<u>CLASA a-X-a</u>

Coordonator Vasile Pop
Viorel Lupşor

MATEMATICĂ
PROGRAMA ŞCOLARA PENTRU CLASELE DE EXCELENȚA
X

ARGUMENT

Studiul matematicii prin clasele de excelență, urmăreşte în principal crearea unui cadru organizat, în care elevii talentați la matematică, proveniți din diferite medii şcolare, să poată intra în contact, şi în timp relativ scurt, să formeze un grup performant. Aceşti elevi, beneficiind de o pregătire pe măsura potențialului lor intelectual, vor contribui ulterior la formarea unei elite româneşti în domeniul matematicii.

Realizarea unei programe pentru clasele de excelență, precum şi modul în care se va lucra pe această programă, constituie o noutate pentru învățământul românesc. Din acest motiv elaborarea prezentei programe trebuie înțeleasă ca o etapă necesară unui început de drum.

Un colectiv de cadre didactice din învățământul preuniversitar şi universitar din CRTCP Cluj, cu experiență în domeniul pregătirii elevilor capabili de performanțe superioare, au format o echipă care a realizat programa şi manualul care conține exerciții şi probleme extrem de utile pentru desăvârşirea pregătirii acestor elevi.

În selectarea conținuturilor programei s-a ținut cont de tendințele actuale în formularea subiectelor la concursurile şi olimpiadele şcolare, dar şi de tradițiile şcolii româneşti de matematică. Numeroasele cărți şi reviste adresate „vârfurilor" au constituit o importantă sursă bibliografică în tratarea temelor. Temele propuse constituie o extindere firească a programei analitice obligatorii de matematică şi parcurgerea lor este necesară pentru abordarea unor probleme mai dificile. Anumite teme vor fi tratate pe parcursul mai multor ani de studiu (evident cu o problematică corespunzătoare) asigurându-se astfel continuitatea şi coerența procesului de învățare. Mai trebuie precizat că la elaborarea programei echipa a avut în vedere faptul că matematica nu este un produs finit, ci un proces intelectual în care, pe suportul unor cunoştințe solide, primează inițiativa personală. Astfel, această programă oferă posibilități autentice de opțiune pentru profesori şi elevi.

Programa se adresează elevilor claselor X-XII şi a fost concepută pentru un număr de 2 ore/săptămână (în cele 30 de săptămâni ale anului şcolar în care se lucrează cu clasele sau grupele de excelență). Ca o completare la programa obligatorie de matematică, competențelor generale le-au mai fost adăugate încă două care au rolul de a orienta demersul didactic către formarea unor ansambluri structurate de cunoştințe generate de specificul activității intelectuale matematice la nivel de performanțe superioare. Programa are următoarele componente:

- competențe generale
- competențe specifice şi conținuturile corelate cu acestea
- valori şi atitudini
- sugestii metodologice.

Competențe generale

1. **Folosirea corectă a terminologiei specifice matematicii în contexte variate**
2. **Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice**
3. **Utilizarea corectă a algoritmilor matematici în rezolvarea de probleme cu grade diferite de dificultate**
4. **Exprimarea şi redactarea corectă şi coerentă în limbaj formal sau în limbaj cotidian, a rezolvării sau a strategiilor de rezolvare a unei probleme**
5. **Analiza unei situații problematice şi determinarea ipotezelor necesare pentru obținerea concluziei**
6. **Generalizarea unor proprietăți prin modificarea contextului inițial de definire a problemei sau prin îmbunătățirea sau generalizarea algoritmilor**
7. **Emiterea unor judecăți de valoare pentru rezolvarea problemelor inventiv şi euristic-creative**
8. **Dobândirea unei imagini de ansamblu a matematicii elementare ca parte a unui sistem aflat în permanentă evoluție şi interacțiune cu lumea înconjurătoare**

<table>
<tr><th>Competențe specifice</th><th>Conținuturi</th></tr>
<tr><td>1.Observarea şi diferențierea diferitelor tipuri de ecuații, inecuații, inegalități, identități şi sisteme de ecuații
2. Identificarea unor identități şi inegalități clasice şi rezolvarea de probleme pe baza acestora
3. Alegerea modelului matematic al unei probleme algebrice utilizând trigonometria, vectorii sau numerele complexe în scopul optimizării efectuării unor calcule
4.1. Transpunerea în limbajul numerelor complexe a unor proprietăți algebrice şi geometrice
4.2. Stabilirea de condiții necesare şi suficiente ca un şir să fie progresie aritmetică sau geometrică
5.1. Utilizarea proprietăților unor funcții (monotonie, convexitate) în scopul rezolvării de ecuații, inecuații, sisteme exponențiale şi logaritmice nestandard
5.2.Determinarea unor polinoame sau a numărului de elemente ale unei mulțimi care satisfac anumite condiții date
6. Utilizarea elementelor de combinatorică şi progresiile la calculul unor sume
7. Realizarea unor implicații între problemele tipice cu progresii, funcții exponențiale şi logaritmice, polinoame, combinatorică, probleme de geometrie în spațiu şi cele propuse la concursurile şi olimpiadele şcolare
8.1. Conştientizarea şi abilitatea utilizării unei varietăți de metode care stau la baza rezolvării ecuațiilor, inecuațiilor, inegalităților şi sistemelor de ecuații</td>
<td>Metode de rezolvare a problemelor de algebră
• Metoda trigonometrică
• Metoda vectorială
• Metode de rezolvare a ecuațiilor, inecuațiilor şi sistemelor exponențiale şi logaritmice nestandard

Şiruri şi progresii

Numere complexe
• Numere complexe în algebră
• Numere complexe în geometrie
• Ecuații în C

Elemente de combinatorică
• Probleme de numărare
(de ex. : determinarea numărului de funcții, de submulțimi, de puncte din plan sau spațiu cu anumite proprietăți)
• Sume combinatorice
(de ex. : formula lui Li- Jen- Shu, formula lui Dixon, identitățile lui Abel)

Probleme de geometrie în spațiu

Polinoame
• Criterii de ireductibilitate pentru polinoame
(Criteriul lui Eisenstein şi al lui Schőnemann)</td></tr>
</table>

8.2. Realizarea de conexiuni între algebră, vectori, geometrie şi trigonometrie prin rezolvarea problemelor utilizând diferite tehnici	

VALORI ŞI ATITUDINI

Noul curriculum şcolar pentru clasele de excelenţă propus la matematică are în vedere formarea la elevi a următoarelor valori şi atitudini în plus faţă de cele specificate prin curriculumul şcolar obligatoriu :

- Manifestarea unor opinii competente cu privire la abordarea problemelor intuitiv şi euristic-creative bazate pe explorare, inspiraţie şi invenţie
- Dezvoltarea unei gândiri reflexive, independente, flexibilă şi abstractă specifică matematicii
- Interesul pentru modul de dezvoltare a ideilor şi rezultatelor matematice
- Curiozitatea faţă de noile deschideri din domeniul matematicii

SUGESTII METODOLOGICE

Prin prezentul curriculum pentru clasele de excelenţă se intenţionează ca, pe parcursul liceului, elevii să dobândească competenţe şi să-şi structureze un set de valori şi atitudini specifice pregătirii de înaltă performanţă. Acestea se regăsesc în următoarele aspecte ale învăţării, vizate de practica pedagogică :

- Analizarea şi elaborarea unui plan de rezolvare pentru problemele atipice şi/sau dificile din domeniile studiate
- Formarea obişnuinţei de a formula probleme şi situaţii problemă
- Analiza unei probleme din punct de vedere al ideii centrale
- Reparcurgerea căii de rezolvare a problemei pentru a obţine un rezultat mai bun, ameliorat sau optimizat printr-o reproiectare creativă
- Identificarea unor metode de lucru valabile pentru clase de probleme
- Iniţeirea şi realizarea creativă a unei investigaţii pornind de la tematica propusă
- Formarea deprinderii de a anticipa rezultate matematice pornind de la datele existente
- Formarea obişnuinţei de a face conexiuni intra şi interdisciplinare

Acest curriculum are drept obiectiv ca fiecare elev capabil de performanțe superioare să-şi poată dezvolta competențele într-un ritm individual, de a-şi transfera cunoştințele acumulate dintr-o zonă de studiu în alta. Pentru aceasta se recomandă următoarele activități :

- Alternarea prezentării conținuturilor, cu moduri variate de antrenare a gândirii
- Solicitarea de frecvente corelații intra şi interdisciplinare
- Punerea elevului în situația ca el însuşi să formuleze sarcini de lucru adecvate
- Obținerea de soluții sau interpretări variate pentru aceeaşi unitate informațională
- Prevederea de sarcini rezolvabile prin activitatea în grup
- Utilizarea unor softuri educaționale

Având în vedere specificul claselor de excelență, metodele folosite in practice instructiv-educativă vizează următoarele aspecte:

- Utilizarea strategiilor euristice, care lasăelevul să-şi asume riscul incertitudinii, al încercării şi erorii, specifice investigației ştiințifice
- Utilizarea strategiilor creative, care lasă elevul să se afirme în planul originalității, spontaneității, diversității şi care pun accentul pe capacitatea de reflecție, sinteză, evaluare critică şi creație
- O îmbinare şi o alternanță sistematică a activității bazate pe efort individual cu cele care solicită efort colectiv
- Însuşirea unor metode de informare şi de documentare independentă, care oferă deschiderea spre autoinstruire şi spre învățarea continuă

1. Metoda trigonometrică in rezolvarea problemelor de algebră

1.1. Introducere

O cale ingenioasă de rezolvare a unor probleme de algebră este transformarea lor în probleme de trigonometrie, folosind substituții potrivite.

Astfel, unele ecuații, sisteme, identități sau inegalități devin mai uşor abordabile folosind cunoştinţe de trigonometrie. Pentru înțelegerea şi însuşirea metodei trigonometrice este necesară cunoaşterea tuturor identităților studiate precum şi a proprietăților funcțiilor trigonometrice directe şi a celor inverse.

În aplicarea metodei este util să se țină seama de mulțimea valorilor variabilelor care urmează a fi substituite, pentru ca substituțiile folosite să fie într-adevăr operante.

În cele ce urmează vom exemplifica metoda trigonometrică la rezolvarea unor identități, inegalități, ecuații şi sisteme de ecuații.

Bibliografie

- *V.Tudor, Probleme de algebră cu rezolvări ingenioase, Ed. Carminis, Piteşti, 1999*
- *M.Cocuz, Culegere de probleme de matematică, Ed.Academiei, 1984.*
- *M. Bălună, Zece lecţii alese de matematică, Ed S.S.M.,*1998

Probleme rezolvate (1)

A. IDENTITĂȚI

R1.2.1. Dacă $x, y, z \in R$, cu proprietatea $x + y + z = xyz$, şi dacă nici unul dintre ele nu este egal cu $\frac{1}{\sqrt{3}}$, să se demonstreze că:

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{(3x - x^3)(3y - y^3)(3z - z^3)}{(1 - 3x^2)(1 - 3y^2)(1 - 3z^2)}.$$

Soluție:

Forma expresiei de demonstrat ne sugerează folosirea identității $tgA + tgB + tgC = \; = tgA \cdot tgB \cdot tgC$ valabilă în orice triunghi nedreptunghic ABC. Notăm $x = tga$, $y = tgb$, $z = tgc$, unde $a, b, c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Avem $xy \neq 1$, deoarece, dacă $xy = 1$, din $x + y + z = xyz$ ar rezulta $x + y = 0$ şi deci $x^2 = -1$ imposibil. Cum $tga \cdot tgb \neq 1$, are sens relația $tg(a + b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb} \Leftrightarrow tg(a + b) = \frac{x + y}{1 - xy} = -z = tg(-c)$, deci $a + b + c = k\pi$, $k \in Z$ şi cum $a, b, c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \{-1, 0, 1\}$. Reciproc, dacă avem trei unghiuri a, b, c diferite de $\frac{(2k + 1)\pi}{2}$, $k \in Z$ şi $a + b = k\pi - c$, $\frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb} = tg(a + b) = -tgc$, de unde $tga + tgb + tgc = tga \cdot tgb \cdot tgc$. Dacă $tgu \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $u \neq \frac{(2k + 1)\pi}{2}, \forall k \in Z$, are sens $tg3u = \frac{3tgu - tg^3u}{1 - 3tg^2u}$ şi cum $3a + 3b + 3c = 3k\pi$, obținem $tg(3a + 3b + 3c) = 0$, de unde $tg3a + tg3b + tg3c = \; = tg3a \cdot tg3b \cdot tg3c$ care este echivalentă cu egalitatea propusă.

Observație

1.Pornind de la identitatea

$tg(a + b + c + d) = \frac{\sum tga - \sum tga \cdot tgb \cdot tgc}{1 + tga \cdot tgb \cdot tgc \cdot tgd - \sum tga \cdot tgb}$, obținem

$tg4x = \frac{4tg(1 - tg^2x)}{1 - 6tg^2x + tg^4x}$. Cu acestea putem obține şi alte identități condiționate cum ar fi: Dacă $x+y+z+t=xyz+yzt+ztx+txy$, atunci $X+Y+Z+T=XYZ+ZYT+ZTX+TXY$ (sau $\sum X=\sum XYZ$), unde $X=\dfrac{4x\left(1-x^2\right)}{1-6x^2+x^4}$ şi analoagele pentru Y,Z,T. Observăm că dacă $+b+c+d=\pi$, atunci $\sum tga=\sum tga\cdot tgb\cdot tgc$;

$$tg\left(4a+4b+4c+4d\right)=\frac{\sum X-\sum XYZ}{1+XYZT-\sum XY}=$$

$$=tg4\pi=0\Rightarrow\sum X=\sum XYZ.$$

2. Pornind de la aceeaşi formulă putem rezolva următoarea problemă:

Pentru toate valorile admisibile ale variabilelor reale a,b,c să se arate că $\dfrac{a-b}{1+ab}+\dfrac{b-c}{1+bc}+\dfrac{c-a}{1+ac}=\dfrac{a-b}{1+ab}\cdot\dfrac{b-c}{1+bc}\cdot\dfrac{c-a}{1+ca}$. Notând $a=tg\alpha$, $b=tg\beta$, $c=tg\chi$, $\alpha,\beta,\chi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, cu ajutorul formulei $tg\left(u-v\right)=\dfrac{tgu-tgv}{1+tgu\cdot tgv}$, deducem relația $tg\left(\alpha-\beta\right)+tg\left(\beta-\chi\right)+tg\left(\chi-\alpha\right)=tg\left(\alpha-\beta\right)\cdot tg\left(\beta-\chi\right)\cdot tg\left(\chi-\alpha\right)$ care este echivalentă cu egalitatea din enunț.

R1.2.2. Dacă $a^2+b^2\le 4$, $a\le b$, $a,b\in\left[0,2\right]$, să se demonstreze egalitatea:

$$\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}\right)^2}=b$$

Soluție:

Condițiile problemei ne sugerează substituțiile $a=\sin\alpha+\sin\beta$, $b=\cos\alpha+\cos\beta$, care verifică $a^2+b^2\le 4$, deoarece $\cos\left(\alpha-\beta\right)\le 1$. Avem succesiv:

$$\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\alpha-\beta\right)}{1+\cos\left(\alpha-\beta\right)}}=tg\frac{\alpha-\beta}{2};\quad \frac{b}{2}\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{2}.$$

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}=\sin\alpha;\quad \frac{a}{2}-\frac{b}{2}\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}=\sin\beta.$$

Egalitatea devine $\sqrt{1-\sin^2\alpha}+\sqrt{1-\sin^2\beta}=\cos\alpha+\cos\beta=b$.

R1.2.3. Să se arate că:

$$\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}}+\frac{1+y}{\sqrt{1+y+y^2}}+\frac{1+z}{\sqrt{1+z+z^2}}=2\sqrt{3},$$ dacă şi numai dacă $x=y=z=1$,

$(x,y,z\geq 0)$.

Soluție:

Observând că $\sqrt{x^2+x+1}$ este latura opusă unghiului de 120° în triunghiul cu laturile 1 şi x, considerăm ΔABC cu $AC=1$, $AB=x$, $BC=\sqrt{x^2+x+1}$, $m(A)=120°$. Din teorema sinusurilor în ΔABC avem:

$$AC=2R\sin\alpha,\ \alpha=m(\angle ABC)\quad;$$
$$AB=2R\sin(60°-\alpha);$$
$$BC=2R\sin 120°;$$

Cum $AB+AC>BC$, avem:

$$1<\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{2R\sin\alpha+2R\sin(60°-\alpha)}{2R\sin 120°}=\frac{2[\sin\alpha+\sin(60°-\alpha)]}{\sqrt{3}}=$$

$=\frac{4\sin 30°\cos(30°-\alpha)}{\sqrt{3}}\leq\frac{2}{3}$. Deci $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$,cu egalitate dacă şi numai dacă $x=1$. Analog $\frac{1+y}{\sqrt{y^2+y+1}}\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{1+z}{\sqrt{z^2+z+1}}\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$ şi prin urmare egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x=y=z=1$.

Observație:

Pentru demonstrarea inegalității $\sum\frac{1+x}{\sqrt{x^2+x+1}}\leq 2\sqrt{3}$, am arătat mai întâi trei inegalități mai simple, pe care apoi le-am adunat. Acest procedeu se numeşte „spargerea” inegalității.

B. INEGALITĂȚI

R1.2.4. Să se arate că dacă a,b,c sunt numere reale pozitive oarecare, iar x,y,z numere reale, avem:

$$a(1+yz)\sqrt{1+x^2}+b(1+zx)\sqrt{1+y^2}+c(1+xy)\sqrt{1+z^2}\le(a+b+c)\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$$

Soluție:

Deoarece $x,y,z\in R$, $(\exists)\alpha,\beta,\chi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $x=tg\alpha$, $y=tg\beta$, $z=tg\chi$. Cu aceste notații, primul membru al inegalității se scrie succesiv:

$$\sum a(1+yz)\sqrt{1+x^2}=\sum a\left((1+tg\beta\cdot tg\chi)\sqrt{1+tg^2\alpha}\right)=\sum\frac{a\cos(\beta-\chi)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\chi}$$

Membrul doi se scrie: $(a+b+c)\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}=\dfrac{a+b+c}{\cos\alpha\cos\beta\cos\chi}$; Cu acestea, inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu:

$$a\cos(\beta-\chi)+b\cos(\chi-\alpha)+c\cos(\alpha-\beta)\le a+b+c,$$

care este evidentă. Egalitate avem dacă şi numai dacă $\cos(\beta-\chi)=1$, $\cos(\chi-\alpha)=1$, $\cos(\alpha-\beta)=1$, deci $\alpha=\beta=\chi$, adică $x=y=z$.

Observație:

Inegalitatea se poate demonstra şi prin „spargerea” ei în trei inegalități care se pot deduce folosind aceeaşi metodă trigonometrică. Acestea sunt: $a(1+yz)\sqrt{1+x^2}\le a\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$ şi analoagele.

R1.2.5. Se consideră numerele reale $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[-1,1]$. Ştiind că suma cuburilor acestor numere este 0, să se arate că $x_1+x_2+\cdots+x_n\le\frac{n}{3}$.

Soluție:

Pornim de la formula $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$. Deoarece $x_i\in[-1,1]$, $(\exists)\ \alpha_i\in[0,\pi]$, $i=\overline{1,n}$ astfel încât $x_i=\cos\alpha_i$. Deducem succesiv: $x_1+x_2+\cdots+x_n=$

$$=\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n=\frac{4\cos^3\alpha_1-\cos3\alpha_1}{3}+\frac{4\cos^3\alpha_2-\cos3\alpha_2}{3}+\cdots+$$

$$+\frac{4\cos^3\alpha_n-\cos 3\alpha_n}{3}=-\frac{1}{3}\left(\cos 3\alpha_1+\cos 3\alpha_2+\cdots+\cos 3\alpha_n\right)\le\frac{n}{3}.$$

R1.2.6. Dacă $x\in\mathbf{R}$, $|x|\le 1$, $n\in N$, atunci $(1-x)^n+(1+x)^n\le 2^n$

Soluție:

Deoarece $|x|\le 1$, putem nota $x=\cos 2t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Inegalitatea din enunț devine

$(1-\cos 2t)^n+(1+\cos 2t)^n\le 2^n \Leftrightarrow 2^n\sin^{2n}t+2^n\cos^{2n}t\le 2^n \Leftrightarrow \sin^{2n}t+\cos^{2n}t\le 1$ inegalitate care se obține prin adunarea inegalităților $\sin^{2n}t\le\sin^2 t$ şi $\cos^{2n}t\le\cos^2 t$. Egalitate avem în cazul $n=1$.

C. PROBLEME DE EXTREM

R1.2.7. Să se afle minimul funcției $f:R\to R$, $f(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$

Soluție:

$x\in R$, deci $(\exists)\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $x=tg\alpha$. Atunci

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{tg^2\alpha+2}{\sqrt{tg^2\alpha+1}}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot|\cos\alpha|=\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot|\cos\alpha|\ge\frac{2|\cos\alpha|}{\cos^2\alpha}\cdot|\cos\alpha|=2.$$ Minimul este 2 şi se atinge pentru $x=0$.

R1.2.8. Să se determine minimul şi maximul expresiei

$$E(x,y)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2},\ x,y\in R.$$

Soluție:

$x,y\in[-1,1]$, notăm $x=\sin\alpha$, $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $y=\cos\beta$, $\beta\in[0,\pi]$.

Atunci $E(x,y)=\sin\alpha\cdot|\sin\beta|+\cos\beta\cdot|\cos\alpha|=\pm\cos(\alpha\pm\beta)\le 1$, deci

$\left|x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right|\le 1\Leftrightarrow -1\le E(x,y)\le 1$.

Minimul se atinge pentru $(x,y)\in\left\{(0,-1),(-1,0),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ iar maximul pentru $(x,y)\in\left\{(0,1),(1,0),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

R1.2.9. Să se determine mulțimea valorilor funcției

$$f:[-1,1]\to R,\ f(x)=\frac{3+2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.$$

Soluție: Din $|x|\le 1$, $y=f(x)>0$, este suficient să studiem mulțimea valorilor lui y^2. Prin schimbarea de variabilă $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0,\pi]$, $y=\frac{3+2|\sin\alpha|}{\sqrt{2}\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|+\sqrt{2}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$, de unde $y^2=\frac{4t^2+12|t|+9}{2(|t|+1)}$, cu $t=\sin\alpha$. Din $\alpha\in[0,\pi]$, $t\in[0,1]$,rezultă $y^2=2(t+1)+\frac{1}{2(t+1)}+2$. Considerăm funcția $g:[1,\infty)\to R$, $g(x)=x+\frac{1}{x}$. Arătăm că g este strict crescătoare pentru $x\in[1,\infty)$. Într-adevăr, $0\le x_1\le x_2\Rightarrow g(x_1)-g(x_2)=(x_1-x_2)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)<0$.

Pentru $x=2(t+1)$, cum $t\in[0,1]\Rightarrow x\in[2,4]$.

$g([2,4])=\left[\frac{5}{2},\frac{17}{4}\right]$. Deducem $y^2\in\left[\frac{9}{2},\frac{25}{4}\right]$, deci $y\in\left[\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{5}{2}\right]=\operatorname{Im} f$

D. ECUAȚII

R1.2.10. Să se rezolve ecuația $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$, $x\in R$.

Soluție:

Condiția de existență a ecuației este $|x|\le 1$. Se impune condiția $4x^3-3x\ge 0$. Deoarece $|x|\le 1$, putem face schimbarea de variabilă $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0,\pi]$ şi ecuația se scrie succesiv

$\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \Leftrightarrow |\sin\alpha| = \cos 3\alpha$. Pentru $\alpha \in [0,\pi]$, $\sin\alpha \geq 0$ şi deci $\sin\alpha = \cos 3\alpha \Leftrightarrow \cos 3\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ cu soluţiile $\alpha \in \left\{\frac{3\pi}{4}+k\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{8}+k\pi\right\}$, $k \in Z$. Cum $\alpha \in [0,\pi]$ obţinem $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}$, $\alpha_2 = \frac{5\pi}{8}$, $\alpha_3 = \frac{3\pi}{4}$, deci $x_1 = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

R1.2.11. Să se rezolve ecuaţia: $\left|x+\sqrt{1-x^2}\right| = \sqrt{2}\left(2x^2-1\right)$

Soluţie:

Condiţia de existenţă este $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1]$. Facem schimbarea de variabilă $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0,\pi]$ care ne conduce la ecuaţia $|\cos\alpha + \sin\alpha| = \sqrt{2}\cos 2\alpha$. Pentru $\cos 2\alpha \geq 0$ ridicăm la pătrat şi obţinem succesiv $1+\sin 2\alpha = 2\cos^2 2\alpha \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$ sau $\sin 2\alpha = -1$. Din $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$ rezultă $\alpha \in \left\{(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} / k \in Z\right\}$. Convine $\alpha = \frac{\pi}{12}$ deci $x = \cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. Din $\sin 2\alpha = -1$ rezultă $\alpha \in \left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} / k \in Z\right\}$. Convine $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ de unde $x = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

E. SISTEME DE ECUAŢII

R1.2.12. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale pozitive sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z = xyz \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

(Mihail Bencze)

Soluție:

Din $x, y, z > 0$, rezultă că $(\exists)\ \alpha, \beta, \chi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $x = tg\alpha$, $y = tg\beta$, $z = tg\chi$. Deoarece $tg(\alpha + \beta + \chi) = \frac{tg\alpha + tg\beta + tg\chi - tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\delta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta - tg\beta \cdot tg\chi - tg\chi \cdot tg\alpha} = 0$ rezultă $\alpha + \beta + \chi = k\pi$, $k \in Z$, dar $\alpha, \beta, \chi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $\alpha + \beta + \chi = \pi$.

A doua ecuație se scrie: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\chi = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (1)

Avem $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\chi = \sin\alpha + 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta - \chi}{2}$. Presupunând α constant, cum $\cos\frac{\alpha}{2} \geq 0$, vom avea maximul expresiei $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\chi$ pentru $\beta = \chi$. Analog $\alpha = \beta$, deci maximul se obține pentru triunghiul echilateral, prin urmare $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\chi \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Din (1) rezultă $\alpha = \beta = \chi = \frac{\pi}{3}$, deci $x = y = z = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

R1.2.13. Fie $a, b, c > 0$. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} \frac{x}{a(1 + x^2)} = \frac{y}{b(1 + y^2)} = \frac{z}{c(1 + z^2)} \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

admite soluții în R^3, dacă şi numai dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi.

(V. Paterău)

Soluție:

Ecuația a treia ne sugerează folosirea identității

$$tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2} + tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\chi}{2} + tg\frac{\chi}{2}tg\frac{\alpha}{2} = 1$$

valabilă într-un triunghi cu unghiurile α, β, χ deci $\alpha + \beta + \chi = \pi$. Observăm că dacă (x_0, y_0, z_0) este soluție, atunci şi $(-x_0, -y_0, -z_0)$ este soluție a sistemului. Considerăm $x, y, z > 0$ şi notăm $x = tg\frac{\alpha}{2}$, $y = tg\frac{\beta}{2}$, $z = tg\frac{\chi}{2}$.

Deducem succesiv: $\frac{x}{a\left(1+x^2\right)}=\frac{\sin\alpha}{2a}$; $\frac{y}{b\left(1+y^2\right)}=\frac{\sin\beta}{2b}$; $\frac{z}{c\left(1+z^2\right)}=\frac{\sin\chi}{2c}$ şi din primele două egalități avem $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\chi}{c}$ care exprimă teorema sinusurilor într-un triunghi ABC, de laturi a,b,c şi unghiuri α,β,χ.

Soluțiile sistemului sunt deci $(x,y,z)\in\left\{\left(tg\frac{\alpha}{2},tg\frac{\beta}{2},tg\frac{\chi}{2}\right)\left(-tg\frac{\alpha}{2},-tg\frac{\beta}{2},-tg\frac{\chi}{2}\right)\right\}$.

2. Şiruri şi progresii

2.1. Progresii aritmetice

2.1.1. Definiţii echivalente

i. Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă orice termen, începând cu al doilea, este egal cu precedentul la care se adaugă o constantă reală *r*, numită raţia progresiei.

ii. Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă există un număr real r, numit raţia progresiei astfel încât $a_{k+1} = a_k + r \ (\forall) k \geq 1$.

iii. Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă diferenţa oricăror doi termeni consecutivi este constantă, adică $a_{k+1} - a_k = r \ (\forall) k > 1$, constanta este numită raţia progresiei.

Observaţii:

1. Dacă $r = 0$, progresia este un şir constant $a_n = a_1$, $(\forall) n \geq 1$

2. Vom considera fie progresii aritmetice cu un număr infinit de termeni, fie progresii aritmetice cu un număr finit de termeni $\div a_1, a_2, \dots, a_n$.

2.1.2. Propoziţie Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă termenul general a_n este dat de relaţia $a_n = a_1 + (n-1)r, (\forall) n \geq 1$, unde r este raţia progresiei.

Demonstraţia acestei propoziţii este imediată.

2.1.3. Propoziţie Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă termenul general a_n este dat de relaţia $a_n = a_k + (n-k)r, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstraţie. Dacă are loc relaţia pentru $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a_{n+1} = a_k + (n+1-k)r$, deci $a_{n+1} - a_n = r, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Reciproc, din $a_{k+1} - a_k = r, a_{k+2} - a_{k+1} = r, \dots, a_n - a_{n-1} = r$, rezultă $a_n - a_k = (n-k)r$, deci $a_n = a_k + (n-k)r.$

Observaţii:

1. Pentru k=1 se obţine formula termenului general din 2.1.2.
2. a_k poate fi orice termen al progresiei , deci $r = \dfrac{a_n - a_k}{n-k}$

2.1.4. Propoziție. Un şir $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă are loc relația $\frac{a_n - a_m}{n-m} = \text{constant}= r \ \left(\forall\right) n,m \in \mathbb{N}^*, n \neq m.$

Demonstrație: Dacă şirul este progresie aritmetică, atunci din propoziția 2.1.3 , avem $a_n = a_m + (n-m)r$, sau $\frac{a_n - a_m}{n-m} = r$. Reciproc, dacă are loc relația pentru orice $n \neq m$, atunci prin substituția $n \to k+1$ şi $m \to k$, rezultă $a_{k+1} - a_k = r, (\forall) k \in \mathbb{N}^*$ şi deci şirul este o progresie aritmetică.

2.1.5 Un şir $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă oricare ar fi trei termeni consecutivi, cel din mijloc este media aritmetică a celorlalți doi, adică $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$, $(\forall) k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$ .Demonstrația este imediată.

2.1.6 Propoziție. Un şir $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă are loc relația $(n-1)a_{n+1} = na_n - a_1, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație : Dacă $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică , atunci din $a_{k+1} = a_k + r$, avem că relația din enunț este adevărată. Reciproc, dacă este semnificată relația din enunț $(\forall) n \geq 1$, atunci scriind-o pentru $n-1$, avem $(n-2)a_n = (n-1)a_{n-1} - a_1$ şi obținem $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n, (\forall) n \geq 2$ şi din propoziția precedentă rezultă că şirul este progresie aritmetică.

2.1.7 Propoziție. Într-o progresie aritmetică finită, suma termenilor egal depărtați de extreme este egală cu suma termenilor extremi, adică $a_k + a_{n+1-k} = a_1 + a_n, (\forall) k \leq n$. Propoziția rezultă imediat din precedentele.

2.1.8 Propoziție. Un şir $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă suma $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, a primilor n termeni este dată de relația $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație:

Dacă $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică, atunci scriind

$$\left.\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2S_n = n(a_k + a_{n-k+1}) = n(a_1 + a_n),$$

rezultă $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Reciproc, dacă suma primilor n termeni este dată de relația $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, atunci $a_{n-1} = S_{n-1} - S_n = \dfrac{n+1}{2}(a_1 + a_{n+1}) - \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$, deci $(n-1)a_{n+1} = na_n - a_1$ și conform cu 2.1.6, rezultă că șirul este o progresie aritmetică.

Observație:

1. Să se mai scrie $S_n = \dfrac{(a_k + a_{n-k+1})n}{2}$
2. $S_n = \dfrac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} = \dfrac{n^2 r}{2} + (2a_1 - r)\dfrac{n}{2} = \alpha n^2 + \beta n$,deci S_n este funcție de gradul al doilea în n.

2.1.9 Propoziție Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă și numai dacă suma S_n, a primilor n termeni este dată de relația $S_n = \alpha n^2 + \beta n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.

Demonstrație : Dacă șirul este o progresie aritmetică, atunci din propoziția precedentă $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} = \dfrac{r}{2}n^2 + \dfrac{2a_1 - r}{2}n = \alpha n^2 + \beta n$ unde $\alpha = \dfrac{r}{2}$ și $\beta = a_1 - \dfrac{r}{2}$. Reciproc, dacă $S_n = \alpha n^2 + \beta n$, atunci $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) - \alpha n^2 - \beta n = 2\alpha n + \alpha + \beta$ și deci $a_{n+1} - a_n = (2\alpha n + \alpha + \beta) - [2\alpha(n-1) + \alpha + \beta] = 2\alpha =$constant, de unde rezultă că șirul este o proiecție aritmetică cu rația $r = 2\alpha$, și $a_1 = \alpha + \beta$.

2.1.10 Propoziție Numerele reale a, b, c distincte, sunt termini (nu neapărat consecutivi) ai unei progresii aritmetice dacă și numai dacă $\dfrac{b-a}{c-b} \in \mathbb{Q}^*$.

Demonstrație: Numerele a, b, c fiind termini ai unei progresii, putem lua $a = a_k$, $b = a_m$, $c = a_n$, atunci $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a_m - a_k}{a_n - a_m} = \dfrac{(m-k)r}{(n-m)r} = \dfrac{m-k}{n-m} \in \mathbb{Q}^*$.
Reciproc putem presupune fără a restrânge generalitatea că $a < b < c$ și fie $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{k}{m} \in \mathbb{Q}^*$, sau $(m+k)b = ma + kc$. Definim progresia $a_1 = a, r = \dfrac{c-a}{k+m}$ și atunci $a_{k+1} = a_1 + k\dfrac{c-a}{k+m} = \dfrac{ka + ma + kc - ka}{k+m} = \dfrac{kc + ma}{k+m} = \dfrac{(m+k)b}{m+k} = b$ și

$a_{k+m+1} = a_1 + (k+m)r = a + (k+m)\dfrac{c-a}{k+m} = c$. Deci *a, b, c* sunt termini ai unei progresii aritmetice, a_1, a_{k+1} şi a_{k+m+1}, unde $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{k}{m}$.

Observație: Din propoziția precedentă rezultă că dacă $\dfrac{b-a}{c-b} \notin \mathbb{Q}$, atunci numerele a, b, c nu pot fi neaparat termeni ai unei progresii aritmetice.

2.2. Progresii geometrice

2.2.1. Definiții echivalente

i. Un şir $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică dacă orice termen începând cu al doilea, se obține din precedentul înmulțit cu o constantă reală nenulă numită rația progresiei.

ii. Un şir $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică dacă există $q \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $b_{k+1} = b_k \cdot q$, $(\forall) k \in \mathbb{N}^*$

iii. Un şir $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică dacă câtul oricăror doi termeni consecutivi este constant, adică $\dfrac{b_k+1}{b_k} = q =$ constant.

Relația de recurență între termenii consecutivi ai unei progresii geometrice este o relație de recurență liniară de forma $b_{n+1} = \alpha b_n + \beta$ cu $\beta = 0$ şi $\alpha = q \neq 0$.

Observații :

1. Dacă $q = 0$, progresia devine $b_1, 0, 0, ...$
2. Dacă $q = 1$, progresia este şirul constant $b_n = b_1$.
3. Dacă $b_1 > 0$, pentru $\dfrac{b_{k+1}}{b_k} = q > 1$ se obține o progresie strict crescătoare, iar dacă $0 < q < 1$ se obține o progresie strict descrescătoare, deoarece $\dfrac{b_{k+1}}{b_k} = q < 1$.
4. Vom considera fie progresii geometrice cu un număr finit de termeni $\div b_1, b_2, ..., b_n$, sau cu o infinitate de termeni $(b_n)_{n\geq 1}$.

2.2.2. Propoziție Un şir $(b_n)_{n\ge 1}$ este o progresie geometrică dacă şi numai dacă termenul general b_n este dat de relația $b_n = b_1 q^{n-1}$, $(\forall) n \ge 1$, unde $q \in \mathbb{R}^*$ este rația progresiei.

Demonstrație: Dacă şirul este o progresie geometrică, atunci dând lui *k* valori de la 1 la n în relația $b_{k+1} = b_k \cdot q$ şi înmulțind termen cu termen relațiile obținute, avem: $b_2 b_3 ... b_n = b_1 b_2 ... b_{n-1} q^{n-1}$, rezultă $b_n = b_1 q^{n-1}$.Reciproc, dacă termenul general al şirului este dat de relația $b_n = b_1 q^{n-1}$, atunci $\frac{b_{k+1}}{b_k} = q$, deci şirul este o progresie de rație q.

2.2.3. Propoziție Un şir $(b_n)_{n\ge 1}$ este o progresie geometrică dacă şi numai dacă termenul general este dat de relația $b_n = b_k q^{n-k}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrația este imediată.

Observație: b_k poate fi orice termen al şirului, deci $\left(\frac{b_n}{b_k}\right)^{\frac{1}{n-k}} = \textit{constant}=q$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

2.2.4. Propoziție Un şir $(b_n)_{n\ge 1}$ este o progresie geometrică dacă şi numai dacă are loc relația $\left(\frac{b_n}{b_m}\right)^{\frac{1}{n-m}} = \textit{constant}=q$, $(\forall) n \ne m$.

Demonstrație. Dacă $(b_n)_{n\ge 1}$ este progresie geometrică, atunci din $b_n = b_m \cdot q^{n-m}$ rezultă $\left(\frac{b_n}{b_m}\right)^{\frac{1}{n-m}} = \textit{constant}=q$.

Reciproc, dacă $\left(\frac{b_n}{b_m}\right)^{\frac{1}{n-m}} = \textit{constant}=q$, $(\forall) n \ne m$, atunci $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q \Rightarrow (b_n)_{n\ge 1}$ este o progresie geometrică.

2.2.5. Propoziție Un şir $(b_n)_{n\ge 1}, b_1 \ne 0$ este o progresie geometrică dacă şi numai dacă oricare ar fi trei termeni consecutivi, cel din mijloc este media geometrică a celorlalți doi, adică $b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$, $(\forall) k \ge 2$. Demonstrația rezultă imediat, la fel ca şi următoarea:

2.2.6. Propoziție Într-o progresie geometrică cu un numar finit de termeni, produsul terminilor egal despărtați de extreme este egal cu produsul terminilor extremi, adică $b_k b_{n-k+1} = b_1 b_n$.

