Cuprins

Algebră

Analiză

Coordonator **Vasile Pop**
Viorel Lupşor

MATEMATICĂ
PROGRAMA ŞCOLARA PENTRU CLASELE DE EXCELENŢA
X-XII

ARGUMENT

Studiul matematicii prin clasele de excelenţă, urmăreşte în principal crearea unui cadru organizat, în care elevii talentaţi la matematică, proveniţi din diferite medii şcolare, să poată intra în contact, şi în timp relativ scurt, să formeze un grup performant. Aceşti elevi, beneficiind de o pregătire pe măsura potenţialului lor intelectual, vor contribui ulterior la formarea unei elite româneşti în domeniul matematicii.

Realizarea unei programe pentru clasele de excelenţă, precum şi modul în care se va lucra pe această programă, constituie o noutate pentru învăţământul românesc. Din acest motiv elaborarea prezentei programe trebuie înţeleasă ca o etapă necesară unui început de drum.

Un colectiv de cadre didactice din învăţământul preuniversitar şi universitar din CRTCP Cluj, cu experienţă în domeniul pregătirii elevilor capabili de performanţe superioare, au format o echipă care a realizat programa şi manualul care conţine exerciţii şi probleme extrem de utile pentru desăvârşirea pregătirii acestor elevi.

În selectarea conţinuturilor programei s-a ţinut cont de tendinţele actuale în formularea subiectelor la concursurile şi olimpiadele şcolare, dar şi de tradiţiile şcolii româneşti de matematică. Numeroasele cărţi şi reviste adresate ″vârfurilor″ au costituit o importantă sursă bibliografică în tratarea temelor. Temele propuse constituie o extindere firească a programei analitice obligatorii de matematică şi parcurgerea lor este necesară pentru abordarea unor probleme mai dificile. Anumite teme vor fi tratate pe percursul mai multor ani de studiu (evident cu o problematică corespunzătoare) asigurându-se astfel continuitatea şi coerenţa procesului de învăţare. Mai trebuie precizat că la elaborarea programei echipa a avut în vedere faptul că matematica nu este un produs finit, ci un proces intelectual în care, pe suportul unor cunoştinţe solide, primează iniţiativa personală. Astfel, această programă oferă posibilităţi autentice de opţiune pentru profesori şi elevi.

Programa se adresează elevilor claselor X-XII şi a fost concepută pentru un număr de 2 ore/săptămână (în cele 30 de săptămâni ale anului şcolar în care se lucrează cu clasele sau grupele de excelenţă). Ca o completare la programa obligatorie de matematică, competenţelor generale le-au mai fost adăugate încă două care au rolul de a orienta demersul didactic către formarea unor ansambluri structurate de cunoştinţe generate de specificul activităţii intelectuale matematice la nivel de performanţe superioare. Programa are următoarele componente:

- competenţe generale
- competenţe specifice şi conţinuturile corelate cu acestea
- valori şi atitudini
- sugestii metodologice.

Competențe generale

1. **Folosirea corectă a terminologiei specifice matematicii în contexte variate**
2. **Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice**
3. **Utilizarea corectă a algoritmilor matematici în rezolvarea de probleme cu grade diferite de dificultate**
4. **Exprimarea şi redactarea corectă şi coerentă în limbaj formal sau în limbaj cotidian, a rezolvării sau a strategiilor de rezolvare a unei probleme**
5. **Analiza unei situații problematice şi determinarea ipotezelor necesare pentru obținerea concluziei**
6. **Generalizarea unor proprietăți prin modificarea contextului inițial de definire a problemei sau prin îmbunătățirea sau generalizarea algoritmilor**
7. **Emiterea unor judecăți de valoare pentru rezolvarea problemelor inventiv şi euristic- creative**
8. **Dobândirea unei imagini de ansamblu a matematicii elementare ca parte a unui sistem aflat în permanentă evoluție şi interacțiune cu lumea înconjurătoare**

Competenţe specifice	*Conţinuturi*
1.1. Observarea proprietăţilor matricelor de ordinul doi 1.2. Identificarea asemănărilor dintre operaţiile cu matrice şi cele cu aplicaţii liniare 2. Interpretarea unor transformări liniare (proiecţii, simetrii, rotaţii, izometrii) în limbajul algebrei prin introducerea matricelor asociate acestora 3.1. Utilizarea transformărilor elementare la calculul rangului şi inversei unei matrice 3.2. Identificarea procedeelor de ridicare la putere a unei matrice 4. Utilizarea vectorilor şi valorilor proprii ale unei matrice la găsirea unor sisteme de coordonate în care transformările iau forme mai simple 5.1. Determinarea unor matrice care satisfac anumite condiţii 5.2. Reprezentarea permutărilor în limbajul algebrei liniare şi studierea lor 6. Reducerea calculului determinanţilor de ordinul n la relaţii de recurenţă 7. Realizarea unor implicaţii între problemele tipice ale algebrei liniare şi cele propuse la concursurile şi olimpiadele şcolare 8. Conştientizarea importanţei algebrei liniare la rezolvarea problemelor din alte domenii ale matematicii	**Elemente de algebră liniară** **Matrice** • Matrice de ordinul doi • Determinarea puterilor naturale ale unei matrice de ordinul doi • Ecuaţii matriceale binome în $M_2(\mathbf{C})$ • Ecuaţii diofantice de tip Pell • Valori proprii şi vectori proprii pentru matrice pătratice • Polinom caracteristic al unei matrice pătratice • Teorema lui Cayley-Hamilton • Teorema lui Frobenius • Transformări elementare în matrice. Aplicaţii la calculul rangului şi inversei unei matrice • Matrice de ordinul II sau III ca transformări geometrice în plan şi spaţiu **Determinanţi** • Permutări • Determinanţi de ordinul n. Determinanţi speciali • Funcţii polinomiale de tip determinant

1.Observarea comportării şirurilor recurente utilizând reprezentarea grafică 2. Identificarea proprietăților caracteristice ale unui şir 3.Exprimarea termenului general al unui şir recurent liniar printr-o formulă 4.Identificarea unor situații care pot fi exprimate matematic prin şiruri recurente 5.1.Identificarea celei mai eficiente metode de calcul a limitei unui şir 5.2. Determinarea şirurilor date prin sisteme recursive şi recurențe omografice utilizând matricele 6.Reducerea şirurilor recurente neliniare la recurențe mai simple sau liniare în scopul studiului convergenței 7.Realizarea unor implicații între problemele tipice cu şiruri şi cele propuse la concursurile şi olimpiadele şcolare 8. Conştientizarea problematicii vaste puse de şiruri şi identificarea posibilităților de extindere a cercetării acestora	**Elemente de analiză matematică** **Mulțimi dense** **Şiruri de numere reale** • Subşir al unui şir • Şir fundamental. Criteriul lui Cauchy • Criterii de convergență • Criteriul lui Cesaro-Stolz • Teorema lui Toeplitz • Ordin de convergență al unui şir • Şiruri remarcabile (şirurile lui Euler, Lalescu, Wallis, Stirling etc.) • Limite de şiruri definite implicit • Şiruri având mulțimea termenilor finită • Şiruri de sume • Şiruri recurente (recurențe liniare, recurențe omografice, recurențe definite de funcții monotone, sisteme recursive etc.)
1. Observarea şi descrierea proprietăților unei funcții cu proprietatea Darboux 2. Interpretarea unor proprietăți şi teoreme referitoare la funcții continue şi derivabile cu ajutorul reprezentărilor grafice 3. Utilizarea funcțiilor continue şi derivabile în calculul limitelor unor şiruri 4. Transpunerea în limbajul analizei matematice a proprietăților unor funcții (proprietatea Darboux, convexitate etc.) 5.1. Identificarea celei mai potrivite metode de rezolvare a unei inecuații şi de stabilire a unor inegalități 5.2. Aproximarea unor funcții cu ajutorul dezvoltării în serie Taylor 6. Realizarea de transferuri între analiza matematică pe de o parte şi geometrie şi algebră pe de altă parte prin rezolvarea de probleme de existență, ecuații transcendente şi funcționale	**Funcții continue şi derivabile** • Proprietatea lui Darboux • Aplicații ale teoremelor fundamentale: Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy • Funcții convexe • Polinoamele Taylor asociate unor funcții **Aplicații ale analizei matematice** • Probleme de existență în geometrie • Ecuații transcendente • Ecuații funcționale **Contraexemple în analiza matematică**

7. Realizarea unor implicații între problemele tipice ale calculului diferențial şi cele propuse la concursurile şi olimpiadele şcolare 8.1. Conştientizarea importanţei analizei matematice în rezolvarea problemelor altor domenii ale matematicii şi a unor probleme cu conținut practic 8.2. Realizarea de conexiuni între diferite concepte ale analizei matematice prin exemple şi contraexemple 8.3. Analiza contraexemplelor analizei matematice ca prim pas în formularea de noi rezultate şi teoreme	

VALORI ŞI ATITUDINI

Noul curriculum şcolar pentru clasele de excelență propus la matematică are în vedere formarea la elevi a următoarelor valori şi atitudini în plus față de cele specificate prin curriculumul şcolar obligatoriu :

- Manifestarea unor opinii competente cu privire la abordarea problemelor intuitiv şi euristic-creative bazate pe explorare, inspirație şi invenție
- Dezvoltarea unei gândiri reflexive, independente, flexibilă şi abstractă specifică matematicii
- Interesul pentru modul de dezvoltare a ideilor şi rezultatelor matematice
- Curiozitatea față de noile deschideri din domeniul matematicii

SUGESTII METODOLOGICE

Prin prezentul curriculum pentru clasele de excelență se intenționează ca, pe parcursul liceului, elevii să dobândească competenţe şi să-şi structureze un set de valori şi atitudini specifice pregătirii de înaltă performanță. Acestea se regăsesc în următoarele aspecte ale învățării, vizate de practica pedagogică :

- Analizarea şi elaborarea unui plan de rezolvare pentru problemele atipice şi/sau dificile din domeniile studiate
- Formarea obişnuinței de a formula probleme şi situații problemă
- Analiza unei probleme din punct de vedere al ideii centrale
- Reparcurgerea căii de rezolvare a problemei pentru a obține un rezultat mai bun, ameliorat sau optimizat printr-o reproiectare creativă
- Identificarea unor metode de lucru valabile pentru clase de probleme

- Inițeirea şi realizarea creativă a unei investigații pornind de la tematica propusă
- Formarea deprinderii de a anticipa rezultate matematice pornind de la datele existente
- Formarea obişnuinței de a face conexiuni intra şi interdisciplinare

Acest curriculum are drept obiectiv ca fiecare elev capabil de performanțe superioare să-şi poată dezvolta competențele într-un ritm individual, de a-şi transfera cunoştințele acumulate dintr-o zonă de studiu în alta. Pentru aceasta se recomandă următoarele activități :

- Alternarea prezentării conținuturilor, cu moduri variate de antrenare a gândirii
- Solicitarea de frecvente corelații intra şi interdisciplinare
- Punerea elevului în situația ca el însuşi să formuleze sarcini de lucru adecvate
- Obținerea de soluții sau interpretări variate pentru aceeaşi unitate informațională
- Prevederea de sarcini rezolvabile prin activitatea în grup
- Utilizarea unor softuri educaționale

Având în vedere specificul claselor de excelență, metodele folosite in practice instructiv-educativă vizează următoarele aspecte:

- Utilizarea strategiilor euristice, care lasăelevul să-şi asume riscul incertitudinii, al încercării şi erorii, specifice investigației ştiințifice
- Utilizarea strategiilor creative, care lasă elevul să se afirme în planul originalității, spontaneității, diversității şi care pun accentul pe capacitatea de reflecție, sinteză, evaluare critică şi creație
- O îmbinare şi o alternanță sistematică a activității bazate pe efort individual cu cele care solicită efort colectiv
- Însuşirea unor metode de informare şi de documentare independentă, care oferă deschiderea spre autoinstruire şi spre învățarea continuă

ALGEBRĂ LINIARĂ

1. Matrice de ordinul doi şi aplicaţii

1.1. Matrice de ordinul doi

Definiţie 1.1.1. Prin matrice de ordinul doi înţelegem un tablou cu două linii şi două coloane, de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{unde}$$

numerele a_{ij} (i,j $\in \{1,2\}$) se numesc **elementele matricei *A*.**

Sistemul ordonat de elemente (a_{11}, a_{22}) se numeşte **diagonala principală** a matricei *A*, iar sistemul ordonat de elemente (a_{12}, a_{21}) se numeşte **diagonala secundară**.

Observaţie 1.1.2. Pentru matricea *A* se mai foloseşte notaţia: $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,2\}}$.

Mulţimea matricelor de ordinul doi ale căror elemente sunt numere complexe o notăm cu $M_2(\mathbf{C})$. În această mulţime, distingem următoarele submulţimi:

$$M_2(\mathbf{Z}) \subset M_2(\mathbf{Q}) \subset M_2(\mathbf{R}) \subset M_2(\mathbf{C}).$$

Definiţie 1.1.3. Spunem că matricele $A,B \in M_2(\mathbf{C})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ sunt **egale şi** scriem A=B, dacă $a_{ij}=b_{ij}$ pentru fiecare i,j$\in \{1,2\}$.

Definiţie 1.1.4. Dacă A,B$\in M_2(\mathbf{C})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, atunci prin **suma matricelor** A şi B înţelegem matricea $C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$.

Proprietăţi 1.1.5. (ale adunării matricelor):

a) $A + B = B + A,\ \forall A, B \in M_2(\mathbf{C})$.

b) $(A + B) + C = A + (B + C),\ \forall A, B, C \in M_2(\mathbf{C})$.

c) Matricea $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (toate elementele sunt egeale cu 0) se numeşte **matricea zero** şi are proprietatea $A + O_2 = O_2 + A = A,\ \forall A \in M_2(\mathbf{C})$.

d) $\forall A \in M_2(\mathbf{C})$, există $-A \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $A + (-A) = (-A) + A = O_2$. Dacă $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,2\}}$, atunci $-A = (-a_{ij})_{i,j\in\{1,2\}}$.

Definiție 1.1.6. Dacă A, $B \in M_2(\mathbf{C})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, atunci prin **produsul** $A \cdot B$ înțelegem matricea: $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$.

Cu alte cuvinte, elementul din linia i şi coloana j a matricei produs se obține făcând suma produselor elementelor din linia i ale matricei A cu elementele coloanei j ale matricei B, unde $i,j \in \{1,2\}$.

Observație 1.1.7. În general $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Exemplu 1.1.8. :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-5)+(-2)\cdot 7 & 1\cdot 6+(-2)\cdot(-8) \\ (-3)\cdot(-5)+4\cdot 7 & (-3)\cdot 6+4\cdot(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 22 \\ 43 & -50 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-5)\cdot 1+6\cdot(-3) & (-5)\cdot(-2)+6\cdot 4 \\ 7\cdot 1+(-8)\cdot(-3) & 7\cdot(-2)+(-8)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 34 \\ 31 & -46 \end{pmatrix}.$$

Proprietăți 1.1.9. (ale înmulțirii matricelor):

a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, $\forall A, B, C \in M_2(\mathbf{C})$.

b) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ şi $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $\forall A, B, C \in M_2(\mathbf{C})$.

c) Matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (care are pe diagonala principală numai 1 iar restul elementelor sunt 0) se numeşte **matricea unitate** şi are proprietatea $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$, $\forall A \in M_2(\mathbf{C})$.

Observație 1.1.10.: Deoarece înmulțirea matricelor verifică proprietatea a), putem defini **puterile** lui $A \in M_2(\mathbf{C})$, astfel: $A^0 = I_2$ (dacă $A \neq O_2$), $A^1 = A, A^2 = A \cdot A, A^3 = A^2 \cdot A, \ldots, A^n = A^{n-1} \cdot A, n \in \mathbf{N}^*$.

Definiție 1.1.11.: Prin produsul matricei $A \in M_2(\mathbf{C})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ cu numărul $\lambda \in \mathbf{C}$, înțelegem matricea $B = \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$.

Cum în mulțimea numerelor complexe întâlnim formule de calcul prescurtat, de exemplu $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, care are loc $\forall x, y \in \mathbf{C}$, tot aşa în M_2 ($\mathbf{C}$) întâlnim formule cu matrice, dar cu condiția ca matricele să comute între ele. Astfel, dacă $A, B \in M_2(\mathbf{C})$ şi $A \cdot B = B \cdot A$, $m,n \in \mathbf{N}^*$, atunci:

a) $A^m \cdot B^n = B^n \cdot A^m$;

b) $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + ... + AB^{n-2} + B^{n-1})$;

c) $A^{2n+1} + B^{2n+1} = (A+B)(A^{2n} - A^{2n-1}B + ... - AB^{2n-1} + B^{2n})$;

d) $(A+B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1}B + ... + C_n^{n-1} AB^{n-1} + B^n$.

Definiție 1.1.12.: Prin **transpusa** matricei $A \in M_2(\mathbf{C})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, înțelegem matricea

$$^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Matricea ^tA se obține din matricea A, luând liniile (respectiv coloanele) lui A, drept coloane (respectiv linii) pentru ^tA.

Proprietăți 1.1.13.: Dacă $A, B \in M_2(\mathbf{C})$ şi $\alpha \in \mathbf{C}$, atunci:

a) $^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$;

b) $^t(\alpha A) = \alpha\, {}^tA$;

c) $^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

Observație 1.1.14.: Prin inducție matematică se poate demonstra că:

$^t(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = {}^tA_n \cdot {}^tA_{n-1} \cdot ... \cdot {}^tA_2 \cdot {}^tA_1$, $\forall A_k \in M_2(\mathbf{C})$, $k = \overline{1,n}, n \in \mathbf{N}^*$.

Definiție 1.1.15.: O matrice $A \in M_2(\mathbf{C})$ se numeşte **simetrică** dacă $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\ i,j \in \{1,2\}$, adică $A = {}^tA$. Mulțimea matricelor simetrice cu elemente din **C** se notează cu $\boldsymbol{S}_2(\mathbf{C})$.

Definiței 1.1.16.: O matrice $A \in M_2(\mathbf{C})$ se numeşte **antisimetrică** dacă $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall\ i,j \in \{1,2\}$, adică $A = -{}^tA$. Mulțimea matricelor antisimetrice cu elemente din **C** se notează cu $\mathcal{A}_2(\mathbf{C})$.

Observație 1.1.17.: $\forall$ M $\in M_2(\mathbf{C})$, $\exists\ S \in \mathcal{S}_2(\mathbf{C})$, $A \in \mathcal{A}_2(\mathbf{C})$ (unice) astfel încât M = $S + A$.

Definiție 1.1.18.: Dacă $A \in M_2(\mathbf{C})$, $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,2\}}$, atunci **conjugata** matricei A este matricea $\overline{A} = (\overline{a_{i,j}})_{i,j\in\{1,2\}}$, iar **adjuncta** matricei A este matricea $A^* = {}^t(\overline{A})$.

Definiție 1.1.19.: Dacă $A \in M_2(\mathbf{C})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, atunci prin **urma matriei** ***A*** înțelegem nămărul
$Tr(A) = a_{11} + a_{22}$ (suma elementelor de pe diagonala principală).

Proprietăți 1.1.20. Dacă $A, B \in M_2(\mathbf{C})$ şi $\alpha \in \mathbf{C}$, atunci:

a) $Tr\,(A + B) = Tr\,(A) + Tr\,(B)$,
b) $Tr\,(\alpha A) = \alpha\, Tr\,(A)$,
c) $Tr\,(AB) = Tr\,(BA)$,
d) $Tr\,(A) = Tr\,({}^tA)$

Observație 1.1.21.: $Tr\,(AB) \neq Tr\,(A) \cdot Tr\,(B)$.

Definiție 1.1.22.: Dacă $A \in M_2(\mathbf{C})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, atunci numărul $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se numeşte **determinantul matricei** ***A***.

Proprietăți 1.1.23.:

a) $\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, $\forall\ A, B \in M_2(\mathbf{C})$;
b) $\det (A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \ldots \cdot \det A_n$, $\forall\ A_k \in M_2(\mathbf{C})$, $k = \overline{1,n}, n \in \mathbf{N}^*$;
c) $\det (A^n) = (\det A)^n$, $\forall\ A \in M_2(\mathbf{C})$ şi $n \in \mathbf{N}^*$;
d) $\det ({}^tA) = \det A$, $\forall\ A \in M_2(\mathbf{C})$;

e) $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det A$, $\forall A \in M_2(\mathbf{C})$ şi $\lambda \in \mathbf{C}$;

Observaţie 1.1.24.: $\det(-A) = \det A$.

Definiţie 1.1.25.: Dacă $A \in M_2(\mathbf{C})$ şi $\det A = 0$, atunci matricea A se numeşte **singulară**, iar dacă $\det A \neq 0$ matricea A se numeşte **nesingulară**.

Mulţimea matricelor pătratice de ordinul doi nesingulare, se notează cu $GL_2(\mathbf{C})$.

Definiţie 1.1.26.: Spunem că matricea $A \in M_2(\mathbf{C})$ este **inversabilă** dacă există $B \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât
$A \cdot B = B \cdot A = I_2$.

Matricea B se numeşte inversa matricei A şi se notează cu A^{-1}. (Dacă există B ea este unică).

Teoremă 1.1.27: Matricea $A \in M_2(\mathbf{C})$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$ (adică $A \in GL_2(\mathbf{C})$).

Formulă 1.1.28.: Dacă $A \in M_2(\mathbf{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, este inversabilă, atunci $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A_*$, unde $A_* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ şi se numşte **matrice reciprocă**.

Observaţie 1.1.29.: O neconcordanţă între manualele vechi de algebră şi literatura de specialitate este modul de notare a matricei reciproce (greşit numită adjunctă).

Proprietăţi 1.1.30.: Dacă $A, B \in M_2(\mathbf{C})$ sunt inversabile şi $\lambda \in \mathbf{C}^*$, atunci:

a) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$,

b) $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$,

c) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$,

d) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

Observaţie 1.1.31.: Prin inducţie matematică se poate arăta că $(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$, unde $A_k \in M_2(\mathbf{C})$, $k = \overline{1,n}, n \in \mathbf{N}^*$, sunt matrice inversabile.

Definiție 1.1.32.: Matricea $A \in$ GL$_2$(**C**) se numește **ortogonală** dacă ${}^tA = A^{-1}$ iar matricea $A \in$ GL$_2$(**R**) se numește **unitară** dacă $A^* = A^{-1}$.

Definiție 1.1.33.: Matricele A, $B \in M_2(\mathbf{C})$ sunt **asemenea** dacă există $C \in$ GL$_2$(**C**) astfel încât $B = C^{-1}AC$. Se notează $A \sim B$.

Definiție 1.1.34.: Matricele A, $B \in M_2(\mathbf{C})$ sunt **echivalente** dacă există C, $D \in$ GL$_2$(**C**) astfel încât
$A = CBD$. Se notează $A \approx B$.

1.2. Teorema lui Cayley-Hamilton

Definiție 1.2.1.: Fie $A \in M_2(\mathbf{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ecuația $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det A = 0$, unde $Tr(A) = a + d$ (urma matricei A) iar $\det A = ad - bc$, se numește **ecuația caracteristică** a matricei A, iar rădăcinile ecuației se numesc **valori proprii**.

Teoremă 1.2.2. (Cayley-Hamilton)

Orice matrice pătratică verifică propria sa ecuație caracteristică, adică $A^2 - Tr(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$,

unde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$.

Demonstație: Cum $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ d(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$, se verifică imediat că egalitatea are loc.

Consecința 1.2.3. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$ și $\det A = ad - bc = 0$, atunci $A^n = (Tr\,A)^{n-1} \cdot A$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

Demonstrație: Deoarece $\det A = ad - bc = 0$, din teorema lui Cayley – Hamilton, rezultă că $A^2 - Tr(A) \cdot A = O_2$, de unde obținem $A^2 = Tr(A) \cdot A$ și

$$A^3 = A^2 \cdot A = (TrA) \cdot A \cdot A = (TrA) \cdot (TrA) \cdot A = (TrA)^2 \cdot A.$$

Prin inducție matematică rezultă că $A^n = (TrA)^{n-1} \cdot A, \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq 2$.

Consecința 1.2.4. Dacă $A \in M_2(\mathbf{C})$ şi $Tr\,(A) = 0$, atunci

$$A^n = \begin{cases} (-\det A)^k \cdot I_2, n = 2k, k \in \mathrm{N}^* \\ (-\det A)^k \cdot A, n = 2k+1, k \in \mathrm{N} \end{cases}.$$

Demonstrație: Din teorema lui Cayley – Hamilton rezultă $A^2 + (\det A)I_2 = O_2$, deci $A^2 = (-\det A)\cdot I_2$ şi prin inducție matematică pentru n par sau impar rezultă afirmația din enunț.

Consecința 1.2.5. Fie $A \in M_2(\mathbf{C})$. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $A^2 = O_2$;

b) Există $n \in \mathbf{N},\ n \geq 2$ astfel încât $A^n = O_2$.

Demonstrație:

a) $\Rightarrow$ b) Evident (există $n = 2$ astfel încât $A^2 = O_2$);

b) $\Rightarrow$ a) Dacă există $n \in \mathbf{N},\ n \geq 2$ astfel încât $A^n = O_2$, atunci $(\det A)^n = 0$, de unde $\det A = 0$ şi, conform consecinței 1.3.3., rezultă $O_2 = A^n = (TrA)^{n-1}\cdot A$, de unde $A = O_2$ sau $Tr\,A = 0$.

Dacă $A = O_2$, atunci $A^2 = O_2$.

Dacă $Tr\,A = 0$, din teorema lui Cayley – Hamilton, obținem $A^2 = O_2$.

1.3. Determinarea puterilor naturale ale unei matrice de ordinul doi

În continuare, ne propunem să găsim un procedeu pentru ridicarea unei matrice de ordinul doi la puterea n, $n \in \mathbf{N}^*$.

Teorema 1.3.1. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$ şi ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0,$$ are rădăcinile reale λ_1, λ_2, atunci există matricele $B,\ C \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât:

$$(1) \qquad A^n = \begin{cases} \lambda_1^n \cdot B + \lambda_2^n \cdot C, \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \lambda_1^n \cdot B + n\cdot\lambda_1^{n-1}\cdot C, \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}.$$

Demonstrație: Evident, matricea A verifică relația $A^2 - TrA \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$, unde $Tr(A) = a + d$ şi $\det A = ad - bc$. Înmulțind relația de mai sus cu A^{n-1}, obținem $A^{n+1} - TrA \cdot A^n + \det A \cdot A^{n-1} = O_2$, de unde

(*) $\qquad A^{n+1} = TrA \cdot A^n - \det A \cdot A^{n-1}$.

Considerând $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ şi ținând cont de relația (*), obținem:

$$a_{n+1} = Tr(A)a_n - \det A \cdot a_{n-1}$$
$$b_{n+1} = Tr(A)b_n - \det A \cdot b_{n-1}$$
$$c_{n+1} = Tr(A)c_n - \det A \cdot c_{n-1}$$
$$d_{n+1} = Tr(A)d_n - \det A \cdot d_{n-1}, n \geq 2.$$

Deci, toate şirurile verifică aceeaşi relație de recurență: $x_{n+1} = Tr(A) \cdot x_n - \det A \cdot x_{n-1}, n \geq 2$.

Ecuația caracteristică fiind $\lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det A = 0$, cu rădăcinile presupuse reale, rezultă:

- dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, obținem $x_n = \alpha_x \lambda_1^n + \beta_x \lambda_2^n$, unde $\alpha_x, \beta_x \in \mathbf{C}$.

Deci $a_n = \alpha_a \lambda_1^n + \beta_a \lambda_2^n$
$b_n = \alpha_b \lambda_1^n + \beta_b \lambda_2^n$
$c_n = \alpha_c \lambda_1^n + \beta_c \lambda_2^n$
$d_n = \alpha_d \lambda_1^n + \beta_d \lambda_2^n$, adică

există matricele B, $C \in M_2(\mathbf{C})$, $B = \begin{pmatrix} \alpha_a & \alpha_b \\ \alpha_c & \alpha_d \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \beta_a & \beta_b \\ \beta_c & \beta_d \end{pmatrix}$ astfel încât $A^n = \lambda_1^n B + \lambda_2^n C$.

- dacă $\lambda_1 = \lambda_2$, obținem $x_n = \alpha_x \lambda_1^n + \beta_x n \lambda_1^{n-1}$, unde $\alpha_x, \beta_x \in \mathbf{C}$.

