABC

$$R = \frac{abc}{4S} ; S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{10+9+11}{2} = 15 ; p-a = 6; p-b = 5; p-c = 4 \Rightarrow S = 30\sqrt{2}$$

$$R = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{4 \cdot 30\sqrt{2}} = \frac{33\sqrt{2}}{8}$$

$$\left. \begin{array}{l} SO \perp (ABC) \\ OC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow SO \perp OC \Rightarrow SOC \text{ dreptunghic. Din T.P.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SO^2 = SC^2 - OC^2 = 12^2 - \left(\frac{33\sqrt{2}}{8}\right)^2 \Rightarrow SO = \frac{3\sqrt{782}}{8}$$

2) Pentru a determina distanța de la S la dreapta BC , ducem în planul (ABC) , $OE \perp BC$. Avem:

$$\left. \begin{array}{l} SO \perp (ABC) \\ OE \perp BC \\ OE \subset (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \text{Din T3} \perp \Rightarrow SE \perp BC \Rightarrow d(S; BC) = SE$$

$(d(S; BC) = \text{distanța de la } S \text{ la } BC)$

$$\left. \begin{array}{l} SO \perp (ABC) \\ OE \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow SO \perp OE \Rightarrow \Delta SOE \text{ dr. Din T.P.} \Rightarrow SE^2 = SO^2 + OE^2$$

OE mediatoarea lui $[BC]$

$$\Rightarrow \Delta OEC \text{ dr.} \Rightarrow OE^2 = OC^2 - CE^2 = R^2 - \frac{121}{4}$$

$$SE^2 = \frac{7038}{64} - \left(R^2 - \frac{121}{4} \right) = \frac{4860 + 121 \cdot 16}{64} = \frac{6796}{64}$$

$$SE = \frac{\sqrt{6796}}{8}$$

3.) Din

$$\left. \begin{array}{l} OE \perp BC \\ SE \perp BC \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$m(\angle((SBC); (ABC))) = m(\angle(OE; SE)) = m(\angle(SEO))$$

$$\Delta SOE \text{ dr. în } O \Rightarrow \sin E = \frac{SO}{SE}$$

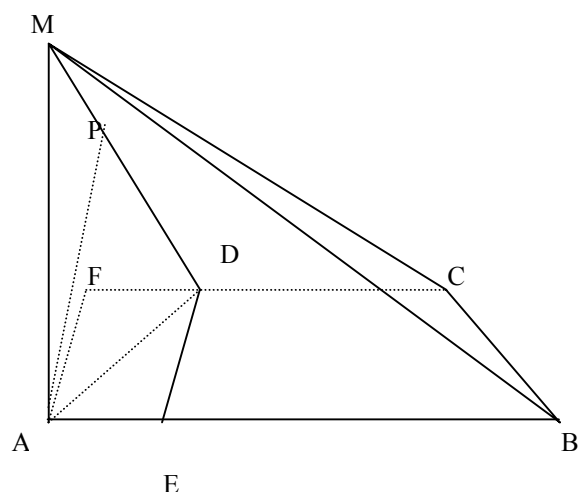
$$\sin E = \frac{\frac{3\sqrt{782}}{8}}{\frac{\sqrt{6796}}{8}} = \frac{3\sqrt{782}}{\sqrt{6796}}$$

R3.5.2. Pe planul trapezului isoscel ABCD, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AB = 24 \text{ cm}$, $m(\angle B) = 60^\circ$ și diagonala trapezului este bisectoarea unghiului ascuțit, se ridică perpendiculara AM, $AM = 6 \text{ cm}$.

Sa se afle:

- 1) aria trapezului și diagonalele;
- 2) $d(M; BC)$ și $d(M; CD)$;
- 3) $m(\angle((MCD); (ABC)))$;
- 4) $d(A; (MCD))$;

Soluție



1) În trapezul ABCD (BD –bisectoarea $\angle B \Rightarrow \angle DBA \equiv \angle DBC$ (1)
 Din $AB \parallel CD$ și BD sec. $\Rightarrow \angle BDC \equiv \angle DBA$ (2)
 Din (1) și (2) $\Rightarrow \angle BDC \equiv \angle DBC \Rightarrow \Delta BDC$ isoscel $\Rightarrow BC=CD=DA$
 În ΔABD , $m(\angle A)=60^\circ$ și $m(\angle B)=30^\circ \Rightarrow m(\angle D)=90^\circ \Rightarrow AD \perp BD$ și $AD = \frac{AB}{2} \Rightarrow AD=12=DC=BC$.

Ducem $DE \perp AB \Rightarrow$ în ΔADE avem $DE = 6\sqrt{3}$

$$A_{ABCD} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}; A_{ABCD} = 108\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{În } \Delta ABD \text{ de în } D \text{ avem } \sin 60^\circ = \frac{BD}{AB} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BD}{24} \Rightarrow 12\sqrt{3} = AC.$$

2) $MA \perp (ABCD)$
 $AC \perp BC$
 $AC \subset (ABCD)$
 $BC \subset (ABCD)$ } Din T3 $\perp \Rightarrow MC \perp BC \Rightarrow d(M; BC) = MC$

$$MA \perp (ABCD) \Rightarrow MA \perp AC \Rightarrow \Delta MAC \text{ dr. în } A \Rightarrow MC^2 = MA^2 + AC^2 = 6^2 + (12\sqrt{3})^2 = 6\sqrt{13}$$

$MA \perp (ABCD)$
 $AF \perp CD, F \in CD$
 $AF \subset (ABCD)$
 $CD \subset (ABCD)$ } Din T3 $\perp \Rightarrow MF \perp CD \Rightarrow d(M; CD) = MF$

$$MA \perp (ABC) \Rightarrow MA \perp AF \Rightarrow \Delta MAF \text{ dr. } \Rightarrow MF = \sqrt{MA^2 + AF^2} = 12$$

3) $(MCB) \cap (ABC) = BC$

$$\left. \begin{array}{l} AC \perp CB \\ MC \perp CB \end{array} \right\} \Rightarrow m(\angle((MCD); (ABC))) = m(\angle MCA)$$

$$\text{În } \Delta MAC \text{ dr. în } A \text{ avem } \operatorname{tg} C = \frac{6}{12\sqrt{3}} \quad \operatorname{tg} C = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Pentru a determina distanța de la punctul A la planul (MCD) aplicăm reciproca teoremei celor trei perpendiculare.

Ducem $\left. \begin{array}{l} AP \perp MF \\ P \in MF \\ PF \perp CD \\ AF \perp CD \end{array} \right\}$ Din RT3 $\perp \Rightarrow AP \perp (MCD)$

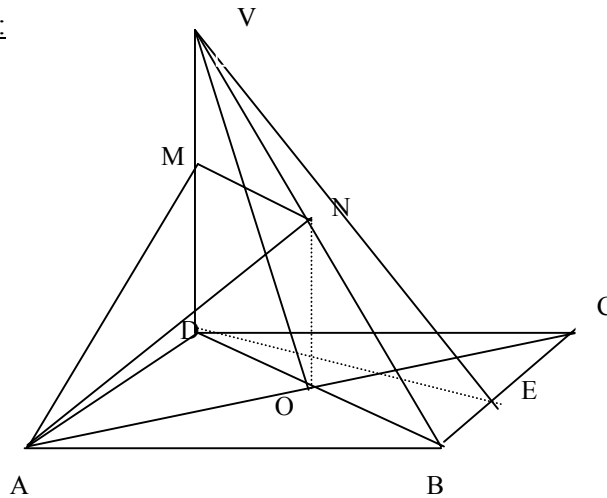
$$\Rightarrow d(A; (MCD)) = AP.$$

$$AP \text{ înălțime în } \triangle MAF \text{ dr. în } A \Rightarrow AP = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}; \Rightarrow AP = 3\sqrt{3}.$$

R3.5.3. Pe planul rombului ABCD de latură a și diagonală $AC = a\sqrt{3}$ se ridică perpendiculara $DV=a$. Fie M și N mijloacele segmentelor [VD] și [VB]. Să se afle:

- 1) $d(V;BC)$
- 2) $d(D;(VAC))$
- 3) $m(\angle((AMN);(ABC)))$

Soluție:



$$\left. \begin{array}{l} ABCD - \text{romb} \\ AB = a \\ AC = a\sqrt{3} \\ AC \cap BD = \{O\} \end{array} \right\} \Rightarrow AO = OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{În } \triangle AOD \text{ dr. } \begin{array}{l} \text{T.P. } OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} \\ \Rightarrow OD = \frac{a}{2} \Rightarrow BD = 2OD = a \end{array} \Rightarrow \triangle BCD \text{ echilateral.}$$

Pentru a determina distanța de la M la BC ducem $DE \perp BC$ și avem:

$$\left. \begin{array}{l} VD \perp (ABCD) \\ DE \perp BC, E \in BC \\ DE \subset (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{T.3.}\perp \\ \Rightarrow VE \perp BC \Rightarrow d(V;BC) = VE \end{array}$$

$$VD \perp (ABCD) \Rightarrow VD \perp DE \Rightarrow \triangle VDE \text{ dr. } \begin{array}{l} \text{T.P.} \\ \Rightarrow VE = \sqrt{VD^2 + DE^2} \Rightarrow VE = \frac{a\sqrt{7}}{2} \end{array}$$

2) Aplicăm T.3. ⊥ și avem:

$$\left. \begin{array}{l} VD \perp (ABCD) \\ DO \perp AC \\ DO \subset (ABCD) \\ AC \subset (ABCD) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \text{T.3.}\perp \\ \\ \end{array} \Rightarrow VO \perp AC$$

Aplicăm reciproca T.3. ⊥ și obținem:

$$\left. \begin{array}{l} DF \perp VO \\ EO \perp AC \\ DO \perp AC \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \text{R.T.3.}\perp \\ \\ \end{array} \Rightarrow DF \perp (VAC) \Rightarrow d(D; (VAC)) = DF$$

$$DF \text{ înălțime în } \Delta VDO \Rightarrow DF = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}; DF = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$VO = \sqrt{VD^2 + DO^2}$$

$$VO = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ (T.P. în } \Delta \text{ dreptunghic VDO)}$$

3) În ΔVDB , NO l.m. $\Rightarrow NO \parallel VD$, dar $VD \perp (ABCD) \Rightarrow NO \perp (ABCD)$

$$\left. \begin{array}{l} AO \perp BD(ip) \\ AO \perp NO (NO \perp (ABCD)) \end{array} \right\} \Rightarrow AO \perp (DMN)$$

Aplicăm T.3. ⊥ și avem:

$$\left. \begin{array}{l} AO \perp (DMN) \\ ON \perp MN \\ ON \subset (DMN) \\ MN \perp (DMN) \end{array} \right\} \Rightarrow (\text{T.3.}\perp) AN \perp MN$$

Determinăm (dreapta)muchia diedrului.

$$\begin{array}{l} MN \parallel BD \\ A \in (MNA) \cap (ABC) \Rightarrow (MNA) \cap (ABC) = d \\ A \in d \text{ și } d \parallel BC \parallel MN \end{array}$$

Determinăm unghiul plan corespunzător diedrului

$$\begin{array}{l} \text{Din } AN \perp MN, MN \parallel d \Rightarrow AN \perp d \\ AO \perp BD, BD \parallel d \Rightarrow AO \perp d \\ m(\angle((AMN);(ABC))) = m(\angle NAO) \end{array}$$

$$\text{În } \Delta NAO \text{ dr. în } O \Rightarrow \operatorname{tg} A = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m(\angle A) = 30^0$$

3.3. Plane perpendiculare

Definiția 3.3.1. Două plane concurente sunt perpendiculare dacă determină un unghi diedru drept.

Notăm : $\alpha \perp \beta$

Teorema 3.3.1. Două plane sunt perpendiculare dacă unul conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt.

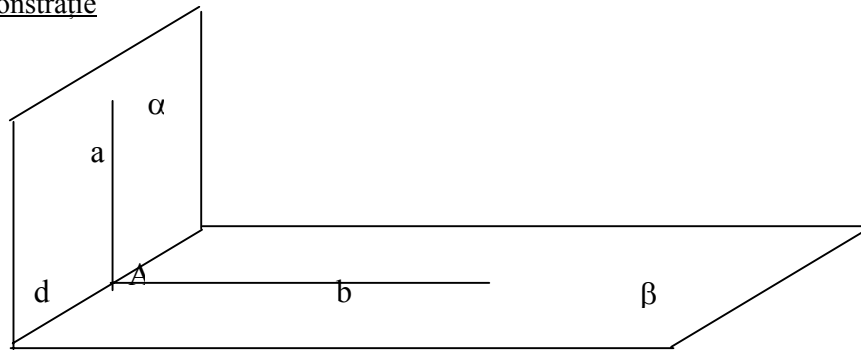
Dacă $d \subset \beta$ și $d \perp \alpha \Rightarrow \beta \perp \alpha$

Teorema 3.3.2. Dacă două plane sunt perpendiculare atunci orice dreaptă conținută în unul dintre ele și perpendiculară pe dreapta lor de intersecție este perpendiculară pe celălalt plan.

Dacă $a \subset \alpha$ și $a \perp d, \alpha \cap \beta = d$ atunci $a \perp \beta$.

Teorema este utilă când trebuie să demonstrăm că o dreaptă este perpendiculară pe un plan.

Demonstrație



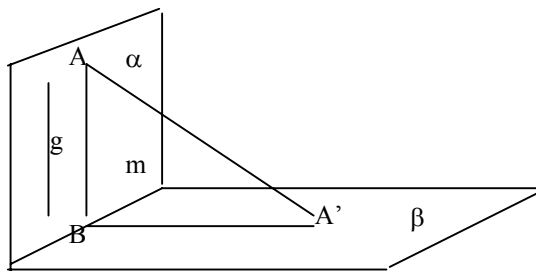
Fie $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = d, a \perp d, a \cap d = \{A\}$

Ducem dreapta $b, b \subset \beta$ și $b \perp d, b \cap d = \{A\}$.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = d \\ a \perp d \\ b \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow m(\angle \alpha; \beta) = m(\angle a; b) = 90^\circ$$

$\Rightarrow a \perp b$, dar $a \perp d, b \subset \beta, d \subset \beta \Rightarrow a \perp \beta$

Teorema 3.3.3. Dacă două plane sunt perpendiculare și dintr-un punct oarecare al unuia ducem o perpendiculară pe celălalt, atunci ea este conținută în întregime în primul plan.



Demonstrație

$$A \in \alpha$$

$$m = \alpha \cap \beta$$

Fie $AA' \perp \beta$, presupunem că $AA' \not\subset \alpha$, dar $\alpha \perp \beta \Rightarrow (\exists)$ în α o dreaptă g perpendiculară pe $\beta \Rightarrow g$ este perpendiculară pe orice dreaptă din β .

Ducem prin A dreapta d paralelă cu g . Și ea va fi perpendiculară pe toate dreptele din β .

$$d \cap m = \{B\}$$

În planul $(AA'B)$ există două drepte AB și AA' perpendiculare pe BA' , contradicție pentru că AB și AA' sunt concurente, rămâne situația când $A \in g$, dar atunci problema este rezolvată.

Probleme rezolvate

R3.8.1. Fie α și β două plane neparalele și perpendiculare pe planul γ , atunci dreapta lor de intersecție este perpendiculară pe γ .

Soluție

$$\alpha \cap \beta = d$$

$$\alpha \perp \gamma, \alpha \cap \gamma = a$$

$$\beta \perp \gamma, \beta \cap \gamma = b$$

$$\alpha \cap b = \{O\}$$

Presupunem că $d \not\perp \gamma$

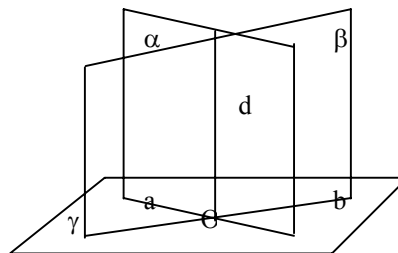
Din $\alpha \perp \gamma \Rightarrow$ există o dreaptă $d' \subset \alpha$, $d' \perp a$ în O , cum $\alpha \perp \gamma \Rightarrow d' \perp \gamma$

Din $\beta \perp \gamma \Rightarrow$ există în β o dreaptă $d'' \perp b$ în punctul O , $d'' \subset \beta$, dar $\beta \perp \gamma \Rightarrow d'' \perp \gamma$, contradicție, în O se pot duce două drepte d' și d'' perpendiculare pe $\gamma \Rightarrow$ presupunere este falsă $\Rightarrow d' = d'' = d$.

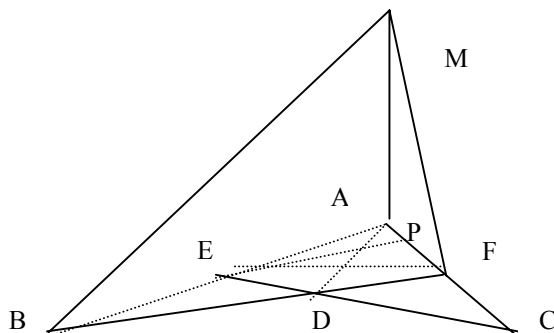
R3.8.2. Fie triunghiul echilateral ABC . Pe laturile AB și AC se iau punctele E și F astfel încât $AE = 2BE$ și $CF = 2AF$. Dreptele BF și CE se intersectează în D .

Pe perpendiculara în A pe planul (ABC) se ia punctul M astfel încât $MA = AB = a$.

- 1) Să se arate că $(EFM) \perp (FAM)$
- 2) Determinați măsura unghiului dintre planele (CDM) și (DAM) ;
- 3) Determinați distanța de la pct. M la EF .



Soluție



1) În ΔAEF , $m(\angle A)=60^\circ$ și $AE=2AF=2\frac{a}{3}$; $AF=\frac{a}{3}$

Ducem $EP \perp AF \Rightarrow \Delta EAP$ dreptunghic

și $m(\angle A)=60^\circ \Rightarrow m(\angle E)=30^\circ \Rightarrow AP=AE/2=\frac{a}{3}$, dar $AF=\frac{a}{3} \Rightarrow P=F \Rightarrow EF \perp AC$ (1)

din $MA \perp (ABC)$
 $EF \subset (ABC)$ } $\Rightarrow EF \perp MA$ (2)

Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow EF \perp (MAC)$

Dar $(MAC)=(MAF) \Rightarrow EF \perp (MAF)$ și $EF \subset (MEF) \Rightarrow (MEF) \perp (MAF)$

2) Arătăm că planele sunt \perp

ΔBAF

$\Delta CBE \left\{ \begin{array}{l} (BE) \equiv (AF) \text{ ip} \\ (BC) \equiv (AB) \text{ ip} \\ \angle(B) \equiv \angle(A) (60^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta BAF \equiv \Delta CBE \Rightarrow m(\angle BCE)=m(\angle ABF)$

), dar $m(\angle ABF) + m(\angle FBC) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle FBC) + m(\angle BCE) = 60^\circ$, atunci în

ΔBDC , $m(\angle D)=180^\circ - (m(\angle FBC) + m(\angle BCE)) = 120^\circ \Rightarrow m(\angle EDF)=120^\circ$,

dar $m(\angle EAF)=60^\circ \Rightarrow m(\angle EDF) + m(\angle EAF) = 180^\circ \Rightarrow AEDF$ patrulater inscriptibil și

$m(\angle EFA)=90^\circ \Rightarrow m(\angle ADE)=90^\circ$ (unghiuri formate de diagonale cu lat.op.) $\Rightarrow AD \perp CE$

(3).

Din $MA \perp (ABC)$, $CE \subset (ABC) \Rightarrow CE \perp MA$ (4)

Din relațiile (3) și (4) $\Rightarrow CE \perp (MAD)$, dar $CE \subset (MDC) \Rightarrow (MDC) \perp (MAD)$

$\Rightarrow m(\angle((MDC);(MAD)))=90^\circ$.

3) Aplicăm T3 \perp și obținem:

$MA \perp (BAC)$

$AF \perp EF$

$EF, AF \subset (ABC)$

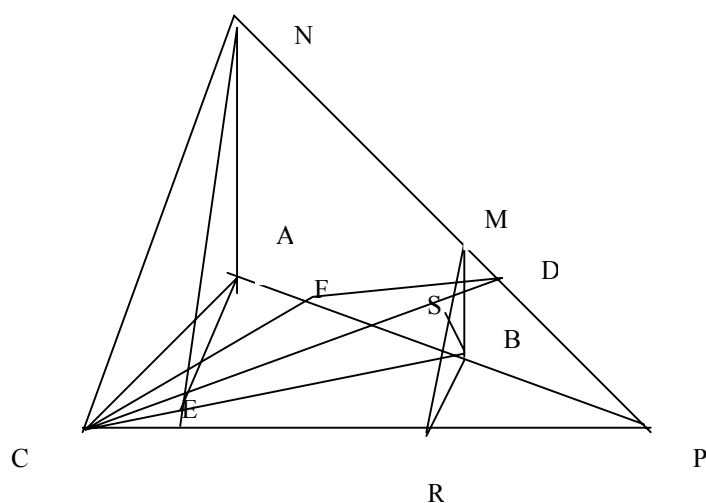
Din T3 $\perp \Rightarrow MF \perp EF \Rightarrow d(M;EF)=MF$

$$MA \perp (AEF) \Rightarrow MA \perp AE \Rightarrow \Delta MAF \text{ dr. Din T.P.} \Rightarrow MF = \frac{a\sqrt{10}}{3}$$

R3.8.3. Fie triunghiul echilateral ABC și trapezul dreptunghic ABMN, având unghiurile drepte în A și B situate în plane perpendiculare astfel încât AB=8 cm, AH=12 cm,

BM=6 cm. Sa se afle:

- 1) $d(N; BC)$
- 2) $d(C; MN)$
- 3) $\text{tg}(\angle(ABC); (CMN))$
- 4) $d(B; (CMH))$



Soluție

Arătăm că NA este perpendiculară pe planul (ABC)

$$1) \left. \begin{array}{l} (ABC) \perp (ABMN) \\ (ABC) \cap (ABMN) = AB \\ NA \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow NA \perp (ABC)$$

Aplicăm T.3. \perp și obținem:

$$\left. \begin{array}{l} NA \perp (ABC) \\ AE \perp BC, E \in BC \\ AE \subset (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \text{Din T3} \perp \Rightarrow NE \perp BC \Rightarrow d(N; BC) = NE$$

$$\begin{aligned} \text{În } \Delta NAE \text{ dr. în } A \text{ .Din T.P} \Rightarrow NE &= \sqrt{NA^2 + AE^2} = \sqrt{12^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{144 + 48} = 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$AE = h_{\Delta \text{ echilateral}} \Rightarrow AE = \frac{8\sqrt{3}}{2}$$

2) Ducem din C perpendiculara CF pe AB. Cum planele (ABC) și (ABMN) sunt perpendiculare și CF este perpendiculară pe dreapta lor de intersecție rezultă că $CF \perp (ABMN)$

Aplicăm teorema celor trei perpendiculare și obținem:

$$\left. \begin{array}{l} CF \perp (ABMN) \\ FD \perp MN \\ MN, FD \subset (ABMN) \end{array} \right\} \text{Din } T3 \perp \Rightarrow CD \perp MN \Rightarrow d(C; MN) = CD.$$

$$MN \cap AB = \{P\}$$

$$\text{În } \Delta ANP, BM \parallel AN \text{ și } BM = \frac{AN}{2} \Rightarrow BM \text{ l.m.} \Rightarrow AB = BP = 8$$

Triunghiurile FDP și NAP sunt asemenea pentru că $\angle D \equiv \angle A (20^\circ)$ și \angle

$$P \text{ este comun} \Rightarrow \frac{FP}{NP} = \frac{FD}{AN}$$

$$\text{În } \Delta \text{ dreptunghic } ANP \text{ Din T.P.} \Rightarrow NP = \sqrt{NA^2 + AP^2} = \sqrt{256 + 144} = 20$$

$$\text{Înlocuim în proporția de mai sus și obținem: } \frac{12}{20} = \frac{FD}{12} \Rightarrow FD = \frac{12 \cdot 12}{20} = \frac{36}{5}$$

$$\text{În } \Delta CFD \text{ dreptunghic în F Din T.P.} \Rightarrow CD = \sqrt{CF^2 + FD^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + \left(\frac{36}{5}\right)^2}$$

$$CD = \frac{8\sqrt{39}}{5}$$

3) $(ABC) \cap (CMN) = CP$

Triunghiul CBP isoscel ($CB = BP = 8 \text{ cm}$) și $m(\angle CBP) = 120^\circ; (180^\circ - m(\angle ABC))$

$$\Rightarrow m(\angle BCP) = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ, \text{ atunci } m(\angle ACP) = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ \Rightarrow AC \perp CP.$$

Folosind T.3.⊥, punem în evidență unghiul plan corespunzător diedrului.

$$\left. \begin{array}{l} NA \perp (ABC) \\ AC \perp CP \\ CP \subset (ABC) \\ AC \subset (ABC) \end{array} \right\} \text{Din } T3 \perp \Rightarrow NC \perp CP \Rightarrow m(\angle((CMN); (ABC))) = m(\angle NCA)$$

$$\text{În } \Delta NCA \text{ dr. în A} \Rightarrow \text{tg} C = \frac{NA}{AC} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

4) Pentru a determina $d(B;(CMN))$ vom folosi reciproca t.3.1.

$$\left. \begin{array}{l} MB \perp (ABC) \\ BR \perp CP, R \in CP \end{array} \right\} \text{Din T.3.1} \Rightarrow MR \perp CP$$

$$\left. \begin{array}{l} BS \perp MR \\ SR \perp CP \\ BR \perp CP \end{array} \right\} \text{Din R.T.3.1} \Rightarrow BS \perp (CMN) \Rightarrow d(B;(CMN)) = BS$$

$$BS \text{ înălțime în } \Delta \text{ dreptunghic } BRM \Rightarrow BS = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}; BS = \frac{BM \cdot BR}{MR} = \frac{6 \cdot 4}{2\sqrt{13}}$$

$$BS = \frac{12\sqrt{13}}{13}$$

$$[BR] \text{ l.m. în } \Delta ACP \Rightarrow BR = \frac{AC}{2} = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Triunghiul } MBR \text{ dr. în B. Din T.P.} \Rightarrow MR = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

3.4. Proiecții

Tema va cuprinde proiecția unui punct pe o dreaptă și a unui segment pe o dreaptă, lungimea proiecției unui segment pe o dreaptă, proiecția unui punct pe un plan, a unei drepte pe un plan, unghiul unei drepte cu un plan, lungimea proiecției unui segment pe un plan și aria proiecției unei figuri pe un plan.

Proiecții pe o dreaptă

Definiția 3.4.1.

Se numește proiecție a unui punct pe o dreaptă d , piciorul perpendicularei dusă din P pe dreapta d .

Fie dreapta d și punctul P a.î. $P \notin d$: Ducem $PP' \perp d \Rightarrow P' = \text{Pr}_d(P)$ (P' este proiecția lui P pe d).

Observație: Dacă $P \in d \Rightarrow \text{Pr}_d(P) = P$

Teorema 3.4.1.

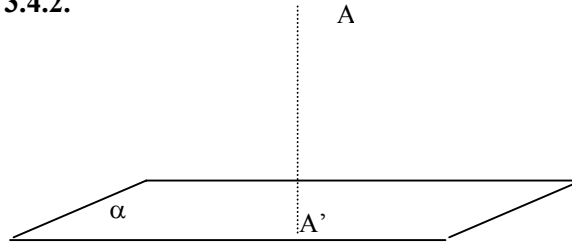
Lungimea proiecției $A'B'$ a unui segment AB pe o dreaptă d este egală cu lungimea segmentului înmulțită cu cosinusul unghiului dintre d și dreapta ce conține segmentul

$$A'B' = AB \cdot \cos(\angle AB; A'B')$$

Convenim să considerăm: $1^\circ) \cos 0^\circ = 1$; $2^\circ) \cos 90^\circ = 0$

Proiecții pe un plan

Definiția 3.4.2.



Proiecția ortogonală a unui punct A pe un plan α este piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe plan.

Fie planul α și punctul A , a.î. $A \notin \alpha$.

Ducem $AA' \perp \alpha$ atunci $A' = \text{Pr}_\alpha(A)$ (A' este proiecția lui A pe α).

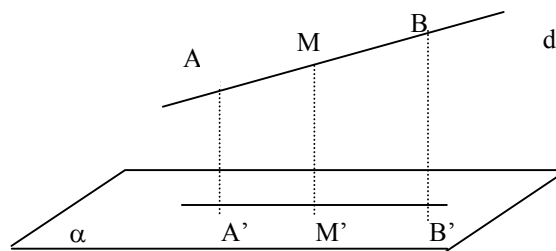
Observație: Dacă $A \in \alpha \Rightarrow \text{Pr}(A) = A$

Definiția 3.4.3.

Se numește proiecția unei figuri geometrice pe un plan figura geometrică formată din proiecțiile punctelor figurii pe acel plan.

Teorema 3.4.2.

Proiecția unei drepte pe un plan este o dreapta sau un punct.



Demonstrație

Fie planul α și dreapta d a.î. d nu este perpendiculară pe α .

Fie A și B pe d și $AA' \perp \alpha$; $BB' \perp \alpha$; A' și $B' \in \alpha$ atunci dreapta $A'B'$ este proiecția lui d pe planul α . Pentru a justifica acest fapt demonstrăm că proiecția oricărui punct $M \in d$ este situat pe $A'B'$.

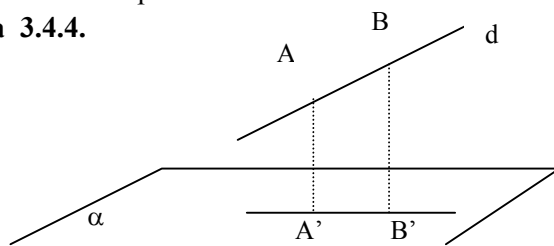
Dacă M' este proiecția lui M pe α , arătăm că $M' \in A'B'$.

$AA' \perp \alpha$ și $BB' \perp \alpha$ (perpendiculare pe α) \Rightarrow ele determină planul β și pt. că $AA' \perp \alpha \Rightarrow \beta \perp \alpha$

$M \in d \subset \beta \Rightarrow M \in \beta$ rezultă că perpendiculara dusă din M pe planul α este conținută în β , deci M' aparține dreptei de intersecție a planelor α și β . $\Rightarrow M' \in A'B'$
 Dacă $d \perp \alpha$ atunci proiecția este un punct.

Teorema 3.4.3. Proiecția unui segment pe un plan este un segment pe un plan este un segment sau un punct.

Definiția 3.4.4.



Unghiul unei drepte cu un plan este numit unghiul format de acea dreaptă cu proiecția ei pe plan.

Fie dreapta d și planul α , iar A și B

Două puncte situate pe d $AA' \perp \alpha$; $BB' \perp \alpha$

$A', B' \in \alpha \Rightarrow A'B' = pr_{\alpha}(AB) \Rightarrow m(\angle(AB; \alpha)) = m(\angle(AB; A'B'))$ sau

$M(\angle(d; A'B'))$

Obs. 1^o. dacă $d \perp \alpha$ atunci $m(\angle(d; \alpha)) = 90^{\circ}$.

2^o. dacă $d \parallel \alpha$ atunci $m(\angle(d; \alpha)) = 0^{\circ}$

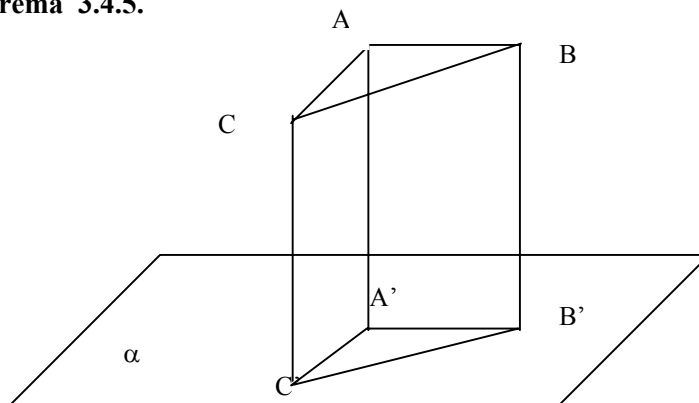
rezultă că unghiul dintre o dreaptă și un plan are măsura cuprinsă între 0° și 90° .

Teorema 3.4.4. Lungimea proiecției plan este egală cu produsul dintre lungimea segmentului și cosinusul unghiului dintre dreapta suport a segmentului și planul respectiv.

Convenim să considerăm: 1^o. $\cos 90^{\circ} = 0$

2^o. $\cos 0^{\circ} = 1$

Teorema 3.4.5.



Aria proiecției $A'B'C'$ a unui triunghi ABC pe un plan α este egală cu aria triunghiului ABC înmulțită cu cosinusul unghiului dintre planele (ABC) și α .

Fie $u = \angle((ABC); \alpha)$

Fie ΔABC și $AA' \perp \alpha$, $BB' \perp \alpha$; $CC' \perp \alpha$; $A', B', C' \in \alpha$ atunci $\Delta A'B'C' = Pr_{\alpha}(\Delta ABC)$

$$A_{A'B'C'} = A_{ABC} \cdot \cos u$$

Dacă $u = 0^{\circ}$ atunci $A_{A'B'C'} = A_{ABC} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

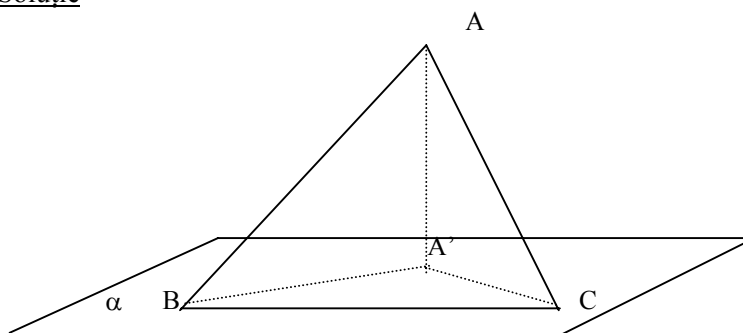
Dacă $u = 90^{\circ}$ atunci ΔABC se proiectează după un segment.

Teorema este utilizată la determinarea unghiului dintre două plane când nu avem determinată muchia diedrului și unghiul plan corespunzător lui.

Probleme rezolvate

R3.11.1. Un triunghi ABC cu $AB = 8$ cm, $BC = 5$ cm; $AC = 7$ cm are latura BC inclusă în planul α . Să se afle aria proiecției triunghiului pe plan știind că proiecția este un triunghi dreptunghic.