2.2.7. Propoziție Un şir $(b_n)_{n\geq 1}$, neconstant este o progresie geometrică dacă şi numai dacă suma $S_n = b_1 + b_2 + ...b_n$,a primilor n termeni este dată de $S_n = b_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1, q \neq 0$.

Demonstrație. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} b_1 q^{k-1} = b_1 \sum\limits_{k=1}^{n} q^{k-1} = b_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$**.** Reciproc, dacă $S_n = b_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$,rezultă că şirul este o progresie geometrică cu rația q.

2.2.8. Propoziție Un şir $(b_n)_{n\geq 1}$ neconstant, $b_1 \neq 0$ este o progresie geometrică dacă şi numai dacă suma S_n a primilor n termeni este dată de relația $S_n = \alpha q^n + \beta, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*, q \in \mathbb{R}^* - \{1\}$.

Demonstrație Dacă şirul este o progresie goemetrică, atunci din propoziția precedentă avem $S_n = \dfrac{b_1}{q-1} q^n + \dfrac{b_1}{1-q} = \alpha q^n + \beta$, unde $\alpha = \dfrac{b_1}{q-1}, \beta = -\alpha$. Reciproc, dacă $S_n = \alpha q^n + \beta$, atunci $b_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (\alpha q^{n+1} + \beta) - (\alpha q^n + \beta) = \alpha q^n (q-1)$, deci $b_n = \alpha q^{n-1}(q-1)$, rezultă $b_{n+1} = b_n q$, deci este o progresie geometrică.

2.2.9. Propoziție Numerele a, b, c pozitive şi distincte sunt termeni (nu neapărat consecutivi) ai unei progresii geometrice dacă şi numai dacă $\dfrac{\lg b - \lg a}{\lg c - \lg b} \in \mathbb{Q}^*$.

Demonstrație Dacă *a*, *b*, *c* sunt termenii unei progresii geometrice, atunci fie $a = b_k, b = b_m, c = b_n$ şi

$$\frac{\lg b - \lg a}{\lg c - \lg b} = \frac{\lg b_1 q^{m-1} - \lg b_1 q^{k-1}}{\lg b_1 q^{n-1} - \lg b_1 q^{m-1}} = \frac{\lg q^{m-k}}{\lg q^{n-m}} = \frac{m-k}{n-m} \in \mathbb{Q}^*.$$ Reciproc, din

$\dfrac{\lg b - \lg c}{\lg c - \lg b} = \dfrac{k}{m} \in \mathbb{Q}^*$ rezultă succesiv $(m+k)\lg b = m \lg a + k \lg c$; sau

$b^{m+k} = a^m c^k$. Fie $b_1 = a$ şi $q = \left(\dfrac{c}{a}\right)^{\frac{1}{k+m}}$. Atunci

$b_{k+1} = b_1 q^k = a\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{k}{k+m}} = c^{\frac{k}{k+m}} a^{\frac{m}{k+m}} = \left(c^k a^m\right)^{\frac{1}{k+m}} = b$ şi

$b_{k+m+1} = b_1 q^{k+m} = a\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{k+m}{m+k}} = c$. Prin urmare a, b, c sunt termeni ai unei progresii geometrice b_1, b_{k+1} şi b_{k+m+1}.

2.3. Şiruri recurente

2.3.1. Noţiuni fundamentale

Se spune că un şir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de numere reale este definit de o relaţie de recurenţă dacă se cunoaşte o ecuaţie $F(n, x_n, x_{n-1}, ..., x_0) = 0$ care leagă termenul general x_n de termenii anteriori. În continuare ne vom referi doar la recurenţe de ordinul k definite explicit.

2.3.1. Definiţie. Spunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este definit printr-o **relaţie explicită de recurenţă de ordinul** k, $k \in \mathbf{N}^*$ dacă:

$$x_{n+k} = f(n, x_{n+k-1}, ..., x_{n+1}, x_n),\ \forall\, n \in \mathbf{N} \tag{2.3.1}$$

unde $f : \mathbf{N} \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ este o funcţie.

Vom numi **soluţie generală** a relaţiei de recurenţă (2.3.1) mulţimea şirurilor $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ care verifică relaţia de recurenţă.

Vom numi **soluţie particulară** a relaţiei de recurenţă (2.3.1) şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ care verifică relaţia de recurenţă şi

$x_0 = p_0, x_1 = p_1, ..., x_{k-1} = p_{k-1}$, unde $p_0, ..., p_{k-1} \in \mathbf{R}$ fixaţi

2.3.2. Cazuri particulare

(i) Dacă k=1 vom vorbi despre relaţii de recurenţă de ordinul 1.
(ii) Dacă k=2 vom vorbi despre relaţii de recurenţă de ordinul 2.
(iii) Dacă f este liniară, adică:

$$f(n, x_{n+k-1}, ..., x_n) = a_n^0 + a_n^1 x_{n+k-1} + ... + a_n^n x_n,$$

şirurile $(a_n^i)_{n\in\mathbf{N}}$ fiind date, atunci vorbim despre relaţii de recurenţă liniare.

Dacă $a_n^0 = 0, \forall\, n \in \mathbf{N}$ atunci relaţia de recurenţă se numeşte liniară şi omogenă.

Dacă $a_n^0 = 0, \forall\, n \in \mathbf{N}$ şi şirurile $(a_n^i)_{n\in\mathbf{N}}, i = \overline{1,n}$ sunt constante, atunci relaţia de recurenţă se numeşte liniară, omogenă şi cu coeficienţi constanţi.

2.3.3. Exemple. 1) $x_{n+2} = n^2 x_{n+1} + nx_n$ este o relație de recurență liniară și omogenă de ordinul 2 cu coeficienți variabili.

2) $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n + n$ este o relație de recurență liniară, neomogenă de ordinul 2.

3) $x_n = \sqrt{x_{n-1} x_{n-2}}$ este o relație de recurență neliniară de ordinul 2.

În cazul relațiilor de recurență de ordinul k avem următoarea teoremă de existență și unicitate.

2.3.4. Teoremă. Fie $f : \mathbf{N} \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci există un singur șir $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ astfel încât:

$x_{n+k} = f(n, x_{n+k-1}, ..., x_n), \forall\, n \in \mathbf{N}$

$x_0 = p_0, x_1 = p_1, ..., x_{k-1} = p_{k-1}$, unde $p_0, p_1, ..., p_{k-1} \in \mathbf{R}$ fixați.

Demonstrație. Fie $E_0 = \{p_0\}, E_1 = \{p_1\}, ..., E_{k-1} = \{p_{k-1}\}$ și $E_n = \{x \in \mathbf{R} \mid x = f(n, x_{n-1}, ..., x_0); x_0 \in E_0, x_1 \in E_1, ..., x_{n-1} \in E_{n-1}\}, n \geq k$.

Vom demonstra prin inducție matematică propoziția:

$P(n)$: $\quad card E_n = 1$

$P(0), P(1), ..., P(k-1)$ sunt adevărate.

Presupunem că $P(n), P(n+1), ..., P(n+k-1)$ sunt adevărate și anume $E_n = \{x_n\}, E_{n+1} = \{x_{n+1}\}, ..., E_{n+k-1} = \{x_{n+k-1}\}$. Atunci și E_{n+k} are un singur element $x_{n+k} = f(n, x_{n+k-1}, ..., x_n)$.

Deci $P(n) \wedge P(n+1) \wedge ... \wedge P(n+k-1) \Rightarrow P(n+k)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Rezultă din inducția completă că mulțimea E_{n+k} posedă un singur element. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ satisface condițiile din enunț, deci teorema este demonstrată.

2.3.2. Recurențe liniare de ordinul 1

În cele ce urmează vom considera recurențe liniare de ordinul 1.

2.3.5. Definiție. O relație de recurență de forma

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad (2.3.2)$$

unde $(a_n)_{n \geq 0}$ și $(b_n)_{n \geq 0}$ sunt șiruri de numere reale se numește relație de recurență liniară de ordinul 1 cu coeficienți variabili.

2.3.6. Observații. i) Dacă $a_n = a, b_n = b, \forall\, n \in \mathbf{R}$ obținem o relație de recurență liniară de ordinul 1 cu coeficienți constanți.

ii) Dacă $b_n = 0, a_n = a, \forall\, n \in \mathbf{N}$ obținem o progresie geometrică şi forma generală a şirului x_n este $x_n = a^n x_0, \forall\, n \in \mathbf{N}$.

iii) Dacă $b_n = b, a_n = 1, \forall\, n \in \mathbf{N}$ obținem o progresie aritmetică şi forma generală a şirului x_n *este* $x_n = x_0 + nb, \forall\, n \in \mathbf{N}$.

iv) Dacă $a_n = a$ şi $b_n = f(n)$, unde $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ obținem $x_{n+1} = ax_n + f(n)$, adică o relație de recurență liniară, neomogenă de ordinul 1.

În cazul unei recurențe liniare de ordinul 1 se poate determina forma generală a şirului. Vom da mai întâi forma generală a unui şir recurent liniar de ordinul 1 cu coeficienți constanți.

2.3.7 Teoremă. Forma generală a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin relația de recurență

$$x_{n+1} = ax_n + b, \forall\, n \in \mathbf{N} \tag{2.3.3}$$

este:

$$x_n = a^n x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1) \tag{2. 4.}$$

Demonstrație. Vom folosi procedeul iterării directe. Dăm pe rând valori lui n în relația de recurență (2. 3.) şi avem:

$$x_1 = ax_0 + b \,|\cdot a^{n-1}$$

$$x_2 = ax_1 + b \,|\cdot a^{n-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n-1} = ax_{n-2} + b \,|\cdot a$$

$$x_n = ax_{n-1} + b$$

Însumând obținem:

$$x_n = a^n x_0 + b(1 + a + \ldots + a^{n-1})$$

2.3.8. Observații. Uneori în probleme se folosesc şi alte metode care conduc la determinarea termenului general pentru o recurență liniară de ordinul 1 cu coeficienți constanți şi anume:

- Reducerea la o ecuație omogenă: căutăm $h \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$x_{n+1} + h = a(x_n + h), \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Obținem $h = \dfrac{b}{a-1}$ (dacă $a \neq 1$) şi notând $y_n = x_n + h$ obținem $y_{n+1} = ay_n$, de unde $y_n = a^n y_0$, deci $x_n = a^n\left(x_0 + \dfrac{b}{a-1}\right) - \dfrac{b}{a-1}$.

- Utilizarea ecuației omogene satisfăcute de $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$: scriem relația de recurență pentru $n-1$ şi n:

$$x_{n-1} = ax_{n-2} + b$$

$$x_n = ax_{n-1} + b$$

Scăzând avem

$$\Delta x_n = a\Delta x_{n-1},$$

de unde $\Delta x_n = a^{n-1}\Delta x_1$, deci $x_n - x_{n-1} = a^{n-1}(x_1 - x_0)$. Dând valori lui n şi însumând se obține (2.3.4)

- Notând $x_n = a^n u_n$ obținem $u_{n+1} = u_n + \dfrac{b}{a^{n+1}}$ $(a \neq 0)$. Dând valori lui n şi însumând se obține $u_n = u_0 + b\left(\dfrac{1}{a^2} + \ldots + \dfrac{1}{a^n}\right)$, de unde

$$x_n = a^n x_0 + b(a^{n-1} + \ldots + 1).$$

2.3.9. Exemple. Să se determine forma generală a şirurilor definite prin:

a) $x_{n+1} = -\dfrac{1}{2}x_n + 1, n \geq 0, x_0 = 0$

b) $x_{n+1} = 2x_n - 3, n \geq 0, x_0 = 2$

c) $x_{n+1} = -2x_n + 1, n \geq 0, x_0 = 1$

Soluție. a) $x_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\left(-\dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{2}{3}$

b) $x_n = -2^n + 3$

c) $x_n = (-2)^n \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}$

În continuare vom da forma termenului general pentru o relație de recurență liniară cu coeficienți variabili.

2.3.10. Teoremă. Forma generală a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin relația de recurență
(2.3.1) este:

$$x_{n+1} = a_0 a_1 \ldots a_n x_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_n\right) + b_n \qquad (2.3.5)$$

Demonstrație. Vom folosi procedeul iterării directe. Dăm pe rând valori lui n în relația de recurență (2. 1) şi avem:

$$x_1 = a_0 x_0 + b_0 \mid \cdot a_n a_{n-1} \ldots a_1$$

$$x_1 = a_1 x_1 + b_1 \mid \cdot a_n a_{n-1} \ldots a_2$$

$$x_3 = a_2 x_2 + b_2 \mid \cdot a_n a_{n-1} \ldots a_3$$

....

$$x_n = a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1} \mid \cdot a_n$$
$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n$$

Însumând obținem

$$x_{n+1} = a_0 a_1 ... a_n x_0 + b_0 a_1 a_2 ... a_n + b_1 a_2 ... a_n + ... + b_{n-1} a_n + b_n$$

2.3.11. Corolar. Forma generală a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin relația de recurență

$$x_{n+1} = ax_n + f(n), \forall\, n \geq 0 \qquad (2.3.6)$$

unde $a \in \mathbf{R}, f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ este

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) a^{n-k-1}\,. \qquad (2.3.7)$$

2.3.12. Observație. Soluția generală a relației de recurență (2.3.6) este suma dintre soluția generală a relației omogene şi o soluție particulară a relației neomogene, adică: $x_n = y_n + z_n$, unde

$$\begin{cases} y_{n+1} = ay_n & \text{(solutie generala)} \\ z_{n+1} = az_n + f(n), z_0 = p_0 & \text{fixat (solutie particulara)} \end{cases}$$

Dacă $f(n) = \alpha^n P(n)$ unde $\alpha \in \mathbf{R}$ şi P un polinom nenul, o soluție particulară are forma $z_n = \alpha^n Q(n)$. Înlocuind în relația de recurență (2.3.6) obținem:

$$\alpha Q(n+1) - aQ(n) = P(n)$$

- dacă $a = \alpha$ atunci $gradQ(n) = gradP(n) + 1$
- dacă $a \neq \alpha$ atunci $gradQ(n) = gradP(n)$.

Coeficienții polinomului $Q(n)$ se determină folosind metoda coeficienților nedeterminați.

2.3.13. Exemple. Să se determine forma generală a şirului (x_n) dat prin:

a) $x_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} x_n + \dfrac{1}{n}, n \geq 1, x_1 = 0$

b) $x_{n+1} = \dfrac{2}{3} x_n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n n, n \geq 0, x_0 = 1$

c) $x_{n+1} = \dfrac{1}{2} x_n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n, n \geq 0, x_0 = 1$.

Soluție. a) Aplicând teorema 2. 10. (sau folosind procedeul iterării directe) obținem:

$$x_{n+1} = a_1 ... a_n x_1 + b_1 a_2 ... a_n + b_2 a_3 ... a_n + ... + b_{n-1} a_n + b_n$$

unde $a_n = \dfrac{n}{n+1}, b_n = \dfrac{1}{n}, n \geq 1$ deci

$$x_{n+1} = 1 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n+1} \right) + \ldots + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left[n + \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right) \right]$$

b) O vom rezolva aplicând observația 2. 12. Avem $x_n = y_n + z_n$, unde $y_{n+1} = \dfrac{2}{3} y_n$, deci $y_n = c \left(\dfrac{2}{3} \right)^n$, $c \in \mathbf{R}$ este o constantă ce se va determina ulterior.

z_n este o soluție particulară a relației deci $z_{n+1} = \dfrac{2}{3} z_n + \left(\dfrac{1}{2} \right)^n n$. Căutăm aşadar $z_n = \left(\dfrac{1}{2} \right)^n Q(n)$. Rezultă $\dfrac{1}{2} Q(n+1) - \dfrac{2}{3} Q(n) = n$, $Q(n) = \alpha n + \beta$. Înlocuind şi egalând coeficienții obținem $\alpha = -6, \beta = 9$, deci $z_n = \left(\dfrac{1}{2} \right)^n (-6n+9)$.

Deci $x_n = c \left(\dfrac{2}{3} \right)^n + \left(\dfrac{1}{2} \right)^n (-6n+9)$, $x_0 = 1$. Dând lui n valoarea 0 obținem $c = -\dfrac{27}{4}$, deci $x_n = -\dfrac{27}{4} \left(\dfrac{2}{3} \right)^n + \left(\dfrac{1}{2} \right)^n (-6n+9)$.

c) Vom folosi corolarul 2.3.11 şi obținem

$$x_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^n + n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} + n \right)$$

2.3.3. Recurențe liniare omogene de ordinul 2 cu coeficienți constanți

2.3.14. Definiție. O relație de recurență de forma

$$x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n, \forall\, n \in \mathbf{N}, a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0 \tag{2. 8}$$

se numeşte relație de recurență liniară, omogenă, cu coeficienți constanți, de ordinul 2.

Pentru a determina forma generală a şirului (x_n) care verifică relația de recurență (2. 8) vom folosi următoarele leme:

2.3.15. Lemă. Dacă şirurile $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(\beta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisfac condiția (2. 8) atunci şirul cu termenul general $c_1\alpha_n + c_2\beta_n$ satisface aceeaşi condiție.

Demonstrație. Deoarece $\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n$ şi $\beta_{n+2} = a\beta_{n+1} + b\beta_n$, rezultă $c_1\alpha_{n+2} + c_2\beta_{n+2} = a(c_1\alpha_{n+1} + c_2\beta_{n+1}) + b(c_1\alpha_n + c_2\beta_n)$.

2.3.16. Lemă. Dacă α este o rădăcină a ecuației $r^2 = ar + b$, atunci şirul $(\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}}$ verifică relația de recurență.

Demonstrație. Deoarece $\alpha^2 = a\alpha + b$, înmulțind egalitatea cu α^n obținem $\alpha^{n+2} = a\alpha^{n+1} + b\alpha^n$.

2.3.17. Definiție. Ecuația

$$r^2 = ar + b \tag{2.3.9}$$

se numeşte ecuația caracteristică ataşată relației de recurență (2.3.8).

2.3.18. Teoremă. Dacă ecuația caracteristică $r^2 = ar + b$ are două rădăcini reale şi distincte r_1 şi r_2, atunci şirul care satisface egalitatea (2.3.8) are termenul general de forma:

$$x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,\ \forall\, n \in \mathbf{N} \tag{2.3.10}$$

unde c_1 şi c_2 se determină în mod unic din condițiile inițiale x_0 şi x_1.

Demonstrație. Din lema 2. 16. rezultă că r_1^n şi r_2^n verifică relația (2.3.8) şi din lema 2.3.15. rezultă că $x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$.

Pentru a determina c_1 şi c_2 avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0 \\ c_1 r_1 + c_2 r_2 = x_1 \end{cases}$$

care are soluție unică întrucât $r_1 \neq r_2$.

2.3.19. Exemple. a) (şirul lui Fibonacci). Să se determine şirul $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ \forall\, n \in \mathbf{N}$$
$$F_0 = F_1 = 1$$

b) (şirul lui Lucas). Să se determine şirul $(L_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin:

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,\ \forall\, n \in \mathbf{N}$$
$$L_0 = 2,\quad L_1 = 1.$$

Soluție. a) Ecuația caracteristică ataşată relației de recurență este $r^2 - r - 1 = 0$. $r_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Deci şirul are termenul general de forma

$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Din condițiile inițiale obținem:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

de unde $c_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ şi $c_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.

Deci $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$.

b) Procedând ca la a) constantele c_1 şi c_2 verifică:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

de unde $c_1 = c_2 = 1$, deci $L_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

2.3.20. Lemă. Dacă ecuaţia caracteristică $r^2 = ar + b$ admite o rădăcină dublă α, atunci şirul cu termenul general $n\alpha^n$ satisface condiţia (2.3.8).

Demonstraţie. Înlocuind $x_n = n\alpha^n$ în relaţia de recurenţă (2.3.8) avem:

$$(n+2)\alpha^{n+2} = a(n+1)\alpha^{n+1} + bn\alpha^n \Leftrightarrow$$

$$(n+2)\alpha^2 = a(n+1)\alpha + bn \Leftrightarrow$$

$$n(\alpha^2 - a\alpha - b) + \alpha(2\alpha - a) = 0$$

care este adevărată întrucât $\alpha^2 - a\alpha - b = 0$ şi $\alpha = \dfrac{a}{2}$ (întrucât Δ=0).

2.3.21. Teoremă. Dacă ecuaţia caracteristică $r^2 = ar + b$ are o rădăcină dublă α, atunci şirul care satisface egalitatea (2.3.8) are termenul general de forma:

$$x_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^n,\ \forall\, n \in \mathbf{N} \qquad (2.3.11)$$

unde c_1 şi c_2 se determină în mod unic din condiţiile iniţiale x_0 şi x_1.

Demonstraţie. Din lemele 2.3.15., 2.3.16 şi 2.3.20 rezultă că şirul care satisface egalitatea (2.3.8) are forma $x_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^n$.

Pentru a determina c_1 şi c_2 avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} c_1 = x_0 \\ c_1\alpha + c_2\alpha = x_1 \end{cases}$$

care are soluția unică $\begin{cases} c_1 = x_0 \\ c_2 = \dfrac{x_1 - x_0\alpha}{\alpha} \end{cases}$ întrucât α≠0 (pentru că *b*≠0).

2.3.22. Exemple. Să se determine termenul general al şirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin:

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n, \forall\, n \in \mathbf{N}$$
$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.$$

Soluție. Ecuația caracteristică asociată relației de recurență este: $r^2 - 4r + 4 = 0$ care are rădăcina dublă $r_1 = r_2 = 2$. Rezultă că $x_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n$. Din condițiile inițiale obținem:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ 2c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases}$$

deci $c_1 = 1$, $c_2 = -\dfrac{1}{2}$ şi $x_n = 2^{n-1}(2-n)$.

2.3.23. Teoremă. Dacă ecuația caracteristică $r^2 = ar + b$ cu Δ<0 are rădăcinile $r_{1,2} = r(\cos t \pm i \sin t)$, atunci şirul care satisface condiția (2.3.8) are termenul general de forma:

$$x_n = r^n(c_1 \cos nt + c_2 \sin nt), \forall\, n \in \mathbf{N} \tag{2.3.12}$$

unde c_1 şi c_2 se determină în mod unic din condițiile inițiale x_0 şi x_1.

Demonstrație. Conform lemei 2.3.16., şirul r_1^n satisface condiția (2.3.8). Înlocuind în (2.3.8) şi ținând cont de formula lui Moivre:

$$r_1^n = r^n(\cos nt + i \sin nt)$$

avem:

$$r^{n+2}[\cos(n+2)t + i\sin(n+2)t] = ar^{n+1}[\cos(n+1)t + i\sin(n+1)t] +$$
$$+ br^n(\cos nt + i \sin nt)$$

Separând părțile reale şi cele imaginare obținem:

$$\begin{cases} r^{n+2}\cos(n+2)t = ar^{n+1}\cos(n+1)t + br^n \cos nt \\ r^{n+2}\sin(n+2)t = ar^{n+1}\sin(n+1)t + br^n \sin nt \end{cases}$$

Înmulțind aceste egalități cu c_1 şi c_2 şi adunându-le deducem că şirul $x_n = r^n(c_1 \cos nt + c_2 \sin nt)$ satisface relația de recurență (2.3.8). Din condițiile inițiale avem

$$\begin{cases} c_1 = x_0 \\ r(c_1 \cos t + c_2 \sin t) = x_1 \end{cases}$$

de unde, întrucât $r \sin t \neq 0$ avem:

$$\begin{cases} c_1 = x_0 \\ c_2 = \dfrac{x_1 - r x_0 \cos t}{r \sin t} \end{cases}$$

2.3.24. Exemple. Să se determine forma generală a şirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin:

$$x_{n+2} = 2\sqrt{2}x_{n+1} - 4x_n, \ \forall\, n \in \mathbf{N},\, x_0 = 1,\, x_1 = 1$$

Soluţie. Ecuaţia caracteristică asociată $r^2 - 2\sqrt{2}r + 4 = 0$ are două rădăcini complexe $r_{1,2} = \sqrt{2} \pm i\sqrt{2} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} \pm i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Atunci $x_n = 2^n\left(c_1\cos\dfrac{n\pi}{4} + c_2\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$ şi din condiţiile iniţiale obţinem

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ 2\left(c_1\cos\dfrac{\pi}{4} + c_2\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$$

de unde $c_1 = 1, c_2 = \dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$. Deci $x_n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + \dfrac{\sqrt{2}-2}{2}\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

2.3.25. Observaţie. Mulţimea

$$S_{a,b} = \{(x_n)_{n\geq 0} \mid x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n,\ \forall\, n \geq 0\},\quad a,b \in \mathbf{R}$$

formează un subspaţiu vectorial de dimensiune 2 a spaţiului vectorial al şirurilor reale. Dacă ecuaţia caracteristică $r^2 = ar + b$ are:

- două rădăcini reale şi distincte r_1, r_2 atunci mulţimea soluţiilor de bază $\{r_1^n, r_2^n\}$ este bază a spaţiului vectorial
- două rădăcini reale egale $r_1 = r_2$ atunci mulţimea $\{r_1^n, nr_1^n\}$ este bază a spaţiului vectorial
- două rădăcini complexe $r_{1,2} = r(\cos t \pm i\sin t)$ atunci mulţimea $\{r^n\cos nt, r^n\sin nt\}$ este bază a spaţiului vectorial.

Bibliografie

- *Gh. Andrei, Şiruri şi progresii, Ed. Paralela 45, pag 18-62*
- *Gh. Andrei, C. Caragea, I. Cucurezeanu, Probleme de algebră pentru concursuri de admitere şi olimpiade şcolare, E.D.P., Bucureşti, 1993*

Probleme rezolvate (2)

R2.3.1. Să se arate că elementele mulțimii $M=\{a,b,c\}$ pot forma o progresie aritmetică, dacă şi numai dacă $(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3=0$

(Gh. Andrei)

Soluție : Utilizăm identitatea $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+z+y)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$. Luând $x=b+c-2a$, $y=c+a-2b, z=a+b-2c$, avem $x+y+z=0$, deci $x^3+y^3+z^3=3xyz$, prin urmare $(b+c-2a)(a+c-2b)(a+b-2c)=0$, ceea ce înseamnă că elementele mulțimii $M=\{a,b,c\}$ pot forma o progresie aritmetică.

R2.3.2. Se consideră propozițiile $(\alpha),(\beta),(\gamma)$

(α) x,y,z distincte, în progresie aritmetică

(β) *a, b, c* distincte, în progresie geometrică, $a,b,c\in(0,\infty)-\{1\}$

(γ) $a^y b^z c^x=a^z c^x c^y$.

Să se demonstreze că oricare două propoziții inplică pe a treia.

(Gh. Andrei)

Soluție :

i. Arătăm că (α)şi (β) inplică (γ). Putem presupune $x>y>z$ şi $x-y=y-z=r>0$, $x-z=2r>0$, iar $b^2=ac$. Rezultă $\lg a+\lg c=2\lg b$, de unde $(y-z)\lg a+(x-y)\lg c=(x-z)\lg b$. Obținem succesiv $y\lg a+x\lg c+z\lg b=z\lg a+x\lg b+y\lg c$, sau $\lg\left(a^y b^z c^x\right)=\lg\left(a^z b^x c^y\right)$ care este echivalentă cu (γ).

ii. Demonstrăm că (α) şi (γ) implică (β). Din (γ) rezultă $(y-z)\lg a+(x-y)\lg c=(x-z)\lg b$, de unde $r\lg a+r\lg c=2r\lg b$ deci $ac=b^2$.

iii. (β) şi (γ) implică (α). Din (γ) rezultă $a^{2y}b^{2z}c^{2x}=a^{2z}b^{2x}c^{2y}$ sau $a^{2y}c^{2x}(ac)^z=a^{2z}c^{2y}(ac)^x$, de unde $a^{2y+z}c^{2x+z}=a^{2z+x}c^{2y+x}$ sau $a^{2y-x-z}=c^{2y-x-z}$ care este echivalentă cu $2y=x+z$, adică $\div x,y,z$.

R2.3.3. Numerele $x_1,x_2,...,x_n$ 2 formează o progresie aritmetică. Se ştie că $x_1+x_2+...+x_n=a, x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=b^2$. Determinați acestă progresie.

Soluție

Fie r rația progresiei. Avem $x_k = x_1 + (k-1)r$ şi din prima egalitate rezultă $\frac{(x_1 + x_n)n}{2} = a$, sau $nx_1 + \frac{1}{2}rn(n-1) = a$ (1)

Pe de altă parte $x_k^2 = x_1^2 + 2x_1r(k-1) + r^2p(k-1)^2$ şi din a doua relație din enunț, avem $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = nx_1^2 + 2x_1r\sum_{k=1}^{n}(k+1) + r^2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = b^2$ şi deci

$nx_1^2 + x_1rn(n-1) + \frac{1}{6}r^2(n-1)n(2n-1) = b^2$ (2)

Din (1), prin ridicare la pătrat şi împărțire cu n, avem $nx_1^2 + x_1rn(n-1) + \frac{1}{4}r^2(n-1)n(2n-1) = \frac{a^2}{n}$ (3)

Din (2) şi (3) avem $\frac{r^2n(n-1)^2}{12} = \frac{b^2n - a^2}{n}$, de unde $r = \pm\frac{2\sqrt{3(b^2n - a^2)}}{n\sqrt{n^2-1}}$.

Din (1) rezultă x_1 şi progresia este determinată.

R2.3.4 Determinți inegalitatea $\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_3a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}} < \frac{n}{a_0a_{2n}}$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt termenii unei progresii aritmetice crescătoare cu termeni pozitivi.

(Cardinal nr. 2/1998)

Soluție : Considerăm sumele $S_1 = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_3a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}$ şi $S_2 = \frac{1}{a_0a_1} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-2}a_{2n-1}}$. Fie r rația progresiei. Ținând seama că $a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{2n} - a_{2n-1} = r$ şi că $\frac{r}{a_ka_{k+1}} = \frac{a_{k+1} - a_k}{a_ka_{k+1}} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}$, suma $S_1 + S_2$ se scrie după reducerea termenilor, $S_1 + S_2 = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{2n}}\right) = \frac{2n}{a_0a_{2n}}$. Cum progresia are termeni pozitivi şi este crescătoare, avem $\frac{1}{a_1a_2} < \frac{1}{a_0a_1}, \frac{1}{a_3a_4} < \frac{1}{a_2a_3}, \ldots, \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}} < \frac{1}{a_{2n-2}a_{2n-1}}$ şi rezultă $S_1 < S_2$, deci $2S_1 < S_1 + S_2 = \frac{2n}{a_0a_{2n}}$, prin urmare $S_1 < \frac{n}{a_0a_{2n}}$.

R2.3.5. Fie *a*, *b*, *c* trei numere naturale cu $(a,b,c)=1$.Dacă $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sunt termeni, nu neapărat consecutivi , ai unei progresii aritmetice, atunci $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sunt numere naturale.

(Ion Cucurezeanu)

Soluție : Dacă *r* este rația progresiei, atunci $\sqrt{\mathrm{c}}-\sqrt{a}=nr$, $\sqrt{\mathrm{b}}-\sqrt{a}=mr$, cu $m,n\in\mathbb{N}^*$. Eliminând *r* între cele două relații, obținem $m\sqrt{\mathrm{c}}-n\sqrt{b}=(m-n)\sqrt{a}$ $\quad(1)$, de unde prin ridicare la pătrat, avem $m^2c+n^2b-2mn\sqrt{bc}=(m-n)^2 a$ $\quad$ (2) . Cum menbrul întâi din (2) trebuie să fie număr natural, rezultă $b=B^2d, c=C^2d$, unde $d=(b,c), B,C\in\mathbb{N}^*$

Din (1) rezultă $(mC-nB)\sqrt{d}=(m-n)\sqrt{a}$ $\quad(3)$

Din (3), după eventualele simplificări se scrie $A\sqrt{d}=D\sqrt{a}$, cu $(A,D)=1$ sau $A^2d=D^2a$ .Din $(a,b,c)=1$, rezultă $(a,d)=1$ şi cum $(A,D)=1$, din $A^2d=D^2a$, obținem $a=A^2, d=D^2$, deoarece din a/A^2 , A^2/a şi a, A, numere naturale, avem $a=A^2$.Din $a=A^2, b=B^2D^2, c=C^2D^2$, rezultă $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}\in\mathbb{N}^*$.

R2.3.6. Dacă şirul numerelor naturale $1,2,3,...$ se împarte în câteva progresii aritmetice, atunci în una (cel puțin) din aceste progresii, primul termen se divide cu rația.

(A.V. Kelarev, Kvant 1/1985)

Soluție : Notăm prin $a_1,a_2,...,a_n$ primii termeni ai progresiilor în care se împarte şirul numerelor naturale şi prin $d_1,d_2,...,d_n$ rațiile lor. Produsul acestor rații se află într-una din progresii, deci există i, cu $1\le i\le n$ şi un anume k, astfel încât $d_1\cdot d_2\cdot...\cdot d_n=a_i+kd_i$. Din această egalitate rezultă că d_i divide pe a_i .

R2.3.7. Într-o progresie geometrică avem $S_p=a, S_{2p}=b$. Să se determine S_{kp} în funcție de $a,b,k\left(a,b\in\mathbb{R}, a\ne 0, b\ne 2a, k,p\in\mathbb{N}^*\right)$

(Ovidiu Pop, RMT. Nr1/1996)

Soluție : Avem $S_p=\alpha\dfrac{q^p-1}{q-1}=a$ şi $S_p=\dfrac{q^{2p}-1}{q-1}=b$, unde α este primul termen. Prin înpărțirea celor două relații, deducem $q^p+1=\dfrac{b}{a}$, deci

$q^p = \frac{b}{a} - 1$. Apoi,

$$S_{kp} = \alpha \frac{q^{kp}-1}{q-1} = \frac{a}{q^p - 1}\left(q^{kp}-1\right) = \frac{a}{\frac{b}{a}-2}\left[\left(\frac{b}{a}-1\right)^k - 1\right] = \frac{a^2}{b-2a}\left[\left(\frac{b}{a}-1\right)^k - 1\right].$$

R2.3.8. Într-o progresie geometrică cu termeni pozitivi, produsul primilor m termeni este egal cu produsul primilor n termeni $(m \neq n)$. Să se demonstreze că produsul primilor $m+n$ termeni este egal cu 1.

Soluție : Fie progresia $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $m > n$. Din $b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_m = b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_n$, rezultă $b_{n+1} \cdot ... \cdot b_m = 1$, deci

$\left(b_{n+1} \cdot b_{n+2} \cdot ... \cdot b_m\right)^2 = \left(b_{n+1}b_m\right)\left(b_{n+2}b_{m-1}\right)...\left(b_m b_{n+1}\right) = \left(b_1 b_{m+n}\right)^{m+n} = 1$, de unde $b_1 b_{m+n} = 1$. Dar $\left(b_1 b_2 ... b_{m+n}\right)^2 = \left(b_1 b_{m+n}\right)\left(b_2 b_{m+n-1}\right)...\left(b_{m+n} b_1\right) = \left(b_1 b_{m+n}\right)^{m+n} = 1$, prin urmare $b_1 b_2 ... b_{m+n} = 1$.

R2.3.9. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive şi distincte. Să se arate că $(x_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă

$$(x_2^2 - x_1^2)\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x_k + x_{k+1}} = \frac{x_2(x_n - x_1)}{x_n}, \forall n \geq 2$$

(N. Papacu)

Soluție

Presupunem că este verificată relația din enunț

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x_k + x_{k+1}} = \frac{x_2}{x_2^2 - x_1^2} \cdot \frac{x_n - x_1}{x_n} = A\frac{x_n - x_1}{x_n} \quad (1)$$

Pentru $n \to n+1$, avem $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k + x_{k+1}} = A\frac{x_{n+1} - x_1}{x_{n+1}}$ (2)

Scăzând (1) din (2), obținem $\frac{1}{x_n + x_{n+1}} = Ax_1 \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n x_{n+1}}$ (3)

Avem şi $\frac{1}{x_{n-1} + x_n} = Ax_1 \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} x_n}$ (4). Împărțind membru cu membru relațiile (3) şi (4), avem $\frac{x_{n-1} + x_n}{x_n + x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n+1}}$, de unde $\frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{x_{n+1}^2 - x_n^2} = \frac{x_{n-1}}{x_{n+1}}$, ceea ce este echivalent cu $(x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1})(x_{n+1} + x_{n-1}) = 0$. Rezultă

$x_n^2 = x_{n+1}x_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul formează o progresie geometrică. Reciproc, dacă şirul formează o progresie geometrică, atunci $x_{k+1} = x_k q$ şi prin calcul direct ambii membri sunt egali cu $\dfrac{x_1(q^{n-1}-1)}{q^{n-2}}$.

R2.3.10. Să se arate că orice progresie aritmetică formată din numere naturale conține termenii unei progresii geometrice.

<u>Soluție</u>

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică formată din numere naturale şi $r \in \mathbb{N}^*$ rația progresiei. Progresia se scrie $a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, ..., a_1 + kr, a_1 + a_1 r = a_1(1+r)$. Printre aceşti termeni se găsesc şi termenii $a_1 + ra_1(2+r) = a_1(1+r)^2 = a_{a_1(2+r)+1}$ şi

$a_1 + a_1(3+3r+3r^2)r = a_1(1+r)^3 = a_{a_1(3+3r+r^2)+1}$. Deducem că orice număr de forma $a_1(1+r)^k$ este termen al progresiei aritmetice şi anume $a_{a_1(1+r)^k - a_1 + 1}$. Aşadar şirul $a_1, a_1(1+r), a_1(1+r)^2, ...$ este o progresie geometrică.

R2.3.11. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, definit prin $x_{n+1}^5 = x_{n+2}^3 \cdot x_n^2$. Să se determine termenul general x_n.

<u>Soluție</u>

Logaritmăm relația în baza 2 şi obținem: $5\log_2 x_{n+1} = 3\log_2 x_{n+2} + 2\log_2 x_n$, $\log_2 x_1 = 0$ $\log_2 2 = 1$. Cu notația $y_n = \log_2 x_n$, avem $5y_{n+1} = 3y_{n+2} + 2y_n$, cu $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, sau $3(y_{n+2} - y_{n+1}) = 2(y_{n+2} - y_n)$. Cu substituția $z_{n+1} = \dfrac{2}{3} z_n$, deci z_n este o progresie cu rația $q = \dfrac{2}{3}$, deci $z_n = z$, $q^{n-1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$. Din relația $z_k = y_{k-1} - y_k$, rezultă $\sum_{k=1}^{n} z_k = y_{n+1} - y_1$, deci $y_{n+1} = z_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = 3\left[1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$. Din $\log_2 x_n = y_n$, rezultă $x^n = 2^{y_n} = 8^{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$.