Deci $a_n = \alpha_a \lambda_1^n + \beta_a n \lambda_1^{n-1}$
$b_n = \alpha_b \lambda_1^n + \beta_b n \lambda_1^{n-1}$
$c_n = \alpha_c \lambda_1^n + \beta_c n \lambda_1^{n-1}$
$d_n = \alpha_d \lambda_1^n + \beta_d n \lambda_1^{n-1}$, adică

există matricele B, $C \in M_2(\mathbf{C})$, $B = \begin{pmatrix} \alpha_a & \alpha_b \\ \alpha_c & \alpha_d \end{pmatrix}$, $C = n\begin{pmatrix} \beta_a & \beta_b \\ \beta_c & \beta_d \end{pmatrix}$ astfel încât $A^n = \lambda_1^n B + \lambda_1^{n-1} \cdot n \cdot C$.

În concluzie, orice matrice de ordinul doi de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pentru care ecuația $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$ are rădăcinile reale λ_1, λ_2, se poate pune sub forma din teoremă, unde matricele *B* şi *C* se determină, practic, din relația (1), făcându-l pe *n* egal cu 1 şi apoi egal cu 2.

Teoremă 1.3.2. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$, atunci pentru orice număr natural $n \in \mathbf{N}^*$, există două şiruri de numere complexe $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_{2,} \forall n \geq 1$.

Demonstrație: Folosim metoda inducției matematice.

Pentru *n* = 1, proprietatea este adevărată, deoarece există $x_1 = 1, y_1 = 0$ astfel încât $A = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2$.

Pentru n = 2, există $x_2 = a + d = Tr(A)$ şi $y_2 = -(ad - bc) = -\det A$, astfel

încât $A^2 = (a+d)A - (ad - bc)I_2$.

Presupunem proprietatea adevărată pentru un număr natural $n \geq 1$, adică $\exists\ x_n, y_n \in \mathbf{C}$ astfel încât $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$. Atunci, obținem:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = (x_n \cdot A + y_n \cdot I_2) \cdot A = x_n \cdot A^2 + y_n \cdot A = x_n(x_2 \cdot A + y_2 \cdot I_2) + y_n A =$$

$$= (x_2 \cdot x_n + y_n) \cdot A + x_n \cdot y_2 \cdot I_2 = x_{n+1} \cdot A + y_{n+1} \cdot I_2,$$

unde (1) $x_{n+1} = x_2 x_n + y_n = (TrA)x_n + y_n$ şi (2) $y_{n+1} = y_2 x_n = -\det A \cdot x_n$. Deci, $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_{2,} \forall n \geq 1$.

Din relațiile (1) şi (2) rezultă x_n şi y_n. Astfel, din (2) rezultă $y_n = -\det A \cdot x_{n-1}$, care înlocuit în (1), obținem $x_{n+1} - TrA \cdot x_n + \det A \cdot x_{n-1} = 0$, care are ecuația caracteristică $\lambda^2 - TrA\lambda + \det A = 0$. Dacă ecuația de mai sus are rădăcini reale, atunci

$x_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$, dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$ şi

$x_n = \alpha\lambda_1^n + \beta n \lambda_1^{n-1}$ dacă $\lambda_1 = \lambda_2$,

după care rezultă expresia lui y_n.

1.4. Determinarea şirurilor date prin sisteme recursive, recurente omografice şi ecuaţii diofantice de tip Pell

1.4.1. Determinarea şirurilor date prin sisteme recursive

Fie şirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ definite prin sistemul de relaţii de recurenţă:

(1) $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}$, unde $n \in \mathbf{N}$ iar *a, b, c, d,* x_0, y_0 sunt numere reale date.

Sistemul (1) poate fi scris sub formă matriceală astfel:

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ sau (2) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \forall n \geq 0$, unde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Dând , în relaţia (2), lui n valorile 0,1,2,...,n-1 obţinem:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \ldots = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Deci $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \forall n \geq 0$ şi problema revine acum la aflarea formei generale a lui A^n.

Observaţii 1.4.2.:

1. Dacă $\Delta = (TrA)^2 - 4\det A \leq 0$, atunci metoda expusă aici devine eficientă pentru aflarea şirurilor $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$;
2. Pentru a calcula A^n se poate folosi ecuaţia caracteristică:

$$A^2 - TrA \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2,\ A \in M_2(\mathbf{R}).$$

1.4.3. Determinarea şirurilor date prin recurenţe omografice

Definiţie 1.4.4.: Funcţia *f*: **R** - $\left\{-\frac{d}{c}\right\} \to$ **R**, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, *a, b, c, d* $\in$ **R**, $c \neq 0$, se numeşte **funcţie omografică**, iar $M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se numeşte **matricea ataşată funcţiei** *f*.

Proprietate 1.4.5.: Dacă f şi g sunt funcţii omografice, atunci pe mulţimea $\mathbf{D}\subset\mathbf{R}$ pe care sunt definite funcţiile $f\circ g$ şi $f^n = \underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{n\ ori}, n\in\mathbf{N}^*$, funcţiile $f\circ g$ şi f^n sunt omografice şi avem relaţiile:

$$M_{f\circ g} = M_f\cdot M_g,$$

$$M_{f^n} = (M_f)^n, n\in\mathbf{N}^*.$$

Demonstraţie:

Fie f: **R** - $\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}\to$ **R,** g: **R** - $\left\{-\dfrac{d'}{c'}\right\}\to$ **R,** $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}, g(x)=\dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}$ funcţii omografice şi $M_f=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $M_g=\begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}$ matricele ataşate celor două funcţii.

Atunci, pe mulţimea $\mathbf{D}\subset\mathbf{R}$, pe care există compunerea $f\circ g$, avem:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{ag(x)+b}{cg(x)+d}=\frac{a\cdot\dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}+b}{c\cdot\dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}+d}=\frac{(aa'+bc')x+ab'+bd'}{(ca'+dc')x+cb'+dd'},$$

tot o funcţie omografică şi

$$M_{f\circ g}=\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd'\\ ca'+dc' & cb'+dd'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}=M_f\cdot M_g.$$

Egalitatea a doua se demonstrează prin inducţie matematică.

Definiţie 1.4.6.: Un şir recurent definit printr-o recurenţă de forma $x_{n+1}=f(x_n)$, unde f este o funcţie omografică, se numeşte **recurenţă omografică**.

Observaţia 1.4.7.: Ca recurenţa să definească un şir e necesar ca $cx_n+d\neq 0, \forall n\in\mathbf{N}$.

Proprietate 1.4.8.: Dacă $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\geq 0$, atunci

$$x_n=f^n(x_0), \text{ unde } f^n(x_0)=(\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{n\ ori})(x_0)$$

Demonstrație:

Pentru demonstrație se folosește metoda inducției matematice.

Într-adevăr, fie f: **R** - $\left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to$ **R,** $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Dacă $x_{n+1} = f(x_n)$, rezultă $x_{n+1} = \dfrac{ax_n + b}{cx_n + d}, \forall n \geq 0$ și atunci $x_1 = f(x_0) = \dfrac{ax_0 + b}{cx_0 + d}$, adică lui x_1 i se atașează matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, iar

$$x_2 = f(x_1) = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = \frac{a \cdot \dfrac{ax_0 + b}{cx_0 + d} + b}{c \cdot \dfrac{ax_0 + b}{cx_0 + d} + d} = \frac{(a^2 + bc)x_0 + b(a+d)}{c(a+d)x_0 + bc + d^2} \text{ și}$$

$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$, adică lui x_2 i se atașează matricea A^2.

Presupunând că lui $x_n = \dfrac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n}$ i se asociază matricea $A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, avem

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{ax_n + b}{cx_n + d} = \frac{a \cdot \dfrac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n} + b}{c \cdot \dfrac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n} + d} = \frac{(aa_n + bc_n)x_0 + (ab_n + bd_n)}{(ca_n + dc_n)x_0 + (cb_n + dd_n)} \text{ și}$$

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_n + bc_n & ab_n + bd_n \\ ca_n + dc_n & cb_n + dd_n \end{pmatrix},$$

obținem că lui x_{n+1} i se asociază matricea A^{n+1}.

Rezultă că $x_n = \dfrac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n}$ și căruia i se asociază matricea $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$.

Deci, pentru a calcula pe x_n în funcție de x_0, este suficient să calculăm pe A^n.

Observație 1.4.9.: Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ poate fi definit cu anumite condiții asupra teremnului inițial x_0. Din expresiile matricei A^n deducem condițiile de existență a şirului recurent $c_n x_0 + d_n \neq 0, \forall n \in \mathbf{N}$ sau

$$x_0 \neq -\frac{d_n}{c_n}, n \in \mathbf{N}.$$

Se determină mulțimea $S = \left\{ -\frac{d_n}{c_n} \middle| n \in N \right\}$ şi atunci condiția este $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{S}$.

1.4.10. Ecuații diofantice de tip Pell

Fie $d \in \mathbf{N}$, $d \geq 2$ un număr liber de pătrate ($\sqrt{d} \notin \mathbf{Q}$).

Definiție 1.4.11.: Ecuația diofantică $P: x^2 - dy^2 = 1$, unde $x, y \in \mathbf{Z}$ se numeşte **ecuația lui Pell**.

În cele ce urmează vom rezolva în numere întregi ecuația lui Pell.

Observație 1.4.12.:

1). Perechile (–1, 0), (1, 0) sunt soluții ale ecuație P şi se numesc **soluții banale**.

2). Dacă (x, y) este soluție a ecuației P, atunci şi $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ sunt soluții ale ecuației.

Deci, pentru a rezolva ecuația lui Pell, este sufficient să-i aflăm soluțiile în mulțimea numerelor naturale $\left((x, y) \in \mathbf{N} \text{ x } \mathbf{N}, (x, y) \neq (1,0)\right)$.

Fie perechea $(x, y) \in \mathbf{N}$ x $\mathbf{N}$ căreia îi ataşăm matricea $A_{x,y} = \begin{pmatrix} x & dy \\ y & x \end{pmatrix}$ pentru care $\det A_{x,y} = x^2 - dy^2 = 1$. Dacă notăm cu S_P mulțimea soluțiilor ecuației lui Pell, atunci $(x, y) \in S_P$ dacă şi numai dacă $\det A_{x,y} = 1$, iar $(x, y) \neq (1,0)$ dacă şi numai dacă $A_{x,y} \neq I_2$.

Dacă $(x_0, y_0) \in S_P$, $(x_0, y_0) \neq (1,0)$, atunci $\det A_{x_0,y_0} = 1$, de unde rezultă $\det A^n_{x_0,y_0} = 1$.

Fie $A^n_{x_0,y_0} = \begin{pmatrix} x_n & dy_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$ cu $x_n^2 - dy_n^2 = 1$ şi dacă $A^{n+1}_{x_0,y_0} = \begin{pmatrix} x_{n+1} & dy_{n+1} \\ y_{n+1} & x_{n+1} \end{pmatrix}$, atunci

$$A^{n+1}_{x_0,y_0} = A^n_{x_0,y_0} \cdot A_{x_0,y_0} = \begin{pmatrix} x_n & dy_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 & dy_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0x_n + dy_0y_n & d(y_0x_n + x_0y_n) \\ y_0x_n + x_0y_n & x_0x_n + dy_0y_n \end{pmatrix}$$

iar

$$\det A^{n+1}_{x_0,y_0} = \det(A^n_{x_0,y_0} \cdot A_{x_0,y_0}) = \det A^n_{x_0,y_0} \cdot \det A_{x_0,y_0} = 1 .$$

Rezultă $x_{n+1} = x_0x_n + dy_0y_n$

$y_{n+1} = y_0x_n + x_0y_n$ sau

(1) $x_n = x_0x_{n-1} + dy_0y_{n-1}$

(1') $y_n = y_0x_{n-1} + x_0y_{n-1}, n \geq 1$, cu x_0, y_0 daţi astfel încât $(x_0, y_0) \neq (1,0)$.

Dacă $(x_0, y_0) \in$ **N** x **N**, atunci şi $(x_n, y_n) \in$ **N** x **N**, cu alte cuvinte, dacă (x_0, y_0) este soluţie a ecuaţiei Pell, atunci şi (x_n, y_n) este soluţie a ecuaţiei Pell.

Relaţiile de recurenţă (1) şi (1') pot fi scrise marticeal

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & dy_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \text{ sau}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & dy_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$ iar de aici, folosind ecuaţia caracteristică pentru aflarea lui $\begin{pmatrix} x_0 & dy_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}^n$, rezultă:

$$(*) \quad \begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^{n+1} + \left(x_0 - y_0\sqrt{d}\right)^{n+1}\right] \\ y_n &= \frac{1}{2\sqrt{d}}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^{n+1} - \left(x_0 - y_0\sqrt{d}\right)^{n+1}\right], n \geq 0, \end{aligned}$$

şi luând soluţia (x_0, y_0) minimă nebanală (cu x_0 minim dacă şi numai dacă y_0 minim) obţinem că

$$S_P \subset \{(-1,0),(1,0),(x_n, y_n),(-x_n, y_n),(x_n,-y_n),(-x_n,-y_n)\} = S .$$

Vom arăta reciproca, $S \subset S_P$.

Dacă $(x, y) \in S \cap$ **N** x **N,** $(x, y) \neq (1,0)$, definim $B = A_{x,y}$ şi $B_1 = A^{-1} \cdot B$ cu $A_{x_0,y_0} = \begin{pmatrix} x_0 & dy_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}$, unde (x_0, y_0) este soluţia minimă. Rezultă $\det B_1 = 1$ şi $B_1 = \begin{pmatrix} x' & dy' \\ y' & x' \end{pmatrix}$, unde $\begin{cases} x' = x_0x - dy_0y \\ y' = -y_0x + x_0y \end{cases}$, din care se deduce că $x' < x, y' < y$ dacă $(x, y) \neq (1,0)$ şi $(x', y') \in$ **N** x **N.** Continuând găsim $B_2 = A^{-1} \cdot B_1, B_3 = A^{-1} \cdot B_2$, ..., $B_k = A^{-1} \cdot B_{k-1} = I_2$ şi mergând înapoi rezultă $A_{x,y} = A^{k-1}_{x_0,y_0}$, adică $(x, y) \in S_P$.

Exercițiu 1.4.13.: Să se afle soluția generală în **Z** x **Z** a ecuației diofantice $x^2 - 2y^2 = 1$.

Fie $(x_0, y_0) = (3,2)$ soluția pozitivă minimă a ecuației, diferită de soluțiile banale (1,0) şi (–1,0).

Ecuația dată are deci o infinitate de soluții date de (*) în care vom înlocui $x_0 = 3, y_0 = 2$ şi $d = 2$.

Obținem:

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(3-2\sqrt{2}\right)^{n+1}\right], n \geq 0, \text{ iar}$$

$$S_P = \left\{(\pm x_n, \pm y_n) \middle| n \in N\right\} \cup \left\{(\pm 1,0)\right\}.$$

Observație 1.4.14.: Soluțiile ecuației Pell, pot fi utilizate în aproximarea radicalilor numerelor naturale care nu sunt pătrate perfecte. Într-adevăr, dacă $(x_n, y_n)_{n\geq 1}$ sunt soluții ale ecuației $x^2 - dy^2 = 1$, atunci

$$x_n - y_n\sqrt{d} = \frac{1}{x_n + y_n\sqrt{d}} \text{ deci}$$

$$\frac{x_n}{y_n} - \sqrt{d} = \frac{1}{y_n(x_n + y_n\sqrt{d})} < \frac{1}{\sqrt{d}\,y_n^2} < \frac{1}{y_n^2},$$ de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \sqrt{d}$, adică fracțiile $\frac{x_n}{y_n}$ aproximează pe $\sqrt{d}$ cu o eroare mai mică decât $\frac{1}{y_n^2}$.

1.4.15. Ecuația $ax^2 - by^2 = 1$, ($a, b \in$ **N***).

Observație: Această ecuație este mai generală decât ecuația lui Pell, $x^2 - dy^2 = 1$.

Proprietate 1.4.16.: Dacă $ab = k^2, k \in$ **N**, $k > 1$, atunci ecuația $ax^2 - by^2 = 1$ nu are soluții în numere naturale.

Demonstrație:

Într-adevăr, presupunem că ecuația dată ar avea o soluție în numere naturale (x_0, y_0), atunci $ax_0^2 - by_0^2 = 1$, adică a şi b sunt prime între ele. Urmează că egalitatea $ab = k^2$ implică $a = k_1^2, b = k_2^2$, unde $k_1k_2 = k, k_1, k_2 \in$ **N***.

Ecuația devine $k_1^2x^2 - k_2^2y^2 = 1$ sau $(k_1x - k_2y)(k_1x + k_2y) = 1$, adică $1 < k_1x + k_2y = k_1x - k_2y = 1$, ceea ce este imposibil.

Vom numi **rezolventa Pell** a ecuației $ax^2 - by^2 = 1$, ecuațiea $u^2 - abv^2 = 1$ şi vom demonstra următoarea:

Proprietate 1.4.17.: Dacă ecuația $ax^2 - by^2 = 1$, are o soluție nebanală în numere naturale, atunci ea are o infinitate de soluții în numere naturale.

Demonstrație:

Fie (x_0, y_0), $x_0, y_0 \in$ **N*** o soluție a ecuației $ax^2 - by^2 = 1$. Deoarece ab nu este pătrat perfect, conform teoremei demonstrate mai sus, rezultă că rezolventa Pell are o infinitate de soluții în numere naturale, date de formulele (*).

Notăm cu (u_n, v_n), $n \in$ **N**, soluția generală a rezolventei Pell $u^2 - abv^2 = 1$. Atunci $(x_n, y_n), n \in$ **N**, unde $x_n = x_0u_n + by_0v_n, y_n = y_0u_n + ax_0v_n$ sunt soluții ale ecuației $ax^2 - by^2 = 1, \forall n \in$ **N**, deoarece

$ax_n^2 - by_n^2 = a(x_0u_n + by_0v_n)^2 - b(y_0u_n + ax_0v_n)^2 = (ax_0^2 - by_0^2)(u_n^2 - abv_n^2) = 1, \forall n \in$ **N**, adică ecuația $ax^2 - by^2 = 1$ are o infinitate de soluții.

Proprietate 1.4.18. Soluția generală a ecuației $ax^2 - by^2 = 1$ este $(x_n, y_n), n \in$ **N,** unde $x_n = Au_n + bBv_n$, $y_n = Bu_n + aAv_n$,(u_n, v_n), $n \in$ **N,** fiind soluția generală a rezolventei Pell, iar (A,B), $A,B \in$ **N,** cea mai mică soluție a ecuației considerate.

Demonstrație:

Am arătat mai sus, că dacă (u_n, v_n), $n \in$ **N,** este soluția generală a rezolventei Pell, atunci $(x_n, y_n), n \in$ **N**, sunt soluții ale ecuației $ax^2 - by^2 = 1$.

Reciproc, arătăm că dacă $(x_n, y_n), n \in$ **N**, sunt soluții ale ecuației $ax^2 - by^2 = 1$, atunci (u_n, v_n), $n \in$ **N,** unde $u_n = aAx_n - bBy_n, v_n = Bx_n - Ay_n$, sunt soluții ale rezolventei Pell, $u^2 - abv^2 = 1$.

Într-adevăr

$u_n^2 - abv_n^2 = (aAx_n - bBy_n)^2 - ab(Bx_n - Ay_n)^2 = (aA^2 - bB^2)(ax_n^2 - by_n^2) = 1, \forall n \in$ **N**, propoziția fiind astfel demonstrată.

În cazul particular $b = 1$, metoda expusă mai sus oferă rezolvarea ecuației $dx^2 - y^2 = 1$, pe care o vom numi **ecuația Pell conjugată**.

Prin urmare, soluția generală a ecuației Pell conjugate este $(x_n, y_n), n \in \mathbf{N}$**,** unde:

$$x_n = Au_n + Bv_n, y_n = Bu_n + DAv_n,$$

(A,B) fiind cea mai mică soluție a ecuației $Dx^2 - y^2 = 1$, iar (u_n, v_n), $n \in \mathbf{N}$ soluțiile ecuației lui Pell $u^2 - dv^2 = 1$.

Observație 1.4.19.: Șirurile $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ definite recursiv prin relațiile de mai sus, verifică identitatea $y_n = \lfloor \sqrt{d} x_n \rfloor, \forall n \in \mathbf{N}$.

Într-adevăr, $(x_n, y_n), n \in \mathbf{N}$ fiind soluția generală a ecuației Pell conjugate, $dx^2 - y^2 = 1$, avem $\left(\sqrt{d} x_n + y_n\right)\left(\sqrt{d} x_n - y_n\right) = 1$.

Dar $x_n, y_n \in \mathbf{N}^*$**,** $\forall n \in \mathbf{N}$ și deci $\sqrt{d} x_n + y_n > 1$. Prin urmare $0 < \sqrt{d} x_n - y_n < 1$, de unde
$y_n < \sqrt{d} x_n < y_n + 1$, adică $y_n = \lfloor \sqrt{d} x_n \rfloor, \forall n \in \mathbf{N}$.

Exercițiu 1.4.20.: Să se afle soluția generală în $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ a ecuației $6x^2 - 5y^2 = 1$.

Cea mai mică soluție a ecuației este (1,1). Rezolventa Pell este ecuația $u^2 - 30v^2 = 1$, care are cea mai mică soluție (11,2). Ținând seama de (*), găsim soluția generală a rezolventei Pell (u_n, v_n), $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 11u_n + 60v_n$, $v_{n+1} = 11v_n + 2u_n, u_1 = 11, v_1 = 2$.

Folosind ultima proprietate demonstrată, obținem soluția generală a ecuației $6x^2 - 5y^2 = 1$, $(x_n, y_n), n \in \mathbf{N}$**,** $x_n = u_n + 5v_n, y_n = u_n + 6v_n$**,** iar forma explicită este (din (*)):

$$x_n = \frac{6 + \sqrt{30}}{12}(11 + 2\sqrt{30})^n + \frac{6 - \sqrt{30}}{12}(11 - 2\sqrt{30})^n,$$

$$y_n = \frac{5 + \sqrt{30}}{12}(11 + 2\sqrt{30})^n + \frac{5 - \sqrt{30}}{12}(11 - 2\sqrt{30})^n.$$

1.5. **Ecuații matriceale binome în M_2(C)**

Definiție 1.5.1.: Ecuația matriceală $X^n = A$, unde $A \in M_2(\mathbf{C})$ este o matrice dată, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, un număr natural fixat, iar X $\in M_2(\mathbf{C})$ este o matrice necunoscută, se numeşte **ecuație matriceală binomă**.

În majoritatea metodelor de rezolvare ale ecuațiilor matriceale binome se folosesc următoarele rezultate:

1). Dacă X $\in M_2(\mathbf{C})$ şi det X = 0, atunci $X^n = (t_X)^{n-1} X, n \geq 2$, iar t_X este urma matricei X;

2). Dacă $X^n = A$, atunci $AX = XA$;

3). Dacă $A \in M_2(\mathbf{C})$, $A \neq aI_2$, pentru orice $a \in \mathbf{C}$, atunci matricele X $\in M_2(\mathbf{C})$ care comută cu A sunt de forma $X = \alpha A + \beta I_2$;

4). Dacă X $\in M_2(\mathbf{C})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)I_2 = 0$ $(t_x = a+d, d_x = ad-bc)$;

5). Dacă există $n \geq 2$ astfel ca $X^n = O$ atunci $X^2 = O$.

6). Dacă valorile proprii ale matricei $A \in M_2(\mathbf{C})$ sunt distincte $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, atunci există o matrice P nesingulară (matrice de **pasaj**) astfel ca $P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Primele cinci rezultate au fost justificate anterior, vom justifica afirmația 6).

Dacă λ_1, λ_2 sunt valorile proprii ale matricei A, atunci: $(A-\lambda_1 I_2)(A-\lambda_2 I_2) = 0$, iar matricele $A - \lambda_1 I_2$ şi $A - \lambda_2 I_2$ au determinanții zero, deci există $X_1, X_2 \in M_2(\mathbf{C})$, $X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ astfel încât $AX_1 = \lambda_1 X_1$, $AX_2 = \lambda_2 X_2$.

Dacă $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$, arătăm că matricea $P = (X_1, X_2) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}$ este inversabilă.

Dacă prin absurd coloanele ar fi proporționale $X_1 = \alpha X_2, \alpha \in \mathbf{C}^*$, am avea:

$AX_1=\lambda_1X_1 \Leftrightarrow A\alpha X_2=\lambda_1\alpha X_2 \Leftrightarrow \alpha AX_2=\alpha\lambda_1X_2 \Leftrightarrow \alpha\lambda_2X_2=\alpha\lambda_1X_2 \Leftrightarrow \alpha(\lambda_1-\lambda_2)X_2=0$ deci $\lambda_1=\lambda_2$, contradicție.

Avem $AP=A(X_1,X_2)=(\lambda_1X_1,\lambda_2X_2)=(X_1,X_2)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=P\cdot J_A$, deci $P^{-1}\cdot A\cdot P=J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$.

În continuare vom prezenta câteva cazuri de ecuații matriceale binome.

1. Ecuația $X^n=A, n\geq 2, A\in M_2(\mathbf{C})$ şi det A = 0.

Rezolvare:

Din $X^n=A$ rezultă $(\det X)^n=\det A=0$, deci det X = 0 şi din 1) rezultă $X^n=(t_X)^{n-1}X$, unde t_X este urma matricei *X*. Se obține $(t_X)^{n-1}X=A$, în care egalând urmele, obținem $(t_X)^{n-1}\cdot t_X=t_A$ sau $(t_X)^{n-1}=t_A$.

1.1. Dacă urma matricei *A* este $t_A\neq 0$ (din 4), $A^2\neq 0$), atunci $(t_X)^n=t_A$ dă urmele matricei *X*, adică $t_X\in\{t_1,t_2,...,t_n\}$, unde $t_1,t_2,...,t_n$ sunt rădăcinile de ordinul *n* ale lui t_A $(t_1^n=t_2^n=...=t_n^n=t_A)$.

În concluzie, pentru $A\in M_2(\mathbf{C})$, $A^2\neq 0$ şi det *A* = 0, ecuația $X^n=A$ are în $M_2(\mathbf{C})$, *n* soluții:

$X_k=\frac{1}{t_k^{n-1}}=t_k\frac{1}{t_A}A, k=\overline{1,n}$ unde $t_1,t_2,...,t_n$ sunt rădăcinile ecuației algebrice $t_x^n=t_A$ (t_A fiind urma matricei *A*).

Exemplu 1.5.2. Să se rezolve ecuația: $X^4=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Soluție:

Avem $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, det *A* = 0, *tr A* = 1, $t^4=1$, $t\in\{1,-1,i,-i\}$. Soluțiile sunt: $X=\pm A, X=\pm iA$.

1.2. Dacă urma matricei *A* este t_A = 0, atunci $A^2=0$ şi din $X^n=A$, rezultă $X^{2n}=A^2=0$, iar din 5) rezultă $X^2=0$.

În concluzie pentru $A\neq 0$ şi $A^2=0$ ecuația $X^n=A$, nu are soluții (pentru $n\geq 2$).

Dacă A = 0, din $X^n = O$ rezultă ecuația $X^2 = O$ ceea ce, notând $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ conduce la sistemul de ecuații pătratice $\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ d^2 + bc = 0 \end{cases}$, cu soluțiile

$X_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{C}$, $b \in \mathbf{C}^*$ și $X_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbf{C}$.

Exemple 1.5.3.:

1). Să se arate că ecauția $X^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nu are soluții pentru $n \geq 2$.

Soluție:

Ridicând la pătrat obținem $X^{2n} = 0$, deci $X^2 = 0$ și cum $n \geq 0$, $X^n = 0 \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2). Să se determine matricele $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ unde *a, b, c, d* sunt numere prime și $X^2 = 0$.

Soluție:

Din soluția generală $X_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ și condiția $\dfrac{a^2}{b}$ să fie prim, rezultă $a = b$. Deci, soluțiile sunt $X = \begin{pmatrix} p & p \\ -p & -p \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, p \in \mathbf{N}^*$ cu p număr prim.