Soluție



Ducem $AA' \perp \alpha \Rightarrow$

$A' = pr_{\alpha}(A)$

B și $C \in \alpha \Rightarrow$ proiecțiile lor sunt B și C , deci $\Delta A'BC$ este proiecția ΔABC pe planul α . Triunghiul $A'BC$ dreptunghic.

$$1) \text{ Fie } A'B \perp BC \text{ atunci } \left. \begin{array}{l} AA' \perp \alpha \\ A'B \perp BC \\ BC \subset \alpha \\ A'B \subset \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{T.31} \\ \Rightarrow AB \perp BC \text{ imposibil } 7^2 \neq 8^2 + 5^2 \end{array}$$

Analog arătăm că $A'C \perp BC$ atunci triunghiul $A'BC$ este dreptunghic în A' .

$$\text{Din } \Delta AA'B \text{ de } \begin{array}{l} \text{T.P.} \\ \Rightarrow AA'^2 = AB^2 - A'B^2 = 8^2 - A'B^2 = 8^2 - x^2 \quad (1) \end{array}$$

Notăm: $A'B = x$ și $A'C = y$

Din $\Delta AA'$ dr. $\Rightarrow AA'^2 = AC^2 - A'C^2 = 7^2 - y^2$ (2)

Din rel. (1) și (2) $\Rightarrow 8^2 - x^2 = 7^2 - y^2$, iar din $\Delta A'BC$ dr. în A' avem conform T.P că $x^2 + y^2 = 25^2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 8^2 - x^2 = 7^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ -x^2 + y^2 = -7 \end{cases} \Bigg| + \\ 2y^2 = 18 \Big| : 2 \\ y^2 = 9 \\ y = 3$$

Înlocuind în prima ecuație obținem $x = 4$.

$$A_{A'BC} = \frac{A'B \cdot A'C}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm.}$$

R3.11.2. Fie ABC un triunghi dreptunghic și isoscel. Vârful A se găsește într-un plan α , iar catetele AB și AC formează cu planul α unghiuri congruente. Fie B' și C' proiecțiile vârfurilor B și C pe planul α .

- 1) Să se demonstreze că $(BC) \equiv (B'C')$
- 2) Care este valoarea maximă pe care o poate avea unghiul u format de catetele AB și AC cu planul α .
- 3) Să se demonstreze că unghiul $C'AB'$ nu poate fi ascuțit.
- 4) Să se afle unghiul diedru format pe planul triunghiului cu planul α când $m(\angle(AB; \alpha)) = 30^\circ$.

Soluție

1) $\Delta ABB'$

$$\Delta ACC' \left\{ \begin{array}{l} (AB) \equiv (AC) \text{ ip} \\ \angle(CAC') \equiv \angle(BAB') \text{ ip} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABB' \equiv \Delta ACC'$$

$$\Rightarrow (BB') \equiv (CC')$$

$$\left. \begin{array}{l} C' = \text{Pr}_\alpha(C) \\ B' = \text{Pr}_\alpha(B) \\ A \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AC' = \text{Pr}_\alpha(AC);$$

$$(AB') = \text{Pr}_\alpha(AB) \Rightarrow m(\angle(AC; \alpha)) = m\angle(CAC') \text{ și}$$

$$m(\angle(AB; \alpha)) = m\angle(BAB') \Rightarrow \text{avem } m\angle(CAC') = m\angle(BAB') = u$$

2) Fie $AB = AC = a$ atunci $BC = a\sqrt{2}$. Din $BB' \perp CC'$ și $(BB') \equiv (CC') \Rightarrow$

$BCC'B'$ dreptunghi ($BB' \perp \alpha$) $\Rightarrow B'C' = a\sqrt{2}$

$AB' = a \cos u$; $AC' = a \cos u$

În $\Delta AC'B'$ avem $AB' + AC' > B'C'$

$$a \cos u + a \cos u > a\sqrt{2}$$

$$2a \cos u > a\sqrt{2}$$

$$\cos u > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u < 45^\circ$$

$AB' + AC' = BB'C'$ numai în cazul când A, B', C' sunt coliniare, atunci $u = 45^\circ$. În aceste condiții planul triunghiului este perpendicular pe planul α .

3) Fie AD' înălțimea triunghiului isoscel $AB'C'$ ($AB' = AC'$ din (1))

$$(AD' \text{ bisectoare } D'C') = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{În } \triangle AC'D' \text{ avem: } \sin C'AD' = \frac{D'C'}{AC'} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : a \cos u = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\cos u}$$

$$\text{Deoarece } \cos u < 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos u} > 1, \text{ deci } \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\cos u} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin C'AD' > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow m(\angle C'AD') > 45^\circ \Rightarrow m(\angle C'AB') > 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ.$$

Numai când $BC \subset \alpha$, $B = B'$, $C = C'$ și $\angle B'AC'$ este drept

4) $BC \parallel B'C'$, $B'C' \subset \alpha \Rightarrow BC \parallel \alpha$

atunci $(ABC) \cap \alpha = d$, $A \in d$ și $d \parallel BC \parallel B'C'$

$$\left. \begin{array}{l} D'A \perp B'C' \Rightarrow D'A \perp d \\ DA \perp BC \Rightarrow DA \perp d \end{array} \right\} m((\angle ABC); \alpha) = m(\angle DAD')$$

$$\triangle ADD' \text{ dr. în } D' \text{ avem } \sin A = \frac{DD'}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m(\angle DAD') = 45^\circ$$

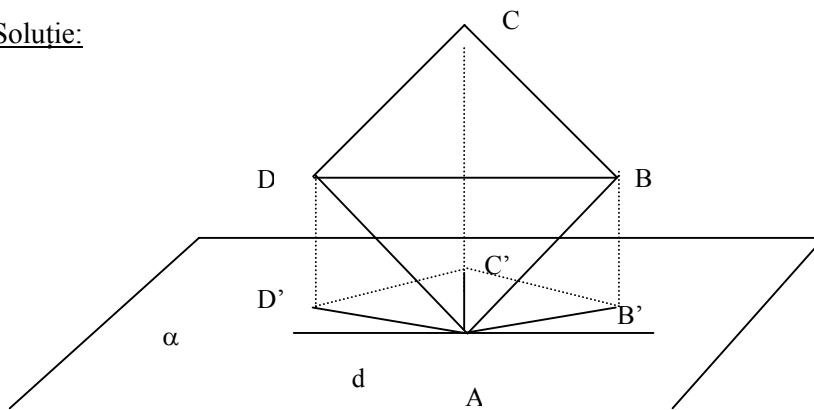
$$\text{Dacă } n = 30^\circ \Rightarrow BB' = \frac{a}{2} = DD'$$

$$\text{Din } \triangle ABD \text{ avem } AD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

R3.11.3. Fie $ABCD$ un pătrat. Vîrfurile A, B, C, D se găsesc într-un plan α și laturile AB și AD formează cu planul unghiuri congruente. Se notează cu B', C', D' proiecțiile punctelor B, C, D pe planul α .

- 1) Ce relație există între dreapta BD și planul α ?
- 2) Ce fel de patrulater este $AB'C'D'$?
- 3) $AB = a$, $\angle BAB' = 30^\circ$. Să se afle AC' .
- 4) Să se afle $m((\angle ABCD); \angle \alpha)$

Soluție:



$$\left. \begin{array}{l} B' = \text{Pr}_\alpha(B) \\ D' = \text{Pr}_\alpha(D) \end{array} \right\} \Rightarrow A \in \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} AD' = \text{Pr}_\alpha(AD) \\ AB' = \text{Pr}_\alpha(AB) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} m(\angle AB; \angle \alpha) = m(\angle BAB') \\ m(\angle AD; \angle \alpha) = m(\angle DAD') \end{array} \right\} \Rightarrow m(\angle BAB') = m(\angle DAD') = u$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABB' \\ \Delta ADD' \end{array} \right\} \begin{array}{l} (AB) \equiv (AD) \\ \angle DAD' \equiv \angle BAB' \end{array} \Rightarrow \Delta ABB' \equiv \Delta ADD' \Rightarrow DD' = BB' \text{ și } DD' \parallel BB'$$

(sunt perpendiculare pe același plan)

$$\left. \begin{array}{l} BDD'B' \text{ paralelogram} \\ \Rightarrow BB' \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow BDD'B' \text{ dreptunghi} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow B'D' \parallel BD \\ B'D' \subset \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} BD \parallel \alpha \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$2) \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{array}$$

Dreptele paralele au proiecțiile paralele $\Rightarrow C'D' \parallel AB'$ și $AD' \parallel B'C' \Rightarrow AB'C'D'$ paralelogram și $AB' = AD' \Rightarrow AB'C'D'$ este romb.

$$3) ABCD \text{ pătrat, } AB=a, \Rightarrow BD = a\sqrt{2} \Rightarrow B'D' = a\sqrt{2}$$

$$\text{Din } \triangle ABB' \Rightarrow AB' = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Fie $AC' \cap B'D' = \{O\}$. Din triunghiul dreptunghic AOB' aplicând

$$\text{T.P.} \Rightarrow AO^2 = AB'^2 - B'O^2 = \frac{3a^2}{4} - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$AO = \frac{a}{2} \Rightarrow AC' = a.$$

4) $BD \parallel \alpha$ planele se intersectează după o dreaptă d care trece prin A și $d \parallel BD \parallel B'D'$.

$$\left. \begin{array}{l} AC' \perp B'D' \Rightarrow AC' \perp d \\ AC \perp BD \Rightarrow AC \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow m(\angle((ABCD); \alpha)) = m(\angle CAC')$$

$$\triangle CAC' \text{ dreptunghic} \Rightarrow \cos A = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow \cos A = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m\angle(A) = 45^\circ.$$

3.5. Tetraedre particulare

Tema va cuprinde proprietăți referitoare la înălțimi, mediane, bimediane, mediatoare în tetraedru și proprietăți speciale referitoare la tetraedrele ortocentrice, echifaciale respectiv tridreptunghice și ea constituie un suport în pregătirea concursurilor de matematică.

În geometria în spațiu tetraedrul are rolul triunghiului din geometria plană. Multe din proprietățile tetraedrului pot fi deduse prin analogie cu proprietățile triunghiului.

În studiul corpurilor geometrice, introducerea noțiunii de volum se poate face folosind definiția volumului cubului sau a tetraedrului. Deducerea volumului paralelipipedului dreptunghic se face ușor dacă dimensiunile lui sunt numere naturale, dar problema se complică atunci când dimensiunile paralelipipedului sunt numere raționale sau iraționale. Prin folosirea volumului tetraedrului se evită demonstrațiile care implică numărul irațional și pe baza lui se pot deduce volumele celorlalte corpuri geometrice.

Definiția 3.5.1

Fie A, B, C trei puncte necoliniare situate în planul α și D un punct exterior planului α , atunci planele $(DAB), (DAC), (DBC)$ vor intersecta planul α după triunghiul ABC . Mulțimea punctelor interioare triunghiurilor DAB, DBC, DAC, ABC reunită cu mulțimea punctelor segmentelor $[AB], [BC], [CA], [DA], [DB], [DC]$, formează tetraedrul $DABC$.

Elementele tetraedrului:

- Vârfurile sunt punctele A, B, C, D
- Fețele sunt triunghiurile ABC, DAB, DAC, DBC

- Muchiile sunt segmentele [AB], [AC], [BC], [DA], [DB], [DC]
- Baza tetraedrului este oricare dintre fețele sale

Definiția 3.5.2.

Se numește înălțime a unui triunghi (tetraedru)

- dreapta ce trece printr-un vârf al triunghiului (tetraedrului) și este perpendiculară pe latura (fața) opusă.
- segmentul determinat pe dreapta de la punctul a) de către vârful considerat și de punctul de intersecție a dreptei suport a laturii (planului feței) opuse, numit piciorul înălțimii

Observații:

- În propoziții ca: "înălțimile sunt concurente" ne referim la drepte, iar expresia "lungimea înălțimii" ne obligă să considerăm înălțimea un segment.
- În general înălțimile unui tetraedru nu sunt concurente.

Teorema 3.5.1.

Lungimile înălțimilor unui triunghi sunt invers proporționale cu cele ale laturilor.

Definiția 3.5.3.

Aria ΔABC o notăm $A_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$, unde $BC=a$, $AC=b$,

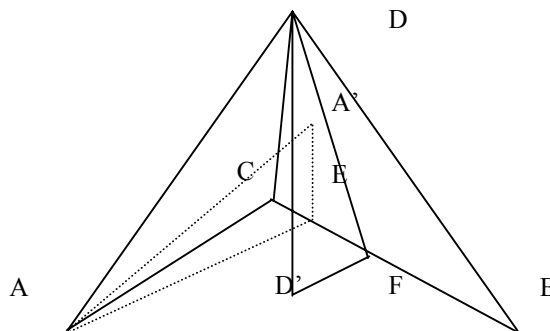
$AB=c$, h_a - înălțimea corespunzătoare vârfului A, analog h_b, h_c .

Teorema 3.5.2.

Înălțimile unui tetraedru sunt invers proporționale cu ariile fețelor corespunzătoare.

Demonstrație

Fie tetraedrul ABCD



Ducem $AA' \perp (BCD)$, $A' \in (BCD)$ și $A'E \perp BC$

$DD' \perp (ABC)$, $D' \in (ABC)$ și $D'F \perp BC$

Folosind T3 $\Rightarrow AE \perp BC$ și $DF \perp BC$

Avem $DF \parallel A'E$ și $AE \parallel D'F \Rightarrow \Delta DD'F$ și $\Delta AA'E$ sunt asemenea având $m(\angle A') = m(\angle D') = 90^\circ$ și $\angle E = \angle F$ (au laturile paralele) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{DD'}{AA'} = \frac{DF}{AE} \Rightarrow DD' \cdot AE = AA' \cdot DF \left| \cdot \frac{1}{2} BC \right. \Rightarrow DD' \cdot \frac{AE \cdot BC}{2} = AA' \cdot \frac{DF \cdot BC}{2}$$

$$\Rightarrow DD' \cdot A_{ABC} = AA' \cdot A_{BCD}$$

Definiția 3.5.4. Prin volumul tetraedrului ABCD înțelegem numărul V_{ABCD} , definit prin relația :

$$V_{ABCD} = \frac{A_{ABC} \cdot DD'}{3} = \frac{A_{BCD} \cdot AA'}{3} = \frac{A_{ABD} \cdot CC'}{3} = \frac{A_{ACD} \cdot BB'}{3}, \quad \text{unde}$$

A', B', C', D' sunt picioparele înălțimilor corespunzătoare vârfurilor A, B, C respectiv D

Teorema 3.5.3.

Aria unui triunghi ABC este dată de formula

$$A_{ABC} = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{ac \sin B}{2}$$

Teorema 3.5.4.

Volumul unui tetraedru ABCD poate fi calculat cu formula:

$$V_{ABCD} = \frac{2 \cdot A_{ABC} \cdot A_{BCD} \cdot \sin(\angle((ABC);(BCD)))}{3}$$

Demonstrație

Ducem $AA' \perp (BCD)$

$A' \in (BCD)$; $A'E \perp BC$. Din $T3 \perp \Rightarrow AE \perp BC \Rightarrow$

$m(\angle((ABC);(DBC))) = m(\angle AEA')$

În $\triangle AA'E$ dreptunghic în A' $\sin E = \frac{AA'}{AE} \Rightarrow AA' = AE \cdot \sin E \mid \cdot BC$

$\Rightarrow AA' \cdot BC = AE \cdot BC \cdot \sin E \Rightarrow AA' \cdot BC = 2A_{ABC} \cdot \sin E \mid \cdot A_{BCD}$

$\Rightarrow AA' \cdot BC \cdot A_{BCD} = 2A_{ABC} \cdot A_{BCD} \cdot \sin E \quad (1)$

Dar $AA' \cdot A_{BCD} = 3 \cdot V_{ABCD}$, înlocuind în relația (1) aceasta devine:

$$BC \cdot 3 \cdot V_{ABCD} = 2 \cdot A_{ABC} \cdot A_{BCD} \cdot \sin E \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{2 \cdot A_{ABC} \cdot A_{BCD} \sin E}{3BC}$$

Teorema 3.5.5.

Cele trei mediatoare ale unui triunghi sunt concurente într-un punct O care este egal depărtat de vârfurile triunghiului

Observație

1) Punctul de intersecție al mediatoarelor triunghiului se numește centrul cercului circumscris triunghiului.

2) Perpendiculara pe planul triunghiului în centrul cercului circumscris se numește mediatoarea triunghiului.

Definiția 3.5.4.

Fie A și B două puncte distincte. Planul mediator al segmentului [AB] este planul perpendicular pe dreapta AB care trece prin mijlocul segmentului [AB]

Teorema 3.5.6.

Cele șase plane mediatoare ale muchiilor unui tetraedru sunt concurente într-un punct care este egal depărtat de vârfurile tetraedrului.

Demonstrație

Fie α_{BC} , planul mediator al segmentului [BC] și α_{AC} , planul mediator al segmentului [AC], ele sunt concurente pentru că dreptele BC și AC sunt concurente. Intersecțiile lui α_{BC} și α_{AC} cu planul (ABC) sunt mediatoarea lui [BC] respectiv mediatoarea lui [AC]. Pentru că planele sunt perpendiculare pe planul (ABC), dreapta de intersecție al lor este perpendiculară pe planul (ABC) și trece prin centrul cercului circumscris triunghiului.

Definiția 3.5.5. Se numește mediană a unui triunghi segmentul de dreaptă determinat de un vârf al triunghiului și mijlocul laturii opuse.

Teorema 3.5.7.

Medianele unui triunghi sunt concurente într-un punct G situat pe fiecare mediană la $\frac{1}{3}$ de bază din lungimea medianei și $\frac{2}{3}$ față de vârf.

Observație Punctul de intersecție al medianelor unui triunghi se numește centrul de greutate al triunghiului

Definiția 3.5.5.

Se numește mediană a unui tetraedru segmentul determinat de un vârf al tetraedrului și centrul de greutate al feței opuse

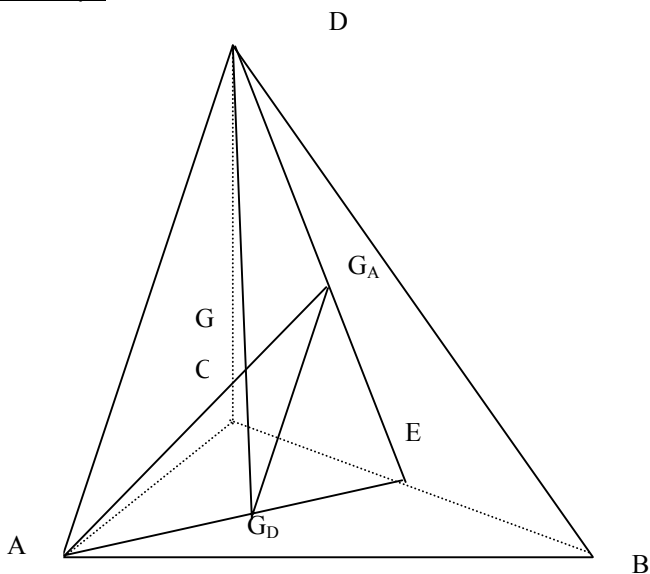
Definiția 3.5.6.

Se numește plan median, planul determinat de o muchie a tetraedrului și mijlocul muchiei opuse.

Teorema 3.5.8.

Medianele unui tetraedru ABCD sunt concurente într-un punct G situat pe fiecare mediană la $\frac{1}{4}$ de bază din lungimea medianei și la $\frac{3}{4}$ de vârf din lungimea ei.

Demonstrație



Fie tetraedrul ABCD , E mijlocul lui [BC], G_D - centrul de greutate al ΔABC și G_A - centrul de greutate al ΔBCD . A, G_A, E, G_D, D sunt coplanare. $AG_A \cap DG_D = \{G\}$.

$$\frac{EG_A}{G_A D} = \frac{EG_D}{G_D A}. \text{ Din R.T. Thales } \Rightarrow G_A G_D \parallel AD. \text{ Din T.F.A. } \Rightarrow$$

$$\Delta AGD \sim \Delta G_A G G_D$$

$$\Rightarrow \frac{G_A G_D}{AD} = \frac{GG_A}{GA} = \frac{GG_D}{GD} = \frac{1}{3}. \text{ Analog se arată că și celelalte două mediane}$$

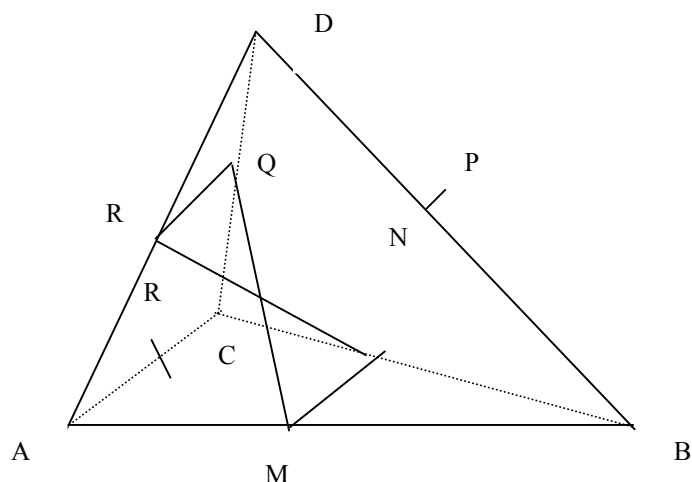
împart pe AG_D în același raport, deci ele sunt concurente. G – centrul de greutate al tetraedrului

Definiția 3.5.7.

Se numește bimediană a unui tetraedru segmentul de dreaptă determinat de mijloacele a două muchii opuse ale tetraedrului.

Teorema 3.5.9.

Bimedianele unui tetraedru sunt concurente în centrul de greutate, centrul de greutate fiind mijlocul fiecărei bimediane.



Demonstrație

Fie tetraedrul ABCD și M,N,P,Q,R,S mijloacele muchiilor [AB], [BC], [BD], [CD], [AD] respectiv [AC].

$$[MN] \text{ l.m. în } \Delta ABC \Rightarrow MN \parallel AC \text{ și } MN = \frac{AC}{2}$$

$$[RQ] \text{ l.m. în } \Delta ACD \Rightarrow RQ \parallel AC \text{ și } RQ = \frac{AC}{2}$$

\Rightarrow MNQR paralelogram \Rightarrow [MQ] și [RN] sunt concurente și se înjumătățesc.

Analog se arată că [PR] trece prin mijlocul lui [MQ], deci sunt concurente.

TETRAEDRUL ORTOCENTRIC

În general înălțimile unui tetraedru nu sunt două câte două secante, deci nici concurente.

Definiția 3.5.8.

Un tetraedru în care cele 4 înălțimi sunt 4 drepte concurente se numește ortocentric sau ortogonal. Punctul lor de intersecție se notează cu H și se numește ortocentrul tetraedrului.

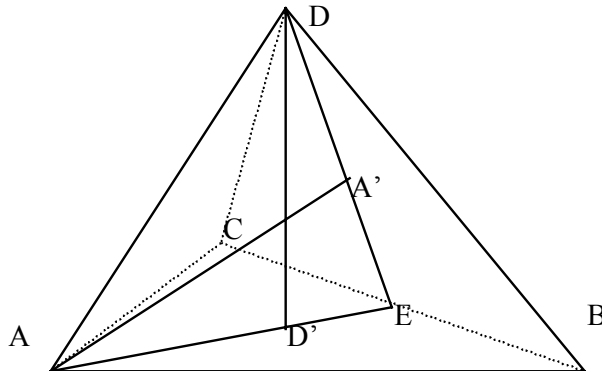
Teorema 3.5.10.

Înălțimile din A și D ale tetraedrului ABCD sunt secante dacă și numai dacă muchiile AD și BC sunt perpendiculare (L'Huilier 1782)

Demonstrație

Fie $A' = \text{pr}_{(BCD)}^{(A)}$ și $D' = \text{pr}_{(ABC)}^{(D)}$

Condiții echivalente: $AA' \cap DD' \neq \emptyset \Leftrightarrow AD \perp BC$



\Rightarrow Dacă AA' și DD' sunt secante.

$AA' \perp (BCD) \Rightarrow AA' \perp BC$

$DD' \perp (ABC) \Rightarrow DD' \perp BC$. Din cele două relații rezultă $BC \perp (ADD') \Rightarrow BC \perp AD$

\Leftarrow Fie E piciorul perpendicularei din A pe BC. Notăm planul $(AED) = \beta$. Din $BC \perp AD$ și $BC \perp AE \Rightarrow BC \perp \beta$. Cum $AA' \perp BC$ și $DD' \perp BC \Rightarrow AA'$ și DD' sunt incluse în planul β pentru că perpendicularele duse din A și D pe BC se află în planul β , deci sunt secante pentru că sunt înălțimi în ΔAED

Consecința 1⁰

Dacă înălțimile AA' și DD' sunt secante atunci și celelalte două înălțimi BB' și CC' sunt secante.

Demonstrație

Din $AA' \cap DD' \neq \emptyset \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow BB' \cap CC' \neq \emptyset$

Consecința 2⁰

Dacă $AA' \cap BB' = \{H\}$, atunci perpendiculara comună a muchiiilor $[AD]$ și $[BC]$ conține punctul H

Demonstrație

Planul determinat de dreptele AA' și DD' intersectează pe BC în E , EH este cea de-a treia înălțime a $\triangle AED$, deci $EH \perp AD$, dar $BC \perp (AED) \Rightarrow BC \perp EH$ pentru că $EH \subset (AED)$.

Din $BC \perp EH$ și $AD \perp EH \Rightarrow$ consecința 2⁰

Consecința 3⁰

Dacă înălțimile AA' și DD' se taie în H , iar înălțimile BB' și CC' se taie în H' și $H \neq H'$, atunci HH' este perpendiculara comună a muchiiilor opuse AD și BC

Conform consecinței 2⁰, punctul H aparține perpendicularei comune dar și H' aparține perpendicularei comune, atunci $HH' \perp AD$ și $HH' \perp BC$

Consecința 4⁰

Tetraedrul $ABCD$ este ortocentric dacă și numai dacă au loc condițiile: $AD \perp BC$, $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Cele trei condiții de perpendicularitate a muchiiilor opuse, exprimă faptul că înălțimile tetraedrului sunt două câte două secante.

Teorema 3.5.11.

Înălțimile din A și D Ale tetraedrului $ABCD$ sunt secante dacă și numai dacă are loc relația: $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

Demonstrație

$$\begin{aligned} \text{Fie } E = \text{pr}_{BC}(A) \text{ și } F = \text{pr}_{BC}(D). \text{ Avem: } AB^2 - AC^2 &= BE^2 - EC^2 = \\ &= (BE + EC)(BE - EC) = BC(BE - EC) \end{aligned}$$

$$BD^2 - CD^2 = BF^2 - FC^2 = (BF + FC)(BF - FC) = BC(BF - FC)$$

Înălțimile AA' și DD' ale tetraedrului sunt secante dacă și numai dacă $E=F$. Conform egalităților de mai sus, dacă $E=F$ atunci avem:

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2 \Rightarrow AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2.$$

Din relațiile de mai sus $\Rightarrow BC(BE - EC) = BC(BF - FC)$, deci $BE - EC = BF - FC$
 $- EF - FC = BF - EF - (EF + FC)$, adică $2EF = 0 \Rightarrow EF = 0 \Rightarrow E = F$.

Consecința 1⁰ (Feuerbach, 1827)

Tetraedrul $ABCD$ este ortocentric dacă și numai dacă

$$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2 = AD^2 + BC^2$$

Tetraedrul $ABCD$ este ortocentric dacă și numai dacă două dintre înălțimile AA' , BB' , CC' , DD' sunt secante. Conform teoremei 3.13.11. două înălțimi sunt secante dacă și numai dacă are loc egalitatea de sume de pătrate de muchii opuse.

Consecința 2⁰

Dacă au loc două dintre condițiile $AB \perp CD$, $AD \perp BC$, $AC \perp BD$ atunci are loc și a treia

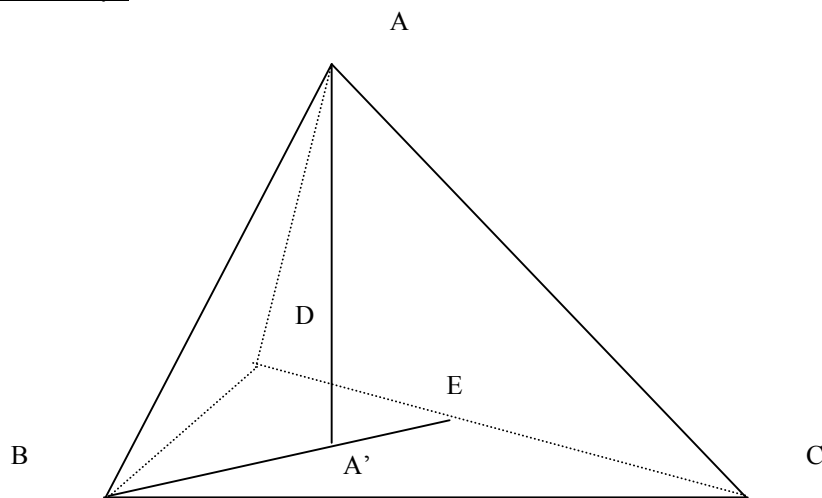
Consecința 3⁰

Tetraedrul ABCD este ortocentric dacă și numai dacă cele trei bimediane sunt egale.

TEOREMA 3.5.12. (Vecten , 1817)

Tetraedrul ABCD este ortocentric dacă și numai dacă proiecția ortogonală A' a lui A pe planul (BCD) coincide cu ortocentrul Δ BCD.

Demonstrație



Dacă ΔBCD nu este dreptunghic atunci ortocentru său H_A nu coincide cu nici un vârf.

$$\text{Condiții echivalente: } \left. \begin{array}{l} AB \perp CD \\ AC \perp BD \end{array} \right\} \Leftrightarrow A' = H_A$$

Din $AB \perp CD$ și $AA' \perp CD \Rightarrow CD \perp (AA'B) \Rightarrow CD \perp BA'$, $BA' \cap CD = \{E\} \Rightarrow A' \in BH_A$

Din $AC \perp BD \Rightarrow A' \in CH_A$

Se observă că tetraedrul ABCD este ortocentric $\Leftrightarrow AC \perp BD, AB \perp DC \Leftrightarrow A' \in BH_A$ și $A' \in CH_A \Leftrightarrow A' = H_A$

Observații

i) Dacă ΔBCD este dreptunghic în D $\Rightarrow H_A = D$, propoziția rămâne adevărată.

ii) Dacă ΔBCD este dreptunghic în B sau C este necesară o nouă reformulare a notațiilor.

iii) Mijloacele celor șase muchii ale unui tetraedru ortocentric se află pe o sferă de centru G și rază egală cu lungimea unei jumătăți de bimediană, conform consecinței 3⁰

TETRAEDRUL ECHIFACIAL

Numeroase proprietăți ale triunghiului echilateral extinse în spațiu, se îndeplinesc în tetraedre echifaciale. De aceea studiul acestor tetraedre este util pentru studiul interferenței dintre geometria euclidiană plană și geometria spațiului tridimensional.

Definiția 3.5.9.

Se numește “tetraedru echifacial” un tetraedru ale cărui fețe sunt echivalente.

Numeroase proprietăți ale triunghiului echilateral, extinse în spațiu, se îndeplinesc în tetraedre echifaciale. De aceea studiul acestor tetraedre este util pentru studiul interferenței dintre geometria euclidiană plană și geometria spațiului tridimensional.

Teorema 3.5.13.

Un tetraedru ABCD este echifacial dacă și numai dacă cele patru înălțimi sunt egale.

Demonstrație

Condiții echivalente:

$A_{ABC} = A_{ACD} = A_{BCD} = A_{ABD} \Leftrightarrow h_A = h_B = h_C = h_D$, unde h_A este înălțimea corespunzătoare vârfului A.

“ \Rightarrow ”

$$V = \frac{h_A \cdot A_{BCD}}{3}; V = \frac{h_B \cdot A_{ACD}}{3} \Rightarrow \frac{h_A \cdot A_{BCD}}{3} = \frac{h_B \cdot A_{ACD}}{3}$$

$$\Rightarrow h_A = h_B$$

“ \Leftarrow ”

$$\text{Din } h_A = h_B \text{ și } V = \frac{h_A \cdot A_{BCD}}{3}; V = \frac{h_B \cdot A_{ACD}}{3} \Rightarrow A_{BCD} = A_{ACD}$$

Lema 3.5.1.

Într-un tetraedru echifacial ABCD fiecare bimediana este perpendiculara comună a muchiilor ce le înjumătățește.

Demonstrație

Fie M mijlocul lui [AB] și E,F,N proiecțiile ortogonale ale punctelor A, B, M pe muchia opusă CD. Dacă $AM=MB \Rightarrow EN=NF$. Se observă că :

$$AE \cdot CD = 2 \cdot A_{ACD} = 2 \cdot A_{BCD} = BF \cdot CD \Rightarrow AE=BF.$$

Din triunghiurile dreptunghice AEN și BFN $\Rightarrow AN=NB$. Deci în triunghiul isoscel NAB, mediana [MN] este și înălțime, deci MN este perpendiculara comună a muchiilor AB și CD. Dacă prin absurd, N nu ar coincide cu mijlocul M' al muchiei [CD], s-ar relua construcția și demonstrația, schimbând rolul muchiilor [AB] și [CD] și am găsi o altă perpendiculară comună M'N' a muchiilor [AB] și [CD], ceea ce este absurd.

Teorema 3.5.14.

Condiția necesară și suficientă ca tetraedrul ABCD să fie echifacial este ca orice pereche de muchii opuse să fie egale.

“ \Rightarrow ”

Pe aceeași figură folosită în demonstrația lemei se observă că $NE=NF$ și $ND=NC$, deci $ED=FC$. $\triangle ADE \cong \triangle BCF \Rightarrow [AD] \cong [BC]$ și se constată că $[CE] \cong [FD]$, $\triangle AEC \cong \triangle BFD \Rightarrow [AC] \cong [BD]$.

“ \Leftarrow ”

Dacă muchiile opuse sunt egale, oricare ar fi două fețe ale tetraedrului se găsește o corespondență a vârfurilor astfel încât triunghiurile să fie congruente conform cazului (L.L.L.), deci ariile triunghiurilor vor fi egale

Teorema 3.5.15.