3. Numere complexe în algebră

3.1. Proprietăți generale

Din teoria numerelor complexe presupunem cunoscute noțiunile de bază, studiate în manualele şcolare. Fără a intra în detalii, trecem în revistă câteva dintre acestea.

Fie $C = \{ z = x + iy \mid x, y \in R \}$ corpul numerelor complexe înzestrat cu binecunoscutele operații de adunare şi înmulțire. Dacă $z = x+iy \in C$, x se numeşte partea reală a numărului complex z şi se notează cu $\operatorname{Re} z$, iar y coeficientul părții imaginare şi se notează $\operatorname{Im} z$.

X.3.1.1. <u>Modulul</u> numărului complex $z = x + iy$ reprezintă numărul real, notat $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Proprietăți ale modulului:

1) $|z| \geq 0, \forall z \in C$

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

2) $|z| = |-z|, \forall z \in C$

3) $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$ şi $-|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|, \forall z \in C$

4) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \forall z_1, z_2 \in C$

5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \forall z_1, z_2 \in C, z_2 \neq 0$

6) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in C$, cu egalitate dacă şi numai dacă $\exists\ t \geq 0$: $z_2 = t z_1$.

7) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in C$

3.1.2. <u>Conjugatul</u> numărului complex z = x+iy este numărul complex :

$$\bar{z} = x - iy.$$

3.1.3. <u>Proprietăți</u> :

1) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in R$;

2) $z = \bar{\bar{z}}, \forall z \in C$;

3) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}, \forall z \in C$;

4) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in C$;

5) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in C$;

6) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $\forall\ z_1, z_2 \in C, z_2 \neq 0$;

7) $\mathrm{Re}z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$; $\mathrm{Im}z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, $\forall\, z \in C$.

Bibliografie

1. *Alexandru P., Brânzei D., Gorgotă V., Ulmeanu S., Mateamtica în concursuriel şcolare, Editura Paralela 45, Piteşti, 1999*
2. *Andrica D., Bişboacă N., Numere complexe. Probleme rezolvate din manualele alternative, Editura Millenium, Alba Iulia, 2000*
3. *Andrica D., Bişboacă N., Numere Complexe de la…a…la…z, Editura Millenium, Alba Iulia, 2001*
4. *Andrei Gh., Caragea C., Cucurezeanu I., Bordea Gh., Probleme de algebră pentru concursuri de admitere şi olimpiade şcolare, E.D.P., Bucureşti, 1993*
5. *Becheanu M. şi colaboratori, Olimpiade de matematică 1990-1996, clasele IX-X, Editura Gil, Zalău, 1997*
6. *Nicula V., Numere complexe, Probleme şi exerciţii pentru clasa a X-a, Editura Scorpion 7, Bucureşti, 1993*
7. *Tămâian T., Probleme selectate din reviste şcolare, Editura Cub Press, Baia Mare, 2002*

Probleme rezolvate (3)

R3.2.1 Fie x,y,z trei numere complexe cu proprietățile: $|x| = |y| = |z|$ şi $xyz = xy + yz + zx = 1$. Calculați $x + y + z$.

Soluție :

Avem $1 = |xyz| = |x| \cdot |y| \cdot |z| = |x|^3$. Deci $|x| = |y| = |z| = 1$.

Rezultă x ≠ 0 şi $\overline{x} = \frac{1}{x}$. Analog $\overline{y} = \frac{1}{y}$, $\overline{z} = \frac{1}{z}$. Avem:

$1 = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \overline{z} + \overline{x} + \overline{y}$, *deci* $\overline{x + y + z} = 1$, de unde x+y+z = 1.

R3.2.2 Fie a ∈ R, z ∈ C, astfel încât $a = \left|z + \frac{1}{z}\right|$. Să se determine cea mai mare şi cea mai mică valoare a lui $|z|$.

Soluție :

Deoarece a ≥ 0, avem:

$$a^2 = \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}\right) = |z|^2 + \frac{z^2 + \overline{z}^2}{|z|^2} + \frac{1}{|z|^2} = \frac{|z|^4 + \left(z + \overline{z}\right)^2 - 2|z|^2 + 1}{|z|^2}$$

$$\Rightarrow |z|^4 - |z|^2(a^2 + 2) + 1 = -(z + \overline{z}) \leq 0$$

$$\Rightarrow |z| \in \left[\frac{a^2 + 2 - \sqrt{a^4 + 4a^2}}{2}, \frac{a^2 + 2 + \sqrt{a^4 + 4a^2}}{2}\right].$$

Aplicând formula radicalilor compuşi rezultă că :

$|z| \in \left[\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}\right]$. Deci max $|z| = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$, min $|z| = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$ şi se ating pentru $z = \pm \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} i$.

R3.2.3 Fie $z_1, z_2, z_3 \in C^*$, distincte două câte două şi cu modulele egale. Ştiind

că numerele $z_1 + \frac{1}{z_1^2}$, $z_2 + \frac{1}{z_1 z_2}$, $z_3 + \frac{1}{z_1 z_3}$ sunt reale, să se determine z_1.

Soluție :

Fie $a = \frac{1}{z_1} \in C$. *Atunci* : $z_1 + \frac{a}{z_1},\ z_2 + \frac{a}{z_2},\ z_3 + \frac{a}{z_3} \in R$.

deci : $z_k + \frac{a}{z_k} = \overline{z_k + \frac{a}{z_k}},\ k = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad z_k^2 \overline{z_k} + a\overline{z_k} = \overline{z_k^2} z_k + \overline{a} z_k$,

k=1,2,3 Deci: $z_k r^2 + a\overline{z_k} = \overline{z_k} r^2 + \overline{a} z_k,\ k = 1, 2, 3$; unde $r = |z_1| = |z_2| = |z_3|$.

Înmulțind cu z_k, obținem:

$z_k^2 r^2 + ar^2 = r^4 + \overline{a} z_k^2 \quad \Rightarrow z_k^2(r^2 - \overline{a}) = r^2(r^2 - a^2).$

Dacă $r^2 - \overline{a} \neq 0$, atunci $z_k^2 = \frac{r^2(r^2 - a^2)}{r^2 - \overline{a}},\quad k = 1,2,3.$

Deci $z_1^2 = z_2^2 = z_3^2$. Din $z_1^2 = z_2^2$ şi $z_1 \neq z_2$, rezultă că $z_1 = -z_2$. Analog $z_1 = -z_3$. Ar rezulta că $z_2 = z_3$, fals.

Deci $r^2 = \overline{a}$. Atunci $r^2 = a \Rightarrow \frac{1}{z_1} = r^2 \Rightarrow \frac{1}{|z_1|} = r^2 \Rightarrow r^3 = 1$. Deci $z_1 = 1$.

R3.2.4 Fie $z_1, z_2, z_3 \in C$, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1,\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ şi $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Să se arate că $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1 z_2 z_3| = 4$.

Soluție :

$$|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1 z_2 z_3| = |z_1 + z_2 + z_3| \cdot |z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3| =$$
$$= |z_1 + z_2 + z_3| \cdot |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|.$$

Dar

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = \frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|}{|z_1 z_2 z_3|} =$$
$$= |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|; \quad (z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3).$$

Cum $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, obținem:

$$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3| = 2|z_1 + z_2 + z_3|.$$

Obținem: $|z_1 + z_2 + z_3| = 2 = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|$.

R3.2.5 Dacă $z \in C$, $a \in C$, $|z| = 1$, $n \in \mathrm{N}^*$, să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| \geq n|z-1|.$$

Soluție :

Pentru oricare numere complexe x şi y avem:

$|x+a| + |y+a| = |x+a| + |-y-a| \geq |(x+a) + (-y-a)| = |x-y|$. Atunci:

$$\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| = \left(|z^{2n} + a| + |z^{2n-1} + a|\right) + \left(|z^{2n-2} + a| + |z^{2n-3} + a|\right) + \ldots +$$

$(|z^2 + a| +$

$+|z+a|) \geq |z^{2n} - z^{2n-1}| + |z^{2n-2} - z^{2n-3}| + \ldots + |z^2 - z| = |z^{2n-1}| \cdot |z-1| +$

$|z^{2n-3}| \cdot |z-1| +$

$+|z^{2n-5}| \cdot |z-1| + \ldots + |z| \cdot |z-1| = n|z-1|$.

R3.2.6 a) Fie $z_1, z_2, z_3 \in C^*$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ şi $z_1 + z_3 = 2z_2$. Să se arate că $z_1 = z_2 = z_3$.

b) Fie $z_1, z_2, z_3 \in C$ astfel încât $z_1 + z_3 = 2z_2$ şi $z \in C$, $z \notin \{z_1, z_2, z_3\}$. Să se arate că dacă $|z - z_1| + 2|z + z_2| + |z - z_3| = 4|z|$, atunci $\dfrac{z - z_1}{z - z_3} > 0$.

Soluție :

a)

$2|z_2| = |z_1 + z_3| \leq |z_1| + |z_3| = 2|z_2| \Rightarrow |z_1 + z_3| = |z_1| + |z_3| \Rightarrow z_3 = \alpha z_1$,

$cu\ \alpha > 0 \Rightarrow |z_3| = \alpha |z_1| \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow z_1 = z_2 = z_3$.

b) $4|z| = |z - z_1| + 2|z + z_2| + |z - z_3| \geq |z - z_1 + 2z + 2z_2 + z - z_3| =$

$4|z| \Rightarrow |z - z_1| + |z + z_2| + |z + z_2| + |z - z_3| =$

$|(z - z_1) + (z + z_2) + (z + z_2) + (z - z_3)| \Rightarrow z - z_1 = \alpha(z + z_2), \alpha > 0$ şi

$z - z_3 = (z + z_2), \beta > 0$, deci: $\dfrac{z - z_1}{z - z_3} = \dfrac{\alpha}{\beta} > 0$.

R3.2.7 Fie $z_1, z_2 \in C^*$ astfel încât $|z_1 + z_2| = |z_1| = |z_2|$. Să se calculeze $\frac{z_2}{z_1}$.

<u>Soluție</u> :

Fie $\frac{z_2}{z_1} = x + iy,\ x, y \in R$. Atunci $|z_1| = |z_2|$ implică $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = 1$, adică $x^2 + y^2 = 1$, iar $|z_1 + z_2| = 1$ implică $\left|1 + \frac{z_2}{z_1}\right| = 1$, de unde $(1 + x)^2 + y^2 = 1$.

Deci: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (1 + x)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$. Obținem $x = -\frac{1}{2},\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Există două soluții: $\frac{z_2}{z_1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\frac{z_2}{z_1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

R3.2.8 Dacă $z \in C\ cu\, |z^4 + 2| = |z^2|,\ atunci\, |z| \le \sqrt{2}.$ În ce caz avem egalitate?

<u>Soluție</u> :

Avem $|z^4| = |(z^4 + 2) - 2| \overset{(1)}{\le} |z^4 + 2| + 2 = |z^2| + 2$. Deci $|z|^4 - |z|^2 - 2 \le 0$, adică $(|z|^2 + 1)(|z|^2 - 2) \le 0,\ deci\, |z| \le \sqrt{2}.$ Egalitate în (1) avem dacă $\exists\ \lambda > 0$ astfel încât $z^4 + 2 = -2\lambda$. Rezultă că $|-2\lambda| = |z|^2$, adică $|z|^2 = 2\lambda \le 2,$ cu egalitate pentru $\lambda = 1.$ Obținem $z^4 = -4$ cu rădăcinile $\pm(1 \pm i)$.

R3.2.9 Fie k, n $\in N^*$ şi $z_1, z_2, ..., z_n \in C^*$ cu acelaşi modul astfel încât $z_1^k + z_2^k + ... + z_n^k = 0$. Demonstrați că $\frac{1}{z_1^k} + \frac{1}{z_2^k} + ... + \frac{1}{z_n^k} = 0$.

<u>Soluție</u> :

Fie $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = r > 0$ şi $z_1^k + z_2^k + ... + z_n^k = 0$. Avem:

$$\frac{1}{z_1^k} + \frac{1}{z_2^k} + ... + \frac{1}{z_n^k} = \frac{\overline{z_1^k}}{z_1^k \cdot \overline{z_1^k}} + \frac{\overline{z_2^k}}{z_2^k \cdot \overline{z_2^k}} + ... + \frac{\overline{z_n^k}}{z_n^k \cdot \overline{z_n^k}} =$$

$$\frac{\overline{z_1^k}}{|z_1|^{2k}}+\frac{\overline{z_2^k}}{|z_2|^{2k}}+\ldots+\frac{\overline{z_n^k}}{|z_n|^{2k}}=$$

$$=\frac{\overline{z_1^k}}{|z_1|^{2k}}+\frac{\overline{z_2^k}}{|z_2|^{2k}}+\ldots+\frac{\overline{z_n^k}}{|z_n|^{2k}}=\frac{1}{r^{2k}}\left(\overline{z_1^k}+\overline{z_2^k}+\ldots+\overline{z_n^k}\right)=$$

$$\frac{1}{r^{2k}}\left(\overline{z_1^k+z_2^k+\ldots+z_n^k}\right)=0.$$

R3.2.9 Fie $z\in C$, $|z|=1$. Să se arate că:

$$n|1+z|+|1+z^2|+\ldots+|1+z^{2n+1}|\geq 2n,\ n\in N^*.$$

<u>Soluție</u> :

Avem:

$$n|1+z|+|1+z^2|+\ldots+|1+z^{2n+1}|=n|1+z|+\left(|1+z^2|+|1+z^3|\right)+\left(|1+z^4|+\right.$$
$$\left.+|1+z^5|\right)+\ldots+\left(|1+z^{2n}|+|1+z^{2n+1}|\right)$$
$$\geq\ n|1+z|+|1+z^2-1-z^3|+|1+z^4-1-z^5|+\ldots+$$
$$+|1+z^{2n}-1-z^{2n+1}|=n|1+z|+|z^2|\cdot|1-z|+|z^4|\cdot|1-z|+\ldots+|z^{2n}|\cdot|1-z|=n|1+z|+n|1-z|=$$
$$=n\left(|1+z|+|1-z|\right)\geq n|1+z-1+z|=2n.$$

4. Aplicații ale numerelor complexe în geometrie

În această temă vom utiliza numerele complexe pentru rezolvarea şi generalizarea unor probleme de geometrie. Deşi metoda vectorială şi metoda numerelor complexe sunt echivalente, fiecare dintre ele rezolvă cu uşurință anumite probleme şi în acelaşi timp creează, în limbajul lor specific, noi probleme.

4.1.1 Amintim câteva rezultate, care vor fi utile în cele ce urmează. Vom nota cu M(z) punctul M de afix z.

4.1.2 **Distanța** dintre punctele $M_1(z_1)$ şi $M_2(z_2)$ este $M_1M_2 = |z_1 - z_2|$.

4.1.3 **Afixul punctului M care împarte segmentul $[M_1M_2]$ în raportul k**, adică $\overrightarrow{MM_1} = k\overrightarrow{MM_2}$ este $z = \frac{z_1 - kz_2}{1-k}$, unde M(z), $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$.

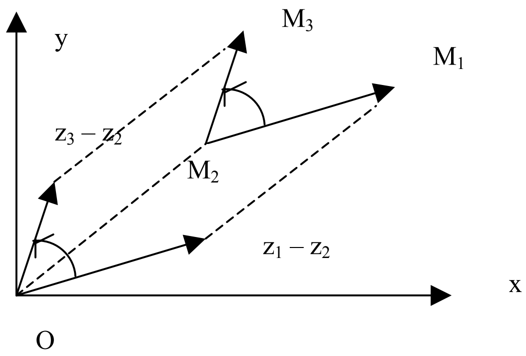
4.1.4 **Consecință** . Afixul mijlocului M al segmentului $[M_1M_2]$ este $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$; Afixul g al centrului de greutate G al triunghiului $M_1M_2M_3$ este $g = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$; patrulaterul $M_1M_2M_3M_4$ este paralelogram dacă şi numai dacă $z_1+z_3 = z_2+z_4$, unde $M_i(z_i)$, i = 1, 2, 3, 4.

4.1.5 **Condiția de coliniaritate** : Punctele $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ sunt coliniare dacă şi numai dacă există $k_1, k_2, k_3 \in R$ cu $k_1+ k_2+ k_3 = 0$ şi $k_1z_1 + k_2z_2 + k_3z_3 = 0$.

Demonstrație : Dacă M_1 , M_2 , M_3 sunt coliniare, atunci există $k \in R$ *cu* $\overrightarrow{M_2M_1} = k\overrightarrow{M_2M_3}$. Deci $z_2 = \frac{z_1 - kz_3}{1-k}$, adică $z_1 - (1-k)z_2 - kz_3 = 0$. Pentru $k_1 = 1$, $k_2 = k-1$, $k_3 = -k$ obținem concluzia. Reciproc, din $k_1z_1 + k_2z_2 + k_3z_3 = 0$ cu $k_2= -k_1-k_3$, obținem $k_1(z_1 - z_2) = -k_3(z_3 - z_2)$. Pentru $k = -\frac{k_3}{k_1}$ obținem $z_2 = \frac{z_1 - kz_3}{1-k}$, adică M_1 , M_2 , M_3 sunt coliniare.

4.1.6 **Măsurara unghiului orientat** $\angle M_1OM_2$, în sens trigonometric, (semidreapta OM_1 se roteşte în sens trigonometric peste semidreapta OM_2), față de un reper cu originea în O este: $\mu(\angle M_1OM_2) = \arg\frac{z_2}{z_1}$, unde z_1, z_2 sunt afixele punctelor M_1, respectiv M_2.

4.1.7 **Consecință** : Dacă $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, atunci măsura unghiului orientat (în sens trigonometric) $\angle M_1M_2M_3$ este: $\mu(\angle M_1M_2M_3) = \arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$.



Translatăm M_2 în originea O şi aplicăm **4.1.5** .

Demonstrație :

4.1.8 **Consecință** : Dacă $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ şi $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \rho\varepsilon,\ unde\ \rho > 0,$ $\varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$, cu $\alpha \in [0, 2\pi)$, atunci $\frac{M_2M_3}{M_1M_2} = \rho$ şi $\mu(\angle M_1M_2M_3) = \min(\alpha, 2\pi - \alpha)$.

4.1.9 **Formula rotației în comple** Dacă $M_3(z_3)$ se obține printr-o rotație cu centrul în $M_2(z_2)$ şi unghi $\alpha \in [0, 2\pi)$, a punctului $M_1(z_1)$, atunci : $z_3 = z_2 + (z_1 - z_2)\varepsilon$, unde $\varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$, dacă rotația se efectuează în sens trigonometric sau $\varepsilon = \cos(2\pi - \alpha) + i\sin(2\pi - \alpha)$, dacă rotația se efectuează în sens invers trigonometric.

4.1.10 **Consecință** : Triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă $c = a + (b - a)\varepsilon$, unde $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, dacă ΔABC este orientat în sens trigonometric, sau $\varepsilon = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$, dacă ΔABC este orientat în sens invers trigonometric.

4.1.11 **Unghiul a două drepte**. Dacă $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$ sunt puncte distincte în plan, diferite de origine, atunci măsura unghiului orientat (în sens trigonometric) al dreptelor M_1M_2 şi M_3M_4 este :

$$\mu(\angle(M_1M_2, M_3M_4)) = \arg\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}.$$

4.1.12 **Consecință** : Dacă $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_3} = \rho\varepsilon,\ unde\ \rho > 0,\quad \varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, atunci: $\frac{M_1M_2}{M_3M_4} = \rho$ şi $\mu(\angle(M_1M_2, M_3M_4)) = \min(\alpha, 2\pi - \alpha)$.

4.1.13 **Consecință** : $M_1M_2 \perp M_3M_4 \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in iR^*$.

$$M_1M_2 \,||\, M_3M_4 \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in R^*.$$

4.1.14 Punctele $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$, distincte, sunt conciclice dacă şi numai dacă raportul anarmonic al afixelor z_1, z_2, z_3, z_4 este real, adică:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \in R^*.$$

Demonstrație :

Cazul I: Dacă M_1 şi M_2 sunt de aceeaşi parte a dreptei M_3M_4 avem:

$$\arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \arg\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

Cazul II: Când M_1 şi M_2 sunt separate de dreapta M_3M_4 avem:

$$\arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \arg\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \pi.$$

4.1.15 **Triunghiuri asemenea** . Triunghiurile $A_1A_2A_3$ şi $A_1'A_2'A_3'$, la fel orientate, sunt asemenea, în această ordine, dacă şi numai dacă $\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{a_2' - a_1'}{a_3' - a_1'}$.

Demonstrație: Avem $\Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A_1A_2}{A_1A_3} = \dfrac{A_1^{'}A_2^{'}}{A_1^{'}A_3^{'}} \\ \angle A_3A_1A_2 \equiv \angle A_3^{'}A_1^{'}A_2^{'} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{|a_2 - a_1|}{|a_3 - a_1|} = \dfrac{|a_2^{'} - a_1^{'}|}{|a_3^{'} - a_1^{'}|} \\ \arg\dfrac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \arg\dfrac{a_2^{'} - a_1^{'}}{a_3^{'} - a_1^{'}} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{a_2^{'} - a_1^{'}}{a_3^{'} - a_1^{'}}.$$

4.1.16 **Observație**: Triunghiurile $A_1A_2A_3$ şi $A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}$, la fel orientate, sunt asemenea, dacă şi numai dacă: $a_1^{'}(a_2 - a_3) + a_2^{'}(a_3 - a_1) + a_3^{'}(a_1 - a_2) = 0$.

4.1.17 **Observație**: Triunghiurile $A_1A_2A_3$ şi $A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}$, invers orientate, sunt asemenea în această ordine, dacă şi numai dacă: $\dfrac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \dfrac{\overline{a_2^{'}} - \overline{a_1^{'}}}{\overline{a_3^{'}} - \overline{a_1^{'}}}$.

Demonstrație : Se consideră triunghiul $M_1M_2M_3$ simetric cu $A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}$ față de O Triunghiul $M_1M_2M_3$ are afixele vârfurilor $\overline{a_1^{'}}, \overline{a_2^{'}}, \overline{a_3^{'}}$ şi este la fel orientat cu triunghiul $A_1A_2A_3$. Folosim **4.14**, obținem relația cerută.

4.1.18 **Consecință** : Triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral dacă şi numai dacă: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$.

Demonstrație: Triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral

$\Leftrightarrow \Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta A_2A_3A_1 \Leftrightarrow$

$a_2(a_2 - a_3) + a_3(a_3 - a_1) + a_1(a_1 - a_2) = 0 \Leftrightarrow \ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$

.

4.1.19 **Aria unui triunghi**. Dacă a_1, a_2, a_3 sunt afixele vârfurilor triunghiului $A_1A_2A_3$, notat în sens trigonometric, atunci

$$\sigma[A_1A_2A_3] = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \overline{a_3}a_1\right).$$

Fără a restrânge generalitatea problemei, putem considera originea sistemului ortogonal de axe în interiorul triunghiului.

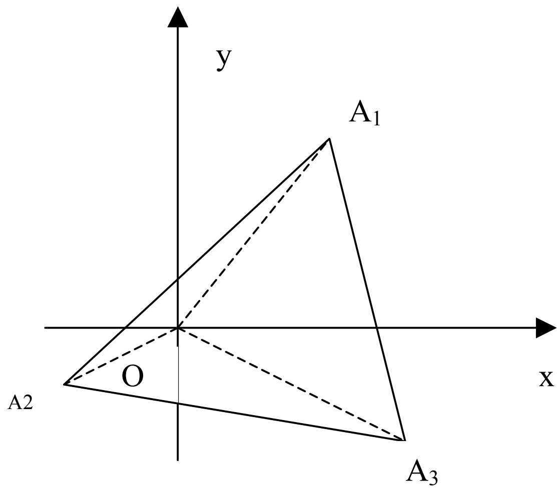
Fie $a_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)$

$a_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$a_3 = r_3(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)$.

Atunci:

$\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \overline{a_3}a_1 = r_1r_2[\cos(\theta_2-\theta_1) + i\sin(\theta_2-\theta_1)] + r_2r_3[\cos(\theta_3-\theta_2) + i\sin(\theta_3-\theta_2)] + r_1r_3[\cos(\theta_1-\theta_3) + i\sin(\theta_1-\theta_3)]$. Deci:



Demonstrație :

$$\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \overline{a_3}a_1\right) = \frac{1}{2}r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1) + \frac{1}{2}r_2r_3\sin(\theta_3-\theta_2) + \frac{1}{2}r_1r_3\sin(\theta_1-\theta_3) =$$

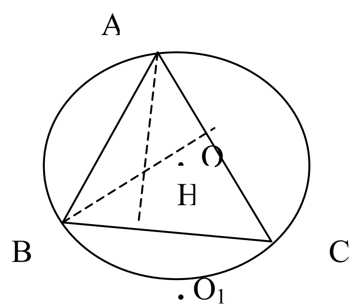
$$= \sigma[A_1OA_2] + \sigma[A_2OA_3] + \sigma[A_3OA_1] = \sigma[A_1A_2A_3].$$

4.1.20 **Observație** : Formula se poate extinde pentru un poligon conve Dacă $A_1A_2\ldots A_n$, $n \geq 3$ este un poligon convex, notat în sens trigonometric, iar a_1, $a_2, \ldots, a_n$ sunt afixele vârfurilor, atunci:

$\sigma[A_1A_2...A_n] = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + ... + \overline{a_{n-1}}a_n + \overline{a_n}a_1\right)$ (Formula lui Kiril Docev). Demonstrație prin inducție (vezi [3]).

4.1.21 **Afixul ortocentrului unui triunghi**. Față de un reper cartezian cu originea O în centrul cercului circumscris triunghiului ABC, afixul ortocentrului H al triunghiului ABC, este: $h = a + b + c$, unde H(h), A(a), B(b), C(c). **Demonstrație** :

Fie O_1 simetricul lui O față de BC. Atunci AHO_1O este paralelogram. Rezultă: $a + o_1 = h + o$. Obținem : $h = a + o_1 = a + b + c$.



4.1.22 Consecință : Față de un reper cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC, centrul ω al cercului lui Euler al triunghiului ABC este : $\omega = \dfrac{a+b+c}{2}$, *unde* ω (ω).

Demonstrație : Ω este mijlocul segemntului [OH].

4.1.23 Caracterizarea triunghiului dreptunghic . Triunghiul ABC înscris în cercul C(O, R) este dreptunghic dacă şi numai dacă $|a+b+c| = R$, unde A(a), B(b), C(c).

Demonstrație : Dacă triunghiul ABC este dreptunghic cu unghiul drept în A, atunci B şi C sunt diametral opuse, deci $b = -c$, de unde $|a+b+c| = |a| = R$.

Reciproc dacă $|a+b+c| = R$, atunci $|a+b+c|^2 = R^2$, adică $(a+b+c)\left(\dfrac{R^2}{a}+\dfrac{R^2}{b}+\dfrac{R^2}{c}\right) = R^2$, deci $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) = 1 \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$ adică două din punctele A, B, C sunt diametral opuse.

Bibliografie

1. *Andrei Gh., Caragea C., Cucurezeanu I., Bordea Gh., Probleme de algebră pentru concursurile de admitere şi olimpiade şcolare, E.D.P., Bucureşti, 1993*
2. *Andrica D., Bişboacă N., Numere complexe de la…a…la…z, Aditura Millenium, Alba Iulia, 2001*
3. *Andrica D., Varga C., Văcărețu D., Teme de geometrie, Editura Promedia Plus, Cluj Napoca, 1997*
4. *Cocea C., 200 de probleme din geometria triunghiului echilateral, Editura Gh. Asachi, Iaşi, 1992*
5. *Dincă M., Chiriță M., Numere complexe în matematica de liceu, Editura All Educational, Bucureşti, 1996*
6. *Nicula V., Numere complexe. Probleme şi exerciții pentru clasa a X-a, Editura Scorpion 7, Bucureşti, 1993*

Probleme rezolvate (4)

R4.2.1 Fie ABCDE un pentagon complex, iar M, N, P, Q, X, Y respectiv mijloacele segmentelor (BC), (CD), (DE), (EA), (MP), (NQ). Să se arate că XY || AB.

Soluție :

Notăm cu literele mici corespunzătoare, afixele vârfurilor. Avem: $m = \frac{b+c}{2}$,

$n = \frac{c+d}{2}$, $p = \frac{d+e}{2}$, $q = \frac{e+a}{2}$, $x = \frac{m+p}{2} = \frac{b+c+d+e}{4}$,

$y = \frac{a+d+c+e}{4}$. Atunci: $x - y = \frac{b-a}{2}$. Deci $\frac{XY}{AB} = \frac{1}{4}$ şi XY || AB.

R4.2.2 Dacă pe laturile unui patrulater oarecare ABCD construim în exterior pătrate de centre O_1, O_2, O_3, O_4, atunci dreptele O_1O_3 şi O_2O_4 sunt perpendiculare.

Soluție :

Fie O_1, O_2, O_3, O_4 centrele pătratelor construite pe (AD), (DC), (CB), respectiv (BA). Atunci O_1 este transformatul punctului D printr-o rotație de centru mijlocul segmentului (AD) şi unghi $\frac{\pi}{2}$ (vârfurile patrulaterului ABCD fiind notate în sens trigonometric). Deci: $o_1 = \frac{a+d}{2} + \left(d - \frac{a+d}{2}\right)i = \frac{a+d+i(d-a)}{2}$. Analog $o_2 = \frac{c+d+i(c-d)}{2}$, $o_3 = \frac{b+c+i(b-c)}{2}$, $o_4 = \frac{a+b+i(a-b)}{2}$. Avem:

$o_1 - o_3 = \frac{a+d-b-c}{2} + i\frac{d-a-b+c}{2}$,

$o_2 - o_4 = \frac{c+d-a-b}{2} + i\frac{c-d-a+b}{2}$. Deci $\frac{o_1 - o_3}{o_2 - o_4} = -i$. Obținem

$O_1O_3 = O_2O_4$ şi $O_1O_3 \perp O_2O_4$.

R4.2.3 Se dă un triunghi ABC şi în interiorul său se consideră triunghiul $A'B'C'$ asemenea cu triunghiul dat şi având aceeaşi orientare (adică vârfurile celor două triunghiuri sunt notate în acelaşi sens de rotație). Fie A'', B'', C'' aparținând segmentelor $(AA'), (BB'), (CC')$ astfel încât: $\frac{AA''}{A''A'} = \frac{BB''}{B''B'} = \frac{CC''}{C''C'}$.

Să se arate că $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$.
Soluție :

Fie $\dfrac{\overline{AA''}}{\overline{A''A'}} = \dfrac{\overline{BB''}}{\overline{B''B'}} = \dfrac{\overline{CC''}}{\overline{C''C'}} = \lambda$. Notăm cu litere mici afixele corespunzătoare vârfurilor. Atunci: $a'' = \dfrac{a-\lambda a'}{1-\lambda}$, $b'' = \dfrac{b-\lambda b'}{1-\lambda}$, $c'' = \dfrac{c-\lambda c'}{1-\lambda}$. Deoarece $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ rezultă : $a'(b-c)+b'(c-a)+c'(a-b)=0$. Se verifică că: $a''(b-c)+b''(c-a)+c''(a-b)=0$, adică $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$.

R4.2.4 Pe laturile patrulaterului convex ABCD se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM, BCN, CDP, DAQ. Să se arate că patrulaterele ABCD şi MNPQ au acelaşi centru de greutate.
Soluție :

Notăm vârfurile patrulaterului în sens trigonometric. Atunci: $m = b + (a-b)\varepsilon$, $n = c + (b-c)\varepsilon$, $p = d + (c-d)\varepsilon$, $q = a + (d-a)\varepsilon$, unde $\varepsilon = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$. Adunând aceste relații, obținem: m+n+p+q = a+b+c+d, deci patrulaterele ABCD şi MNPQ au acelaşi centru de greutate.

R4.2.5 Dacă pe laturile triunghiului ABC construim în exterior triunghiurile asemenea $AC'B, BA'C, CB'A$, atunci triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate.

Soluție : Fie $\dfrac{AB'}{AC} = \dfrac{BC'}{AB} = \dfrac{CA'}{BC} = r$ şi
$\alpha = \mu(\angle ABC') = \mu(\angle BCA') = \mu(\angle CAB')$. Atunci, folosind **4.1.8**, avem:
$b' = a + (c-a)r\varepsilon$, $c' = b + (a-b)r\varepsilon$, $a' = c + (b-c)r\varepsilon$, unde
$\varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Adunând aceste relații obținem $a' + b' + c' = a + b + c$,
adică cele două triunghiuri au acelaşi centru de greutate.
Observație : Dacă triunghiurile construite în exterior sunt echilaterale, obținem cunoscuta problemă a lui Toricelli.

R4.2.6 Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABC', CAB', BCA'. Să se arate că centrele de greutate ale acestor triunghiuri formează un triunghi echilateral.
Soluție :

Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC', CAB', BCA'. Notăm cu litere mici corespunzătoare, afixele vârfurilor. Atunci:

$c' = b + (a-b)\varepsilon$, $a' = c + (b-c)\varepsilon$, $b' = a + (c-a)\varepsilon$, unde $\varepsilon = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$; $g_1 = \dfrac{a+2b+(a-b)\varepsilon}{3}$, $g_2 = \dfrac{c+2a+(c-a)\varepsilon}{3}$, $g_1 = \dfrac{b+2c+(b-c)\varepsilon}{3}$. Obținem:

$$g_3 + (g_2 - g_3)\varepsilon = \frac{b+2c+(b-c)\varepsilon}{3} + \frac{2a-c-b}{3}\cdot\varepsilon + \frac{2c-a-b}{3}\cdot\varepsilon^2 = g_1,$$

deoarece $\varepsilon^2 = \varepsilon - 1$. Deci $g_3 + (g_2 - g_1)\varepsilon = 0$, adică $\Delta G_1G_2G_3$ este echilateral.

R4.2.7 Se consideră în plan un triunghi $A_1A_2A_3$ şi un punct P_0. Se defineşte $A_s = A_{s-3}, \forall\, s \geq 4, s \in N$ şi se construieşte un şir de puncte P_0, P_1, …, astfel încât P_{k+1} este imaginea punctului P_k prin rotația de centru A_{k+1} şi de unghi 120^0, în sensul arcelor de ceasornic, k=0, 1, 2, … . Dacă $P_{1986} = P_0$, atunci triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral.

<u>Soluție</u> :

Avem: $A_1=A_4=A_7=\ldots$; $A_2=A_5=A_8=\ldots$; $A_3=A_6=A_9=\ldots$. Dar $P_{k+1}= = R_{A_{k+1},\ 120^\circ}(P_k)$, deci $p_{k+1} = a_{k+1} + (p_k - a_k)\varepsilon$, unde $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

Obținem : $p_{k+1} = (1-\varepsilon)\left[a_{k+1} + a_k\varepsilon + \ldots + a_1\varepsilon^k\right]$. Din $0 = P_0 = P_{1986}$, obținem: $0 = (1-\varepsilon)\left[a_{1986} + a_{1985}\varepsilon + \ldots + a_1\varepsilon^{1985}\right] = (1-\varepsilon)\left[a_3 + a_2\varepsilon + a_1\varepsilon^2\right]\cdot 662$. Deci $a_3 + a_2\varepsilon + a_1\varepsilon^2 = 0$. Cum $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, obținem: $a_3 = a_1 + \varepsilon(a_2 - a_1)$, adică $A_1A_2A_3$ este echilateral.

R4.2.8 Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater inscriptibil. Se notează cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$. Să se arate că patrulaterele $A_1A_2A_3A_4$ şi $H_1H_2H_3H_4$ sunt congruente.

<u>Soluție</u> :

Avem: $h_1 = a_2 + a_3 + a_4$, $h_2 = a_3 + a_4 + a_1$, $h_3 = a_4 + a_1 + a_2$, $h_4 = a_1 + a_2 + a_3$.

Atunci: $H_1H_2 = |a_1 - a_2| = A_1A_2$ şi

$$\mu(\angle H_1H_2H_3) = \arg\frac{h_3 - h_2}{h_1 - h_2} = \arg\frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_1} = = \arg\frac{a_3 - a_2}{a_1 - a_2} = \mu(\angle A_1A_2A_3).$$

Analog celelalte.

R4.2.9 Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte, având acelaşi modul r. Arătați că: $\frac{1}{|z_1-z_2|\cdot|z_1-z_3|}+\frac{1}{|z_2-z_1|\cdot|z_2-z_3|}+\frac{1}{|z_3-z_1|\cdot|z_3-z_2|} \geq \frac{1}{r^2}$.

Soluție :

Considerăm un triunghi care are afixele z_1, z_2, z_3 şi fie originea axelor de coordonate în centrul cercului circumscris triunghiului. Notăm $|z_1 - z_2| = c$, $|z_2-z_3|=a$, $|z_1-z_3|=b$ şi $r=|z_k|=R, k=1,2,3$. Inegalitatea devine:

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac} \geq \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow a+b+c \geq \frac{abc}{R^2} \Leftrightarrow 2p \geq \frac{4RS}{R^2} \Leftrightarrow Rp \geq 2S \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow Rp \geq 2\rho p \Leftrightarrow R \geq 2\rho$, unde ρ raza cercului înscris. (inegalitatea lui Euler).

R4.2.10 Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ afixele vârfurilor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ale unui poligon înscris în cercul cu centrul în origine şi se rază r. considerăm $g=\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}$.

a) Arătați că $|g-z_1|^2+|g-z_2|^2+\ldots+|g-z_n|^2+n|g|^2=nr^2$.

b) Demonstrați inegalitatea: $|g-z_1|+|g-z_2|+\ldots+|g-z_n| \leq nr$.

c) Deduceți apoi că în orice triunghi are loc inegalitatea: $m_a+m_b+m_c \leq \frac{9}{2}R$.