2. Ecuația $X^n = aI_2, a \in \mathbf{C}^*, X \in M_2(\mathbf{C}),\ n \geq 2$.

Rezolvare:

Să observăm că dacă X este soluție, atunci pentru orice matrice inversabilă $P \in M_2(\mathbf{C})$, matricea $X_P = P^{-1} \cdot X \cdot P$ este de asemenea soluție. Într-adevăr, $X_P^n = P^{-1} \cdot X \cdot P \cdot P^{-1} \cdot X \cdot P \cdot \ldots \cdot P^{-1} \cdot X \cdot P = \; = P^{-1} \cdot X^n \cdot P = P^{-1} \cdot aI_2 \cdot P = aI_2$.

2.1. Dacă valorile proprii ale matricei X sunt distincte, atunci conform observațiilor inițiale (6)) rezultă că există $X_P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ și ecuația devine: $\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ cu soluțiile $\lambda_1, \lambda_2 \in \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, rădăcinile de ordinul n ale lui a.

În concluzie, o parte din soluțiile ecuației $X^n = aI_2$ sunt $X = P \cdot \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_j \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$ (*) unde a_i, a_j sunt rădăcinile arbitrare ale ecuației $x^n = a$ iar $P \in M_2(\mathbf{C})$ o matrice nesingulară arbitrară.

2.2. Dacă valorile proprii ale matricei X sunt egale $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, atunci din 4), rezultă $(X - \lambda I_2)^2 = 0$ și notând $Y = X - \lambda I_2$, rezultă $X = \lambda I_2 + Y$ cu $Y^2 = 0$. Avem $X^n = \lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1} B$ și ecuația $X^n = aI_2$, devine $\lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1} B = aI_2$ sau $n\lambda^{n-1} B = (a - \lambda^n) I_2$.

Din $a \neq 0$ rezultă $\lambda \neq 0$ și din $B^2 = 0, B = \dfrac{a - \lambda^n}{n\lambda^{n-1}} I_n$ rezultă $B = 0$ și $a = \lambda^n$, deci $X = a_i I_2$. În concluzie, soluțiile sunt de forma (*) (fără condiția $a_i \neq a_j$).

3. Ecuația $X^n = A$ în care valorile proprii ale matricei A sunt λ_1, λ_2 distincte.

Rezolvare:

Dacă valorile proprii ale lui X sunt μ_1, μ_2, atunci $\mu_1^n = \lambda_1$, $\mu_2^n = \lambda_2$ deci $\mu_1 \neq \mu_2$. Dacă P este matricea nesingulară pentru care $P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, atunci înmulțind în relația $X^n = A$ cu P^{-1} la stânga și P la dreapta, rezultă $(P^{-1} \cdot X \cdot P)^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ sau $X_P^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, deci

$\mu_1^n = \lambda_1$, $\mu_2^n = \lambda_2$. Soluțiile sunt de forma $X = P \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$, unde $\alpha^n = \lambda_1$, $\beta^n = \lambda_2$ şi $P \in M_2(\mathbf{C})$ este matrice nesingulară.

Observație 1.5.4.: O altă metodă de rezolvare se bazează pe observațiile 2) şi 3).

4. Dacă $A \neq aI_2, a \in \mathbf{C}$, atunci din $XA = AX$, rezultă că matricele X care verifică ecuația $X^n = A$ sunt de forma $X = \alpha A + \beta I_2$. Valorile proprii ale matricei X sunt $\mu_1 = \alpha\lambda_1 + \beta$, $\mu_2 = \alpha\lambda_2 + \beta$, unde λ_1, λ_2 sunt valorile proprii ale matricei A. Valorile proprii ale matricei X^n sunt μ_1^n şi μ_2^n şi se obțin $(\alpha\lambda_1 + \beta)^n = \lambda_1$, $(\alpha\lambda_2 + \beta)^n = \lambda_2$. Ultimele două relații le privim ca sistem în necunoscutele α, β.

Avem $\begin{cases} \alpha\lambda_1 + \beta = \lambda_1 \cdot \varepsilon_k \\ \alpha\lambda_2 + \beta = \lambda_2 \cdot \varepsilon_p \end{cases}$, unde $\varepsilon_k, \varepsilon_p$ sunt rădăcini de ordin n ale unității.

Se obține:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\lambda_1\varepsilon_k - \lambda_2\varepsilon_p}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \beta &= \frac{\lambda_1\lambda_2(\varepsilon_p - \varepsilon_k)}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{aligned}, \text{ dacă } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

În continuare, vom demonstra că : Rezolvarea ecuației de gradul al doilea $aX^2 + bX + cI_2 = A$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \geq 0$ şi $A \in M_2(\mathbf{C})$ se reduce la rezolvarea unei ecuații binome.

Demonstrație:

Într-adevăr, ecuația dată se poate scrie sub forma: $X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}I_2 = \frac{1}{a}A \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow \left(X + \frac{b}{2a}I_2\right)^2 = \frac{1}{a}A + \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)I_2$. Cu notațiile $Y = X + \frac{b}{2a}I_2$ şi $B = \frac{1}{a}A + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}I_2$, ecuația devine $Y^2 = B$, adică o ecuație binomă.

1.6. Probleme rezolvate (1.1)

R1.2.1. Să se determine toate matricele care comută cu matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Soluție:

Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ astfel încât $A\cdot X = X\cdot A$. Rezultă $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ sau

$\begin{cases} a+2c=a+3b\\ b+2d=2a+4b\\ 3a+4c=c+3d\\ 3b+4d=2c+4d\end{cases}$ sau $\begin{cases} 2c=3b\\ 2(d-a)=3b\end{cases}$, de unde rezultă $\begin{cases} a=x\\ b=2y\\ c=3y\\ d=x+3y\end{cases}$, deci

$X=\begin{pmatrix}x & 2y\\ 3y & x+3y\end{pmatrix}=$

$=yA+(x-y)I_2$.

R1.2.2. Fie $A\in M_2(\mathbf{C})$ și mulțimea $C(A)=\{X\in M_2(\mathbf{C})\ |AX=XA\}$. Să se arate că :

a). Dacă $A=kI_2, k\in\mathbf{C}$, atunci $C(A)=M_2(\mathbf{C})$;

b). Dacă $A\neq kI_2, k\in\mathbf{C}$, atunci $C(A)=\{\alpha A+\beta I_2|\alpha,\beta\in\mathbf{C}\ \}$.

Soluție:

a). Evidentă;

b). Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$. Atunci, din $AX = XA$, rezultă:

$\begin{cases} ax+bz=xa+yc\\ ay+bt=xb+yd\\ cx+dz=za+tc\\ cy+dt=zb+td\end{cases}$ sau $\begin{cases} bz=cy\\ y(a-d)=b(x-t)\\ z(a-d)=c(x-t)\end{cases}$. Dacă $b = 0$, se ajunge la o contradicție cu ipoteza. Rezultă $\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{t-x}{d-a}=\alpha,\alpha\in\mathbf{C}$, de unde $y=b\alpha$, $z=c\alpha$, $t=\alpha d+(x-\alpha a)$.

Fie $x - \alpha a = \beta$, atunci $\begin{cases} x = \alpha a + \beta \\ y = b\alpha \\ z = c\alpha \\ t = \alpha d + \beta \end{cases}$ şi

$$X = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta & b\alpha \\ c\alpha & \alpha d + \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha A + \beta I_2 .$$

R1.2.3. Să se determine toate matricele $A \in M_2(\mathbf{C})$ pentru care $A^2 = O_2$.

Soluție:

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Din egalitatea $A^2 = O_2$, obținem sistemul: $\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases}$

Dacă $a + d \neq 0$, atunci $b = c = 0$ şi $a^2 = d^2 = 0$, de unde rezultă că $a = d = 0$, fals, căci $a + d \neq 0$.

Deci, $a + d = 0$ şi atunci $d = -a$ iar din egalitatea $a^2 + bc = 0$,

- dacă $b = 0$, rezultă $a = 0$ şi deci $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbf{C}$, arbitrar.

- dacă $b \neq 0$, putem scrie $c = -\dfrac{a^2}{b}$ şi atunci $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, $a,\ b \in \mathbf{C}$, $b \neq 0$.

Observație: O matrice $A \in M_2(\mathbf{C})$ cu proprietatea că există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $A^n = O_2$ se numeşte **matrice nilpotentă**. (Am determinat toate matricele de ordinul doi nilpotente).

R1.2.4. Să se determine toate matricele $A \in M_2(\mathbf{C})$ pentru care $A^2 = I_2$.

Soluție:

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Din egalitatea $A^2 = I_2$, rezultă sistemul: $\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}$

Dacă $a + d \neq 0$, atunci $b = c = 0$ şi deci $a^2 = d^2 = 1$, de unde rezultă că $a = \pm 1$, $d = \pm 1$. Cum

$a+d \neq 0$, obținem $a = 1$, $d = 1$ sau $a = -1$, $d = -1$ şi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$.

Dacă $a + d = 0$, atunci $d = -a$. Dacă $b = 0$, obținem $a^2 = d^2 = 1$ şi atunci A are forma $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ cu $c \in \mathbf{C}$, arbitrar.

Dacă $b \neq 0$, avem că $c = \frac{1-a^2}{b}$ şi atunci matricea A are forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbf{C}$.

Observație: O matrice A cu proprietatea că $A^2 = I_2$, se numeşte **matrice involutivă**, ce corespunde unei simetrii în plan.

R1.2.5. Să se determine toate matricele $A \in M_2(\mathbf{C})$ cu proprietatea $A^2 = A$.

Soluție:

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Din egalitatea $A^2 = A$, rezultă sistemul: $\begin{cases} a^2 + bc = a \\ b(a+d) = b \\ c(a+d) = c \\ bc + d^2 = d \end{cases}$

sau $\begin{cases} a^2 + bc = a \\ b(a+d-1) = 0 \\ c(a+d-1) = 0 \\ (a-b)(a+d-1) = 0 \end{cases}$

Dacă $a + d - 1 \neq 0$, atunci $b = c = 0$, $a = d \in \{0,1\}$. Deci $A = O_2$ sau $A = I_2$.

Dacă $a + d - 1 = 0$, rezultă $a^2 + bc = a$. Dacă $b \neq 0$, atunci $c = \frac{a-a^2}{b}$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$ cu

$a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$. Dacă $b = 0$, atunci a = 0 sau a = 1 şi atunci $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbf{R}$ sau $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbf{R}$.

Observaţie: O matrice A cu proprietatea $A^2 = A$ se numeşte **matrice idempotentă**. O astfel de matrice corespunde aplicaţiilor de proiecţie în plan.

R1.2.6. Fie $\boldsymbol{S}_2(\mathbf{C}) = \{ A \in M_2(\mathbf{C}) \mid A = {}^tA \}$ şi $\boldsymbol{A}_2(\mathbf{C}) = \{ A \in M_2(\mathbf{C}) \mid A = -{}^tA \}$. Să se arate că:

a) $A, B \in \boldsymbol{S}_2(\mathbf{C})$, atunci $A + B \in \boldsymbol{S}_2(\mathbf{C})$, $A, B \in \boldsymbol{A}_2(\mathbf{C})$, atunci $A + B \in \boldsymbol{A}_2(\mathbf{C})$;

b) $A \in \boldsymbol{S}_2(\mathbf{C}) \cap \boldsymbol{A}_2(\mathbf{C})$, rezultă $A = O_2$;

c) $\forall$ M $\in M_2(\mathbf{C})$, există $S \in \boldsymbol{S}_2(\mathbf{C})$ şi $A \in \boldsymbol{A}_2(\mathbf{C})$ unice, astfel încât M = $S + A$.

Soluţie:

a). Fie $A, B \in \boldsymbol{S}_2(\mathbf{C})$, atunci $A = {}^tA$, $B = {}^tB$ şi $A + B = {}^tA + {}^tB = {}^t(A + B)$, adică $A + B \in \boldsymbol{S}_2(\mathbf{C})$.

Fie $A, B \in \boldsymbol{A}_2(\mathbf{C})$, atunci $A = -{}^tA$, $B = -{}^tB$ şi $A + B = -({}^tA + {}^tB) = -{}^t(A + B)$, adică
$A + B \in \boldsymbol{A}_2(\mathbf{C})$;

b). Fie $A \in \boldsymbol{S}_2(\mathbf{C}) \cap \boldsymbol{A}_2(\mathbf{C})$, atunci $A = {}^tA$ şi $A = -{}^tA$. Rezultă $A = -A$, de unde $A = O_2$;

c). Pentru M $\in M_2(\mathbf{C})$, există $S = \frac{1}{2}(\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M})$ şi $A = \frac{1}{2}(\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M})$, unice, astfel încât M = $S + A$.

R1.2.7. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) Există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $A^n = I_2$;

b) Există $q \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât $a = \cos q\pi, b = \sin q\pi$.

Soluţie:

a). $\Rightarrow$ b) Presupunem că există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $A^n = I_2$. Trecând la determinanţi obţinem
(det A)^n = 1 şi cum det $A = a^2 + b^2 \geq 0$ deducem că det $A = a^2 + b^2 = 1$, ceea ce arată că există $t \in \mathbf{R}$ astfel încât $a = \cos t$, $b = \sin t$.

Deci, $A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ şi atunci $A^k = \begin{pmatrix} \cos kt & \sin kt \\ -\sin kt & \cos kt \end{pmatrix}, \forall k \in \mathbf{N}^*$, ceea ce arată că $A^n = I_2$ dacă şi numai dacă $\begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt \\ -\sin nt & \cos nt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De aici rezultă că cos nt = 1 şi sin nt = 0, adică $nt = 2p\pi, p \in \mathbf{Z}$, de unde deducem $t = \frac{2p}{n}\pi = q\pi$, unde $q = \frac{2p}{n} \in \mathbf{Q}$ şi prin urmare $a = \cos q\pi, b = \sin q\pi$.

b). $\Rightarrow$ a) Fie $a = \cos q\pi, b = \sin q\pi$ cu $q \in \mathbf{Q}$, adică $q = \frac{u}{v}$ cu $u \in \mathbf{Z}$ şi $v \in \mathbf{N}^*$. Putem scrie $q = \frac{2u}{2v}$ şi atunci $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2u\pi}{2v} & \sin\frac{2u\pi}{2v} \\ -\sin\frac{2u\pi}{2v} & \cos\frac{2u\pi}{2v} \end{pmatrix}$. Rezultă imediat că $A^{2v} = I_2$ şi deci luând $n = 2v \in \mathbf{N}^*$, deducem că $A^n = I_2$.

Probleme rezolvate (1.2)

R1.4.1. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $a + d \neq 0$. Să se arate că $B \in M_2(\mathbf{R})$ comută cu A dacă şi numai dacă comută cu A^2.

Soluţie:

Din teorema lui Cayley – Hamilton, $A^2 - (a+d)A + \det A \cdot I_2 = O_2$, prin înmulţire la dreapta şi respectiv la stânga cu B se obţine: $A^2B - (a+d)AB + B\det A = O_2$ şi $BA^2 - (a+d)BA + B\det A = O_2$.

Scăzând cele două relaţii obţinem: $A^2B - BA^2 = (a+d)(BA - AB)$ şi de aici rezultă imediat concluzia cerută.

R1.4.2. Arătaţi că pentru orice matrice A, $B \in M_2(\mathbf{R})$, există $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât $(AB - BA)^2 = \lambda I_2$.

Soluţie:

Dacă în relaţia lui Cayley – Hamilton, $X^2 - Tr(X) \cdot X + \det X \cdot I_2 = O_2$, $X \in M_2(\mathbf{C})$, alegem $X = AB - BA$, obţinem: $(AB - BA)^2 - Tr(AB - BA) \cdot (AB - BA) + \det(AB - BA) \cdot I_2 = O_2$.

Cum $Tr(AB-BA)=Tr(AB)-Tr(BA)=0$, rezultă $(AB-BA)^2=\lambda I_2$, unde $\lambda=-\det(AB-BA)$.

R1.4.3. Fie $A \in M_2(\mathbf{C})$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, unde det A şi Tr A reprezintă determinantul şi respectiv urma matricei A ($Tr\ A = a + d$).

Dacă $Tr\ A \cdot \det A = 0$ şi $Tr\ A + \det A \neq 0$, atunci matricea $B \in M_2(\mathbf{C})$ comută cu A, dacă şi numai dacă comută cu A^3.

Soluţie:

Din condiţiile date rezultă că unul din factorii $Tr\ A$ sau det A este nul.

Dacă $Tr\ A = 0$ şi $\det A \neq 0$, atunci din relaţia lui Cayley – Hamilton,

(1) $\quad A^2 - TrA \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$,

rezultă $A^2 = -\det A \cdot I_2$, iar de aici obţinem $A^3 = A^2 \cdot A = -(\det A)\cdot A$, $A^3B = -(\det A)\cdot AB$ şi $BA^3 = -(\det A)\cdot BA$. Scăzând ultimele două relaţii, obţinem: $A^3B - BA^3 = \det A \cdot (BA - AB)$ şi de aici rezultă imediat concluzia dorită.

Dacă $\det A = 0$ şi $Tr\ A \neq 0$, atunci din (1), obţinem:

$$A^2 = (TrA)\cdot A, \text{ de unde } \begin{cases} A^2B = (TrA)\cdot AB \\ BA^2 = (TrA)\cdot BA \end{cases} \quad (2) \text{ şi}$$

$$A^3 = (TrA)\cdot A^2, \text{ de unde } \begin{cases} A^3B = (TrA)\cdot A^2B \\ BA^3 = (TrA)\cdot BA^2 \end{cases} \quad (3).$$

Din relaţiile (2) şi (3) obţinem echivalenţa cerută.

R1.4.4. Fie $A, B \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $Tr(AB) = 0$. Să se arate că $(AB)^2 = (BA)^2$.

Soluţie:

Cum $Tr(AB) = Tr(BA) = 0$, atunci din relaţia lui Cayley – Hamilton, rezultă: $(AB)^2 + \det(AB)\cdot I_2 = O_2$,

$(BA)^2 + \det(BA)\cdot I_2 = O_2$, iar de aici obţinem $(AB)^2 = (BA)^2$, deoarece $\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det(BA)$.

Observaţie: Folosind inducţia matematică, se poate arăta că $(AB)^{2n} = (BA)^{2n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Probleme rezolvate (1.3)

R1.6.1. Fie matricea $A \in M_2(\mathbf{R})$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbf{N^*}$.

Soluție:

Ecuația caracteristică matricei A este $\lambda^2 - TrA \cdot \lambda + \det A = 0$, adică $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, de unde rezultă $\lambda_1 = 2$ și $\lambda_2 = 3$. Rezultă că A^n are forma: $A^n = 2^n \cdot B + 3^n \cdot C$, unde B, $C \in M_2(\mathbf{R})$ și se determină din condițiile $n = 1$ și $n = 2$. Obținem sistemul: $\begin{cases} 2B + 3C = A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \\ 4B + 9C = A^2 = \begin{pmatrix} -16 & 20 \\ -25 & 29 \end{pmatrix} \end{cases}$, de unde $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ și atunci: $A^n = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n & 4 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n \\ 5 \cdot 2^n - 5 \cdot 3^n & 5 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N^*}$.

R1.6.2. Să se calculeze A^n, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, iar $n \in \mathbf{N^*}$.

Soluție:

Ecuația caracteristică matricei A este $\lambda^2 - TrA \cdot \lambda + \det A = 0$, adică $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ de unde rezultă că $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, deci există matricele pătratice de ordinul doi B și C, astfel încât

$$A^n = (-2)^n B + (-2)^{n-1} \cdot n \cdot C, \forall n \geq 1.$$

Pentru $n = 1$ și $n = 2$, obținem sistemul $\begin{cases} -2B + C = A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \\ 4B - 4C = A^2 = \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \end{cases}$, de unde obținem că $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$. Deci,

$$A^n = (-2)^{n-1} \begin{pmatrix} 3n - 2 & 3n \\ -3n & -3n - 2 \end{pmatrix}, \forall n \geq 1.$$

R1.6.3. Fie m, $n \in \mathbf{N^*}$ și A, $B \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât $A^m B^n = B^n A^m$. Să se arate că dacă matricele A^m și B^n nu sunt de forma $\lambda \cdot I_2, \lambda \in \mathbf{R}$, atunci $AB = BA$.

Soluție:

Se ştie că pentru orice $k \in \mathbf{N}$, există $a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$A^k = a_k A + b_k I_2 \text{ şi } B^k = c_k B + d_k I_2$$

Atunci din $A^m B^n = B^n A^m$ rezultă $(a_m A + b_m I_2)(c_n B + d_n I_2) = (c_n B + d_n I_2)(a_m A + b_m I_2)$ sau $a_m c_n AB + a_m d_n A + b_m c_n B + b_m d_n I_2 = c_n a_m BA + c_n b_m B + d_n a_m A + d_n b_m I_2$ sau încă $a_m c_n (AB - BA) = O_2$, de unde rezultă că $AB = BA$, deoarece $a_m c_n \neq 0$.

R1.6.4. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se pună în evidență şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$ şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$.

Soluție:

Cum $A^2 - TrA \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$,
$x_1 = 1, y_1 = 0, x_2 = TrA = 2, \det A = 1 = -y_2$, rezultă ($x_{n+1} - TrAx_n +$
$+ \det Ax_{n-1} = 0$, vezi teorema 1.5.3.)

$$x_{n+1} = 2x_n + y_n$$
$$y_{n+1} = -x_n, \forall n \geq 1$$

sau $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}, \forall n \geq 2$. Ecuația caracteristică asociată relației de recurență liniară de ordinul II va fi $r^2 - 2r + 1 = 0$, cu $r_1 = r_2 = 1$, prin urmare $x_n = c_1 + nc_2$. Pentru $n = 1$ şi $n = 2$ obținem $c_1 = 0, c_2 = 1$, deci $x_n = n$. Urmează $y_n = -(n-1)$ şi $A^n = n\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-n+1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = -1$.

Probleme rezolvate (1.4)

R1.8.1. Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, date prin sistemul de recurență:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 5y_n \end{cases}, \forall n \geq 0 \text{ cu } x_0 = 1, y_0 = 2.$$

Să se determine în funcție de n, termenii generali ai şirurilor $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$.

Soluție:

Observăm că $\Delta = (TrA)^2 - 4\det A = 6^2 - 4\cdot 9 = 0$, deci putem aplica metoda expusă, iar sistemul de relații de recurență se poate scrie sub forma: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \forall n \ge 1$ sau $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, n \ge 0$ sau încă $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, deci totul revine la a afla pe A^n.

Cum $Tr\, A = 6$ și $\det A = 9$, ecuația caracteristică este $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, de unde rezultă $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, adică $A^n = 3^n\cdot B + n\cdot 3^{n-1}\cdot C$, unde B și C se obțin pentru $n = 1$ și $n = 2$. Avem:

$\begin{cases} A = 3B + C \\ A^2 = 3^2 B + 2\cdot 3\cdot C \end{cases}$, de unde obținem: $B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Rezultă

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2n3^{n-1} & 2n3^{n-1} \\ -2n3^{n-1} & 2n3^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-1}(3-2n) & n\cdot 2\cdot 3^{n-1} \\ -n\cdot 2\cdot 3^{n-1} & 3^{n-1}(3+2n) \end{pmatrix}.$$

Deci $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-1}(3-2n) & n\cdot 2\cdot 3^{n-1} \\ -n\cdot 2\cdot 3^{n-1} & 3^{n-1}(3+2n) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, de unde obținem:

$$x_n = 3^{n-1}(2n+3) \text{ și } y_n = 2\cdot 3^{n-1}\cdot(n+3), \forall n \ge 0.$$

R1.8.2. Să se determine limitele șirurilor $(x_n)_{n\ge 0}$, $(y_n)_{n\ge 0}$ care verifică relațiile:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-a)x_n + ay_n \\ y_{n+1} = bx_n + (1-b)y_n \end{cases}, \forall n \ge 0, \text{ unde } a, b \in (0,1), x_0, y_0 \in \mathbf{R}.$$

Soluție:

Sistemul recursiv poate fi pus sub forma matriceală:

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$.

Rezultă $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ (1). Calculăm A^n.

Ecuaţia caracteristică a matricei A este $\lambda^2 - (2-a-b)\lambda + 1 - a - b = 0$, de unde rezultă $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = 1 - a - b$ ($r_1 \neq r_2$, deoarece $|r_2| = |1-a-b| < 1$).

Rezultă că $A^n = 1^n \cdot B + (1-a-b)^n \cdot C$, unde B şi C se obţin pentru $n = 1$ şi $n = 2$.

Rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} 1 \cdot B + (1-a-b) \cdot C = A \\ 1^2 \cdot B + (1-a-b)^2 \cdot C^2 = A^2 \end{cases}, \quad \text{rezultă} \quad B = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} \text{ şi}$$

$$C = \frac{1}{a+b_2}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}, \text{ adică}$$

$$A^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b + a(1-a-b)^n & a - a(1-a-b)^n \\ b - b(1-a-b)^n & a + b(1-a-b)^n \end{pmatrix}$$

Ţinând cont de relaţia (1), rezultă

$$x_n = \frac{1}{a+b}\left[(b + a(1-a-b)^n)x_0 + (a - a(1-a-b)^n)y_0\right]$$

$$y_n = \frac{1}{a+b}\left[(b - a(1-a-b)^n \cdot b)x_0 + (a + b(1-a-b)^n)y_0\right], \quad \text{de}$$

unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{bx_0 + ay_0}{a+b}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{bx_0 + ay_0}{a+b}$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}(1-a-b)^n = 0$ ($|1-a-b| < 1$).

R1.8.3. Să se demonstreze că şirurile de numere reale care satisfac relaţiile

$$2x_n = \sqrt{3}x_{n-1} + y_{n-1}$$
$$2y_n = -x_{n-1} + \sqrt{3}y_{n-1}, n \geq 1$$

sunt periodice şi au aceeaşi perioadă.

Soluţie:

Avem: $$\begin{aligned} x_n &= \frac{\sqrt{3}}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-1} \\ y_n &= -\frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{\sqrt{3}}{2}y_{n-1}, \forall n \geq 1 \end{aligned}$$ sau

$$\begin{aligned} x_n &= \cos\frac{\pi}{6}x_{n-1} + \sin\frac{\pi}{6}y_{n-1} \\ y_n &= -\sin\frac{\pi}{6}x_{n-1} + \cos\frac{\pi}{6}y_{n-1}, \forall n \geq 1 \end{aligned}$$ sau

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, n \geq 1, A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}.$$

Rezultă $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{6} & \sin\frac{n\pi}{6} \\ -\sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$

Obținem $\quad x_n = \cos\frac{n\pi}{6} \cdot x_0 + \sin\frac{n\pi}{6} \cdot y_0$ şş

$$y_n = -\sin\frac{n\pi}{6} \cdot x_0 + \cos\frac{n\pi}{6} \cdot y_0, n \geq 1.$$

Deoarce $x_{n+12} = x_n$ şi $y_{n+12} = y_n, \forall n \geq 0$, rezultă că cele 2 şiruri sunt periodice de perioadă 12.

R1.8.4. Fie funcția $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x+3}$, unde x este astfel ales încât să aibă sens $(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}})(x) = f_n(x)$, $\forall n \in$ **N***. Să se determine funcția $f_n = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}})$.

Soluție:

Aşa cum am văzut, prin compunerea unei funcții omografice cu ea însăşi de *n* ori, se obține tot o funcție omografică: dacă $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, *a, b, c, d* $\in$ **R**, atunci $f_n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}})(x) = \dfrac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$, unde a_n, b_n, c_n, d_n sunt elementele matricei $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$.

Conform celor expuse, problema revine la a calcula A^n, unde $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Folosim ecuația caracteristică a matricei *A*. Avem $\lambda^2 - TrA \cdot \lambda + \det A = 0$, adică $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = 5$.

Deci $A^n = 2^n \cdot B + 5^n \cdot C$, unde *B*, *C* $\in M_2$(**C**), şi se determină pentru *n* = 1 şi *n* = 2.