Dacă în tetraedrul ABCD orice bimediană este perpendiculara comună a muchiilor ce le unește atunci tetraedrul este echifacial.

Demonstrație

Fie E și F mijloacele muchiilor $[AB]$ și $[CD]$. Avem $EF \perp AB \Leftrightarrow AF=BF \Leftrightarrow 4AF=4BF$, obținem :

$$2(AC^2 - AD^2) - CD^2 = 2(BC^2 - BD^2) - CD^2 \text{ deci } AC^2 - BD^2 = BC^2 - AD^2 (1)$$

$$\text{Analog din } EF \perp CD \text{ obținem : } BD^2 - AC^2 = BC^2 - AD^2 (2)$$

$$\text{Din relațiile (1) și (2) } \Rightarrow AC=BD$$

TETRAEDRUL TRIDREPTUNGHIIC**Definiția 3.5.10.**

Tetraedrul ABCD este tridreptunghic în D dacă oricare două dintre dreptele DA, DB, DC sunt perpendiculare.

Se observă ușor că un tetraedru tridreptunghic este și ortocentric, deci are și proprietățile tetraedrului ortocentric. Aceste tetraedre au însă și proprietăți suplimentare ce generalizează într-un mod remarcabil relațiile metrice din triunghiul dreptunghic.

Teorema 3.5.16

Tetraedrul ABCD este tridreptunghic dacă și numai dacă au loc egalitățile:

$$2 \cdot DA^2 = b^2 + c^2 - a^2; 2 \cdot DB^2 = a^2 - b^2 + c^2; 2 \cdot DC^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

Demonstrație

“ \Rightarrow ”

Dacă ABCD este tridreptunghic aplicăm T.P în $\triangle DBC$, $\triangle DAC$, $\triangle DAB$ și obținem:

$$a^2 = DB^2 + DC^2; b^2 = DA^2 + DC^2; c^2 = DA^2 + DB^2$$

Adunăm egalitățile și obținem :

$$DA^2 + DB^2 + DC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Folosind relațiile de mai sus obținem egalitățile din enunț
 “ \Leftarrow ”

$$\text{Din } 2 \cdot DA^2 = b^2 + c^2 - a^2; \text{ prin adunarea lor obținem}$$

$$2 \cdot DB^2 = a^2 - b^2 + c^2$$

$DA^2 + DB^2 = c^2$. Din R.T.P. $\Rightarrow \Delta DAB$ dr. în D
 Analog se arată că și celelalte e triunghiuri sunt dreptunghice

Probleme rezolvate

R3.13.1. Demonstrați că într-un tetraedru echifacial cele patru mediane au lungimi egale

Demonstrație

Fie tetraedrul ABCD, [AE] și [DE] mediane, $E \in [BC]$ iar G_D și G_A , centrele de greutate ale fețelor ABC și BCD. Notăm $DG_D = m_D$ mediana corespunzătoare vârfului D.

Aplicăm Teorema lui Stewart și obținem:

$$m_D^2 \cdot AE = DE^2 \cdot AG_D + AD^2 \cdot G_DE - AE \cdot AG_D \cdot G_DE$$

$$m_D^2 \cdot AE = DE^2 \cdot \frac{2AE}{3} + AD^2 \cdot \frac{AE}{3} - AE \cdot \frac{2}{3}AE \cdot \frac{1}{3}AE$$

$$m_D^2 = \frac{2}{3}DE^2 + \frac{AD^2}{3} - \frac{2}{9}AE^2$$

Folosind teorema medianei pentru [DE] și [AE] obținem:

$$m_D^2 = \frac{3(DC^2 + BD^2 + AD^2) - (BC^2 + AC^2 + AB^2)}{9}$$

Analog obținem:

$$m_A^2 = \frac{3(AD^2 + AC^2 + AB^2) - (BC^2 + BD^2 + CD^2)}{9}$$

$$m_D^2 = m_A^2$$

$$3DC^2 + 3BD^2 + 3AD^2 - BC^2 - AC^2 - AB^2 = 3AD^2 + 3AC^2 + 3AB^2 - BC^2 - BD^2 - CD^2$$

$$4DC^2 + 4BD^2 = 4AC^2 + 4AB^2 \quad | : 4$$

$DC^2 + BD^2 = AC^2 + AB^2$ (relație adevărată deoarece muchiile opuse sunt congruente)

Analog se arată că celelalte două mediane sunt congruente cu ele.

R3.13.2. Dacă ABCD este un tetraedru tridreptunghic în D și H_D piciorul înălțimii din D pe fața ABC, atunci H_D este ortocentrul triunghiului ABC.

Demonstrație

Din $[DH_D] \perp (ABC) \Rightarrow DH_D \perp BC$ (1)

$AD \perp DC$ și $AD \perp DB \Rightarrow AD \perp (BDC) \Rightarrow AD \perp BC$ (2)

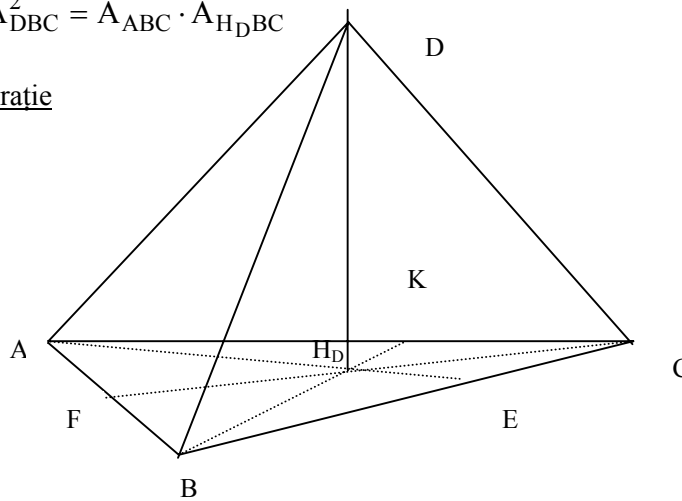
Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow BC \perp (ADH_D) \Rightarrow BC \perp AH_D \Rightarrow AH_D$ înălțime în triunghiul ABC

Analog BH_D înălțime $\Rightarrow H_D$ ortocentrul ΔABC

R3.13.3.

Dacă ABCD este un tetraedru tridreptunghic în D și H_D piciorul înălțimii din D pe fața ABC, $A_{DBC}^2 = A_{ABC} \cdot A_{H_D BC}$

Demonstrație



$AD \perp BD$, $BD \perp CD$, $CD \perp AD$ și $BC \perp (ADE)$

În ΔADE din T.C $\Rightarrow DE^2 = H_D E \cdot AE$. Înmulțim egalitatea cu $\frac{BC^2}{4}$ și

obținem:

$$\left(\frac{DE \cdot BC}{2}\right)^2 = \frac{AE \cdot BC}{2} \cdot \frac{H_D E \cdot BC}{2} \Rightarrow \text{relația cerută}$$

Bibliografie

- D.Brânzei și colectivul, *Planul și spațiul euclidian*; Ed. Academiei 1986
- D.Brânzei și colaboratorii, *Bazele raționamentului geometric*, Ed. Academiei 1983
- J. Hadamard, *Lecții de geometrie elementară, Geometrie în spațiu*, Ed. Tehnică 1961
- A.N. Kolmogorov, A.F. Semenovici, F.F. Naghibiu, R.S. Cerkosov, V.A. Gușev, *Geometrie pentru clasele VI-VIII*, EDP 1979
- K. Teleman, M. Florescu, C. Rădulescu, D. Moraru, E. Stătescu, *Matematică-geometrie și trigonometrie clasa a X-a*, EDP 1979
- M. Miculița, *Introducere în geometria tetraedrului*, Ed. Minied, Iași 1994
- I. Cuculescu și colectivul, *Matematică- Geometrie- Manual pentru clasa a VIII-a*, EDP 1997
- A. Negrilă, M. Negrilă, *Algebră-Geometrie-clasa a VIII-a*, Ed. Paralela 45/ 2002
- C. Cărbunaru, I. Cheșcă, V. Mangu, A. Negru, I. Sebestyen, *Culegere de probleme în sprijinul elevilor claselor V-VIII*, SSM 1981, pag 419-446
- I. Georgescu, *Geometrie în spațiu*, Ed. All 1995, pag 40-117
- A. Bălăucă, I. Țicalo, *Matematică-Geometrie în spațiu*, Ed. Axa Botoșani 1996 pag 12-28
- A. Moț, *Geometrie-Probleme de perpendicularitate în spațiu*
- M. Miculița, D. Brânzei, *Analogii triunghi-tetraedru*, Ed. paralela 45/2000
- M. Maricel, *Tabăra națională de matematică*, Craiova 2001
- T. Lalescu, *Geometria triunghiului*, vol I, Ed. Apollo, Craiova 1993
- L. Nicolescu, V. Borkoff- *Probleme practice de geometrie*, Ed. Tehnică 1990 București
- Foaia matematică* 2/1998

4. Distanțe și unghiuri în spațiu

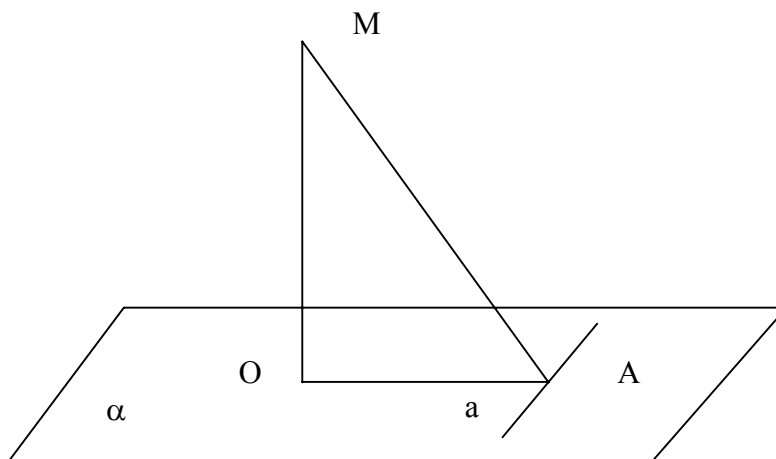
Tema cuprinde metode de determinare a distanței și calculul distanței între două elemente din geometria în spațiu. Vom prezenta modalități prin care se pune în evidență segmentul ce reprezintă distanța, dar și modul cum se calculează distanța respectivă. Distanța reprezentând drumul cel mai scurt, este utilă în problemele de optimizare.

4.1. Distanța de la un punct la o dreaptă

Metode de determinare și calcul a distanței

1. Determinarea distanței folosind teorema celor trei perpendiculare

Fie planul α și punctul M exterior planului, iar dreapta a inclusă în planul α .



Pentru a determina distanța de la punctul M la dreapta a procedăm astfel:

- ducem $MO \perp \alpha$, $O \in \alpha$
- $OA \perp a$, $A \in a$
- $a \subset \alpha$

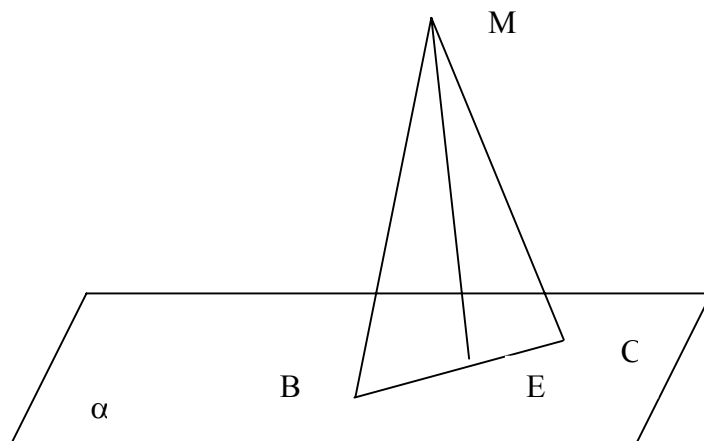
T3 \perp

$\Rightarrow MA \perp a$

$\Rightarrow d(M; a) = MA$, ea se calculează prin teorema lui Pitagora din ΔMOA cu $m(\angle MOA) = 90^\circ$

2. Determinarea distanței folosind înălțimea triunghiului

Se consideră planul α și M un punct exterior lui, iar punctele $B \in \alpha$, $C \in \alpha$.



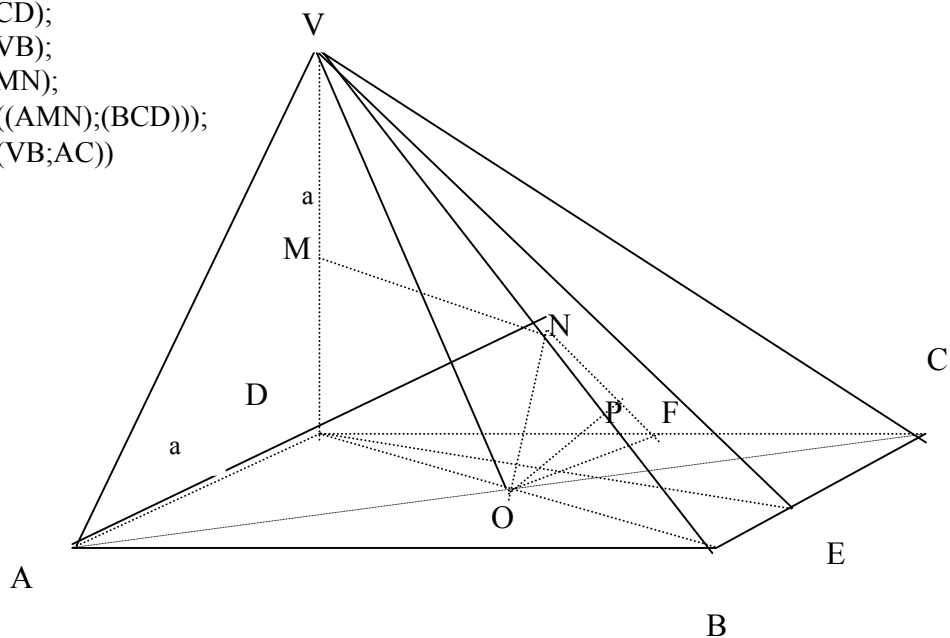
În ΔMBC ducem $ME \perp BC$, $E \in BC \Rightarrow d(M; BC) = ME$.
 Pentru a determina ME , calculăm lungimile laturilor triunghiului MBC și apoi înălțimea ME , prin teorema lui Pitagora sau folosind aria ΔMBC .

Probleme rezolvate

R4.2.1. Pe planul rombului $ABCD$ de latură a și diagonala $AC = a\sqrt{3}$, se ridică perpendiculara VD , $VD = a$. Fie M și N mijloacele segmentelor $[VD]$ respectiv $[VB]$. Să se afle:

- $d(V; AC)$;
- $d(V; BC)$;
- $d(N; CD)$;
- $d(A; VB)$;
- $d(A; MN)$;
- $m(\angle((AMN); (BCD)))$;
- $m(\angle(VB; AC))$

Soluție



a) Metoda 1

$$AC \cap BD = \{O\}$$

$$\Delta AOD \text{ dr} \Rightarrow DO = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow BD = 2DO = a \Rightarrow \Delta BCD \text{ echilateral}$$

$$VD \perp (ABCD)$$

$$DO \perp AC$$

$$DO \subset (ABCD)$$

$$AC \subset (ABCD)$$

T3 \perp

$$\Rightarrow VO \perp AC \Rightarrow d(V; AC) = VO$$

T.P.

$$VD \perp (ABCD) \Rightarrow VD \perp DO \Rightarrow \Delta VDO \text{ dreptunghic} \Rightarrow VO = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Metoda 2

$$VD \perp (ABCD) \Rightarrow VD \perp AD \Rightarrow \Delta VAD \text{ dr} \quad \text{T.P.}$$

$$\text{și } VD \perp DC \Rightarrow \Delta VDC \text{ dr} \Rightarrow VA = VC = a\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta VAC \text{ isoscel}$$

[VO] mediană

$$\Rightarrow VO \perp AC \Rightarrow d(V; AC) = VO$$

$$\Rightarrow \Delta VOA \text{ dr} \Rightarrow VO = \sqrt{2a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

T.P.

b) În unele probleme rezolvitorul trebuie să construiască o parte din desen pentru a putea aplica teorema celor trei perpendiculare astfel:

Ducem $DE \perp BC$, $E \in BC$

$$VD \perp (ABCD)$$

$$DE \perp BC$$

$$DE \subset (ABCD)$$

$$BC \subset (ABCD)$$

T3 \perp

$$\Rightarrow VE \perp BC \Rightarrow d(V; BC) = VE$$

$$\Delta DBC \text{ echilateral, } [DE] \text{-înălțime} \Rightarrow DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$VD \perp (ABCD) \Rightarrow VD \perp DE \Rightarrow \Delta VDE \text{ dr} \Rightarrow VE = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

T.P.

c) [NO] – linie mijlocie în $\Delta VDB \Rightarrow NO \parallel VD$
 $VD \perp (ABCD)$

$\Rightarrow ON \perp (ABCD)$
 $ON \perp (ABCD)$
 $OF \perp DC$
 $DC \subset (ABCD)$
 $OF \subset (ABCD)$

T3 \perp

$\Rightarrow NF \perp CD \Rightarrow d(N;CD)=NF$

$$\Delta COD \text{ dr} \Rightarrow OF = h = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$NO \perp (ABCD) \Rightarrow NO \perp OF \Rightarrow \Delta NOE \text{ dr} \Rightarrow NF = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$$

d) $AO \perp BD$

$AO \perp VD$ ($VD \perp (ABCD)$)
 $\Rightarrow AO \perp (VBD)$
 $AO \perp (VBD)$
 $OP \perp VB$
 $OP \subset (VBD)$
 $VB \subset (VBD)$

T.P.

T.3 \perp

$\Rightarrow AP \perp VB \Rightarrow d(A;VB)=AP$

$\Delta BOP \mid \angle P \equiv \angle D (90^\circ)$

$\Delta BVD \mid \angle B \text{ comun}$

$\Rightarrow \Delta BOP \sim \Delta BVD$

$$\frac{OP}{VD} = \frac{OB}{VB} \Rightarrow \frac{OP}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{2}}; OP = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$AO \perp (VBD) \Rightarrow AO \perp OP \Rightarrow \Delta AOP \text{ dr} . \text{ Din T.P.} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{2a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

e) $AO \perp (VBD)$

$ON \perp MN$
 $ON \subset (VBD)$
 $MN \subset (VBD)$

T3 \perp

$\Rightarrow AN \perp MN \Rightarrow d(A;MN) = AN$

$[MN]$ linie mijlocie în $\Delta VBD \Rightarrow MN \parallel BD$

$NO \perp BD \Rightarrow NO \perp MN$

$$\Delta AON \text{ dr} \Rightarrow AN = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = a$$

f) $A \in (AMN) \cap (BCD)$
 $MN \parallel BD$ $\left| \begin{array}{l} \Rightarrow (AMN) \cap (BCD) = d, A \in d, d \parallel MN \parallel BD \end{array} \right.$

Determinăm unghiul plan corespunzător diedrului

$AN \perp MN, MN \parallel d \Rightarrow AN \perp d$

$AO \perp BD, BD \parallel d \Rightarrow AO \perp d \Rightarrow m(\angle((AMN);(BCD))) = m(\angle NAO)$

$$\Delta NAO \text{ dr. în } O \Rightarrow \operatorname{tg}(\angle A) = \frac{NO}{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

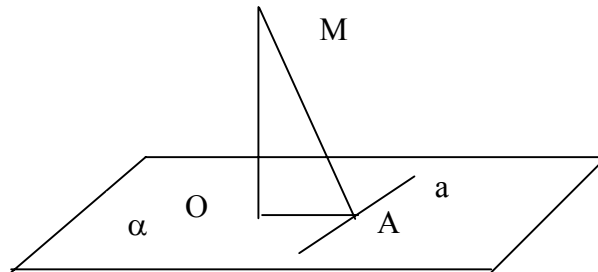
g) Din $AC \perp (VBD) \Rightarrow AC \perp VB \Rightarrow m(\angle(VB;AC)) = 90^\circ$

4.2. Distanța de la un punct la un plan

Metode de determinare și calcul a distanței

1. Determinarea distanței folosind reciproca teoremei celor trei perpendiculare

Fie un plan α și M un punct exterior planului



Pentru a determina distanța de la punctul M la planul α procedăm astfel:

Considerăm dreapta $a \subset \alpha$.

Ducem $OA \perp a, A \in a$

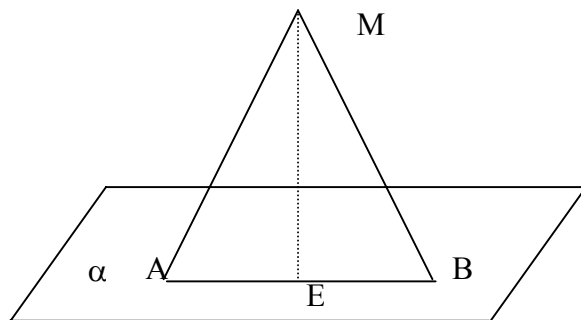
$MO \perp OA$

R.T.3 \perp

$MA \perp a$

$\Rightarrow MO \perp \alpha \Rightarrow d(M;\alpha) = MO$

2. Determinarea distanței folosind plane perpendiculare



Punem în evidență pe desen două plane perpendiculare astfel ca unul să conțină punctul iar celălalt este planul la care determinăm distanța.

Fie planul α și M un punct exterior lui.

Pentru a determina distanța de la M la planul α , punem în evidență planul (MAB) astfel încât $(MAB) \perp \alpha$, atunci:

Din $(MAB) \perp \alpha$

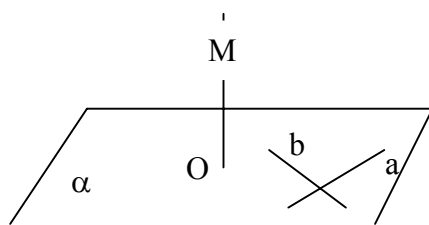
$(MAB) \cap \alpha = AB$

ducem $ME \perp AB$

$\Rightarrow ME \perp \alpha \Rightarrow d(M; \alpha) = ME$

3. Determinarea distanței folosind perpendiculara pe plan

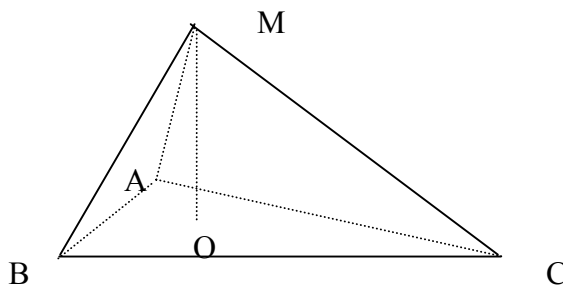
Fie planul α și M un punct exterior lui.



Dacă $MO \perp a$, $a \subset \alpha$ și $MO \perp b$, $b \subset \alpha \Rightarrow MO \perp \alpha \Rightarrow d(M; \alpha) = MO$

4. Determinarea distanței folosind înălțimea unei piramide

Fie tetredrul MABC



Dacă determinăm volumul tetraedrului și

$$MO \perp (ABC) \Rightarrow d(M; (ABC)) = MO \text{ și}$$

$$MO = \frac{3 \cdot V_{V_{ABC}}}{A_{ABC}}$$

Probleme rezolvate

R4.5.1. Se consideră cubul ABCDA'B'C'D', cu muchia de lungime a.

Să se determine:

1) $d(A; (A'BD))$;

2) $d(C'; (A'BD))$.

Soluție

1)

Metoda 1

$$AC \cap BD = \{O\}$$

$\Delta A'BD$ isoscel

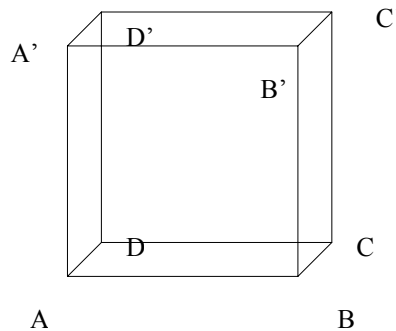
[A'O]-mediană

$$\Rightarrow A'O \perp BD$$

Ducem $AE \perp A'O$, $E \in A'O$

$$EO \perp BD$$

$$AO \perp BD$$



R.T.3.1

$$\Rightarrow AE \perp (A'BD) \Rightarrow d(A; (A'BD)) = AE$$

$$\Delta A'AO \text{ dr în } A', AE = h = \frac{AA' \cdot AO}{A'O}$$

Metoda 2

$$BD \perp AO$$

$$BD \perp AA'$$

$$\left. \begin{array}{l} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (A'AO) \quad \left. \begin{array}{l} BD \subset (A'BD) \\ BD \perp (A'AO) \end{array} \right\} \Rightarrow (A'BD) \perp (AA'O)$$

$$\text{Dar } (A'AO) \cap (A'BD) = A'O, AE \perp A'O \Rightarrow AE \perp (A'BD) \Rightarrow d(A; (A'BD)) = AE$$

Metoda 3

Ducem $AE \perp A'O$ (1)

$$BD \perp AO$$

$$BD \perp AA'$$

$$\left. \begin{array}{l} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (AA'O) \Rightarrow BD \perp A'O \text{ (2)}$$

$$\text{Din relațiile (1) și (2) } \Rightarrow AE \perp (A'BD) \Rightarrow d(A; (A'BD)) = AE$$

$$2) CA'BD \text{ tetraedru regulat pentru că } CA' = CB = CD = A'B = A'D = BD =$$

$$= a\sqrt{2}, \text{ atunci } d(C; (A'BD)) = h_C, \text{ unde } h_C \text{ este înălțimea tetraedrului}$$

corespunzătoare feței (A'BD)

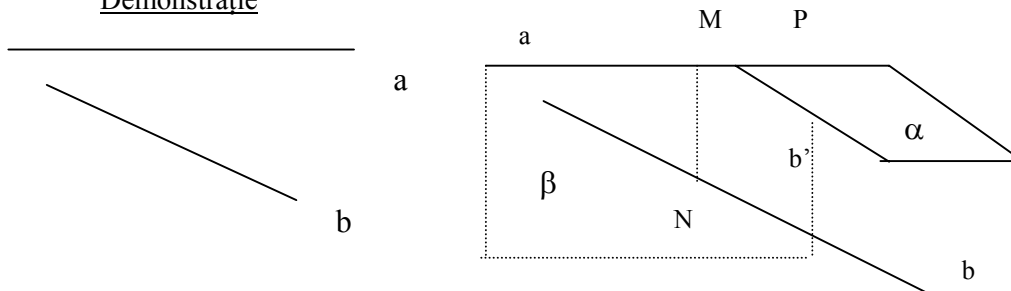
4.3. Distanța dintre două drepte

Fiind date două drepte oarecare a și b în spațiu și două puncte $M \in a$ și $N \in b$ astfel încât $MN \perp a$ și $MN \perp b$, spunem că dreapta MN este perpendiculara comună a dreptelor a și b , iar lungimea segmentului $[MN]$ este distanța de la dreapta a la dreapta b .

Teorema 4.3.1.

Dacă a și b sunt drepte necoplanare, atunci există o dreaptă MN perpendiculara comună a dreptelor a și b .

Demonstrație

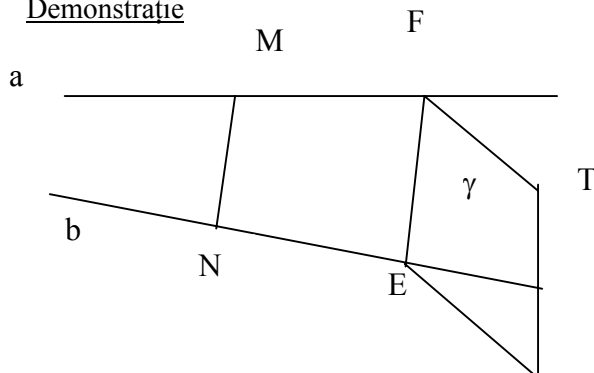


Pe dreapta a considerăm un punct P oarecare. Din P ducem o dreaptă b' paralelă cu b . Dreptele a și b' determină un plan α care este paralel cu b . Prin dreapta a ducem un plan β care să fie perpendicular pe α . Planul β intersectează dreapta b în punctul N . Din punctul N ducem în β o dreaptă MN perpendiculară pe a . Dreapta $MN \perp a$ (din construcție) și pe b deoarece $b \parallel \alpha$, $\beta \perp \alpha$ deci $\beta \perp b$, iar $MN \subset \beta$ deci $b \perp MN$, în concluzie $MN \perp a$ și $MN \perp b$, există perpendiculara comună.

Teorema 4.3.2.

Perpendiculara comună a două drepte necoplanare este unică.

Demonstrație



Presupunem prin absurd că există două perpendiculare comune MN și EF , deci $MN \perp a$, $MN \perp b$, $EF \perp a$, $EF \perp b$. Prin punctul F al dreptei a ducem $FT \parallel MN$, dreptele EF și FT determină un plan γ . Avem $MF \perp MN$, deci $MF \perp FT$. De asemenea $MF \perp FE$, deci $MF \perp \gamma$ (1).

Analog $NE \perp NM$, deci $NE \perp FT$ și $NE \perp FE \Rightarrow NE \perp \gamma$ (2)

Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow MF \parallel NE \Rightarrow a \parallel b$ ceea ce contrazice condiția din ipoteză prin care am precizat că a și b sunt necoplanare.

Deci presupunerea făcută ne-a condus la o contradicție \Rightarrow perpendiculara comună este unică.

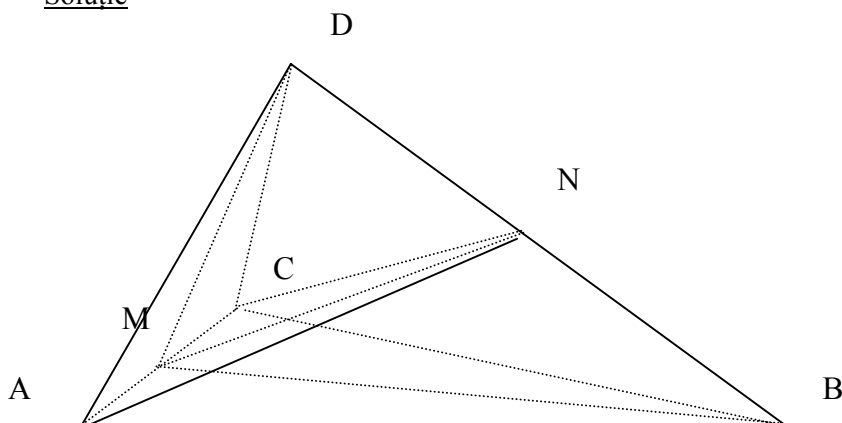
Modul în care am demonstrat existența perpendicularei comune nu oferă un procedeu practic util în rezolvarea problemelor de determinare a distanței în spațiu. Din acest motiv vom prezenta raționamente specifice acestui gen de probleme.

Probleme rezolvate

1. În unele probleme este utilă folosirea proprietății triunghiului isoscel și anume că mediana corespunzătoare bazei este și înălțime.

R4.8.1. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $DA=DC=BA=BC=a$, iar $AC=BD=b$. Să se pună în evidență distanța dintre dreptele AC și BD și apoi să se calculeze în funcție de a și b .

Soluție



Fie M și N mijloacele segmentelor $[AC]$ și $[BD]$, segmentul $[MN]$ se numește bimediana. Arătăm că MN este perpendiculară comună a celor două drepte.

Triunghiul ADC isoscel, $[DM]$ mediană $\Rightarrow DM \perp AC$ (1)

Triunghiul ABC isoscel, $[BM]$ mediană $\Rightarrow BM \perp AC$ (2)

Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow AC \perp (DMB)$, $MN \subset (DMB) \Rightarrow AC \perp MN$ (3)

Analog ΔDCB și ΔDAB isoscele. În ΔDCB , $[CN]$ mediană $\Rightarrow CN \perp BD$ (4)

În ΔDAB , $[AN]$ mediană $\Rightarrow AN \perp BD$ (5)

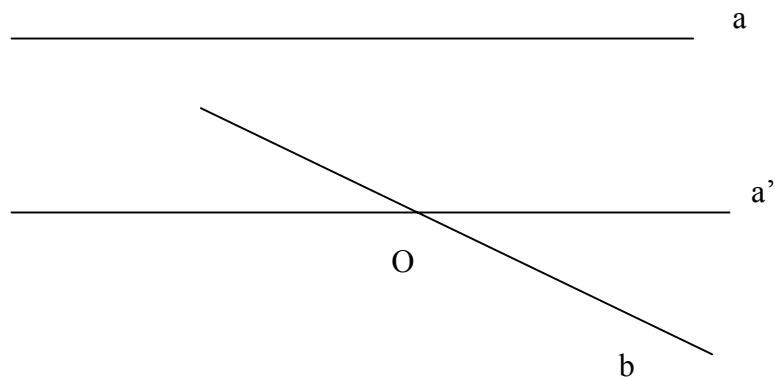
Din relațiile (4) și (5) $\Rightarrow BD \perp (ANC)$, $MN \subset (ANC) \Rightarrow BD \perp MN$ (6)

Din relațiile (3) și (6) $\Rightarrow MN$ distanța de la AC la BD .

$$\Delta DMC \text{ dreptunghic} \Rightarrow DM = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \quad (\text{T.P})$$

$$\Delta MND \text{ dreptunghic} \Rightarrow MN = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - 2b^2} \quad (\text{T.P})$$

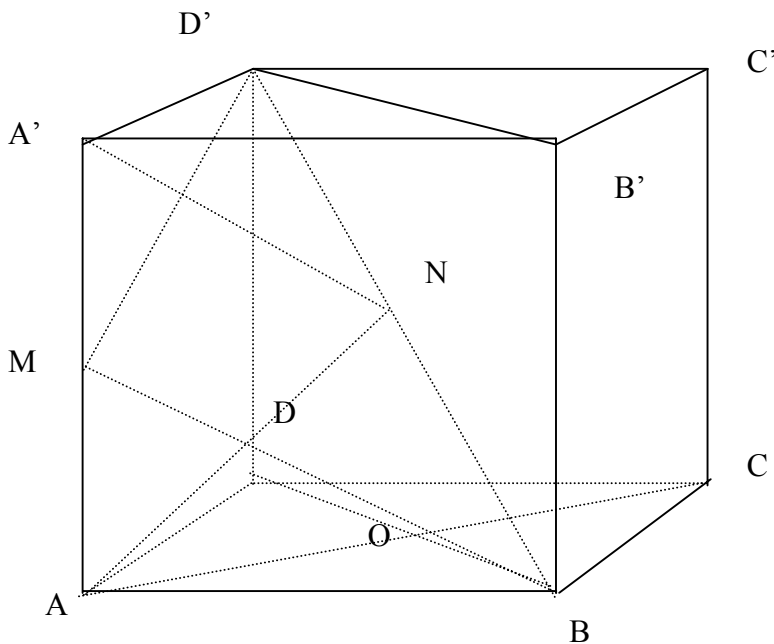
2. O metodă eficientă de determinare a distanței dintre două drepte necoplanare a și b este următoarea: determinăm un plan α astfel încât $b \subset \alpha$ și $a \parallel \alpha$, atunci $d(a;b) = d(a;\alpha)$



Fie a și b cele două drepte. Printr-un punct O al dreptei b ducem dreapta a' , astfel încât $a' \parallel a$, atunci $a \parallel (a',b) \Rightarrow d(a;b) = d(a;(a',b))$

R4.8.2. Se consideră cubul $ABCA'B'C'D'$ de muchie a . Să se calculeze distanța de la diagonala BD' la muchia AA' , în funcție de a .