Soluție :

a) Avem:

$$\sum_{k=1}^{n}|g-z_k|^2=\sum_{k=1}^{n}(g-z_k)\left(\overline{g}-\overline{z_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}g\overline{g}-\sum_{k=1}^{n}\overline{g}z_k-\sum_{k=1}^{n}g\overline{z_k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}z_k\overline{z_k}=n|g|^2-\overline{g}ng-gn\overline{g}+nR^2=nR^2-n|g|^2.$$

b) $$\left(\sum_{k=1}^{n}|g-z_k|\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}|g-z_k|\cdot 1\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|g-z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}1^2\right)=n\sum_{k=1}^{n}|g-z_k|^2 \leq$$

$\leq nr^2n=n^2r^2$.

c) Din punctul b) deducem: GA+GB+GC$\leq$3R, adică $\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_b+\frac{2}{3}m_c \leq 3R \Rightarrow m_a+m_b+m_c \leq \frac{9}{2}R$.

R4.2.11 Dacă z_1, z_2, z_3, z_4 $\in C^*$ sunt distincte două câte două şi $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ şi $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$, atunci sunt afixele vârfurilor unui dreptunghi.

<u>Soluție</u> :

Din $z_1+z_2+z_3=-z_4$ rezultă $|z_1+z_2+z_3|=|-z_4|=1$. Folosind relația **4.1.22** deducem că $\Delta Z_1Z_2Z_3$ este dreptunghic, unde $Z_i(z_i)$, i =1, 2, 3, 4. Analog pentru celelalte unghiuri.

R4.2.12 Afixele z_1, z_2, z_3 ale vârfurilor triunghiului $A_1A_2A_3$ verifică condițiile:

a) $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$;

b) $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=3$.

Demonstrați că $A_1A_2A_3$ este triunghi echilateral.

<u>Soluție</u> :

Din b) obținem: $(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_2+z_3)(\overline{z_2}+\overline{z_3})+(z_3+z_1)(\overline{z_3}+\overline{z_1})=3\Rightarrow$ $(z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})=0\Rightarrow|z_1+z_2+z_3|^2=0$. Deci OH=0, unde O reprezintă centrul cercului circumscris, iar H ortocentrul triunghiului $A_1A_2A_3$.

Din OH=0 rezultă O=H, adică ortocentrul triunghiului coincide cu centrul cercului circumscris. Deducem că $A_1A_2A_3$ este triunghi echilateral.

R4.2.13 Fie ABCD un paralelogram şi M un punct în planul său. Să se arate că: $MA\cdot MC+MB\cdot MD\geq AB\cdot BC$.

<u>Soluție</u> :

Fie z afixul punctului M, iar a, b, c, d afixele punctelor A, B, C, D. Folosind faptul că a+c=b+d, obținem: $(a-b)(b-c)=(z-b)(z-d)-(z-a)(z-c)$. Trecând la module rezultă: $|(a-b)(b-c)|=|(z-b)(z-d)-(z-a)(z-c)|\leq|(z-b)(z-d)|+|(z-a)\cdot$ $\cdot(z-c)|=|z-b|\cdot|z-d|+|z-a|\cdot|z-c|$, adică

$AB\cdot BC\leq MB\cdot MD+MA\cdot MC$.

R4.2.14 Pe laturile triunghiului $A_1A_2A_3$ considerăm punctele $M_1\in(A_2A_3)$, $M_2\in(A_1A_3)$, $M_3\in(A_1A_2)$ astfel încât $\overrightarrow{M_1A_2}=\lambda_1\overrightarrow{M_1A_3}$; $\overrightarrow{M_2A_3}=\lambda_2\overrightarrow{M_2A_1}$; $\overrightarrow{M_3A_1}=\lambda_3\overrightarrow{M_3A_2}$. Atunci aria triunghiului $M_1M_2M_3$ este :

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)}\sigma[A_1A_2A_3].$$

Soluție :

Notăm cu literele mici corespunzătoare afixele punctelor. Atunci: $m_1 = \frac{a_1 - \lambda_1 a_3}{1-\lambda_1}$, $m_2 = \frac{a_3 - \lambda_2 a_1}{1-\lambda_2}$, $m_3 = \frac{a_1 - \lambda_3 a_2}{1-\lambda_3}$. Deci:

$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\overline{m_1}m_2 + \overline{m_2}m_3 + \overline{m_3}m_1\right] = \frac{1}{2}\operatorname{Im}$

$$\left[\frac{1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)}\left(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \overline{a_3}a_1\right)\right] = \frac{1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)}\sigma[A_1A_2A_3].$$

Observație 1 : Pentru $\sigma[M_1M_2M_3] = 0$, regăsim teorema lui Menelaus: $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.

Observație 2 . Dacă M_1, M_2, M_3 sunt picioarele bisectoarelor interioare ale unui triunghi ABC, atunci $\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\sigma[ABC]$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor.

R4.2.15 Se consideră pentagonul inscriptibil ABCDE. Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDE, DEA, EAB şi cu M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 mijloacele laturilor DE, EA, AB, BC şi respectiv CD. Să se arate că dreptele H_1M_1, H_2M_2, H_3M_3, H_4M_4 şi H_5M_5 sunt concurente.

Soluție :

Alegem un reper cu originea O în centrul cercului circumscris pentagonului. Dacă afixele punctelor A, B, C, D, E sunt a, b, c, d, respectiv e, se ştie că afixul punctului H_1 este h_1=a+b+c, iar afixul lui M_1 este $m_1=\frac{d+e}{2}$ şi analoagele. Un punct P de afix p aparține dreptei H_1M_1 dacă şi numai dacă există t_1 real astfel încât $p = (1-t_1)(a+b+c) + t_1\frac{d+e}{2}$. Analog $P \in H_2M_2$ dacă şi numai dacă există $t_2 \in$ R, astfel încât $p = (1-t_2)(b+c+d) + t_2\frac{e+a}{2}$ ş.a.m.d. Pentru $t_1 = \frac{2}{3}$ avem $p = \frac{a+b+c+d+e}{3} \in H_iM_i$, oricare ar fi $i = \overline{1,5}$, deci dreptele sunt concurente.

5. Ecuații în C

5.1 Nu ne propunem să epuizăm problematica ecuațiilor peste corpul numerelor complexe. Vom scoate în evidență numai câteva aspecte legate de rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex, modulele rădăcinilor unei ecuații, etc., aşa cum intervin în multe probleme de concurs. În acest scop, reamintim:

5.1.1 **Forma trigonometrică** a unui număr complex: dacă z = x+iy $\in C$, atunci $z = r(\cos t + i\sin t)$, *unde* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ se numeşte modulul numărului complex z şi se notează $|z|$, iar t se numeşte argumentul (redus) al lui z. Acesta se notează cu arg z şi reprezintă mulțimea soluțiilor sistemului:

$$\begin{cases} \cos t = \dfrac{x}{r} \\ \sin t = \dfrac{y}{r} \end{cases}, \text{ unde } 0 \le t \le 2\pi, \quad \textit{pentru} \quad z \ne 0 .$$

5.1.2 **Rădăcină de ordinul n a unui număr complex**

Dacă a $\in C$, n $\in N$, $n \ge 2$, atunci orice număr complex z care verifică ecuația $z^n = a$ se numeşte rădăcina de ordinul n a lui a.

Pentru a = r (cos t + i sin t), $r > 0, t \in [0,2\pi)$, avem rădăcinile de ordinul n:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t+2k\pi}{n} + i\sin\frac{t+2k\pi}{n}\right), \; k = \overline{0, n-1}.$$

În particular, dacă a=1, rădăcinile ecuației $z^n = 1$, n $\in N$, $n \ge 3$ se numesc rădăcinile de ordinul n ale unității şi se notează cu ε_k, $k = \overline{0, n-1}$.

Deci $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n} \stackrel{not}{=} e^{\frac{2k\pi}{n}i}$, $k = \overline{0, n-1}$.

Imaginile geometrice ale numerelor complexe ε_k sunt vârfurile unui poligon regulat cu n laturi, înscris în C(O,1).

5.1.3 Se numeşte **rădăcină primitivă** a ecuației binome $z^n = 1$, fiecare rădăcină a ecuației care nu este rădăcină nici a unei ecuații binome de grad mai mic decât n.

5.1.4 Proprietăţi :

a) Fiecare rădăcină a ecuaţiei binome $x^n = 1$ este de asemenea rădăcină a fiecărei ecuaţii $x^q = 1$, pentru care n/q.

b) Rădăcinile comune ale ecuaţiilor binome $x^m = 1$ şi $x^n = 1$ sunt şi rădăcinile ecuaţiei binome $x^d = 1$, unde d = (m,n) este c.m.m.d.c. al numerelor m şi n.

c) Rădăcinile primitive ale ecuaţiei binome $x^m = 1$, sunt date de $x_k = e^{\frac{2k\pi}{m}i}$, în care (k,m) =1, $0 \le k \le m$.

Demonstraţie

a) Este imediată.

b) Fie $x_p = e^{\frac{2p\pi}{m}i}$, $p = \overline{0, m-1}$, rădăcină a ecuaţiei $x^m = 1$ şi $x_q = e^{\frac{2q\pi}{n}i}$, $q = \overline{0, n-1}$ rădăcină e ecuaţiei $x^n = 1$. Condiţia necesară şi suficientă ca $x_p = x_q$ este ca $|x_p| = |x_q|$ şi ca $\arg x_p = \arg x_q$. Prima relaţie este satisfăcută deoarece $|x_p| = |x_q|$=1. A doua are loc dacă există $r \in Z$ astfel încât să avem $\frac{2p\pi}{m} = \frac{2q\pi}{n} + 2r\pi$ sau $\frac{p}{m} - \frac{q}{n} = r$.

Dacă d = (m,n), atunci există m', n' $\in N$ în aşa fel încât m = m' d, n = n' d, cu (m', n') =1. Ultima ecuaţie devine n'p - m'q = m'n'r d şi de aici rezultă că m'/ n'p şi cum (m', n') = 1, rezultă că m'/p. Adică există p' $\in N$ în aşa fel încât p = p'm'. Deci $\arg x_p = \frac{2p\pi}{m} = \frac{2p'm'\pi}{m'd} = \frac{2p'\pi}{d}$ şi deci x_p este rădăcină a ecuaţiei $x^d = 1$, unde d = (m,n).

Reciproc, fiecare rădăcină a ecuaţiei binome $x^d = 1$ este conform proprietăţii a) şi rădăcină comună a ecuaţiilor $x^m = 1$ şi $x^n = 1$, deoarece d/m şi d/n.

c) Trebuie să găsim ecuaţia binomă $x^p = 1$, de gradul cel mai mic, care admite rădăcina x_k. Din $x_k^p = 1$, deducem că există $k' \in Z$ astfel încât $\frac{2kp\pi}{m} = 2k'\pi$, adică $\frac{kp}{m} = k' \in Z$.

Dacă d = (k,m), atunci există k',m' astfel încât $k = k'd$, $m = m'd$, $(k', m') = 1$. Înlocuind în ultima relaţie obţinem $\frac{k'pd}{m'd} = \frac{k'p}{m'} \in Z$ şi cum k' şi m' sunt prime între ele, rezultă m'/p. Deci cea

mai mică valoare a lui p este p = $m^{'}$ şi înlocuind în $m = m^{'} d$ obţinem $p = \frac{m}{d}$.
Rezultă că dacă x_k este rădăcină a ecuaţiei binome $x^m = 1$, ecuaţia binomă de gradul cel mai mic pe care o verifică rădăcina x_k, este de gradul $p = \frac{m}{d}$, unde d=(k,m).

Dacă, în plus, x_k este rădăcină primitivă a ecuaţiei binome $x^m = 1$, atunci aceasta este ecuaţia binomă de gradul cel mai mic care are pe x_k rădăcină. Adică trebuie să avem $m = \frac{m}{d}$, d = (k,m). Deducem că trebuie d = (k,m) = 1, adică k şi m sunt prime între ele.

5.1.5 <u>Observaţie</u>

Dacă (m,n)=1, ecuaţiile binome $x^n = 1$ şi $x^m = 1$ au numai x=1 rădăcină comună.

5.1.6 <u>Propoziţie</u>

Dacă x este rădăcina primitivă a ecuaţiei binome $x^n = 1$, atunci rădăcinile ecuaţiei sunt: $x^r, x^{r+1}, ..., x^{r+n-1}, \forall\, r \in N$.

<u>Demonstraţie</u>

Într-adevăr, x^{r+h}, $h = \overline{0, n-1}$ este rădăcină a ecuaţiei binome $x^n = 1$, deoarece $\left(x^{r+h}\right)^n = e^{2(r+h)\pi i} = 1$. Rămâne să arătăm că oricare două dintre cele n numere $\alpha^r, \alpha^{r+1}, ..., \alpha^{r+n-1}$ sunt distincte.

Să presupunem prin absurd că, pentru $r + h_1 \neq r + h_2$ $(cu\ h_1 > h_2)$, am avea $\alpha^{r+h_1} = \alpha^{r+h_2}$. Atunci: $\alpha^{r+h_1}\left(\alpha^{h_1-h_2} - 1\right) = 0$ şi deci, deoarece $\alpha^{r+h_2} \neq 0$, am avea $\alpha^{h_1-h_2} = 1$. Dar $h_1 - h_2 < n$ şi deci α ar fi rădăcină a ecuaţiei binome $x^{h_1-h_2} = 1$, de grad $h_1 - h_2 < n$. Contadicţie cu α este rădăcină primitivă a ecuaţiei binome $x^n = 1$.

Bibliografie

1. *Andrica D., Bişboacă N., Numere complexe de la a…la…z, Editura Millenium, Alba Iulia 2001*
2. *Andrica D., Muşuroia N., O metodă de obținere a unor identități remarcabile, G.M. 1, 1996, pag. 13-18*
3. *Andrei Gh., Caragea C., Cucurezeanu I., Bordea Gh., Probleme de algebră pentru concursuri de admitere şi olimpiade şcolare, E.D.P., Bucureşti ,1993*
4. *Bălună M. şi colectiv, Zece lecții alese de matematică elementară, S.S.M.R, 1998*
5. *Becheanu M. şi colaboratori, Olimpiade de matematică, IX-X, 19960-1996, Editura Gil, Zalău, 1997*
6. *Gorgotă V., Şerdean I., Ulmeanu S., Matematica în concursurile şcoalre, IX-XII, Editura Paralela 45, 2002*
7. *Nicula V., Numere complexe, Probleme şi exerciții pentru clasa a X-a, Editura Scorpion 7, Bucureşti, 1993*
8. *Tămâian T., Probleme selectate din reviste şcoalre, Editura Cub Press, Baia Mare, 2002*

Probleme rezolvate (5)

R5.2.1 Fie n>2 un număr natural şi $z \in C \setminus \{1\}$ astfel încât $z^n = 1$.

1) Să se arate că $|1 - z| > \frac{2}{n-1}$.

2) Să se arate că pentru orice $k \in Z$, k nedivizibil cu n, are loc: $\left|\sin \frac{k\pi}{n}\right| > \frac{1}{n-1}$.

<u>Soluție</u> **:**

1) $z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1)$, deci z satisface ecuația: $z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 = 0$. Rezultă: $(z^{n-1} - 1) + (z^{n-2} - 1) + ... + (z-1) = -n$ şi $(z-1)\left[z^{n-2} + 2z^{n-3} + ... + (n-1)\right] = -n$. Trecând la module obținem:

$n = |z-1| \cdot \left|z^{n-2} + 2z^{n-3} + 3z^{n-4} + ... + (n-1)\right| \le |1-z| \cdot \left(|z|^{n-2} + 2|z|^{n-3} + ... + (n-1)\right)$

, deci: $n \le |1-z| \cdot (1 + 2 + ... + (n-1)) = |1-z| \cdot \frac{n(n-1)}{2}$. Rezultă: $|1-z| \ge \frac{2}{n-1}$. (Egali- tate numai dacă imaginile geometrice ale numerelor ar fi coliniare).

$2) 1 - z = 1 - \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = 2\, i\sin\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right)$.

Rezultă că $|1-z| = 2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|$. Folosind punctul 1), obținem concluzia.

R5.2.2 Într-un cerc de rază 1 se înscrie un poligon regulat $A_1A_2...A_n$. demonstrați că dacă P este un punct pe cercul circumscris poligonului, atunci :

$$PA_1^2 + PA_2^2 + ... + PA_n^2 = 2n.$$

<u>Soluție</u> :

Fie $A_k(z_k)$, unde z_k, $k = \overline{1,n}$ sunt soluțiile ecuației $z^n = 1$. Atunci:

$$\sum_{k=1}^{n} PA_k^2 = \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} (z - z_k)(\overline{z} - \overline{z}_k) = \sum_{k=1}^{n} (z\overline{z} + z_k\overline{z}_k - z_k\overline{z} - z\overline{z}_k) =$$

$$= n|z|^2 - \overline{z}\sum_{k=1}^{n} z_k - z\sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k + \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 .$$

Dar $\sum_{k=1}^{n} z_k =$ 0, din relațiile lui Viète, deci și $\sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k = 0$. Obținem :

$$\sum_{k=1}^{n} PA_k^2 = n|z|^2 + n = 2n .$$

R5.2.3 Fie ε o rădăcină primitivă a ecuației $x^n - 1 = 0,\ n \geq 2$ și z un număr complex astfel încât $\left|z - \varepsilon^k\right| \leq 1$, pentru orice $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$.

Să se arate că $|z| \leq 1$.

Soluție :

Evident

$1+\varepsilon+\varepsilon^2+...+\varepsilon^{n-1} = \dfrac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} = 0.$ *Atunci* $(z-1)+(z-\varepsilon)+(z-\varepsilon^2)+...+$ $+(z-\varepsilon^{n-1}) = nz$. Trecând la module, avem :

$|nz| = |(z-1)+(z-\varepsilon)+(z-\varepsilon^2)+...+$ $(z-\varepsilon^{n-1})| \leq |z-1| + |z-\varepsilon| + ... + |z-\varepsilon^{n-1}| \leq n$. Deci $|z| \leq 1$.

R5.2.4 Într-un cerc se înscriu două poligoane regulate, unul cu 1982 laturi, altul cu 2973 laturi. Știind că au vârfuri comune, să se afle numărul lor.

Soluție :

Numărul vârfurilor comune este egal cu numărul soluțiilor comune ale ecuațiilor binome: $z^{1982} = 1$ și $z^{2973} = 1$. Din **5.1.4** obținem că acest număr este $d = (1982, 2973) = 991$.

R5.2.5 Fie $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon regulat înscris în cercul $\mathcal{C}$ de rază egală cu 1. Să se determine $\max \prod_{k=1}^{n} PA_k,\ P \in \mathcal{C}$.

Soluție :

Fie $A_k(z_k)$ unde $z_k, k = \overline{1,n}$ sunt soluțiile ecuației $z^n = 1$. Avem egalitatea: $z^n - 1 = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$. Considerând z afixul lui P și trecând la module în relația anterioară, avem: $\prod_{k=1}^{n}|z - z_k| = |z^n - 1| \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n} PA_k = |z^n - 1|$. Dar $|z^n - 1| \leq |z^n| + 1 = 2$. Deci $\max \prod_{k=1}^{n} PA_k = 2$. Pentru $z^n = -1$ are loc egalitatea.

R5.2.6 Un număr par de persoane sunt aşezate în jurul unei mese circulare. După o pauză, aceleaşi persoane se reaşează la masă ocupând poziţii arbitrare. Să se arate că există cel puţin două persoane astfel încât numărul persoanelor aşezate între ele a rămas neschimbat. Rămâne proprietatea adevărată pentru un număr impar de persoane?

Soluţie :

Presupunem că persoanele ocupă vârfurile unui poligon regulat $A_0 \ldots A_{2n-1}$ cu 2n laturi înscris într-un cerc de centru O, vârfurile fiind notate astfel încât să parcurgem cercul în sens trigonometric. Alegând axa Ox astfel încât să treacă prin vârful A_0, putem asocia fiecărui vârf A_k numărul complex z_k de argument $\frac{k\pi}{n},\ 0 \le k \le 2n$. Considerăm că rearanjarea vârfurilor poligonului se face prin rotirea fiecărui vârf A_k cu un unghi φ_k de măsură $\ell_k \cdot \frac{\pi}{n}\left(\ell_k \in N,\ \ell_k \cdot \frac{\pi}{n} \le 2\pi\right)$, în sens trigonometric. Dacă două unghiuri φ_i, φ_j sunt egale, concluzia problemei rezultă imediat. În caz contrar rezultă că unghiurile φ_k parcurg toată mulţimea $\left\{0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, (2n-1)\frac{\pi}{n}\right\}$. Deoarece după rotaţie se obţin vârfurile aceluiaşi poligon regulat, rezultă că suma unghiurilor de rotaţie este un număr real de forma $2m\pi$. Deci are loc egalitatea: $\sum_{k=0}^{2n-1} \varphi_k = \sum_{j=0}^{2n-1} j \cdot \frac{\pi}{n} = (2n-1)\pi = 2m\pi$. Deci contradicţie.

În cazul n impar proprietatea nu rămâne adevărată. Considerând cazul a 5 persoane notate cu numerele 1, 2, 3, 4, 5 şi permutatrea $\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,3\,5\,2\,4 \end{pmatrix}$ se observă că pentru (i, j) cu $1 \le i \le j \le 5$ avem $j - i \ne |\sigma(j) - \sigma(i)|$.

R5.2.7 Fie ecuaţia $az^2 + bz + c = 0$, unde a, b, c $\in C^*$ $cu\ |a| = |b| = |c|$. Să se arate că $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \le |z_k| \le \frac{\sqrt{5}+1}{2},\ k = 1,2$, unde z_1, z_2 sunt rădăcinile ecuaţiei.

Soluţie :

Avem: $|az^2| = |-bz - c| = |bz + c| \le |b| \cdot |z| + |c|$. Rezultă $|z|^2 - |z| - 1 \le 0$. Deci $\left(|z| - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(|z| - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \le 0$. Rezultă

$|z| \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Analog $|c| = |az^2 + bz| \le |a| \cdot |z|^2 + |b| \cdot |z|$. Obținem $|z|^2 + |z| - 1 \ge 0$ şi de aici $|z| \ge \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

R5.2.8 Fie ecuația $az^2 + bz + c = 0$, a, b, c $\in C^*$. Să se demonstreze că :

a) Dacă z_1 şi z_2 sunt rădăcinile ecuației şi $|z_1| = |z_2|$, atunci $\frac{b^2}{ac} \in R$ şi $\frac{b^2}{ac} \le 4$

b) Dacă $0 < \frac{b^2}{ac} \le 4$ şi α este una dintre rădăcinile ecuației, atunci $\left|\frac{b}{a}\right| \le 2|\alpha|$.

<u>Soluție</u> :

a) Fie $z_1 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),\ z_2 = r(\cos\beta + i\sin\beta)\ cu\ r > 0$ şi $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. Din relațiile lui Viète avem :

$$-\frac{b}{a} = z_1 + z_2 = r\left[(\cos\alpha + \cos\beta) + i(\sin\alpha + \sin\beta)\right] =$$

$$= 2r\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad (1) \quad \text{şi}$$

$$\frac{c}{a} = z_1 \cdot z_2 = r^2\left(\cos(\alpha+\beta) + \ + i\sin(\alpha+\beta)\right) \quad (2).$$

Din (1) avem $\frac{b^2}{a^2} = 4r^2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right) \overset{(2)}{=} 4\frac{c}{a}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$, de unde $\frac{b^2}{ac} = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \in R$ şi $\frac{b^2}{ac} \le 4$.

b) Avem $z_{1,2} = \frac{-b \pm ib\sqrt{\frac{4ac}{b^2} - 1}}{2a}$. Atunci

$$|z_{1,2}| = \frac{|b|}{2|a|} \cdot \left|-1 \pm ib\sqrt{\frac{4ac}{b^2} - 1}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{b}{a}\right| \cdot \sqrt{1 + \frac{4ac}{b^2} - 1} = \frac{1}{2}\left|\frac{b}{a}\right|\sqrt{\frac{4ac}{b^2}} \ge \frac{1}{2}\left|\frac{b}{a}\right|.$$

R5.2.9 Fie $z=\frac{1}{2}+\omega+\omega^2+...+\omega^n$, unde $\omega=\cos\frac{2\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2\pi}{2n+1}$, $n\in N^*$.

Să se demonstreze că:

a) $\operatorname{Im} z^{2k}=0, \operatorname{Re} z^{2k+1}=0$, pentru orice $k\in N$.

b) $(2z+1)^{2n+1}+(2z-1)^{2n+1}=0$.

Soluție :

a) Evident $\omega^{2n+1}=1$. Atunci: $0=1-\omega^{2n+1}=(1-\omega)(1+\omega+\omega^2+...+\omega^{2n})$.

Rezultă:

$1+\omega+\omega^2+...+\omega^{2n}=0 \Leftrightarrow 1+\omega+\omega^2+...+\omega^n(\omega+....+\omega^n)=0$.

Rezultă: $\omega+\omega^2+...+\omega^n=\frac{-1}{1+\omega^n}$. Deci:

$$z=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+\omega^n}=\frac{\omega^n-1}{2(\omega^n+1)}=\frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{2\pi n}{n+1}+i\sin\frac{2\pi n}{n+1}-1}{\cos\frac{2\pi n}{n+1}+i\sin\frac{2\pi n}{n+1}+1}=\frac{i}{2}tg\,\frac{\pi n}{2n+1}.$$

Atunci $z^{2k}=\frac{i^{2k}}{2^{2k}}\cdot tg^{2k}\frac{\pi n}{2n+1}\in R$, deci $\operatorname{Im} z^{2k}=0$;

$z^{2k+1}=\frac{i^{2k+1}}{2^{2k+1}}\cdot tg^{2k+1}\frac{\pi n}{2n+1}$ este pur imaginar, deci $\operatorname{Re} z^{2k+1}=0$.

b)

$$(2z+1)^{2n+1}+(2z-1)^{2n+1}=\left(i\ tg\frac{\pi n}{2n+1}+1\right)^{2n+1}+\left(i\ tg\frac{\pi n}{2n+1}-1\right)^{2n+1}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{2n+1}-(\cos\alpha-i\sin\alpha)^{2n+1}}{\cos^{2n+1}\alpha}=\frac{2i\sin(2n+1)\alpha}{\cos^{2n+1}\alpha}=0,\ unde\ \alpha=\frac{\pi n}{2n+1}.$$

R5.2.10 Rezolvați în mulțimea numerelor complexe sistemul:

$$\begin{cases} x(x-y)(x-z)=3\\ y(y-x)(y-z)=3\\ z(z-x)(z-y)=3\end{cases}.$$

Soluție :

Observăm că numerele x, y, z sunt nenule şi diferite. Scăzând între ele primele două ecuații avem: $(x-y)(x^2+y^2-xz-yz)$ şi cum $x\neq y$, rezultă că

$x^2+y^2=xz+yz\ \ (1)$. Analog obținem $y^2+z^2=yz+zx\ \ (2)$ şi $z^2+x^2=zy+xy\ \ (3)$. Adunând relațiile (1), (2) şi (3), obținem $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx\ \ (4)$. Scăzând din relația (4) relația (1), obținem $z^2=xy\ \ (5)$ şi analog $x^2=zx\ \ (6)$ şi $y^2=xz\ \ (7)$. Din relațiile (6) şi (7) avem $(x-y)(x+y)=z(y-x)$, adică $(x-y)(x+y+z)=0$. Cum $x\neq y$, obținem x+y+z = 0. Înlocuind în (1) obținem $x^3=1$ şi analog $y^3=1$, $z^3=1$. Obținem mulțimea soluțiilor $S=\{(1,\varepsilon,\varepsilon^2),(1,\varepsilon^2,\varepsilon),(\varepsilon,1,\varepsilon^2),(\varepsilon,\varepsilon^2,1),(\varepsilon^2,\varepsilon,1),(\varepsilon^2,1,\varepsilon)\}$ unde $\varepsilon^3=1$, $\varepsilon\neq 1$.

6. Metoda vectorială în rezolvarea problemelor de algebră

O cale elegantă de rezolvare a unor probleme de algebră, mai ales a unor inegalități, este metoda vectorială, care foloseşte în principal produsul scalar a doi vectori şi proprietățile acestuia.

6.1. Produsul scalar a doi vetori.

<u>Definiție</u> Produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$ este numărul notat $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, unde φ este unghiul vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$.

1) dacă $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ este un număr pozitiv;

2) dacă $\varphi = \frac{\pi}{2}$, atunci produsul scalar este nul;

3) dacă $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci produsul scalar este număr negativ.

6.1.1. Proprietăți ale produsului scalar.

P_1. Produsul scalar este comutativ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

P_2. Doi vectori nenuli sunt perpendiculari dacă şi numai dacă produsul lor scalar este nul $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ dacă şi numai dacă $\vec{a} \perp \vec{b}$

P_3. Produsul scalar a doi vectori de acelaşi sens este egal cu produsul modulelor lor

P_4. Produsul scalar a doi vectori este egal cu mărimea unuia dintre vectori înmulțită cu proiecția celuilalt pe el.

P_5. Produsul scalar este distributiv față de adunarea vectorilor

$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

6.1.2. Produsul scalar în plan

Fie $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, doi vectori in plan.

Atunci $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Putem calcula unghiul a doi vectori $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$. Avem $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

De aici deducem că vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt perpendiculari dacă şi numai dacă $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

6.1.3. Produsul scalar în spaţiu

Fie $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ doi vectori în spaţiu.

Atunci 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

2) $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

3) $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

6.2. Aplicaţii ale produsului scalar Consideraţii teoretice

Considerăm în reperul cartezian XOY , vectorii

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$

Vom nota în continuare produsul scalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $=a_1b_1 + a_2b_2$,

sub forma unui tablou: $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$.

6.2.1.<u>Definiţie</u> Cuplurile *(a_1,a_2) , (b_1,b_2) au aceeaşi monotonie* dacă $a_1 \le a_2$, $b_1 \le b_2$ sau $a_2 \le a_1$, $b_2 \le b_1 2$, $a_i, b_i > 0$, $i = \overline{1,2}$ deci cel mai mare dintre numerele a_1, a_2 se află în tablou deasupra celui mai mare dintre b_1 şi b_2.

6.2.2. <u>Propoziţie</u> Fie *(a_1,a_2), (b_1,b_2)* cupluri cu aceeaşi monotonie

Atunci $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$

<u>Demonstraţie</u>

Avem $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 - a_1b_2 - a_2b_1 = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \ge 0$

6.2.3. <u>Definiție</u> Tripletele (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) <u>au aceeaşi monotonie</u> dacă $a_1 \le a_2 \le a_3$, $b_1 \le b_2 \le b_3$ sau $a_1 \ge a_2 \ge a_3$, $b_1 \ge b_2 \ge b_3$, $a_1, b_i > 0$, $i = \overline{1,3}$.

6.2.4. <u>Propoziție</u> Fie (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) două triplete de numere reale pozitive, având aceeaşi monotonie, iar $(b_1^{'}, b_2^{'}, b_3^{'})$ o permutare a numerelor b_1, b_2, b_3. Atunci $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b^{'}_1 & b^{'}_2 & b_3^{'} \end{bmatrix}$.

<u>Demonstrație</u>

Trebuie să arătăm că din cele 6 numere de forma $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1^{'} & b_2^{'} & b_3^{'} \end{bmatrix}$, cel mai mare număr este $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$.Dacă $(b_1^{'}, b_2^{'}, b_3^{'}) \ne (b_1, b_2, b_3)$, atunci $(\exists)$ k, l, $1 \le k \le l \le 3$ astfel încât (a_k, a_l), (b_k, b_l) să nu aibă aceeaşi monotonie. Din proprietate 6.2.2. rezultă că schimbând locurile numerelor $b_k^{'}, b_l^{'}$, numărul $\begin{bmatrix} a_k & a_l \\ b_k^{'} & b_l^{'} \end{bmatrix}$ se mărşte şi deci $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1^{'} & b_2^{'} & b_3^{'} \end{bmatrix}$ se măreşte. Continuând raționamentul, ajungem la concluzia că

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ este cel mai mare număr.

6.2.5. Observație (Generalizare)

Numim vector n-dimensional sau vector cu n componente, $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R_+^n$

$n \ge 2$.

Considerând vectorii n-dimensionali

$\vec{a} = (a_1, a_2, ... a_n), \vec{b} = (b_1, b_2, ... b_n), ..., \vec{z} = (z_1, z_2, ... z_n)$, definim numărul

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 .... & a_n \\ b_1 & b_2 .... & b_n \\ .... & .... & .... \\ z_1 & z_2 .... & z_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 .... z_1 + a_2 b_2 .... z_2 + ... + a_n b_n .... z_n .$$

Dacă $(a_1, a_2, ..., a_n), (b_1, b_2, ..., b_n), ..., (z_1, z_2, ..., z_n)$ au aceeaşi monotonie, atunci

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 .... & a_n \\ b_1 & b_2 .... & b_n \\ .... & .... & .... \\ z_1 & z_2 .... & z_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1' & a_2' .... & a_n' \\ b_1' & b_2' .... & b_n' \\ .... & .... & ..... \\ z_1' & z_2' .... & z_n' \end{bmatrix}.$$

6.3. Alte inegalități deduse folosind produsul scalar

R6.4.1. Dacă $a>0$, $b>0$, $c>0$, să se arate că $\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq (a+b+c)^2$

Soluție

Considerăm vectorii $\overrightarrow{v_1} = \left(a\sqrt{a}, b\sqrt{b}, c\sqrt{c}\right)$ şi $\overrightarrow{v_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$

Avem $\left|\overrightarrow{v_1}\right| = \sqrt{a^3+b^3+c^3}$, $\left|\overrightarrow{v_2}\right| = \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = a+b+c$

Inegalitatea $\left|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}\right| \leq \left|\overrightarrow{v_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_2}\right|$ este echivalentă cu inegalitatea cerută.

R6.4.2. Dacă $a, b \in [-1,1]$ să se arate că

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

Soluție Considerăm vectorii $\overrightarrow{v_1} = (1,1)$, $\overrightarrow{v_2} = \left(\sqrt{1-a^2}, \sqrt{1-b^2}\right)$. Relația $\left|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}\right| \leq \left|\overrightarrow{v_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_2}\right|$ se scrie $\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \sqrt{2}\sqrt{2-a^2-b^2}$ (1)

Trebuie să arătăm că $\sqrt{2\left(2-a^2-b^2\right)} \le 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$ (2), inegalitate echivalentă cu $4-2a^2-2b^2 \le 4-(a+b)^2$ dacă şi numai dacă $(a-b)^2 \ge 0$.
Din (1) şi (2) obținem relația din enunț.

Observații

1^0 Inegalitatea (1) este mai "tare" decât inegalitatea cerută.

2^0 Avem egalitate pentru $a=b=\lambda$, $\lambda \in R$ şi $|\lambda| \le 1$.

3^0 Inegalitatea admite şi o generalizare:

Dacă $|x_i| \le 1,\ x_i \in R,\ i=\overline{1,n}$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i^2} \le \sqrt{n^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

R6.4.3. Să se demonstreze că

$$\frac{\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{9}+\sqrt[n]{16}}{\sqrt[n]{6}+\sqrt[n]{8}+\sqrt[n]{12}} > \frac{\sqrt[n+1]{6}+\sqrt[n+1]{8}+\sqrt[n+1]{12}}{\sqrt[n+1]{4}+\sqrt[n+1]{9}+\sqrt[n+1]{16}}$$

Soluție Numerele $4=2^2$, $9=3^2$, $16=4^2$, $6=3\cdot 2$, $8=2\cdot 4$ şi $12=3\cdot 4$, ne sugerează considerarea următorilor vectori:
$\overrightarrow{v_1}=\left(\sqrt[n]{2},\sqrt[n]{3},\sqrt[n]{4}\right)$, $\overrightarrow{v_2}=\left(\sqrt[n]{3},\sqrt[n]{4},\sqrt[n]{2}\right)$, $\overrightarrow{v_3}=\left(\sqrt[n+1]{2},\sqrt[n+1]{3},\sqrt[n+1]{4}\right)$, $\overrightarrow{v_4}=\left(\sqrt[n+1]{3},\sqrt[n+1]{4},\sqrt[n+1]{2}\right)$.

Inegalitatea $\left|\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}\right| \le \left|\overrightarrow{v_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_2}\right|$ se scrie $\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{4}\cdot\sqrt[n]{2} \le$

$\le \sqrt{\left(\sqrt[n]{2}\right)^2+\left(\sqrt[n]{3}\right)^2+\left(\sqrt[n]{4}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt[n]{3}\right)^2+\left(\sqrt[n]{4}\right)^2+\left(\sqrt[n]{2}\right)^2}$,

sau $\sqrt[n]{6}+\sqrt[n]{12}+\sqrt[n]{8} \le \sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{9}+\sqrt[n]{16}$.

Deoarece nu putem avea egalitate, deducem $\frac{\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{9}+\sqrt[n]{16}}{\sqrt[n]{6}+\sqrt[n]{12}+\sqrt[n]{8}} > 1$ (1)

Folosind un raționament similar pentru vectorii $\overrightarrow{v_3}$ şi $\overrightarrow{v_4}$ obținem

$\frac{\sqrt[n+1]{6}+\sqrt[n+1]{8}+\sqrt[n+1]{12}}{\sqrt[n+1]{4}+\sqrt[n+1]{9}+\sqrt[n+1]{16}} < 1$ (2). Inegalitățile (1) şi (2) rezolvă complet problema.

R6.4.4. Să se arate că pentru numerele pozitive fixate *a,b,c,x,y,z* , are loc inegalitatea

$$ax+by+cz+\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}\geq\frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z)$$

(V. Dubrovski, V.Cârtoaje, Kvanr nr 4/1990)

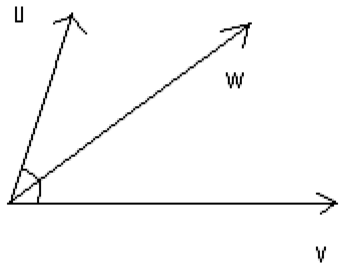
<u>Soluție</u> Expresia $ax+by+cz$ reprezintă produsul scalar dintre vectorii $\vec{u}=(a,b,c)$ şi $\vec{v}=(x,y,z)$, iar $\sqrt{a^2+b^2+c^2},\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ reprezintă lungimile acestor vectori. Să vedem ce semnificație are membrul drept al inegalității cerute. Dacă notăm $\vec{w}=(1,1,1)$ atunci $a+b+c=\vec{u}\cdot\vec{w}$, iar $x+y+z=\vec{v}\cdot\vec{w}$. Cu aceste notații inegalitatea de demonstrat devine:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}+\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\geq\frac{2}{3}\vec{u}\cdot\vec{w}\cdot\vec{v}\cdot\vec{w}. \qquad (*)$$

Dacă $\vec{u}=(0,0,0)$ sau $\vec{v}=(0,0,0)$, inegalitatea $(*)$ este evident satisfăcută, aşadar putem presupune $\left|\vec{u}\right|>0,\left|\vec{v}\right|>0$. Cum $\left|\vec{w}\right|=\sqrt{3}$, împărțim $(*)$ cu

$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}+1\geq2\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}\cdot\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|}$, sau $\cos\alpha+1\geq2\cos\beta\cos\chi$, unde α,β,χ sunt unghiurile dintre $\vec{u}$ şi $\vec{v}$, $\vec{u}$ şi $\vec{w}$ respectiv $\vec{v}$ şi $\vec{w}$

(FIG 6.1).