Obținem sistemul :

$$\begin{cases} 2B+5C=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 4B+25C=\begin{pmatrix} 18 & 7 \\ 14 & 11 \end{pmatrix} \end{cases}$$, care rezolvat dă $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ şi

$C=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Deci , $A^n=2^n\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}+5^n\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n+2\cdot 5^n & -2^n+5^n \\ -2^{n+1}+2\cdot 5^n & 2^{n+1}+5^n \end{pmatrix}$,

adică

$$f_n(x)=(\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{n\ \ ori})(x)=\frac{(2^n+2\cdot 5^n)x+(5^n-2^n)}{(2\cdot 5^n-2^{n+1})x+(2^{n+1}+5^n)},\forall n\in\mathbf{N}^*.$$

R1.8.5. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0=a>0$ şi $x_{n+1}=\frac{2x_n+1}{2x_n+3},\forall n\in\mathbf{N}$. Să se găsească expresia termenului general x_n şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Soluție:

Conform celor expuse, avem $x_n=\frac{a_nx_0+b_n}{c_nx_0+d_n}$, unde a_n,b_n,c_n,d_n sunt elementele matricei $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n$. Calculăm A^n folosind ecuația caracteristică a matricei A. Avem $\lambda^2-TrA\cdot\lambda+\det A=0$, adică $\lambda^2-5\lambda+4=0$, de unde $\lambda_1=1$ şi $\lambda_2=4$.

Deci $A^n=1^n\cdot B+4^n\cdot C$, unde B, $C\in M_2(\mathbf{C})$, şi se determină pentru $n=1$ şi $n=2$.

Obținem sistemul :

$$\begin{cases} B+4C=A \\ B+16C=A^2 \end{cases}$$, de unde $B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $C=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Prin urmare,

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 4^n \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+4^n & -1+4^n \\ -2+2\cdot 4^n & 1+2\cdot 4^n \end{pmatrix}$$, de unde rezultă

$$x_n = \frac{(2+4^n)x_0 + (4^n - 1)}{2(4^n-1)x_0 + (2\cdot 4^n + 1)}$$, iar de aici obținem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{x_0+1}{2x_0+2} = \frac{1}{2}.$$

R1.8.6. Găsiți toate numerele naturale nenule n astfel încât $n+1$ şi $3n+1$ să fie simultan pătrate perfecte.

Soluție:

Dacă $n+1 = x^2$ şi $3n+1 = y^2$, atunci $3x^2 - y^2 = 2$, ecuație ce este echivalentă cu ecuația Pell $u^2 - 3v^2 = 1$, unde $u = \frac{1}{2}(3x - y)$ şi $v = \frac{1}{2}(y - x)$.

Cum soluția minimă pozitivă a ecuației $u^2 - 3v^2 = 1$, este $u_1 = 2$, $v_1 = 1$ şi $d = 3$, rezultă că soluția generală a acestei ecuații este $(u_k, v_k)_{k\geq 1}$, unde

$$u_k = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})^k\right]$$

$$v_k = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k\right], \forall k \geq 1.$$

Deci obținem:

$$n_k = x_k^2 - 1 = (u_k + v_k)^2 - 1 = \frac{1}{6}\left[(2+\sqrt{3})^{2k+1} + (2-\sqrt{3})^{2k+1} - 4\right], \forall k \geq 1.$$

Probleme rezolvate (1.5)

R1.10.1 Să se rezolve în $M_2(\mathbf{R})$ ecuația: $X^n = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}^*$.

Soluție:

Evident $\det(X^n) = 0, (\det X)^n = 0$ de unde $\det X = 0$. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $ad - bc = \det X = 0$.

Utilizând relația lui Cayley – Hamilton, rezultă $X^n = (a+d)^{n-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (TrA)^{n-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi se obține sistemul

$$\begin{cases} (a+d)^{n-1}a = 4 & (1) \\ (a+d)^{n-1}b = 6 & (2) \\ (a+d)^{n-1}c = 8 & (3) \\ (a+d)^{n-1}d = 12 & (4) \end{cases}.$$

Din ecuațiile (1) şi (4) rezultă $(a+d)^n = 16$, de unde $a+d = 16^{\frac{1}{n}}$ şi atunci $(a+d)^{n-1} = 16^{\frac{n-1}{n}} = k$ care înlocuit în (1) – (4), obținem $a = \frac{4}{k}$, $b = \frac{6}{k}$, $c = \frac{8}{k}, d = \frac{12}{k}$.

Deci, soluția ecuației este $X = \frac{1}{k}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}, k = 16^{\frac{n-1}{n}}$.

R1.10.2. Să se determine $a \in \mathbf{Z}$ ştiind că ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7a \end{pmatrix}$ are exact două soluții în $M_2(\mathbf{C})$.

Soluție:

Fie X o soluție a ecuației date, d = det X şi t = Tr X. Atunci, cum $X^2 - tX + dI_2 = O_2$, rezultă că $tX = \begin{pmatrix} 1+d & -3 \\ 3 & 7a+d \end{pmatrix}$, deci $t^2 = 7a + 2d + 1$ (am trecut la urma matricelor). Dacă $7a + 2d + 1 \neq 0$, există t_1, $t_2 \in \mathbf{C}^*$, $t_1 \neq t_2$ astfel încât $t_1^2 = t_2^2 = 7a + 2d + 1$. Cum $d^2 = \det^2 X = \det X^2 = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7a \end{pmatrix} = 7a + 9 \neq 0$, rezultă $d \in \{d_1, d_2\}$ unde $d_1^2 = d_2^2 = 7a + 9$ şi $d_1 \neq d_2$.

Rezultă

$$X \in \left\{ \frac{1}{t_1}\begin{pmatrix} 1+d_1 & -3 \\ 3 & 7a+d_1 \end{pmatrix}, \frac{1}{t_2}\begin{pmatrix} 1+d_1 & -3 \\ 3 & 7a+d_1 \end{pmatrix}, \frac{1}{t_3}\begin{pmatrix} 1+d_2 & -3 \\ 3 & 7a+d_2 \end{pmatrix}, \frac{1}{t_4}\begin{pmatrix} 1+d_2 & -3 \\ 3 & 7a+d_2 \end{pmatrix} \right\}$$

cu $t_1^2 = t_2^2 = 7a + 2d_1 + 1$, $t_3^2 = t_4^2 = 7a + 2d_2 + 1, t_1 \neq t_2, t_3 \neq t_4$.

Se verifică cu uşurință că cele patru matrice sunt distincte şi sunt soluții ale ecuației date. Cum ecuația are două soluții, atunci $7a + 2d_1 + 1 = 0$ sau

$7a+2d_2+1=0$. Rezultă $(7a+2d_1+1)(7a+2d_2+1)=0$, deci $(7a+1)^2-4(7a+9)=0 \Leftrightarrow a\in\left\{1,-\frac{5}{7}\right\}$.

Cum $a\in\mathbf{Z}$, obținem a = 1. Pentru a = 1, ecuația $X^2=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 7\end{pmatrix}$ are exact două soluții:

$$X_1=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5 & -3\\ 3 & 11\end{pmatrix} \text{ și } X_2=-X_1.$$

R1.10.3. Fie $t\in(0,\pi)$ un număr real fixat. Să se determine toate matricele $X\in M_2(\mathbf{R})$ care verifică ecuația $X^n=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$.

Soluție:

Dacă notăm cu $A=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ atunci $X^{n+1}=A\cdot X=X\cdot A$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b\sin t=-c\sin t\\ -a\sin t=-d\sin t\end{cases} \overset{\sin t\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a=d\\ c=-b\end{cases} \text{ deci } X=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}.$$

Din $X^n=A$ rezultă $(\det X)^n=\det A=1$, adică $\det X\in\{\pm 1\}$ $\Leftrightarrow a^2+b^2\in\{\pm 1\}$, prin urmare $a^2+b^2=1$, deci există $x\in\mathbf{R}$ astfel ca a = cos x, b = sin x și atunci $X=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$,

$$X^n=\begin{pmatrix}\cos nx & -\sin nx\\ \sin nx & \cos nx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}.$$

Deci $nx=t+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

Ecuația are n soluții $X_k=\begin{pmatrix}\cos x_k & -\sin x_k\\ \sin x_k & \cos x_k\end{pmatrix}; k=\overline{0,n-1}$ unde $x_k=\dfrac{t+2k\pi}{n}$.

R1.10.4. Să se arate că ecuația $X^n = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N},\ n \geq 2$, nu are soluții în $M_2(\mathbf{Q})$.

Soluție:

Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, atunci din $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ rezultă $z = 0$, $t = x + 3y$ şi deci $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x+3y \end{pmatrix} = xI_2 + yA$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Deoarece $xI_2 \cdot yA = yA \cdot xI_2$, rezultă că $X^n = (xI_2 + yA)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k A^k$.

Dar $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 3A$, deci $A^k = 3^{k-1} A, k \geq 1$, prin urmare $X^n = x^n I_2 + \frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}(3y)^k A = \quad = x^n I_2 + \frac{1}{3}\left[(x+3y)^n - x^n\right]A$. Obținem $X^n = \begin{pmatrix} x^n & \frac{1}{3}\left[(x+3y)^n - x^n\right] \\ 0 & (x+3y)^n \end{pmatrix}$ adică $x^n = 3$, deci $x \notin \mathbf{Q}$, ceea ce înseamnă că ecuația dată nu are soluții în $M_2(\mathbf{Q})$.

R1.10.5. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a). Să se determine matricea $X \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $XA = AX$;

b). Să se rezolve în $M_2(\mathbf{C})$ ecuația $Z^n = A$.

Soluție:

a). Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $AX = XA$, adică $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de unde obținem sistemul $\begin{cases} a + 2c = a \\ c = c \\ b + 2d = 2a + b \\ d = d \end{cases}$. Acesta devine $\begin{cases} c = 0 \\ d = a \end{cases}$, rezultă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b). $Z^n = A$ rezultă $Z^{n+1} = AZ = ZA$, atunci $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2 + B$. Cum $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B^n = O_2, \forall n \geq 2$, prin urmare $Z^n = (aI_2 + B)^n = a^n I_2 + C_n^1 a^{n-1} B = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Rezultă sistemul $\begin{cases} a^n = 1 \\ na^{n-1}b = 2 \end{cases}$, de unde $\begin{cases} a = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n} \\ b = \dfrac{2a}{n} = \dfrac{2}{n}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}\right) \end{cases}, k = \overline{0, n-1}$.

R1.10.6. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$. Să se determine $X \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât: $X^n + X^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție:

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o soluție a ecuației. Avem $X^n + X^{n-2} = X^{n-2}(X + iI_2)(X - iI_2)$, deci luând determinantul ambilor membri vom avea sau det (X) = 0 sau $\det(X + iI_2) = 0$ sau $\det(X - iI_2) = 0$.

În cazul $\det(X + iI_2) = 0$ ar rezulta $(a+i)(d+i) - bc = 0$ adică $ad - bc - 1 = 0$ şi $a + d = 0$. Obținem $d = -a$ şi $bc = -1 - a^2$. Prin calcul obținem $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$, prin urmare $X^{n-2}(X^2 + I_2) = O_2$, fals.

Similar avem $\det(X - iI_2) \neq 0$.

Rămâne că det (X) = 0. Teorema lui Cayley-Hamilton, adică relația $X^2 = (a+d)X - \det(X)I_2$, ne spune că $X^2 = (a+d)X, X^3 = (a+d)^2 X$,... Deci $X^n + X^{n-2} = \left[(a+d)^{n-1} + (a+d)^{n-3}\right]X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Notăm $a + d = t$ şi prin identificare va rezulta: $a(t^{n-1} + t^{n-3}) = 1$, $b(t^{n-1} + t^{n-3}) = -1$, $c(t^{n-1} + t^{n-3}) = -1$, $d(t^{n-1} + t^{n-3}) = 1$. Adunăm prima şi ultima relație şi obținem cu ajutorul funcției f: **R** $\to$ **R**, $f(x)=x^n+x^{n-2}-2$ relația $f(t)=0$. Avem $f'(x)=x^{n-3}(nx^2+n-2)$.

Cazul I: n este par. Avem $f'(x)>0$ pe $(0,\infty)$ şi $f'(x)<0$ pe $(-\infty,0)$. Cum $f(-1)=f(1)=0$, rezultă că în acest caz -1 şi 1 sunt singurele rădăcini ale lui f.

Obținem din relațiile precedente a, b, c şi d soluțiile $t=1$, $X_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ şi $t=-1$, $X_2=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Cazul II: n este impar. Avem $f'(x)>0$ pentru $x\neq 0$ şi 1 este singura rădăcină a lui f. În acest caz unica soluție este $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

2. Matrice de ordinul *n*. Valori şi vectori proprii

2.1 Valori proprii şi vectori proprii pentru matrice pătratice

Fie $A \in M_n(\mathbf{C})$ o matrice pătratică.

Definiție 2.1.1. Un număr $\lambda \in \mathbf{C}$ se numeşte **valoare proprie** pentru matricea *A*, dacă există un vector nenul $X \in M_{n,1}(\mathbf{C})$ (matrice coloană) astfel încât $AX = \lambda X$.

Un astfel de vector *X* se numeşte **vector propriu** pentru matricea *A* corespunzător valorii proprii λ.

Observație 2.1.2. :

1). O relație de forma $AX = \lambda X$, $X = O_{n,1}$, unde $A \in M_n(\mathbf{C})$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $X \in M_{n,1}(\mathbf{C})$ o numim relație de tip valoare proprie – vector propriu.

2). Dacă X_1, X_2 sunt vectori proprii pentru *A* corespunzători aceleiaşi valori proprii λ, atunci pentru orice $a_1, a_2 \in \mathbf{C}$, vectorul $X = a_1X_1 + a_2X_2$ este vector propriu pentru *A*.

3). Mulțimea tututor valorilor proprii pentru o matrice *A*, se numeşte **spectrul matricei** *A* şi se notează cu Spec (A).

Proprietate 2.1.3.: Dacă $A \in M_n(\mathbf{C})$, $\lambda \in \mathbf{C}$ este valoare proprie pentru *A* iar $X \in M_{n,1}(\mathbf{C})$ este vector propriu corespunzător, atunci:

a). Pentru orice $k \in \mathbf{N}$, numărul λ^k este valoare proprie pentru matricea A^k, iar *X* este vector propriu pentru A^k;

b). Pentru orice polinom $p \in \mathbf{C}[X]$ numărul $p(\lambda)$ este valoare proprie pentru matricea $p(A)$, iar *X* este vector propriu pentru $p(A)$;

c). Dacă *A* este inversabilă, atunci $\lambda \neq 0$ (o matrice inversabilă nu are valoare proprie pe 0) şi numărul $\frac{1}{\lambda}$ este valoare proprie pentru matricea A^{-1}, iar *X* este vector propriu pentru A^{-1}.

Demonstrație:

a). Din $AX = \lambda X$, $X \neq O_{n,1}$, prin inducție după $k \in \mathbf{N}^*$ rezultă $A^kX = \lambda^kX$, $X \neq O_{n,1}$, care este o relație de tip valoare proprie – vector propriu ce afirmă că λ^k este valoare proprie pentru matricea A^k, iar *X* este vector propriu corespunzător;

b). Dacă $p(X) = a_0 + a_1X + ... + a_kX^k$, atunci $p(A) = a_0I_n + a_1A + ... + a_kA^k$ iar de aici rezultă
$$\begin{aligned} p(A)\cdot X &= a_0I_nX + a_1AX + ... + a_kA^kX = \\ &= a_0X + a_1\lambda X + ... + a_k\lambda^kX = (a_0 + a_1\lambda + ... + a_k\lambda^k)X = p(\lambda)X \end{aligned}$$

$X \neq O_{n,1}$, adică $p(\lambda)$ este valoare proprie pentru matricea $p(A)$, iar X este vector propriu pentru $p(A)$;

c). Dacă prin absurd, am presupune $\lambda = 0$, atunci din $AX = 0$ rezultă $A^{-1}AX = 0$ sau $X = O_{n,1}$, contradicție. Deci, $\lambda \neq 0$ şi atunci din $AX = \lambda X$ rezultă $X = A^{-1}\lambda X = \lambda A^{-1}X$ sau $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$, $X \neq O_{n,1}$, care este o relație de tip valoare proprie – vector propriu.

Observații 2.1.4.:

1). Parțial, afirmațiile din proprozitia de mai sus, admit şi **reciproce**. Astfel:

a). Singurele valori proprii ale matriei A^k sunt de forma λ^k, unde λ este valoare proprie pentru A.

b). Singurele valori proprii ale matricei $p(A)$ sunt de forma $P(\lambda)$, unde λ este valoare proprie pentru A.

c). Singurele valori proprii ale matricei inverse A^{-1} sunt de forma $\frac{1}{\lambda}$, unde λ este valoare proprie pentru A.

În schimb, vectorii proprii nu sunt totdeauna aceeaşi. (În general, mulțimea vectorilor proprii pentru matricea A^k sau $p(A)$ include strict mulțimea vectorilor proprii ai matricei A).

2). În definiția dată, noțiunile valori proprii şi vectori proprii pentru o matrice sunt definite simultan. Se poate da o definiție independentă pentru valorile proprii, după cum reiese din următoarea:

Teoremă 2.1.5. Un număr $\lambda \in \mathbf{C}$ este valoare proprie pentru matricea $A \in M_n(\mathbf{C})$ dacă şi numai dacă $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Demonstrație:

Relația $AX = \lambda X$, $X \neq O_{n,1}$ se poate scrie $\det(A - \lambda I_n)X = O_{n,1}$, $X \neq O_{n,1}$, care poate fi privită ca un sistem de n ecuații cu n necunoscute (x_1, x_2, ..., x_n), unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ şi condiția $X \neq O_{n,1}$, cere ca el să admită soluția nebanală. Aceasta este echivalentă cu condiția ca determinantul matricei coeficienților sistemului să fie egal cu zero, adică $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

2.2. Polinom caracteristic al unei matrice pătratice

Fie $A \in M_n(\mathbf{C})$ o matrice pătratică de ordin $n \in \mathbf{N}^*$.

Definiție 2.2.1.

a). Matricea $(A - \lambda I_n) \in M_n(\mathbf{C})$, $\lambda \in \mathbf{C}$, se numeşte **matrice caracteristică** a matricei A (λ - matrice);

b). Polinomul $f_A \in \mathbf{C}[X]$, $f_A(X) = \det\left(A - XI_n\right)$ se numeşte **polinom caracterstic** al matricei A;

c). Ecuația polinomială $f_A(x) = 0$, se numeşte **ecuația caracteristică** a matricei A.

Observație 2.2.2.: Conform teoremei, valorile proprii ale matricei A sunt rădăcinile polinomului caracteristic sau ale ecuației caracteristice.

Expresia canonică a polinomului caracteristic

Proprietate 2.2.3.: Dacă $A \in M_n(\mathbf{C})$, atunci $f_A(X) = (-1)^n (X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n \sigma_n)$, unde σ_k este suma tuturor minorilor diagonali de ordin k din matricea A (un minor diagonal este format cu linii şi coloane de aceeaşi indici).

Demonstrație:

Dacă notăm cu A_1, A_2,..., A_n coloanele matricei A şi cu B_1, B_2,..., B_n coloanele matricei $B = -XI_n$, matricea caracteristică va fi $A - \lambda I_n = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, \ldots, A_n + B_n)$. Determinantul ei se descompune în sumă de 2^n determinanți de forma det (C_1, C_2,..., C_n) în care coloana C_k este A_k sau B_k.

Grupăm în această sumă de determinanți, cei ce conțin acelaşi număr de coloane din matricea B, determinanți ce conțin k coloane din $B = -XI_n$, se dă factor $(-X)^k$ de pe cele k coloane şi dezvoltând acest determinant pe rând după fiecare din cele k coloane, obținem un minor de ordin $(n - k)$ din matricea A. Se obține:

$$\det(A - XI_n) = \det A - X\sum_{k=1}^{n}\det(A_1,\ldots,E_k,\ldots,A_n) + (-X)^2\sum_{i<j}\det(A_1,\ldots,E_i,\ldots,E_j,\ldots,A_n) + \ldots + (-X)^{n-1}\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{n}(E_1,\ldots,A_k,\ldots,E_n) + (-X)^n\det(E_1,\ldots,E_n) = \det(A - X\sigma_{n-1} + X^2\sigma_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}X^{n-1}\sigma_1 + (-1)^n X^n) =$$

$= (-1)^n\left[X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n\sigma_n\right]$, unde $\sigma_n = \det A$ şi E_1, E_2,..., E_n sunt coloanele matricei I_n.

Observație 2.2.4.: Dintre coeficienții polinomului caracteristic remarcăm:

$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \overset{not}{=} Tr(A)$, numit **urma** matricei A (suma elementelor de pe diagonală – minorii diagonali de ordinul unu);

$\sigma_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = \sum_{1 \le i < j \le n} (a_{ii}a_{ij} - a_{ij}a_{ji})$ (suma minorilor diagonali de ordinul doi)

$\sigma_n = \det A$, singurul minor (şi diagonal) de ordin n.

2.2.5. Legătura între coeficienţii polinomului caracteristic şi valorile proprii ale matricei

Ecuaţia caracteristică a matricei $A \in M_n$ (**C**), este: (1) $p(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x + \quad + (-1)^n \sigma_n = 0$, care este o ecuaţie algebrică de gradul n şi are în mulţimea numerelor complexe n rădăcini (unele eventual multiple), care sunt valorile proprii ale matricei.

Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt cele n valori proprii, atunci descompunerea polinomului P în factori inductibili în **C** (de gradul I) este: $p(X) = (X - \lambda_1) \cdot (X - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_n)$ care dezvoltat dă (2) $p(X) = X^n - S_1 X^{n-1} + S_2 X^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} S_{n-1} X + (-1)^n S_n$, unde

$S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

$S_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j$

. . . . . .

$S_n = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, sunt sumele simetrice (Viète) ale valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Identificând exprimările (1) şi (2) ale polinomului P, obţinem: $\sigma_k = S_k, k = \overline{1,n}$.

În particular, $\sigma_1 = S_1$ sau $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1$, adică $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n$ (suma valorilor proprii este egală cu urma matricei A).

$\sigma_2 = S_2$, atunci $\sum_{1 \le i < j \le n} (a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}) = \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j$.

$\sigma_n = S_n$, $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ (determinantul unei matrice pătratice este egal cu produsul valorilor proprii ale ei).

În particular, o matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$ este inversabilă dacă şi numai dacă toate valorile proprii sunt nenule.

Observaţii 2.2.6.:

1). Pentru **matricea de ordinul doi**, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avem $f_A(X) = X^2 - (a+d)X + ad - bc = X^2 - -(TrA)X + \det A$;

2). Pentru **matricea de ordinul trei**, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, avem $f_A(X) = -X^3 + \sum_{i=1}^{3} a_{ii} X^2 - \sum_{i=1}^{3} \Delta_{ii} X + \quad + \det A$, unde Δ_{ii} este minorul corespunzător elementului a_{ii} (obţinut din matricea A prin eliminarea liniei i şi coloanei i) sau $f_A(X) = -X^3 + (TrA)X^2 - (TrA_*)X + \det A$, unde A_* este reciproca matricei A ($A \cdot A_* = \det A \cdot I_3$).

Proprietate 2.2.7.: Două matrice asemenea au acelaşi polinom caracteristic.

Demonstraţie:

Dacă A, $B \in M_n$ (**C**) sunt matrice asemenea atunci există o matrice nesingulară P astfel încât $B = P^{-1}AP$. Rezultă $f_B(X) = \det(P^{-1}AP - XI_n) = \det(P^{-1}(A - XI_n)P) = \det P^{-1} \cdot \det(A - XI_n) \cdot \det P =$ $= \det(A - XI_n) = f_A(X)$.

Observaţie 2.2.8.: Reciproca nu este în general adevărată. Există matrice cu acelaşi polinom caracteristic, dar care nu sunt asemenea. De exemplu, $A = I_n$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n$ (**C**). Avem $f_A(X) = f_B(X) = \quad = (1 - X)^n$, iar relaţia $B = P^{-1}AP$ dă $B = I_n$, care este falsă.

Proprietate 2.2.9.: Dacă A, B sunt matrice pătratice, atunci polinoamele caracteristice ale matricelor produs $A{\cdot}B$ şi $B{\cdot}A$ coincid.

Demonstrație:

Dacă una din matricele A sau B este inversabilă, atunci matricele produs $A{\cdot}B$ şi $B{\cdot}A$ sunt asemenea, conform relației $AB = B^{-1}(BA)B$ sau $BA = A^{-1}(AB)A$, deci ele au acelați polinom caracteristic ($f_{AB} = f_{BA}$).

Să considerăm matricea $A(a) = A - aI_n$. Dacă a nu este valoarea proprie pentru matricea A, atunci matricea $A(a)$ este inversabilă, deci pentru orice $a \in \mathbf{C}$ – Spec(A) = $\mathbf{C}$ – $\{\lambda_{1A}, \lambda_{2A}, \ldots, \lambda_{nA}\}$, avem $f_{A(a)B} = f_{BA(a)}$ sau $\det(A(a)B - xI_n) = \det(BA(a) - xI_n)$, de unde $\det(AB - aB - xI_n) = \det(BA - aB - xI_n)$, egalitate care are loc pentru orice x şi pentru orice $a \in \mathbf{C}$ – Spec(A).

Cei doi membri ai egalității fiind polinoame de grad $\leq n$ atât în a cât şi în x, condiția de a fi egale în mai mult de n valori ale lui a, revine la identitatea lor, deci $\det(A(a)B - xI_n) = \det(BA(a) - xI_n)$ pentru orice $a \in$ **C**, inclusiv pentru $a = 0$ care dă $\det(AB - xI_n) = \det(BA - xI_n), x \in \mathbf{C}$.

Observație 2.2.10.: Dacă matricele $A \in M_{m,n}$ (**C**), $B \in M_{n,m}$ (**C**) nu sunt pătratice ($m \neq n$), atunci ele nu au polinom caracteristic. În schimb, matricele $AB \in M_m$ (**C**) şi $BA \in M_n$ (**C**) sunt pătratice.

Se pune problema dacă se poate găsi o legătură între polinoamele caracteristice f_{AB} şi f_{BA}, care sunt de grade diferite.

Folosind produsul matricelor cu blocuri şi proprietatea $\det\begin{pmatrix} X & Y \\ O & Z \end{pmatrix} = \det X \cdot \det Z$ ($X \in M_n$ (**C**), $Z \in M_m$ (**C**)), obținem:

Proprietate 2.2.11.: Dacă $A \in M_{m,n}$ (**C**), $B \in M_{n,m}$ (**C**), atunci între polinoamele caracteristice ale matricelor produs există relația: $(-X)^n f_{AB}(X) = (-X)^m f_{BA}(X)$.

Demonstrație:

Se verfică egalitatea matriceală $\begin{pmatrix} AB - XI_m & -A \\ O & -XI_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m & O \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & O \\ B & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -XI_m & -A \\ O & BA - XI_n \end{pmatrix}$ din care trecând la determinanți, rezultă: $\det(AB - XI_m) \cdot \det(-XI_n) \cdot \det(I_m) \cdot \det(I_n) = \det(I_m) \cdot \det(I_n) \cdot$ $\cdot \det(-XI_m) \cdot \det(BA - XI_n)$ sau $(-X)^n f_{AB}(X) = (-X)^m f_{BA}(X)$.

Reamintim că pentru o matrice $A \in M_n$ (**C**), $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, definim **matricea adjunctă** $A^* = (\overline{A})^t = = (\overline{a}_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$.

O matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$ se numeşte:

a). **autoadjunctă** (hermetiană), dacă $A^* = A$;

b). **antiautoadjunctă** (antihermetiană), dacă $A^* = -A$;

c). **unitară**, dacă $A^* \cdot A = I_n$ ($A^* = A^{-1}$).

În cazul când $A \in M_n(\mathbf{R})$, se folosesc denumirile:

a). **simetrică**, dacă ${}^tA = A$ ($A^* = {}^tA$);

b). **antisimetrică**, dacă ${}^tA = -A$;

c). **ortogonală**, dacă ${}^tA \cdot A = I_n$ (${}^tA = A^{-1}$).

Se pot da câteva rezultate generale asupra valorilor proprii ale matricelor remarcabile. Astfel, pentru doi vectori X, $Y \in M_{n,1}(\mathbf{C})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

definim **produsul scalar** $< X, Y >= \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$.

Se verfică uşor relaţiile:

a). $< X + Y, Z > = < X, Z > + < Y, Z >$,

b). $< X, Y > = \overline{< Y, X >}$,

c). $< aX, Y > = a < X, Y >$,

d). $< X, aY > = \overline{a} < X, Y >$,

e). $< X, X > \geq 0$ şi $< X, X >= 0 \Leftrightarrow X = O_{n,1}$.

Relaţiile au loc pentru orice X, Y, $Z \in M_{n,1}(\mathbf{C})$, $a \in \mathbf{C}$.