Soluție



Metoda 1

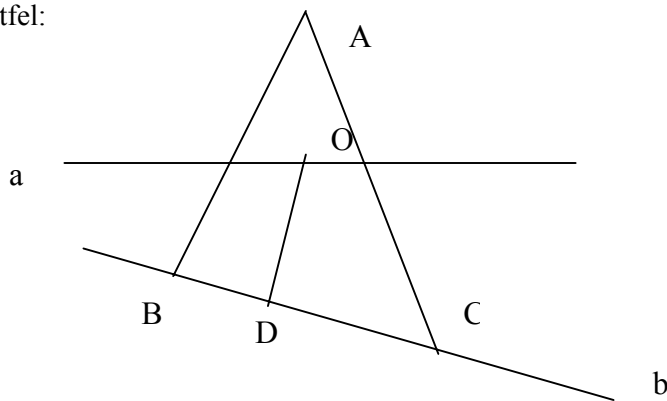
Fie M mijlocul lui $[AA']$ și N mijlocul lui $[BD']$. Folosind faptul că triunghiurile BMD' și $A'NA$ sunt isoscele iar $[MN]$ este mediană în fiecare $\Rightarrow d(AA';BD')$ este MN și $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Metoda 2

În cubul $ABCD A'B'C'D'$ avem $AA' \parallel BB'$, $BB' \subset (BDD'B') \Rightarrow AA' \parallel (BDD'B') \Rightarrow d(AA';BD') = d(AA';(BDD'B'))$. Dreapta AA' fiind paralelă cu planul $(BDD'B')$, fiecare punct al său are aceeași distanță față de planul respectiv. Alegând un punct convenabil putem calcula distanța. Fie A acest punct.

$AO \perp BD$
 $AO \perp BB'$ $\Rightarrow AO \perp (BDD'B') \Rightarrow AO \perp BD'$ și $AO \perp AA'$ ($AA' \perp (ABCD)$) \Rightarrow
 $d(AA';BD') = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

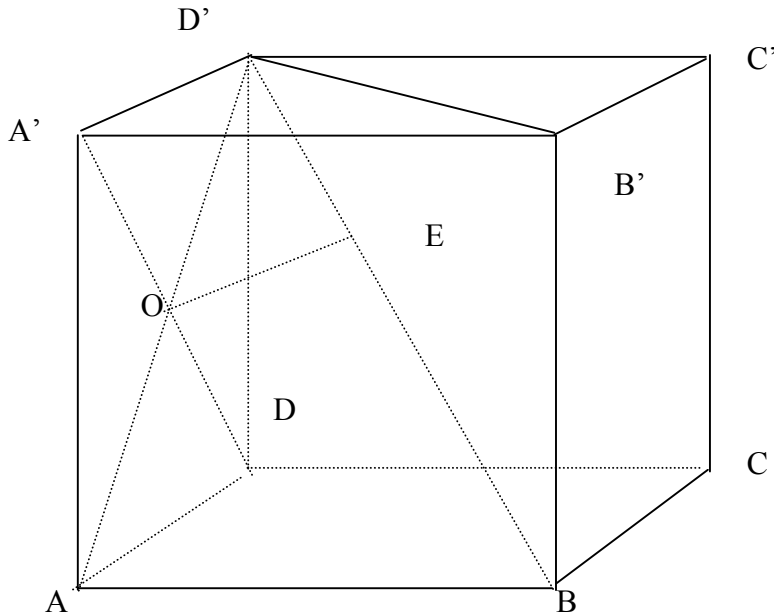
3. Pentru a determina distanța dintre două drepte a și b necoplanare putem proceda astfel:



Determinăm un plan (ABC) care conține dreapta b și $a \perp (ABC)$. Din punctul de intersecție O al dreptei a cu planul (ABC) ducem $OD \perp b$, $D \in b$. Distanța dintre dreptele a și b este OD, pentru că $a \perp (ABC)$, $OD \subset (ABC) \Rightarrow a \perp OD$, și din construcție $b \perp OD$.

R4.8.3. Cubul ABCDA'B'C'D' are muchia a. Determinați și calculați distanța dintre dreptele A'D și BD'.

Soluție



$ADD'A'$ pătrat $\Rightarrow A'D \perp AD'$ (1)

$AD' \cap A'D = \{O\}$

$AB \perp (ADD'A') \Rightarrow AB \perp A'D$ (2)

Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow A'D \perp (ABD')$

Ducem $OE \perp BD'$. Din $A'D \perp (D'AB) \Rightarrow A'D \perp OE$, dar $OE \perp BD'$ din construcție

$\Rightarrow d(A'D; BD') = OE$

Pentru determinarea distanței folosim asemănarea triunghiurilor $D'OE$ și $D'BA$

$$\Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

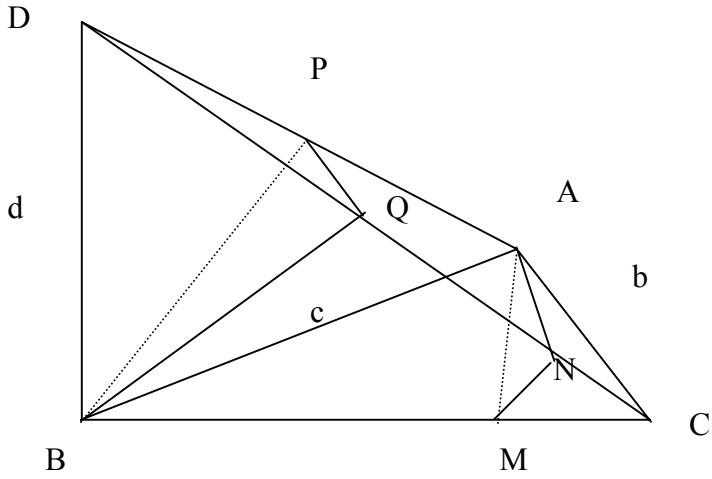
4.4. Distanța dintre două plane paralele

Definiția 4.4.1 Distanța dintre două plane paralele α și β , notată $d(\alpha; \beta)$, este distanța de la un punct oarecare al planului α la planul β .

Probleme rezolvate

R4.11.1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu catetele de lungime b și c. În B se ridică segmentul $BD=d$, perpendicular pe planul triunghiului. Notăm cu M și N proiecțiile punctului A pe dreptele BC și CD, iar cu P și Q proiecțiile punctului B pe dreptele AD, respectiv DC. Calculați distanța dintre planele (BPQ) și (AMN).

Soluție



$$\begin{array}{l}
 \text{Arătam că } (AMN) \perp (BPQ) \\
 \left. \begin{array}{l}
 DB \perp (ABC) \\
 DB \subset (DBC)
 \end{array} \right\} \Rightarrow (ABC) \perp (DBC) \\
 \left. \begin{array}{l}
 (ABC) \cap (DBC) = BC \\
 AM \perp BC
 \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp (DBC)
 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 AM \perp (DBC) \\
 AN \perp DC \\
 DC \subset (DBC) \\
 MN \subset (DBC)
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{R.T3} \perp \\
 \Rightarrow MN \perp DC
 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Avem } DC \perp AN \text{ (ip)} \\
 DC \perp MN \text{ (dem)}
 \end{array} \right\} \Rightarrow DC \perp (AMN) \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 AC \perp AB \text{ (ip)} \\
 AC \perp DB \text{ (} DB \perp (ABC) \text{)}
 \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (ABD) \\
 \left. \begin{array}{l}
 AC \subset (DAC)
 \end{array} \right\} \Rightarrow (DAC) \perp (ABD)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 (DAC) \perp (ABD) \\
 (DAC) \cap (ABD) = AD \\
 BP \perp AD
 \end{array} \right\} \Rightarrow BP \perp (DAC)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 BP \perp (DAC) \\
 BQ \perp DC \\
 DC \subset (DAC) \\
 PQ \subset (DAC)
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{RT3} \perp \\
 \Rightarrow PQ \perp DC
 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} PQ \perp DC \text{ (dem)} \\ BQ \perp DC \text{ (ip)} \end{array} \right| \Rightarrow DC \perp (BPQ) \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow (BPQ) \parallel (AMN)$ și $d((BPQ);(AMN))=QN$
 Pentru calculul distanței procedăm astfel:

$$\Delta ABC \text{ dr. Din T.P. avem: } BC = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\text{Din T.C. avem: } AC^2 = MC \cdot BC \Rightarrow MC = \frac{AC^2}{BC}$$

$$\Rightarrow MC = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\Delta DBC \text{ dr. Din T.P. avem: } DC = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta DBC \\ \Delta MNC \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle C - \text{comun} \\ \angle N \equiv \angle D \text{ (} 90^\circ \text{)} \end{array} \Rightarrow \Delta DBC \sim \Delta MNC$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{DC} = \frac{CN}{BC} \Rightarrow CN = \frac{MC \cdot BC}{DC}$$

$$\Rightarrow CN = \frac{\frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}$$

$$\Delta DBC \text{ dr. Din T.C. avem: } BD^2 = DQ \cdot DC \Rightarrow DQ = \frac{BD^2}{DC} = \frac{d^2}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}$$

$$QN = DC - (DQ + NC)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow QN &= \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} - \frac{d^2}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} - \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \\ &= \frac{b^2 + c^2 + d^2 - d^2 - b^2}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \end{aligned}$$

5. Probleme de maxim, minim

Rezumat: În cadrul temei sunt prezentate diferite metode de a determina maximul, minimul unei expresii precum și diferite aplicații în geometrie.

5. 1. Metoda inegalităților

Reprezintă o metodă de delimitare a unor expresii, folosind diferite inegalități, respective condițiile pentru care are loc egalitatea în acestea

Exemplu. Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ și $x+y+z=1$ să se determine maximul expresiei

$$E(x, y, z) = \sqrt{5x+y+z} + \sqrt{5y+z+x} + \sqrt{5z+x+y}$$

Rezolvare:

$$5x+y+z, 5y+z+x, 5z+x+y \geq 0.$$

Exemplu de abordare greșită a problemei:

Folosind inegalitatea mediilor

$$E(x, y, z) \leq \frac{5x+y+z+5y+z+x+5z+x+y+3}{2} \leq 5 \text{ cu egalitate dacă și numai}$$

dacă $5x+y+z=5y+z+x=5z+x+y=1 \Leftrightarrow x=y=z=0$, contradicție, $\Rightarrow 5$ nu e maximul expresiei, doar un majorant, deoarece nu se atinge pentru nici o valoare a lui x, y, z .

Metoda corectă

$$\sqrt{5x+y+z} = a;$$

$$\sqrt{5y+z+x} = b;$$

$$\sqrt{5z+x+y} = c;$$

$$5x+y+z = a^2;$$

$$5y+z+x = b^2;$$

$$5z+x+y = c^2;$$

Adunând relațiile, se obține

$$S=7=a^2+b^2+c^2;$$

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} \Leftrightarrow a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} = \sqrt{21} \text{ cu egalitate } \Leftrightarrow$$

$$x=y=z=\frac{1}{3}$$

5. 2. Metoda funcțiilor

5. 2. 1. Funcții de gradul I pe un interval

$$f: [m, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b$$

$a > 0$ $\min f = f(m)$ ținând cont că f este strict crescătoare, maximul nu există

$a < 0$ $\max f = f(m)$

minimul funcției nu există.

$$f: [m, n] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b \quad (a > 0) \quad x \in [m, n] \quad \begin{array}{l} \max f(x) = f(n) \\ \min f(x) = f(m) \end{array}$$

Rolurile se schimbă dacă $a < 0$.

5. 2. 2. Funcții de gradul II

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + (-\Delta/4a).$$

Cazul I

$a > 0$

f este strict descrescătoare pe $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ și strict crescătoare pe $[-\frac{b}{2a}, \infty)$ și

$\min f = -\Delta/4a = f(-\frac{b}{2a})$. $\max f$ nu există.

Cazul II

$a < 0$

f este strict descrescătoare pe $[-\frac{b}{2a}, \infty)$ și strict crescătoare pe $(-\infty, -\frac{b}{2a})$,

$\max f = -\Delta/4a = f(-\frac{b}{2a})$. $\min f$ nu există.

Exemplu

Deduceți $\max f$, $\min f$ pentru funcțiile:

a.) $f: [-10, 3] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 - 2x$.

x	-10	1	3
$f(x)$	80	-1	3

$\min f = -1 = f(1)$

$\max f = 80 = f(-10)$

b.) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-2, 1]$

x	-2	0	1
$f(x)$	$\sqrt{5}$	3	$2\sqrt{2}$

$3 = \max, f(x) = f(0), x \in [-2, 1]$

$\sqrt{5} = \min, f(x) = f(-2), x \in [-2, 1]$

5. 2. 3. Deducerea imaginii unei funcții

Fie $f: A \rightarrow B$. Prin imaginea funcției f , notată $\text{Im}f$ înțelegem mulțimea $\{y \in B \mid \text{ecuația } f(x)=y \text{ are cel puțin o soluție } x \in A\}$.

Exemplu: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

Determinați $\min f$, respectiv $\max f$.

Deducem $\text{Im}f$ adică acei $y \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $f(x) = y$ să aibă cel puțin o soluție.

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = y \text{ are soluție} \Leftrightarrow yx^2 + yx + y - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)x^2 + (y+1)x + y-1 = 0$$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (y+1)^2 - 4(y^2 - 2y + 1) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 - 4y^2 + 8y - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 3 \leq 0$$

$$\Delta = 2^2 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 4^2 = 8^2$$

$$y_{1,2} = (10 \pm 8) / 6$$

$$y_1 = 3, y_2 = 1/3.$$

$y \in [1/3, 3] = \text{Im}f \Rightarrow \min f = 1/3$ și se atinge pentru soluția ecuației $f(x) = 1/3$ respectiv $\max f = 3$ și se atinge pentru soluția ecuației $f(x) = 3$.

6. 3. Metoda geometrică

Ex. Să se găsească $x \in \mathbb{R}$ astfel încât valoarea expresiei $E(x)$ să fie minimă unde

$$E(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 32}$$

Rezolvare.

$$E(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 2^2} + \sqrt{(x-4)^2 + 4^2}$$

$A(1, 2), B(4, 4)$.

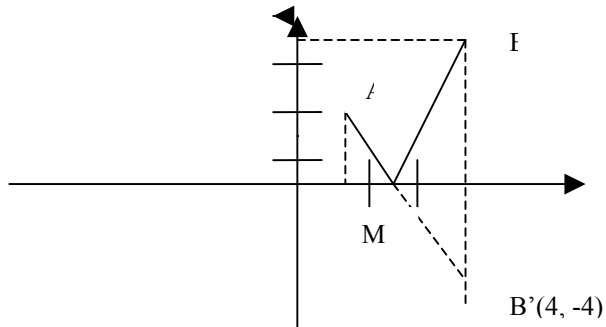
$$E(x) = AM + MB = AM + MB' \text{ minimă} \Leftrightarrow$$

A, M, B' coliniare. $B'(4, -4)$

Determinăm funcția de gradul I $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = ax + b \text{ astfel încât } G_f = AB'$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(4) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + b = -4 \\ a = -2, b = 4 \end{cases} \quad f(x) = -2x + 4;$$



$$G_f \cap OX = \{M(2, 0)\}$$

$$\min E(x) = E(2) = \sqrt{5} + \sqrt{20} = 3\sqrt{5}$$

5. 4. Probleme rezolvate

Algebră

R5. 4. 1. Fie $x, y, z \in [1, \infty)$ și $E = \frac{\sqrt{xy-1}}{xy} + \frac{\sqrt{yz-1}}{yz} + \frac{\sqrt{zx-1}}{zx}$

Arătați că $\max E = 3/2$. Precizați în ce condiții se obține acest maxim.
Rezolvare.

Determinarea maximului expresiei $\frac{\sqrt{a-1}}{a} = \frac{u}{1+u^2} \leq 1/2$ cu egalitate $\Leftrightarrow u=1 \Leftrightarrow a=2$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} xy = 2 \\ yz = 2 \\ xz = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow xyz = 2\sqrt{2}, \max E = 3/2;$$

R5. 4. 2. a) Să se determine numerele reale x pentru care raportul: $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$ are valoare minimă.

b) Dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+$ și $3x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1$, demonstrați că

$$\max \left\{ \frac{x_1 x_2}{9x_1^2 x_2^2 + 1} + \frac{x_2 x_3}{9x_2^2 x_3^2 + 1} + \frac{x_1 x_3}{9x_1^2 x_3^2 + 1} \right\} = \frac{1}{2}$$

a) $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 3/4$

cu egalitate $\Leftrightarrow x=1/2$

b) $g(a) = \frac{a}{9a^2 + 1} \leq 1/6$ cu egalitate $\Leftrightarrow a=1/3$

$\Rightarrow g(x_1 \cdot x_2) + g(x_2 \cdot x_3) + g(x_1 \cdot x_3) \leq 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$ cu egalitate \Leftrightarrow

$$x_1 x_2 = 1/3; x_1 x_3 = 1/3; x_2 x_3 = 1/3 \Rightarrow x_1 x_2 x_3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$$

R5. 4. 3. $M = \{n \in \mathbb{N} \mid x^n + y^n + z^n + t^n = xyzt \text{ are soluții } x, y, z, t \in \mathbb{N}^*\}$ Determinați maxim, minim.

Rezolvare:

$$n \geq 4 \quad xyzt = x^n + y^n + z^n + t^n \geq 4 \sqrt[4]{x^n y^n z^n t^n} \geq 4xyzt \text{ contradicție cu } x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$$

$$n=0 \quad \text{o soluție a ecuației } xyzt=4 \text{ este } (1, 1, 1, 4)$$

$$n=1 \quad x+y+z+t=xyzt \text{ are o soluție } (1, 1, 2, 4)$$

$$n=2 \quad x^2+y^2+z^2+t^2=xyzt \text{ soluție } (2, 2, 2, 2)$$

$$n=3 \quad x^3+y^3+z^3+t^3=xyzt \text{ soluție } (4, 4, 4, 4)$$

$$M = \{0, 1, 2, 3\} \quad \max M = 3, \min M = 0$$

R5. 4. 4. Calculați $\max\left(\frac{a-c^3}{1+a} + \frac{b-a^3}{1+b} + \frac{c-b^3}{1+c}\right)$, $a, b, c \in (-1, \infty)$. În ce condiții se

atinge maximul?

Rezolvare

$$1+a=x, 1+b=y, 1+c=z, \quad x, y, z \in (0, \infty)$$

$$\frac{a-c^3}{1+a} = \frac{x-1-(z-1)^3}{x} = \frac{x-z^3+3z^2-3z}{x} = 1 - \frac{z(z^2-3z+3)}{x} \text{ și analoagele.}$$

Rămâne de determinat $\min E(x, y, z) =$

$$= \frac{z(z^2-3z+3)}{x} + \frac{x(x^2-3x+3)}{y} + \frac{y(y^2-3y+3)}{z}$$

$$E(x, y, z) \geq 3 \sqrt[3]{(x^2-3x+3)(y^2-3y+3)(z^2-3z+3)} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{4}} = \frac{9}{4} \text{ eg } \Leftrightarrow$$

$$x=y=z=3/2 \text{ maximul cerut } = 3 - \frac{9}{4} = 3/4$$

R5. 4. 5. Dacă $x, y, z \in [0, 1]$ demonstrați că $\max\left[\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{zx+1} + \frac{z}{xy+1}\right] = 2$

Rezolvare

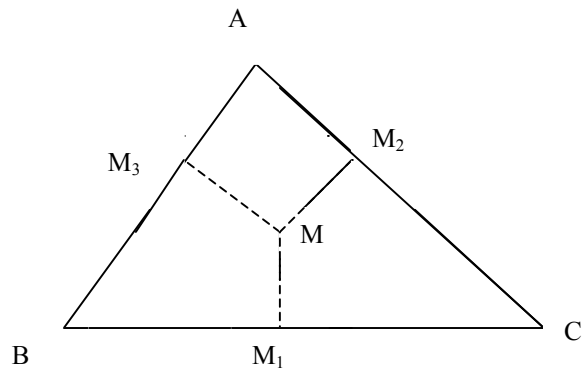
Fără a restrânge generalitatea, expresia fiind simetrică, putem presupune că $x \leq y \leq z$

$$\frac{1}{xy+1} \geq \frac{1}{zx+1} \geq \frac{1}{yz+1} \Rightarrow M_1 \leq \frac{x+y+z}{xy+1}. \text{ Rămâne de demonstrat că } x+y+z \leq 2xy+2.$$

$$(1-x)(1-y) \geq 0, (\alpha) x, y \in [0, 1] \Rightarrow 2xy+1 \geq x+y, 1 \geq z \Rightarrow 2xy+2 \geq x+y+z.$$

Egalitatea se atinge pentru $x=z=1$ și $y=0$

Geometrie R5. 4. 6. Să se determine punctul din interiorul unui triunghi ABC astfel încât $MM_1 \cdot MM_2 \cdot MM_3$ să fie maxim, unde $M_1 = \text{pr.}_{BC}M$, $M_2 = \text{pr.}_{AC}M$, $M_3 = \text{pr.}_{AB}M$.



Rezolvare _____

$$MM_1 \cdot a + MM_2 \cdot b + MM_3 \cdot c = 2S \geq 3 \sqrt[3]{MM_1 \cdot a \cdot MM_2 \cdot b \cdot MM_3 \cdot c} \Leftrightarrow MM_1 \cdot MM_2 \cdot M$$

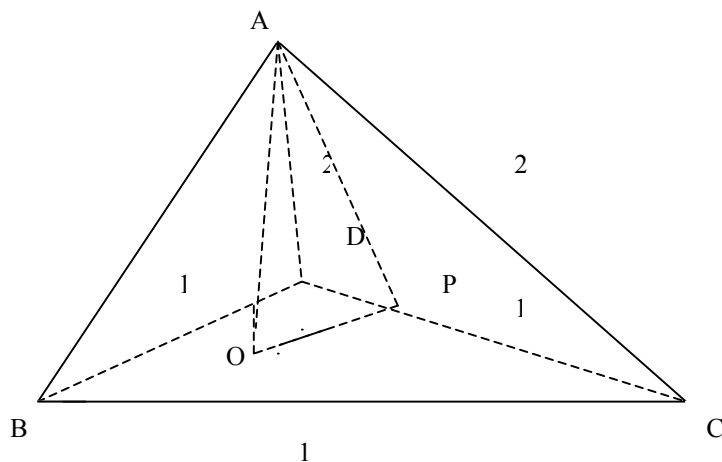
$$M_3 \leq \frac{8S^3}{27abc} \text{ cu egalitate } \Leftrightarrow MM_1 \cdot a = MM_2 \cdot b = MM_3 \cdot c \Leftrightarrow A_{[MBC]} = A_{[MAB]} = A_{[MAC]} \Leftrightarrow M$$

este centrul de greutate al triunghiului ABC.

R5. 4. 7. $M = \{ T \mid T \text{ tetraedru cu trei laturi cu lungimea de } 1 \text{ cm și două de } 2 \text{ cm} \}$.

Calculați $\max v(T)$ unde $v(T)$ este volumul tetraedrului T. $T \square M$.

Rezolvare



Singura posibilitate de construcție, în caz contrar se obțin ca fețe triunghiuri degenerate ($1+1=2$)

Fie (AO) înălțimea corespunzătoare vârfului A.

(AP) înălțime în triunghiul ADC.

$$AO \leq AP = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ (teorema lui Pitagora în triunghiul APC)}$$

$$V[ABCD] \leq \frac{AP \cdot A_{[BCD]}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{8} \text{ cm}^3 \text{ cu egalitate pentru } (ADC) \perp (BCD)$$

Demonstrăm că există un astfel de tetraedru .

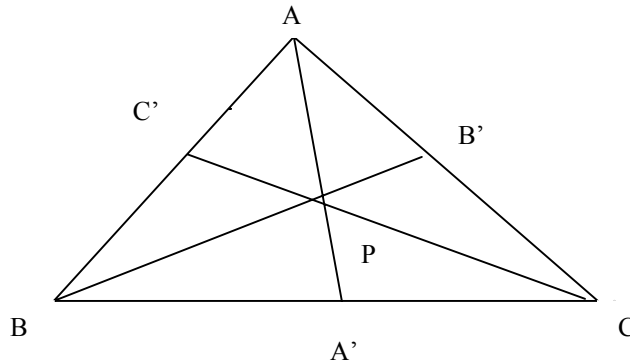
Fie triunghiul BCD echilateral, P mijlocul lui (DC). Luăm $AP \perp (BCD)$, $AP = \frac{\sqrt{15}}{2}$ cm

$$\Rightarrow AD=AC=2 \text{ cm} \Rightarrow \text{există un astfel de tetraedru} \Rightarrow v(T) = \frac{\sqrt{5}}{8}, T \in M$$

R5. 4. 8. a) Descompuneți în factori $abc+ab+ac+bc+a+b+c+1$

b) Fie triunghiul ABC și P un punct în interiorul său. Notăm $\{A'\} = AP \cap BC$, $\{B'\} = BP \cap AC$, $\{C'\} = PC \cap AB$ și $x = PA/PA'$, $y = PB/PB'$, $z = PC/PC'$. Să se demonstreze că $S = xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1$ este minimă \Leftrightarrow P este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Rezolvare



$$a) abc+ab+ac+bc+a+b+c+1=(a+1)(b+1)(c+1)$$

Conform dezvoltării de la punctul a) $S=(x+1)(y+1)(z+1)=$

$$\left(\frac{CA'}{A'B} + \frac{CB'}{B'A} + 1\right)\left(\frac{BA'}{A'C} + \frac{BC'}{C'A} + 1\right)\left(\frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} + 1\right) \geq$$

$$27 \sqrt[3]{\frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{AB'}{B'C}}{27}} = 27$$

$$\left. \begin{array}{l} BC' = AC'' \\ CA' = A'B \\ AB' = B'C \end{array} \right\} \Rightarrow P \text{ este centrul de greutate al triunghiului } ABC$$

(s-a aplicat teorema lui Van Aubel)

R5. 4. 9. Se consideră piramida triunghiulară regulată VABC. Din punctul M interior triunghiului ABC se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului care intersectează planele (VAB), (VBC), (VAC) în M₁, M₂ respectiv M₃.

a) Să se arate că $MM_1 + MM_2 + MM_3 = \text{constant}$.

b) Să se determine punctul M din interiorul triunghiului ABC pentru suma

$$\sqrt{MM_1 \cdot MM_2} + \sqrt{MM_2 \cdot MM_3} + \sqrt{MM_3 \cdot MM_1} \text{ este maximă.}$$

Rezolvare

O este proiecția lui V pe planul (ABC).

$OM \cap BC = \{P\}$, $CM \cap AB = \{R\}$, $OM \cap AC = \{Q\}$. $M_1 \in VP$, $M_2 \in VR$, $M_3 \in VQ$. O_1, O_2, O_3 proiecțiile lui O pe laturile triunghiului ABC. M_1', M_2', M_3' , proiecțiile lui M pe laturile triunghiului.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{MM_1}{VO} = \frac{PM}{PO} = \frac{MM_1'}{OO_1} \\ \frac{MM_2}{VO} = \frac{RM}{RO} = \frac{MM_3'}{OO_3} \\ \frac{MM_3}{VO} = \frac{MQ}{QO} = \frac{MM_2'}{OO_2} \end{array} \right\} \text{ (adunând expresiile) rezultă:}$$

$$\frac{MM_1 + MM_2 + MM_3}{VO} = \frac{MM_1' + MM_2' + MM_3'}{OO'} = \frac{h}{\frac{h}{3}} = 3, \text{ unde } h = \text{înălțimea}$$

triunghiului ABC $\Rightarrow MM_1 + MM_2 + MM_3 = 3VO = \text{constant}$.

S-a folosit: pentru fiecare punct din interiorul unui triunghi echilateral suma distanțelor la laturi este constantă, egală cu înălțimea triunghiului. Analog cazul când $OM \parallel$ cu una din laturi. Demonstrația în acest caz va rămâne pentru cititori .

b) $S \leq MM_1 + MM_2 + MM_3 = \text{const} = 3VO$. Egalitatea pentru

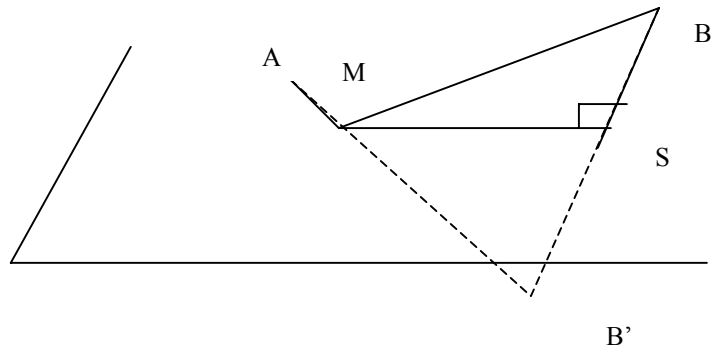
$$VO = MM_1 = MM_2 = MM_3 = \text{const} = 3VO$$

Egalitate pentru $VO = MM_1 = MM_2 = MM_3 \Rightarrow M_1 = M_2 = M_3 = V \Rightarrow O = M$.

R5. 4. 10. a) Fiind date două puncte distincte A , B , de aceeași parte a unui plan α , să se determine punctul M al planului α , pentru care suma $AM + MB$ să fie minimă.

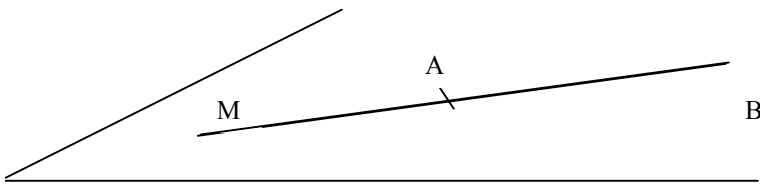
b) În aceleași condiții ca la punctul a) determinați $M \in \alpha$ astfel încât $|MA - MB|$ să fie maximă (AB să fie neparalel cu α).

Rezolvare



B' este simetricul lui B față de α

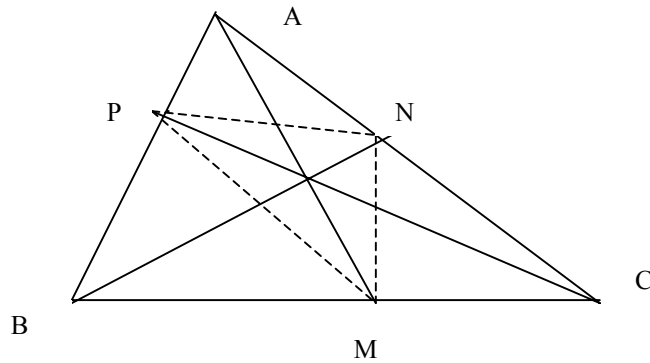
- a) $AM+MB=AM+MB'$ minimă $\Leftrightarrow A, M, B'$ coliniare $\Leftrightarrow M=AB' \cap \alpha$
 b)



$|MA-MB| \leq AB$ cu egalitate $\Leftrightarrow M \in AB-(AB) \Rightarrow M=AB \cap \alpha$

R5. 4. 11. Fie AM, BN, CP trei ceviane concurente ale triunghiului ABC ce are aria S ($M \in (BC), N \in (AC), P \in (AB)$). Știind că $Q \in$ planului $\alpha \parallel$ cu planul (ABC) și situat la distanța h de acesta să se determine volumul maxim al tetraedrului $QMNP$ în funcție de S și h (A. E. Bălăucă)

Rezolvare



$$V[QMNP] = \frac{QQ_0 \cdot A[MNP]}{3} = \frac{h \cdot A[MNP]}{3} \leq \frac{h \cdot S}{3}$$

deoarece valoarea maximă a

ariei i triunghiului MNP se atinge \Leftrightarrow triunghiul MNP este triunghi median.

$$\frac{A[APN]}{A[ABC]} = \frac{AP \cdot AN \sin A}{AB \cdot AC \sin A} = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{p+1} \Leftrightarrow A[APN] = \frac{m}{(p+1)(m+1)} \cdot S \text{ unde}$$

$A[ABC]=S$.

$$A[BMD] = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{m+1} \cdot S, \quad A[CMN] = \frac{p}{p+1} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot S$$

$$A[PMN] = \frac{mnp+1}{(m+1)(n+1)(p+1)} \leq 1/4 \text{ necesar să demonstrăm că } (m+1)(n+1)(p+1) \geq 8$$

$(m+1)(n+1)(p+1) \geq 2\sqrt{m \cdot 1} \cdot 2\sqrt{n \cdot 1} \cdot 2\sqrt{p \cdot 1} = 8$ cu egalitate $\Leftrightarrow m=n=p=1 \Leftrightarrow$ MNP
triunghi median.

Bibliografie

Olimpiadele de matematică 2002- Editura Gil- Titu Andreescu, B. Enescu, A. Jorza, O. Pop.

Olimpiadele balcanice de matematică pentru juniori- D. Brânzei, I. Șerdean, V. Șerdean.

Olimpiadele de matematică 2000- 2001- Editura Gil- T. Andreescu, B. Enescu, M. Lascu, O. Pop.

Olimpiadele de matematică. Concursuri interjudețene- Editura Paralela 45- D. Brânzei, Sorin Ulmeanu, V. Gorgotă, I. Șerdean.