Cerința s-a redus la o problemă de geometrie în spațiu. Fiind dat un triedru cu unghiurile plane de la vârf egale cu α,β,χ să fie demonstreze că are loc inegalitatea : $\cos\alpha+1\geq2\cos\beta\cos\chi$.

Este cunoscut că $\alpha\leq\beta+\chi$, de unde $\cos\alpha\geq\cos(\beta+\chi)$, prin urmare avem: $2\cos\beta\cos\chi=\cos(\beta+\chi)+\cos(\beta-\chi)\leq\cos\alpha+1$, ceea ce trebuia demonstrat.

Să vedem când avem egalitate. Din raționamentul făcut anterior, observăm că pentru a obține egalitate trebuie ca $\beta - \chi = 0$ şi $\alpha = \beta + \chi$, deci $\beta = \chi$ şi $\alpha = 2\beta$ (FIG…).

Acestea conduc la faptul că vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sunt coplanari şi $<\left(\vec{u},\vec{v}\right) = <\left(\vec{v},\vec{w}\right)$. Să observăm că

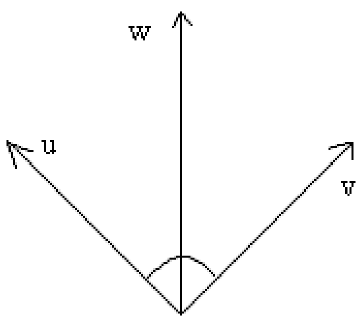


Fig. 6.2

proiecția lui $\vec{v}$ pe dreapta suport a lui $\vec{w}$ este vectorul $\vec{v}' = \lambda \dfrac{\vec{w}}{\left|\vec{w}\right|}$, unde

$\lambda = \left|\vec{v}\right| \cos\beta = \left|\vec{v}\right| \cdot \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|} = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}}$, deci $\vec{v}' = \dfrac{x+y+z}{3}\cdot\vec{w}$ (FIG…)

Prin urmare coordonatele vectorului $\vec{v}''$ simetricul lui $\vec{v}$ față de $\vec{w}$ vor fi

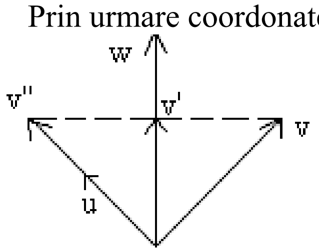


Fig. 6.3

Prin urmare coordonatele vectorului $\vec{v}''$ simetricul lui $\vec{v}$ față de $\vec{w}$ vor fi $\vec{v}'' = \left(\dfrac{2(y+z)-x}{3}, \dfrac{2(x+z)-y}{3}, \dfrac{2(x+y)-z}{3}\right)$. Cum $\vec{u}$ şi $\vec{v}''$ sunt vectori coliniari, rezultă $\frac{a}{2(y+z)-x}=\frac{b}{2(x+z)-y}=\frac{c}{2(x+y)-z}$, care este condiția ca inegalitatea să devină egalitate.

6.4. Sisteme de ecuații

R6.5.1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 9y^2z^2+4x^2z^2+25x^2y^2=16x^2y^2z^2 \\ x^2+4y^2+z^2=9 \\ x-y\sqrt{3}+z\sqrt{15}=\frac{15}{2} \end{cases}$$

<u>Soluție</u> Prima ecuație este echivalentă cu $\frac{9}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{25}{z^2}=16$. Această scriere ne sugerează considerarea următorilor vectori: $\vec{a}=\left(\frac{3}{x},\frac{2}{y},\frac{5}{z}\right)$, $\vec{b}=(x,2y,z)$. Avem $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{x}\cdot x+\frac{2}{y}\cdot 2y+\frac{5}{z}\cdot z=12$, iar $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{\frac{9}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{25}{z^2}}\cdot\sqrt{x^2+4y^2+z^2}$, deci $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Rezultă că unghiul vectorilor este nul, vectorii sunt deci coliniari şi prin urmare coordonatele lor sunt proporționale. Obținem $\frac{3}{x^2}=\frac{1}{y^2}=\frac{5}{z^2}$, de unde

$\frac{3}{x^2}=\frac{4}{4y^2}=\frac{5}{z^2}=\frac{12}{9}$, deci $x^2=\frac{9}{4}$, $y^2=\frac{3}{4}$, $z^2=\frac{15}{4}$. Ținând cont de ecuația a treia, avem soluțiile $\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right);\left(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

R6.5.2. Să se arate că sistemul:

$\begin{cases} x^4+y^4+z^4=1 \\ x^2+y^2+z^2=\sqrt{7} \end{cases}$ nu are soluții reale.

Soluții Considerăm vectorii $\vec{a}=\left(x^2,y^2,z^2\right)$, $\vec{b}=(1,1,2)$. Inegalitatea $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\leq\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2$ este echivalentă cu $\left(x^2+y^2+2z^2\right)^2\leq\left(x^4+y^4+z^4\right)\left(1^2+1^2+2^2\right)$, adică $7\leq 6$, absurd. Așadar sistemul nu are soluții reale.

R6.5.3. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^2+y^2+y(x+z)=0 \\ x^2+x+y+2yz=0 \\ 3x^2+8y^2+8xy+8y^2=2x+4z+2 \end{cases}$$

(Matematica V Școle 5/1984)

Soluție Scrierea sistemului sub forma echivalentă

$$\begin{cases} x(x+y)+y(y+z)=0 \\ x(x+1)+y(2z+1)=0 \\ 4(x+y)^2+4(y+z)^2=(x+1)^2+(2z+1)^2 \end{cases} \qquad (*)$$

ne sugerează considerarea următorilor vectori $\vec{a}=(x,y)$, $\vec{b}=(x+y,y+z)$, $\vec{c}=(x+1,2z+1)$. Din (*) deducem $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$, $4\overrightarrow{b^2}=\overrightarrow{c^2}$. Dacă $\vec{a}=\vec{0}$, rezultă $x=y=0$ și $z=-\dfrac{1}{2}$. Dacă $\vec{a}\neq\vec{0}$, avem $\vec{c}=\pm 2\vec{b}$ și vectorii $\vec{b}$ și $\vec{c}$ sunt coliniari. Din $(x+1,2z+1)=(2x+2y,2y+2z)$ rezultă x+2y=1 și 2y=1, deci soluția $\left(0,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$. Din $(x+1,2z+1)=-(2x+2y,2y+2z)$ rezultă 3x+2y=1 și $4z+2y=-1$, de unde $x=\dfrac{1-2y}{3}$, $y=\dfrac{-1-2y}{4}$ care înlocuite în prima ecuație ne conduce la $10y^2-13y+4=0$ cu soluția convenabilă $y=\dfrac{1}{2}$. Soluțiile ecuației sunt $\left(0,0,-\dfrac{1}{2}\right)$ și $\left(0,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bibliografie

- *M. Ganga, Manual pentru clasa a X-a M1, Ed. Mathpress, Ploiești, 2002*
- *V.Tudor, Probleme de algebră cu rezolvări ingenioase, Ed. Carminis, Pitești, 1999 pag 64-84*

Probleme rezolvate (6)

R6.3.1. Fie $a, b > 0$. Să se arate că $a^3 + b^3 \geq a^2 b + b^2 a$.

Soluţie

Cuplurile *(a,b), (a²,b²)* au aceeaşi monotonie, deci

$\begin{bmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b \\ b^2 & a^2 \end{bmatrix}$ dacă şi numai dacă $a^3 + b^3 \geq a^2 b + b^2 a$

R6.3.2. Dacă $a, b, c > 0$, atunci are loc inegalitatea $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.

Soluţie Tripletele *(a,b,c), (a²,b²,c²)* au aceeaşi monotonie, deci

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{bmatrix}$ dacă şi numai dacă $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.

R6.3.3. Dacă a,b,c>0, atunci $\frac{b}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Solutie Considerăm tripletele (a,b,c); $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$ cu aceeaşi monotonie şi tripletele $\left(\frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}\right)$, $\left(\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}\right)$ sau

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} \end{bmatrix}$ dacă şi numai dacă

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$ *şi*

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} \end{bmatrix}$ dacă şi numai dacă

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{c+b} + \frac{c}{a+c}$

Adunând cele două inegalităţi, obţinem inegalitatea cerută.

R6.3.4. Dacă $a_i \geq 0$, $i=\overline{1,n}$, atunci $\dfrac{a_1+a_2+....+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_n}$ (inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică)

Soluție Considerăm vectorul n-dimensional $\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n)$, atunci

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 .... & x_n \\ x_1 & x_2 .... & x_n \\ .... & .... & .... \\ x_1 & x_2 & x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} x_1 & x_2 .... & x_n \\ x_2 & x_3 .... & x_1 \\ .... & .... & .... \\ x_n & x_1 .... & x_{n-1} \end{bmatrix} \text{ dacă şi numai dacă}$$

$$x_1^n + x_2^n + ...x_n^n \geq n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot ..... \cdot x_n$$

Luând $a_i = x_i^n$, $i=\overline{1,n}$, obținem inegalitatea cerută.

R6.3.5. (Inegalitatea lui Cebâşev)

Să se arate că dacă $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq .... \leq a_n$, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq .... \leq b_n$,

Atunci $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \geq \dfrac{1}{n}(a_1+a_2+....+a_n)(b_1+b_2+....+b_n)$

Soluție

Considerăm vectorii n-dimensionali de aceeaşi monotonie $\vec{a}$=(a$_1$,a$_2$,….,a$_n$), $\vec{b}$=(b$_1$,b$_2$,….,b$_n$). Adunând inegalitățile

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_n \\ b_1 & b_2 & .... & b_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_n \\ b_1 & b_2 & .... & b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_n \\ b_1 & b_2 & .... & b_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_n \\ b_2 & b_3 & .... & b_1 \end{bmatrix}$$

……………………………………

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_n \\ b_1 & b_2 & .... & b_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_n \\ b_n & b_1 & .... & b_{n-1} \end{bmatrix}, \text{ obținem}$$

$n(a_1b_1+a_2b_2+….+a_nb_n) \geq (a_1+a_2+….+a_n)(b_1+b_2+….+b_n)$.

R6.3.6. Fie $a_1,a_2,….,a_n>0$ şi $S=a_1+a_2+….+a_n$. Să se arate că $\dfrac{a_1}{S-a_1}+\dfrac{a_2}{S-a_2}+....+\dfrac{a_n}{S-a_n} \geq \dfrac{n}{n-1}$

Soluție

Considerăm n-uplurile cu aceeaşi monotonie $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $\left(\frac{1}{S-a_1}, \frac{1}{S-a_2}, ..., \frac{1}{S-a_n}\right)$, atunci avem inegalitățile

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_n \\ \frac{1}{S-a_1} & \frac{1}{S-a_2} & .... & \frac{1}{S-a_n} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_n \\ \frac{1}{S-a_2} & \frac{1}{S-a_3} & .... & \frac{1}{S-a_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_n \\ \frac{1}{S-a_1} & \frac{1}{S-a_2} & .... & \frac{1}{S-a_n} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_n \\ \frac{1}{S-a_3} & \frac{1}{S-a_4} & .... & \frac{1}{S-a_2} \end{bmatrix}$$

…………………………………………………………………..

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_n \\ \frac{1}{S-a_1} & \frac{1}{S-a_2} & .... & \frac{1}{S-a_n} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_n \\ \frac{1}{S-a_n} & \frac{1}{S-a_1} & .... & \frac{1}{S-a_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Prin adunarea inegalităților obținem.

$$(n-1)\left(\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + ... + \frac{a_n}{S-a_n}\right) \geq$$

$$\frac{a_2 + a_3 + ... + a_n}{S-a_1} + \frac{a_1 + a_3 + ... + a_n}{S-a_2} + ... + \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{S-a_n} = n$$

R6.3.7. Să se arate că dacă $a,b,c,d>0$, atunci $a^3+b^3+c^3+d^3 \geq a^2b+b^2c+c^2d+d^2a$.

Soluție

Considerăm triplete (a^2, b^2, c^2, d^2) , (a,b,c,d) cu aceeaşi monotonie,

atunci $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d^2 & a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$

R6.3.8. Fie $a,b,c>0$. Demonstrați că $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

(C. 1952, G.M. 7-8/1998)

Soluție Tripletele (a^2, b^2, c^2) şi $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$ au aceeaşi monotonie.

Aplicând rezultatul din propoziția 6.2.4. avem inegalitățile

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \dfrac{1}{b+c} & \dfrac{1}{c+a} & \dfrac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \dfrac{1}{c+a} & \dfrac{1}{a+b} & \dfrac{1}{b+c} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \dfrac{1}{b+c} & \dfrac{1}{c+a} & \dfrac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \dfrac{1}{a+b} & \dfrac{1}{b+c} & \dfrac{1}{c+a} \end{bmatrix}$$

Adunând membru cu membru aceste inegalități , obținem

$$2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right) \geq \frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b+c)+\frac{1}{2}(c+a) = a+b+c$$

<u>Comentariu</u> Prezentăm în continuare o altă soluție a problemei, bazată pe inegalități cunoscute. Presupunem $a \geq b \geq c$, deci $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ şi $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$.

Din inegalitatea Cebâşev avem $3\sum \frac{a^2}{b+c} \geq \sum a^2 \cdot \sum \frac{1}{b+c}$ (1)

Din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, rezultă $3\sum a^2 \geq (a+b+c)^2$ (2)

Din inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică, avem

$\sum \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{a+b+c}$ (3)

Din (1),(2) şi (3) rezultă inegalitatea cerută.

7. Ecuații exponențiale şi logaritmice nestandard

De cele mai multe ori, problemele propuse la concursurile de matematică nu se încadrează într-un anumit tipar. Rezolvarea lor presupune din partea competitorilor, pe lângă o bună stăpânire a aparatului matematic, şi abilitate deosebită care să permită "spargerea" problemei.

Noțiunile "problemă standard", "problemă nestandard" sunt relative. Orice problemă a cărei rezolvare nu este cunoscută, poate reprezenta, la un moment dat, o problemă nestandard.

Vom numi problemă nestandard o problemă a cărei rezolvare nu se bazează pe un algoritm cunoscut. Nu există metode generale de rezolvare a acestor probleme. Vom încerca să indicăm câteva direcții de abordare a acestora. Tehnicile utilizate apelează la: studiul monotoniei, studiul convexității unor funcții, inegalități clasice, etc.

7.1 Utilizarea monotoniei unor funcții

7.1.1 **<u>Teoremă</u>** : Dacă funcția f este strict monotonă pe intervalul I, iar c este o constantă reală, atunci ecuația $f(x) = c$ are pe intervalul I cel mult o soluție.

<u>Demonstrație</u> : Fie f funcție strict crescătoare. Presupunem că ecuația $f(x) = c$ are cel puțin două soluții diferite x_1, x_2 pe intervalul I. Fie $x_1 < x_2$. Din f strict crescătoare rezultă $f(x_1) < f(x_2)$. Contradicție cu $f(x_1) = f(x_2) = c$.

7.1.2 **<u>Teoremă</u>** : Dacă funcțiile f şi g sunt monotone pe intervalul I, de monotonii diferite, cel puțin una dintre ele fiind strict monotonă, atunci ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult o soluție pe intervalul I.

<u>Demonstrație</u> : Fie f strict crescătoare, iar g descrescătoare pe intervalul I. Presupunem că există cel puțin două soluții diferite x_1, x_2, din intervalul I, ale ecuației $f(x) = g(x)$. Fie $x_1 < x_2$. Atunci $f(x_1) = g(x_1) \geq g(x_2) = f(x_2)$. Contradicție cu f funcție strict crescătoare pe intervalul I.

Amintim câteva rezultate cunoscute din teoria funcțiilor:

7.1.3 **<u>Propoziție</u>** : Fie $f, g : A \subset R \to R$.

a) Dacă f şi g sunt funcții strict crescătoare (descrescătoare) pe A, atunci $f + g$ este o funcție strict crescătoare (descrescătoare) pe A.

b) Dacă $f, g : A \to (0,\infty)$ sunt strict crescătoare (descrescătoare), atunci $f \cdot g$ este o funcție strict crescătoare (descrescătoare).

7.1.4 <u>Propoziție</u> : Fie $f : A \to B,\ g : B \to C$.

a) Dacă *f*, g sunt strict crescătoare, atunci $g \circ f$ este strict crescătoare.

b) Dacă *f*, g sunt strict descrescătoare, atunci $g \circ f$ este strict crescătoare.

c) Dacă *f*, g sunt strict monotone, dar de monotonii diferite, atunci $g \circ f$ este strict descrescătoare.

7.2. Utilizarea inegalităților şi rezolvarea anumitor ecuații exponențiale şi logaritmice

Vom pune în evidență alte câteva direcții de abordare a ecuațiilor exponențiale şi logaritmice nestandard, direcții ce se bazează pe inegalități: metoda constantei separatoare, metoda utilizării inegalităților clasice, inegalități deduse din studiul convexității anumitor funcții, etc.

I. **<u>Metoda constantei separatoare</u>** sau metoda minimaximului, se bazează în principal pe evaluarea ambilor membri ai ecuației.

Fie dată ecuația $f(x) = g(x)$, $x \in I \subset R$ (1). Să admitem că se cunoaşte că $f(x) \le A$, iar $g(x) \ge A$, pentru orice x $\in I$. Este evident că ecuația (1) are soluții dacă şi numai dacă sistemul de ecuații $\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}, x \in I$ este compatibil. Evident partea dificilă o reprezintă determinarea constantei A. Nu sunt reguli generale. În principiu se utilizează proprietățile funcțiilor *f* şi g. Următorul exemplu este ilustrativ în acest sens:

R7.2.1 Să se rezolve ecuația: $2\cos^2 \dfrac{x^2 + x}{6} = 2^x + 2^{-x}$.

<u>Soluție</u>: Avem inegalitățile: $2\cos^2 \dfrac{x^2 + x}{6} \le 2$ şi $2^x + 2^{-x} \ge 2$. Deci egalitate avem dacă $\begin{cases} \cos^2 \dfrac{x^2 + x}{6} = 1 \\ 2^x + 2^{-x} = 2 \end{cases}$. Din a doua ecuație se obține x = 0, soluție unică, care verifică şi prima ecuație. Ecuația dată are soluția unică x = 0.

II. **<u>Utilizarea inegalităților clasice</u>** **:** Se folosesc inegalitățile: mediilor, Cauchy-Buniakovski-Schwarz, Bernoulli, etc., dar în mod special interesează situația în care avem egalitate în aceste inegalități. Amintim, fără a le demonstra, aceste inegalități.

7.2.2. **Inegalitatea mediilor** : Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt n numere reale strict pozitive, $(n \in N, n \geq 2)$, atunci:

$$H_n(a_1, a_2, ..., a_n) \leq G_n(a_1, a_2, ..., a_n) \leq A_n(a_1, a_2, ..., a_n),$$ cu egalitate dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n$, unde: $H_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}}$,

$$G_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n},$$

$$A_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

7.2.3. **Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz**: Dacă $a_i, b_i \in R$, $i = \overline{1, n}$, atunci: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=2}^{n} b_i^2 \right)$, cu egalitate dacă $a_i b_j = a_j b_i$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$.

7.2.4. **Inegalitatea lui Bernoulli** : Dacă $a \in R$, $a > -1$, $n \in N$, atunci:

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Ilustrăm această metodă prin următoarea problemă:

R7.2.5 Să se rezolve ecuația: $2^{\log_3 x} + 3^{\log_4 x} + ... + n^{\log_{n+1} x} + (n+1)^{\log_2 x} = $n

Soluție :

Folosind identitatea $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ şi inegalitatea dintre media aritmetică şi geometrică, avem:

$$nx = x^{\log_3 2} + x^{\log_4 3} + ... + x^{\log_{n+1} n} + x^{\log_2 (n+1)} \geq n\sqrt[n]{x^{\log_3 2 + \log_4 3 + ... + \log_{n+1} n + \log_2 (n+1)}} \geq$$

$$\geq n\sqrt[n]{x^{n\sqrt[n]{\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot ... \cdot \log_{n+1} n \cdot \log_2 (n+1)}}} = n\sqrt[n]{x^n} = nx \quad (1).$$

Am folosit faptul că:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot ... \cdot \log_{n+1} n \cdot \log_2 (n+1) = \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 4} \cdot ... \cdot \frac{\lg n}{\lg(n+1)} \cdot \frac{\lg(n+1)}{\lg 2} = 1$$

.

Egalitatea în (1) are loc pentru x = 1.

III. Utilizarea convexității :

7.2.2. Definiție : O funcție $f: I \subseteq R \to R$ este strict convexă pe intervalul I dacă $\forall\ x_1, x_2 \in I, \forall\ \lambda \in [0,1]$ are loc inegalitatea:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \text{ (2).}$$

Dacă inegalitatea este de sens contrar, funcția se numeşte strict concavă.

Amintim că funcția exponențială $f_a : R \to (0,\infty)$, $f_a(x) = a^x$, unde $a > 0,\ a \neq 1$ este strict convexă, iar funcția logaritmică $g_a : (0,\infty) \to R$, $g_a(x) = \log_a x$ este strict concavă pentru $a > 1$ şi strict convexă pentru $0 < a < 1$. Folosind inegalitatea (2) putem arăta că anumite ecuații nu mai au şi alte soluții.

R7.2.6 Problemă rezolvată: Să se rezolve ecuația:

$$5^x + 7^x + 11^x = 6^x + 8^x + 10^x,\ x \in N.$$

Soluție :

Evident x = 0 şi x = 1 sunt soluții. Arătăm că ecuația nu are alte soluții. Funcția $f : [0,\infty) \to R$, $f(t) = t^n$, unde n natural, $n \geq 2$ este strict convexă. Atunci, din (2), obținem: $\frac{a^n + b^n}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$, pentru $a, b > 0, a \neq b$.

Deci : $$\frac{5^x + 7^x}{2} > \left(\frac{5+7}{2}\right)^x = 6^x, \quad x \geq 2$$

$$\frac{7^x + 11^x}{2} > \left(\frac{7+11}{2}\right)^x = 9^x, \quad x \geq 2$$

$$\frac{11^x + 5^x}{2} > \left(\frac{11+5}{2}\right)^x = 8^x, \quad x \geq 2.$$

Adunând aceste relații, obținem: $5^x + 7^x + 11^x > 6^x + 8^x + 9^x$, pentru $x \geq 2$, deci ecuația nu poate avea alte soluții.

Un aspect legat de folosirea convexității în rezolvarea acestor tipuri de probleme este cuprins în următoarea propoziție:

7.2.3. Propoziție : Dacă funcția $f : I \to R$ este strict convexă pe intervalul I, iar $g : I \to R$ este o funcție liniară, atunci ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult două soluții pe intervalul I .

Demonstrație : Admitem că există cel puțin trei soluții diferite x_1, x_2, x_3. Fie $x_3 \in (x_1, x_2)$. Atunci există $\lambda \in (0,1)$ astfel încât: $x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Dar $f(x_3) = g(x_3) = \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. Contradicție cu f strict convexă.

Evident, concluzia propoziției se păstrează dacă f este strict concavă.

R7.2.8 Să se rezolve ecuația: $10^3(1999x+2) = 1^x + 2^x + ... + 2000^x$.

Soluție :

Se verifică ușor că x = 0 și x = 1 sunt soluții. Cum funcția $f : R \to R$, $f(x) = 10^3(1999x+2)$ este liniară, iar funcția $g : R \to R$, $g(x) = 1^x + 2^x + ... + 2000^x$ este strict convexă (sumă de funcții strict convexe este o funcție strict convexă, după cum se poate verifica, folosind **7.2.5**), deducem că ecuația $f(x) = g(x)$ nu poate să aibă alte soluții.

Bibliografie

1. *Andrei Gh., Cucurezeanu I., Caragea C., Bordea Gh., probleme de algebră pentru concursuri de admitere și olimpiade școlare, clasa a X-a, E.D.P., București, 1999*
2. *Becheanu M. și colaboratori, Olimpiade de matematice 1990-1996, clasa IX-X, Editura Gil, Zalău, 1997*
3. *Berinde V., Explorare, investigare și descoperire în matematică, Efemeride, 2001*
4. *Ganga M., Ecuații și inecuații, Editura Mathpress, Ploiești, 1998*
5. *Gorgotă V., Șerdean I., Ulmeanu S., Matematica în concursurile școlare, 2002, IX-XII, Editura Paralela 45, 2002*
6. *Nanu I., Tutescu L., Ecuații nestandard, aditura Apoloo, Craiova, 1994*
7. *Suceveanu V., Copaceanu R., Metode nestandard de rezolvare a ecuațiilor, Foaie matematică, Nr. 3 și Nr. 4, 1999, Chișinău*
8. *Tămâian T., Probleme selectate din reviste selecte, editura Cub Press, Baia Mare, 2002*

Probleme rezolvate (7.1)

R7.2.1 Să se rezolve ecuația: $10^x + 11^x + 12^x = 13^x + 14^x$.
<u>Soluție</u> :
Împărțim ambii membri cu 13^x. Ecuația devine:

$$\left(\frac{10}{13}\right)^x + \left(\frac{11}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1 + \left(\frac{14}{13}\right)^x.$$

Funcția $f : R \to R$, $f(x) = \left(\frac{10}{13}\right)^x + \left(\frac{11}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x$ este strict descrescătoare; funcția $g : R \to R$, $g(x) = 1 + \left(\frac{14}{13}\right)^x$ este strict crescătoare. Atunci ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult o soluție. Cum $x = 2$ verifică ecuația, deducem că aceasta este unică.

R7.2.2 Rezolvați în R_+^* ecuația: $\log_2\left(1 + \sqrt{x}\right) = \log_3 x$.
<u>Soluție</u> :
Notăm $\log_3 x = y$. Ecuația devine: $\log_2\left(1 + \sqrt{3^y}\right) = y$ sau $1 + \sqrt{3^y} = 2^y$, de unde $\left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y = 1$. Funcția $f : R \to R$, $f(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y$ este strict descrescătoare și $f(2) = 1$. Deci $y = 2$ este unica soluție. Obținem că $x = 9$ este unica soluție a ecuației date.

R7.2.3 Să se rezolve ecuația: $\log_6\left(x + x^{\log_3 4} + x^{\log_3 5}\right) = \log_3 x$.

<u>Soluție</u> : Pentru $x > 0$, ecuația se transcrie: $3^{\log_3 x} + 4^{\log_3 x} + 5^{\log_3 x} = 6^{\log_3 x}$. Pentru ecuația $3^z + 4^z + 5^z = 6^z$, împărțim cu 6^z și obținem: $\left(\frac{1}{2}\right)^z + \left(\frac{2}{3}\right)^z + \left(\frac{5}{6}\right)^z = 1$. Funcția $f : R \to R$, $f(z) = \left(\frac{1}{2}\right)^z + \left(\frac{2}{3}\right)^z + \left(\frac{5}{6}\right)^z$ este strict descrescătoare pe R și $f(3) = 1$. Deci $z = 3$ este unica soluție. Obținem că $x = 9$ este unica soluție a ecuației date.

R7.2.4 Să se rezolve ecuația: $(a + b)^x - a^x - b^x = 2\sqrt{(ab)^x}$, unde $a > 1,\ b > 1$.

<u>Soluție</u>: Ecuația se mai scrie: $(a + b)^x = \left(a^{\frac{x}{2}} + b^{\frac{x}{2}}\right)^2$ sau echivalent: $\left((a + b)^{\frac{x}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{x}{2}} + b^{\frac{x}{2}}\right)^2$. Obținem $(a + b)^{\frac{x}{2}} = a^{\frac{x}{2}} + b^{\frac{x}{2}}$. Împărțind cu $(a + b)^{\frac{x}{2}}$,

rezultă: $\left(\frac{a}{a+b}\right)^{\frac{x}{2}}+\left(\frac{b}{a+b}\right)^{\frac{x}{2}}=1$. Funcția $f:R\to R$, $f(x)=\left(\frac{a}{a+b}\right)^{\frac{x}{2}}+\left(\frac{b}{a+b}\right)^{\frac{x}{2}}$ este strict descrescătoare (sumă de funcții strict descrescătoare) şi $f(2)=1$. Deci $x=2$ este unica soluție.

R7.2.5 Să se rezolve în $(0,\infty)$ ecuația: $x^x=a^{x+a^2}$,

unde $a\in N$, $a>1$.

Soluție :

Logaritmând în baza a, obținem: $x\log_a x=x+a^2$ sau echivalent $\log_a x=1+\frac{a^2}{x}$. Funcția $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\log_a x$ este strict crescătoare, iar funcția $g:(0,\infty)\to R,\ g(x)=1+\frac{a^2}{x}$ este strict descrescătoare. Din **T 7.1.2** deducem că ecuația are cel mult o soluție. Dar $x=a^2$ este soluție. Deci $x=a^2$ este unica soluție.

R7.2.6 Să se rezolve: $x^n(x-1)+\lg x=0,\ n\in N^*$.

Soluție :

Ecuația se transcrie: $x^{n+1}-x^n+\lg\frac{x^{n+1}}{x^n}=0$. Adică $x^{n+1}+\lg x^{n+1}=x^n+\lg x^n$ (1). Funcția $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=x+\lg x$ este strict crescătoare, deci injectivă. Ecuația (1) devine $f\left(x^{n+1}\right)=f\left(x^n\right)$. Rezultă $x^{n+1}=x^n$. Cum $x>0$, obținem x = 1.

R7.2.7 Să se rezolve ecuația: $(x+a)^{\log_a b}-(x+b)^{\log_b a}=b-a$,

unde $a>1, b>1$.

Soluție :

Cum $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$, ecuația devine: $b^{\log_a(x+a)}-a^{\log_b(x+b)}=b-a$ sau $b^{\log_a(x+a)}+x+a=x+b+a^{\log_b(x+b)}$ sau $b^{\log_a(x+a)}+a^{\log_a(x+a)}=b^{\log_b(x+b)}+a^{\log_b(x+b)}$. Funcția $f:R\to R$, $f(x)=b^x+a^x$ este injectivă. Obținem: $\log_a(x+a)=\log_b(x+b)$. Fie $t=\log_a(x+a)$. Atunci: $b^t-a^t=b-a$. Dacă $a=b$, atunci orice x $\in(-a,\infty)$ este soluție.

Dacă $a<b$: $1=\left(\frac{a}{b}\right)^t+\frac{b-a}{b^t}$. Cum funcția $g:R\to R$, $g(t)=\left(\frac{a}{b}\right)^t+\frac{b-a}{b^t}$ este strict descrescătoare, obținem t = 1, adică x = 0 este soluție unică. Dacă $a>b$, analog.

R7.2.8 Rezolvați ecuația: $4^{x+\frac{1}{x}}+9^{x+\frac{1}{x}}=275$.

Soluție :

Pentru $x<0$, $4^{x+\frac{1}{x}}+9^{x+\frac{1}{x}}<2$, deci ecuația nu are soluții.

Fie $x>0$. Considerăm funcția $f_a:(0,\infty)\to R$, $f_a(x)=a^{x+\frac{1}{x}}$, $a>1$. Atunci $f_a=g\circ h$, unde $h:(0,\infty)\to[2,\infty)$, $h(x)=x+\dfrac{1}{x}$, iar $g:[2,\infty)\to R$, $g(x)=a^x$. Se constată că h este strict descrescătoare pe $(0,1]$ și strict crescătoare pe $[1,\infty)$, iar g este strict crescătoare. Atunci, din propoziția **7.1.4,** deducem că funcția f_a este strict descrescătoare pe $(0,1]$ și strict crescătoare pe $[1,\infty)$. Funcția $F:(0,\infty)\to R$, $F(x)=4^{x+\frac{1}{x}}+9^{x+\frac{1}{x}}=f_4(x)+f_9(x)$ este strict descrescătoare pe $(0,1]$ și strict crescătoare pe $[1,\infty)$, din **P 7.1.3**. În concluzie, ecuația: F(x)=275 are cel mult câte o soluție pe intervalele $(0,1]$, respectiv $[1,\infty)$. Dar $x=\dfrac{1}{2}\in(0,1]$ și $x=2\in[1,\infty)$ sunt soluții. Deci $x=\dfrac{1}{2}$ și $x=2$ sunt singurele soluții ale ecuației date.

R7.2.9 Rezolvați sistemul: $\begin{cases}3^x-2^y=23\\ \log_3 x+\log_2 y=2\end{cases}$.

Soluție :

Din prima ecuație: $x=\log_3(2^y+23)$, iar din a doua: $x=3^{2-\log_2 y}$. Obținem ecuația: $\log_3(2^y+23)=3^{2-\log_2 y}$. Cum funcțiile din cei doi membri ai ecuației sunt de monotonii diferite, iar $y=2$ verifică ecuația, obținem că $y=2$ este soluție unică. Soluția sistemului este: $\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$.

R7.2.10 Rezolvați în R sistemul: $\begin{cases}3^x+4^y=5^x\\ 3^y+4^z=5^y\\ 3^z+4^x=5^z\end{cases}$.

Soluție :

Adunăm ecuațiile sistemului și rezultă: $(3^x+4^x-5^x)+(3^y+4^y-5^y)+(3^z+4^z-5^z)=0$ (*) . Știm, folosind monotonia, că ecuația $3^x+4^x=5^x$ are singura soluție x = 2. Deci x = y = z = 2 este soluție a sistemului. Vom arăta că este soluție unică. Admitem că ar exista o soluție cu $x > 2$. Din prima ecuație rezultă că $4^y = 3^x\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1\right]$. Dar funcția $f:[0,\infty)\to R,\quad f(x) = 3^x\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1\right]$ fiind strict crescătoare (ca produs de funcții pozitive strict crescătoare, **P 7.1.3**), deducem că $x > 2 \;\Rightarrow f(x) > 16$, adică $4^y > 16$, deci $y > 2$. Analog obținem $z > 2$. Dar pentru $x > 2,\; y > 2,\; z > 2$, avem $3^x + 4^x - 5^x < 0$, $3^y + 4^y - 5^y < 0$, $3^z + 4^z - 5^z < 0$. Contradicție cu (*). Asemănător se tratează şi cazurile $x \in (0,2)$, respectiv $x \le 0$.

Probleme rezolvate (7.2)

R7.4.1 Rezolvați ecuația: $\log_3\left(8 + 2x - x^2\right) = 2^{x-1} + 2^{1-x}$.

Soluție :

Avem: $8 + 2x - x^2 \le 9$, pentru orice x real. Atunci $\log_3\left(8 + 2x - x^2\right) \le 2$, pentru orice $x \in (-2,4)$. Dar $2^{x-1} + 2^{1-x} \ge 2\sqrt{2^{x-1}\cdot 2^{1-x}} = 2$. Ecuația dată este echivalentă cu sistemul: $\begin{cases}\log_3\left(8 + 2x - x^2\right) = 2\\ 2^{x-1} + 2^{1-x} = 2\end{cases}$. Se verifică că x = 1 este unica soluție.

R7.4.2 Să se rezolve în R ecuația: $\log_2\left(2x^2 + \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$.

Soluție :

Se verifică că x = 0 este soluție a ecuației. Cum $2x^2 + \sqrt{2} \ge \sqrt{2}, \forall\, x \in R$, avem $\log_2\left(2x^2 + \sqrt{2}\right) \ge \frac{1}{2}$, $\forall\, x \in R$. Vom arăta că $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2} \le \frac{1}{2}$, $\forall\, x \in R$. Avem echivalent $2\sqrt{x^2+1} \le x^2 + 2$ sau $4x^2 + 4 \le x^4 + 4x^2 + 4$, echivalent cu $0 \le x^4$, $\forall\, x \in R$. Am arătat că $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2} \le \frac{1}{2} \le \log_2\left(2x^2 + \sqrt{2}\right)$, $\forall\, x \in R$. Atunci ecuația dată este echivalentă cu sistemul: $\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2} = \frac{1}{2}\\ \log_2\left(2x^2 + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\end{cases}$.

Obținem x = 0, unica soluție.

R7.4.3 Să se rezolve ecuația: $2^{\log_3 x} + 3^{\log_x 2} = 4$.

Soluție :

Notăm $\log_3 x = t, x > 0, x \neq 1$. Atunci: $3^{\log_x 2} = 3^{\frac{\log_3 2}{\log_3 x}} = \left(3^{\log_3 2}\right)^{\frac{1}{\log_3 x}} = 2^{\frac{1}{t}}$. Ecuația devine: $2^t + 2^{\frac{1}{t}} = 4$. Aplicând inegalitatea mediilor, avem: $4 = 2^t + 2^{\frac{1}{t}} \geq \geq 2\sqrt{2^{t+\frac{1}{t}}} \geq 4$, cu egalitate dacă t = 1. Obținem x = 3, soluția ecuației date.

R7.4.4 Să se rezolve ecuația: $16^x + 81^x + 625^x = 60^x + 90^x + 150^x$.

Soluție :

Notăm $2^x = a, 3^x = b, 5^x = c$. Ecuația devine: $a^4 + b^4 + c^4 = a^2bc + ab^2c + abc^2$. Dar $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2$, cu egalitate pentru $a = b = c$. Obținem $x = 0$ singura soluție a ecuației date.

R7.4.5 Să se rezolve ecuația: $x^{2n} + \left(1^x + 2^x + ... + n^x\right)\left(1^{-x} + 2^{-x} + ... + n^{-x}\right) = n^2$, unde $n \in N^*$, $n \geq 2$.

Soluție :

Aplicând inegalitatea mediilor avem:

$$\frac{n}{1 + \frac{1}{2^x} + ... + \frac{1}{n^x}} \leq \frac{1 + 2^x + ... + n^x}{n}$$ sau echivalent:

$\left(1^x + 2^x + ... + n^x\right)\left(1^{-x} + 2^{-x} + ... + n^{-x}\right) \geq n^2$. Cum $x^{2n} \geq 0, \forall\, x \in R$, egalitate evem doar pentru x = 0.

R7.4.6 Să se rezolve ecuația: $\sqrt{a^x + b^x} + \sqrt{b^x + c^x} + \sqrt{c^x + a^x} = \sqrt{2a^x} + \sqrt{2b^x} + \sqrt{2c^x}$.