Observaţie 2.2.12.: Dacă $A \in M_n(\mathbf{C})$, atunci $< A \cdot X, Y > = < X, A^*Y >$, pentru orice X, $Y \in M_{n,1}(\mathbf{C})$.

Într-adevăr, $< AX, Y >= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{n} a_{kp} x_p \right) \overline{y}_k = \sum_{k,p=1}^{n} a_{kp} x_p \overline{y}_k$ iar $< X, A^*Y >$ $= \sum_{p=1}^{n} x_p \sum_{k=1}^{n} \overline{\overline{a}_{kp} y_k} = \sum_{k,p=1}^{n} a_{kp} x_p \overline{y}_k$.

Proprietate 2.2.13.: Toate valorile proprii ale unei matrice hermetiene sunt numere reale.

Demonstraţie:

Fie $\lambda \in \mathbf{C}$ valoare proprie şi $X \neq O_{n,1}$ vector propriu, deci $AX = \lambda X$.

Avem < AX, X > = < X, A^*X >, sau < AX, X > = < X, AX >, $<\lambda X, X> = <X, \lambda X>$, sau $\lambda <X,X> = \overline{\lambda} <X,X>$ de unde $\lambda = \overline{\lambda}$, adică $\lambda \in \mathbf{R}$.

Proprietate 2.2.14.: Toate valorile proprii ale unei matrice antihermetiene sunt numere imaginare (cu partea reală zero).

Demonstrație:

Fie $AX = \lambda X$, $\lambda \neq 0$, atunci < AX, X > = < X, A^*X > sau < AX, X > = < X, $-AX$ > sau $<\lambda X, X> = \, = <X, -\lambda X>$, sau $\lambda <X,X> = -\overline{\lambda} <X,X>$ de unde $\lambda = -\overline{\lambda}$, adică $\lambda = i \cdot b, b \in \mathbf{R}$.

Proprietate 2.2.15. Toate valorile proprii ale unei matrice unitare, au modulul unu.

Demonstrație:

Fie $AX = \lambda X$, $X \neq O_{n,1}$, atunci < AX, AX > = < X, $A^*(AX)$ > = < X, X >, obținem $<\lambda X, \lambda X> = <X,X>$ sau $\lambda\overline{\lambda} <X,X> = <X,X>$, adică $\lambda \cdot \overline{\lambda} = 1$, de unde rezultă $|\lambda| = 1$.

Observații 2.2.16.:

1). Dacă $A \in M_n(\mathbf{R})$ și ${}^tA = A$, atunci ecuația $\det(A - xI_n) = 0$, are toate rădăcinile reale;

2). Dacă $A \in M_n(\mathbf{R})$ și ${}^tA = -A$, atunci ecuația $\det(A - xI_n) = 0$, are toate rădăcinile de forma $\lambda = i \cdot b$, $b \neq 0$ (are partea reală zero);

3). Dacă $A \in M_n(\mathbf{R})$ este inversabilă și ${}^tA = A^{-1}$, atunci ecuația $\det(A - xI_n) = 0$, are toate rădăcinile de forma $x = \cos\alpha \pm i\sin\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$ (rădăcinile nereale se cuplează în perechi de forma $x_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $x_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha$, iar cele reale nu pot fi decât de 1 sau –1).

2.3. Teorema lui Cayley-Hamilton

Corp de numere

Definiție 2.3.1. O submulțime K a lui **C**, cu cel puțin două elemente, se numește **corp de numere**, dacă îndeplinește condițiile:

1). $\forall x, y \in$ K rezultă $x + y, xy \in$ K;

2). $\forall x \in$ K rezultă $-x \in$ K;

3). $\forall x \in$ K, $x \neq 0$ rezultă $x^{-1} \in$ K.

Proprietate 2.3.2. Pentru orice corp de numere K avem:

a). $0 \in$ K, $1 \in$ K;

b). **Q** $\subseteq$ K.

Demonstrație:

a). Cum K $\neq \varnothing$ putem considera un element $a \in$ K. Atunci $-a \in$ K şi deci $0 = a + (-a) \in$ K. Conform definiției lui K, putem alege $b \in$ K, $b \neq 0$. Avem $b^{-1} \in$ K, deci $1 = bb^{-1} \in$ K.

b). Fie $n \in$ **N**. Dacă $n \in$ K, atunci şi $n + 1 \in$ K căci $1 \in$ K. Se verifică astfel prin inducție matematică că **N** $\subseteq$ K. Din **N** $\subseteq$ K rezultă că $-n \in$ K oricare ar fi $n \in$ **N**, deci **Z** $\subseteq$ K. Fie acum $x \in$ **Q**, $x = \frac{m}{n}$ cu m, $n \in$ **Z**, $n \neq 0$. Atunci $x = mn^{-1} \in$ K, deci **Q** $\subseteq$ K.

Exemple 2.3.3.:

1). Mulțimile **Q, R, C** sunt corpuri de numere;

2). Mulțimile $\mathbf{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\right\}$, $\mathbf{Q}(i) = \left\{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Q}\right\}$ sunt corpuri de numere.

Fie K un corp de numere. Vom nota cu K[X] mulțimea tuturor polinoamelor în nedeterminată X cu coeficienți în K. Evident K[X] $\subseteq$ **C**[X] şi oricare ar fi $f, g \in$ K[X], polinoamele $f + g$, fg, $-f$ aparțin lui K[X].

Invocând proprietăți de închidere ale operațiilor cu numere din K şi algoritmul împărțirii euclidiene (împărțirea cu rest) a polinoamelor din **C**[X], rezultă că oricare ar fi polinoamele f, $g \in$ K[X], $g \neq 0$, există şi sunt unic determinate polinoamele q, $r \in$ K[X] astfel încât $f = gq + r$, grad $r <$ grad g.

Un polinom din K[X] cu coeficientul dominant egal cu 1 va fi numit **polinom monic**.

Dacă K este un corp de numere vom nota cu M_n(K) (respectiv M_n(K[X])) mulțimea tuturor matricelor pătratice de ordin n cu coeficienți din K (respectiv K[X]).

Fie K un corp de numere şi $A \in M_n$(K), $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Dacă $f \in$ K[X], $f(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, atunci matricea $f(A) = a_d A^d + a_{d-1} A^{d-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n \in M_n$(K) se numeşte **valoarea** în A a polinomului f. Dacă $f(A) = 0$ spunem că A este **rădăcină** (din M_n(K)) a lui f. Evident, dacă $a \in$ K şi f, $g \in$ K[X], atunci valoarea în A a polinomului $f + g$ (respectiv fg, af) este egală cu $f(A) + g(A)$ (respectiv $f(A) \cdot g(A)$, $af(A)$).

Se observă că orice matrice $\Gamma = \left(f_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ din M_n(K[X]) poate fi reprezentată în mod unic ca un polinom în X cu coeficienți în M_n(K), $\Gamma = A_d X^d + A_{d-1} X^{d-1} + \ldots + A_1 X + A_0$, unde $A_i \in M_n$(K), $i = \overline{0,d}$ iar d este egal cu cel mai mare din gradele polinoamelor f_{ij}.

Astfel, matricea $\Gamma = \begin{pmatrix} -X^3 + X - 3 & 2X^3 + 2X \\ -2X^2 + X + 1 & 3X^3 + X^2 + 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Q}[X])$ se poate scrie sub forma $\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X^3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Fie K un corp de numere şi $A = (a_{ij}) \in M_n$ (K). Matricea

$$A - XI_n = \begin{pmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - X \end{pmatrix}$$

$\in M_n$ (K[x]) se numeşte **matricea carateristică** a lui A iar polinomul $p_A(X) \in \mathrm{K}[X]$, $p_A(X) = \det(A - XI_n)$ se numeşte **polinom caractersitic** al lui A.

Cum în dezvoltarea determinantului $\det(A - XI_n)$ apare şi termenul $(a_{11} - X)\cdot(a_{22} - X)\cdot\ldots\cdot\ \cdot(a_{nn} - X)$, iar ceilalţi termeni omit cel puţin două elemente de pe diagonala principală a lui $A - XI_n$, rezultă că gard $p_A(X) = n$ şi termenii săi de grad n şi $n - 1$ provin din dezvoltarea produsului

$$(a_{11} - X)\cdot(a_{22} - X)\cdot\ldots\cdot(a_{nn} - X) = (-1)^n X^n - (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})X^{n-1} + \ldots + a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

.

Aşadar, $p_A(X)$ are gradul n, coeficientul dominant egal cu 1 şi coeficientul lui X^{n-1} este egal cu –TrA, unde $TrA = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \in$ K.

Numărul $TrA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in$ K, se numeşte **urma** matricei $A = (a_{ij}) \in M_n$(K) (TrA este suma elementelor de pe diagonala principală a lui A).

Să observăm că şi termenul liber al polinomului $p_A(X)$ poate fi precizat. Cum termenul liber al unui polinom $f(X)$ este egal cu $f(0)$, în cazul lui $p_A(X)$ avem $p_A(0) = \det A$.

Aşadar,

$p_A(X) = (-1)^n(X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n\sigma_n)$, unde σ_k este suma tuturor minorilor diagonali de ordin k din matricea A (un minor diagonal este format cu linii şi coloane de aceeaşi indici).

Teorema lui Cayley-Hamilton

Vom demonstra în continuare următoarea:

Lemă 2.3.4. Fie $B_0, B_1, \ldots, B_m \in M_n$(K) matrice fixate, şi funcţia *f*:K→M_n(K), $f(x) = B_0 + \quad + xB_1 + \ldots + x^m B_m$. Dacă $f(x) = O_n, \forall x \in$ K, atuci $B_0 = B_1 = \ldots = B_m = O_n$.

Demonstraţie:

Efectuând înmulţirile cu scalari, apoi adunările, obţinem *f*(*x*) = *B*, unde matricea $B \in M_n$(K) are ca elemente polinoame cu coeficienţi din corpul de numere K de grad cel mult *n*.

Deoarece aceste polinoame sunt identic nule (conform ipotezei), rezultă că toţi coeficienţii acestora, adică toate elmentele matricelor $B_k (k = \overline{0,m})$ sunt nule, ceea ce demonstrează lema.

Teoremă 2.3.5. (Cayley-Hamilton): Orice matrice pătratică din M_n(**K**) este rădăcină a polinomului său caracteristic.

Demonstraţie:

Fie $A \in M_n$ (K), $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ şi

$$p_A(X) = \det(A - XI_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - X \end{vmatrix} = (-1)^n (X^n -$$

$-\sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n \sigma_n)$, polinomul caracteristic al matricei *A*, unde $\sigma_n = p_A(0) = \det A$.

Vom arăta că $p_A(A) = 0$. Putem scrie $(A - XI_n)(A - XI_n)^* = \det(A - XI_n)I_n$ (Dacă M$\in M_n$(K), atunci avem M · M* = detM · I_n, unde M* este matricea reciprocă a lui M).

Elementele matricei reciproce $(A - xI_n)^*$ sunt polinoame cu coeficienţi din K de grad cel mult *n* – 1, deci putem scrie $(A - XI_n)^* = B_0 + XB_1 + \ldots + X^{n-1}B_{n-1}$, unde $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in M_n$ (K) şi nu depind de *X*. În consecinţă, avem $(A - xI_n)(B_0 + xB_1 + \ldots + x^{n-1}B_{n-1}) = (-1)^n (x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x +$ $+ (-1)^n \sigma_n)I_n, \forall x \in$**K**.

Efectuând înmulţirile şi ordonând convenabil, egalitatea de mai sus devine $(AB_0 - \sigma_n I_n) +$

$+x(AB_1 - B_0 + \sigma_{n-1}I_n) + x^2(AB_2 - B_1 - \sigma_{n-2}I_n) + \ldots +$
$+x^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2} + (-1)^{n-1}\sigma_1 I_n) + x^n(-B_{n-1} - (-1)^n I_n) =$
$= O_n, \forall x \in \mathbf{K}.$

Conform lemei, de aici rezultă:
$$\begin{aligned} AB_0 &= \sigma_n I_n \\ AB_1 - B_0 &= -\sigma_{n-1} I_n \\ AB_2 - B_1 &= \sigma_{n-2} I_n \\ &\ldots\ldots\ldots \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= (-1)^{n-1}\sigma_1 I_n \\ -B_{n-1} &= (-1)^n I_n \end{aligned}.$$

Înmulțind la stânga relațiile precedente respectiv cu $I_n, A, A^2, \ldots, A^n$, apoi adunându-le obținem $O_n = (-1)^n(A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \sigma_2 A^{n-2} - \ldots + (-1)^n \sigma_n)$, ceea ce demonstrează teorema lui Cayley-Hamliton.

Aplicații

2.3.6. Inversa unei matrice

Fie A o matrice de ordinul n, inversabilă, atunci conform teoremei lui Cayley-Hamilton ea verifică ecuația sa caracteristică, deci: (1) $A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \sigma_2 A^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}A + (-1)^n \sigma_n I_n = O_n$.

Înmulțind ambii membri ai relației (1) la dreapta cu A^{-1}, rezultă
$$A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \sigma_2 A^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}A + (-1)^n \sigma_n I_n A^{-1} = O_n$$
sau
$$A^{n-1} - \sigma_1 A^{n-2} + \sigma_2 A^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}I_n + (-1)^n \sigma_n A^{-1} = O_n,$$ de unde ($\sigma_n = \det A \neq 0$, căci A este inversabilă) rezultă $A^{-1} = -\dfrac{(-1)^n}{\det A}\left[A^{n-1} - \sigma_1 A^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}I_n\right].$

Procedeul este preferabil dacă ordinul n nu este prea mare.

Exemplu 2.3.7. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Într-adevăr, A este inversabilă deoarece $\det A = -2 \neq 0$.

Avem: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\left[A^2 - \sigma_1 A + \sigma_2 I_3\right]$, unde det A = –2,

$\sigma_1 = Tr(A) = 3 + 0 + 0 = 3$, $\sigma_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} +$

$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 1 - 2 = -5$ şi

$A^2 = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 8 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ iar $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 8 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.3.8. Calculul puterilor unei matrice prin recurenţă

Folosind teorema lui Cayley-Hamilton, putem calcula $A^p, \forall A \in M_n(\mathbf{C})$ şi $\forall p \in \mathbf{N}^*$, prin recurenţă.

Într-adevăr, cum $A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_n I_n = 0$, înmulţind cu A^k, obţinem $A^{n+k} + \alpha_1 A^{n+k-1} + \ldots + \ + \alpha_n A^k = 0, k \in \mathbf{N}$.

Deci, trebuie calculate primele puteri, după care se deduc celelalte recursiv.

În particular, pentru orice k, A^k se exprimă ca polinom de grad $\leq n-1$ de matrice A.

Puterile matricelor de ordinul trei

Fie $A \in M_3(\mathbf{C})$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$.

După cum ştim ecuaţia carateristică a matricei A se poate scrie sub forma

$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ sau (1) $\lambda^3 - \sigma_1 \lambda^2 + \sigma_2 \lambda - \sigma_3 = 0$, unde

$\sigma_1 = Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ (urma matricei A),

$\sigma_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, iar $\sigma_3 = \det A$, determinantul matricei A.

Ținând seama de teorema lui Cayley-Hamilton, se obține relația: $A^3 - \sigma_1 A^2 + \sigma_2 A - \sigma_3 I_3 = O_3$.

Proprietate 2.3.9. Dacă $A \in M_3(\mathbf{C})$, atunci $A^n = x_n A^2 + y_n A + z_n I_3, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Demonstrație:

Pentru $n = 1$ proprietatea este adevărată ($x_1 = 0$, $y_1 = 1$, $z_1 = 0$).

Pentru $n = 2$ proprietatea este de asemenea adevărată ($x_2 = 1$, $y_2 = 0$, $z_2 = 0$).

Pentru $n = 3$, ținând seama de ecuația caracteristică, avem $x_3 = \sigma_1, y_3 = -\sigma_2, z_3 = \sigma_3$.

Presupunem că $A^k = x_k A^2 + y_k A + z_k I_3$ este adevărată pentru $k \geq 3$. Atunci avem $A^{k+1} = A^k A = $
$= (x_k A^2 + y_k A + z_k I_3)A = (x_3 x_k + y_k)A^2 + (y_3 x_k + z_k)A + z_3 x_k I_3$.

Notând (2) $\begin{cases} x_{k+1} = x_3 x_k + y_k \\ y_{k+1} = y_3 x_k + z_k \\ z_{k+1} = z_3 x_k \end{cases}$, obținem $A^{k+1} = x_{k+1} A^2 + y_{k+1} A + z_{k+1} I_3$, deci proprietatea este adevărată $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Din (2) rezultă relația de recurență $x_{n+1} = x_3 x_n + y_3 x_{n-1} + z_3 x_{n-1}, n \geq 3$, căreia i se asociază ecuația caracteristică (3) $r^3 = x_3 r^2 + y_3 r + z_3$ care este totuna cu ecuația caracteristică (1).

Dacă ecuația caracteristică (3) are rădăcinile r_1, r_2, r_3 reale distincte atunci $x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + c_3 r_3^n$.

Dacă $r_1 = r_2 \in \mathbf{R}$ şi $r_1 \neq r_2 \in \mathbf{R}$, atunci $x_n = (c_1 + c_2 n) r_1^n + c_3 r_3^n$.

Dacă $r_1 \in \mathbf{R}$ iar $r_2, r_3 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$, fie $r_3 = \rho(\cos t + i \sin t)$, atunci $x_n = c_1 r_1^n + \rho^n (c_2 \cos nt + c_3 \sin nt)$.

Din (2) rezultă imediat y_n şi z_n, după care se poate calcula A^n.

Exemplu 2.3.10.: Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n, n \in \mathbf{N}^*$.

Aplicând propoziția de mai sus, rezultă $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 1$ iar ecuația caracteristică a matricei A devine $A^3 = 3A^2 - 3A + I_3$, de unde

$x_3 = 3, y_3 = -3, z_3 = 1$. Ecuația caracteristică (3) devine $r^3 = 3r^2 - 3r + 1$ de unde $r_1 = r_2 = r_3 = 1$.

Ținând cont că $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$, obținem $x_n = \dfrac{n^2 - n}{2}$. Din $z_n = z_3 x_{n-1}, y_n = y_3 x_{n-1} + z_{n-1}$ se obține $z_n = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}, y_n = -n(n-2)$. Deci $A^n = x_n A^2 + y_n A + z_n I_3$, adică $A^n = \dfrac{n^2 - n}{2} A^2 - n(n-2)A + + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} I_3$,

de unde se obține $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}^*$, rezultat ce se putea obține

ușor calculând A^2, A^3 până se observa regula de obținere a matricei A, rezultat ce se verifică prin inducție matematică sau aplicând binomul lui Newton, obsevând că $A = I_3 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.11. Polinom minimal al unei matrice

Fie K un corp de numere și $A \in M_n$(K). Există polinoame diferite de 0 din K[X] care admit pe A ca rădăcină, de exemplu p_A.

Proprietate 2.3.12. Fie f un polinom de grad minim printre polinoamele diferite de 0 din K[X] care admit pe A ca rădăcină. Pentru orice $g \in$K[X] care admite pe A ca rădăcină există $q \in$K[X] astfel încât $g = f \cdot q$, adică f divide în K[X] pe g.

Demonstrație:

Fie $q, r \in$K[X] astfel încât $g = f \cdot q + r$, grad $r <$ grad f. Luând valoarea în A a polinoamelor din egalitatea precedentă, obținem $r(A) = 0$.

Dacă $r \neq 0$ se constrazice alegerea lui f. Așadar, $r = 0$, deci $g = f \cdot q$.

Fie $f = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \ldots + a_1 X + a_0, a_d \neq 0$, polinomul din enunțul propoziției de mai sus. Polinomul $a_d^{-1} f$ admite de asemenea pe A ca rădăcină, este monic și are gradul tot d.

Dacă f_1 şi f_2 sunt două polinoame monice de grad d din K[X] care admite pe A ca rădăcină, atunci $f_1 = f_2$. Într-adevăr, conform propoziţiei demonstrate f_1 şi f_2 se divid reciproc în K[X] şi fiind monice se deduce imediat că $f_1 = f_2$.

Definiţie 2.3.13. Fie K un corp de numere şi $A \in M_n$(K). Polinomul monic m_A de grad minim din K[X] care admite pe A ca rădăcină se numeşte **polinomul minimal** al lui A.

Exemplu 2.3.14. Fie $A \in M_3(\mathbf{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Polinomul carasteristic al lui A este $p_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & -1 & 0 \\ -1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = -(X-1)^2(X+1)$. Divizorii lui $p_A(X)$ sunt 1, $X - 1$, $X + 1$, $(X - 1)^2$, $(X - 1)(X + 1) = X^2 - 1$, şi $(X - 1)^2(X + 1)$.

Polinomul $m_A(X)$ va fi polinomul de grad minim din lista de mai sus ai divizorilor lui $p_A(X)$.

Cum $A^2 = I_2$ rezultă că $X^2 - 1$ admite pe A ca rădăcină şi cum 1, $X - 1$ şi $X + 1$ nu admit pe A ca rădăcină, deducem că $m_A(X) = X^2 - 1$.

Din ultima propoziţie şi teorema lui Cayley-Hamilton, deducem următorul:

Corolar 2.3.15. Fie K un corp de numere şi $A \in M_n$(K). Atunci m_A divide în K[X] pe p_A, adică polinomul minimal este divizor al polinomului caracteristic.

Dacă d_A = grad (m_A), atunci $d_A \le n$.

2.3.16. Polinomul minimal al unui număr algebric

Fie K un corp de numere $f \in$ K[X] un polinom de grad d, $d > 0$. Spunem că f este **reductibil** peste K, dacă există $g, h \in$ K[X] astfel încât $f = g \cdot h$, grad(g) $< d$ şi grad(h) $< d$. În caz contrar, spunem că f este polinom **inductibil** peste K. Polinoamele inductibile peste **C** sunt cele de gradul 1, iar peste **R** cele de gradul 1 şi cele de gradul 2 fără rădăcini reale.

Fie K un corp de numere şi $z \in \mathbf{C}$. Spunem că z este **algebric** peste K, dacă există $g \in$ K[X], $g \neq 0$, astfel încât $g(z) = 0$. În caz contrar, spunem că z este **transcendent** peste K.

Numărul $\sqrt[3]{2}$ este algebric peste **Q** deoarece $g(\sqrt[3]{2})=0$, unde $g=X^2-2\in\mathbf{Q}$.

Dacă $z\in$ **C**, $z = a + bi$, cu $a,b\in$ **R**, atunci $g(z) = 0$, unde $g=X^2-2aX+a^2+b^2\in\mathbf{R}[X]$, deci orice număr complex este algebric peste **R**.

Numerele reale π şi e (baza logaritmilor naturali) sunt transcendente peste **Q**.

Fie $z\in\mathbf{C}$ un număr algebric peste corpul de numere K. Polinomul monic f de grad minim din K[X] care admite pe z ca rădăcină se numeşte **polinomul minimal** al lui z peste K.

Ca şi în cazul matricelor, se arată că f este unic determinat şi că divide în K[X] orice polinom $g\in$ K[X] cu proprietatea $g(z) = 0$.

Proprietate 2.3.17. Fie K un corp de numere şi $z\in\mathbf{C}$, z algebric peste K. Atunci polinomul minimal f al lui z peste K este ireductibil peste K.

Demonstrație:

Fie n = grad(f). Evident $n > 0$. Dacă f este reductibil peste K, atunci există $g,h\in$ K[X] astfel încât $f=g\cdot h$, grad(g) < n şi grad(h) < n. Luând valoarea în z a polinoamelor din ultima egalitate se obține $g(z)h(z)=f(z)=0$, de unde $g(z) = 0$ sau $h(z) = 0$, ceea ce contrazice definiția polinomului minimal. Rămâne adevărat că f este ireductibil peste K.

Observație 2.3.18. Polinomul minimal al unei matrice nu este obligatoriu ireductibil după cum rezultă din exemplul dat anterior. Ireductibilitatea polinomului minimal al unui număr algebric s-a stabilit folosind faptul că produsul a două numere complexe diferite de zero este diferit de zero, proprietate care nu mai este adevărată în cazul matricelor.

Observație 2.3.19. Fie $f\in$ K[X] un polinom ireductibil peste K şi $z\in\mathbf{C}$ o rădăcină a lui f. Atunci polinomul minimal al lui z peste K este chiar f. În adevăr, cum $f(z) = 0$, polinomul minimal al lui z divide pe f şi cum singurul divizor monic de grad pozitiv al lui f este f, se obține rezultatul menționat.

2.4. Teorema lui Frobenius

Teoremă 2.4.1. (Frobenius). Fie K un corp de numere şi $A\in M_n$ (K). Polinoamele p_A şi m_A admit aceeaşi divizori ireductibili peste K.

Demonstrație:

Cum m_A divide pe p_A (conform corolarului) este clar că orice divizor ireductibil al lui m_A este şi al lui p_A. Rămâne să arătăm că dacă f este un divizor ireductibil peste K al lui p_A, atunci f este divizor şi al lui m_A. Evident, putem presupune că f este monic. Fie $\alpha\in$ K o rădăcină a lui f. Conform observației 2.4.19., polinomul minimal al lui α este f. Dacă $m_A(\alpha)$ = 0, atunci f divide pe

m_A şi demonstraţia este încheiată. Trebuie să excludem cazul $m_A(\alpha) \neq 0$. Dacă $m_A(\alpha) \neq 0$, atunci cel mai mare divizor comun în K[X] al lui $m_A(X)$ şi $X - \alpha$ este egal cu 1. Conform unei proprietăţi cunoscute a celui mai mare divizor comun, există $g,h \in$ K[X] astfel încât $m_A(X)g(X) + (X-\alpha)h(X) = 1$.

Luând valoarea în A a polinoamelor din egalitatea precedentă se obţine $(A - \alpha I_n)h(A) = I_n$, de unde $1 = \det(I_n) = \det(A - \alpha I_n)\det(h(A)) = (-1)^n p_A(\alpha)\det(h(A))$.

Cum f divide pe p_A şi $f(\alpha) = 0$, $p_A(\alpha) = 0$, de unde 1 = 0, contradicţie. Rămâne adevărat că $m_A(\alpha) = 0$, deci f divide pe m_A.

Observaţie 2.4.2. Un alt argument care permite demonstraţia teoremei se bazează pe problema $p(A) = 0$ rezultă $p(\lambda) = 0, \forall \lambda$ valoare proprie.

Avem $m_A(A) = 0$ rezultă $m_A(\lambda) = 0$ pentru orice valoare proprie a matricei A, deci m_A şi f_A au aceleaşi rădăcini, diferă eventual doar ordinul de multiplicitate.

Deoarece λ este algebric peste K (rădăcina a lui $f_A \in$ K[X]), λ admite un polinom minimal (de gradul minim $g_\lambda \in$ K[X] pentru care $g_\lambda(\lambda) = 0$, atunci g_λ este factor în m_A şi evident f_A.

2.5. Probleme rezolvate (2.2)

R2.3.1. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots\dots\dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluție:

Sistemul $CX = \lambda X, X \neq O_{n,1}$ se scrie $\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ x_4 = \lambda x_3 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$.

Din ultima relație rezultă $x_1 = 0$ sau $\lambda^n = 1$. Dacă $x_1 = 0$ din celelalte relații rezultă $X = O_{n,1}$, fals. Deci $\lambda^n = 1$ şi obținem valorile proprii $\lambda_k = \varepsilon_k = \overline{0, n-1}$ şi vectorii proprii $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_k \\ \varepsilon_k^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_k^{p-1} \end{pmatrix}, k = \overline{0, n-1}$ $\left(\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right.$, rădăcinile de ordin n ale unității).

R2.3.2. Să se descompună într-un produs de factori, polinomul caracteristic al matricei $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$. Să se deducă valorile proprii ale matricei A şi valoarea lui det$A$.

Soluție:

Polinomul caracteristica se scrie:

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix} a^2-\lambda & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2-\lambda & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Se adună la elementele primei coloane, elementele celorlalte coloane, ceea ce permite a scoate în factor $(a+b)^2-\lambda$. Rezultă:

$$p_A(\lambda)=\left[(a+b)^2-\lambda\right]\cdot\begin{vmatrix} a^2-ab-\lambda & b^2-ab & ab-b^2 \\ b^2-ab & a^2-ab-\lambda & ab-b^2 \\ 0 & 0 & a^2-b^2-\lambda \end{vmatrix}=\left[(a+b)^2-\lambda\right]\cdot$$

$\cdot\left[(a-b)^2-\lambda\right]\cdot(a^2-b^2-\lambda)^2$. Valorile proprii sunt $\lambda_1=(a+b)^2$, $\lambda_2=(a-b)^2$, $\lambda_3=\lambda_4=a^2-b^2$.