Algebră. Geometrie cls. a VIII-a I. Negrilă, M. Negrilă- Editura Paralela 45- 2002.

Algebră. Geometrie. Olimpiade și concursuri. A. Bălăucă- Editura Taida, Iași, 2002.

6. Poliedre

În cele ce urmează vom prezenta poliedrele regulate împreună cu aplicații reprezentative pentru fiecare. Considerăm definițiile poliedrelor cât și formulele de calcul împreună cu proprietățile lor cunoscute.

Se dorește dezvoltarea abilităților pur geometrice cât și îmbinarea cu tehnici metrice.

Problemele propuse sunt exemplele vii de aplicații întâlnite la diferite etape ale concursurilor școlare.

6.1 Poliedre regulate

Definiție: Se numește poliedru regulat un poliedru convex (nici un plan al unei fețe nu taie corpul), la care fețele sunt poliedre regulate egale.

Cubul, tetraedru regulat sunt poliedre regulate, deci definiția nu este lipsită de conținut.

Observații:

- 1) Unghiurile poliedre ale poliedrului regulat sunt congruente.
- 2) Un poliedru regulat poate fi înscris într-o sferă. Justificare: să considerăm două fețe având muchia comună AB. Perpendicularele pe aceste fețe, duse prin centrele poligoanelor respective sunt concurente în O. Rezultă $OA=OB=OC=OD$, deci O este centrul unei sfere care trece prin A,B,C,D. Parcurgând toate fețele poliedrului din aproape în aproape sfera rămâne aceeași.

Deducem ușor

- 3) Un poliedru regulat poate fi circumscris unei sfere.

Prezentăm fără demonstrație un rezultat important prin consecința sa:

Teorema lui Euler: dacă V, M, F reprezintă respectiv numărul vârfurilor, muchiilor și fețelor unui poliedru convex atunci $V+M-F=2$.

Cosecință: există 5 tipuri de poliedre regulate

Demonstrație: Fie m – numărul muchiilor ce pornesc din același vârf și l – numărul laturilor unei fețe; $m, l \geq 3$. Deducem numărul total al muchiilor care este:

$$M = \frac{1}{2} l \cdot F \text{ sau } M = \frac{1}{2} m \cdot V$$

Exprimând F și V din aceste relații și înlocuind în relația lui Euler $F+V=M+2$ obținem

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{M}$$

Vom cerceta

a) pentru care valori întregi (pozitive), superioare lui 2, date literelor, această relație este satisfăcută

b) dacă la fiecare soluție găsită corepunde efectiv un poliedru cu datele respective

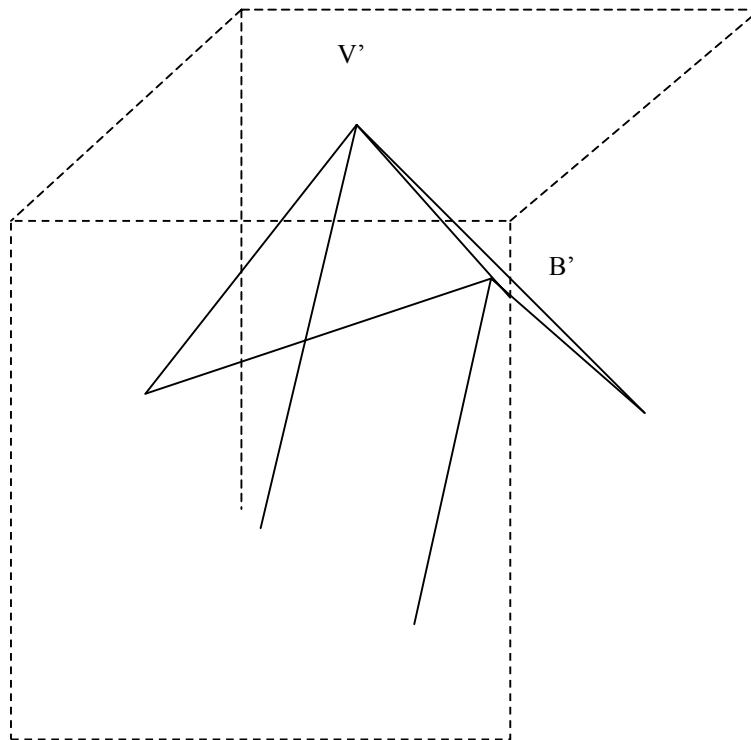
- a) Pentru $l \geq 4, m \geq 4$ obținem $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2}$ deci relația nu este satisfăcută. Rezultă că trebuie să luăm unul din numerele l, m egal cu 3. Pentru $l=3$ și $m \geq 6$, obținem

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \text{ care nu convine. Rămâne să examinăm cazurile } l=3, m=3$$

sau 4 sau 5 și invers $m=3, l=3$ sau 4 sau 5.

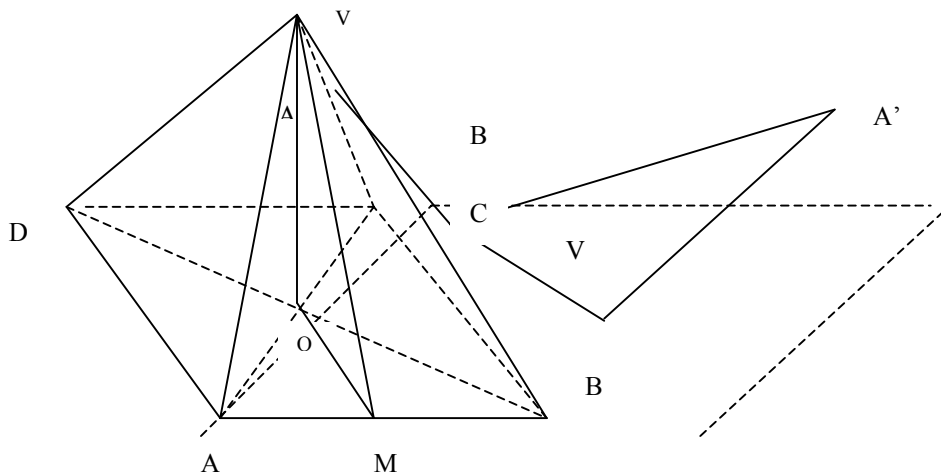
Obținem următoarele 5 soluții:

- 1 $l=3, m=3, M=6$ de unde $F=4, V=4$ caz ce corespunde tetraedrelui regulat.
- 2 $l=3, m=4, M=12$ de unde $F=8, V=8$ caz ce corespunde octaedrului. Reprezentarea octaedrului imediată se poate realiza unind centrele fețelor unui cub.
- 3 $l=3, m=5, M=30$ de unde $F=20, V=12$ caz ce corespunde icosaedrului. Reprezentarea se realizează analog ca octaedru însă pornind de la poliedrul regulat numit dodecaedru de la cazul 5.
- 4 $l=4, m=3, M=12$ de unde $F=6, V=8$ caz corepunzator cubului.
- 5 $l=5, m=3, M=30$ de unde $F=12, V=20$ caz corepunzător dodecaedrului. Fețele laterale sunt pentagoane regulate.



OCTAEDRU

$$\cos \rho = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



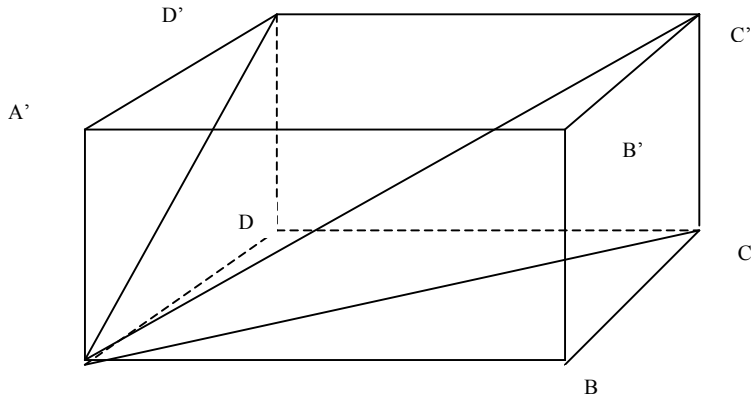
6.2. Prisma

Probleme rezolvate

R62.1 Fie ABCDA'B'C'D' un paralelipiped dreptunghic. Notăm cu α, β, γ unghiurile formate de diagonala [AC'] cu laturile [AB], [AD] și [AA'], iar cu u, v, w unghiurile formate de AC' cu planele (ABCD), (ABB'A') și (ADD'A').

Să se arate că:

- 1) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$
 - 2) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$
 - 3) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma \geq 6$
 - 4) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma} \geq 9$
 - 5) $\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w = 2$
 - 6) $\sin^2 u + \sin^2 v + \sin^2 w = 1$
 - 7) $\operatorname{ctg}^2 u + \operatorname{ctg}^2 v + \operatorname{ctg}^2 w \geq 6$
- notăm $AB=a$; $BC=b$; $CC'=c$;



Soluție:

$$1) \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

$$2) \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 2$$

$$3) \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma = \frac{b^2 + c^2}{a^2} + \frac{a^2 + c^2}{b^2} + \frac{b^2 + a^2}{c^2}$$

$$= \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \right) + \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} \right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

$$4) \frac{b^2 + c^2 + a^2}{a^2} + \frac{b^2 + c^2 + a^2}{b^2} + \frac{b^2 + c^2 + a^2}{c^2} = 3 + \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \right) + \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} \right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$5) \cos^2u + \cos^2v + \cos^2w = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 2$$

$$6) \sin^2u + \sin^2v + \sin^2w = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

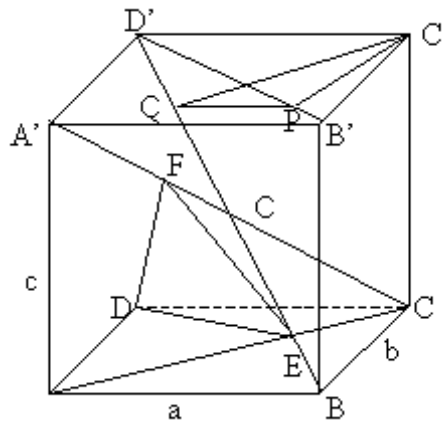
$$7) \quad \operatorname{ctg}^2 u + \operatorname{ctg}^2 v + \operatorname{ctg}^2 w = \frac{b^2 + c^2}{a^2} + \frac{a^2 + c^2}{b^2} + \frac{b^2 + a^2}{c^2} =$$

$$= \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \right) + \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} \right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \right) \geq 2 + 2 + 2 = 6.$$

R6.2.2. În paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' avem AB=a, BC=b, AA'=c. notăm cu E și F proiecțiile punctului D pe AC, respectiv, pe A'C și cu P și Q proiecțiile punctului C' pe B'D', respective pe BD'. Arătați că planele (DEF) și (C'PQ) sunt perpendiculare dacă și numai dacă $b^2 = a^2 + c^2$.

(Subiect unic- județeană 2001)

Soluție: Fie $A'C \cap BD' = \{O\}$. Avem $A'C \perp (DEF)$ și $BD' \perp (C'PQ) \Leftrightarrow A'C \perp BD'$ de unde ΔBOC este dreptunghic. De aici $b^2 = a^2 + c^2$ și reciproc.



R6.2.3. Fie ABCDA'B'C'D' paralelipiped dreptunghic. Fie G mijlocul segmentului (AB') și $\{E\} = A'C \cap (AB'D')$. Dacă $EG \perp AB'$ arătați că ABCDA'B'C'D' este cub.

(Etapa finală ARAD-1994)

Soluție: Fie $\{O\} = A'C' \cap B'D'$ și AB=a, BC=b, CC'=c. Rezultă imediat că $\{E\} = AO \cap AC'$. În triunghiul ADB', AO și D'G sunt mediane deci E este centrul de greutate al triunghiului AD'B'. Dar $EG \perp AB'$, deci $\Delta AB'D'$ este isoscel cu $(AD') = (BD')$ de unde rezultă că $\sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ echivalent cu $a = c$ și cu ABB'A' pătrat. De aici, $AB' \perp A'B$, dar $AB' \perp BC$ deci $AB' \perp (A'BC)$ și cum $GE \perp A'C$ iar $A'C, EGC$

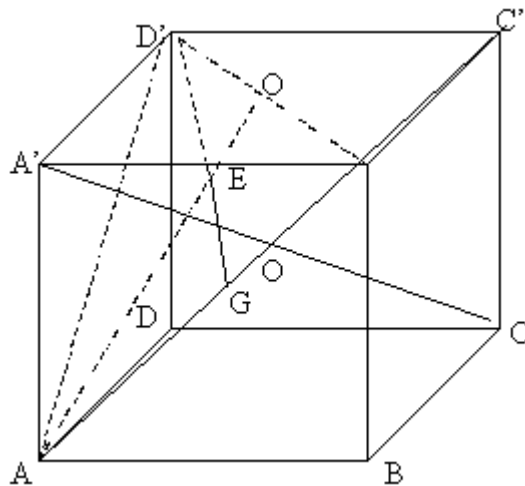
(A'BC) din T3 \perp avem că $AE \perp A'C$ de unde $A'E = \frac{AA'^2}{A'C} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ și

$$EC = \frac{AC^2}{A'C} = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \textcircled{1}$$

Dar $A'O \parallel AC$ implică $\Delta A'EO \sim \Delta CEA$ echivalent cu $\frac{OA'}{AC} = \frac{A'E}{EC} = \frac{1}{2}$ $\textcircled{2}$.

Din $\textcircled{1}$ și $\textcircled{2}$ rezultă că $\frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{2}$ de unde $a^2 + b^2 = 2c^2$ și cum $a = c$ avem că

$b = c$, deci ABCDA'B'C'D' – cub.



R6.2.4. Fie N, P centrele fețelor $ABB'A'$ respectiv $ADD'A'$ ale unui paralelipiped dreptunghic ABCDA'B'C'D' și $M \in (A'C)$, astfel încât $A'M = 1/3$ din $A'C$. să se demonstreze că $MN \perp AB'$ și $MP \perp AD'$, dacă și numai dacă paralelipipedul este cub.

(Etapa națională, 1996)

Soluție: Fie $AO' \cap A'C = \{G\}$, unde O' este centrul feței $A'B'C'D'$. Deducem că $\Delta A'GO' \sim \Delta CGA$ de unde rezultă $A'G = 1/2$ din GC rezultă că $G = M$, deci $M \in (AO')$. Analog se arată că $MO' = 1/3$ din AO' . Deci M este centrul de greutate al $\Delta AB'D'$.

Dacă $MN \perp AB'$ și $MP \perp AD'$, atunci medianele $[D'N]$ și $[B'P]$ sunt înălțimi în $\Delta AB'D'$, rezultă $\Delta AB'D'$ este echilateral. $\Delta AA'B' \equiv \Delta \equiv \Delta D'A'A'$ (C.I.) rezultă $AA' = A'B' = A'D'$.

R6.2.5. Fie cubul ABCDA'B'C'D' cu muchia de lungime a. Se consideră punctele $K \in [AB]$, $L \in [CC']$, $M \in [D'A']$.

a). arătați că $\sqrt{3} \cdot KL \geq KB + BC + CL$.

b). Arătați că perimetrul triunghiului KLM este mai mare strict decât $2a\sqrt{3}$.
(Etapa județeană, 2002)

Soluție:

a) Avem $KL^2 = LC^2 + CK^2 = LC^2 + CB^2 + BK^2$.

Cum $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$, rezultă

$3KL = 3(KB^2 + BC^2 + CL^2) \geq (KB + BC + CL)^2$, adică $\sqrt{3} KL \geq KB + BC + CL$.

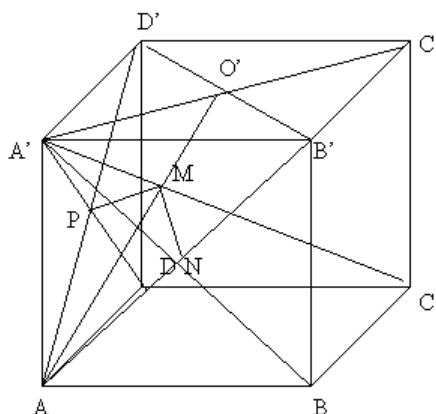
b). Se obțin inegalitățile: $\sqrt{3} ML \geq LC' + C'D' + D'M$,
 $\sqrt{3} MK \geq MA' + A'A + AK$. Prin însumarea lor cu inegalitatea demonstrată la punctul a) obținem:

$\sqrt{3} (KL + LM + MK) \geq (KB + AK) + (CL + LC') + (D'M + MA') + BC + C'D' + A'A = 6a$ de

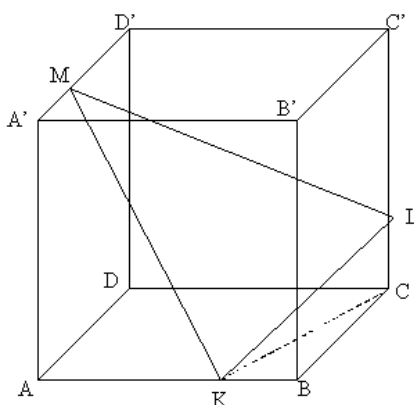
unde $KL + LM + MK \geq \frac{6a}{\sqrt{3}} = 2a\sqrt{3}$.

Egalitatea nu poate avea loc. Justificarea se face prin reducere la absurd. În caz contrar k de exemplu ar fi în B simultan cu A.

Desen pr.6.2.4.



Desen R6.2.5.



6.3. Piramida

6.3.1. Tetraedrul

Definiție: Se numește tetraedru echifacial un tetraedru ale cărei fețe au aceeași arie.

Să demonstrăm împreună proprietățile (caracterizările) :

P1: un tetraedru este echifacial dacă și numai dacă cele patru înălțimi ale sale sunt congruente.

P2: Într-un tetraedru echifacial muchiile opuse sunt egale, iar bimedianele sunt perpendicularele comune a două muchii opuse.

P3: Cele patru mediane sunt egale.

P4: Suma distanțelor la fețele tetraedrului de la orice punct interior este constantă.

P5: Toate triunghiurile sunt ascuțitunghice.

P6: pentru tetraedrul SABC echifacial cu $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ volumul este $\frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2 - c^2)}$

P7: Centrul de greutate coincide cu centrul sferei circumscrise.

P8: Unghiurile diedre opuse sunt congruente.

P9: Suma unghiurilor plane de la același vârf este aceeași.

P10: Desfășurarea tetraedrului se face după un triunghi asemenea cu cel al unei fețe.

P11: Centrul sferei înscrise coincide cu centrul sferei circumscrise.

Observație: Se știe că tetraedrul este corespondentul triunghiului în spațiul cu trei dimensiuni. Dintre toate tetraedrele singurul care permite evidențierea unei multitudini de relații între elementele sale, urmărind cu fidelitate relațiile din geometria triunghiului este tetraedrul echifacial.

Probleme rezolvate

R6.3.1.1. Într-un tetraedru echifacial simetricul piciorului fiecărei înălțimi, față de centrul cercului circumscris feței în care se găsește, este ortocentrul acestei fețe.

R6.3.1.2. Două tetraedre echifaciale ABCD și A'B'C'D' sunt înscrise în două sfere concentrice. Fie P un punct al sferei circumscrise tetraedrului ABCD, iar P' un punct al sferei circumscrise tetraedrului A'B'C'D'. Să se arate că are loc relația:
 $PA'^2 + PB'^2 + PC'^2 + PD'^2 = P'A^2 + P'B^2 + P'C^2 + P'D^2$.

R6.3.1.3 drepte suport ale medianelor tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ intersectează a doua oară sfera circumscrisă tetraedrului în punctele B_i , $i=1,4$.

Indicații:

p1) Exprimăm volumul în patru moduri

p2) Înălțimile corespunzătoare aceleiași muchii sunt congruente. Bimediana este perpendiculara comună a muchiiilor opuse corespunzătoare, deci congruente

p3) Folosind p2 și aplicând teorema medianei în spațiu obținem că medianele au aceeași lungime $\frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

p4) Descompunem tetraedrul în patru tetraedre de baze echivalente și scriem volumul în două moduri

p5) Presupunem contrariul. În cazul $u^\circ > 90^\circ$ desfășurăm tetraedrul și reconstituim tetraedrul urmărind suprapunerea fețelor iar în cazul $u^\circ = 90^\circ$ tetraedrul degenerază într-un triunghi

p6) Se duc paralele prin A la BC, prin B la AC și prin C la AB, obținând un tetraedru tridreptunghic cu volumul de patru ori mai mare decât ABCD

p7) Distanțele de la vârfuri la centrul de greutate sunt egale cu $\frac{3}{4}$ din mediană

adică $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$ deci G este centrul sferei circumscrise

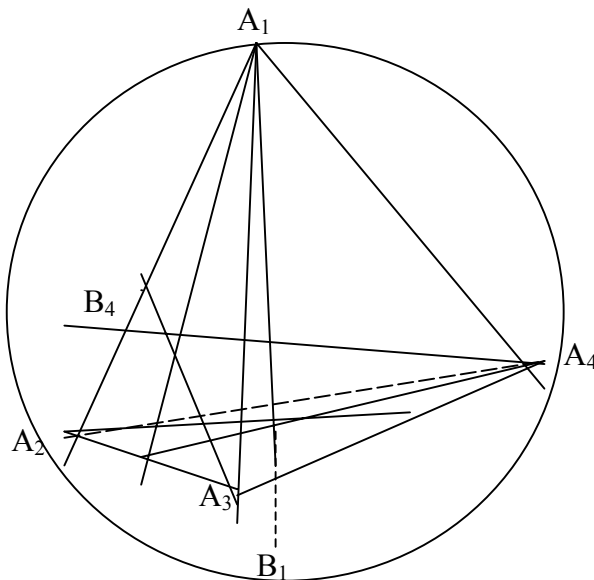
p8) Se pun în evidență două triunghiuri dreptunghice congruente cu catete înălțimi din vârfuri opuse

p9) Fețele sunt triunghiuri congruente. Se arată că suma este 180°

p10) Desfășurarea în planul unei baze va fi un triunghi pentru care triunghiul bază va fi triunghiul median

p11) Deoarece fețele sunt triunghiuri congruente ele sunt înscrise în cercuri congruente din sfera circumscrisă. Însă distanța de la centrul sferei la cercuri mici congruente este aceeași, deci centrul sferei circumscrise va coincide cu centrul sferei închise.

R6.3.1.3.



Soluție:

$$a) \quad GA_1 \cdot GB_1 = GA_2 \cdot GB_2 = GA_3 \cdot GB_3 = -\delta(G) = R^2 - OG^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}$$

$$= \frac{1}{3} (GA_1^2 + GA_2^2 + GA_3^2)$$

Puterea lui G fata de sfera circumscrisă tetraedrului.

Aplicăm inegalitatea lui Cebâșev

$$3(GA_1 + GA_2 + GA_3) \leq (GA_1^2 + GA_2^2 + GA_3^2) \left(\frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GA_2} + \frac{1}{GA_3} \right) = 3(GB_1 + GB_2 + GB_3)$$

În inegalitate are loc egalitatea doar dacă $GA_1 = GA_2 = GA_3$ echivalent cu $G=0$ deci tetraedru va fi echifacial.

$$b) \quad GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3 \cdot GB_1 \cdot GB_2 \cdot GB_3 \leq GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3$$

$$GA_1^2 \cdot GA_2^2 \cdot GA_3^2 \leq (GA_1 \cdot GB_1) (GA_2 \cdot GB_2) (GA_3 \cdot GB_3) \text{ sau}$$

$$[2(a_2^2 + a_3^2) - a_1^2] \cdot [2(a_1^2 + a_3^2) - a_2^2] \cdot [2(a_1^2 + a_2^2) - a_3^2] \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2$$

Aplicând inegalitatea mediilor, avem că:

$$\sqrt[3]{[2(a_2^2 + a_3^2) - a_1^2][2(a_1^2 + a_3^2) - a_2^2][2(a_1^2 + a_2^2) - a_3^2]} \leq$$

$$\frac{[2(a_2^2 + a_3^2) - a_1^2] + [2(a_1^2 + a_3^2) - a_2^2] + [2(a_1^2 + a_2^2) - a_3^2]}{3}$$

Se verifică din nou cazul de egalitate echivalent cu $G=0$.

R6.3.1.4 Se desfășoară tetraedrul obținându-se perimetrul suma a trei laturi într-un patrulater mai mare strict decât a patra latură de lungime $2 \cdot BC$.

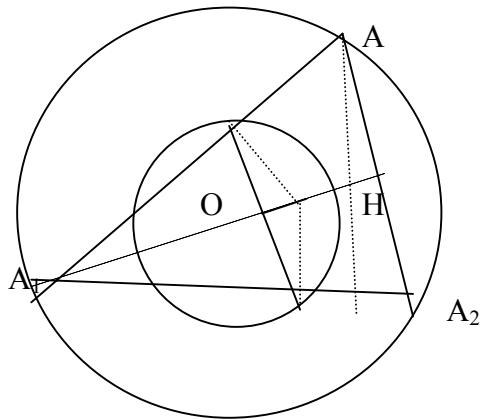
R6.3.1.2 Deoarece tetraedrele sunt echifaciale cu sfere circumscrise concentrice avem $G=G'=O=O'$ și notând razele celor două cercuri cu R și R' aplicăm relațiile lui Leibniz obținând

$$P'A^2 + P'B^2 + P'C^2 = 3P'O^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3(R^2 + R'^2)$$

analog $PA'^2 + PB'^2 + PC'^2 = 3(R^2 + R'^2)$ etc.

R6.3.1.1 Enunț: Fie ABCD un tetraedru echifacial. Notăm cu A' proiecția punctului A pe planul (BCD). Demonstrați că H este simetricul ortocentrului triunghiului BCD față de centrul cercului circumscris ΔBCD .

Soluție: Desfășurăm tetraedrul în planul (BCD). Ortocentrul ΔBCD este centrul cercului circumscris ΔAA_1A_2 Proiecția lui A pe planul (BCD) coincide cu ortocentrul ΔAA_1A_2 . Centrul cercului circumscris ΔBCD este centrul cercului lui Euler asociat ΔAA_1A_2 Se cunoaște că centrul w este mijlocul segmentului OH.



Unghiul a două muchii opuse într-un tetraedru

R6.3.4. Se consideră ABCD un tetraedru și δ unghiul format de dreptele AC și BD.

Să se arate că are loc relația:

$$2 AC \cdot BD |\cos \delta| = |AD^2 + BC^2 - AB^2 -$$

CD^2|

Soluție: R6.3.4.

Se consideră punctul $E \in (ABC)$ astfel încât ACBE paralelogram și

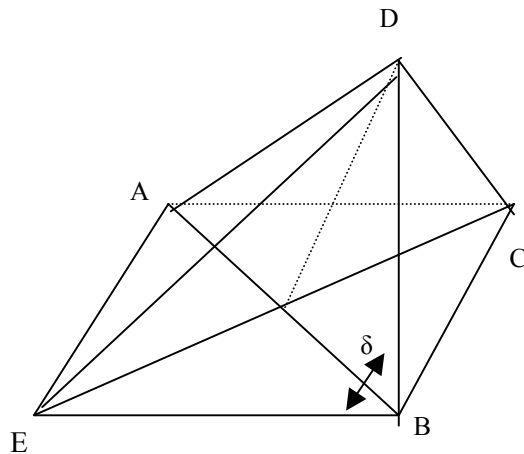
$AB \cap EC = \{O\}$. În $\triangle DEC$ și $\triangle DAB$ se aplică teorema medianei pentru DO și se egalează.

Rezultă $DE^2 = AD^2 + BD^2 + BC^2 + AC^2 - AB^2 - CD^2$

Teorema cosinusului aplicată în $\triangle DBE$ combinată cu

Expresia lui DE^2 dau relația dorită:

$$\cos \delta = \frac{BD^2 + EB^2 - ED^2}{2BD \cdot EB}$$



$$2BD \cdot AC \cos \delta = BD^2 + AC^2 - AD^2 - BD^2 - BD^2 - AC^2 + AB^2 + CD^2$$

$$2BD \cdot AC \cos \delta = AB^2 + CD^2 - AD^2 - BC^2$$

Definiție:

Se numește tetraedru ortocentric un tetraedru în care muchiile opuse sunt perpendiculare

Exemplu de tetraedru ortocentric: secțiunea determinată de un plan într-un triedru tridreptunghic este baza unui tetraedru ortocentric.

Proprietăți și caracterizări ale tetraedrului ortocentric

P1. ABCD tetraedru ortocentric dacă și numai dacă:

(1) $AB \perp CD$; $AC \perp BD$; (este suficient numai două perechi de muchii să fie perpendiculare)

(2) $AB^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$;

(3) $[MN] \equiv [PQ] \equiv [RS]$ unde M,N,P,Q,R,S mijloacele muchiilor $[AB],[CD],[BC],[AD],[AC],[BD]$;

(4) $DA \cdot BD \cdot \cos(ADB) = DB \cdot DC \cdot \cos(BCD) = DC \cdot DA \cdot \cos(CDA)$

(5) proiecția unui vârf pe fața oopusă coincide cu ortocentrul acelei fețe.

P2. Se numește biînălțime a unui tetraedru perpendiculara comună a două muchii opuse. Demonstrați că biînălțimile într-un tetraedru ortocentric sunt concurente în ortocentrul tetraedrului.

P3 Bimedianele unui tetraedru ortocentric sunt congruente.

P4 Mijloacele muchiilor unui tetraedru ortocentric se găsesc pe o sferă cu centrul G și raza $\frac{1}{4} \sqrt{AB^2 + CD^2}$ numită sfera lui Vogt a tetraedrului ortocentric.

P5 Într-un tetraedru ortocentric ortocentrul, centrul de greutate și centrul sferei circumscrise tetraedrului sunt coliniare.

P6 Într-un tetraedru ortocentric centrul de greutate al tetraedrului se proiectează în centrele cercurilor lui Euler ale fețelor.

P1(1) Se arată că $BC \perp (AA_1D)$ unde $A_1 = \text{pr}_{(BCD)}A$

(2) Se consideră M,P,N,Q,R,S mijloacele muchiilor $[AB],[BC],[CD],[DA],[AC],[BD]$ respectiv MPNQ dreptunghi. Din egalitatea diagonalelor rezultă $MP^2 + PN^2 = RQ^2 + QS^2$ și folosind apoi proprietatea liniei mijlocii rezultă concluzia. De aici rezultă și P3 și (3).

(4) Aplicăm teorema cosinusului și folosim (2).

(5) Din demonstrația (1).

P2 Este suficient să se demonstreze că două câte două înălțimile sunt concurente.

De exemplu AA_1 și BB_1 ; $CD \perp (AA_1B)$. Dar $(AA_1B) \cap (BB_1A) = AB$ deci au dreaptă comună.

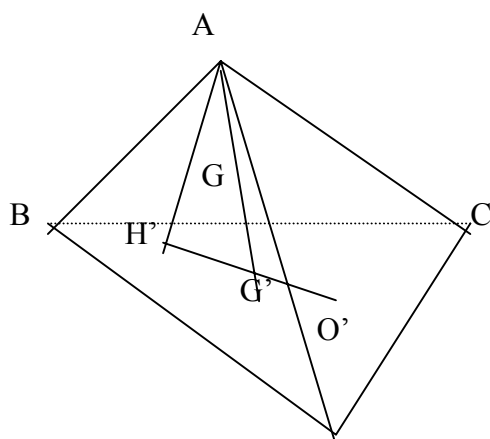
Din unicitatea planului perpendicular pe o dreaptă dată într-un punct rezultă că $(AA_1B) = (BB_1A)$, deci AA_1 și BB_1 sunt concurente.

P5 H,G,O se află în planul perpendicular pe fața (BCD) după dreapta lui Euler a ΔBCD și analog se află în planul perpendicular pe fața (ABC) după dreapta lui Euler a ΔABC

P4 Din configurația de la P1 și P2.

P6 Fie tetraedrul $[ABCD]$, și H', G', O' ortocentrul, centrul de greutate și centrul cercului circumscris al ΔBCD , $[H'G'] = \frac{2}{3} H'O'$, mediana AG' a tetraedrului, $G \in [AG']$ centrul de greutate al tetraedrului ($AG' = 4GG'$) și fie G'' proiecția lui G pe planul (BCD). Evident $G'' \in [H'O']$. Se va demonstra că G'' mijlocul segmentului $[H'O']$, deci este centrul cercului lui Euler al feței (BCD).

$\Delta AH'G' \sim \Delta GG''G'$ avem $G'G''/G'H' = G'H/G'A = \frac{1}{4}$ de unde $\frac{H'G' - HG''}{G'H'} = \frac{1}{4}$ Se obține $(\frac{2}{3}H'O' - H'G'')/(\frac{2}{3}H'O') = 1/4$ și apoi $H'G'' = 1/2H'O'$.



Observație:

Un alt caz particular de tetraedru ortocentric este trapezul tridreptunghic verificând proprietăți speciale.

Definiție: Un tetraedru ortocentric se numește tridreptunghic dacă ortocentrul coincide cu un vârf al tetraedrului.

Proprietăți:

1) OABC un tetraedru tridreptunghic cu ortocentrul O. Atunci $A_{[ABC]}^2 = A_{[ABO]}^2 + A_{[BCO]}^2 + A_{[ACO]}^2$

$$2) \frac{1}{[d(O; ABC)]^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

Soluții: 1) Notăm muchiile tetraedrului cu a,b,c și exprimăm fiecare arie;

2) Dem. că $OH \perp (ABC)$, H ortocentrul triunghiului ABC

R6.1.5. Din mijlocul înălțimii piramidei triunghiulare regulate se duc perpendiculare pe o muchie laterală și pe o față laterală de lungime p respectiv q. Determinați volumul piramidei.

R6.1.6. Să se arate că tetraedrul în care înălțimile sunt congruente iar una dintre ele trece prin ortocentrul feței opuse este regulat.

R6.1.6. Baza unei piramide patrulateră cu vârful în S este paralelogramul ABCD. Arătați că:

a) $ABCD$ dreptunghi $\Leftrightarrow SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2$

b) Dacă muchiile laterale formează unghiuri egale cu o semidreaptă SO situată în interiorul unghiului triedru SABCD atunci $SA + SC = SB + SD$.