Soluție :

Aplicând inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz obținem: $\sqrt{a^x + b^x} + \sqrt{b^x + c^x} + \sqrt{c^x + a^x} \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{2\left(a^x + b^x + c^x\right)}$. Deci: $\sqrt{2a^x} + \sqrt{2b^x} + \sqrt{2c^x} \leq \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{3\left(a^x + b^x + c^x\right)}$. Ridicând la pătrat obținem: $a^x + b^x + c^x \geq \sqrt{a^x b^x} + \sqrt{b^x c^x} + \sqrt{c^x a^x}$, cu egalitate numai dacă $a^x = b^x = c^x$. Dacă $a = b = c$, atunci orice x real este soluție. Dacă $a \neq b$ sau $b \neq c$ sau $c \neq a$, atunci x = 0, unica soluție.

R7.4.7 Să se rezolve ecuația: $3^{2x+1} - x \cdot 3^{x+1} - 3^x - 6x^2 - 7x - 2 = 0$.

Soluție :

Ecuația se scrie în formă echivalentă:

$3\cdot\left(3^x\right)^2-(3x+1)\cdot 3^x-\left(6x^2+7x+2\right)=0$. Obținem:

$3^x=\dfrac{3x+1\pm\sqrt{81x^2+90x+25}}{6}$, adică: $3^x=2x+1$ sau $3^x=-x-\dfrac{2}{3}$. Ecuația $3^x=2x+1$ are soluțiile $x_1=0$ şi $x_2=1$ şi nu mai are alte soluții, deoarece graficul unei funcții strict convexe şi o dreaptă au cel mult două puncte distincte comune (propoziția **7.3.7**). Ecuația $3^x=-x-\dfrac{2}{3}$ are soluția $x=-1$, unică, deoarece membrul stâng este o funcție strict crescătoare, iar membrul stâng o funcție strict descrescătoare.

În concluzie, ecuația dată are soluțiile: $x_1=0$, $x_2=1$ şi $x_3=-1$.

R7.4.8 a) Să se demonstreze că dacă $f:R\to R_+$ este o funcție convexă, atunci funcția $g:R\to R_+$, $g(x)=f^n(x)$ este convexă pentru orice $n\in N^*$.

b) Să se rezolve în R ecuația: $\left(2x+\dfrac{4}{x}\right)^n+\left(4x+\dfrac{2}{x}\right)^n=3^n\left(3^n+2^n\right)$, unde $n\in N^*$ este fixat.

Soluție :

a) Deoarece *f* este convexă, atunci $f\left(tx_1+(1-t)x_2\right)\le tf\left(x_1\right)+(1-t)f\left(x_2\right)$, oricare ar fi $x_1, x_2\in R$, $t\in[0,1]$. Atunci $f^2\left(tx_1+(1-t)x_2\right)\le$ $\le t^2f^2\left(x_1\right)+2t(1-t)f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)+(1-t)^2f^2\left(x_2\right)$, deoarece *f* este pozitivă. Deci f^2 este convexă.

Demonstrăm prin inducție după n natural, $n\ge 2$ că f^n este convexă. Presupunând că pentru $k\in N$, $k\ge 2$, f^k este convexă, avem pentru $x_1, x_2\in R$ şi $t\in[0,1]$ că:

$f^{k+1}\left(tx_1+(1-t)x_2\right)=f^k\left(tx_1+(1-t)x_2\right)\cdot f\left(tx_1+(1-t)x_2\right)\le$
$\le\left[tf^k\left(x_1\right)+(1-t)f^k\left(x_2\right)\right]\cdot f\left(tx_1+(1-t)x_2\right)\le$
$\left[tf^k\left(x_1\right)+(1-t)f^k\left(x_2\right)\right]\cdot\left[tf\left(x_1\right)+(1-t)f\left(x_2\right)\right]=$
$=t^2f^{k+1}\left(x_1\right)+t(1-t)f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)\left(f^{k-1}\left(x_1\right)+f^{k-1}\left(x_2\right)\right)+(1-t)^2f\left(x_2\right)\cdot f^k\left(x_2\right)\le$
$\le tf^{k+1}\left(x_1\right)+(1-t)f^{k+1}\left(x_2\right)$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu : $\left(t^2-t\right)\left[f^{k+1}(x_1)+f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)\left(f^{k-1}\left(x_1\right)+f^{k-2}\left(x_2\right)+f^{k+1}\left(x_2\right)\right)\right]\le 0$, care este evident adevărată.

Am demonstrat astfel că f^{k+1} este convexă şi folosind metoda inducției matematice, rezultă că f^n este convexă pentru orice n natural, $n\ge 2$.

b) Se observă că dacă x este soluție, atunci $\frac{1}{x}$ este soluție, pentru $n \in N^*$. Dacă n este par, dacă x este soluție și – x este soluție, iar dacă n este impar, ecuația poate avea numai soluții pozitive. Este suficient să determinăm soluțiile strict pozitive. Considerăm funcțiile $f_1, f_2, f_3, f_4 : R_+ \to R_+$, $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = \frac{4}{x}$, $f_3(x) = 4x$, $f_4(x) = \frac{2}{x}$, care sunt funcții convexe pe $(0, \infty)$. Atunci $f_1 + f_2$ și $f_3 + f_4$ sunt funcții convexe. Din punctul a) obținem că $(f_1 + f_2)^n$ și $(f_3 + f_4)^n$ sunt funcții convexe, deci $f = (f_1 + f_2)^n + (f_3 + f_4)^n$ este convexă. Cum pentru o funcție convexă neconstantă *f*, ecuația $f(x) = k$, unde k este o constantă reală, are cel mult două soluții, iar $x_1 = 2$ și $x_2 = \frac{1}{2}$ sunt soluțiile ecuației date, putem concluziona: dacă n este par, ecuația are soluțiile ± 2 și $\pm\frac{1}{2}$, iar dacă n este impar, ecuația are soluțiile 2 și $\frac{1}{2}$.

R7.4.9 Să se rezolve ecuația: $a^{2x} + a^{3x} + ... + a^{nx} + \frac{(n-1)n}{2} = a^x \frac{(n+2)(n-1)}{2}$, unde $a > 0,\ a \neq 1,\ n \in N^*,\ n \geq 2$.

Soluție :

Pentru orice x real avem: $a^{2x} + 1 \geq 2a^x$, $a^{3x} + 2 \geq 3a^x$,..., $a^{nx} + n - 1 \geq na^x$ conform inegalității mediilor. Prin adunare se obține: $a^{2x} + a^{3x} + ... + a^{nx} + \frac{n(n-1)}{2} \geq a^x \frac{(n-1)(n+2)}{2}$, cu egalitate dacă și numai dacă $a^{2x} = a^{3x} = ... = a^{nx} = 1$, adică x = 0.

R7.4.10 Să se rezolve ecuația: $\frac{1}{\sin^{2x} a} + \frac{1}{\cos^{2x} a} = |x|,\quad a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Soluție :

Se aduce ecuația la forma: $(1 + tg^2 a)^x + (1 + ctg^2 a)^x = |x|$ (1).

Dacă $x < 0$, funcția $f(x) = (1 + tg^2 a)^x + (1 + ctg^2 a)^x - |x|$ este strict crescătoare, iar ecuația $f(x) = 0$ are cel mult o soluție. Se verifică că $x = -1$ este soluție. Dacă $x \in (0,1)$, membrul stâng al ecuației (1) este supraunitar, iar cel drept este subunitar. Deci ecuația nu are soluții pentru $x \in (0,1)$. Dacă $x \geq 1$, atunci $x \geq [x]$ și conform inegalității lui Bernoulli avem:

$\left(1+tg^2a\right)^x+\left(1+ctg^2a\right)^x \geq \left(1+tg^2a\right)^{[x]}+\left(1+ctg^2a\right)^{[x]} > 2+[x]\left(tg^2a+ctg^2a\right) \geq$ $\geq 2+2[x] > 2x > x$. Deci singura soluție este $x=-1$.

R7.4.11 Rezolvați în mulțimea $[0,\infty)$ ecuația:

$$3^x+4^x+5^x+10^x+14^x+21^x=2^{x+1}+3^x\cdot 2^{x+1}+2\cdot 35^x.$$

<u>Soluție</u> :

Ecuația se scrie: $3^x+4^x+5^x+2^x\cdot 5^x+2^x\cdot 7^x+3^x\cdot 7^x=2\left(2^x+3^x\cdot 2^x+5^x\cdot 7^x\right)$ sau $3^x+2^x\cdot 2^x+5^x+2^x\cdot 5^x+2^x\cdot 7^x+3^x\cdot 7^x+2^x+2^x\cdot 3^x+5^x\cdot 7^x=3\left(2^x+2^x\cdot 3^x+5^x\cdot 7^x\right)$ sau $\left(2^x+3^x+5^x\right)\left(1+2^x+7^x\right)=3\left(1\cdot 2^x+2^x\cdot 3^x+5^x\cdot 7^x\right)$. Deoarece $x\geq 0$, avem $2^x\leq 3^x\leq 5^x$ şi $1\leq 2^x\leq 7^x$. Aplicând inegalitatea lui Cebâşev, obținem: $\left(2^x+3^x+5^x\right)\left(1+2^x+7^x\right)\leq 3\left(2^x+2^x\cdot 3^x+5^x\cdot 7^x\right)$, cu egalitate pentru $2^x=3^x=5^x$ şi $1=2^x=7^x$, deci x = 0.

8. Probleme de numărare

8.1. Consideraţii teoretice şi interpretări ale formulelor uzuale din combinatorică

Există o mare varietate de probleme care se pot încadra în această temă. Pentru rezolvarea acestora, este necesar să reţinem următoarele:

I. Dacă A şi B sunt două mulţimi finite şi notăm

$$B^A = \{ f \mid f : A \to B \text{ funcţie} \}, \text{ atunci}$$

$$\left| B^A \right| = \left| B \right|^{|A|},$$

(am notat $\left| X \right|$ numărul elementelor mulţimii X).

Acest rezultat se demonstrează prin inducţie după $m = \left| A \right|$. Dăm în continuare unele interpretări utile ale acestui rezultat.

1) Numărul submulţimilor unei mulţimi M având n elemente, $n \in \mathbb{N}$, este $\left| \mathcal{P}(M) \right| = 2^{|M|}$. Aceasta rezultă din faptul că numărul cerut este egal cu numărul funcţiilor $f : M \to \{0,1\}$.

2) În câte moduri poate fi pavată o alee de lungime n $(n \in \mathbb{N}^*)$ şi lăţime 1 cu plăci pătrate de 1×1, folosindu-se plăci de n culori. Numărul cerut este m^n, deoarece fiecărei poziţii de placă din cele n trebuie să-i atribuim o culoare din cele m.

3) Câte cuvinte de m litere pot fi făcute cu un alfabet ce conţine n simboluri? Numărul cerut este m^n şi este egal cu numărul funcţiilor $f : A \to B$, $\left| A \right| = n -$ numărul de simboluri şi $\left| B \right| = m -$ numărul literelor dintr-un cuvânt.

4) Câte numere naturale de n cifre se pot forma folosind k cifre fixate, $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$? Dacă nici o cifră din cele k nu este 0, putem forma k^n numere deoarece orice cifră din număr poate fi aleasă în k moduri. Dacă printre cele k cifre se află şi cifra 0, prima cifră a numărului poate fi aleasă în $(k-1)$ moduri şi orice altă cifră a numărului poate fi aleasă în k moduri. Aşadar, numărul de numere în acest caz este $(k-1) \cdot k^{n-1}$.

5) Câte numere naturale au n cifre în scrierea lor în baza k $(k \geq 2)$? Folosind 4) deducem că numărul cerut este $(k-1) \cdot k^{n-1}$.

6) În câte moduri pot fi împărţite n obiecte la m persoane? A face o astfel de împărţire revine la a stabili un destinatar pentru fiecare obiect, deci a defini o funcţie de la mulţimea obiectelor la mulţimea persoanelor privite ca şi destinatari. Obţinem că numărul cerut este m^n.

II. Numărul submulțimilor ordonate cu *k* elemente ale unei mulțimi cu *n* elemente $(k, n \in \mathbb{N}, k \le n)$ este

$$A_n^k \overset{\text{not.}}{=} \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1),$$

şi se citeşte aranjamente de *n* luate câte *k*, unde $p! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p$.

Punem în evidență unele interpretări ale numerelor A_n^k.

1) Dacă *A* şi *B* sunt mulțimi finite cu $|A| = k \le |B| = n$, atunci numărul funcțiilor injective $f : A \to B$ este egal cu A_n^k. Într-adevăr, pentru a defini o funcție $f : A \to B$ avem nevoie de valorile $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_k)$ care vor forma o submulțime ordonată cu *k* elemente a lui *B*. Deci numărul funcțiilor injective de la *A* la *B* este egal cu numărul submulțimilor ordonate cu *k* elemente ale lui *B*, în total A_n^k.

2) Numărul cuvintelor formate cu *k* litere distincte, folosind un alfabet cu *n* simboluri este tot A_n^k, $k \le n$.

3) Numărul modurilor de pavare a unei alei $1 \times k$ cu plăci alese de culori diferite din *n* culori date este A_n^k, $k \le n$.

4) Dacă *A* este o mulțime finită şi nevidă, atunci numărul funcțiilor injective (surjective, bijective) $f : A \to A$ este $A_n^n = n!$. Facem observația că o funcție bijectivă $f : A \to A$, *A* finită, se mai numeşte şi permutare a mulțimii *A*. Numărul permutărilor unei mulțimi cu *n* elemente este egal cu $n!$.

III. Dacă *A* este o mulțime cu *n* elemente, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci numărul submulțimilor lui *A* având fiecare *k* elemente (*k* fixat, $k \le n$) este:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!},$$

şi se citeşte combinări de *n* elemente luate câte *k*. Redăm în continuare câteva aplicații semnificative.

1) Care este numărul funcțiilor $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$ şi având proprietatea $\sum_{i=1}^{n} f(i) = k$? A defini o astfel de funcție presupune a reține exact *k* elemente din domeniul de definiție şi a asocia fiecăruia valoarea 1. Aşadar, numărul cerut este egal cu numărul de submulțimi cu *k* elemente ale domeniului de definiție, adică cu C_n^k. Pentru $k < 0$ sau $k > n$, sau $k \in [0, n] \setminus \mathbb{N}$, nu avem astfel de funcții.

2) Numărul drumurilor laticeale de lungime minimă care unesc punctul $\mathrm{O}(0,0)$ cu punctul $\mathrm{B}(m,n)$ $(m, n \in \mathbb{N})$ este C_{m+n}^m. Într-adevăr, lungimea minimă

a unui astfel de drum este $m+n$, singurele deplasări fiind de forma $(p,q)\mapsto(p+1,q)$ sau $(p,q)\mapsto(p,q+1)$. Din cei $n+m$ paşi de lungime unu avem de făcut *m* paşi orizontali şi *n* paşi verticali, ordinea efectuării lor fiind arbitrară. Numărul drumurilor laticeale cerut este egal cu numărul de paşi pe orizontală, ceea ce se poate face în C_{m+n}^{m} moduri.

3) Numărul funcțiilor strict crescătoare $f:\{1,2,\ldots,k\}\to\{1,2,\ldots,n\}$, $k\le n$, este egal cu C_n^k. Aceasta rezultă din faptul că fiecare funcție strict crescătoare este determinată de $k!$ funcții injective prin ordonarea crescătoare a valorilor sale. Aşadar, numărul cerut este

$$N=\frac{\text{Numărul funcţiilor injective}}{k!}=\frac{A_n^k}{k!}=C_n^k.$$

4) Numărul funcțiilor crescătoare $f:\{1,2,\ldots,k\}\to\{0,1,2,\ldots,n-k\}$ este C_n^k. Motivăm în continuare acest lucru.

Fie *f* o funcție care îndeplineşte condițiile din ipoteză. Atunci, funcția $g:\{1,2,\ldots,k\}\to\{1,2,\ldots,n\}$, $g(i)=i+f(i)$, $(\forall)\ i=\overline{1,k}$ este strict crescătoare. Într-adevăr, *g* este corect definită şi dacă presupunem $1\le i_1<i_2\le k$, atunci

$f(i_1)\le f(i_2)$, deci $i_1+f(i_1)<i_2+f(i_2)$, adică $g(i_1)<g(i_2)$.

Reciproc, dacă $g:\{1,2,\ldots,k\}\to\{1,2,\ldots,n\}$, $g(i)=i+f(i)$, $(\forall)\ i=\overline{1,k}$, este o funcție strict crescătoare atunci $i+f(i)\in\{1,2,\ldots,n\}$ pentru $(\forall)\ i=\overline{1,k}$, de unde $f(i)\in\{0,1,\ldots,n-k\}$ pentru orice $i=\overline{1,k}$ şi

$$1<2<\ldots<k\Rightarrow g(1)<g(2)<\ldots<g(k)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+f(1)<2+f(2)<3+f(3)<\ldots<k+f(k)\ ,$$

de unde utilizând faptul că $f(i)\in\mathbb{N}$, $i=\overline{1,k}$, obținem

$$f(1)\le f(2)\le\ldots\le f(k).$$

Aşadar, funcția *f* este crescătoare.

Ca urmare, mulțimea funcțiilor *f* cerute este în bijecție cu mulțimea funcțiilor *g*. A defini o funcție *g* revine la a alege un şir $1\le b_1<b_2<\ldots<b_k\le n$ ($\{b_1,b_2,\ldots,b_k\}\subset\{1,2,\ldots,n\}$) şi acesta se poate face în C_n^k moduri (vezi şi problema precedentă). Ca urmare, numărul cerut este C_n^k.

Mai facem observația că numărul funcțiilor crescătoare $f:A\to B$, $|A|=n$, $|B|=m$ este C_{m+n-1}^{n}.

5) Numărul modurilor de descompunere a numărului natural *n* în sumă de *k* numere naturale nenule, $a_1+a_2+\ldots+a_n$, în care contează ordinea

numerelor $a_1, a_2, \dots, a_n$ este C_{n-1}^{k-1}. Pentru a motiva aceasta, este suficient să ne imaginăm că intervalul $[0, n]$ de lungime n, trebuie să-l partiționăm în k subintervale. Aceasta se poate face alegând cele $k-1$ capete dintre numerele $1, 2, \dots, n-1$, alegere ce se poate face în C_{n-1}^{k-1} moduri.

6) Numărul modurilor de pavare a unei alei de lungime n şi lăţime 1 cu plăci 1×1 dintre care k albe şi $n-k$ negre este C_n^k. Într-adevăr, numărul cerut este egal cu numărul de alegeri a k poziţii din cele n poziţii în care să punem plăci albe şi acesta este C_n^k.

IV. Dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ reprezintă descompunerea în factori primi a numărului natural n ($p_1, p_2, \dots, p_k$ sunt numere prime iar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$), atunci numărul divizorilor naturali ai lui n este:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1).$$

Bibliografie

1. *Dorin Andrica, Eugen Jecan, Teste de matematică, Editura GIL, Zalău*
2. *Dan Brânzei, Vasile Gorgota, Sorin Ulmeanu, Concursuri interjudeţene de matematică, Editura Paralela 45, 1999*
3. *Ovidiu Cojocaru, Matematică, Concursul interjudeţean "Spiru Haret – Gh. Vrânceanu" 1985-1986, Editura Paralela 45*
4. *Mircea Ganga, Probleme elementare de matematică, Editura Mathpress, 2003*
5. *Adrian Ghioca, Acad. Nicolae Teodorescu, Culegere de probleme, Bucureşti, 1987*
6. *Laurenţiu Panaitopol, Dinu Şerbănescu, Probleme de teoria numerelor şi combinatorică pentru juniori, Editura GIL, 2003*
7. *Acad. Nicolae Teodorescu şi alţii, Culegere de probleme, S.S.M.R., vol.I, Bucureşti*
8. *Ion Tomescu, Introducere în combinatorică, Editura Tehnică, 1972*
9. ** * *, Colecţiile revistelor G.M. şi R.M.T*

Probleme rezolvate (8)

R8.2.1. a) Să se determine numărul de moduri în care $2n$ persoane pot fi împărțite în n grupuri de câte 2 persoane.

b) Să se arate că $\left((m\cdot n)!\right)^2$ se divide cu $(n!)^{m+1}\cdot(m!)^{n+1}$, pentru orice $n,m\in\mathbb{N}^*$.

Soluție. a) Prima pereche poate fi aleasă în C_{2n}^2 moduri, a doua în C_{2n-2}^2 moduri etc. Cum ordinea alegerii perechilor nu contează, numărul căutat va fi:

$$\frac{1}{n!}C_{2n}^2\cdot C_{2n-2}^2\cdot\ldots\cdot C_4^2\cdot C_2^2=\frac{1}{n!}\cdot\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}\cdot\frac{(2n-2)!}{2!(2n-4)!}\cdot\ldots\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{2!\cdot 0!}=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}.$$

b) Generalizând punctul a) obținem că numărul de moduri în care $m\cdot n$ persoane pot fi împărțite în n grupe de câte m persoane este

$$\frac{(m\cdot n)!}{(m!)^n\cdot n!},\text{ deci }\frac{(m\cdot n)!}{(m!)^n\cdot n!}\in\mathbb{N}\quad(1)$$

Analog se obține

$$\frac{(m\cdot n)!}{(n!)^m\cdot m!}\in\mathbb{N}\quad(2)$$

Din (1) şi (2) prin înmulțirea celor două numere naturale obținem:

$$\frac{\left((m\cdot n)!\right)^2}{(n!)^{m+1}\cdot(m!)^{n+1}}\in\mathbb{N}.$$

R8.2.2. Avem la dispoziție $2n$ persoane $(n\in\mathbb{N}^*)$ care trebuie repartizate în două cluburi, fiecare club constând din câte n membri. În fiecare club este ales un preşedinte şi un vicepreşedinte. În câte moduri se poate face aceasta.

Soluție. Există C_{2n}^2 posibilități de alegere a repartizării pe cluburi. Pentru fiecare alegere există A_n^2 posibilități de alegere a unui preşedinte şi a unui vicepreşedinte pentru primul club, iar aceştia, odată aleşi, există A_n^2 posibilități de alegere a unui preşedinte şi a unui vicepreşedinte pentru al doilea club. În total există $C_{2n}^n\cdot A_n^2\cdot A_n^2=\frac{(2n)!}{((n-2)!)^2}$ posibilități de grupare.

R8.2.3. Fie A o mulțime cu n elemente şi B o mulțime cu m elemente, $n,m\in\mathbb{N}^*$, $n\le m$. Să se arate că numărul funcțiilor nemonotone definite pe A şi cu valori în B este $m^n-2C_{m+n-1}^n+m$.

Soluție. Numărul total al funcțiilor $f: A \to B$ este m^n.

Numărul funcțiilor strict crescătoare este egal cu C_m^n, iar al celor descrescătoare coincide cu numărul combinărilor cu repetiție al unei mulțimi cu m elemente luate câte n, adică cu $C_{m+n-1}^n = \dfrac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$. Observăm că numărul funcțiilor crescătoare este egal cu numărul celor descrescătoare şi de asemenea că există m funcții constante care au fost numărate de două ori (o dată printre cele crescătoare şi apoi printre cele descrescătoare. Ca urmare, numărul funcțiilor monotone este $2C_{m+n-1}^n - m$, în consecință, numărul cerut este $m^n - 2C_{m+n-1}^n + m$.

R8.2.4. Să se determine numărul de numere cu 7 cifre care nu încep şi nu se termină cu cifra 1.

Soluție. Fie mulțimile $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Problema este echivalentă cu a determina numărul aplicațiilor $f: A \to B$ cu proprietățile:

$$f(1) \neq 0,\ f(1) \neq 1,\ f(7) \neq 1$$

(1)

Pentru $f(1)$ există 8 posibilități de alegere, iar pentru $f(7)$ există 9 posibilități de alegere. Fie $i \in \{2,3,4,5,6\}$. Pentru $f(i)$ există 10 posibilități de alegere. Rezultă că numărul funcțiilor *f* cu proprietatea (1) este $8 \cdot 9 \cdot 10^5 = 72 \cdot 10^5$.

R8.2.5. Fie $n > 0$ un număr natural. Să se determine numărul polinoamelor $P(X)$ cu coeficienți 0, 1, 2 sau 3 cu proprietatea $P(2) = n$.

Soluție. Fie $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_kX^k$ un polinom cu coeficienți în mulțimea $\{0,1,2,3\}$ astfel încât $P(2) = n$. Atunci, punând $b_i = \left[\dfrac{a_i}{2}\right]$ rezultă că numărul $m = b_0 + b_1 \cdot 2 + \ldots + b_k \cdot 2^k$ satisface inegalitățile $0 \leq m \leq \dfrac{n}{2}$.

Mai mult, egalitatea de mai sus dă reprezentarea binară a lui *m*. Aplicația $P(X) \mapsto m$ defineşte o funcție de la mulțimea de polinoame dată la mulțimea numerelor întregi şi nenegative mai mici sau egale cu $\dfrac{n}{2}$. Vom arăta că această funcție este bijectivă.

Pentru a proba injectivitatea, fie

$$m = a_0 + a_1 \cdot 2 + \ldots + a_k \cdot 2^k = a_0' + a_1' \cdot 2 + \ldots + a_k' \cdot 2^k,$$

astfel încât $\left[\frac{a_i}{2}\right]=\left[\frac{a_i'}{2}\right]$, pentru orice $i=0,1,\ldots,k$.

Atunci $2\mid(a_0-a_0')$ şi $\left[\frac{a_0}{2}\right]=\left[\frac{a_0'}{2}\right]$ implică $a_0=a_0'$. În continuare, se reduce a_0, se împarte cu 2 şi se procedează prin inducţie.

Surjectivitatea rezultă astfel:

Din $m=b_0+b_1\cdot 2+\ldots+b_k\cdot 2^k$, $b_i\in\{0,1\}$, se definesc numerele a_i astfel încât $a_i\in\{0,1,2,3\}$, $\left[\frac{a_i}{2}\right]=b_i$ şi $2^{i+1}\mid n-a_0-a_1\cdot 2-\ldots-a_i\cdot 2^i$. În concluzie, numărul polinoamelor date este $\left[\frac{n}{2}\right]+1$.

R8.2.6. Câte numere naturale există printre numerele

$$\frac{1\cdot m}{n},\ \frac{2\cdot m}{n},\ldots,\frac{p\cdot m}{n},\ p,m,n\in\mathbb{N},\ n\neq 0.$$

Soluţie. Fie $(m,n)=d$. Rezultă că $m=m_1\cdot d$, $n=n_1\cdot d$ cu $(m_1,n_1)=1$. Obţinem numerele:

$$\frac{1\cdot m_1}{n_1},\ 2\cdot\frac{m_1}{n_1},\ldots,p\cdot\frac{m_1}{n_1}\ \text{ cu } (m_1,n_1)=1 \tag{1}$$

Între numerele de la (1) există $\left[\frac{p}{n_1}\right]$ numere naturale căci $(m_1,n_1)=1$. Cum $n_1=\frac{n}{d}$, rezultă că între numerele din enunţ există $\left[\frac{(m,n)\cdot p}{n}\right]$ numere naturale.

R8.2.7. Fie X o submulţime cu k elemente a mulţimii $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $k\in\mathbb{N}^*$. Să se determine numărul funcţiile $f:A\to A$ cu proprietatea $f(X)=X$.

Soluţie. Fie $X=\{a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_k}\}$. Condiţia $f(X)=X$ arată că restricţia lui f la X este bijectivă. Numărul bijecţiilor de la X la X este $k!$. O astfel de bijecţie o putem prelungi în n^{n-k} moduri la o aplicaţie $f:A\to A$ deoarece fiecărui element din $A\setminus X$ îi putem ataşa oricare element din codomeniul A. Rezultă că numărul căutat este $k!\cdot n^{n-k}$.

R8.2.8. Fie k, n numere naturale fixate $1\le k<n$ şi fie S o mulţime de n puncte din plan având proprietăţile următoare:

a) orice trei puncte distincte ale lui S nu sunt coliniare;

b) pentru orice punct P al lui S există cel puțin k puncte distincte în S, egal depărtate de P.

Să se arate că are loc inegalitatea $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Soluție. Fie P_1 un punct din S. Considerând cercul C_1 cu centrul în P_1 a cărui circumferință conține k puncte din S, rezultă prin unirea acestor puncte, C_k^2 coarde care unesc puncte ale lui S.

Fie P_2 un alt punct din S. Considerând cercul C_2 cu centrul în P_2, obținem analog C_k^2 coarde. Deoarece $C_1 \cap C_2$ au în comun cel mult o coardă rezultă cel mult $C_k^2 - 1$ coarde care nu au fost considerate în C_1. Considerând un nou punct P_3 apar cel mult $C_k^2 - 2$ coarde noi etc. Însumând numărul coardelor care este majorat de numărul segmentelor ce unesc puncte din S avem:

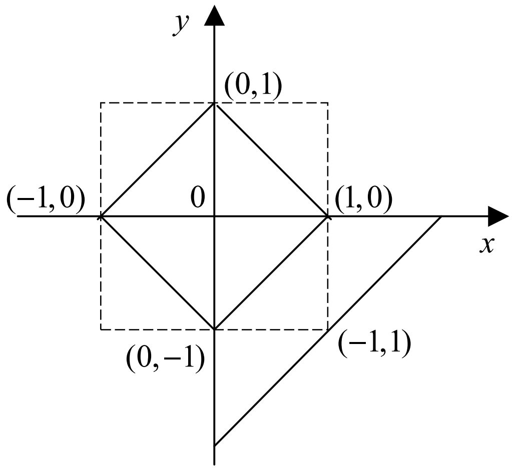
$$C_k^2 + (C_k^2 - 1) + (C_k^2 - 2) + \ldots + [C_k^2 - (n-1)] \le C_n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \cdot C_k^2 \le \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow k(k-1) \le 2(n-1) \Leftrightarrow k^2 - k - 2(n-1) \le 0$$

$$\Rightarrow k \le \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

R8.2.9. Câte puncte cu ambele coordonate întregi se pot afla în interiorul sau pe laturile unui pătrat de latură $\sqrt{3}$.

Soluție. Fie pătratul de latură $\sqrt{2}$ în reperul cartezian xOy (v. figura). Este clar că există cinci astfel de puncte: vârfurile pătratului și punctul de intersecție al diagonalelor . Un alt punct de coordonate întregi ar fi $(-1,1)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$.



Trebuie arătat că nici unul din aceste puncte nu se poate afla în interiorul sau pe laturile pătratului de latură egală cu $\sqrt{3}$ (construit asemenea cu cel de latură $\sqrt{2}$).

Distanța de la O la latura pătratului de latură $\sqrt{3}$ este de $\frac{\sqrt{3}}{2}$, în timp ce distanța de la O la punctul $(1,-1)$ este de $\sqrt{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$. De aici rezultă că punctul $(1,-1)$ este exterior pătratului de latură $\sqrt{3}$.

R8.2.10. Fie dată o mulțime *A* cu *m* elemente şi o mulțime *B* cu *n* elemente $(m,n \in \mathbb{N}^*)$. Să se găsească numărul de permutări ale mulțimii $A \bigcup B$ astfel încât primul element al unei astfel de permutări să fie din *A*, iar ultimul din *B*. Se presupune că $A \bigcap B = \varnothing$.

Soluție. Două elemente din $A \bigcup B$, primul din *A*, iar al doilea din *B*, pot fi alese în $m \cdot n$ moduri. La fiecare astfel de posibilitate, cele $m+n-2$ elemente rămase pot fi aşezate pe cele $m+n-2$ poziții rămase în $(m+n-2)!$ moduri. Ca urmare, există $m \cdot n \cdot (m+n-2)!$ permutări de tipul cerut.

R8.2.11. Fie *A* o mulțime cu *n* elemente, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine

$$\operatorname{card}\{(X,Y) \mid X,Y \in \mathcal{P}(A),\ X \bigcup Y = A\}.$$

Soluție. Notăm $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ cu $n \in \mathbb{N}^*$. Fie $X \in \mathcal{P}(A)$, $X = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$, unde $i_1, i_2, \ldots, i_k$ sunt *k* indici distincți din mulțimea $\{1,2,\ldots,n\}$, iar $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$. Considerăm *X* fixată şi $Y \in \mathcal{P}(A)$ astfel încât $X \bigcup Y = A$. Mulțimea *Y* poate fi aleasă astfel: $(A \setminus X) \bigcup Z$, unde *Z* este o submulțime a lui *X*, adică *Y* poate fi aleasă în 2^k moduri (numărul total de submulțimi ale lui *X*). Numărul total de soluții va fi: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

R8.2.12. Fie $A = \{1,2,\ldots,n\}$ unde $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că ecuația $X \bigcup Y \bigcup Z = A$, în care două soluții care diferă doar prin ordinea termenilor se consideră egale, are $\frac{7^n + 3^{n+1} + 2}{6}$ soluții distincte.

Soluție. Notăm pentru $n \in \mathbb{N}^*$ cu a_n numărul soluțiilor ecuației cu $X \neq Y$, $Y \neq Z$ şi $Z \neq X$, cu b_n numărul soluțiilor cu $X = Y$ şi $Y \neq Z$ şi cu c_n numărul soluțiilor cu $X = Y = Z$. Evident, $a_1 = 0$, $b_1 = 2$ şi $c_n = 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$. Vom demonstra prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$ că:

$$a_n = \frac{7^n - 3^{n+1} + 2}{6},\ b_n = 3^n - 1,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^* \tag{1}$$

Presupunând afirmațiile adevărate pentru $k \in \mathbb{N}^*$, o soluție a ecuației $X \bigcup Y \bigcup Z = A \bigcup \{k+1\} = \{1,2,\ldots,k\} \bigcup \{k+1\}$, având componentele distincte două câte două se obține fie dintr-o soluție a ecuației $X \bigcup Y \bigcup Z = \{1, 2, \ldots, k\}$, având componentele distincte două câte două (deci numărată la a_k) prin adăugarea lui $k+1$ la una din componente (deci trei posibilități), la două din componente (deci trei posibilități) sau la fiecare dintre componente (deci o posibilitate), fie dintr-o soluție a ecuației $X \bigcup Y \bigcup Z = \{1, 2, \ldots, k\}$ cu $X = Y$ şi $Y \neq Z$, deci numărată la b_k, prin adăugarea lui $k+1$ la una dintre cele două componente egale şi adăugând sau nu pe $k+1$ la cea de-a treia componentă. Aşadar, am obținut

$$a_{n+1} = 7a_n + 2b_n,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^* \qquad (2)$$

De asemenea, o soluție a ecuației $X \bigcup Y \bigcup Z = \{1, 2, \ldots, k\} \bigcup \{k+1\}$ având numai două din componente egale se obține dintr-o soluție a ecuației $X \bigcup Y \bigcup Z = \{1, 2, \ldots, k\}$ cu $X = Y$ şi $Y \neq Z$ (deci numărată la b_k) prin adăugarea lui $k+1$ la fiecare din cele 2 componente egale (o posibilitate), sau la cea de-a treia componentă (o posibilitate), sau la fiecare din componente (o posibilitate), sau prin adăugarea lui $k+1$ unei componente sau la două din componentele unei soluții având toate componentele egale (deci două posibilități). Aşadar, se obține:

$$b_{n+1} = 3b_n + 2,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^* \qquad (3)$$

Avem:

$$b_{k+1} \overset{(3)}{=} 3b_k + 2 \overset{\text{ip.ind.}}{=} 3(3^k - 1) + 2 = 3^{k+1} - 1 \text{ şi}$$

$$a_{k+1} \overset{(2)}{=} 7a_k + 2b_k \overset{\text{ip.ind.}}{=} 7 \cdot \frac{7^k - 3^{k+1} + 2}{6} + 2(3^k - 1) = \frac{7^{k+1} - 3^{k+2} + 2}{6}.$$

Din ultimele două relații se obține că $P(k+1)$ este adevărată, deci relația (1) este adevărată conform metodei inducției matematice. Ca urmare, numărul de soluții cerut este:

$$S_n = a_n + b_n + c_n = \frac{7^n - 3^{n+1} + 2}{6} + 3^n - 1 + 1 = \frac{7^n + 3^{n+1} + 2}{6}.$$

R8.2.13. Fie

$$F_n = \left\{ f \,\middle|\, f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\},\ f \text{ injectivă şi } f(i) \neq i,\ (\forall)\ i = \overline{1, n} \right\}.$$

Determinați numărul elementelor lui F_n.

Soluție. Fie $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Cum $f : A \to A$ injectivă $\overset{A \text{ finită}}{\Rightarrow}$ f bijectivă $\Rightarrow$ f permutare a mulțimii A. Considerăm $A_i = \{f : A \to A \mid f \text{ permutare şi } f(i) = i\}$, $i = \overline{1, n}$. Folosind principiul închiderii şi excluderii, numărul tuturor permutărilor ce admit cel puțin un punct fix este:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|,$$

unde $|A_i| = \text{card}\, A_i$.

Deoarece $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}\right| = (n-k)!$ şi în fiecare sumă din egalitatea precedentă există C_n^k termeni, obţinem:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = C_n^1 \cdot (n-1)! - C_n^2 \cdot (n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^n.$$

Aşadar, numărul permutărilor lui A fără puncte fixe este

$$|F_n| = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| =$$

$$= n! - \left[C_n^1 \cdot (n-1)! - C_n^2 \cdot (n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^n\right] =$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

R8.2.14. Să se cerceteze de câte ori într-o zi (12 ore), orarul, minutarul şi secundarul împart cadranul unui ceas în trei arce congruente.

Soluţie. Privim cercul ca un disc de rază 1 în planul complex. Dacă într-o unitate de timp orarul parcurge un arc de lungime α, atunci minutarul parcurge un arc de lungime $12 \cdot \alpha$, iar secundarul un arc de lungime $12 \cdot 60 \cdot \alpha$.

Notăm $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ şi $z_0(t), z_m(t), z_s(t)$ poziţiile orarului, minutarului şi secundarului după timpul t. Avem $z_0(t) = z^t$, $z_m(t) = z^{12t}$ şi $z_s(t) = z^{12 \cdot 60 \cdot t}$. Dacă $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $(\varepsilon^3 = 1)$, atunci la momentul t cele trei limbi ale ceasului împart cadranul în arce congruente $\left(\text{de lungime } \frac{2\pi}{3}\right)$, în două situaţii:

a) $z_m(t) = \varepsilon \cdot z_0(t)$ şi $z_s(t) = \varepsilon \cdot z_m(t)$.

b) $z_m(t) = \overline{\varepsilon} \cdot z_0(t)$ şi $z_s(t) = \overline{\varepsilon} \cdot z_m(t)$.