Determinantul lui A se obține făcând $\lambda=0$ în polinomul caracteristic, aşadar $\det A=(a^2-b^2)^2$.

R2.3.3. Fie A, $B\in M_n(\mathbf{C})$. Să se arate că polinomul caracteristic al matricei $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$, este egal cu produsul polinoamelor caracteristice ale matricelor $A+iB$ şi $A-iB$.

Soluție:

Avem

$$\det(M-\lambda I_{2n})=\begin{vmatrix} A-\lambda I_n & -B \\ B & A-\lambda I_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (A-iB)-\lambda I_n & -B-iA+\lambda i I_n \\ B & A-\lambda I_n \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} (A-iB)-\lambda I_n & 0 \\ B & (A+iB)-\lambda I_n \end{vmatrix}=\det((A-iB)-\lambda I_n)\det((A+iB)-\lambda I_n).$$

R2.3.4. Să se arate că dacă $A\in M_n(\mathbf{R})$ este o matrice antisimetrică şi reală, atunci $\det A\geq 0$.

Soluție:

Dacă $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei A, atunci $\det A=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n$. Cum A este antisimetrică şi reală, atunci ea este antihermetiană, deci valorile proprii sunt de forma $i\cdot b, b\in\mathbf{R}$. Evident, dacă o valoare proprie este reală, ea este $\lambda = 0$ şi det A = 0 (în particular, o matrice antisimetrică şi reală, de ordin impar are determinantul zero).

Dacă nu, polinomul caracteristic fiind cu coeficienți reali, are rădăcinile complexe conjugate, deci rădăcinile se cuplează în perechi de forma $\lambda_1 = ib_1, \lambda_2 = -ib_1, \ldots, \lambda_{2k-1} = ib_k, \lambda_{2k} = -ib_k$ cu produsul $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_{2k} = b_1^2 \cdot b_2^2 \cdot \ldots \cdot b_k^2 > 0$.

R2.3.5. Fie $A \in M_n(\mathbf{R})$ o matrice reală şi $\lambda = a + ib \in \mathbf{C}$, $a \in \mathbf{R}$, b $\in \mathbf{R}^*$ o valoare proprie nereală iar $Z = X + iY \neq O_{n,1}$ un vector propriu corespunzător cu X, $Y \in M_{n,1}(\mathbf{R})$.

Să se arate că:

a). $X \neq O_{n,1}, Y \neq O_{n,1}$;

b). Dacă $\alpha X + \beta Y = O_{n,1}, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ rezultă $\alpha = \beta = 0$;

c). Dacă $f \in \mathbf{R}[X]$ este un polinom şi $f(\lambda) \in \mathbf{R}$, atunci X şi Y sunt vectori proprii pentru matricea $f(A)$.

Soluție:

Avem $A(X + iY) = (a + ib)(X + iY)$ şi rezultă $S: \begin{cases} AX = aX - bY & (1) \\ AY = aY + bX & (2) \end{cases}$.

a). Dacă $Y = O_{n,1}$, din relația a doua rezultă $bX = O_{n,1}$ ($b \neq 0$), deci $X = O_{n,1}$ şi obținem $Z = O_{n,1}$ (constradicție), deci $Y \neq O_{n,1}$.

Dacă $X = O_{n,1}$, din prima relație rezultă $-bY = O_{n,1}$, contradicție. Deci $X \neq O_{n,1}$ şi $Y \neq O_{n,1}$;

b). Avem: $\begin{matrix} AX = aX - bY \,|\cdot \alpha \\ AY = aY - bX \,|\cdot \beta \end{matrix}$, de unde obținem $A(\alpha X + \beta Y) = a(\alpha X + \beta Y) + b(\beta X - \alpha Y)$ sau $\begin{cases} \beta X - \alpha Y = O_{n,1} \,|\cdot \beta \\ \alpha X + \beta Y = O_{n,1} \,|\cdot \alpha \end{cases}$, de unde rezultă $(\alpha^2 + \beta^2)X = O_{n,1}$, sau $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, adică $\alpha = \beta = 0$.

c). Avem $f(A)Z = f(\lambda)Z$ sau $f(A)(X + iY) = f(\lambda)(X + iY)$, de unde obținem $f(A)X = f(\lambda)X$ şi $f(A)Y = f(\lambda)Y$.

R2.3.6. Dacă $A \in M_n(\mathbf{C})$ şi $P \in \mathbf{C}[X]$ astfel încât $p(A) = 0$, atunci pentru orice valoare proprie λ a matricei A avem $p(\lambda) = 0$ (valorile proprii sunt rădăcini ale oricărui polinom care anulează matricea A).

Soluție:

Fie λ valoare proprie şi X vector propriu corespunzător pentru matricea A. Avem $AX = \lambda X$, $X \neq O_{n,1}$ şi $p(A)X = p(\lambda)X, X \neq O_{n,1}$, de unde $p(\lambda)X = 0, X \neq O_{n,1}$, deci $p(\lambda) = 0$.

Probleme rezolvate (2.4)

R2.6.1. Fie $A \in M_n(\mathbf{C})$. Dacă $A^n \neq O_n$, atunci $A^k \neq O_n, \forall k \in \mathbf{N}$.

Soluție:

Conform teoremei lui Cayley-Hamilton, putem scrie: (1) $a_1 I_n + a_2 A + a_3 A^2 + \ldots + a_n A^{n-1} + A^n = 0$.

Presupunem prim absurd că există $k > n$ astfel încât $A^k = O_n$ şi alegem k minim cu această proprietate, deci $A^{k-1} \neq O_n$. În (1) înmulțim cu A^{k-1} şi rezultă $a_1 A^{k-1} + a_2 A^k + a_3 A^{k+1} + \ldots + a_n A^{k+n-2} + A^{k+n-1} = 0$ şi din $A^k = A^{k+1} = \ldots = A^{k+n-1} = O_n$, rezultă $a_1 A^{k-1} = 0$, iar din $A^{k-1} \neq O_n$ obținem $a_1 = 0$.

În (1) înmulțim cu A^{k-2} şi obținem $a_2 A^{k-1} = 0$, deci $a_2 = 0$ şi continuând procedeul, obținem $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, atunci din (1) rezultă $A^n = 0$, contradicție.

R2.6.2. Fie $A^k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$.

a). Dacă $a_{11}^{(k)} = 0, \forall k = \overline{1,n}$, atunci det $A = 0$;

b). Dacă $a_{12}^{(k)} = 0, \forall k = \overline{1,n-1}$, atunci $a_{12}^{(k)} = 0, \forall k \in \mathbf{N}$.

Soluție:

Conform teoremei lui Cayley-Hamilton putem scrie: (2) $A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \sigma_2 A^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}A + \;\; + (-1)^n \sigma_n I_n = O_n$, de unde se obțin n^2 egalități numerice.

a). Urmărind egalitatea de pe poziția (1,1), obținem: $a_{11}^{(n)} - \sigma_1 a_{11}^{(n-1)} + \sigma_2 a_{11}^{(n-2)} - \ldots + (-1)^{n-1} a_{11}^{(1)} \sigma_{n-1} + \;\; + (-1)^n \sigma_n \cdot 1 = 0$ şi din ipoteză rezultă $\sigma_n = 0$, adică det $A = 0$;

b). Urmărind egalitatea de pe poziția (1,2), obținem: $a_{12}^{(n)} - \sigma_1 a_{12}^{(n-1)} + \sigma_2 a_{12}^{(n-2)} - \ldots + (-1)^{n-1} a_{12}^{(1)} \sigma_{n-1} + \;\; + (-1)^n \sigma_n \cdot 0 = 0$, deci $a_{1n}^{(n)} = 0$.

Apoi, înmulțind relația (2) cu A și urmărim egalitatea de pe poziția (1,2), obținem, $a_{12}^{(n+1)} - \sigma_1 a_{12}^{(n)} + \sigma_2 a_{12}^{(n-1)} - \ldots + (-1)^{n-1} a_{12}^{(2)} \sigma_{n-1} + (-1)^n a_{12}^{(1)} \sigma_n = 0$, deci $a_{12}^{(n+1)} = 0$ și prin inducție se arată că $a_{12}^{(n+k)} = 0$, pentru orice $k \in \mathbf{N}$.

R2.6.3. Fie $A \in M_n$. Dacă $|TrA| > n$, atunci $A^k \neq A^p, \forall k, p \in \mathbf{N}, k \neq p$.

Soluție:

Dacă prin absurd ar exista $k, p \in \mathbf{N}$ cu $A^k = A^p$, fie λ valoarea proprie pentru A. Din $AX = \lambda X$, $X \neq O_{n,1}$, rezultă $A^k X = \lambda^k X, A^p X = \lambda^p X$, deci $\lambda^k = \lambda^p$. Avem $|\lambda|^k = |\lambda|^p$ deci $|\lambda| \in \{0,1\}$.

Atunci $|TrA| = |\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_n| \leq n$, contradicție.

R2.6.4. Fie $A \in M_n$. Dacă $TrA = TrA^2 = \ldots = TrA^n = 0$, atunci $A^n = O_n$.

Soluție:

Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mathrm{n}}$ sunt valorile proprii ale matricei A, atunci $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ sunt valorile proprii ale matricei A^k. Se obține sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 0 \\ \ldots \\ \lambda_1^n + \lambda_2^n + \ldots + \lambda_n^n = 0 \end{cases}.$$

Vom arăta că singura soluție este $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{\mathrm{n}} = 0$.

Dacă scriem sistemul sub forma $\begin{cases} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 + \ldots + \lambda_n \cdot 1 = 0 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 \cdot \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_1^2 + \lambda_2 \cdot \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n \cdot \lambda_n^2 = 0 \\ \ldots \\ \lambda_1 \cdot \lambda_1^{n-1} + \lambda_2 \cdot \lambda_2^{n-1} + \ldots + \lambda_n \cdot \lambda_n^{n-1} = 0 \end{cases}$

rezultă că $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mathrm{n}})$ este soluție a unui sistem de ecuații liniare cu determinantul sistemului, de tip Vandermonde $\Delta = \mathrm{V}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Dacă $\Delta \neq 0$, atunci $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ (concluzia dorită).

Dacă presupunem $\Delta = 0$, atunci $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nu sunt distincte. Să presupunem că $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt distincte cu multiplicitățile $k_1, k_2, \ldots, k_p$

($k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$). Reținem din sistem primele p ecuații:

$$\begin{cases} (k_1\lambda_1)\cdot 1 + (k_2\lambda_2)\cdot 1 + \ldots + (k_p\lambda_p)\cdot 1 = 0 \\ (k_1\lambda_1)\cdot \lambda_1 + (k_2\lambda_2)\cdot \lambda_2 + \ldots + (k_p\lambda_p)\cdot \lambda_p = 0 \\ \ldots \\ (k_1\lambda_1)\cdot \lambda_1^{p-1} + (k_2\lambda_2)\cdot \lambda_2^{p-1} + \ldots + (k_p\lambda_p)\cdot \lambda_n^{p-1} = 0 \end{cases}.$$

Sistemul cu determinantul nenul $\mathrm{V}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \neq 0$ şi soluția $(k_1\lambda_1, k_2\lambda_2, \ldots, k_p\lambda_p)$ care trebuie să fie soluția banală, deci $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$.

Dacă toate valorile proprii ale matricei A sunt egale cu 0, polinomul caracteristic este $f_A(X) = (-X)^n$ şi din teorema lui Cayley-Hamilton, rezultă $(-A)^n = 0$, adică $A^n = O_n$.

R2.6.5. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine un polinom de grad minim care are pe A ca rădăcină.

Soluție:

Cum A este rădăcină a polinomului său caracteristic $p_A(X) = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X-1 & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = \quad = X^3 - X^2 - 2X$. Deci $A^3 - A^2 - 2A = O_3$ (1).

Polinomul minimal căutat este divizor al polinomului $X^3 - X^2 - 2X = X(X-2)(X+1)$. Deci polinomul minimal este unul dintre polinoamele X, $X-2$, $X+1$, $X(X-2)$, $X(X+1)$, $(X-2)(X+1)$, $X(X- \quad -2)(X+1)$.

Obsevăm că A nu verifică nici una din relațiile $A = O_3, A - 2I_3 = O_3$, $A + I_3 = O_3$, $A(A - 2I_3) = O_3$, $(A - 2I_3)(A + I_3) = O_3$, şi deci polinomil minimal este $X(X-2)(X+1)$, adică $(A - 2I_3)(A + I_3) = O_3$.

R2.6.6. Fie $A \in M_n(\mathbf{R})$ astfel încât $A^3 = A + I_3$. Atunci $\det A > 0$.

Soluție:

Din ipoteză rezultă că m_A divide polinomul $X^3 - X - 1$. Folosind eventual mijloacele analizei matematice, se arată că $X^3 - X - 1$ are o singură rădăcină reală *a* şi aceasta este strict pozitivă.

Deci $X^3 - X - 1 = (X-a)(X^2 + bX + c)$ cu $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a > 0$ şi $b^2 - 4c < 0$. Evident, $c > 0$. Cum m_A divide pe $X^3 - X - 1$, rezultă că divizorii inductibili peste **R** ai lui m_A, deci şi ai lui p_A, sunt din mulțimea $\{X - a, X^2 + bX + c\}$.

Descompunând pe p_A în produs de factori inductibili peste **R**, avem $X^n - (a_{11} + \ldots + a_{nn})X^{n-1} + \ldots +$
$+ (-1)^n \det A = p_A(X) = (X-a)^s (X^2 + bX + c)^t$, cu $s, t \in \mathbf{N}$, $s + 2t = n$.

Luând valoarea în 0 a polinomului din egalitatea precedentă, obținem $(-1)^n \det A = (-1)^s a^s c^t = \quad = (-1)^{n-2t} a^s c^t = (-1)^n a^s c^t$, de unde $\det(A) = a^s c^t > 0$.

R2.6.7. Fie $A \in M_2(\mathbf{Z})$ cu proprietatea că există $n \in \mathbf{N}^*$, $(n,6) = 1$, astfel încât $A^n = I_2$, atunci $A = I_2$.

Soluție:

Avem $A \in M_2(\mathbf{Z}) \subseteq M_2(\mathbf{R})$ şi fie m_A polinomul minimal în $\mathbf{R}[X]$ al lui *A*. Dacă $d_A = 1$, atunci $m_A = X - \alpha$ cu $\alpha \in \mathbf{R}$. Cum $X - \alpha = m_A$ este divizor al lui $X^n - 1$ şi cum acest din urmă polinom are în cazul $(n,2) = 1$ ca singură rădăcină reală $\alpha = 1$, rezultă că $m_A = X - 1$, deci $A = I_2$. Dacă $d_A = 2$, atunci $m_A = p_A = X^2 + pX + q \in \mathbf{Z}[x]$.

Când $(n,2) = 1$, $X^n - 1$ are o singură rădăcină reală, anume pe 1, şi aceasta este simplă. Cum m_A divede pe $X^n - 1$, avem $\Delta = p^2 - 4q < 0$, deci $m_A = X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1, 0 < k < n$. Dar $m_A = p_A \in \mathbf{Z}[X]$, de unde rezultă că $\cos\frac{2k\pi}{n} \in \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$. Cum $\Delta < 0$, rezultă că $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$ sau $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \pm\frac{1}{2}$. Însă din $(n,2) = 1$ rezultă că $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \neq 0$, iar din $(n,3) = 1$ rezultă că $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \neq \pm\frac{1}{2}$. Deci cazul $d_A = 2$ nu este posibil.

3. Transformari elementare in matrice

3.1 Transformări elementare

Definiție 3.1.1. Prin transformări elementare înțelegem următoarele operații (efectuate asupra unei matrice).

a) înmulțirea unei linii (coloane) cu un număr nenul;
b) schimbarea a două linii (coloane) între ele;
c) adunarea la elementele unei linii (coloane) a elementelor altei linii (coloane) înmulțite cu același număr nenul.

Definiție 3.1.2. Fiind dată o matrice EMBED Equation.3 , vom înțelege că matricea EMBED Equation.3 este **echivalentă** cu A și scriem $A \approx B$, deci B se obține din A prin efectuarea unui număr finit de transformări elementare.

Definiție 3.1.3. Prin **matrice elementară de linii**, înțelegem matricea obținută din matricea unitate I_m prin efectuarea transformărilor corespunzătoare.

Prin **matrice elementară de coloane**, înțelegem matricea obținută din matricea unitate I_n prin efectuarea transformărilor corespunzătoare.

Exemplu 3.1.4. (matrice elementară de linii)

$$L_{1i} \qquad \begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array}
\end{array} \in M_m(\mathbf{C}),\ \alpha \neq 0.$$

$$L_{2\ i,j} \qquad \begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{ccccc} & & i & j & \end{array}
\end{array} \in M_m(\mathbf{C})$$

$$L_{3\,i,i+j} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & i & j & & \end{array} \end{array} \in M_m(\mathbf{C})$$

Teoremă 3.1.5. Efectuarea în matricea $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ a unei transformări elementare pe linii, revine la înmulțirea matricei A la stânga cu matricea elementară de linii corespunzătoare transformării.

Efectuarea în matricea $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ a unei transformări elementare pe coloane, revine la înmulțirea la dreapta a matricei A cu matricea elementară de coloane corespunzătoare transformării.

Demonstrație: Fie $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$. Să presupunem că în matricea A vrem să facem următoarea transformare elementară: schimbarea liniilor i şi j între ele $(1 \le i < j \le m)$.

Atunci, vom înmulți matricea A la stânga cu matricea elementelor de linii, ce se obține din I_m, schimbând liniile i şi j între ele. Obținem astfel transformarea dorită.

Analog se demonstrează pentru celelalte cazuri.

3.2. Calculul rangului unei matrice prin transformări elementare

Definiție 3.2.1. Matricea $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ se numeşte **matrice diagonală** dacă $a_{ij} = 0$, $(\forall) i \neq j$, adică are forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{rr} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & \ddots & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Teoremă 3.2.2. Orice matrice nenulă $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ se poate aduce, prin transformări elementare, la forma diagonală.

Demonstrație: Deoarece $A \neq O_{m,n}$, rezultă că există un număr $a_{ij} \neq 0$. Dacă $a_{11} = 0$, atunci aplicând transformări elementare aducem pe a_{ij} în locul lui a_{11} (permutăm prima linie cu linia *i* şi apoi prima coloană cu coloana *j*) şi obținem o matrice echivalentă cu *A*.

Deci, putem presupune că $a_{11} \neq 0$. Folosind transformări elementare (scăzând din fiecare linie $j \neq 1$ prima linie înmulțită cu $a_{11}^{-1} a_{ji}$, apoi din fiecare coloană obținută prima coloană înmulțită cu $a_{11}^{-1} a_{1k}$, $k \neq 1$) obținem o matrice echivalentă cu cea inițială având toate elementele de pe prima linie egale cu zero, mai puțin primul element. Deci, obținem o matrice $A' \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ echivalentă cu *A* şi având următoarea formă:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}^{'} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{'} & a_{23}^{'} & \cdots & a_{2n}^{'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{m2}^{'} & \cdots & \cdots & a_{mn}^{'} \end{pmatrix}$$

În continuare reluăm raționamentul cu matricea:

$$B = \begin{pmatrix} a_{22}^{'} & a_{23}^{'} & \cdots & a_{2n}^{'} \\ a_{32}^{'} & a_{33}^{'} & \cdots & a_{3n}^{'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m2}^{'} & a_{m3}^{'} & \cdots & a_{mn}^{'} \end{pmatrix}$$ care este o matrice de tip $(m-1, n-1)$.

După un număr finit de paşi obținem o matrice diagonală $D \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ de forma

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$, echivalentă cu matricea *A*.

Operația de a aduce o matrice $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ la forma diagonală de mai sus, se numeşte **diagonalizarea matricei** *A*.

Exemplu 3.2.3. Să se aducă la forma diagonală, folosind transformările elementare, matricea:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -12 & 5 & -8 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluție:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -12 & 5 & -8 & -5 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -12 & -8 & -5 & 1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & -12 & -3 & -15 & -9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -12 & -15 & -9 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -18 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propoziția precedentă ne ajută să calculăm rangul unei matrice reducând matricea inițială, prin transformări elementare, la o matrice diagonală.
Conform teoremei demonstrate mai sus, rezultă că:

Fiind dată o matrice $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$, există o matrice diagonală de forma

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

unde primele r elemente de pe diagonala principală sunt 1 iar restul 0 şi astfel încât $D \approx A$. În acest caz $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} D = r$.

Proprietate 3.2.4. Fie $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$. Dacă $A \approx B$, atunci $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

Demonstrație: Rezultă imediat din faptul că rangul unei matrice nu se schimbă dacă permutăm două linii (sau coloane) sau dacă la o linie (coloană) adunăm o altă linie (coloană) înmulțită cu un element nenul din **C**.

a) Într-adevăr, să presupunem că am schimbat două linii (coloane) între ele.

Dacă ambele linii intră în minorul matricei *A*, determinanții celor două matrice au valori opuse.

Dacă ambele linii nu intră în componența minorului lui *A*, nu vor intra nici în componența minorului lui *B*. Deci, determinantul minor ce dă rangul matricei *A*, rămâne egal cu determinantul ce dă rangul matricei *B*.

Cazul în care o singură linie intră în minorul matricei *A* se reduce la precedentele.

b) Să presupunem că matricea *B* se obține din matricea *A* prin înmulțirea unei linii (coloane) din matricea *A* cu un număr $\alpha \neq 0$.

Dacă linia aparține minorului nenul Δ din *A*, avem în noua matrice minorul corespunzător $k\Delta$.

Deci, rangul se păstrează.

c) Să presupunem că matricea *B* se obține din matricea *A* prin adunarea elementelor liniei *i* din *A* înmulțite cu $\alpha_1 \neq 0$ cu elemntele liniei *j*, înmulțite cu $\alpha_2 \neq 0$.

Într-adevăr, dacă liniile *i* şi *j* ale matricei *A* nu aparțin minorului *A* ce dă rangul matricei, proprietatea este evidentă.

Dacă liniile *i* şi *j* aparțin minorului lui *A* ce dă rangul, atunci minorul corespunzător din *B* se va descompune în suma a doi determinanți, dintre care unul va fi nul.

Dacă una din linii, de exemplu *i*, aparține minorului matricei *A*, bordăm acest minor, de ordinul *r*, cu o coloană oarecare din *A* şi cu linia *j*, din *A* conform definiției rangului, determinantul ultim este nul, dar un determinant de ordinul $r+1$, obținut prin condițiile de mai sus se va descompune în suma a doi determinanți de ordinul $r+1$, care aparțin matricei *A* şi deci sunt nuli.

Prin urmare, pentru a găsi rangul unei matrice *A*, aducem această matrice prin transformări elementare la forma diagonală, iar rangul matricei diagonalizate (echivalentă cu matricea *A*) este evident *r*, iar acesta în baza teoremei este şi rangul matricei *A*.

Exemplu 3.2.5. Să se afle rangul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

Soluție:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12\\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8\\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7\\ 0 & 6 & -10 & -8 & -16\\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8\\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7\\ 0 & 6 & -10 & -8 & -16\\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\approx$$

$$\approx\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -5 & 1 & -8\\ 0 & 1 & 3 & -1 & 7\\ 0 & 6 & -10 & 2 & -16\\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -5 & 3 & -8\\ 0 & -1 & 3 & 1 & 7\\ 0 & 2 & -10 & 6 & -16\\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -5 & 3 & -8\\ 0 & 0 & -2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1\end{pmatrix}\approx$$

$$\approx\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Rezultă $\operatorname{rang} A = 3$.

Observație 3.2.6. Se poate demonstra că, dacă $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ şi $\operatorname{rang} A = k$, atunci există matricele $Q \in M_m(\mathbf{C})$ şi $P \in M_n(\mathbf{C})$ nesingulare astfel încât

$$Q\cdot A\cdot P \approx \begin{pmatrix} I_n & \vdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}.$$

3.3. Calculul inversei unei matrice prin transformări elementare

Fie $A \in M_n(\mathbf{C})$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=1,n}}$ o matrice inversabilă, deci există o matrice $B \in M_n(\mathbf{C})$ $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=1,n}}$ astfel încât $A\cdot B = B\cdot A = I_n$.

Plecând de la matricea *A*, vom determina matricea *B* astfel încât $A\cdot B = I_n$.

Avem: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Necunoscutele $b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1}$ se obțin rezolvând sistemul liniar:

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} = 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots + a_{2n}b_{n1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \ldots + a_{nn}b_{n1} = 0 \end{cases},$$

folosind metoda lui Gauss, reprezentând sistemul printr-un tablou de forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & 0 \end{pmatrix} \text{(matricea extinsă a sistemului)}$$

Analog, obținem matricele extinse:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece elementele situate în stânga barelor verticale sunt aceleaşi, vom rezolva simultan cele *n* sisteme, prin metoda Gauss, înlocuindu-le prin următoarea matrice:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

având cele două componente, cea din stânga matricea *A* şi cea din dreapta matricea I_n.

Asupra acestora vom efectua simultan aceleaşi transformări elementare până când componenta din stânga, matricea *A*, devine matricea unitate I_n.

Componenta din dreapta, în urma transformărilor elementare efectuate, reprezintă matricea inversă A^{-1}.

Schematic avem:

$\left(A \vdots I_n\right) \approx \left(L_1 A \vdots L_1\right) \approx \cdots \approx \left(L_n L_{n-1} \cdot \ldots \cdot L_1 \cdot A \vdots L_n L_{n-1} \cdot \ldots \cdot L_1\right)$, unde

$L_n L_{n-1} \cdot \ldots \cdot L_1 \cdot A = I_n$ şi $L_n L_{n-1} \cdot \ldots \cdot L_1 = A^{-1}$.

Observaţie 3.3.1. Dacă în urma transformărilor elementare efectuate, componenta din stânga nu devine I_n, atunci matricea respectivă nu este inversabilă (în cazul în care nu am verificat că $\det A \neq 0$).

Exemplu 3.3.2. Să se afle inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Avem:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$ Rezultă

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4. Probleme rezolvate (3)

R3.4.1. Să se determine parametrul $\alpha \in \mathbf{R}$, astfel ca matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

să aibă rangul 3.

Soluție: Efectuând transformările $L_4 + L_3$, $L_2 + L_1$ şi $L_3 - 2L_1$, obținem:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -8 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & \alpha-4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -8 & 3 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \alpha-4 \end{pmatrix}$$

.

În continuare transformările $L_4 + L_3$, $L_3 + L_2$ ne dau

$$A \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & -7 & 5 & \alpha-14 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & -7 & 5 & \alpha-14 \end{pmatrix}$$ şi în sfârşit

transformarea $L_4 - L_3$ ne furnizează $A \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-3 & 0 \end{pmatrix}$.

Pentru ca $\operatorname{rang} A = 3$, trebuie ca $\alpha = 3$.

R3.4.2. Să se afle inversa matricei de ordinul *n*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Soluția I: Scăzând prima coloană din celelalte obținem

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \neq 0$$, deci matricea este inversabilă. Fie:

$$B = (A \vdots I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right).$$

Scăzând linia întâi din celelalte obținem:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

Înmulțind liniile $2, 3, \cdots, n$ cu -1, iar apoi se face scăderea $L_1 - (L_2 + L_3 + \ldots + L_n)$, obținem:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{array} \right).$$

Inversa căutată este $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluția a II-a: Vom afla inversa lui *A*, prin rezolvarea unui sistem.

Fie $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ şi $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ astfel încât $AX = Y$.

Deoarece *A* este inversabilă, rezultă că $X = A^{-1}Y$. Atunci $AX = Y$ se scrie în mod explicit astfel:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 \\ x_1 + x_3 + \ldots + x_n = y_2 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = y_n \end{cases}$$

Să exprimăm pe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în funcție de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Scăzând fiecare ecuație a sistemului, membru cu membru, din prima ecuație, obținem:

$$x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_1 - y_3, \ldots, x_n = y_1 - y_n.$$

Atunci $x_2 + x_3 + \ldots + x_n = (n-1)y_1 - (y_2 + y_3 + \ldots + y_n)$ şi înlocuind în prima ecuație, obținem:

$$x_1 = (2-n)y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n.$$

Prin urmare $X = A^{-1}Y$ se scrie în mod explicit

$$\begin{cases} x_1 = (2-n)y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_1 - y_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = y_1 - y_n \end{cases}$$

Rezultă că inversa matricei *A* este matricea coeficienților nedeterminatelor $y_1, y_2, \ldots, y_n$, adică

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

R3.4.3. Să se rezolve ecuația matriceală:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluție: Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Deoarece $\det A = 1 \neq 0$, rezultă că matricea A este inversabilă.