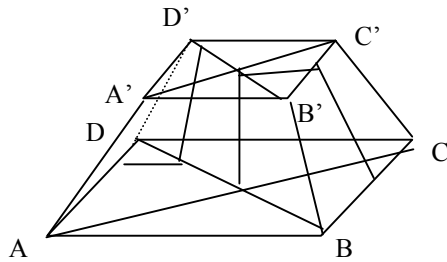
Soluție:

R6.1.6. Fie ABCD tetraedrul, H ortocentrul bazei (BCD) $\{E\} = BH \cap CD$, $B_1 = \text{pr}_{AE} B$ rezultă $BB_1 \perp (ACD)$ iar volumul tetraedrului $S_{BCD} \cdot AH / 3 = 1/6 CD \cdot BE \cdot AH = 1/3 S_{ACD} B_1 B = 1/6 CD \cdot AE \cdot BB_1 \Rightarrow [BE] = [AE]$. $\triangle BCE \cong \triangle ACE \cong \triangle BDE \cong \triangle ADE \Rightarrow BC = AC$ și $BD = AD$ analog pentru înălțimile din A și C și A și D

R6.1.7a) Dacă O' este intersecția diagonalelor se aplică teorema medianei în $\triangle SAC$ și $\triangle SBD$.

b) Dacă muchiile laterale fac unghiuri egale cu SO, atunci se ia un plan perpendicular pe SO, care taie muchiile laterale în A_1, B_1, C_1, D_1 când avem $SA_1 = SB_1 = SC_1 = SD_1$. Are loc egalitatea volumelor:

$V_{SB_1C_1D_1} + V_{SA_1B_1C_1} = V_{SA_1C_1B_1} + V_{SA_1D_1C_1}$, unde
 $V_{SB_1C_1D_1} = SB_1 \cdot SC_1 \cdot SD_1 / SB \cdot SC \cdot SD$ $V_{SBCD} = 1/3h(SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1 \cdot SD_1 / SA \cdot SB \cdot SC \cdot SD)$
 $\cdot SA / SA_1 \cdot S_{BCD}$, unde h este înălțimea piramidei $SABCD$. Se explicitează analog și celelalte volume și cum $S_{BCD} = S_{ABD} = S_{ABC} = S_{ADC}$ rezultă că $SA + SC = SB + SD$.



R6.1.5 Soluție: Utilizând teorema a II-a a înălțimii în ΔVON respective ΔVOC obținem

$$h = \frac{a\sqrt{p^2 - q^2}}{\sqrt{(4q^2 - p^2) \cdot 3}}$$

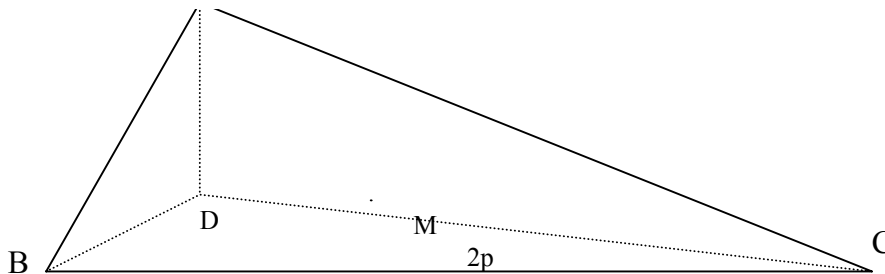
cu a lungimea laturii bazei.

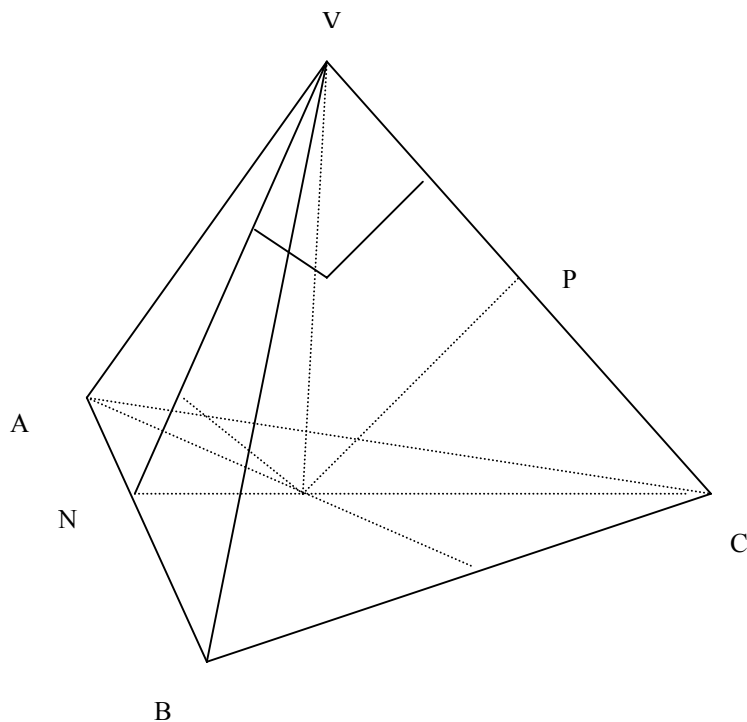
Scriind în două moduri aria ΔVNC obținem $a = \frac{4pq}{\sqrt{p^2 - q^2}}$

$$V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12} \cdot \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4q^2 - p^2}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{64p^3 q^3}{(p^2 - q^2)\sqrt{p^2 - q^2}} \cdot \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4q^2 - p^2}}$$

Descompunerea ariei se face astfel.

$$A_{[VNC]} - A_{[MNC]} = A_{[MNV]} + A_{[VMC]}$$





6.4. Trunchiul de piramidă

Probleme rezolvate

R6.4.1. Muchiile laterale ale unui trunchi de piramidă patrulateră regulată face cu planul bazei un unghi α cu $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Să se arate că fețele laterale opuse sunt perpendiculare.

R6.4.2. Muchia laterală a unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată face cu planul bazei un unghi α . Determinați volumul trunchiului dacă laturile bazelor sunt a, b ($a > 0$).

Soluții: R6.4.1. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ echivalent cu $\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, unde x lungimea proiecției muchiei laterale pe planul bazei. Această proiecție este ipotenuză în triunghiul dreptunghic isoscel format cu muchia bazei mari. Deci $\sqrt{2} y = x$. Notând cu δ unghiul feței laterale cu planul bazei obținem $\operatorname{tg} \delta = 1$ deci $\delta = 45^\circ$.

R6.4.2. Obținem $h = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha$

Bibliografie

- [1] *Manual pentru clasa a X-a* – M1- MIRCEA GANGA, Editura MathPress, Ploiești, 2000
- [2] *Olimpiade și concursuri* – ARTUR BĂLĂUCĂ, Editura Taida, Iași 2002
- [3] *600 de probleme* – CRISTINEL MORTICI, Editura GIL-Zalău, 2001
- [4] *Și TU poți învăța geometria* – IOAN DANCILĂ, Editura Teora, 1993
- [5] *Analogii Triunghi-Tetraedru* – MIHAI MICULITA, DAN BRÂNZEI, Editura Paralela 45, 2000
- [6] *Probleme de geometrie* – GHEORGHE TITEICA, Editura Tehnică, 1974.
- [7] *Matematica în examene și concursuri* – coord. DUMITRU VÂLCAN, Editura OPTILGRAPHIC, Craiova 2002.

7. Corpuri rotunde

Rezumat: În aceasta temă ne propunem ca elevii capabili de performanță să-și antreneze raționamentul în contextul unor aplicații vizuale geometrice, și generalizarea unor situații întâlnite.

În multe din lista de aplicații propuse numerele sunt înlocuite cu litere pentru a stimula familiarizarea elevului cu contextual general, dezvoltându-i o perspectivă globală asupra corpurilor rotunde.

Nu lipsesc și probleme în care solide plane se rotesc în jurul unor axe alese concret!

7.1. Cilindrul

Probleme rezolvate

R7.1.1. Dintr-o bară de oțel sub forma unui cilindru se strunjește o sferă cu raza c .

Dacă raza cilindrului este a și înălțimea este $2a$ și $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$. Să se afle ce procent din oțel se pierde prin prelucrare.

(G.M.S!1994 Eugen Spachu)

Soluție: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$; $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3}$; deci $a=b=c$. Volumul

cilindrului este $2\pi a^3$ și volumul sferei $\frac{4\pi a^3}{3}$. Prin prelucrare se pierde 33,(3)% din volumul cilindrului.

R7.1.2. Planul ce trece prin centrul bazei inferioare a unui cilindru face cu planul bazei unghiul α și intersectează baza superioară tăind o coardă de lungime b și care

subîntinde un arc de mărime β . Se cere volumul cilindrului.

Soluție: Exprimăm R în funcție de $\beta/2$ și $b/2$ în $\Delta O_1 M B$ dreptunghic în M obținând $R = \frac{b}{2} \cdot \frac{\beta}{2}$

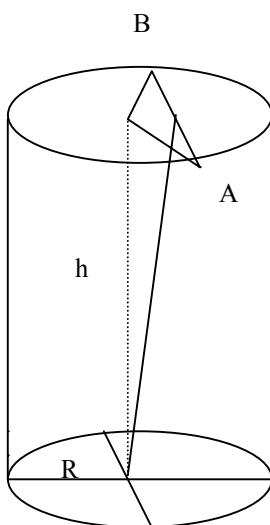
În $\Delta O_1 O_2 M$ dreptunghic în O_1 și cu $m(\angle O_1 M O_2) = \alpha$

(planele bazelor sunt paralele) exprimăm înălțimea

$$h = O_1 O_2 \quad h = O_1 M \operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{Însă } O_1 M = R \cdot \cos \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}$$

$$\text{Așadar. } h = \frac{b}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$



$$\begin{aligned} \text{Volumul cilindrului este: } V_c &= \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{b^2}{4} \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot \frac{b}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ &= \pi \cdot \frac{b^3}{8} \cdot \sin^3 \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha . \end{aligned}$$

Soluție:

a) Înălțimea după k operații

$$\text{este } 7 + \frac{7}{2} + \frac{7}{2^2} + \dots + \frac{7}{2^k} = 7 \left(2 - \frac{1}{2^k} \right) = 14 - \frac{7}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}^* !$$

b) Volumul coloanei este $\pi \cdot 4 \cdot 7 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{3k}} \right) = \pi \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{2^{3k+3} - 1}{7 \cdot 2^{3k}}$ de unde

$$\frac{2^{33} - 1}{2^{28}} = \frac{2^{3k+3} - 1}{2^{3k-2}} \quad \text{cu } k=10.$$

R.7.1.3. Înălțimea unui cilindru este 16, raza bazei este 10. Capetele unui segment de 20 se află pe circumferințele celor două baze. Să se determine distanța de la acest segment la axa cilindrului.

Soluții: PR.7.1.3. Determinarea perpendicularei comune:

Ducem AA' -generatoarea din A

Fie $O_2M \perp A'B$, evident M mijlocul coardei $A'B$

Deoarece $AA' \perp (A'BO_2)$, $AA' \perp O_2M$ cu $O_2M \perp A'B$

rezultă că $O_2M \perp (ABA')$, deci inclusive pe AB. Intersecția planului (O_1O_2M)

cu $(AA'B)$ este MN cu $N \in AB$ (mijlocul lui AB). Ducem $NP \parallel MO_2$ și deducem că

$PN \perp O_1O_2$ ($PN \parallel O_2M$) și $PN \perp AB$ ($O_2M \perp AB$). Deci NP este perpendiculară comună. Calculul distanței:

$O_2M \equiv PN$ vom calcula O_2M

În $\triangle AA'B$ dreptunghic în A' avem $A'B = \sqrt{400 - 256} = 12$

În $\triangle O_2MA'$ dreptunghic în M avem $O_2M = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$.

PR.7.1.4. O suprafață dreptunghiulară de dimensiuni a și b se rotește o dată în jurul laturii de lungime a și apoi în jurul celei de lungime b. Se cere:

- 1) raportul ariilor laterale ale corpurilor obținute;
- 2) raportul ariilor totale ale corpurilor obținute;

Soluție PR. 7.1.4.

Notând:

$$R_1 = a; h_1 = b \quad \text{avem } R_2 = b \quad h_2 = a$$

$$A_{l1} = 2\pi R_1 h_1 = 2\pi ab$$

$$A_{l2} = 2\pi R_2 h_2 = 2\pi ab$$

$$A_{t1} = 2\pi ab + 2\pi a^2$$

$$A_{t2} = 2\pi ab + 2\pi b^2$$

$$a) \frac{A_{l1}}{A_{l2}} = \frac{2\pi ab}{2\pi ab} = 1;$$

$$b) \frac{A_{t1}}{A_{t2}} = \frac{2\pi ab + 2\pi a^2}{2\pi ab + 2\pi b^2} = \frac{2\pi a(a+b)}{2\pi b(a+b)} = \frac{a}{b};$$

7.2. Conul

7.2.1. Aria totală a unui con este S , iar unghiul de la vârful secțiunii axiale α . Să se determine volumul conului. (cazuri particulare $\alpha=90^\circ, \alpha=30^\circ$)

Soluție:

(1) $S = \pi R(R + G)$. În ΔVOB dreptunghic în O și cu $m(\angle OVB) = \frac{\alpha}{2}$, obținem

$$G = \frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \text{Înlocuind în (1) } \pi R \left(R + \frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right) = S \text{ obținem } R^2 = \frac{S \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi (\sin \frac{\alpha}{2} + 1)}$$

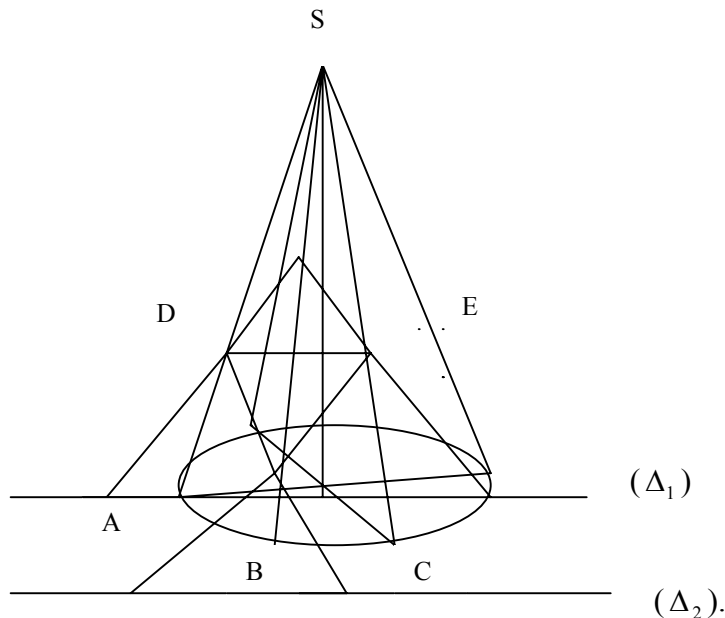
În același triunghi $VO = h = R \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Așadar volumul:

$$\begin{aligned} V &= \pi R^2 \cdot h / 3 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{S \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi (\sin \frac{\alpha}{2} + 1)} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi (\sin \frac{\alpha}{2} + 1)}} \\ &= \frac{S \sqrt{S} \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}}}{3 (\sin \frac{\alpha}{2} + 1) \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2} + 1}}. \end{aligned}$$

7.2.2. Se consideră un con circular drept cu vârful S , bază cercul (C') și punctele $A, B, C \in (C')$, $D \in [SA]$, $E \in [SC]$, $M_1, M_2 \in [SB]$. Știind că $[BM_1] \parallel [AD] \parallel [CE] \parallel [BM_2]$ și notând cu (Δ_1) , respectiv (Δ_2) intersecțiile planelor (M_1DE) și (M_2DE) cu planul bazei conului să se arate că (Δ_1) este paralelă cu (Δ_2) .

(G.M.5!1981, Ion Voicu)

Soluție: Se arată că $DE \parallel AC, AC \subset \alpha, (M_1DE) \cap \alpha = (\Delta_1) \quad (M_2DE) \cap \alpha = (\Delta_2)$
 rezultă că avem $(\Delta_1) \parallel DE, (\Delta_2) \parallel DE$ și din tranzitivitate rezultă $(\Delta_1) \parallel (\Delta_2)$.



7.2.3 Se consideră conul circular drept având raza de 4 cm. Determinați aria laterală și volumul conului știind că acesta are 2 generatoare care formează un unghi de 30° și că ele împart suprafața laterală a conului în 2 părți având raportul ariilor egal cu $1/5$.

(Artur Bălăucă)

Soluție: Fie generatoarele VM și VN care împart suprafața laterală în două părți astfel încât $S_{VAMN} / S_{VBMN} = 1/5$, de unde rezultă că $m(\angle MBN) = 5 \cdot m(\angle MAN)$, deci $m(\angle MAN) = 60^\circ$ și $MN = l_4 = R = 4$ cm. Aplicând teorema cosinusului în ΔVMN avem: $MN^2 = VN^2 + VM^2 - 2VN \cdot VM \cdot \cos 30^\circ$ obținem $VN = 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Din ΔVMO dreptunghic rezultă că $VO = 4\sqrt{\sqrt{3} + 1}$. deci $S_1 = \pi R G = 16\sqrt{2 + \sqrt{3}} \pi \text{ cm}^2$ și $V = \frac{1}{3} \cdot 64\sqrt{\sqrt{3} + 1} \pi \text{ cm}^3$.

7.2.4. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), se duce $MN \parallel AC, M \in (AB), N \in (BC)$. Știind că $AM = x - 2, AB = 5x - 10, BC = 4x + 12, NC = x$ cm, se cere:

- a) Perimetrul, aria și unghiurile triunghiului ABC
 b) Volumul și aria corpului obținut prin rotirea triunghiului în jurul dreptei CC' , perpendiculară pe BC.

(G.M.3!1980)

Soluție: a) $\triangle BAC \approx \triangle BMN$. Se obține

$x = 12, AB = AC = 50 \text{ cm}, BC = 60 \text{ cm}, P = 160 \text{ cm}, A = 1200 \text{ cm}^2, h = 40 \text{ cm}$ etc.

b) Volumul este egal cu $\frac{\pi h}{2} \cdot BC^2 = 72000 \text{ cm}^3$ iar aria corpului este egală cu

$9600 \pi \text{ cm}^2$.

7.2.5. Un con circular drept cu generatoarea G are trei generatoare perpendiculare două câte două. Aflați volumul conului și aria sferei înscrise în con.

Soluție: Înălțimea este distanța de la vârful tetraedului tridreptunghic format cu

muchiile perpendiculare $2 \cdot 2$ de lungime G . După calcul obținem $h = G\sqrt{3}/3$.

$$V = \frac{\pi \cdot h \cdot R^2}{3} = \frac{\pi \cdot G\sqrt{3}/3 \cdot G\sqrt{6}/3}{3} = \pi G^2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{27} = \frac{\sqrt{2}G^2\pi}{9} \quad (\text{R se calculează ca raza}$$

cercului circumscris Δ echilat. de latură $G\sqrt{2}$). Raza sferei înscrise coincide cu raza

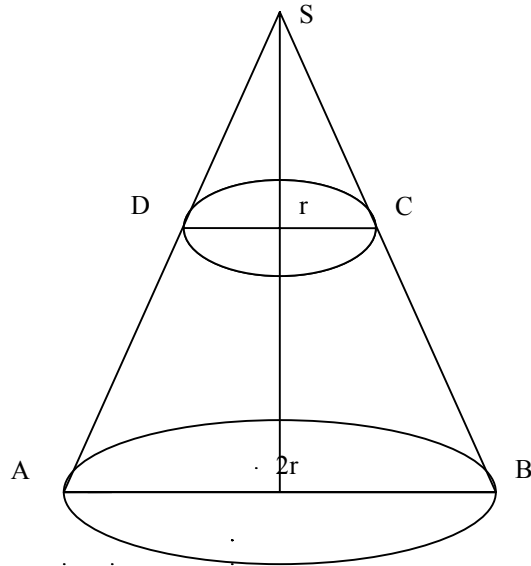
cercului înscris într-o secțiune axială cu laturile $G, G, \frac{2G\sqrt{6}}{3}$, determinându-se cu

formula $S = p \cdot r$, adică $r = S/p$ etc.

7.3. Trunchiul de con

R7.3.1 Volumul unui trunchi de con este 28, iar aria unei baze este de 4 ori mai mare decât aria celeilalte. Să se determine volumul conului din care face parte trunchiul de con.

Soluție: Obținem $K = \frac{1}{2}$ rezultă $\frac{V_t}{V_c} = \frac{7}{8}$ rezultă $V_c = \frac{8}{7} \cdot 28 = 32$



R7.3.2 Generatoarea unui trunchi de con este egală cu l și face cu planul bazei mari un unghi de 60 grade. Să se determine aria totală a trunchiului de con dacă raportul ariilor bazelor este 9 .

Soluție: Notăm cu r raza bazei mici, deducem $R = 3r$ și apoi $\frac{l}{4} = r$

$$At = \pi - l\left(\frac{3l}{4} + \frac{l}{4}\right) + \pi \frac{9l^2}{4^2} + \pi \frac{l^2}{16} = \pi l^2 + \frac{10r^2}{16} = \frac{26l^2\pi}{16}$$

R7.3.3 Aria laterală a unui trunchi de con circular drept este 30 m^2 , volumul de 31 m^3 , iar înălțimea 3 m . Să se calculeze lungimile razelor bazelor și lungimea generatoarei.

$$R + r = \frac{30}{G}$$

Soluție: Obținem sistemul: $R^2 + r^2 + Rr = 31$

$$R^2 + r^2 - 2Rr + 9 = G^2$$

$$R + r = 6$$

$$R \cdot r = 1$$

\Rightarrow

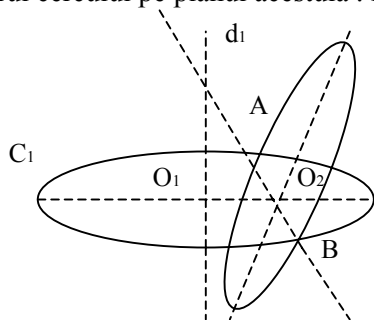
$$R=5\text{cm} ; r=1\text{cm} \text{ și } G=6\text{cm}$$

7.4. Sfera

R7.4.1. Două cercuri nu se află în același plan. Ele se intersectează în două puncte diferite

A și B. Să se arate că există o singură sferă care le conține.

Soluție: -Locul geometric al centrelor sferelor ce conțin cercul C_1 este perpendiculară în centrul cercului pe planul acestuia . Notăm dreapta cu d_1 . Analog obținem dreapta d_2 .



Dreptele d_1, d_2 sunt:

- coplanare fiind conținute în planul determinat de diametrele perpendiculare pe coarda $[AB]$ în fiecare cerc.
- în ipoteză ca cercurile nu se află în același plan dreptele d_1 și d_2 sunt concurente în centrul sferei căutate.

R7.4.2. Se consideră în spațiu 6 puncte diferite. Se știe că oricare cinci dintre ele se află

pe o sferă . Să se arate că toate cele șase puncte se află pe aceeași sferă. Generalizare.

Soluție: Analizăm două cazuri:

1. Dacă orice patru din cele șase sunt necoplanare. Patru puncte necoplanare determină o sferă mică. Din enunț, încă un punct se află pe această sferă. Al șaselea luat cu cele patru care determină sfera este pe aceeași sferă.
2. Orice patru puncte din cele șase se afla în același plan. Orice trei nu se află pe o dreaptă (deoarece se află pe o sferă). Toate se află pe același cerc care aparține unei sfere.

R7.4.3. Să se arate că dacă trei sfere au un cerc comun, atunci centrele lor sunt coliniare.

Soluție: Notăm cu O_1, O_2, O_3 și O centrele sferelor respective și secțiunii comune, atunci $O_1O \perp \alpha, O_2O \perp \alpha, O_3O \perp \alpha$, unde α este planul cercului comun.

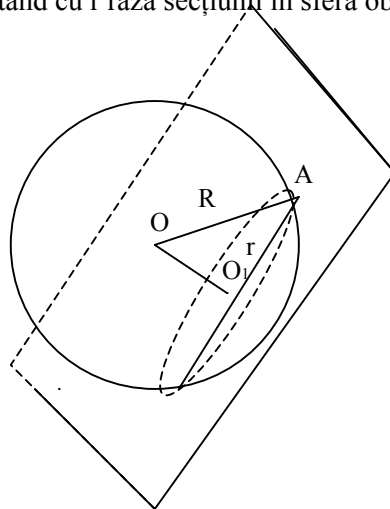
R7.4.4 Două sfere disjuncte S_1 și S_2 sunt tangente la o a treia sferă S_3 în punctele A și B.

Fie M un punct pe sfera S_1 ; dreapta MA intersectează a doua oară sfera S_3 în punctul N, iar dreapta NB intersectează a doua oară sfera S_2 în P. Să se arate că dacă dreapta MN este tangentă sferei S_2 , atunci ea este tangentă și sferei S_1 .

Soluție: Se studiază întâi cazul când S_1 și S_2 sunt tangente exterioare la S_3 și se consideră secțiunea sferelor date pentru planul ce trece prin punctele M, P, A, B. Din $\sphericalangle MPB \equiv \sphericalangle BAN$ rezultă $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle ABN$. Analog în celelalte cazuri.

R7.4.5 Se duce un plan prin extremitatea unei raze a unei sfere, care face cu raza un unghi de 30 grade. Dacă sfera are raza R, să se determine aria secțiunii realizate de plan în sferă.

Soluție: $\sphericalangle(OA; a) = \sphericalangle OAO_1$ pentru că $pr_{\alpha} OA = AO_1$ cunoscând că $O_1 = prO$. Notând cu r raza secțiunii în sferă obținem:



$$r = R \cos 30^{\circ} = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$As = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^2 R^{2\pi}}{4}$$

R7.4.6 Două sfere de centre O și O_1 și raze R și R_1 ; $R_1 < R$ sunt tangente exterioare. Să se afle aria laterală a trunchiului de con ce are ca bază cercurile de tangența cu cele două sfere ale conului circumscris sferelor.

Soluție: $4 \pi R R_1$

R7.4.7 Fie SABC un tetraedru. O sferă care trece prin S taie muchiile SA, SB, SC în punctele M, N respectiv P. Fie O centrul sferei circumscrise tetraedrului SMNP. Dacă $SO \perp (ABC)$, atunci patrulaterele BCPN, ACPM și BAMN sunt inscriptibile.

Soluție: Fie $k = SO$ intersectat (ABC) și cum $SO \perp (ABC)$ rezultă $SK \perp AB$ (1).

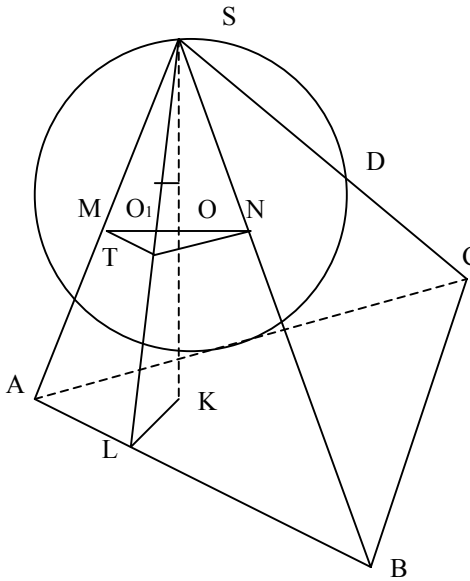
Notăm cu $L = pr_{AB} K$ și deci $KL \perp AB$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $AB \perp$

(SLK) , deci $(SLK) \perp (SAB)$ și pe de altă parte conform T3 \perp , $SL \perp AB$ (3).

Fie acum O_1 piciorul perpendicularei din O pe SAB. Evident O_1 aparține SL (4).

Din (3) și (4) rezultă că în planul (SAB) cercul de centru O_1 aparține SL (SL este înălțimea din S pe AB) intersectează laturile ΔSAB în M respectiv N. Notăm cu T intersecția acestui cerc cu înălțimea SL. Avem $\sphericalangle SMN \equiv \sphericalangle STN$ (5) și deoarece ST

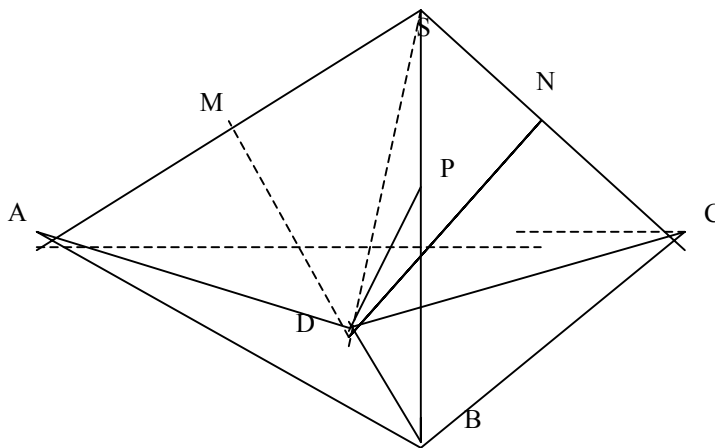
este diametru $\angle SNT \equiv \angle SLB$ (90 grade). Așa că $\triangle SNT$ congruent $\triangle SLB$ și deci $\angle STN \equiv \angle SBL$ (6)
 Din (5) și (6) avem că $\angle SNM \equiv \angle ABN$ deci patrulaterul $AMNB$ este inscriptibil.
 Demonstrații analoge conduc la concluzia că și $BCPN$ și $ACMP$ sunt inscriptibile.



R7.4.8 Fie $SABC$ un tetraedru. Pe muchiile SA , SB , și SC ca diametre se construiesc trei sfere. Cele trei sfere se mai intersectează într-un punct. Care este acesta?

Soluție: Arătăm că piciorul înălțimii din S pe (ABC) este un punct comun al sferelor construite.

$\triangle SDA$, $\triangle SDB$, $\triangle SDC$ sunt dreptunghice în D și $DM = MS = MA$;
 $DN = SN = NC$, $DP = PS = PB$. Mediane în triunghiuri dreptunghice.



Bibliografie

1. *“Și tu poți învăța geometria”*-Ioan Dăucilă Editura TEORA,Buc.1993
2. *Manual pentru clasa a X-a*-Augustin Coța+Colecturi E.D.P Buc.1996
3. *Manual pentru clasa a X-a,M1*-Mircea Gauga,Edit. MATHPRESS Ploiesti 2000
4. *Probleme de teoria numerelor si combinatorică* -L.Panaitopol Edit.Gil.Zalău-2003
5. *Algebră.Geometrie.Olimpiade și concursuri clasa a VIII-a*,Artur Bălăuca,Edit. TAIDA,Iasi 2002
6. *Matematica în examene și concursuri .Formare continuă*-Dumitru Vâlcau-coordonator,Edit.OPTIL-GRAPHIC,Craiova 2002

8. Secțiuni în corpuri geometrice

REZUMAT

Tema cuprinde metoda determinării secțiunilor plane în corpurile geometrice studiate cât și calculul unor elemente legate de secțiunea respectivă: perimetrul, aria, raportul volumelor poliedrelor delimitate în urma secțiunii.

Sunt prezentate secțiuni în prismă (cub sau paralelipiped) urmate de secțiunile în piramidă și în corpurile rotunde studiate con, cilindru și sferă.

Pentru fiecare secțiune realizată se cer: calculul ariei pornind de la datele corespunzătoare corpului și raportul volumelor corpurilor obținute exemplele în acest sens fiind preponderent secțiunilor ce împart corpurile în corpuri echivalente.

8.1. Generalități

Un gen de probleme frecvent întâlnit în geometria în spațiu este acela în care un plan taie un poliedru dat și se cere să se determine forma secțiunii și caracterizări metrice ale acesteia cum ar fi: aria, raportul în care împarte volumul poliedrului. Acest tip de probleme dezvoltă abilități de „vedere” în spațiu și o viziune tehnică a desenului. În general o problemă de secțiune presupune două activități independente:

- (i) Construcția secțiunii
- (ii) Calculul unor elemente legate de secțiune

A construi secțiunea unui poliedru P printr-un plan α revine la a determina punctele de intersecție ale planului de secțiune cu muchiile poliedrului și a uni apoi aceste puncte prin segmente incluse în fețe.

Planul de secțiune poate fi definit prin condiții diferite. Vom aborda probleme de secțiune relative la principalele corpuri geometrice insistând asupra secțiunilor în prismă (în special în cub) și în piramida, din cauza complexității lor.

Dacă ne referim la secțiuni paralele trebuie amintit un rezultat fundamental în justificarea poliedrelor echivalente, un puternic instrument de calcul al volumelor.

Principiul lui Cavalieri

Fie P_1 și P_2 două poliedre și α_0 un plan dat. Dacă pentru orice plan $\alpha \parallel \alpha_0$ mulțimile (secțiunile) α intersectat P_1 , α intersectat P_2 sunt echivalente atunci poliedrele P_1 și P_2 sunt echivalente.

Aplicație: Cunoscând volumul cubului arătați că dacă $P = ABCDA'B'C'D'$ este paralelipiped dreptunghic de dimensiuni $AA' = a$, $AB = b$, $BC = \frac{a^2}{b}$, atunci P are volumul a^3

8.1.1. Secțiuni în piramidă

R8.1.1.1 Se consideră piramida patrulateră VABCD cu lungimea muchiilor a. Pe muchiile [AB] și [BC] ale bazei și pe înălțimea [VO] se iau respectiv punctele M, N, și O' astfel ca:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC} = \frac{VO'}{OO'} = \frac{1}{3};$$

Să se determine: a) $m\langle(ABC);(MNO')\rangle$

b) $m\langle(VD);(MNO')\rangle$;

c) Aria secțiunii în piramidă prin planul (MNO').

Concursul "Gr. Moisi" - Baia-Mare 1999

R. Marinescu și I. Marinescu.

Soluție:

a) $(ABC) \cap (MNO') = MN$;

În ΔABC , $MN \parallel AC$ (din R.T. Thales). Deci $BD \perp MN$. Fie $BD \cap MN = \{P\}$;

Apoi, $O'O \perp (ABC)$

$$OP \perp MN \quad \Rightarrow \quad O'P \perp MN$$

$$OP, MN \subset (ABC)$$

Deci $m\langle(ABC);(MNO')\rangle = m\langle(O'P)\rangle$;

În ΔOVB avem: $\frac{VO'}{O'O} = \frac{BP}{PO} = \frac{1}{3}$;

Din R.T. Thales avem că $O'P \parallel VB$. Așadar $m\langle(O'P)\rangle = m\langle(VBO)\rangle$ (alt int)

Deci $m\langle(ABC);(MNO')\rangle = 45^\circ$ grade;

b) Se constată cu ușurință că $VD = O'P$. Cunoscând că $O'P \parallel VB \perp VD$, obținem $m\langle(VD);(MNO')\rangle = 90^\circ$ grade;

c) Construcția secțiunii: Intersecția planului (MNO') cu (VAC) va fi o dreaptă paralelă cu AC deci cu MN. Ducem $M_1N_1 \parallel MN$. $M_1 \in (VA)$, iar $N_1 \in (VC)$. Astfel, obținem intersecțiile MM_1 și NN_1 , cu fețele (VAB) și (VBC). Unind pe M_1 cu Q și pe N_1 cu Q, obținem intersecția planului (MNO') cu (VAD), respectiv cu (VDC). Așadar, secțiunea realizată în piramidă este pentagonul MNN_1QM_1 .