În cazul a) avem: $z^{12t} = z^t \cdot \varepsilon$ şi $z^{12 \cdot 60 \cdot t} = z^{12t} \cdot \varepsilon \Leftrightarrow z^{11t} = \varepsilon$ şi $z^{12 \cdot 59t} = \varepsilon$. Obţinem:

$$z^{12 \cdot 59t} = z^{11 \cdot 59t} \cdot z^{59t} = \varepsilon^{59} \cdot z^{59t} = \varepsilon^{59} \cdot (z^{11t})^5 \cdot z^{4t} = \varepsilon^{59} \cdot \varepsilon^5 \cdot z^{4t} = \varepsilon^{64} \cdot z^{4t} = \varepsilon \cdot z^{4t},$$

deci

$$z^{4t} = 1 \Rightarrow z^t \in \{\pm 1, \pm i\} \Rightarrow z^{11t} \in \{\pm 1, \pm i\} \Rightarrow z^{11t} \ne \varepsilon, \text{ contradicţie.}$$

Analog, în cazul b), nu există soluţie. Ca urmare, numărul căutat este zero.

R8.2.15. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ numere naturale nenule.

Determinați numărul funcțiilor injective $f:\{1,2,\dots,n\}\to\mathbb{N}^*$ cu proprietatea $f(k)\le a_k$, $(\forall)\ k=\overline{1,n}$.

Soluție. Construim o funcție injectivă ca și în enunț. Avem a_1 posibilități de a alege $f(1)$, apoi a_2-1 posibilități de a alege $f(2)$ deoarece $f(2)\in\{1,2,\dots,a_2\}\setminus\{f(1)\}$.

Putem alege apoi pe $f(3)$ în a_3-2 moduri etc. Va rezulta că numărul căutat este $a_1(a_2-1)(a_3-2)\cdot\ldots\cdot(a_n-n+1)$.

R8.2.16. a) Care este cel mai mare număr de turnuri ce pot fi așezate pe tabla de șah astfel ca ele să nu se amenințe? Câte astfel de aranjări există?

b) Care este cel mai mic număr de turnuri astfel ca ele să țină sub amenințări toate pătratele tablei? În câte moduri pot fi aranjate acestea?

Soluție. a) Pe fiecare linie și fiecare coloană trebuie să fie câte un singur turn. Așadar, numărul maxim de turnuri este 8. O aranjare determină o permutare $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 8 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(8) \end{pmatrix}$, turnul de pe linia i, este pus pe coloana $\sigma(i)$. Se obțin $8!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot8$ moduri de aranjare.

b) Pentru a amenința pătratele unei linii avem nevoie de cel puțin un turn pe ea, așadar, numărul minim cerut este 8. Putem aranja câte un turn pe fiecare linie în 8^8 moduri, putem așeza câte un turn pe fiecare coloană în 8^8 moduri, dar în acest mod unele aranjări s-au numărat de două ori (cele care ocupă simultan toate liniile și coloanele, deci 8! aranjări). Se obțin $2\cdot8^8-8!$ moduri de aranjare.

R8.2.17. Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea că $|f(k+1)-f(k)|\ge3$, $k=\overline{1,n-1}$ $(n\in\mathbb{N},\ n\ge2)$.

Soluție. Fie a_n, b_n, c_n, d_n numărul funcțiilor căutate pentru care $f(n)=1,2,4$ sau 5 (în condițiile din ipoteză avem $f(k)\ne3$, $k=\overline{1,n}$). Avem relațiile de recurență:

$$\begin{cases} a_{n+1}=c_n+d_n \\ b_{n+1}=d_n \\ c_{n+1}=a_n \\ d_{n+1}=a_n+b_n \end{cases}$$

Numărul căutat este $x_n=a_n+b_n+c_n+d_n$.

Avem: $a_2 = 2$ $(f(2) = 1$ º i $f(1) = 4$ sau $f(1) = 5)$,
$b_2 = 1$ $(f(2) = 2$ º i $f(1) = 5)$, $c_2 = 1$ $(f(2) = 4$ şi $f(1) = 1)$, $d_2 = 2$ $(f(2) = 5$ şi $f(1) = 1$ sau $f(2) = 2)$.

Va rezulta $a_n = d_n$ şi $b_n = c_n$ şi folosind relaţiile anterioare, găsim:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} = a_n + a_{n+1},\ (\forall)\ n \geq 3.$$

Avem: $x_n = 2(a_n + b_n) = 2a_{n+1}$, $x_2 = 6 = 2 \cdot 3$, $x_3 = 10 = 2 \cdot 5$.

Din $x_2 = 2F_4$, $x_3 = 2F_5$ şi $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ rezultă $x_n = 2 \cdot F_{n+2}$ unde $(F_n)_{n\geq 0}$ este şirul lui Fibanacci, dat prin: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi a cărui termen general este:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

R8.2.18. În câte moduri poate fi pavat un dreptunghi de dimensiuni $2 \times n$ cu plăci 1×2?

Soluţie. Notăm cu a_n numărul căutat.

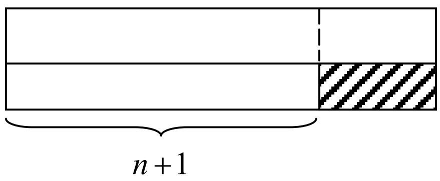


Fig.1

Fig.2

Dacă în a_{n+1} o aranjare se termină cu o placă orizontală (de fapt două plăci orizontale suprapuse, vezi fig.1), se obţin a_{n-1} pavări iar dacă se termină cu o placă verticală ca în figura 2, se obţin a_n pavări. Atunci obţinem recurenţa:

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ deci

$a_n = F_{n+1}$, unde $(F_n)_{n\geq 0}$ este şirul lui Fibanacci.

9. Sume combinatorice

Fundamentarea analizei combinatorii ca disciplină ştiinţifică a început în secolul al XVII-lea. Într-un manuscris din secolul al III-lea d.H. este precizată formula $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$, iar în secolul al XII-lea, matematicianul hindus Bhaskara precizează formula generală pentru $\binom{n}{p}$. Un studiu mai sistematic se găseşte într-un manuscris al lui Levi Bengerson, la începutul secolului al XIII-lea, când obţine formula de recurenţă care îi permite să calculeze A_n^p, şi în particular numărul permutărilor de n obiecte. Tot el enunţă reguli echivalente cu relaţiile $\binom{n}{n-p}=\binom{n}{p}$ şi respectiv $\binom{n}{p}=\frac{1}{p!}A_n^p$, dar manuscrisul lui se pare că a fost ignorat de către contemporani.

B. Pascal (1623-1662) este primul care a observat relaţia dintre combinări şi formula binomului. Dezvoltarea binomului lui Newton, $(x+1)^m$, era cunoscută de arabi în secolul al XIII-lea, aşa cum menţionează N. Tartaglia (1500-1557) în „Tratatul general al numerelor".

Cel care a dat un fundament propriu-zis ştiinţific combinărilor şi permutărilor a fost G. W. Leibniz (1646-1716) în „Disertaţie despre arta combinatorie". Toate simbolurile actuale folosite în teoria combinatorilor datează din secolul al XIX-lea.

Combinatorica se interferează cu disciplinele matematice axiomatizate din care extrage metode sau pe care le serveşte cu rezultate. Metodele combinatoricii sunt utilizate în rezolvarea problemelor de transport şi de stocare a bunurilor. Legături au fost făcute între combinatorică şi problemele de programare liniară, statistică, etc. Metodele combinatoricii sunt utilizate în codificarea şi decodificarea informaţiilor, ca şi în alte probleme de teoria informaţiilor.

În acest capitol ne-am propus să dăm câteva modalităţi de obţinere a unor sume de combinări cu ajutorul binomului lui Newton sau pornind de la anumite identităţi dar fără a apela la calculul diferenţial şi integral.

9.1. Noțiuni teoretice relativ la elemente de combinatorică

9.1.1. Exemplu: Cu elementele alfabetului latin pot fi formate cuvintele limbilor ce folosesc acest alfabet. Să considerăm câteva cuvinte cu patru litere constituite din elementele mulțimii $\{a, e, m, r\}$, submulțime a mulțimii literelor alfabetului. Mulțimea cuvintelor $\{arme, rame, mare, eram\}$ reprezintă cuvinte cu sens precis, formate din aceleaşi litere, totalitatea grupărilor fiind 24.

9.1.2. Observație: Fie mulțimile $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ şi $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Vom studia numărul aplicațiilor bijective ale mulțimii A pe mulțimea B, notate cu $f : A \to B$. În general nu ne interesează natura mulțimilor A şi B, astfel că elementele lor se pot nota fie cu literele alfabetului, fie cu $\{1, 2, \dots, n\}$ aplicațiile definite fiind de forma $f(k) = i_k$, unde $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

9.1.3. Definiție: Aplicațiile bijective $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ se numesc *permutările* mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$. Numărul acestor aplicații bijective se notează cu P_n şi se citeşte *permutări de* n.

Aflarea numărului permutărilor unei mulțimi se face prin inducție şi se obțin $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \forall\, n \in N^*$.

9.1.4. Notație: Convenim să notăm $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$ care se citeşte „n factorial”. Cu această notație, $P_n = n!, \forall\, n \in N^*$, admitem prin definiție $0! = 1$.

9.1.5. Definiție: Aplicațiile injective
$f : (1, 2, \dots, k) \to (1, 2, \dots, n), 0 \le k \le n,\ n, k \in N, n \ge 1$, se numesc *aranjamente de n elemente luate câte k.* Numărul acestor aplicații injective se notează cu A_n^k şi se citeşte: *aranjamente de* n *luate câte* k.

Aflarea numărului aplicațiilor injective ale mulțimii $\{1, 2, \ldots, \mathrm{k}\}$ pe mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ o vom face prin inducție după k, având pe n fixat. Pentru $k = 1$, avem aplicațiile $f(1) = 1, f(1) = 2, \ldots, f(1) = n$, deci numărul lor este n adică $A_n^1 = n$.

Cercetăm pentru $k = 2$ numărul aplicațiilor injective $f : \{1, 2\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = p \end{cases} \forall\, p \in \{2, 3, \ldots, n\}$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = p \end{cases} \forall\, p \in \{1, 3, \ldots, n\}$$

....

$$\begin{cases} f(1) = n \\ f(2) = p \end{cases} \forall\, p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Fiecare dintre aplicațiile date fiind în număr de $n-1$, numărul total al lor este $n(n-1)$, deci $A_n^2 = n(n-1)$.

Pentru $k = 3$ aplicațiile injective $f : \{1, 2, \ldots, 3\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ sunt $f : \{1, 2\} \to \{1, 2, \ldots, n\}, f(3) = p$, p fiind diferit de valorile luate în 1 și 2, deci în total p poate lua $n-2$ valori. Prin urmare numărul total al aplicațiilor injective $f : \{1, 2, \ldots, 3\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ este $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$.

Presupunem că $A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$, $0 \le k \le 1$ și demonstrăm $A_n^{k+1} = n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)$.

Aplicațiile injective $f : \{1, 2, \ldots, k, k+1\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ sunt $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, $f(k+1) = p$, p fiind diferit de valorile luate în $1, 2, \ldots, k$ deci în total p poate lua $n-k$ valori. În concluzie numărul total al aplicațiilor injective $f : \{1, 2, \ldots, k, k+1\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ este $A_n^{k+1} = [n(n-1)\cdots(n-k+1)](n-k)$, $0 \le k < n$

Pentru $k = n$ aplicația injectivă $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ este și bijectivă. Se impune demonstrația subjectivității. Demonstrația o facem prin reducerea la absurd. Avem $|f(\{1, 2, \ldots, n\})| = n$ și presupunem că f nu este surjectivă. Rezultă că există $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ care nu este imaginea nici unui element din mulțimii de definiție. Am ajuns la contradicție, numărul valorilor funcției fiind mai mic decât n, deci f nu este injectivă. Prin urmare, pentru $k = n$ avem $A_n^n = P_n$. Aşadar rezultă:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

9.1.6. Definiție: Aplicațiile injective $f : \{1, 2, \dots, k\} \to \{1, 2, \dots, n\}$, $0 \le k \le n$, $n, k \in N$, $n \ge 1$ pentru care codomeniile sunt formate din mulțimi distincte, se numesc *combinări de n elemente luate câte k*.

Numărul combinărilor de n elemente luate câte k se notează cu $\binom{n}{k}$ şi se citeşte *combinări de n luate câte k.*

Au loc relațiile:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \mathrm{k}},\ 0 \le k \le n,\ n, k \in N,\ n \ge 1.$$

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{P_k},\ 0 \le k \le n,\ n, k \in N,\ n \ge 1.$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ 0 \le k \le n,\ n, k \in N,\ n \ge 1.$$

9.1.7. Proprietăți ale numerelor $\binom{n}{k}$

(1) Formula combinărilor complementare

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},\ 0 \le k \le n,\ n, k \in N,\ n \ge 1.$$

(2) Formula de descompunere a combinărilor

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},\ 0 < k < n,\ n, k \in N^*.$$

(3) Formule de recurență pentru combinări

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},\ 0 < k \le n,\ n,k \in N^*;$$

$$\binom{n}{k} = \frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1},\ 0 \le k \le n,\ n,k \in N,\ n \ge 1.$$

Demonstrație:

(3)

$$\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot(k-1)} = \frac{A_n^k}{P_k} = \binom{n}{k};$$

$$\frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{k+1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

9.1.8. Teoremă (binomul lui Newton):

Are loc următoare formulă:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

cunoscută sub denumirea de *formula lui Newton* (1643 - 1727).

9.1.9. Observații:

(1) Formula lui Newton poate fi scrisă sub formă condensată astfel:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k .$$

Dacă se doreşte o formulă analogă pentru binomul diferență, formula devine:

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k .$$

(2) Coeficienții $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\dots,\binom{n}{k},\dots,\binom{n}{n-1},\binom{n}{n}$ se numesc coeficienți binomiali şi se calculează cu formulele combinărilor.

(3) Dacă n este un număr par, dezvoltarea conține un număr impar de termeni, existând un termen din mijloc al dezvoltării, $T_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, care are coeficientul terminal cel mai mare.

(4) Dacă n este impar, dezvoltarea conține un număr par de termeni, termenii din mijloc $\left(T_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \text{ şi } T_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}\right)$ având coeficienții terminali egali, cu valoare maximă.

9.1.10. Proprietăți ale binomului lui Newton

(1) Numărul termenilor din dezvoltarea binomului $(a+b)^n$ este $n+1$.

(2) Coeficienții binomiali ai termenilor extremi din dezvoltarea sunt egali, de asemenea coeficienții binomiali ai termenilor egali depărtați de extremi, întrucât $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

(3) Termenul $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ este al $(k+1)$-lea termen al dezvoltării binomului şi se numeşte ***termen general***. Se notează cu $T_{k+2} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

(4) Între doi termeni consecutivi ai dezvoltării există relația:

$$T_{k+2} = \frac{n-k}{k+1} \cdot T_{k+1}$$

9.1.11. Identități în calculul cu combinări:

(1) Particularizând $a = b = 1$ în formula lui Newton, avem:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

(2) Avem: a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$

b) $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$

Demonstrație: (2) În formula lui Newton punem $a=1, b=-1$ şi obținem:

$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}.$$

Adunând această relație cu $2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$ rezultă a) iar scăzându-le se obține b).

9.1.12. Teorema binomului factorial

Se notează $a(a-h)(a-2h)\cdot\cdots\cdot[a-(n-1)h]=a^{n|h}$, astfel în particular $a^{n|0}=a^n$, $a^{1|h}=a$. Să se demonstreze că are loc egalitatea:

$$(a+b)^{n|h}=a^{n|h}+\binom{n}{1}a^{(n-1)|h}\cdot b^{1|h}+\binom{n}{2}a^{(n-2)|h}\cdot b^{2|h}+\cdots+b^{n|h}$$

Demonstrație: Teorema se demonstrează prin metoda inducției complete. Ea conține drept caz particular, (pentru $h=0$) teorema obişnuită a binomului lui Newton. Este uşor de verificat că pentru $n=1$ şi $n=2$, teorema binomului factorial este adevărată. Se va presupune că această teoremă este adevărată pentru exponentul n, adică $(a+b)^{n|h}+\binom{n}{1}a^{(n-1)|h}\cdot b+\binom{n}{2}a^{(n-2)|h}\cdot b^{2|h}+\cdots+b^{n|h}$ şi se va arăta că în acest caz teorema va fi adevărată şi pentru $n+1$. Într-adevăr, înmulțind cu $a+b-nh$ ambii membrii ai egalității care exprimă teorema pentru exponentul n, în partea stângă vom obține evident $(a+b)^{(n+1)|h}$; în partea dreaptă, unde figura suma având ca termen de rang k pe $\binom{n}{k}a^{(n-k)|h}\cdot b^{k|h}$, vom obține după înmulțirea cu $a+b-nh$ ca expresie a acestui termen

$$\binom{n}{k}a^{(n-k)|h}\cdot b^{k|h}\cdot(a+b-nh)=\binom{n}{k}a^{(n-k)|h}b^{k|h}\{[a-(n-k)h]+(b-kh)\}=$$

$$=\binom{n}{k}a^{(n-k)|h}\left[a-(n-k)h\right]b^{k|h}+\binom{n}{k}a^{(n-k)|h}b^{k|h}(b-kh)=$$

$$=\binom{n}{k}a^{(n-k+1)|h}\cdot b^{k|h}+\binom{n}{k}a^{(a-k)|h}b^{(k+1)|h}.$$

Conform relației cunoscute $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$, rezultă, ca şi în cazul teoremei obişnuite a binomului lui Newton, că după înmulțirea membrului întâi cu $a+b-nh$ se va obține o sumă de termeni de forma $\binom{n+1}{k}a^{(n+1-k)|h}\cdot b^{k|h}$. Cu aceasta, s-a demonstrat că, dacă teorema binomului factorial este adevărată pentru exponentul n, ea este adevărată şi pentru exponentul $n+1$. Deoarece această teoremă este adevărată pentru $n=1$, rezultă valabilitatea ei pentru orice n.

9.2. Metode de calcul al sumelor de combinari

9.2.1. Calculul unor sume cu combinări pornind de la identități

Se consideră identitățile:

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1} \text{ şi } \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Să se arate că au loc următoarele identități:

$$(1)\ \sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)\cdot 2^{n-2};$$

$$(2)\ \sum_{k=0}^{n}(k+p)^2\binom{n}{k}=2^{n-2}\left(n^2+n+4pn+4p^2\right);$$

$$(3)\ \sum_{k=0}^{n}k(k+1)(k+2)\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-3}\cdot\left(n^2+9n+14\right);$$

$$(4)\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}\binom{n}{k}=\frac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)};$$

$$(5)\ \sum_{k=0}^{n}\frac{k+2}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{(n+3)\cdot 2^n-1}{n+1};$$

$$(6)\ \sum_{k=0}^{n}\frac{k+p}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}(n+2p-2)-pn+3p+n-8}{(n+1)(n+2)}.$$

Soluții:

(1) Avem $k^2\binom{n}{k}=k\cdot k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=k\cdot n\cdot\binom{n-1}{k-1}$, deci

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n\sum_{k=1}^{n}k\binom{n-1}{k-1}=n\left[\sum_{k=1}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\right]=$$

$$=n\left[(n-1)\cdot 2^{n-2}+2^{n-1}\right]=n\cdot 2^{n-2}(n-1+2)=n(n+1)\cdot 2^{n-2}.$$

(2) $$\sum_{k=0}^{n}(k+p)^2\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{p}\left(k^2+2kp+p^2\right)\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}+2p\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}+$$

$$+p^2\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}=n(1+1)\cdot 2^{n-2}+2pn\cdot 2^{n-1}+p^2\cdot 2^n=2^{n-2}\cdot\left(n^2+n+4pn+4p^2\right)$$

.

(3) $$\sum_{k=0}^{n}k(k+1)(k+2)\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\left(k^3+3k^2+2k\right)\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}k^3\binom{n}{k}+3\cdot\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}+$$

$$+2\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n^2\cdot(n+3)\cdot 2^{n-3}+3n(n+1)\cdot 2^{n-2}+2n\cdot 2^{n-1}=n\left(n^2+9n+14\right)\cdot 2^{n-3}$$

cu observația că pentru calculul sumei $\sum_{k=0}^{n}k^3\binom{n}{k}$ s-a folosit identitatea

$$k^3\binom{n}{k}=k^2\cdot n\binom{n-1}{k-1}.$$

(4) $$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{(n+1)(n+2)}\binom{n+2}{k+2}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n+2}{k+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\sum_{k=0}^{n}(k+2)\binom{n+2}{k+2}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}\right]$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left\{(n+2)\left(2^{n+1}-1\right)-\left[2^{n+2}-(n+2)-1\right]\right\}=\frac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}.$$

(5) $\sum_{k=0}^{n}\frac{k+2}{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k+2}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(k+2)\binom{n+1}{k+1}=$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n+1}{k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}}{n+1}=\frac{2^{n}(n+3)-1}{n+1}.$$

(6) Avem

$$\frac{k+p}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}=(k+p)\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+p}{(n+1)(n+2)}\binom{n+2}{k+2}$$

deci $\sum_{k=0}^{n}\frac{k+p}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(k+p)\binom{n+2}{k+2}=$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\sum_{k=0}^{n}(k+2)\binom{n+2}{k+2}+(p-2)\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}\right]=$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left\{\left[(n+2)\cdot 2^{n+1}-(n+2)\right]+\left[(p-2)\left(2^{n+2}-n-3\right)\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[2^{n+1}(n+2p-2)-pn+3p+n-8\right].$$

9.2.2. Calculul unor sume cu combinări aplicând teorema binomului lui Newton

Să se aplice teorema binomului lui Newton la determinarea valorii următoarelor sume:

(1) $\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n}n\binom{n}{n}$;

(2) $\binom{2n}{n}+2\binom{2n-1}{n}+4\binom{2n-2}{n}+\cdots+2^{n}\binom{n}{n}$;

(3) $\binom{n}{0}^{2}+\binom{n}{1}^{2}+\binom{n}{2}^{2}+\cdots+\binom{n}{n}^{2}$;

(4) $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\cdots;$

(5) $\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\binom{n}{13}+\cdots;$

Soluții:

(1) Folosim faptul că $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ şi obținem:

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n\binom{n}{n}=n\left[\binom{n-1}{0}-\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}-\cdots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right]=n(1-1)^{n-1}=0.$$

(2) Expresia căutată este egală cu coeficientul lui x^n în polinomul:

$$(1+x)^{2n}+2(1+x)^{2n-1}+2^2(1+x)^{2n-2}+\cdots+2^n\cdot(1+x)^n.$$

Se va transforma acest polinom folosind formula pentru suma termenilor unei progresii geometrice:

$$(1+x)^{2n}+2(1+x)^{2n-1}+2^2(1+x)^{2n-2}+\cdots+2^n(1+x)^n=$$

$$=(1+x)^{2n}\left[1+\frac{2}{1+x}+\frac{2^2}{(1+x)^2}+\cdots+\frac{2^n}{(1+x)^n}\right]=$$

$$=(1+x)^{2n}\left[\frac{2^{n+1}}{(1+x)^{n+1}}-1\right]\left(\frac{2}{1+x}-1\right)=\left[2^{n+1}\cdot(1+x)^n-(1+x)^{2n+1}\right]\frac{1}{1-x}.$$

Dar (pentru $|x|<1$): $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$. Deci suma căutată este egală cu coeficientul lui x^n din expresia:

$$2^{n+1}\cdot(1+x)^n(1+x+x^2+\cdots)-(1+x)^{2n+1}(1+x+x^2+\cdots).$$

Dacă vom înmulți un polinom în x cu $1+x+x^2+\cdots$, coeficientul lui x^n în acest produs va fi egal cu suma coeficienților puterilor lui x, nu mai mari decât n din polinomul inițial. Într-adevăr, termenii în x^n din produs se obțin prin înmulțirea termenilor în x^k ai polinomului, unde $k \le n$, respectiv cu termenii x^{n-k} ai sumei $1 + x + x^2 + \cdots$. Astfel, produsul $2^{n+1}(1+x)^n(1 + x + x^2 + \cdots)$, după desfacerea parantezelor va conține termenul în x^n cu un coeficient egal cu suma tuturor coeficienților polinomului $2^{n+1}(1+x)^n$, adică cu un coeficient egal cu $2^{n+1} \cdot 2^n = 2^{2n+1}$ Coeficientul lui x^n în produsul $(1+x)^{2n+1} \cdot (1 + x + x^2 + \cdots)$ va fi egal cu suma coeficienților polinomului $(1+x)^{2n+1}$, care stau în fața lui $x^0 = 1, x, x^2, \dots, x^n$, adică va fi egal cu suma coeficienților din prima jumătate a polinomului $(1+x)^{2n+1}$. Dar, deoarece $\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}$, rezultă că această sumă este egală cu semisuma tuturor coeficienților lui $(1+x)^{2n+1}$, adică este egală cu $2^{n+1} : 2 = 2^{2n}$. De aici rezultă că coeficientul lui x^n în expresia $2^{n+1}(1+x)^n(1 + x + x^2 + \cdots) - (1+x)^{2n+1}(1 + x + x^2 + \cdots)$ este egal cu $2^{2n+1} - 2^n = 2^{2n}$.

(3) Expresia căutată este egală cu coeficientul lui x^n în produsul următor:

$$\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right) \cdot \left(\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n-2}x^2 + \cdots + \binom{n}{0}x^n\right)$$

Însă $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ şi deci, $\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n-2}x^2 + \cdots + \binom{n}{0}x^n =$

$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)?$ Astfel, trebuie să găsim doar coeficientul lui x^n în produsul $(1+x)^n \cdot (1+x)^n = (1+x)^{2n}$. Acest coeficient este egal cu $\binom{2n}{n}$.

(4) Deoarece $x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$ fie ε_1 şi ε_2 cele două rădăcini ale ecuației de gradul al doilea $x^2+x+1=0$. Observăm că $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2$, $\varepsilon_2^2=\varepsilon_1$, $\varepsilon_1^3=\varepsilon_2^3=1$, $1+\varepsilon_1+\varepsilon_2=1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^2=1+\varepsilon_2+\varepsilon_2^2=0$.

Conform binomului lui Newton se obține:

$$(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}$$

$$(1+\varepsilon_1)^n=\binom{n}{0}+\varepsilon_1\binom{n}{1}+\varepsilon_1^2\binom{n}{2}+\varepsilon_1^3\binom{n}{3}+\cdots+\varepsilon_1^n\binom{n}{n}$$

$$(1+\varepsilon_2)^n=\binom{n}{0}+\varepsilon_2\binom{n}{1}+\varepsilon_2^2\binom{n}{2}+\varepsilon_2^3\binom{n}{3}+\cdots+\varepsilon_2^n\binom{n}{n}$$

Conform proprietăților anterior anunțate ale numerelor ε_1 şi ε_2 suma $1+\varepsilon_1^k+\varepsilon_2^k$ este egală cu zero pentru k prim, şi egală cu $1+1+1=3$ pentru k divizibil cu 3. Deci, adunând cele trei egalități, vom obține:

$$2^n+(1+\varepsilon_1)^n+(1+\varepsilon_2)^n=3\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\cdots\right).$$

Se trece acum la forma trigonometrică a numerelor complexe: $\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, $\varepsilon_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$, $1+\varepsilon_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$, $1+\varepsilon_2=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$. Utilizând formula lui Moivre, se obțin:

$$(1+\varepsilon_1)^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3} \text{ şi } (1+\varepsilon_1)^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$$

de unde: $2^n+(1+\varepsilon_1)^n+(1+\varepsilon_2)^n=2^n+2\cdot\cos\frac{n\pi}{3}$.

Deci, $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\cdots=\frac{1}{3}\left[2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right]$.

(5) Se scrie dezvoltarea binoamelor $(1+1)^n$, $(1-1)^n$, $(1+i)^n$ şi $(1-i)^n$ după teorema binomului lui Newton:

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}$$

$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$$

$$(1+i)^n=\binom{n}{0}+i\binom{n}{1}+i^2\binom{n}{2}+i^3\binom{n}{3}+\cdots+i^n\binom{n}{n}$$

$$(1-i)^n=\binom{n}{0}-i\binom{n}{1}+i^2\binom{n}{2}-i^3\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n i^n\binom{n}{n}.$$

Pentru rezolvarea problemei se va considera suma:

$$(1+1)^n-(n-1)^n-i(1+i)^n+i(1-i)^n.$$

Nu este greu de verificat că $1-(-1)^k-i\cdot i^k+i(-1)^k\cdot i^k=0$ pentru k care dă prin împărțirea cu 4 resturile 0, 2 sau 3 şi $1-\left(-1^k\right)-i\cdot i^k+i\cdot\left(-1^k\right)\cdot i^k=4$ pentru k care dă restul 1 prin împărțirea cu 4, deci:

$$(1+1)^n-(n-1)^n-i(1-i)^n=4\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\binom{n}{13}+\cdots\right).$$

Folosind forma trigonometrică a numerelor $1+i$ şi $1-i$ se obține:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\binom{n}{13}+\cdots=2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}.$$

9.2.3. Calculul unor sume cu combinări aplicând teorema binomului factorial

Să se utilizeze teorema binomului factorial la calculul valorii sumei:

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{m}{k-2}+\cdots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}$$

Soluție:

Deoarece $\binom{n}{i}=\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}=\frac{n^{i|1}}{i!}$ se va obține $\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}=\frac{n^{i|1}m^{(k-i)|1}}{i!(k-i)!}=\frac{1}{k!}\cdot\frac{k!}{i!(k-i)!}n^{i|1}m^{(k-1)|i}\cdot\frac{1}{ki}\cdot\binom{k}{i}n^{i|1}m^{(k-i)|1}$. Deci suma căutată este egală cu:

$$\frac{1}{k!}\left(\binom{k}{0}m^{k|1}+\binom{k}{1}m^{(k-1)|1}n+\binom{k}{2}m^{(k-2)|1}n^{2|1}+\cdots+\binom{k}{k}n^{k|1}\right)=\frac{(m+n)^{k|1}}{k!}=\binom{m+1}{k}$$

Suma se poate obţine şi plecând de la identitatea $(1+x)^n\cdot(1+x)^m=(1+x)^{m+n}$ unde se va determina coeficientul lui x^k.

9.2.4. Calculul unor sume cu combinări aplicând relaţii de recurenţă

Să se arate că pentru orice număr natural n au loc identităţile:

(1) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2k}=2^n$;

(2) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}=\begin{cases}1, n=3p\\ 0, n=3p+1\\ -1, n=3p+2\end{cases}, p\in N$.

Soluţii:

(1) Să notăm $f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k}$. Deducem $f(1)=2$ şi $f(n+1)=$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1+k}{k}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+k}{k-1}\frac{1}{2^k}=f(n)+\binom{2n+1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+2}\binom{n+1+k-1}{k-1}\frac{1}{2^{k-1}}-\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{n+2}}=f(n)+\frac{1}{2}f(n+1).$$ Deci

$f(n+1)=2f(n)$ pentru orice $n\ge 1$, $n\in N$ ceea ce implică $f(n)=2^n$.

(2) Suma căutată se mai scrie:

$$S_n=\sum_{k\ge 0}(-1)^k\binom{2n-k}{k}=\binom{2n}{0}-\binom{2n-1}{1}+$$

$$+\binom{2n-2}{2}-\cdots=\binom{2n+1}{0}-\binom{2n}{1}+\binom{2n-1}{0}+\binom{2n-1}{2}-\binom{2n-2}{1}+\cdots=\binom{2n+1}{0}-$$

$$-\binom{2n}{1}+\binom{2n-1}{2}-\cdots+\binom{2n-1}{0}-\binom{2n-2}{1}+\binom{2n-3}{2}-\cdots=\binom{2n+2}{0}-\binom{2n+1}{1}+$$

$$+\binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}-\binom{2n-1}{1}+\cdots+\binom{2n}{0}-\binom{2n-1}{1}+\binom{2n-2}{0}+\cdots=S_{n+1}+2S_n+S_{n-1}$$
.

Deci numerele S_n verifică recurența: $S_{n+1}=-(S_n+S_{n-1})$. Deoarece $S_1=0$, $S_2=-1$, $S_3=1$, proprietatea rezultă adevărată prin inducție după n, ținând seama de secvența găsită.

9.2.5. Calculul unor sume cu combinări

Să se demonstreze următoarele identități cu combinări:

(1) $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}=\binom{n}{p}\binom{n}{q}$;

(2) $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+p+q-k}{p+q}=\binom{n+p}{p}\binom{n+q}{q}$;

(3) $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^2\binom{n+2p-q}{2p}=\binom{n+p}{p}^2$ (Formula lui Li-Jen-Shu)

(4) $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^3=(-1)^n\cdot\frac{(3n)!}{(n!)^3}$ (Formula lui Dixon)

(5) $\frac{1}{\binom{2n}{1}}-\frac{1}{\binom{2n}{2}}+\frac{1}{\binom{2n}{3}}-\frac{1}{\binom{2n}{4}}+\cdots+\frac{1}{\binom{2n}{2n-1}}=\frac{1}{n+1}$, $n\in N^*$

Soluții:

(1) Obținem:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}=\sum_{k\geq 0}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{n}{p+q-j}=\sum_{j\geq 0}\binom{n}{p+q-j}\sum_{k\geq 0}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{k}{j}$$

ținând seama de identitatea $\sum_{k=0}^{m}\binom{p}{k}\binom{q}{m-k}=\binom{p+q}{m}$. Mai deducem:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p}{q}\binom{q}{k}\binom{k}{j}=\sum_{k\geq 0}\binom{p}{k}\frac{q!}{(q-k)!\,j!\,(k-j)!}=\sum_{k\geq 0}\binom{p}{k}\binom{q}{j}\binom{q-j}{q-k}=\binom{q}{j}\binom{p+q-j}{q}$$

Deci membrul stâng al identității de demonstrat devine egal cu:

$$\sum_{j\ge 0}\binom{n}{p+q-j}\binom{q}{j}\binom{p+q-j}{q}=\sum_{j\ge 0}\frac{n!}{(n-p-q+j)!(q-j)!(p-j)!\,j!}=$$

$$=\sum_{j\ge 0}\binom{n}{p}\binom{p}{j}\binom{n-p}{q-j}=\binom{n}{p}\sum_{j\ge 0}\binom{p}{j}\binom{n-p}{q-j}=\binom{n}{p}\binom{n}{q}$$ ținând iarăşi seama de:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{p}{k}\binom{a}{m-k}=\binom{p+q}{m}$$

(2) Identitatea (1) este o egalitate între două polinoame în n, de gradul $p+q$. Această egalitate are loc pentru orice n număr natural, deci cele două polinoame în n sunt identice. Rezultă că obținem o egalitate dacă atribuim lui n pe $(-1-n)$.

Deoarece $\binom{-1-n+k}{p+q}=(-1)^{p+q}\binom{n+p+q-k}{p+q}\binom{-1-n}{p}=(-1)^{p}\binom{n+p}{p}$

şi $\binom{-1-n}{q}=(-1)^{q}\binom{n+a}{q}$ din (1) deducem (2).

(3) Formula lui Li-Jen-Shu se deduce din (2) pentru $q=p$.

(4) Vom demonstra identitatea:

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}^{3}x^{k}=(1+x)^{2n}+\sum_{i=1}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n}{2k}\binom{2n+k}{k}(1+x)^{2n-2k}x^{k}$$

de unde pentru $x=-1$ se obține formula lui Dixon, adică:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k}\cdot\binom{2n}{k}^{3}=(-1)^{n}\binom{2n}{n}\binom{3n}{n}=(-1)^{n}\cdot\frac{(3n)!}{(n!)^{3}}.$$

Egalând coeficienții lui x^{p} în identitatea pe care trebuie să o demonstrăm, pentru $1\le p\le 2n$, găsim egalitatea:

$$\binom{2n}{p}^{3}=\binom{2n}{p}+\sum_{k=1}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n}{2k}\binom{2n+k}{k}\binom{2n-2k}{p-k}.$$

Dar $\binom{2k}{k}\binom{2n}{2k}\binom{2n-2k}{p-k}=\binom{p}{k}\binom{2n-p}{k}\binom{2p}{k}$, deci identitatea precedentă pe care trebuie să o demonstrăm se reduce la:

$$\binom{2n}{p}^2=\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{2n-p}{k}\binom{2n+k}{k} \quad (*)$$

pentru orice $p=1,\dots,2n.$ Pentru a demonstra $(*)$ vom utiliza identitatea:

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}a^{p-k}b^k=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q+k}{k}(a-b)^{p-k}b^k$$

în care punem I: $a=0$, $b=-1$ şi $q=2n$ şi II: $a=x$, $b=1+x$ şi $q=2n-p$.

În cazul I deducem: $(**)$ $(-1)^p\binom{2n}{p}=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{2n+k}{k}$ iar în cazul I se obține: $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{2n-p}{k}x^{p-k}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\cdot\binom{p}{k}\binom{2n-p+k}{k}\binom{2n+k}{p}$.

Dar $\binom{2n-p+k}{k}\binom{2n+k}{p}=\binom{2n+k}{k}\binom{2n}{p}$, deci putem scrie:

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{2n-p}{k}\binom{2n+k}{k}=(-1)^p\binom{2n}{p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{2n+k}{k}$$

Ținând seama de $(**)$ membrul drept este tocmai $\binom{2n}{p}^2$ ceea ce demonstrează, prin urmare, formula lui Dixon.

(5) Pentru demonstrația acestei identități să observăm că pentru orice număr natural $n\geq 1$, şi orice $k=\overline{0,1}$ are loc egalitatea

$$\frac{1}{\binom{n}{k}}-\frac{1}{\binom{\overline{n-1}}{k}}=\frac{k!(n-k)!}{n!}-\frac{k!(n-1-k)!}{(n-1)!}=\frac{k!(n-k)!-k!(n-1-k)!n}{n!}=$$

$$=\frac{k!(n-1-k)!(n-k-n)}{n!}=\frac{k!(n-1-k)!(-k-1+1)}{n!}=-\frac{1}{\binom{n}{k+1}}+\frac{1}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}$$

Fie $x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Ținând cont de egalitatea de mai sus, pentru orice $n \in N$, $n \geq 1$ avem:

$$x_n - x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} - \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \right) + (-1)^n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(-\frac{1}{\binom{n}{k+1}} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \right) +$$

$$+ (-1)^n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{\binom{n}{k+1}} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{\binom{n-1}{k}} + (-1)^n =$$

$$(x_{n-1}) + \frac{1}{n} \cdot x_{n-1} + (-1)^n .$$

Din această egalitate deducem că:

$$x_{n-1} = \frac{n\left[1 - (-1)^n\right]}{n+1} = \begin{cases} 0, n = 2p \\ \frac{2n}{n+1}, n = 2p+1 \end{cases},$$

deci $2 - x_n = \frac{1}{n+1}$ adică identitatea ce trebuia demonstrată.