Fie $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ şi $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ astfel încât $AX = Y$, sau explicit

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 \\ x_2 + x_3 + \ldots + x_n = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

Exprimând $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în funcție de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ obținem:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

Deoarece $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$, rezultă că

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Atunci din ecuația matriceală $AX = B$, rezultă

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Matrice de ordinul doi si trei ca transformari geometrice în plan şi spaţiu

4.1 Aplicaţii liniare

Definiţie 4.1.1. Aplicaţia $f_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_A(x, y) = (x', y')$, unde $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A \in M_2(\mathbf{R})$, se numeşte a**plicaţie liniară**.

Matricea A se numeşte **matricea asociată** transformării f_A.

Proprietate 4.1.2. Aplicaţia liniară $f_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_A(x, y) = (x', y')$, unde $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A \in M_2(\mathbf{R})$, are următoarele proprietăţi:

a) $f_A((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f_A(x_1, y_1) + f_A(x_2, y_2)$, $(\forall)$ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$;

b) $f_A(\alpha(x, y)) = \alpha \cdot f_A(x, y)$, $(\forall)\alpha \in \mathbf{R}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Demonstraţie:

a) Deoarece $A\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = A\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, rezultă imediat egalitatea de demonstrat;

b) De asemenea, din faptul $A \cdot \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \alpha A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, rezultă egalitatea propusă.

Observaţie 4.1.3. 1) Proprietatea de mai sus este echivalentă cu egalitatea

$$f_A(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)) = \alpha f_A(x_1, y_1) + \beta f_A(x_2, y_2),\ (\forall)\alpha, \beta \in \mathbf{R},\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2.$$

2) Avem $f_A(0,0) = (0,0)$

$f_A(-(x, y)) = -f_A(x, y)$, $(\forall)$ $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

$f_{I_2}(x, y) = (x, y)$, transformarea identică.

Definiţie 4.1.4. $\mathrm{Ker}\, f_A = \{(x, y) | f_A(x, y) = (0,0)\}$ şi

$$\mathrm{Im}\, f_A = \{(x', y') | f_A(x, y) = (x', y'), (x, y) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Observaţie 4.1.5. $(\forall) a, b \in \mathbf{R}$, $(\forall)$ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{Ker}\, f_A$, rezultă $a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) \in \mathrm{Ker}\, f_A$.

Definiție 4.1.6. Fie aplicațiile liniare $f_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_A(x,y) = (x',y')$, unde $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ şi $g_B : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $g_B(x',y') = (x'',y'')$, unde $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, atunci prin **compunerea aplicațiilor** g_B şi f_A înțelegem $g_B \circ f_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ şi $(g_B \circ f_A)(x,y) = g_B(f_A(x,y)) = g_B(x',y') = (x'',y'')$, unde $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Matricea asociată compunerii $g_B \circ f_A$ este BA.

4.2. Matrice asociată unei transformări

4.2.1. Matricele asociate unor transformări liniare în plan

În continuare, pentru simplificarea calculelor, vom nota punctul (x,y) în coordonate plane, printr-o matrice punct $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Teoremă 4.2.2. Dacă pentru transformarea liniară $f_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, unde $A \in M_2(\mathbf{R})$, avem $f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ şi $f_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, atunci $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

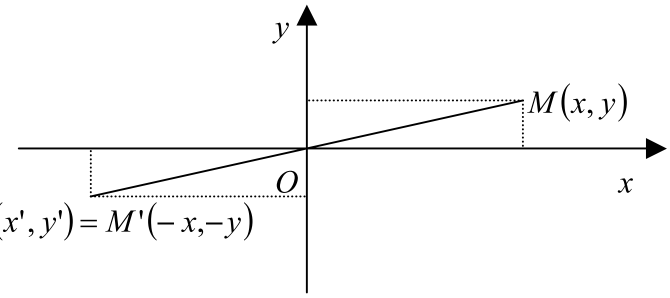
Demonstrație: Fie $A = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$. Cum $f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ şi $f_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, rezultă imediat $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Folosind teorema de mai sus, se poate calcula uşor matricele asociate diferitelor transformări liniare.

4.2.3. Matricea asociată simetriei în raport cu originea axelor de coordonate

Fie transformarea liniară $f_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, unde

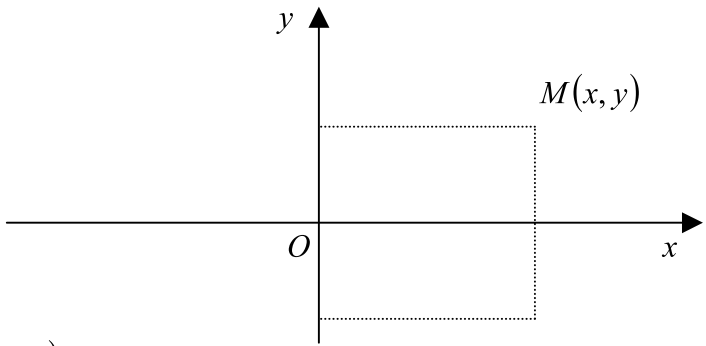
$A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Cum simetricul lui $M(x,y)$ față de *O* este $M'(x',y')=M'(-x,-y)$ (vezi figura)



rezultă că $f_A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ și $f_A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, adică $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ este matricea asociată simetriei în raport cu *O*.

4.2.4. Matricea asociată simetriei față de axa $\mathbf{x'x}$

Fie transformarea liniară $f_A:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $f_A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, unde $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Cum simetricul lui $M(x,y)$ față de axa $x'x$ este $M'(x',y')=M'(-x,y)$ (vezi figura)



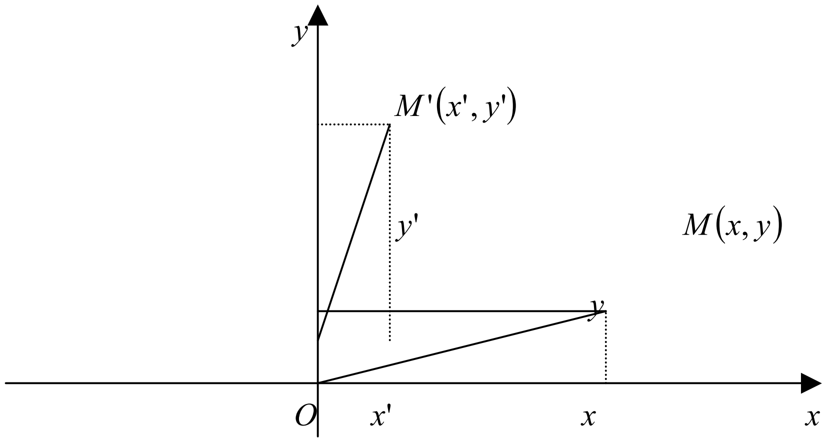
$M'(x',y')=M'(-x,y)$

rezultă $f_A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ și $f_A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, adică $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ este matricea asociată simetriei față de axa $x'x$.

4.2.5. Matricea asociată simetriei față de axa $y'y$

Procedând analog, ca la punctul precedent, se obține că, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este matricea asociată simetriei față de axa $y'y$.

4.2.6. Matricea asociată rotației de centru *O* şi unghi α



Fie $\alpha \in (-2\pi, 2\pi)$. Rotația de centru *O* şi unghi orientat α este aceea transformare care asociază punctului *O* pe el însuşi şi oricărui punct *M*, punctul M' astfel încât $OM' = OM$ şi unghiurile $M\hat{O}M'$ şi $\hat{\alpha}$ sunt congruente şi au aceiaşi orientare.

Fie $f_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ şi $\alpha \geq 0$. Din figura de mai sus, rezultă

$x' = \cos(\theta + \alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha$, $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$. Deci

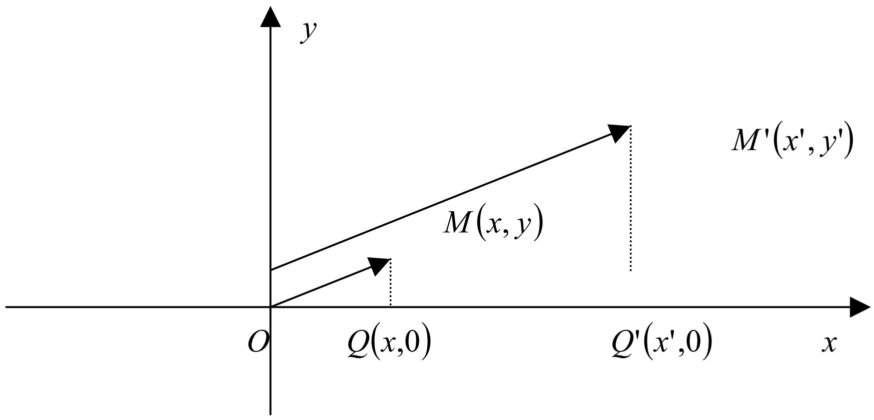
$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$.

Analog, $y' = \sin(\theta + \alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha$, adică $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$.

Cum $f_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ şi $f_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, rezultă că

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ este matricea asociată rotației de unghi α în jurul originii.

4.2.7. Matricea asociată omotetiei de centru *O* şi raport *k*



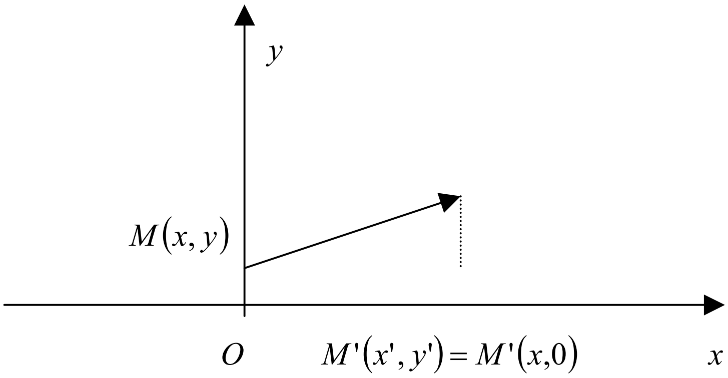
Fie $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$. Omotetia de centru *O* şi raport *k* este o transformare geometrică care asociază punctului *M* punctul M' astfel încât $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

Din figura de mai sus, rezultă că $\overrightarrow{OQ'} = k \cdot \overrightarrow{OQ}$. Obţinem imediat că imaginea punctului (x, y) este (kx, ky).

Fie $f_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Cum $f_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $f_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$, rezultă că matricea asociată omotetiei de centru *O* şi raport *k* este $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

Observaţie Pentru $k = -1$, omotetia este simetria în raport cu originea.

4.2.8. Matricea asociată proiecţiei vectorilor din $\mathbf{R}^2$ pe *Ox*



Fie transformarea liniară $f_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Cum $pr_{Ox}M(x, y) = M'(x', y') = M'(x,0)$, rezultă că $f_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $f_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, adică $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ este matricea asociată proiecției vectorilor din $\mathbf{R}^2$ pe *Ox*.

4.2.9. Matricele asociate unor transformări liniare în spațiu

Vom nota punctul (x, y, z) din spațiu, printr-o matrice punct $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Procedând analog obținem:

4.2.10. Matricea asociată simetriei în raport cu *O*

Fie transformarea liniară $f_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, unde

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}.$$

Cum simetricul lui $M(x, y, z)$ față de *O* este $M'(-x,-y,-z)$, rezultă că $f_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $f_A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, adică $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ este matricea asociată simetriei în raport cu *O*.

4.2.11. Matricea asociată simetriei în raport cu planul *xOy*

Fie transformarea liniară $f_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, unde

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}.$$

Cum simetricul lui $M(x, y, z)$ față de *xOy* este $M'(x, y, -z)$, rezultă că $f_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $f_A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, adică $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ este matricea asociată simetriei în raport cu planul *xOy*.

4.2.12. Matricea asociată rotației în jurul axei *Oz* şi unghi α

Matricea asociată rotației $f_{A_\alpha} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_{A_\alpha}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ este

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2.13. Matricea asociată omotetiei de centru *O* şi raport *k*

Cum $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, rezultă imediat că matricea asociată omotetiei de centru *O* şi raport *k*, unde $f_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, este

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

4.2.14. Matricea asociată proiecției paralele cu axa *Oz* pe planul *xOy*

Rezultă imediat că matricea asociată proiecției paralele cu axa *Oz* pe planul *xOy*, unde $f_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.3. Proiecții în plan și spațiu

4.3.1. Determinarea proiecțiilor din plan

Aplicațiile liniare de proiecție, simetrie, rotație, date în diverse cazuri particulare, pot fi definite și în general.

Definiție 4.3.2. O aplicație $P : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ cu proprietatea $P \circ P = P$, se numește **proiecție în plan**, iar aplicația $P : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cu proprietatea $P \circ P = P$, se numește **proiecție în spațiu**.

Observație 4.3.3. O proiecție este o aplicație idempotentă, adică $\underbrace{P \circ P \circ \ldots \circ P}_{n \text{ ori}} = P$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

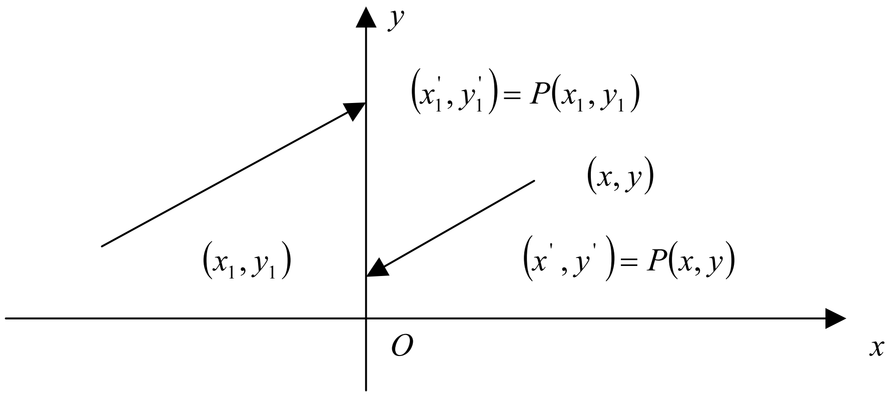
Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matricea proiecției $P : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Din $P \circ P = P$ rezultă $A^2 = A$ cu soluțiile $A_1 = O_2$, $A_2 = I_2$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbf{R}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbf{R}$ și $A_5 = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{a - a^2}{b} & 1 - a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$. (vezi exercițiul **R.1.2.5.**)

Corespunzător, obținem aplicațiile:

$P_1(x, y) = (0,0)$ (toate punctele se proiectează în origine)

$P_2(x, y) = (x, y)$ (toate punctele din plan se proiectează pe plan) – aplicația identică

$P_3(x, y) = (0, cx + y)$

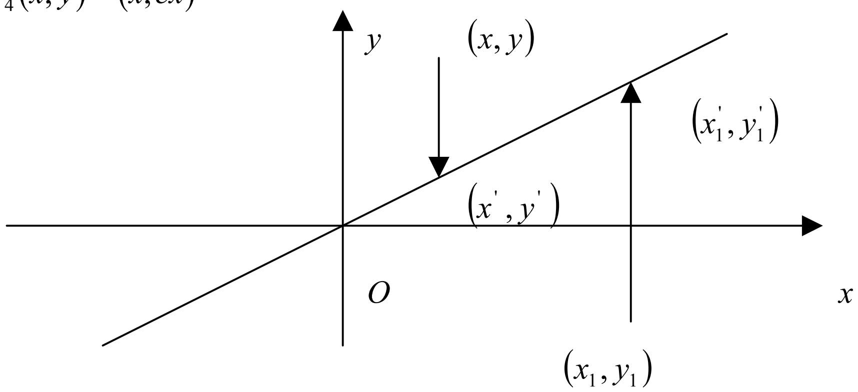


Se observă că orice punct este dus pe axa *Oy*. Arătăm că dreptele ce unesc un punct arbitrar (x, y) cu imaginea sa $(x^{'}, y^{'}) = P(x, y)$ au aceiaşi pantă.

Avem $m = \dfrac{y' - y}{x' - x} = \dfrac{cx + y - y}{-x} = -c$ (constantă)

În concluzie P_3 este proiecția pe axa *Oy* paralelă cu dreapta $d: \ cx + y = 0$.

$P_4(x, y) = (x, cx)$



Imaginea lui *P* este $\operatorname{Im} P = \{(x, cx) | x \in \mathbf{R}\}$, adică dreapta *D*: $y = cx$. Punctele (x, y) şi $P(x, y)$ se găsesc pe aceiaşi verticală.

Aplicația P_4 este proiecția pe dreapta *D*: $y = cx$ paralelă cu axa *Oy*.

$$P_5(x, y) = \left(ax + by, \frac{a - a^2}{b} x + (1 - a) y \right) = \left(ax + by, \frac{1 - a}{b}(ax + by) \right).$$

Se obține $\operatorname{Im} P=\left\{\left(t, \frac{1-a}{b} t\right) \| t \in \mathbf{R}\right\}$, adică dreapta de ecuație *D*: $y=\frac{1-a}{b} x$.

Dreptele ce unesc un punct arbitrar cu imaginea lui, au panta $m=\frac{y'-y}{x'-x}=-\frac{a}{b}$ (constantă).

În concluzie P_5 este proiecția pe dreapta *D*: $y=\frac{1-a}{b} x$ paralelă cu dreapta $d: ax+by=0$.

Observație: Proiecțiile utilizate în anii anteriori, erau proiecții particulare (proiecții ortogonale), proiecție pe o dreaptă paralelă cu o dreaptă ortogonală.

Printr-un calcul mai anevoios sau prin alte metode se deduce că **proiecțiile în spațiu** sunt:
$P_1(x, y, z)=(0,0,0)$, $P_2(x, y, z)=(x, y, z)$, P_3 - proieția pe un plan ce trece prin origine paralelă cu o dreaptă neparalelă cu planul, P_4 - proieția pe o dreaptă ce trece prin origine, paralelă cu un plan, neparalel cu dreapta.

4.4. Simetrii în plan şi spațiu

Definiție 4.4.1. O aplicație liniară $S: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, bijectivă cu proprietatea $S=S^{-1}$, se numeşte **simetrie în plan**, iar aplicația $S: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, bijectivă cu proprietatea $S=S^{-1}$, se numeşte **simetrie în spațiu** (sau involuție).

Fie $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matricea simetriei $S: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. Din $S=S^{-1}$ sau $S \circ S=I_2$ rezultă $B^2=I_2$ cu soluțiile $B_1=-I_2$, $B_2=I_2$, $B_3=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbf{R}$, $B_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbf{R}$ şi $B_5=\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$. (vezi exercițiul **R.1.2.4.**)

Analog ca la proiecții, interpretarea geometrică a simetriilor este:
S_1 - este simetria față de origine,
S_2 - este simetria identică, $S_2(x, y)=(x, y)$
S_3 - este simetria față de axa *Oy*, paralelă cu dreapta $d: cx+2y=0$

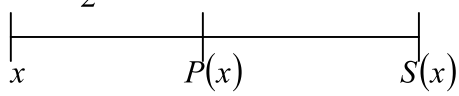
S_4 - este simetria față de dreapta $d:\ cx-2y=0$, paralelă cu axa *Oy*.
S_5 - este simetria față de dreapta $D:\ (a-1)x+by=0$, paralelă cu dreapta $d:\ (a+1)x+by=0$.

Analog cu proiecțiile din spațiu, obținem patru tipuri de simetrii:

Simetria față de origine, simetria identică, simetria față de un plan ce trece prin origine, paralelă cu o dreaptă neparalelă cu planul şi simetria față o dreaptă ce trece prin origine, paralelă cu un plan neparalel cu dreapta.

4.4.2. Legătura între proiecții şi simetrii

Intuitiv se bănuieşte relația $P(x)=\frac{1}{2}(x+S(x))$.



(Punctul $P(x)$ în care se proiectează *x*, este mijlocul segmentului ce uneşte *x* cu $S(x)$)

Prorietate 4.4.3. Dacă $P:\mathbf{R}^2(\mathbf{R}^3)\to\mathbf{R}^2(\mathbf{R}^3)$ este o proiecție, atunci $S=2P-I$ este o simetrie şi reciproc, dacă $S:\mathbf{R}^2(\mathbf{R}^3)\to\mathbf{R}^2(\mathbf{R}^3)$ este o simetrie, atunci $P(x)=\frac{1}{2}(I+S)$ este o proiecție.

Demonstrație: Dacă *A* este matricea lui *P* şi *B* matricea lui *S*, atunci $A^2=A$ şi $B^2=I_2$.

Dacă $B=2A-I_2$ atunci $B^2=4A^2-4A+I_2=4A-4A+I_2=I_2$.

Dacă $A=\frac{1}{2}(I_2+B)$, atunci

$$A^2=\frac{1}{4}(I_2+2B+B^2)=\frac{1}{4}(I_2+2B+I_2)=\frac{1}{2}(I_2+B)=A.$$

4.5. Izometrii în plan şi spațiu

Definiție 4.5.1. O aplicație liniară $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ cu proprietatea $T(x,y)=(x',y')$, unde $x^2+y^2=x'^2+y'^2$ pentru orice $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ se numeşte **izometrie în plan**.

Proprietate 4.5.2. O izometrie păstrează produsul scalar şi unghiul vectorilor.

Demonstrație: Dacă $T(x_1, y_1) = (x_1', y_1')$ şi $T(x_2, y_2) = (x_2', y_2')$, trebuie arătat că $x_1x_2 + y_1y_2 = x_1'x_2' + y_1'y_2'$.

Avem $T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1' + x_2', y_1' + y_2')$ şi

$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = (x_1' + x_2')^2 + (y_1' + y_2')^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 = x_1'^2 + x_2'^2 + 2x_1'x_2' + y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1'y_2'$,

dar $x_1^2 + y_1^2 = x_1'^2 + y_1'^2$ şi $x_2^2 + y_2^2 = x_2'^2 + y_2'^2$ deci $x_1x_2 + y_1y_2 = x_1'x_2' + y_1'y_2'$.

De asemenea, avem $\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$,

$\cos\alpha' = \dfrac{x_1'x_2' + y_1'y_2'}{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}\cdot\sqrt{x_2'^2 + y_2'^2}}$ care sunt egale conform primei părți.

Teoremă 4.5.3. O aplicație liniară $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ este izometrie dacă şi numai dacă matricea ei este de forma $M_T = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ sau

$M_T = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

Demonstrație: Dacă matricea lui T este $M_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avem

$T(x, y) = (x', y') = (ax + by, cx + dy)$ şi condiția

$x^2 + y^2 = (ax + by)^2 + (cx + dy)^2$, pentru orice $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ şi $ab + cd = 0$.

Din $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$, rezultă că există $t \in \mathbf{R}$ şi $s \in \mathbf{R}$ astfel încât $\cos t = a$, $\sin t = c$ şi analog $\sin s = b$, $\cos s = d$. Din $ab + cd = 0$ rezultă $\cos t \sin s + \sin t \cos s = 0 \Leftrightarrow \sin(s + t) = 0$, de unde $t + s \in \{k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$.

Pentru $t + s = 0$, $s = -t$, obținem $M_{T_1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ iar pentru $t + s = \pi$, $s = \pi - t$,

obținem $M_{T_2} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

Observație 4.5.4. Matricele M_{T_1} corespund rotațiilor de unghi *t* în sens trigonometric iar M_{T_2} este compunerea unei rotații cu o simetrie:

$M_{T_2} = M_{T_1} \cdot M_S$, unde $M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ este matricea simetriei ortogonale față de axa *Ox*.

Observație 4.5.5. Analog se definesc izometriile spațiului, ca aplicații liniare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cu proprietatea $T(x, y, z) = (x', y', z')$, unde $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$.

Se poate deduce prin calcul analog sau prin alte metode că singurele aplicații liniare care sunt izometrii în spațiu sunt rotațiile în jurul unor drepte ce trec prin origine, simetrii sau compuneri de rotații cu simetrii.

Pentru a obține şi rotații în jurul unui punct arbitrar sau simetrii şi proiecții arbitrare, trebuie introduse **translațiile** cu care vom compune aplicațiile liniare.

Definiție 4.5.6. O funcție $T_{(x_0, y_0)} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, de forma $T_{(x_0, y_0)}(x, y) = (x + x_0, y + y_0)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ iar $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ este fixat, se numeşte **translație** de vector (x_0, y_0).

Definiție 4.5.7. Dacă $f : \mathbf{R}^2(\mathbf{R}^3) \to \mathbf{R}^2(\mathbf{R}^3)$ este o aplicație liniară şi $T : \mathbf{R}^2(\mathbf{R}^3) \to \mathbf{R}^2(\mathbf{R}^3)$ este o translație, atunci funcțiile $g_1, g_2 : \mathbf{R}^2(\mathbf{R}^3) \to \mathbf{R}^2(\mathbf{R}^3)$, $g_1 = T \circ f$ şi $g_2 = f \circ T$ se numes **aplicații afine**.

Observație 4.5.8. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ este matricea aplicației f şi (x_0, y_0) este vectorul translației *T*, atunci $g(x, y) = (x', y')$, unde $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, deci $g(x, y) = (ax + by + x_0, cx + dy + y_0)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ iar $\begin{cases} x' = ax + by + x_0 \\ y' = cx + dy + y_0 \end{cases}$ se numesc ecuațiile aplicației.

4.6. Probleme rezolvate (4)

R4.6.1. Fie $S_x =$ simetria față de axa $x'x$, $S_y =$ simetria față de $y'y$. Să se găsească matricea asociată cu $S_x \circ S_y$.

Soluție: Matricea asociată lui S_x este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, iar matricea asociată lui S_y este $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Rezultă că matricea asociată lui $S_x \circ S_y$ este $B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

R4.6.2. Fie un hexagon regulat *ABCDEF* cu lungimea laturii egală cu 2, care raportat la sistemul *xCy* are vârfurile *B* şi *E* pe *Cx*, respectiv *Cy*. Se consideră un alt sistem $x'Fy'$ orientat pozitiv, axa absciselor fiind *FA*.

a) Să se stabilească formulele de trecere de la *xCy* la $x'Fy'$;

b) Să se determine coordonatele vârfurilor *C* şi *E* față de $x'Fy'$.

Soluție: Unghiul de rotație este dat de $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Atunci, din formulele roto-translației

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a \\ y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + b \end{cases}$$

se obțin formulele de trecere, unde:

$$x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 2$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' - 2\sqrt{3}$$

b) Coordonatele punctului *C* față de noul sistem de axe le determinăm din condițiile

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 2 \\ 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Se obține $C\left(2, -2\sqrt{3}\right)$. Analog rezultă $E\left(-1, -\sqrt{3}\right)$.

R4.6.3. Ce devine ecuația $x^2 - y^2 - 2 = 0$, atunci când sistemul xOy se rotește cu un unghi $\alpha = \frac{\pi}{4}$?

Soluție: Coordonatele x,y ale unui punct oarecare de pe hiperbola dată, se vor transforma în coordonatele X,Y după formulele

$$x = X\cos\frac{\pi}{4} - Y\sin\frac{\pi}{4} = X\frac{\sqrt{2}}{2} - Y\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$$

$$y = X\sin\frac{\pi}{4} + Y\cos\frac{\pi}{4} = X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$$

Înlocuind aceste valori în ecuația hiperbolei, obținem:

$$x^2 - y^2 - 2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)\right]^2 - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)\right]^2 - 2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(X^2 - 2XY + Y^2\right) - \frac{1}{2}\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) - 2 = 0 \text{ sau}$$

$$XY + 1 = 0.$$

Deci, în noul sistem de coordonate hiperbola $x^2 - y^2 - 2 = 0$, are ecuația $XY + 1 = 0$, adică noile axe Ox, Oy coincid cu asimptotele hiperbolei.