Determinarea ariei secțiunii:

Folosind T.F.A: în ΔABC obținem $MN = \frac{a\sqrt{2}}{4}$;

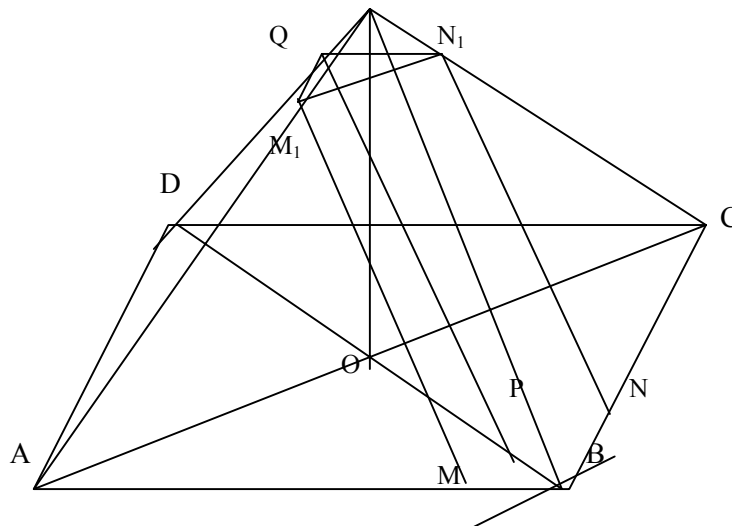
în ΔABV obținem $MM_1 = \frac{3a}{4}$;

în ΔVBD obținem $PQ = \frac{7a}{8}$;

$$\Rightarrow \text{Aria}[MM_1QN_1N] = \text{Aria}[MNN_1M_1] + \text{Aria}[M_1N_1Q] =$$

$$MN \left(MM_1 + \frac{1}{2} \cdot O'Q \cdot M_1N_1 = \frac{3a^2\sqrt{2}}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{8} \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{16} + \frac{3a^2}{64} = \frac{3a^2(4\sqrt{2}+1)}{64} \right);$$

V



R8.1.1.2 Fie ABCD un tetraedru regulat cu muchia a , înălțimea h , distanța dintre două muchii d (neconsecutive).

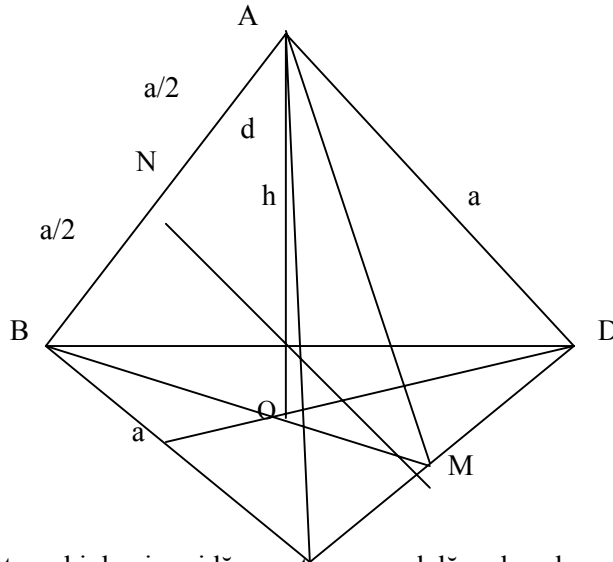
- Să se afle aria secțiunii tetraedrului cu planul determinat de înălțime și o muchie consecutiva cu aceasta.
- Să se arate că $3h=2d\sqrt{3}$.

Soluție:

a) În ΔBCD echilateral cu latura a , înălțimea este $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ și aria $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Aria secțiunii este aria unui Δ isoscel cu lungimile laturilor $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ și a , adică $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

b) Înălțimea tetraedrului este $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, iar distanța dintre două muchii opuse (neconsecutive) este de $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$$\text{Avem deci: } 3 \cdot h = 3 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = a\sqrt{6} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3} \cdot d;$$



R8.1.1.3 Dacă într-un trunchi de piramidă o secțiune paralelă cu bazele are valoarea

$S = \frac{\sqrt[3]{(S_1^3 + S_2^3)^2}}{4}$, atunci această secțiune împarte trunchiul în două părți echivalente

(S_1, S_2 - ariile bazelor).

Soluție: Dacă notăm cu h_1 și h_2 înălțimile celor două trunchiuri de piramidă, rezultate în urma secționării, volumele lor sunt date de relațiile:

$$v_1 = \frac{h_1}{3} (S + S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S}) = \frac{h_1}{3} \cdot \frac{\sqrt{S^3} - \sqrt{S_1^3}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}} \text{ -pentru partea superioară-}$$

$$v_2 = \frac{h_2}{3} (S + S_2 + \sqrt{S_2 \cdot S}) = \frac{h_2}{3} \cdot \frac{\sqrt{S_2^3} - \sqrt{S^3}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S}} \text{ -pentru partea inferioară-}$$

Fie $A_2B_2A_1B_1$ o secțiune ce trece prin înălțimea piramidei din care sunt obținute trunchiurile, iar A și B punctele în care planul de secțiune intersectează planul ($A_1B_2B_1$).

Notăm cu D și E intersecția paralelei prin B_1 la A_1A_2 cu AB și a paralelei prin B la

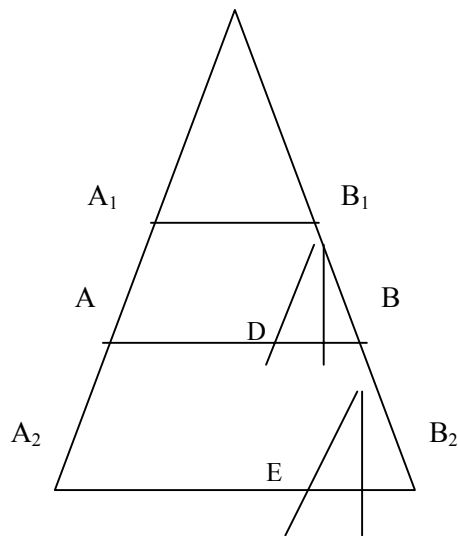
A_1A_2 cu A_2B_2 . Obținem: $\frac{A_1B_1}{AB} = \sqrt{\frac{S_1}{S}}$ și $\frac{AB}{A_2B_2} = \sqrt{\frac{S}{S_2}}$, avem

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{DB}{EB_2} = \frac{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S}}.$$

Deci, făcând raportul $\frac{v_1}{v_2}$ obținem: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{S^3} - \sqrt{S_1^3}}{\sqrt{S_2^3} - \sqrt{S^3}}$ (1)

Cunoscând din ipoteză că $\sqrt[3]{S} = \frac{\sqrt{S_1^3} + \sqrt{S_2^3}}{2}$ înlocuim în (1) și obținem :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{\sqrt{S_1^3} + \sqrt{S_2^3}}{2} - \frac{2\sqrt{S_1^3}}{2}}{\frac{2\sqrt{S_2^3}}{2} - \frac{\sqrt{S_1^3} + \sqrt{S_2^3}}{2}} = \frac{\sqrt{S_2^3} - \sqrt{S_1^3}}{\sqrt{S_2^3} - \sqrt{S_1^3}} = 1;$$



R8.1.1.4 Dacă VABCD este o piramida patrulateră regulată și E, F, G sunt mijloacele muchiilor AB, BC și respectiv VD atunci planul (EFG) împarte piramida în două corpuri echivalente.

Soluție:

Notăm cu:

$$\begin{aligned} \{Q\} &= EF \cap DC \\ \{P\} &= EF \cap AD \\ \{H\} &= PG \cap VA \\ \{I\} &= QG \cap VC \\ \{J\} &= EF \cap DB \end{aligned}$$

Poligonul secțiunii este EFIGH. Elementar, obținem: $AH=VA/4$; $BJ=DB/4$; $GD=VD/2$; $BF=AB/2$;

Avem:
$$\frac{v(HAEJD)}{v(VABD)} = \frac{Aria[AEJD] \cdot d(H;(ABD))/3}{Aria[ABD] \cdot d(V;(ABD))/3} = \frac{7}{32}, \quad \text{pentru că}$$

$$\frac{Aria[AEJD]}{Aria[ABD]} = 1 - \frac{Aria[EJB]}{Aria[ABD]} = 1 - \frac{EB \cdot BJ}{AB \cdot BD} = \frac{7}{8} \quad \text{și} \quad \frac{d(H,(ABD))}{d(V,(ABD))} = \frac{AH}{VA} = \frac{1}{4}.$$

Apoi,
$$\frac{v(HJDG)}{v(VABD)} = \frac{Aria(DGJ) \cdot d(H,(VDB))/3}{Aria(VDB) \cdot d(A,(VDB))/3} = \frac{9}{32} \quad \text{deoarece}$$

$$\frac{Aria(DGJ)}{Aria(VDB)} = \frac{DG \cdot DJ}{DV \cdot DB} = \frac{3}{8}, \text{ iar } \frac{d(H,(VDB))}{d(A,(VDB))} = \frac{VH}{VA} = \frac{3}{4}.$$

Cum $v(HAEJD)+v(HJDG)=v(AEJDGH) \Rightarrow \frac{v(AEJDGH)}{v(VABD)} = \frac{1}{2};$

Observație: Dată fiind simetria construcției față de planul (BVD) putem calcula $v(AEJDGH)$ și să-l comparăm cu $v(VABD)$

8.1.2. Secțiuni în cub

R8.1.2.1 Să se construiască secțiunea prin cubul $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ de muchie a , printr-un plan care trece prin mijloacele muchiilor $[AB],[BC]$ și $[CC_1]$. Să se determine aria secțiunii.

R8.1.2.2 Se consideră cubul $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ unde $[AA_1],[BB_1],[CC_1], [DD_1]$ sunt muchiile laterale. Se consideră planul de secțiune care trece prin A , mijlocul muchiei $[BC]$ și centrul feței $DCC_1 D_1$. Să se determine raportul în care planul de secțiune împarte volumul cubului.

R8.1.2.3 Un cub de muchie a este intersectat de un plan ce conține o diagonală a cubului. Aria secțiunii, minimă posibil determinate în cub este $5a^2/4$?

R8.1.2.4 Fie $[ABCD A_1 B_1 C_1 D_1]$ un cub cu muchia de lungime a , M și P mijloacele muchiilor $[BC]$ și $[AA_1]$ și O^1 centrul bazei $[A_1 B_1 C_1 D_1]$. Să se determine secțiunea realizată în cub de planul (HPO_1) , perimetrul și aria ei.

(Admitere Univ. de Arhitectură și Urbanism “Ion Micu”)

R8.1.2.1 Soluție (secțiuni în cub)

Determinarea secțiunii:

Planul de secțiune $\alpha=(MNP)$ și planul care conține fața $ABCD$ au în comun două puncte (M și N) deci au în comun toată dreapta MN . Această dreaptă intersectează

dreptele DC și AD în K și L .

Planul de secțiune α și cel care conține fața $CDD_1 C_1$ au în comun punctele K și P , deci dreapta KP este comună celor două plane.

În planul pătratului $CDD_1 C_1$ dreapta KP intersectează dreptele $C_1 D_1$ și DD_1 în Q și respective R . Planul α și planul care conține fața $ADD_1 A_1$ au în comun punctele R și L , deci dreapta LR . Această dreaptă intersectează laturile $[AA_1]$ și $[A_1 D_1]$ în T și

respectiv S. Unim punctele în care α intersectează muchiile cubului obținând hexagonal MNPQST.

Determinarea ariei hexagonului de secțiune

$\Delta MBN \equiv \Delta NCK \equiv \Delta PCK \equiv \Delta PC_1Q \equiv \Delta QD_1R \equiv \Delta RD_1S \equiv \Delta SA_1T \equiv \Delta TAL \equiv \Delta TAM \equiv \Delta LAM$
 rezultă că ΔLMT , ΔNKP , ΔRSQ sunt echilaterale de latură $\sqrt{(a/2)^2 + (a/2)^2} = a\sqrt{2}/2$
 $A_{MNPQST} = A_{\Delta RLK} - 3 \cdot A_{\Delta TLM} = 9a^2\sqrt{3}/8 - 3a^2\sqrt{3}/8 = 3a^2\sqrt{3}/4$

Obs. Secțiunea este un hexagon regulat.

R8.1.2.2

Determinarea secțiunii:

Planul de secțiune și planul bazei inferioare au în comun punctele A și M (M-mijlocul muchiei [BC]), deci dreapta Am este dreapta lor de intersecție.

Această dreaptă în planul ABCD va intersecta dreapta DC în N. Din $\Delta ABM \equiv \Delta MCN \Rightarrow CN = AB = a$, a fiind lungimea muchiei cubului. Planul de secțiune și planul care conține fața DCC_1D_1 au comun punctele N și P (centrul bazei CC_1D_1D).

Prin urmare dreapta NP este dreapta de intersecție a celor două plane, care taie $[CC_1]$ în Q și muchia $[DD_1]$ în R. Cum C mijlocul lui [DN], iar $CQ \parallel DD_1 \Rightarrow CQ = DR/2$. Unim punctele gasite A cu M, M cu Q, Q cu R și R cu A. Secțiunea este patrulaterul AMQR, care împarte cubul în două poliedre:

$ABMQRD_1A_1B_1C_1$ de volum V_1 și altul $CMQRDA$ de volum V_2 . Secțiunea este un trapez de baze MQ și AR)

Determinarea raportului V_1/V_2

$$V_2 = V_{RADN} - V_{QMNC} = 1/3 \cdot AD \cdot DN/2 \cdot RD - 1/3 \cdot CM \cdot CN/2 \cdot QC$$

Fie $PP_1 \parallel QC \Rightarrow P_1$ mijlocul muchiei [DC]

$$PP_1 = a/2; \Delta NPP_1 \approx \Delta NQC \text{ cu } NC/NP_1 = 2/3 = QC/PP_1$$

Deci $QC = 2/3 PP_1 = 2/3 \cdot a/2 = a/3$. În ΔNDR , [CQ] este linie mijlocie. Deci $DR = 2QC = 2a/3$.

$$\text{Revenind la } V_2 = 7a^3/36. V_1 = V_{\text{cub}} - V_2 = a^3 - 7a^3/36 = 29a^3/36 \Rightarrow V_1/V_2 = 29/7$$

R8.1.2.3 Se arată că secțiunea este tot timpul un paralelogram cu diagonala de lungime $a\sqrt{3}$.

Dacă P este intersecția cu AA' atunci aria este minimă când $d(P;BD')$, minimă adică $d(P;BD') = d(AA';BD')$ situație care conduce la $a\sqrt{2}/2$ pentru $A'P = a/2$.

În această situație, paralelogramul este romb cu latura $a\sqrt{5}/2$ și arie $D'P \cdot PQ = a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}/2 = a^2\sqrt{6}/2$.

Deci răspunsul este NU.

R8.1.2.4 Ducem (OP, care intersectează DA în S. Unim S cu M obținând intersecția N cu AB. Planul (ABCD) fiind \parallel cu $A_1B_1C_1D_1 \Rightarrow$ intersecția lui α cu $A_1B_1C_1D_1$ este o dreaptă prin O paralelă cu MN. Secțiunea va fi deci pentagonal MNPQR cu $QR \parallel RN$.
 $\triangle ACB$ și transversala SM \Rightarrow (Th. Menelaus) $\Rightarrow BN/NA=3 \Rightarrow BN=3a/4$;
 $AN=9/4; \Rightarrow MN=9\sqrt{13}/4$; $PN=a\sqrt{5}/4$; $PQ=a\sqrt{10}/6$; $QR=a\sqrt{13}/3$; $RM=a\sqrt{10}/3$;
 $P_{[MNPQR]}=a\sqrt{10}/2+7a\sqrt{13}/12+a\sqrt{5}/4$;
 $A_{[MNPQR]}=A_{[PMN]}+A_{[PMR]}+A_{[PRQ]}=5a^2\sqrt{14}/16$.

Bibliografie

1. „Și tu poți învăța geometrie” - Ion Dănilă, Editura TEORA 1993, București
2. *Manual M1*; - autor Mircea Ganga, Editura MATH PRESS Ploiești 2000
3. *Concursul „Gr. Moisiu”* - Al Blaga + Colectiv, Edit

9. Corpuri înscrise. Corpuri circumscrise

Rezumat

O categorie de probleme interesante și diferite în același timp o constituie combinațiile de corpuri.

Tema constituie puncte de plecare pentru rezolvarea acestor tipuri de probleme? De probleme începând cu atenta poziționare a corpurilor în spațiu imprimând un desen adecvat demonstrațiilor cerute.

De multe ori este util să raționăm într-un auxiliary care conține proiecție proiectii ale elementelor puse în discuție.

În cele ce urmează vom analiza situații în care apar configurații de două corpuri.

9.1 Prismă și sferă

Definiție: O sferă este înscrisă într-o prismă dacă ea este tangentă tuturor fețelor prisme.

Observații: - Centrul sferei este la distanță egală de fețele prisme deci pe planele bisectoare ale unghiurilor diedre.

- Înălțimea prisme este egală cu diametrul sferei.

- Pentru prisma dreaptă, proiecția ortogonală a sferei pe planul bazei prisme este un cerc înscris în baza prisme.

Proprietate: - Unui paralelipiped i se poate înscrie o sferă dacă și numai dacă ariile fețelor sunt egale. Dem.(exercițiu)

Definiție: - O prismă este înscrisă într-o sferă dacă toate vârfurile prisme se află pe o sferă (echivalent cu a spune că sfera este circumscrisă prisme).

Observații: - Centrul sferei este la egală distanță de vârfurile prisme

- Planele mediatoare ale oricărei muchii conțin centrul sferei.

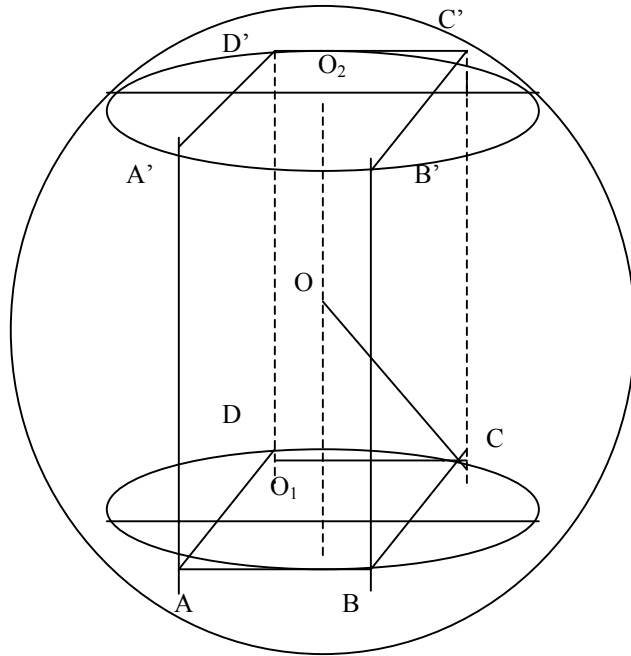
- O prismă este inscriptibilă într-o sferă dacă și numai dacă planele mediatoare sunt concurente.

Proprietate: - Unui paralelipiped i se poate înscrie o sferă dacă și numai dacă e paralelipiped dreptunghic. (intersecția diagonalei este centrul sferei)

Probleme rezolvate

R9.1.1

Aplicație: - Baza unei prisme regulate este un pătrat de latură a . Dacă înălțimea prisme este h atunci să se calculeze raza sferei circumscrise prisme.



Soluție: Fie $ABCD A'B'C'D'$ prisma și O_1, O_2 centrele bazelor.

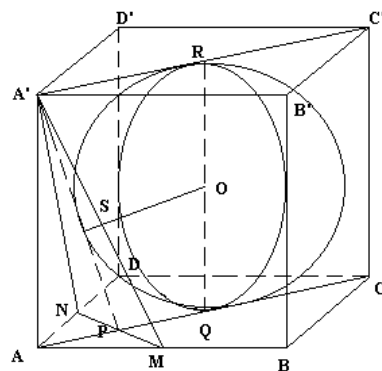
Planele mediatoare ale laturilor bazelor au comună dreapta O_1O_2 . Deci mijlocul lui $[O_1O_2]$ este centrul sferei circumscrise.

În planul ACC_1A_1 considerăm ΔOO_1C cu $OO_1=h/2$; $O_1C=a\sqrt{2}/2$. Deci raza OC este egală cu $R=\sqrt{(h^2+2a^2)}/2$.

Observație: În cazul particular $h=a$ (cub) raza sferei circumscrise cubului de muchie a este $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

R9.1.2. Fie M, N mijloacele muchiilor AB , respectiv AD ale cubului $ABCD A'B'C'D'$. Să se arate ca sfera înscrisă în cub este tangentă la planul determinat de punctele M, N și A' . – Concurs pentru ocuparea catedrelor vacante 1998

Soluție:
Planele $(A'MN)$ și $(ACC'A')$ sunt perpendiculare pentru că $MN \perp AC$ și $A'A \perp MN \Rightarrow MN \perp (ACC'A')$; $MN \subset (A'MN) \Rightarrow (A'MN) \perp (ACC'A')$.



Deci piciorul perpendiculararei lui O pe $(A'MN) \in A'P$.

Calculăm OS unde $S = \text{Pr}_{A'P} O$ și arătăm că $OS = \frac{a}{2}$.

În secțiunea ACC'A' calculăm aria trapezului A'PQR în două moduri:

$$\sigma[A'PQR] = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{4}\right)}{2} \cdot a = \frac{3a^2\sqrt{2}}{8}.$$

$$\sigma[A'PQR] = \sigma[A'RO] + \sigma[PQO] + \sigma[A'OP] = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} + \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2}}{2} + \frac{OS \cdot A'P}{2} =$$

$$\frac{a^2 \cdot \sqrt{2}}{8} + \frac{a^2 \cdot \sqrt{2}}{16} + \frac{OS \cdot 3a\sqrt{2}}{8}.$$

$$\text{Găsim OS} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{8} = \frac{3a\sqrt{2}}{8} - \frac{3 \cdot a\sqrt{2}}{16} \Leftrightarrow OS \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{8} = \frac{3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{2}}{16} \Rightarrow OS = \frac{a}{2}.$$

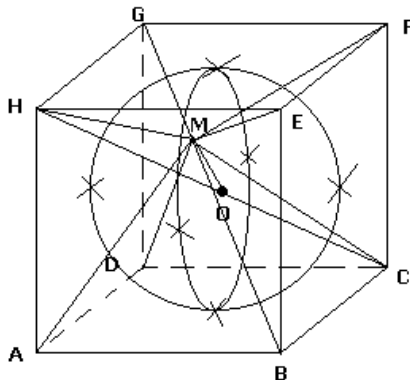
Deci $S \in \rho\left(0; \frac{a}{2}\right)$.

Observație: Se cunoaște o generalizare a acestei probleme pe care vă invităm să o demonstrați:

Dacă $M \in [AB]$; $N \in [AD]$ și $P \in [AA']$ a.i. $AM = \alpha$, $AN = \beta$ și $AP = \gamma$, atunci sfera înscrisă în cubul dat este tangentă planului (M, N, P) dacă și numai dacă are loc relația:

$$\frac{2\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - \sqrt{\alpha^2 \cdot \beta^2 + \beta^2 \cdot \gamma^2 + \gamma^2 \cdot \alpha^2}} = a. \text{ (vezi [2])}$$

R9.1.3. Se consideră cubul ABCDEFGH de latură a și M un punct arbitrar ales pe sfera înscrisă în cub. Să se arate că $\sum MA^2 = 8a^2$ (G.M. 4! 1985).



Soluție:

Se aplică Th. Mediane în ΔMHC , ΔMGB , ΔMFA , ΔMED pentru care MO este

$$\begin{aligned} \text{mediană. Rezultă: } MO^2 &= \frac{2(MH^2 + MC^2) - HC^2}{4}; MO^2 \\ &= \frac{2(ME^2 + MB^2) - BG^2}{4}; MO^2 = \frac{2(MF^2 + MA^2) - AF^2}{4}; MO^2 \\ &= \frac{2(ME^2 + MD^2) - ED^2}{4}; \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \sum MA^2 = 4(4MO^2 + d^2) = 4 \left(4 \cdot \frac{a^2}{4} + 3a^2 \right) = 4 \cdot 4a^2 \Rightarrow \sum MA^2 = 8a^2.$$

R9.1.4. Fie un cub ABCDA'B'C'D'. Demonstrați că există o sferă (S) care trece prin punctele A,B,C,D și este tangentă la planul (A'B'C'D').

–Concursul anual al rezolvatorilor –Liviu Parsan 2001

Soluție:

Vom demonstra existența punând în evidență centrul și raza sferei cu proprietatea din enunț. Centrul sferei este pe perpendiculara în centrul bazei ABCD, pe planul (ABCD) pentru că dacă există atunci A,B,C,D aparțin unui cerc unic al sferei și linia centrelor este perpendiculară pe (ABCD).

Deosebim cazurile $O \in \text{Int}(ABCD, A'B'C'D')$ sau $O \notin \text{Int}$.

Convine (și deducem prin calculul distanței de la O la O_1 centrul lui ABCD) $O \in \text{Int}[ABCD, A'B'C'D']$.

Notăm $OO_1 = x$ și $R = a - x$ iar $OO_2 = R = OC$. Exprimăm $OC = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{2}}$ și $OO_2 = a - x$.

$$\text{Egalând obținem: } x^2 + \frac{a^2}{2} = (a - x)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = (a - x)^2 - x^2$$

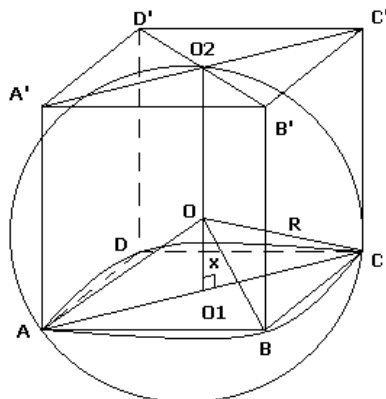
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = (a - x - x)(a - x + x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2}{2} = a(a - 2x) \Rightarrow a - 2x = \frac{a}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$2a - 4x = a \Rightarrow x = \frac{a}{4}.$$

Deci am pus în evidență $\rho(O; R)$ cu O la $\frac{a}{4}$

de O_1 și $R = \frac{3a}{4}$ cu proprietatea cerută.



- R9.1.5. Fie o sferă de raza 6 cm. Determinați cât la sută din
- volumul cubului înscris în sferă reprezintă volumul sferei;
 - volumul cubului circumscris sferei reprezintă volumul sferei;
- (Artur Bălăucă)

Soluție :

- volumul cubului este $\frac{200\sqrt{3}}{3\pi} \% \approx 36,73\%$.
- volumul sferei este $\frac{50\pi}{3} \% \approx 52,3\%$.

9.2. Prismă și cilindru

Definiție: Un cilindru drept este înscris într-o prismă dacă suprafața laterală a sa este tangentă fețelor laterale ale prisme, iar bazele cilindrului sunt cercuri înscrise în bazele prisme.

Observație :

- Dacă un cilindru circular drept este înscris într-o prismă atunci prisma este dreaptă
- Liniile de-a lungul cărora suprafața laterală a cilindrului este tangentă fețelor laterale ale prisme sunt segmente perpendiculare pe bazele prisme.

Definiție : O prismă este înscrisă într-un cilindru circular drept dacă bazele sunt poligoane înscrise în cercurile bazelor cilindrului.

Observație :

Înălțimea cilindrului coincide cu înălțimea prisme.

Probleme rezolvate

R9.2.1. Muchia unui cub este a . Să se determine volumul unui cilindru circular drept înscris în cub astfel încât diagonala cubului să fie axa cilindrului, iar cercurile bazelor sunt tangente acelor diagonale ale fețelor cubului care nu au puncte în comun cu diagonala considerată ca axă.

Soluție :

În figură am luat diagonala $[BD_1]$ a cubului ca axa de rotație pentru cilindru. Bazele cilindrului vor fi tangente diagonalelor fețelor laterale $[AB_1]$, $[AC]$, $[B_1C]$ și respectiv $[A_1C_1]$, $[DC_1]$, $[DA_1]$. Cercurile de baza ale cilindrului sunt înscrise în triunghiurile ΔAB_1C , ΔA_1DC_1 . Fie O_1 , O_2 centrele acestor cercuri. Mai întâi observăm că din $AC \parallel A_1C_1$, $AB_1 \parallel DC_1$ și (AC, AB_1) , (A_1C_1, DC_1) fiind perechi de drepte concurente se deduce paralelismul planelor (AB_1C) , (A_1DC_1) . Pe de altă parte $[BB_1] \equiv [BC] \equiv [BA] \Rightarrow$ proiecția lui B pe planul ACB_1 coincide cu centrul cercului circumscris. Cum ΔACB_1 echilateral de latură $a\sqrt{2}$ se deduce că centrele

cercurilor înscris și circumscris în ΔACB_1 coincid. Deci $pr_{(ACB_1)}B=O_1$. Analog $pr_{(A_1DC_1)}D=O_2$. Calculăm înălțimea cilindului și raza sa.

$h = a\sqrt{3}$ (diagonala cubului) $-BO_1-D_1O_2$. În piramida triunghiulară regulată

BAB_1C avem $BO_1 = \sqrt{AB^2 - AO_1^2}$ unde $AB=a$, $AO_1 = \frac{2}{3}ma = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$,

ma- mediana Δ echilateral de latură a . Raza este raza cercului înscris în ΔAB_1C

echilateral de latură $a\sqrt{2}$. $R = \frac{S}{p} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Deci volumul este

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{a^2}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \pi \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{18}.$$

R9.2.2. Un cilindru echilateral este înscris într-o prismă patrulateră regulată. Este prisma un cub? Calculați A_t și V pentru cilindru dacă $R=9$.

Soluție :

Răspunsul este evident afirmativ, cilindrul echilateral fiind cilindrul circular drept cu secțiunea axială pătrat.

Avand $G=2r=10$ rezulta $A_t=150\pi$ și $V=500\pi$.

R9.2.3. O prismă regulată este înscrisă într-un cilindru și un cilindru se înscrie în această prismă. Determinați raportul volumelor acestor cilindrii în cazurile în care prisma este :

- 1) triunghiulară;
- 2) patrulateră;
- 3) hexagonală;

Soluție:

Dacă r , R notează razele cercurilor înscrise respectiv circumscrise bazei vom

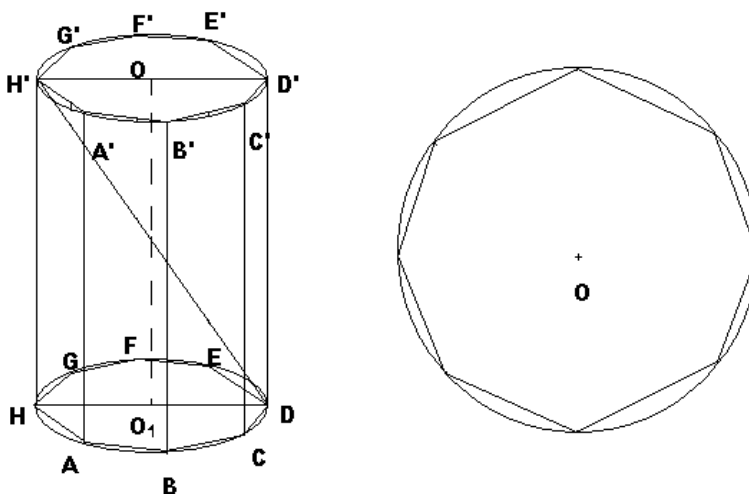
$$\text{avea } \frac{V_c}{V_c} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{\pi R^2 \cdot h} = \left(\frac{r}{R} \right)^2 = k$$

$$1) k = \left(\frac{r}{R} \right)^2 = \left(\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \right)^2 = \frac{3}{4};$$

$$2) k = \left(\frac{r}{R} \right)^2 = \left(\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2};$$

$$3) k = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}\right)^2 = \frac{3}{4};$$

R9.2.4. Diagonala secțiunii axiale a unui cilindru echilateral este a. Aflați volumul prisme octogonale regulate înscrise în cilindru.



Soluție :

Găsim $R = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ și $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Aria bazei prisme este $A_o = 8 \cdot R^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{8} \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{a^2 \cdot 2}{4^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{4}$. Deci volumul este $V = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{2}}{4} = \frac{a^3 \cdot 2}{2 \cdot 4} = \frac{a^3}{4}$.

Observație : Invităm cititorii să calculeze volumul prisme regulate cu baza un poligon regulat cu n laturi, înscrise în cilindru.

9.3. Piramida și sfera

Definiție: O sferă se numește înscrisă într-o piramidă dacă este tangentă tuturor fețelor piramidei.

Observație:

- 1) Dacă I este centrul sferei înscrise atunci este echidistant față de fețele piramidei ;
- 2) Orice muchie a bazei este perpendiculară pe planul determinat de centrul sferei înscrise și proiecțiile acestuia pe fețele adiacentei muchii.

- 3) I este intersecția planelor bisectoare ale unghiurilor diedre ale piramidei și reciproc.

Propoziții :

- 1) O sferă poate fi înscrisă într-o piramidă triunghiulară.
- 2) O sferă poate fi înscrisă într-o piramidă regulată.

Definiție : O sferă se numește circumscrișă unei piramide dacă toate vârfurile piramidei se află pe sferă.

Observație :

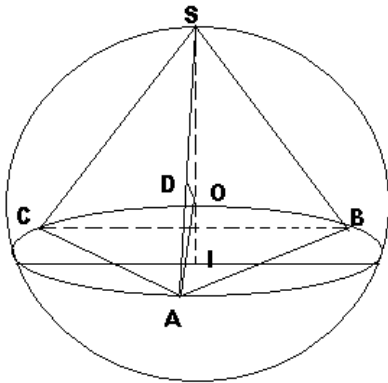
- 1) Vârfurile piramidei se află la aceeași distanță de centrul sferei.
- 2) Centrul sferei circumscrișe este punctul de intersecție al planelor mediatoare ale muchiilor și bazelor.
- 3) Proiecția centrului sferei pe fiecare față este centrul cercului circumscriș feței.