10. Probleme de geometrie în spaţiu

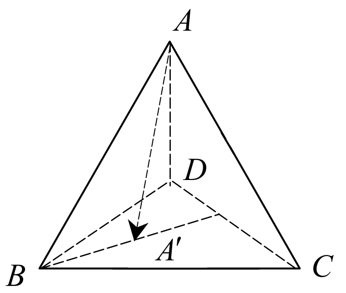
Probleme rezolvate

R10.1.1. Fie $ABCD$ un tetraedru şi A' centrul de greutate al feţei BCD. Atunci are loc relaţia

$$9AA'^2 = 3(AB^2 + AC^2 + AD^2) - (BC^2 + CD^2 + DB^2).$$

(Teorema medianei în spaţiu)

Soluţie. Avem



$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}), \text{ deci}$$

$$AA'^2 = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{9}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})^2 =$$

$$= \frac{1}{9}(AB^2 + AC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} +$$

$$+2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{9}(AB^2 + AC^2 + AD^2 + AB^2 + AC^2 -$$

$$BC^2 + AB^2 + AD^2 - BD^2 + AC^2 + AD^2 - CD^2) =$$

$$= \frac{1}{9}(3AB^2 + 3AC^2 + 3AD^2 - BC^2 - BD^2 - CD^2)$$

de unde rezultă concluzia dorită.

R10.1.2. Fie ABCD un tetraedru. Să se arate că are loc relaţia:

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2}{2AB \cdot CD}.$$

Soluţie. Din definiţia produsului scalar avem:

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD} = \frac{(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD} = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{AB \cdot CD} =$$

$$= \frac{1}{AB \cdot CD}\left[\frac{DA^2 + DC^2 - AC^2}{2} - \frac{DB^2 + DC^2 - BC^2}{2}\right] = \frac{AD^2 + BC^2 - BD^2 - AC^2}{2AB \cdot CD},$$

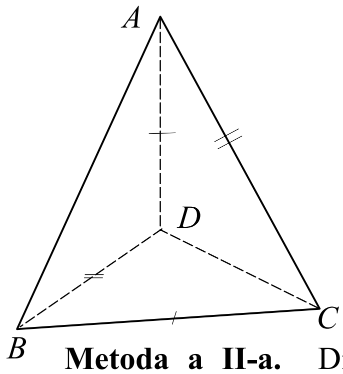
de unde rezultă concluzia problemei.

R10.1.3. Să se arate că dacă un tetraedru are două perechi de muchii opuse perpendiculare, atunci şi a treia pereche are această proprietate (tetraedrul se numeşte **ortogonal** sau **ortocentric**).

Soluție. Fie tetraedrul $ABCD$ astfel încât $AD \perp BC$ şi $AC \perp BD$.

Metoda I. Trebuie să demonstrăm că $AB \perp DC$. Din ipoteză avem: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ şi $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Deoarece



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DC} =$$
$$= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) =$$
$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} =$$
$$\overset{\text{ip.}}{=} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}) = 0,$$

rezultă $AB \perp DC$, adică are loc concluzia problemei.

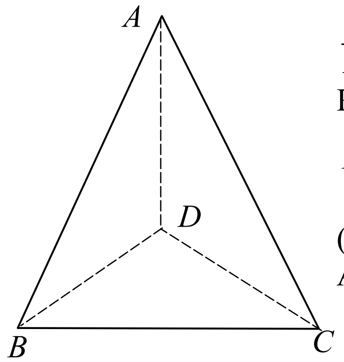
Metoda a II-a. Din $AD \perp BC$ şi $AC \perp BD$, conform problemei precedente avem

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}}) = \frac{AB^2 + DC^2 - AC^2 - BC^2}{2AD \cdot CB} = 0 \text{ şi}$$
$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}}) = \frac{AB^2 + DC^2 - AD^2 - BC^2}{2AC \cdot DB} = 0.$$

Prin urmare, obținem: $AB^2 + DC^2 = AC^2 + BD^2$ şi $AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2$.

Rezultă: $AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$, deci $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = 0$, adică $AB \perp CD$.

R10.1.4. Într-un tetraedru ortogonal suma pătratelor muchiilor opuse este aceeaşi.



Soluție. Fie tetraedrul ortogonal ABCD. Din $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$.

Prin ridicare la pătrat, rezultă că

$$BC^2 + DA^2 + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} = BA^2 + DC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} \overset{\text{ip.}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow BC^2 + DA^2 = BA^2 + DC^2$$

(1)

Analog, din

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}$$

şi apoi

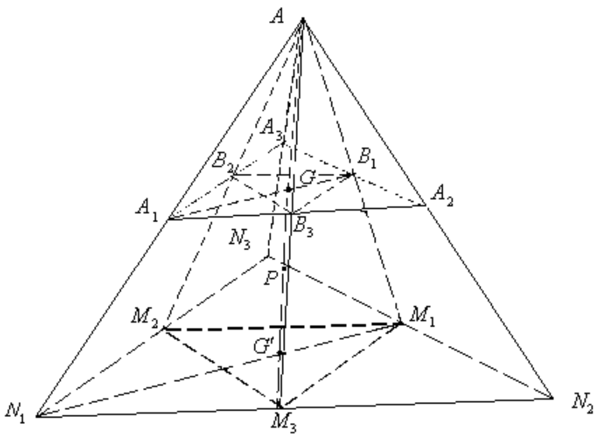
$$(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA})^2 = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB})^2 \Rightarrow CB^2 + DA^2 + 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DA} =$$
$$= CA^2 + DB^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} \Rightarrow CB^2 + DA^2 = CA^2 + DB^2$$

(2)

Din relațiile (1) şi (2) rezultă concluzia dorită.

R10.1.5. Fie $[AA_1A_2A_3]$ un tetraedru oarecare şi B_1, B_2, B_3 mijloacele muchiilor A_2A_3, A_1A_3 şi respectiv A_1A_2. Se notează cu M_i punctele de intersecție cu AB_i, $i \in \{1,2,3\}$, ale unui plan paralel cu planul $(A_1A_2A_3)$. Să se arate că dreptele A_iM_i, $i=\overline{1,3}$, sunt concurente într-un punct pe AG, unde G este centrul de greutate al triunghiului $A_1A_2A_3$.

Soluție. O condiție necesară şi suficientă ca dreptele A_1M_1, A_2M_2 să fie coplanare este ca vectorii legați $\overrightarrow{A_1A_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}$ să fie paraleli.



Deoarece $(A_1A_2A_3) \parallel (M_1M_2M_3)$ există $\lambda \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$\overrightarrow{AM_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB_1} = \frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{AA_3})$$

şi

$$\overrightarrow{AM_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB_2} = \frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_3})$$

.

Rezultă că

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1A_1} + \overrightarrow{AM_2}) = = \frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{A_2A} + \overrightarrow{AA_1}) = \frac{\lambda}{2} \cdot \overrightarrow{A_2A_1},$$

de unde obținem că $M_1M_2 \parallel A_1A_2$ şi cum A_1M_1 nu poate fi paralelă cu A_2M_2 rezultă că există $\{P\} = A_1M_1 \cap A_2M_2$. Vom demonstra că $P \in A_3M_3$. Într-adevăr $\Delta A_1PA_2 \sim \Delta M_1PA_2$ şi deci $\dfrac{A_1P}{PM_1} = \dfrac{A_1A_2}{M_1M_2}$.

Deoarece $N_1N_2 = 2M_1M_2$ şi $N_1N_2 = \lambda \cdot A_1A_2$, rezultă că $\overrightarrow{A_1P} = \dfrac{2}{\lambda}\overrightarrow{PM_1}$ sau $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AP} = \dfrac{2}{\lambda} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM_1})$ şi deci $\overrightarrow{AP} = \dfrac{\lambda}{\lambda+2} \cdot (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{AA_3})$.

Deoarece G este centrul de greutate al $\triangle A_1A_2A_3$ avem $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{AA_3})$ şi urmează că $\overrightarrow{AP} = \frac{3\lambda}{\lambda+2}\cdot\overrightarrow{AG}$. De aici rezultă că $P \in AG$ şi P împarte segmentul AG în raportul $\frac{3\lambda}{\lambda+2}$.

Repetând raţionamentele şi calculele pentru dreptele A_2M_2 şi A_3M_3 găsim că $P \in A_3M_3$, deci dreptele AM_i, $i=\overline{1,3}$, sunt concurente.

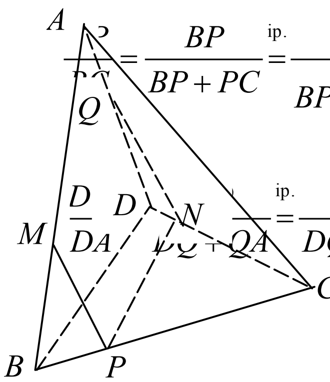
R10.1.6. Pe muchiile AB, BC, CD, DA ale unui tetraedru se consideră punctele M, P, N, Q astfel încât

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AQ}{QD} = \frac{CN}{ND} = \frac{BM}{MA} = k.$$

Să se determine $T \in (AC)$ şi $S \in (BD)$ astfel încât MN, PQ şi TS să fie concurente.

Soluţie. Din ipoteză rezultă că $MP \parallel AC$ şi $NQ \parallel AC$, deci $MP \parallel NQ$, de unde obţinem că $MPNQ$ trapez.

Avem:



$$\frac{BP}{BC} = \frac{BP}{BP+PC} \stackrel{\text{ip.}}{=} \frac{BP}{BP+\frac{BP}{k}} = \frac{k}{k+1} = \frac{MP}{AC};$$

$$\frac{DQ}{DA} = \frac{DQ}{DQ+QA} \stackrel{\text{ip.}}{=} \frac{DQ}{DQ+k\cdot DQ} = \frac{1}{k+1} = \frac{NQ}{AC}$$

Fie $\{O\} = MN \cap PQ$. Atunci MN, PQ, TS sunt concurente $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AO} = k_1\cdot\overrightarrow{AT} + k_2\cdot\overrightarrow{AS}$ şi $k_1 + k_2 = 1$ (1)

Avem: $\frac{MO}{ON} = k = \frac{MP}{NQ}$ şi

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{AN}}{1+k};$$

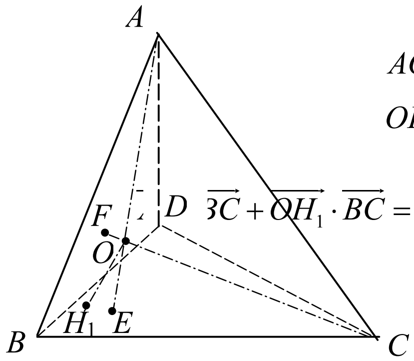
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{k+1}\cdot\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AC} + k\cdot\overrightarrow{AD}}{1+k}.$$

Fie $\dfrac{AT}{TC}=\alpha$, $\dfrac{SD}{SB}=\beta$. Obținem $\overrightarrow{AT}=\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AS}=\dfrac{\overrightarrow{AD}+\beta\cdot\overrightarrow{AB}}{1+\beta}$.

Folosind şi relația (1), deducem că $k_1=\dfrac{2k}{(1+k)^2}$, $k_2=\dfrac{1+k^2}{(1+k)^2}$, $\alpha=1$, $\beta=\dfrac{1}{k^2}$.

R10.1.7. În tetraedrul *ABCD* din două vârfuri se duc perpendiculare pe fețele opuse ce se intersectează în *O*. Să se arate că perpendicularele duse din *O* pe celelalte două fețe intersectează fețele în ortocentrele lor.

Soluție. Fie $AE\perp(BCD)$ şi $CF\perp(ABD)$ cu $AE\cap CF=\{O\}$.



Avem:

$$\left.\begin{array}{l} AO\perp(BCD)\Rightarrow\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \\ OH_1\perp(ABC)\Rightarrow\overrightarrow{OH_1}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \end{array}\right|\Rightarrow$$

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OH_1}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH_1})\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\overrightarrow{AH_1}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow AH_1\perp BC$

(1)

Din $\left.\begin{array}{l} CO\perp(ABD)\Rightarrow\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \\ OH_1\perp(ABC)\Rightarrow\overrightarrow{OH_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \end{array}\right|\Rightarrow$

$\Rightarrow\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OH_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OH_1})\cdot\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow\overrightarrow{CH_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow CH_1\perp AB$$

(2)

Din (1) şi (2) rezultă H_1 este ortocentrul $\triangle ABC$.

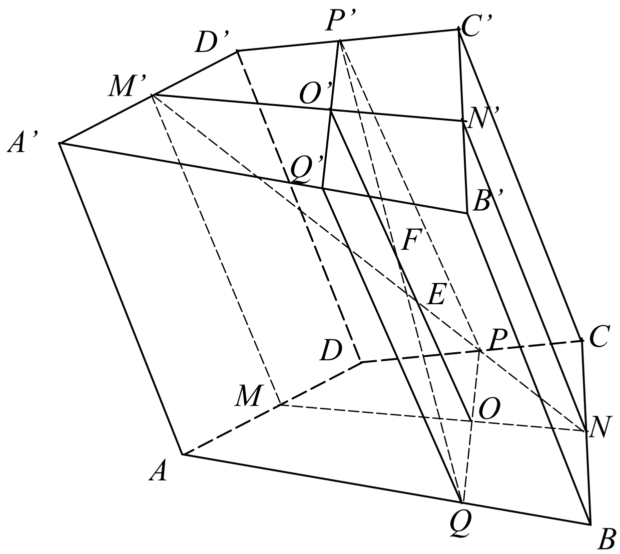
Analog, dacă $OH_2\perp(ADC)$, atunci H_2 este ortocentrul triunghiului *ADC*.

R10.1.8. Fie $[ABCDA'B'C'D']$ o prismă oblică cu baza patrulater oarecare şi fie punctele $M'\in(A'D')$, $N\in(BC)$, $P'\in(D'C')$, $Q\in(AB)$, astfel încât $\dfrac{A'M'}{A'D'}=\dfrac{BN}{BC}=x$ şi $\dfrac{D'P'}{D'C'}=\dfrac{AQ}{AB}=y$.

Să se demonstreze că dreptele $M'N$ şi $P'Q$ sunt concurente dacă şi numai dacă $x+y=1$.

Soluție. Fie punctele $M\in(AD)$, $N'\in(B'C')$, $P\in(CD)$, $Q'\in(A'B')$ astfel încât $MM'\parallel NN'\parallel PP'\parallel AA'\parallel QQ'$. Fie $\{O\}\in MN\cap PQ$ şi $\{O'\}=M'N'\cap P'Q'$.

Dreapta OO' este intersecția planelor $(MNN'M')$ şi $(PQQ'P')$. Fie $\{E\} = M'N \cap OO'$ şi fie $\{F\} = P'Q \cap OO'$. Avem $\frac{AM}{AD} = x$ şi $\frac{DP}{DC} = y$.



Se cunoaşte următoarea proprietate din geometria plană:

Fie patrulaterul ABCD şi punctele $M \in (AD)$, $N \in BC$, $P \in (CD)$, $Q \in (AB)$ *astfel încât* $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = x$ *şi* $\frac{DP}{DC} = \frac{AQ}{AP} = y$. *Fie* $\{O\} = MN \cap PQ$. *Atunci* $\frac{QO}{QP} = x$ *şi* $\frac{MO}{MN} = y$.

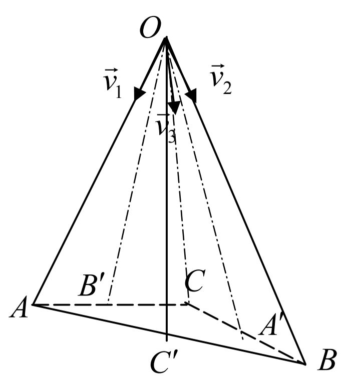
$\triangle OFQ \sim \triangle PP'Q (u-u) \Rightarrow \frac{OF}{PP'} = \frac{QO}{QP} = x \Rightarrow \frac{OF}{OO'} = x$

$\triangle EM'O' \sim \triangle NM'N' (u-u) \Rightarrow \frac{EO'}{NN'} = \frac{M'O'}{M'N'} = \frac{MO}{MN} = y \Rightarrow \frac{OE'}{OO'} = y \Rightarrow \frac{OE}{OO'} = 1 - y$

.

Dreptele $M'N$ şi $P'O$ sunt concurente $\Leftrightarrow$ $E = F \Leftrightarrow OE = OF \Leftrightarrow x = 1 - y \Leftrightarrow x + y = 1$

R10.1.9. Să se demonstreze că dacă bisectoarele a două unghiuri plane ale unui triedru sunt perpendiculare, atunci bisectoarea celui de-al treilea unghi plan este perpendiculară pe primele două bisectoare.



Soluție. Fie triedrul determinat de semidreptele $[OA$, $[OB$ şi $[OC$, $(OABC$ este un tetraedru). Pe cele trei semidrepte, considerăm vectorii unitari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ca în figura alăturată. Direcțiile bisectoarelor considerate sunt date de $\vec{v}_1 + \vec{v}_3$, $\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ şi respectiv $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$. ($[OB'$ bisectoarea unghiului

$\angle AOC$, $[OA'$ bisectoarea unghiului $\angle BOC$ iar $[OC'$ bisectoarea unghiului $\angle AOB$).

Presupunem că $OA' \perp OB'$ şi demonstrăm că $OC' \perp OA'$ şi $OC' \perp OB'$. Din

$$OA' \perp OB' \Rightarrow (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)\cdot(\vec{v}_1 + \vec{v}_3) = 0 \Rightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 + \vec{v}_1\cdot\vec{v}_3 + \vec{v}_2\cdot\vec{v}_3 + 1 = 0$$

(1)

Avem

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)\cdot(\vec{v}_1 + \vec{v}_3) = 1 + \vec{v}_1\cdot\vec{v}_3 + \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 + \vec{v}_2\cdot\vec{v}_3 \overset{(1)}{=} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \perp (\vec{v}_1 + \vec{v}_3) \Rightarrow OC' \perp OB'.$$

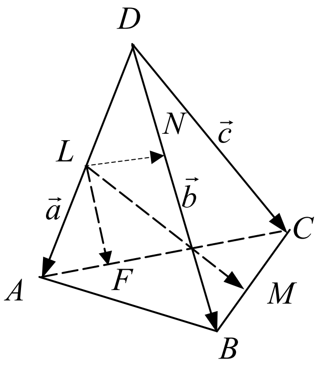
Analog $OC' \perp OA'$.

R10.1.10. Pe muchiile *DA*, *DB* şi *AC* ale unui tetraedru *DABC* se iau respectiv punctele *L*, *N*, *F* astfel încât

$$\overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

În ce raport, planul ce trece prin punctele *L*, *N*, *F* împarte muchia *BC*.

Soluție. Fie $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, şi $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Avem:



$$\overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\vec{a},\ \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\vec{b},\ \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}(-\vec{a} + \vec{c}).$$

Fie $\{M\} = (LNF) \cap BC$. Atunci punctele *L*, *F*, *M*, *N* sunt coplanare $\Leftrightarrow (\exists)\ m,n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\overrightarrow{LM} = m\cdot\overrightarrow{LF} + n\cdot\overrightarrow{LN}$$

(1)

Deoarece:

$$\overrightarrow{LF} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}(-\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c};$$

$$\overrightarrow{LN} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DN} = -\frac{1}{2}\cdot\vec{a} + \frac{1}{3}\cdot\vec{b};$$

$$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\vec{a} + (-\vec{a} + \vec{b}) + \lambda\cdot\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \lambda(-\vec{b} + \vec{c})$$

utilizând relația (1) obținem

$$-\frac{1}{2}\vec{a} + (1-\lambda)\vec{b} + \lambda\vec{c} = \frac{m}{4}(\vec{a} + \vec{c}) + n\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\vec{a}+(1-\lambda)\vec{b}+\lambda\vec{c}=\left(\frac{m}{4}-\frac{n}{2}\right)\vec{a}+\frac{n}{3}\vec{b}+\frac{m}{4}\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}=\frac{m}{4}-\frac{n}{2} \\ 1-\lambda=\frac{n}{3} \\ \lambda=\frac{m}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=4\lambda \\ n=3-3\lambda \\ -2=4\lambda-6+6\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{8}{5} \\ n=\frac{9}{5} \\ \lambda=\frac{2}{5} \end{cases}.$$

Rezultă $BM=\frac{2}{5}BC \Rightarrow \frac{BM}{BC}=\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{BM}{BM+MC}=\frac{2}{5} \Rightarrow 1+\frac{MC}{MB}=\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{MB}{MC}=\frac{2}{3}$ şi demonstraţia se încheie.

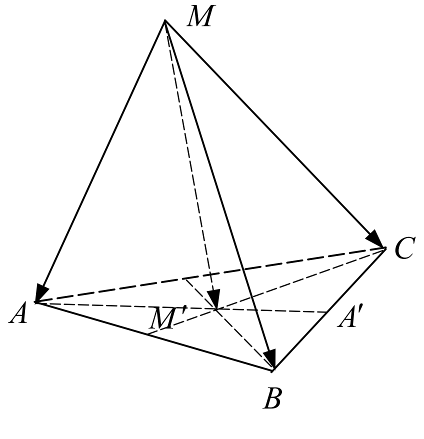
R10.1.11. Fie $MABC$ un tetraedru oarecare şi M' un punct în interiorul triunghiului ABC. Notăm $\vec{r}_X$, vectorul $\overrightarrow{MX}$ (vectorul de poziţie al punctului X în raport cu originea M). Atunci are loc relaţia

$$\vec{r}_{M'}=\frac{s_A\cdot\vec{r}_A+s_B\cdot\vec{r}_B+s_C\cdot\vec{r}_C}{s},$$

(1)

unde s_A, s_B, s_C sunt ariile triunghiurilor $BM'C$, $CM'A$, $AM'B$ respectiv ABC.

Soluţie. Avem



$$\vec{r}_{M'}=\frac{\vec{r}_A+k\cdot\vec{r}_{A'}}{1+k},\text{ unde } k=\frac{M'A}{M'A'},$$

iar $\{A'\}=AM'\cap BC$. Rezultă $k+1=\frac{AA'}{M'A'}=\frac{s}{s_A}$, deci

$$\vec{r}_{M'}=\frac{\vec{r}_A+\left(\frac{s}{s_A}-1)\right)\vec{r}_{A'}}{\frac{s}{s_A}}=\frac{s_A\cdot\vec{r}_A+(s_B+s_C)\vec{r}_{A'}}{s}$$

.

Pe de altă parte, $\vec{r}_{A'}=\frac{\vec{r}_B+k\cdot\vec{r}_C}{1+k}$, unde

$k=\dfrac{A'B}{A'C}=\dfrac{s_C}{s_B}$. Rezultă că $\vec{r}_{A'}=\dfrac{s_B\cdot\vec{r}_B+s_C\cdot\vec{r}_C}{s_B+s_C}$, deci

$$\vec{r}_{M'}=\frac{s_A\cdot\vec{r}_A+s_B\cdot\vec{r}_B+s_C\cdot\vec{r}_C}{s}.$$

R10.1.12. Fie $MABC$ un tetraedru oarecare şi M' un punct în interiorul triunghiului ABC. Notăm cu s_A, s_B, s_C, s ariile triunghiurilor $BM'C$, $CM'A$, $AM'B$ respectiv ABC. Atunci are loc relația:

$$MA^2\cdot s\cdot s_A+MB^2\cdot s\cdot s_B+MC^2\cdot s\cdot s_C-(AB^2\cdot s_A\cdot s_B+BC^2\cdot s_B\cdot s_C+CA^2\cdot s_C\cdot s_A)=$$

$$=s^2\cdot MM'^2$$

(extinderea la tetraedru a relației lui Stewart).

Soluție. Înmulțind scalar fiecare membru al relației (1) din problema precedentă cu el însuşi obținem

$$s^2MM'=s_A^2\cdot MA^2+s_B^2\cdot MB^2+s_C^2\cdot MC^2+2s_A\cdot s_B\cdot\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+$$
$$+2s_B\cdot s_C\cdot\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+2s_C\cdot s_A\cdot\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow s^2\cdot MM'^2=s_A^2\cdot MA^2+s_B^2\cdot MB^2+s_C^2\cdot MC^2+2s_A\cdot s_B\cdot MA\cdot MB\cos\alpha+$$
$$+2\cdot s_B\cdot s_C\cdot MB\cdot MC\cos\beta+2s_C\cdot s_A\cdot MC\cdot MA\cos\gamma,$$

unde $\alpha=m(\widehat{BMA})$, $\beta=m(\widehat{CMB})$, $\gamma=m(\widehat{AMC})$.

Aplicând teorema cosinusului în triunghiurile AMB, BMC şi CMA obținem:

$$s^2MM'^2=s_A^2\cdot MA^2+s_B^2\cdot MB^2+s_C^2\cdot MC^2+s_A\cdot s_B(MA^2+MB^2-AB^2)+$$
$$+s_B\cdot s_C(MB^2+MC^2-BC^2)+s_C\cdot s_A(MC^2+MA^2-AC^2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow s^2\cdot MM'^2=MA^2\cdot s_A(s_A+s_B+s_C)+MB^2\cdot s_B(s_B+s_A+s_C)+$$

$$+MC^2\cdot s_C(s_C+s_B+s_A)-(AB^2\cdot s_A\cdot s_B+BC^2\cdot s_B\cdot s_C+CA^2\cdot s_C\cdot s_A),$$

de unde, utilizând faptul că $s=s_B+s_C+s_A$ se obține relația dorită.

Observații. 1) Dacă $M'=A'$, atunci $s_A=0$, $\dfrac{s_B}{s}=\dfrac{A'C}{BC}$, $\dfrac{s_C}{s}=\dfrac{A'B}{BC}$ şi se obține relația lui Stewart în triunghiul BMC.

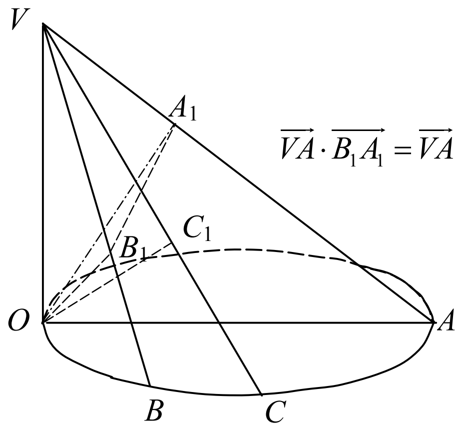
2) Relația din concluzia problemei este echivalentă cu

$$MM'^2=MA^2\frac{s_A}{s}+MB^2\frac{s_B}{s}+MC^2\frac{s_C}{s}-\left(AB^2\frac{s_A\cdot s_B}{s^2}+BC^2\frac{s_B\cdot s_C}{s^2}+CA^2\frac{s_C\cdot s_A}{s^2}\right)$$

R10.1.13. Fie B şi C două puncte arbitrare pe cercul C de diametru $[OA]$, iar V un punct arbitrar pe perpendiculara în O pe planul $(OABC)$. Notăm A_1, B_1, C_1

proiecțiile punctului O pe AV, BC respectiv CV. Să se arate că punctele O, A_1, B_1, C_1 sunt coplanare.

Soluție.



Vom arăta că $B_1A_1 \perp VA$. Pentru aceasta este suficient ca $\overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{VA} = 0$. Avem:

$$\overrightarrow{VA} \cdot \overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{VA} \cdot (\overrightarrow{VA_1} - \overrightarrow{VB_1}) = VA \cdot VA_1 - VB_1 \cdot VA \cos \widehat{BVA} =$$

$$= VO^2 - VA \cdot VB_1 \cdot \frac{VB}{VA} = VO^2 - VO^2 = 0.$$

(Am folosit teorema catetei $VO^2 = VA \cdot VA_1 = VB \cdot VB_1$ şi $VB \perp BA$, din teorema celor trei perpendiculare). În mod analog, avem $C_1A_1 \perp VA$ şi cum $OA_1 \perp VA$, va rezulta coplanaritatea punctelor O, A_1, B_1, C_1.

Bibliografie

1. *Dorin Andrica, Csaba Varga, Daniel Văcărețu, Teme de geometrie, Editura Promedia Plus, Cluj-Napoca*
2. *Dan Brânzei, Sebastian Anița, Geometrie, Editura Paralele 45*
3. *Constantin Avădanei, Neculai Avădanei, Constantin Borş, Cristina Ciurea, De la matematica elementară spre matematica superioară, Editura Academiei, Bucureşti, 1987*
4. *Mihai Cocuz, Culegere de probleme de matematică, Editura Academiei, Bucureşti, 1984*
5. *Ariana-Stanca Văcărețu, Daniel Văcărețu, O relație de tip Stewart în spațiu şi câteva aplicații, G.M. 2/2002*
6. ** * *, Revistele de matematică: G.M., R.M.T.*

11. Criterii de ireductibilitate pentru polinoame

Denumirea polinomului provine din “Elementele” lui Euclid (sec. al III – lea î.H.) (gr. *polys* (“multe”), *nomos* (parte, membru)) fiind adoptată în sensul algebrei clasice în 1691. În acest capitol polinoamele sunt polinoame cu coeficienți întregi iar în continuare vom prezenta aplicații la două criterii de ireductibilitate ale polinoamelor cu coeficienți întregi.

11.1. Criteriul lui Eisenstein şi criteriul lui Schöneman

11.1.1. Definiție: Fie $f\in\mathbf{Z}[X]$ un polinom de grad n, n ≥ 1, n$\in\mathbf{N}$. Spunem că f este *reductibil* peste $\mathbf{Z}[X]$ dacă există două polinoame $g,h\in\mathbf{Z}[X]$ de grad mai mic decât n, astfel încât $f = g\cdot h$.
În caz contrar, spunem că f este polinom *ireductibil* peste $\mathbf{Z}[X]$.

11.1.2. Propoziție: Orice polinom de gradul întâi din $\mathbf{Z}[X]$ este ireductibil peste $\mathbf{Z}[X]$.

Demonstrație: Fie $f\in\mathbf{Z}[X]$, $f= aX+b$, $a\neq 0$. Dacă f ar fi reductibil peste $\mathbf{Z}[X]$, ar exista g, $h\in\mathbf{Z}[X]$, astfel încât $f = g\cdot h$, unde grad g <1 şi grad h <1. Cum g şi h nu pot fi polinoame nule, rezultă grad$g$ = grad$h$ = 0 şi atunci obținem grad f = grad($g\cdot h$)=grad$g$+grad$h$ sau 1=0, fals. Deci polinomul f este ireductibil peste $\mathbf{Z}[X]$.

11.1.3. Criteriul lui Eisenstein:

Fie $f\in\mathbf{Z}[X]$, $f = a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$, n ≥ 1, n$\in\mathbf{N}$, $(a_0, a_1,.., a_n)=1$. Presupunem că există un număr prim p astfel încât p | a_i, $(\forall)$ i =0,1,2, …, n-1, p nu divide a_n şi p nu divide a_0. Atunci f nu se poate scrie ca produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

Demonstrație: Presupunem că $f = g\cdot h$, $g = b_0+b_1X+\ldots+b_rX^r$, $h = c_0+c_1X+\ldots+c_sX^s$, $g,h\in\mathbf{Z}[X]$. Avem $a_0 = b_0\cdot c_0$, $a_1 = b_1\cdot c_0 + b_0\cdot c_1$, $a_2 = b_2\cdot c_0 + b_1\cdot c_1 + b_0\cdot c_2$,…, $a_m=b_mc_0+b_{m-1}c_1+\ldots+ b_0c_m$. Cum p | a_0 şi p^2 | a_0 rezultă p | b_0c_0 rezultă p | b_0 şi p nu divide c_0. Din p | a_1 avem p | b_1c_0 deci p | a_2 adică p | b_2c_0 prin urmare p | b_2 . Continuând din p | a_r (r $\leq$ n-1) rezultă p | b_r deci p | b_0, contradicție.

11.1.4. Definiție : Fie $\mathbf{Z}$ mulțimea numerelor întregi şi $n\in\mathbf{N}^*$ un număr natural fixat. Pe mulțimea $\mathbf{Z}$ definim: $x\equiv y\ (\operatorname{mod} n)\Leftrightarrow (x-y)\,\vdots\, n$ (citim : *x este congruent cu y modulo n*). Prin *clasa de echivalență a lui x* în raport cu „$\equiv$” se înțelege $C(x)=\hat{x}=\{y\in \mathbf{Z} | y\equiv x \pmod n\}$. Relația de congruență modulo n pe $\mathbf{Z}$ determină mulțimea cât $\mathbf{Z}_n=\left\{\hat{0},\hat{1},\dots,\widehat{n-1}\right\}$ numită *mulțimea claselor de resturi modulo n.*

11.1.5. Criteriul de ireductibilitate al lui Schöneman

Fie $p\geq 2$ un număr prim, iar $f\in\mathbf{Z}[X]$ un polinom de forma $f = g^n + ph$, unde $g,h\in\mathbf{Z}[X]$, $n\in\mathbf{N}^*$, f având coeficientul dominant egal cu 1. Dacă $\overline{g}$ este ireductibil în $\mathbf{Z}_p[X]$ și $\overline{g}$ nu divide pe $\overline{h}$, atunci f este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

Demonstrație: Dacă $g = a_0+a_1X+a_2X^2+\dots+a_nX^n\in\mathbf{Z}[X]$, iar $p\geq 2$, p număr prim, atunci $\overline{g} = \overline{a_0}+\overline{a_1}X+\overline{a_2}X^2+\dots+\overline{a_n}X^n\in\mathbf{Z}_p[X]$, unde $\overline{a_i}$ este clasa lui a_i modulo p și se numește *polinomul redus modulo p* al lui g. Se observă că grad$h$ < n grad$g$ și g are coeficientul dominant 1. Presupunem prin absurd că polinomul f ar fi reductibil. Deci există $f_1, f_2\in\mathbf{Z}[X]$ astfel încât gradf_1, grad$f_2\geq 1$ și $f=f_1 f_2$. Trecem la polinoamele reduse modulo p și obținem $\overline{f_1}\cdot\overline{f_2}=\overline{f}=\overline{g}^{\,n}$. Cum $\overline{g}$ este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$, rezultă $\overline{f_1}=\overline{g}^{\,n_1}$, $\overline{f_2}=\overline{g}^{\,n_2}$ unde $n_1+n_2 = n$. Deci $f_1=g^{n_1}+p\,h_1$, unde $f_2=g^{n_2}+p\,h_2$, $h_1, h_2\in\mathbf{Z}[X]$, gradh_i< n_i grad$g$ (deoarece f are coeficientul dominant 1). Deci $g^n + p\,h = (g^{n_1}+p\,h_1).(g^{n_2}+ph_2)$, de unde obținem $h = g^{n_2}h_1+g^{n_1}h_2+p\,h_1h_2$. Dacă $n_1,n_2 > 0$, atunci, din ultima egalitate rezultă că $\overline{g}\cdot\overline{s}=\overline{h}$, cu $s\in\mathbf{Z}[X]$, deci g ar divide pe h, contradicție. Atunci $n_1=n$ sau $n_2=n$, adică gradf_1 = gradf_2 sau gradf_2=grad$f$, deci f este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

11.2. Aplicații ale criteriilor de ireductibilitate ale lui Eisenstein și Schöneman

11.2.1. Aplicații ale criteriului lui Eisenstein:

(1) Dacă p este un număr natural prim, atunci polinomul

$f = X^{p-1}+X^{p-2}+\dots+X+1$ este ireductibil peste $\mathbf{Z}[X]$.

Demonstrație: Dacă $f = X^{p-1}+X^{p-2}+\dots+X+1=\dfrac{X^p-1}{X-1}$ sau dezvoltând

$$X^p=1+\frac{p}{1!}(X-1)+\frac{p(p-1)}{2!}(X-2)^2+\dots+(X-1)^p$$, iar

$$f=(X-1)^{p-1}+p(X-1)^{p-2}+\frac{p(p-1)}{2!}(X-1)^{p-3}+\ldots+p$$

pe X^p

Coeficienţii $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$, $k \le p-1$ sunt divizibili prin p şi are loc criteriul lui Eisenstein.

(2) Să se arate că polinomul $f = X^n-120$, $n \geq 1$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame cu coeficienţi întregi.

Demonstraţie: Se aplică criteriul lui Eisenstein pentru $p = 3$, $a_0 = -120$, $a_1=\ldots= a_{n-1}=0$, $a_n=1$, iar $3 \mid 120$, $3 \mid 0$, 3 nu divide pe 1 şi 9 nu divide pe 120 deci f este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

11.2.2. Aplicaţii ale criteriului lui Schöneman :

(1) Fie p un număr prim de forma $p = 4k+3$, iar $a, b\in\mathbf{Z}$ astfel încât p divide pe a, p divide $(b-1)$ şi p^2 nu divide $(b-1)$. Să se arate că polinomul $f = X^{2p} + aX + b$ este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$

(L.Panaitopol, D. Ştefănescu)

Soluţie: Fie $f = (X^2+1)^p + ph$

$$h=cX+d+\frac{1}{p}\left[-\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}(X^2+1)^{p-1}+\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}(X^2+1)^{p-2}+\ldots+\begin{pmatrix} p \\ p-1 \end{pmatrix}(X^2+1)\right]$$

$c=\frac{a}{p}, d=\frac{b-1}{p}$. Atunci $f = X^2+1$ este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$ iar h nu se divide prin $g = X^2+1$ în $\mathbf{Z}[X]$ deoarece $cx+d\neq 0$ nu se divide prin $g = X^2+1$ în $\mathbf{Z}[X]$. Din criteriul lui Schöneman rezultă că f este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

(2) Să se arate că polinomul $f = (X^2+2)^n + 5(X^{2n-1}+10X^2+5)$ este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

(L.Panaitopol, D. Ştefănescu)

Soluţie: Fie $g = X^2+2$, $h = X^{2n-1}+ 10X^n + 5$ şi prin urmare $\overline{g}=X^2+2$ este ireductibil în $\mathbf{Z}_5[X]$, iar $\overline{h}=X^{2n-1}$ nu se divide prin X^2+2 în $\mathbf{Z}_5[X]$, deci, conform criteriului lui Schöneman f este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.