Recomandări :

- Este indicat să precizăm prin construcție centrul sferei
- Adesea este convenabil să construim o secțiune auxiliară care să împartă combinația sferă-piramidă în două părți simetrice ridicând problema la una de geometrie plană.

Probleme rezolvate

R9.3.1. O piramidă triunghiulară regulată are muchia laterală de lungime l și este înscrisă într-o sferă de rază R . Să se calculeze volumul piramidei.



Soluție :

Fie $SABC$ piramida regulată înscrisă în sfera de centru O și D mijlocul muchiei $[SA]$.

Atunci $OD = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$. $\Delta SOD \sim \Delta SAI$ unde $I = \text{pr}_{(ABC)} O$ centrul cercului circumscriș

ΔABC . Deducem $\frac{SD}{SI} = \frac{SO}{SA}$ rezultând că $\frac{l}{2 \cdot SI} = \frac{R}{l}$ deci $SI = \frac{l^2}{2R}$. În ΔSAI

dreptunghic în I avem $AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4R^2}} = \frac{l}{R} \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$. Deoarece AI
 raza cercului circumscris bazei $A_{[ABC]} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l^2}{R^2} \cdot \left(R^2 - \frac{l^2}{4}\right)$ și volumul

$$V = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{l^4}{R^3} \left(R^2 - \frac{l^2}{4}\right).$$

9.4. Trunchi de piramidă și sferă

Definiție: O sferă se numește înscrisă într-un trunchi de piramidă dacă ea este tangență bazelor și fețelor laterale ale trunchiului de piramidă.

Observație :

- 1) Diametrul sferei este egal cu înălțimea trunchiului
- 2) Centrul sferei înscrise este la intersecția planelor bisectoare ale unghiurilor diedre ale trunchiului de piarmidă
- 3) Raza sferei se calculează unind centrul cu vârful trunchiului împărțind trunchiul în piramide de înaltime raza sferei . $V = r \cdot \frac{S}{3}$ cu S-aria totală a trunchiului.

Definiție: O sferă se numește circumscrisă unui trunchi de piramidă dacă vârful trunchiului se află pe suprafața sferei.

Observație:

- 1) Centrul sferei se află la intersecția planelor mediatoare ale muchiilor.
- 2) Proiecția centrului sferei circumscrise pe fețele trunchiului coincide cu centrele cercurilor circumscrise acelor fețe.

Probleme rezolvate

R9.4.1. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată este înscris într-o sferă de rază R așa încât baza mare a trunchiului de piramidă este înscrisă într-un cerc mare al sferei. Latura bazei mici reprezintă jumătate din latura bazei mari. Aflați volumul trunchiului de piramidă.

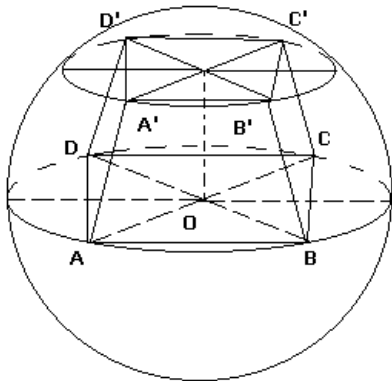
Soluție :

Fie ABCDA'B'C'D' tetraedul dat. Volumul $V = \frac{h}{3} (S + S' + \sqrt{SS'})$ cu S aria bazei mari

și S' aria bazei mici. Avem $\frac{S}{S'} = \frac{(A'B')^2}{AB^2} = \frac{1}{4}$. Deci $S' = \frac{S}{4}$. Rezulta $V = \frac{7hS}{12}$. Dar

$S=AB^2=2R^2$. Pentru a găsi $OO'=h$ lucrăm în $\triangle OO'A'$ dreptunghic. Deci $OO' =$

$$\sqrt{(OA')^2 - (A'O')^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \text{ Finalizand } V = \frac{7R \cdot \sqrt{3} \cdot 2R}{12 \cdot 2} = \frac{7R^2 \sqrt{3}}{12}.$$



9.5. Cilindru și sferă

Definiție: O sferă se numește înscrisă într-un cilindru drept dacă sfera este tangentă suprafeței laterale a cilindrului de-a lungul unui cerc mare al sferei situat într-un plan paralel cu bazele.

Observație:

- 1) Centrul sferei este pe axa de rotație a cilindrului;
- 2) Diametrul bazei cilindrului este egal cu diametrul sferei și este egal cu înălțimea cilindrului;

Definiție: Un cilindru circular drept se spune că este înscris într-o sferă dacă cercurile bazei sunt cercuri mici ale sferei.

Observație:

Centrul sferei coincide cu mijlocul axei cilindrului.

Definiție: Un cilindru se numește echilateral sau echilater dacă secțiunea axială a cilindrului este pătrat.

Recomandări:

Este util în rezolvarea problemelor să considerăm o secțiune auxiliară care împarte configurația în două parti simetrice, de regulă să conțină axa de rotație. De exemplu ar putea fi secțiunea axială.

Probleme rezolvate

R9.5.1. Să se înscrie în sfera de raza R un cilindru de volum maxim.

Soluție:

Notăm cu r -raza cercului, baza a cilindrului, cu R -raza sferei circumscrise și h - înălțimea cilindrului.

Avem $V = \pi r^2 h$. Considerăm secțiunea axială $ABB'A'$. În $\triangle OO_1A$ dreptunghic în O_1 avem $R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}$ sau $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. Volumul $V = 2\pi r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$. Maximul lui V se

atinge pentru același r pentru care este atins maximul expresiei

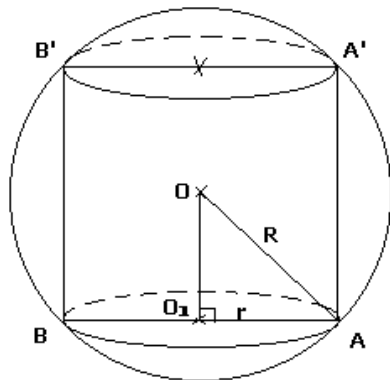
$$\frac{V}{2} = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \left(R^2 - r^2 \right). \text{ Cum suma factorilor } \frac{r}{2} + \frac{r}{2} + \frac{R^2 - r^2}{1} = R^2 \text{ constantă}$$

aplicând inegalitatea echivalentă cu inegalitatea mediilor

$$\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot \left(R^2 - r^2 \right) \leq \left(\frac{\frac{r}{2} + \frac{r}{2} + R^2 - r^2}{3} \right)^3 = \frac{R^6}{3^3} \text{ (ct.) deducem că maximul se}$$

atinge pentru egalitatea factorilor $\frac{r}{2} = R^2 - r^2$ sau $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ pentru care

$$V_{\max} = \frac{4\pi \cdot R^3}{3\sqrt{3}}.$$



R.9.5.2. Dintre toti cilindrii de același volum $2\pi a^3$ să se determine acela care este înscris în sfera cea mai mică.

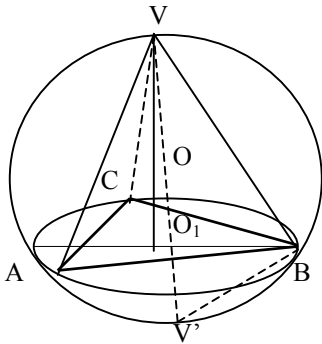
Soluție:

Cilindrul căutat are raza $\sqrt[6]{a^3 \sqrt{2}}$.

R9.3.2. Se consideră tetraedru regulat având lungimea unei muchii egală cu a

- a) Determinați razele sferelor circumscrise și înscrise în tetraedru .
 b) Să se arate că există o sferă care este tangentă tuturor muchiilor tetraedrului și determinate de raza ei .
 c) Să se calculeze ariile secțiunilor determinate în tetraedru și în sferă de un plan paralel cu una din fețele tetraedrului , la o distanță egală cu a patra parte din înălțimea tetraedrului .

Soluție :



a) Fie VABCD tetraedru înscris în sferă cu centrul O și O₁ centrul bazei ABC , $V' = s_o V$

$$BO_1 = \frac{2}{3} m_b = \frac{2}{3} \cdot a \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} . \text{ În } \triangle VBV_1$$

dreptunghic în B (VV₁ - diametrul sferei) aplicând teorema catetei obținem :

$$VB^2 = VV' \cdot VO_1 \text{ sau } a^2 = 2R \frac{a\sqrt{3}}{6} . \text{ De aici}$$

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4} .$$

Pentru a calcula raza sferei înscrise calculăm volumul tetraedrului în două moduri :

$$(a) S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ și } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

(b) Descompunem tetraedrul în patru tetraedre cu vârful în I și baze fețele laterale , cu înălțimile din I raze ale sferei înscrise .

$$V = \frac{ra^2\sqrt{3}}{3} \text{ și rezolvând ecuația rezultată obținem } r = \frac{3v}{4S} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

b) Sfera se sprijină pe muchiile tetraedrului în punctele de tangență . Segmentul care unesc cu vârful tetraedrului până la punctele de tangență sunt egale . De unde deducem că punctele de tangență coincid cu mijloacele laturilor tetraedrului . Cu această

observație se calculează ușor raza obținând $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Observație : De fapt centrul sferei este punctul de concurență al bimedianelor congruente în tetraedru regulat .

c) Raportul de asemănare este $k = \frac{3}{4}$ de aici aria secțiunii în tetraedru este

$$S = \frac{9}{16} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{64} \text{ etc.}$$

R103.3. Fie R și r razele sferelor circumscrise respectiv înscrise unei piramide patrulatere regulate . Să se arate că :

Soluție : 2a fiind latura bazei și h înălțimea, $R = \frac{2a^2 + h}{2h}$, $r = \frac{a}{h}(\sqrt{a^2 + h^2} - a)$

calculând raportul $\frac{R}{r} = \frac{2+x}{2(\sqrt{1+x}-1)} = k$, unde $x = \frac{h^2}{a^2}$ obținem $x^2 + 4(1+k-$

$k^2) \cdot x + 4 + 8k = 0$ cu $\Delta = 16k^2(k^2 - 2k - 1)$, și din condiția $\Delta \geq 0$ deducem $k \geq \sqrt{2} + 1$.

R9.3.4. Fie O un punct pe muchia AB a tetraedului ABCD . Sfera circumscrisă tetraedului AOCD intersectează BC și BD în M, respective N, iar sfera circumscrisă tetraedrului BOCD intersectează AC și AD în P respectiv Q . Demonstrați că $\Delta OMN \sim \Delta OQP$

Indicație : Folosiți faptul că ACMO este patrulater unscriptibil .

9.6. Con și sferă

Definiții : 1) O sferă este înscrisă într-un con circular drept dacă este tangentă bazei conului în centrul acesteia și este tangentă suprafeței laterale a conului de-a lungul unui cerc situate într-un plan paralel cu planul bazei conului.

2) Un con se spune înscris într-o sferă dacă vârful conului și cercul de bază al conului se află pe sferă .

3) Un con se numește echilateral dacă secțiunea axială a conului este un triunghi echilateral .

Probleme rezolvate

R9.6.1. Să se circumscrie sferei de rază r conul de volum minim.

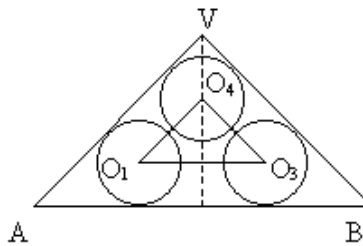
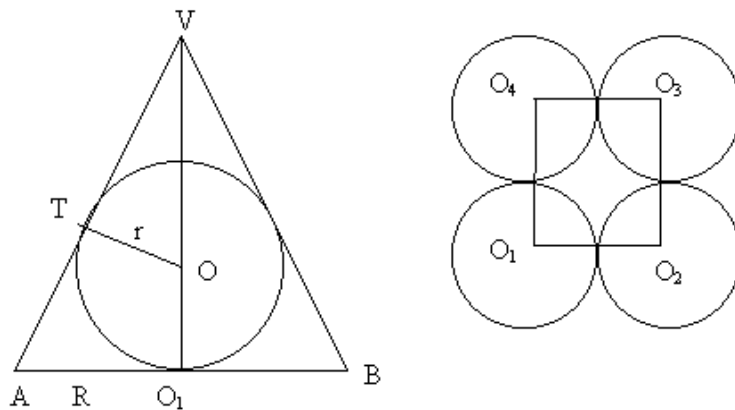
Soluție : $V = \pi r^2 h / 2$. Exprimată r și h în funcție de r . Considerând o secțiune axială în con obținem un cerc de rază r înscris în ΔVAB isoscel . Folosind asemănarea $\Delta VOT \sim$

ΔVO_1A avem $R/r = \frac{h}{\sqrt{h(h-2r)}}$

($VT^2 = h(h-2r)$ – din puterea punctului V în raport cu cercul) De aici

$R^2 = \frac{r^2 h}{h-2r}$ rezultă $V = \frac{\pi r^2 h^2}{3(h-2r)}$

V este minim , atunci raportul $\frac{r^2 h^2}{h-2r}$ este minim atunci când raportul $\frac{h-2r}{h^2} = \frac{1}{2r} \cdot \frac{2r}{h} \cdot (1 - \frac{2r}{h})$. Produsul $\frac{2r}{h} \cdot (1 - \frac{2r}{h})$ este maxim când $\frac{2r}{h} = 1 - \frac{2r}{h}$ sau $h=4 \cdot r$ Așadar volumul minim dacă $h = 4r$, $R = r\sqrt{2}$ când $V = \frac{8 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$.



R9.6.2. Într-un con sunt așezate cinci sfere egale . Patru din ele se află pe baza conului astfel încât oricare din aceste patru sfere este tangentă la alte două sfere de pe baza conului și la suprafața laterală a conului . A cincea sferă este tangentă celorlalte patru sfere și la suprafața laterală a conului .Determinați volumul conului dacă sferile au raza egală cu r.

Soluție :În secțiunile desenate $O_1O_2O_3O_4$ pătrat de latura $2r$.

În ΔO_5EO_1 , $O_1O_5=2r$, $O_1E=r\sqrt{2}$ deci $O_1E/O_1O_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, adică m unghiul $(O_5O_1E) =$

45° . $\Delta VAD \approx \Delta O_1O_3E$. Deci $h = R$ însă $h = \sqrt{2}r + \frac{2r}{\sqrt{2}} + r = r(2\sqrt{2} + 1)$. Acum

volumul se calculează ușor $V = \frac{\pi r^3 (2\sqrt{2} + 1)}{3}$.

Enunț: Să se determine aria părților, din sfera circumscrisă unui cub de muchie a, determinate de planele fețelor cubului.

Soluție: Planele fețelor cubului împart sfera în 12 unghiuri diedre și șase patrulatere curbilini (corespunzător celor șase fețe ale cubului). Dacă x notează aria din sferă determinată de m “unghi diedru”, iar y not. aria unui patrulater curbiliniu atunci:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x+y = \frac{\pi a^2(3-\sqrt{3})}{2} \\ 12x-6y=3\pi a^2 \end{array} \right. , \text{ de unde se obține}$$

$$x = \frac{\pi a^2(2-\sqrt{3})}{4} \text{ și } y = \frac{\pi a^2(\sqrt{3}-1)}{2}$$

Enunț: O sferă înscrisă într-un con care are unghiul de la varf al secțiunii axiale egal cu α . În această sferă se înscrie un con care are același unghi la varf în secțiunea axială. Să se determine sinusul unghiului α dacă raportul dintre volumul primului con și al celui de-al doilea este egal cu a.

Soluție:

Exprimăm raza r ca raza cercului înscris în secțiunea axială a conului mic

folosind formulele $S=p \cdot r$; $S = \frac{abc}{4r}$; $r = \frac{G^2 \sin \alpha}{G + r_1}$; $r = \frac{r_2}{\sin \alpha}$

Egalând exprimările obținem:

$$\sin^2 \alpha = \frac{r_2(G + r_1)}{G^2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{r_2}{G} \left(1 + \frac{r_1}{G}\right)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{r_2}{g} * \frac{g}{G} \left(1 + \frac{r_1}{G}\right)$$

$$\text{Dar } \frac{r_2}{g} = \sin \frac{\alpha}{2}; \frac{r_1}{G} = \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{iar } \frac{g}{G} = (\sqrt[3]{a})^{-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}. \text{ Înlocuind obținem ecuația trigonometrică}$$

$$\sin^2 \alpha = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

Folosind $\sin^2 \alpha = (2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2})^2$ și apoi formula fundamentală a trigonometriei
 obținem $4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot (1 - \sin \frac{\alpha}{2})(1 + \sin \frac{\alpha}{2}) = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a}} (1 + \sin \frac{\alpha}{2}) / (1 + \sin \frac{\alpha}{2}) \sin \frac{\alpha}{2}$
 $4 \sin \frac{\alpha}{2} (1 - \sin \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ Notăm $\sin \frac{\alpha}{2} = x$ obținem $4x - 4x^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ echivalent cu

$$(2x-1)^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \text{ cu } x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{a}}}$$

Enunț: Două sfere de rază r și o sferă de rază R , ($R > r$) se află pe un plan, tangente exterior una alteia. Să se determine raza sferei tangente tuturor sferelor și planului.

Soluție: Notăm cu O_R , O_1 , O_2 și O_x centrele sferelor de raze R , r , r , x (x este lungimea razei căutate)

Din condițiile de tangență obținem lungimiile $O_2 O_R = O_1 O_R = R + r$;

$$O_R O_x = R + x$$

$$O_1 O_x = O_2 O_x = x + r$$

Fie M , N , P proiecțiile pe planul α ale punctelor O_x , O_2 și O_r unde O_2 este punctul de tangență al sferelor de rază r .

Estimăm lungimiile MN și $(a_1 + a_2)$ și din egalitatea lor obținem o ecuație în necunoscuta x a carei soluție pozitivă va reprezenta raza căutăată

$$MN = 2\sqrt{R \cdot r}; a_1 + a_2 = \sqrt{4xr - r^2} + \sqrt{4Rr - r^2}$$

$$2\sqrt{Rx} - \sqrt{4xr - r^2} = \sqrt{4Rr - r^2} \quad |()^2$$

$$4Rx - 4\sqrt{Rx(4xr - r^2)} + 4xr - r^2 = 4Rr - r^2 \quad | : 4$$

$$Rx + rx - Rr = \sqrt{Rx(4xr - r^2)}; x(R + r) - Rr = \sqrt{4Rrx^2 - Rr^2x}$$

$$x^2(R+r)^2 - 2Rr \cdot x(R+r) + R^2r^2 = 4Rrx^2 - Rr^2x$$

$$x^2(R^2 + 2Rr + r^2 - 4Rr) - x \cdot Rr(2R + 2r - r) + R^2r^2 = 0$$

$$x^2(R-r)2 - x \cdot Rr(2R+r) + R^2r^2 = 0$$

$$\Delta = R^2r^2(2r+r)^2 - 4R^2r^2(R-r)^2$$

$$= R^2r^2[4R^2 + 4Rr + r^2 - 4R^2 + 8Rr - 4r^2]$$

$$= R^2r^2[12Rr - 3r^2]$$

$$3R^2r^2 \cdot [4Rr - r^2]$$

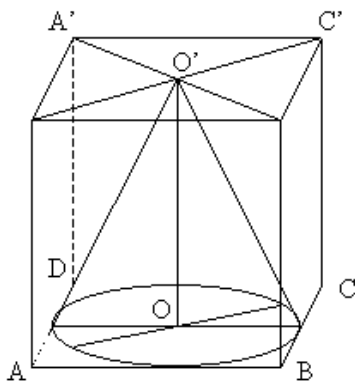
$$x_{1,2} = \frac{Rr(2R+r) \pm Rr\sqrt{3(4Rr-r^2)}}{2(R-r)^2}$$

Soluții: R9.7.1 $V_{prismă} = \frac{3l^2 \sin^2 2\alpha}{4 \sin^2(\pi/4 + \alpha)}$; $\alpha = \pi/4$

$3 \cdot l^2 \cdot \sin^2 2\alpha / 4 \sin^2(\pi/4 + \alpha)$; $\alpha = \pi/4$.

R9.7.2 înălțimea conului este cât muchia cubului : Raza bazei este apotema. Deci

$V_{con} = \frac{a^3 \pi}{12}$. $V_{cub} = a^3$. $V_{con} / V_{cub} = \pi/12$.



9.8. Sferă și trunchi de con

Definiții: 1) O sferă se numește înscrisă într-un trunchi de con dacă este tangentă bazelor trunchiului în centrele lor și suprafeței laterale a trunchiului.

2) Un trunchi de con este înscris într-o sferă dacă cercurile bazelor trunchiului sunt cercuri pe sferă.

Probleme rezolvate

R9.8.1 Un trunchi de con este circumscris unei sfere. Știind că generatoarea trunchiului face cu planul bazei un unghi de măsura α , să se afle raportul volumelor trunchiului de con care se formează prin secționarea trunchiului da cu planul dus prin cercul său de tangentă cu sfera.

R9.8.2. Două sfere sunt tangente exterior. Să se afle aria laterala și volumul trunchiului de con care are ca bază cercurile de tangentă cu cele două sfere ale suprafeței laterale a conului circumscris sferelor.

R9.8.3. Un trunchi de con este circumscris unei sfere de rază r și este înscris într-o sferă de rază R . Cunoscând distanța d dintre centrele celor două sfere să se calculeze volumul trunchiului de con.

Soluții:

Enunț: Un trunchi de con este circumscris unei sfere de rază r și este înscris într-o sferă de rază R . Cunoscând distanța d dintre centrele celor două sfere, să se calculeze volumul trunchiului de con.

Soluție: Raționând într-o secțiune axială a trunchiului observăm că:

$$h=2 \cdot r;$$

$$R_1 = \sqrt{R^2 - (r - d)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{R^2 - (r + d)^2}$$

Înlocuind în formula volumului

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$$

Obținem

$$V = \frac{\pi \cdot 2r}{3} (R^2 - (r-d)^2 + R^2 - (r+d)^2) + \sqrt{[R^2 - (r-d)^2][R^2 - (r+d)^2]}$$

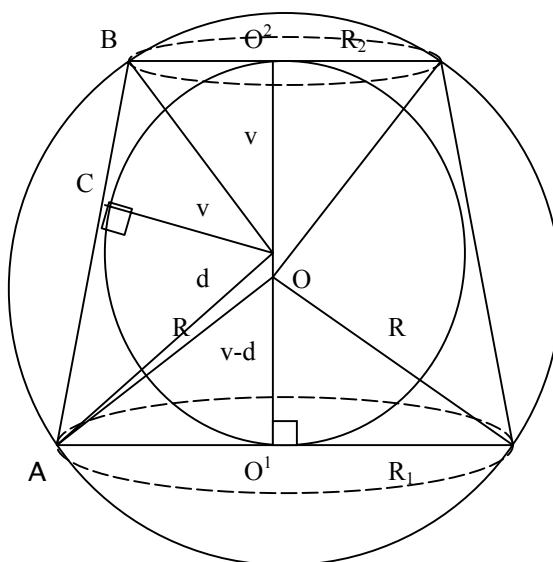
În $\triangle AO_1B$ observăm că $m(\angle AO_1B) = 180^\circ - m(\angle O_1O_1A) - m(\angle BO_1O^2) = m(\angle O_1BO^2) +$

$$m(\angle O_1AO^1) = \frac{1}{2} m(\angle ABO^2) + \frac{1}{2} m(\angle BAO^1) = \frac{1}{2} [m(\angle ABO^2) + m(\angle BAO^1)] = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

Dacă C este punctul de tangență atunci $O_1C^2 = BC \cdot AC$ (Teorema înălțimii în $\triangle AO_1B$). scrisă în termenii dați relația este $r^2 = R_1 \cdot R_2$

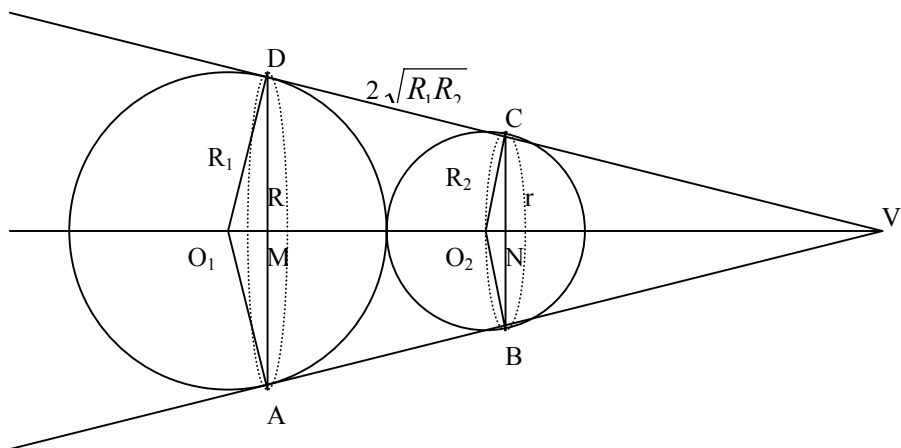
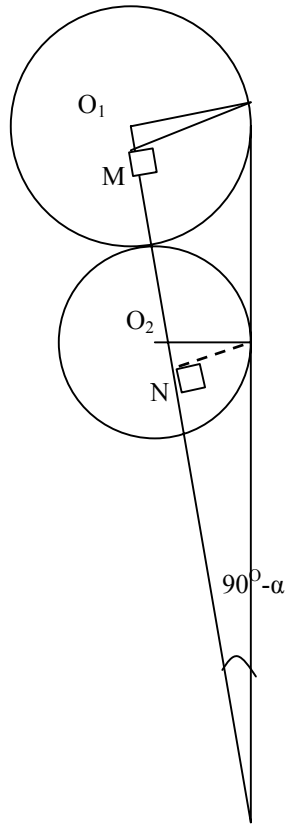
$$\text{deci } V = \frac{2\pi r}{3} (R^2 - (r-d)^2 + R^2 - (r+d)^2 + \underbrace{R_1 \cdot R_2}_{V^2}) = \frac{2\pi r}{3} (2R^2 - 2r^2 - 2d^2 + r^2)$$

$$= \frac{2\pi r}{3} (2R^2 - r^2 - 2d^2)$$



Enunț:

Două sfere de centru O_1 și O_2 au razele R_1 și R_2 și sunt tangente exterior. Să se afle aria laterală și volumul trunchiului de con, care are ca baze cercurile de tangență cu cele două sfere ale suprafeței laterale a conului circumscris sferelor.



Soluție: Găsim generatoarea trunchiului $G=2\sqrt{R_1R_2}$. În trapez Dacă notăm cu $\alpha = m(\text{AO}_1\text{O}_2) = m(\text{CO}_2\text{V})$ (alterne interne) Obținem $R=R_1\sin\alpha$; $r=R_2\sin\alpha$. Însă raționând în trapezul $\text{AO}_1\text{O}_2\text{C}$ $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{R_1R_2}}{R_1 + R_2}$ și $\cos \alpha = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$.

$$\hat{\text{Înălțimea}} \text{ MN} = h = R_1 + R_2 - \cos \alpha \cdot (R_1 - R_2) = R_1 + R_2 - \frac{(R_1 - R_2)}{R_1 + R_2} =$$

$$\frac{(R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2}{R_1 + R_2} = \frac{4R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

Putem calcula

$$A_1 = \pi G(R + r) = \pi \cdot 2\sqrt{R_1R_2} \cdot (R_1 + R_2)\sin \alpha = \pi 2\sqrt{R_1R_2} \cdot (R_1 + R_2) \cdot$$

$$\frac{2\sqrt{R_1R_2}}{(R_1 + R_2)} = 4R_1R_2 \cdot \pi$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{4R_1R_2}{R_1 + R_2} \left[\left(R_1 \frac{2\sqrt{R_1R_2}}{R_1 + R_2} \right)^2 + \left(R_2 \frac{2\sqrt{R_1R_2}}{R_1 + R_2} \right)^2 + R_1R_2 \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2} \right] = \\ &= \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{4R_1R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{4R_1^3R_2 + 4R_1R_2^3 + 4R_1^2R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{16R_1^2R_2^2}{(R_1 + R_2)^3} (R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2) = \\ &= \frac{16R_1^2R_2^2(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)}{3(R_1 + R_2)^3} \end{aligned}$$

Enunț: Un trunchi de con este circumscris unei sfere. Știind că generatoarea trunchiului face cu planul bazei mari un unghi de măsura α , să se afle raportul volumelor trunchiurilor de con care se formează prin secționarea trunchiului dat cu planul dus prin cercul său de tangența cu sfera. (caz particular $\alpha=60^\circ$)

Soluție

Vom exprima atât R cât și înălțimile celor două trunchiuri de con în funcție de r raza sferei înscrise. Lucrând într-o secțiune axială obținem:

$$H=2R$$

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = \frac{h}{\sin \alpha} \\ R_1 - R_2 = \frac{h \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases} \quad \text{Rezultă } R_1 = r \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad R_2 = r \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Patrulaterul OO_1BM este inscriptibil deci $m(\text{O}'\text{Om}) = \alpha$ așadar $R = r \cdot \sin \alpha$ apoi

$$h_1 = r(1 - \cos \alpha) \text{ iar } h_2 = 2r - h_1 = r(1 + \cos \alpha)$$

$$V_1 = \frac{\pi h_1}{3} (R_2^2 + R^2 + R_2 \cdot R) = \frac{\pi r^3}{3} (1 - \cos \alpha) \left[\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} + \sin^2 \alpha + 1 - \cos \alpha \right]$$

$$V_2 = \frac{\pi h_2}{3} (R_1^2 + R^2 + R_1 \cdot R) = \frac{\pi r^3}{3} (1 + \cos \alpha) \left[\frac{(1 + \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} + \sin^2 \alpha + 1 + \cos \alpha \right]$$

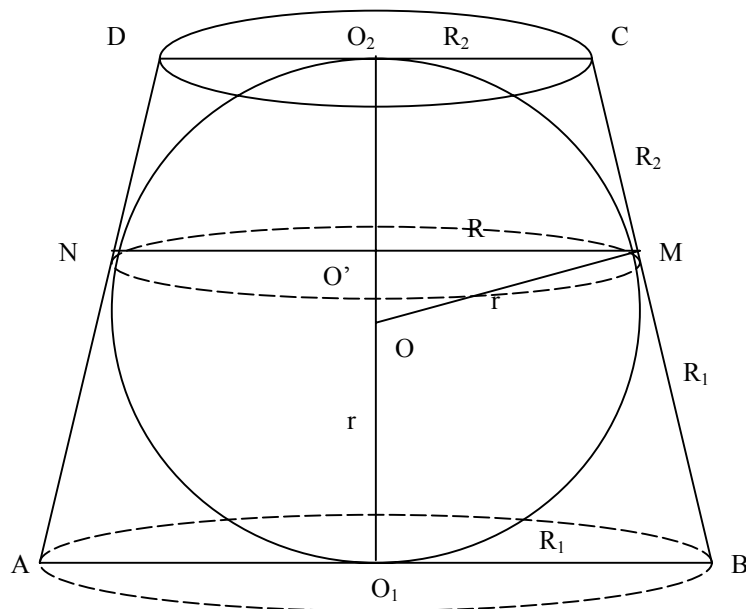
Folosind formula fundamentală a trigonometriei obținem

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 + \cos \alpha} \cdot (\cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 3) / \frac{(1 + \cos \alpha)^2}{1 - \cos \alpha} \cdot (3 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha) = \\ &= \left(\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)^3 \cdot \frac{\cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 3}{3 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha} \end{aligned}$$

Cazul particular $\alpha = 60^\circ$ impune $R_1 = r \cdot \sqrt{3}$; $R_2 = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$h_1 = r \cdot \frac{1}{2} \quad h_2 = r \cdot \frac{3}{2} \quad R = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi}{3} \frac{r}{2} (3r^2 + \frac{3}{4}r^2 + r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4})}{\frac{\pi}{3} \frac{3r}{2} (r^2 + \frac{3}{4}r^2 + r^2 \cdot \frac{1}{2})} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(\frac{3}{1} + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4})}{(\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2})} = \frac{15 + \sqrt{3}}{13}$$



Enunț: Două sfere de aceeași rază r sunt tangente una alteia. Determinați raza sferei tangente fețelor unghiului diedru precum și sferelor date.

Soluție: Exprimăm $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{OP - MN}{MO}$

Echivalent $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{x - r}{\sqrt{4xr + x^2}}$

Prin ridicare la pătrat scriem ecuația:

$$(x-r)^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} (4xr + x^2)$$

$$x^2(1-2\sin^2 \frac{\alpha}{2}) - x \cdot r(1+2\sin^2 \frac{\alpha}{2}) + r^2 = 0$$

$$x^2 \cdot \cos \alpha - 2x \cdot r(2 - \cos \alpha) + r^2 = 0$$

$$\Delta = 4r^2 \cdot (2 - \cos \alpha)^2 - 4r^2 \cos \alpha =$$

$$= 4r^2 (4 - 4\cos \alpha + \cos^2 \alpha - \cos \alpha) =$$

$$= 4r^2 (4 - 5\cos \alpha + \cos^2 \alpha) =$$

$$= 4r^2 (\cos \alpha - 1)(\cos \alpha - 4) > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2r(2 - \cos \alpha) \pm 2r\sqrt{(\cos \alpha - 1)(\cos \alpha - 4)}}{2 \cos \alpha} =$$

$$= \frac{r[2 - \cos \alpha \pm \sqrt{(\cos \alpha - 1)(\cos \alpha - 4)}]}{\cos \alpha}$$

Observație Deducem că există două sfere cu proprietatea căutăată

$$R_0 = \frac{r[2 - \cos \alpha + \sqrt{(\cos \alpha - 1)(\cos \alpha - 4)}]}{\cos \alpha}$$

$$r_0 = \frac{r[2 - \cos \alpha - \sqrt{(\cos \alpha - 1)(\cos \alpha - 4)}]}{\cos \alpha}$$

Bibliografie

[1] *Manual pentru clasa a X-a*: -Edit. MATHPRESS, M.GANFA;2000

[2] *“Teme alese de geometrie”*- Edit. Plus București

[3] *“Olimpiade și concursuri”*- ARTUR BALAUCA, Edit. TAIDA,Iasi 2002

[4] *Matematici pentru concursuri școlare- T. Andreescu+Col; Edit. GIL-ZALĂU,2001.*