R4.6.4. Să se interpreteze geometric acțiunea aplicațiilor $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

a) $f(x,y) = (0, 2x + y)$; $(x,y) \in \mathbf{R}^2$

b) $f(x,y) = (x, 2x)$; $(x,y) \in \mathbf{R}^2$

c) $f(x,y) = (3x - y, 6x - 2y)$; $(x,y) \in \mathbf{R}^2$

Soluție: Matricele aplicațiilor sunt a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ care verifică relația $A^2 = A$, deci f este operator de proiecție.

a) Proiecția pe axa Oy paralelă cu dreapta $d:\ 2x + y = 0$.

b) Proiecția pe dreapta $D:\ y - 2x = 0$ paralelă cu dreapta Oy.

c) Proiecția pe dreapta $D:\ y - 2x = 0$ paralelă cu dreapta $d:\ 3x - y = 0$.

R4.6.5. Să se interpreteze geometric acțiunea aplicațiilor $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

a) $f(x,y) = (-x, 2x + y)$; $(x,y) \in \mathbf{R}^2$

b) $f(x,y) = (x, 2x - y)$; $(x,y) \in \mathbf{R}^2$

c) $f(x,y) = (3x - y, 8x - 3y)$; $(x,y) \in \mathbf{R}^2$

Soluție: Matricele a) $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, b) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, c) $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 8 & -3\end{bmatrix}$ care verifică relația $A^2=I_2$, deci f este operator de simetrie.

a) Simetria față de axa *Oy* paralelă cu dreapta $x+y=0$.

b) Simetria față de dreapta $x+y=0$ paralelă cu axa *Oy*.

c) Simetria față de dreapta $2x-y=0$ paralelă cu dreapta $4x-y=0$.

R4.6.6. Să se arate că dacă $A\in M_2(\mathbf{R})$, $A^2=A$, $A\neq O$ şi $A\neq I_2$ atunci proiecția $P_A:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $P_A(x,y)=(x',y')$ cu $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=A\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ are proprietățile

a) Mulțimea $\operatorname{Ker}P_A=\{(x,y)|P_A(x,y)=(0,0)\}$ este o dreaptă.

b) Mulțimea $\operatorname{Im}P_A=\{(x,y)|(x,y)\in\mathbf{R}^2\}$ este o dreaptă.

c) P_A are proiecția pe dreapta $\operatorname{Im}P_A$, paralelă cu dreapta $\operatorname{Ker}P_A$.

Soluție: Din condițiile date rangul matricei *A* este 1 deci sistemul omogen $A\cdot X=O$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$, are o soluție nebanală $X_0\neq O$ şi orice altă soluție este de forma $X=\alpha\cdot X_0$, $\alpha\in\mathbf{R}$, deci:

a) $\operatorname{Ker}P_A=\{(x,y)|x\cdot y_0=y\cdot x_0\}$ unde $X_0=\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}$.

b) $Y\in\operatorname{Im}P_A \Leftrightarrow$ există *X* cu $A\cdot X=Y$, adică sistemul neomogen $A\cdot X=Y$ este compatibil, condiție echivalentă cu $\operatorname{rang}[A|Y]=\operatorname{rang}A=1$ deci dacă A_1 este o coloană nenulă a matricei *A* atunci $Y=\alpha\cdot A_1$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Atunci pentru $A_1=\begin{bmatrix}a\\ c\end{bmatrix}$, $\operatorname{Im}P_A=\{(x,y)|c\cdot x=a\cdot y\}$.

c) Evident că punctele planului sunt proiecțiile pe dreapta $\operatorname{Im}P_A$.
Mai trebuie arătat că vectorul care uneşte un punct cu imaginea sa este paralel cu dreapta $\operatorname{Ker}P_A$, deci că $A\cdot X-X$ este proporțional cu vectorul X_0 (cu $A\cdot X_0=O$).
Dar $A(AX-X)=A^2X-AX=(A^2-A)X=O$ deci vectorul $X_1=AX-X$ este soluție a sistemului $A\cdot X_1=O$ sau $X_1\in\operatorname{Ker}P_A$.

R4.6.7. Să se arate că dacă $A\in M_2(\mathbf{R})$, $A^2=I_2$, $A\neq\pm I_2$ atunci simetria $S_A:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $S_A(x,y)=(x',y')$ cu $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=A\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ are proprietățile:

a) Mulțimea $\operatorname{Inv} S_A = \{(x,y) | S_A(x,y) = (-x,-y)\}$ este o dreaptă

b) Mulțimea $\operatorname{Fix} S_A = \{(x,y) | S_A(x,y) = (x,y)\}$ este o dreaptă

c) Pentru orice matrice $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ există şi sunt unice matricele X_1, X_2 cu $A \cdot X_1 = -X_1$, $A \cdot X_2 = X_2$ astfel ca $X = X_1 + X_2$

d) S_A este simetria față de dreapta $\operatorname{Inv} S_A$, paralelă cu dreapta $\operatorname{Fix} S_A$.

Soluție: a) Din condițiile date matricea $(A + I_2)$ are rangul 1, deci sistemul $A \cdot X = -X \Leftrightarrow (A + I_2) \cdot X = O$ are soluții nebanale toate de forma $\alpha \cdot X_0$, $X_0 \neq O$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

b) Matricea $(A - I_2)$ are rangul 1, deci sistemul $A \cdot X = X \Leftrightarrow (A - I_2) \cdot X = O$ are soluții nebanale şi toate de forma $\beta \cdot X_1$, $X_1 \neq O$, $\beta \in \mathbf{R}$.

c) Dacă ar exista X_1 şi X_2 am avea $A \cdot X = A \cdot X_1 + A \cdot X_2 = -X_1 + X_2$ şi $X = X_1 + X_2$ deci $X_1 = \frac{1}{2}(X - A \cdot X)$ şi $X_2 = \frac{1}{2}(X + A \cdot X)$ care verifică condițiile cerute. ($A \cdot X_1 = -X_1$, $A \cdot X_2 = X_2$)

d) Arătăm că dreapta ce uneşte un punct cu imaginea sa, are direcție fixă. Avem $A \cdot (AX - X) = A^2 X - AX = X - AX$ deci matricea $X_1 = AX - X$ verifică relația $A \cdot X_1 = -X_1$ deci $X_1 \in \operatorname{Inv} A$,

$A\left(\frac{1}{2}(AX + X)\right) = \frac{1}{2}(A^2 X + AX) = \frac{1}{2}(X + AX)$ deci $\frac{1}{2}(X + AX) = X_2$ este fix $A \cdot X_2 = X_2$.

5. Determinanți

5.1 Permutări

Fie mulțimea $A = \{1,2,\ldots,n\}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Definiție 5.1.1. O aplicație bijectivă $\sigma : A \to A$ se numeşte **permutare de gradul** n.

De regulă o permutare de gradul n se dă cu ajutorul unui tablou cu două linii:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

în care în linia a doua se scot în evidență imaginile prin σ ale numerelor $1,2,\ldots,n$.

Mulțimea tuturor permutărilor de gradul n se noteză cu S_n iar numărul lor este $n!$.

Vom nota cu e **permutarea identică**, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$, adică aplicația $e : A \to A$, $e(k) = k$, $(\forall) k = \overline{1,n}$.

Definiție 5.1.2. Fie $\alpha,\beta \in S_n$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix}$ şi $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \beta(1) & \beta(2) & \cdots & \beta(n) \end{pmatrix}$, atunci prin **compunerea permutărilor** $\alpha \circ \beta$ înțelegem permutarea $\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha(\beta(1)) & \alpha(\beta(2)) & \cdots & \alpha(\beta(n)) \end{pmatrix} \in S_n$.

Observație 5.1.3. În general, $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$, unde $\alpha,\beta \in S_n$.

Exemplu 5.1.4. Fie $\alpha,\beta \in S_5$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, atunci

$$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \neq$$

$$\neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \beta \circ \alpha .$$

Proprietăți 5.1.5. (ale compunerii permutărilor)

a) $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$, $(\forall)\alpha, \beta, \gamma \in S_n$

b) Permutarea identică *e*, are proprietatea $e \circ \alpha = \alpha \circ e = \alpha$, $(\forall)\alpha \in S_n$

c) $(\forall)\alpha \in S_n$, $(\exists)\alpha^{-1} \in S_n$ astfel încât $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = e$.

Permutarea α^{-1} se numeşte **inversa permutării** α

Exemplu 5.1.6. Dacă $\alpha \in S_5$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, atunci

$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Definiție 5.1.7. Deoarece compunerea permutărilor verifică proprietatea a), putem defini **puterile** lui $\alpha \in S_n$, astfel: $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha$, $\alpha^3 = \alpha^2 \circ \alpha$, $\ldots$, $\alpha^n = \alpha^{n-1} \circ \alpha$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

Definiție 5.1.8. O permutare $\tau \in S_n$, $n \geq 2$ se numeşte **transpoziție** dacă $(\exists)i, j \in A$, $i \neq j$, astfel încât

$$\tau(k) = \begin{cases} j, & k = i \\ i, & k = j \\ k, & k \in A - \{i, j\} \end{cases}$$

şi vom nota $\tau = (ij)$.

Proprietăți 5.1.9. Pentru orice transpoziție $\tau \in S_n$, avem:

a) $\tau^2 = e$

b) $\tau^{-1} = \tau$

Demonstrație: Presupunem că $\tau = (ij)$, atunci:

a) $\tau^2(i) = (\tau \circ \tau)(i) = \tau(\tau(i)) = \tau(j) = i$

$\tau^2(j) = (\tau \circ \tau)(j) = \tau(\tau(j)) = \tau(i) = j$, şi pentru orice $k \in A - \{i, j\}$, avem $\tau^2(k) = (\tau \circ \tau)(k) = \tau(\tau(k)) = \tau(k) = k$.

Deci $\tau^2(t) = t$, $(\forall)t \in A$, de unde rezultă $\tau^2 = e$. De aici obținem imediat punctul b).

Observație 5.1.10. Numărul tuturor transpozițiilor de gradul *n* este C_n^2.

Teoremă 5.1.11. Orice permutare $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, poate fi scrisă ca un produs finit de transpoziții.

Demonstrație: Dacă *M* este o mulțime finită, vom nota cu $\operatorname{card} M$ numărul elementelor lui *M*. Pentru $\sigma \in S_n$ fie $m_\sigma = \operatorname{card}\{k | \sigma(k) \neq k\}$.

Vom face un raționament prin inducție matematică după numărul m_σ.

Dacă $m_\sigma = 0$, atunci $\sigma = e$ şi pentru orice transpoziție τ avem $\sigma = e = \tau \circ \tau$.

Presupunem $m_\sigma > 0$ şi că afirmația din enunț este adevărată pentru permutările $\pi \in S_n$ cu $m_\pi < m_\sigma$. Cum $m_\sigma > 0$ există $i \in A$ astfel încât $\sigma(i) \neq i$. Fie $j = \sigma(i)$, $\tau = (ij)$ şi $\pi = \tau \circ \tau$. Se observă că dacă $\sigma(k) = k$, atunci $k \neq i$ şi $k \neq j$, de unde

$$\pi(k) = \sigma(\tau(k)) = \sigma(k) = k$$

Deci $\sigma(k) = k$ rezultă $\pi(k) = k$ şi cum $\pi(j) = \sigma(\tau(j)) = \sigma(i) = j$, deducem că $m_\pi < m_\sigma$. Conform ipotezei de inducție există transpozițiile $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m \in S_n$ astfel încât $\pi = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_m$. Aşadar,

$$\sigma \circ \tau = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_m .$$

Înmulțind la dreapta această egalitate cu τ şi ținând cont că $\tau \circ \tau = e$, rezultă

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_m \circ \tau .$$

Exemplu 5.1.12. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi s-o scriem ca produs de transpoziții.

Cum $\sigma(1) = 2$, atunci $\sigma(1) \neq 1$ şi considerăm transpoziția $\tau_1 = (12)$. Facem produsul $\sigma' = \tau_1 \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Cum $\sigma'(2) = 5$, atunci $\sigma'(2) \neq 2$ şi considerăm transpoziția $\tau_2 = (25)$. Facem produsul $\sigma'' = \tau_2 \cdot \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Cum $\sigma''(3) = 4$, atunci $\sigma''(3) \neq 3$ şi considerăm transpoziția $\tau_3 = (34)$. Facem produsul $\sigma''' = \tau_3 \cdot \sigma'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (45)$.

Deci $(45) = \tau_3 \cdot \sigma'' = \tau_3 \cdot \tau_2 \cdot \sigma' = \tau_3 \cdot \tau_2 \cdot \tau_1 \cdot \sigma$ sau $(45) = (34)(25)(12)\sigma$, de unde $\sigma = (12)(25)(34)(45)$ (am înmulțit egalitatea de mai sus, la stânga, cu produsul $(12)(25)(34)$).

Definiție 5.1.13. Fie $\sigma \in S_n$. Spunem că permutarea σ prezintă o **inversiune** pentru perechea de numere $(i, j) \in A \times A$, $i < j$, dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Vom nota cu $\mathrm{Inv}(\sigma)$ numărul inversiunilor permutării σ.

Exemplu 5.1.14. Dacă $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, atunci $\mathrm{Inv}(\sigma) = 3$, deoarece σ prezintă inversiuni pentru perechile $(2,3)$, $(2,4)$ şi $(3,4)$ căci $\sigma(2) > \sigma(3)$, $\sigma(2) > \sigma(4)$ şi $\sigma(3) > \sigma(4)$.

Observație 5.1.15. $0 \le \mathrm{Inv}(\sigma) \le C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Definiție 5.1.16. Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)} \in \{-1,1\}$ se numeşte **signatura** (semnul) permutării σ. Vom spune că σ este **permutare pară** (**impară**) dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$ (respectiv $\varepsilon(\sigma) = -1$).

Proprietate 5.1.17. Dacă $\tau = (ij) \in S_n$, $i < j$, atunci $\varepsilon(\tau) = -1$.

Proprietate 5.1.18. Dacă $\sigma \in S_n$, atunci are loc egalitatea

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

Demonstrație: Produsul $\varepsilon(\sigma) = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} \dfrac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ are C_n^2 factori. Să considerăm factorul $\dfrac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ ($i < j$). Dacă notăm $\sigma(i) = l$ şi $\sigma(j) = m$, atunci $l \ne m$ şi $l, m \in \{1,2,\ldots,n\}$. Înseamnă că $\sigma(i) - \sigma(j) = l - m$, se simplifică cu numitorul din factorul $\dfrac{\sigma(l) - \sigma(m)}{l - m}$ dacă $l < m$ sau cu numitorul din factorul $\dfrac{\sigma(m) - \sigma(l)}{m - l}$ dacă $m < l$. Prin simplificare obținem (-1) dacă (i, j) este o inversiune şi $(+1)$ în caz contrar. Cum orice numărător din produsul de la început se găseşte ca numitor în alt factor cu semnul + sau – , atunci produsul amintit, după simplificare va fi un produs de $(+1)$ şi de (-1); numărul (-1) va fi egal cu numărul de inversiuni ale permutării σ. În concluzie produsul va fi egal cu $\varepsilon(\sigma)$, adică tocmai egalitatea de demonstrat.

Proprietate 5.1.19. Dacă $\sigma, \tau \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau)$.

Observații 5.1.20. 1) Dacă $\sigma \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma^2) = 1$;

2) Permutarea $\sigma \circ \tau$ este pară (respectiv impară) dacă ambele permutări σ şi τ au acelaşi semn (respectiv semne contrare).

Proprietate 5.1.21. Pentru orice $n \ge 2$, numărul permutărilor pare (respectiv impare) din S_n este $\dfrac{n!}{2}$.

5.2. Determinantul de ordinul n

Determinanți speciali

Definiție 5.2.1. Dacă $A \in M_n(\mathbf{C})$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$ şi S_n este mulțimea permutărilor de gradul n, atunci numărul
$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$
se numeşte **determinantul** matricei A.
Din definiția determinantului se deduc următoarele
Proprietăți 5.2.2. Dacă $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sunt coloanele matricei A, atunci:

a)
$\det(c_1, c_2, \ldots, c_k + c_{k'}, \ldots, c_n) = \det(c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots, c_n) + \det(c_1, c_2, \ldots, c_{k'}, \ldots, c_n)$;

b) $\det(c_1, c_2, \ldots, \lambda c_k, \ldots, c_n) = \lambda \det(c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots, c_n)$, $\lambda \in \mathbf{R}$;

c) $\det(c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}, \ldots, c_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \det(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $\sigma \in S_n$.

De asemenea, pentru $A, B \in M_n(\mathbf{C})$, avem:

d) $\det {}^tA = \det A$;

e) $\det \overline{A} = \overline{\det A}$;

f) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$;

g) $\det A^n = (\det A)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$;

h) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Dezvoltarea determinanților

Dacă $A \in M_n(\mathbf{C})$, atunci:

1) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ (**dezvoltarea determinantului după linia** i), unde $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ (A_{ij} se numeşte complement algebric al elementului a_{ij}, iar M_{ij} se numeşte minor complementar al elementului a_{ij});

2) $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ (**dezvoltarea după coloana** j);

3) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$, pentru $k \neq i$ şi $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0$, pentru $k \neq j$;

4) $A \cdot A^* = \det A \cdot I_n$, unde $A^* = {}^t(A_{ij}) = A_{ji}$, reciproca matricei *A*.

Determinanți speciali

5.2.3. Determinantul Vandermonde se notează cu $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ şi este definit prin

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{C}$.

Vom calcula valoarea lui, prin două metode.

Metoda I Efectuând $-a_1 L_{n-1} + L_n, -a_1 L_{n-2} + L_{n-1}, \dots, -a_1 L_1 + L_2$, obținem:

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} =$$

$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_1) \cdot V(a_2, a_3, \dots, a_n)$, care reprezintă o relație de recurență.

Deci, $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_1) \cdot V(a_2, a_3, \dots, a_n)$

$V(a_2, a_3, \dots, a_n) = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_2) \cdot V(a_3, a_4, \dots, a_n)$

……………………………………

$V(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (a_{n-1} - a_{n-2})(a_n - a_{n-2}) \cdot V(a_{n-1}, a_n)$

Făcând produsul, se obține:

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Metoda a II-a Fie polinomul $P(x) = V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x)$ de gradul $n - 1$. Observăm că $P(a_1) = P(a_2) = \ldots = P(a_{n-1}) = 0$ (am exclus cazul banal în care două dintre numerele $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ sunt egale). Deducem că polinomul *P* este de forma:

$$P(x) = a \prod_{k=1}^{n-1} (x - a_k)$$

Dezvoltând determinantul $V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, după ultima linie, *a* fiind coeficientul lui x^{n-1}, deducem $a = V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, deci

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) = V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (x - a_k)$$

Pentru $x = a_n$, obținem:

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k)$$

şi ținând cont de această relație de recurență şi de egalitarea $V(a_1, a_2) = (a_2 - a_1)$, obținem

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

5.2.4. Determinantul Vandermonde lacunar

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Se numeşte **determinant Vandermonde lacunar**, şi se notează cu $V_k(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, determinantul

$$V_k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_n^{k-1} \\ a_1^{k+1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_n^{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Pentru calculul lui, considerăm egalitățile

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n, x) = V(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \prod_{k=1}^{n} (x - a_k) =$$

$$= V(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \left(x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n S_n\right),$$

unde S_k este suma Vietè de ordinul *k*.

Pe de altă parte dezvoltând determinantul $V(a_1, a_2, \ldots, a_n, x)$ după ultima coloană, obținem

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n, x) = (-1)^{n+2} \left(V_0 - xV_1 + x^2 V_2 + \ldots + (-1)^n x^n V_n\right)$$

Identificând coeficienții celor două forme ale polinomului $V(a_1, a_2, \ldots, a_n, x)$ obținem:

$$V_0(a_1,a_2,\ldots,a_n)=V(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot\prod_{k=1}^{n}a_k$$

$$V_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=V(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot S_{n-k},\ k=\overline{1,n}.$$

5.2.5. Determinant polinomial

Fie $P_i\in\mathbf{C}[X]$ polinom de grad cel mult $n-1$, $i=\overline{1,n}$ şi fie $x_j\in\mathbf{C}$, $j=\overline{1,n}$.

Determinantul

$$\det(P_i(x_j))=\begin{vmatrix} P_1(x_1) & P_1(x_2) & \cdots & P_1(x_n)\\ P_2(x_1) & P_2(x_2) & \cdots & P_2(x_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ P_n(x_1) & P_n(x_2) & \cdots & P_n(x_n)\end{vmatrix}$$

se numeşte **determinant polinomial**.

Dacă $P_1(x)=a_{11}+a_{12}x+\ldots+a_{1n}x^{n-1}$

$P_2(x)=a_{21}+a_{22}x+\ldots+a_{2n}x^{n-1}$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$P_n(x)=a_{n1}+a_{n2}x+\ldots+a_{nn}x^{n-1}$

şi notăm $P=(P_{ik})_{i,k=\overline{1,n}}$ matricea coeficienţilor polinoamelor P_i, $i=\overline{1,n}$ observând egalitatea $(P_i(x_j))=(P_{ik})(x_j^{k-1})$, deducem că

$$\det(P_i(x_j))=\det P\cdot V(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

5.2.6. Determinant circular

Fie $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbf{C}$. Se numeşte **determinant circular** al numerelor $a_1,a_2,\ldots,a_n$ şi se notează cu $C(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ determinantul

$$C(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1\\ a_3 & a_4 & \cdots & a_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1}\end{vmatrix}.$$

Pentru calculul lui, considerăm ecuația binomă $x^n - 1 = 0$, $n \geq 2$, ale cărei rădăcini sunt $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ numite rădăcini de ordinul n ale unității şi construim un determinant Vandermonde de forma:

$$V(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Făcând produsul $C(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot V(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, obținem:

$$C(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot V(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 + a_2\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_1^{n-1} & a_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_n\varepsilon_2^{n-1} & \cdots & a_1 + a_2\varepsilon_n + \ldots + a_n\varepsilon_n^{n-1} \\ a_2 + a_3\varepsilon_1 + \ldots + a_1\varepsilon_1^{n-1} & a_2 + a_3\varepsilon_2 + \ldots + a_1\varepsilon_2^{n-1} & \cdots & a_2 + a_3\varepsilon_n + \ldots + a_1\varepsilon_n^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n + a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_{n-1}\varepsilon_1^{n-1} & a_n + a_1\varepsilon_2 + \ldots + a_{n-1}\varepsilon_2^{n-1} & \cdots & a_n + a_1\varepsilon_n + \ldots + a_{n-1}\varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Considerăm polinomul $f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1}$ astfel că produsul precedent se scrie:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1^n f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^n f(\varepsilon_2) & \cdots & \varepsilon_n^n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \end{vmatrix} = f(\varepsilon_1) \cdot f(\varepsilon_2) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_n) \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_1^n & \varepsilon_2^n & \cdots & \varepsilon_n^n \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{vmatrix}.$$

Ultima linie se poate aduce pe prima linie prin $n-1$ schimbări. Procedând analog cu celelalte linii, obținem:

$$C(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot$$
$$V(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1} \cdot f(\varepsilon_1) \cdot f(\varepsilon_2) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_n) \cdot V(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) =$$
$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot f(\varepsilon_1) \cdot f(\varepsilon_2) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_n) \cdot V(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n),$$

de unde simplificând cu $V(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, obținem:

$$C(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot f(\varepsilon_1) \cdot f(\varepsilon_2) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_n),$$

unde $f(\varepsilon) = a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2 + \ldots + a_n\varepsilon^{n-1}$, iar ε este o rădăcină a ecuației $x^n - 1 = 0$.

5.2.7. Determinant Cauchy

Fie $a_i, b_j \in \mathbf{C}$, $i, j = \overline{1,n}$. Se numeşte **determinant Cauchy** al numerelor a_i, b_j, determinantul

$$D_{(a_i,b_j)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & & \frac{1}{a_2+b_n} \\ & & & \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

Pentru calculul său scădem ultima linie din celelalte linii, dăm factori pe linii şi pe coloane apoi scădem ultima coloană din celelalte coloane şi dăm din nou factori.

Se obține relația de recurență:

$$D_n = \frac{D_{n-1}}{a_n+b_n} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(a_n-a_k)(b_n-b_k)}{(a_n+a_k)(b_n+b_k)},$$

de unde

$$D_{(a_i,b_j)} = \frac{V(a_1,a_2,\ldots,a_n) \cdot V(b_1,b_2,\ldots,b_n)}{\prod\limits_{i,j=1}^{n} (a_1+b_j)}.$$

5.3. Funcții polinomiale de tip determinant

În continuare este expusă o metodă de stabilire a unor proprietăți ale determinanților cu ajutorul unor funcții polinomiale de tipul:

det(A+xB), unde $A, B \in M_n(\mathbf{C})$

Teoremă. 5.3.1. Fie $A, B \in M_n(\mathbf{C})$. Atunci $f(x) = \det(A+xB)$ este un polinom de grad ≤ n având termenul liber egal cu det A şi coeficientul lui x^n egal cu det B.

Demonstrație: Din dezvoltarea lui det(A+xB) cu definiția determinantului, rezultă cã f este un polinom de grad $\le n$ iar termenul liber este egal cu $f(0) = \det A$. Coeficientul lui x^n este determinat de:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n}\det(A+xB) = \lim_{x\to\infty} \det\left(\frac{1}{x}A+B\right) = \det B.$$

Exemplu 5.3.2. Dacă $A, B \in M_2(\mathbf{C})$, atunci

$$\det(A+B)+\det(A-B)=2(\det A+\det B).$$

Într-adevăr, conform teoremei 5.5.1. putem scrie:

$$\det(A+xB)=\det A+ax+\det B\cdot x^2$$

Atunci, pentru $x=1$ şi $x=-1$, obținem:

$$\det(A+B)=\det A+a+\det B$$

$\det(A-B)=\det A-a+\det B$, $a\in\mathbf{C}$ de unde, prin adunare obținem relația de demonstrat.

5.4. Derivata unui determinant

Teoremă 5.4.1. Fie $f_{ij}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ funcții derivabile pe **R**, $i, j\in\{1,2,\dots,n\}$, iar $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{bmatrix}.$$

Arătați că *f* este derivabilă pe **R** şi:

$$f'(x)=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & \cdots & f_{1n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -\\ f'_{j1}(x) & f'_{j2}(x) & \cdots & \cdots & f'_{jn}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix},\ (\forall)x\in\mathbf{R}.$$

Demonstrație: Faptul că funcția *f* este derivabilă pe **R** rezultă din aceea că: dacă funcțiile $g_1, g_2,\dots,g_n$ sunt funcții derivabile pe **R**, atunci funcția $g_1\cdot g_2\cdot\ldots\cdot g_n$ este derivabilă pe **R** şi

$$(g_1\cdot g_2\cdot\ldots\cdot g_n)'=\sum_{j=1}^{n} g_1\cdot g_2\cdot\ldots\cdot g'_j\cdot\ldots\cdot g_n.$$

În continuare, avem $f(x)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot f_{1\sigma(1)}(x)\cdot f_{2\sigma(2)}(x)\cdot\ldots\cdot f_{n\sigma(n)}(x)$ (1)

Din (1) prin derivare, rezultă:

$$f'(x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot f_{1\sigma(1)}(x)\cdot f_{2\sigma(2)}(x)\cdot\ldots\cdot f'_{j\sigma(j)}(x)\cdot\ldots f_{n\sigma(n)}(x),$$

adică tocmai relația de demonstrat.

Exemple 5.4.2. Să se demonstreze că:

$$\begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ a & b & c \end{vmatrix},$$

$(\forall)x \in \mathbf{R}$, unde $\alpha,\beta,\gamma,a,b,x \in \mathbf{R}$.

Într-adevăr, fie $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Evident f este derivabilă şi conform relației demonstrate, putem scrie:

$$f'(x)=\begin{vmatrix} \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ -\sin(x+\alpha) & -\sin(x+\beta) & -\sin(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} \sin(x+\beta) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,\ (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

Cum $f'(x)=0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$ rezultă că f este constantă pe $\mathbf{R}$ şi deci $f(x)=f(0)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$,
adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.
Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, x \in \mathbf{R}$. Să se arate că:

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \cdots & x \\ x & x+a_2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}=$$

$$=\left(a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_n + a_1a_3a_4\cdot\ldots\cdot a_n + \ldots + a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\right)x + a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n$$

Soluție: Fie $f(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \cdots & x \\ x & x+a_2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$, $x \in \mathbf{R}$.

Se observă imediat că $f''(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Deci, $(\exists) A, B \in \mathbf{R}$ astfel încât $f(x)$ = $Ax+B$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

Evident avem: $B=f(0)=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 ... a_n$, iar

$$A = f'(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_2 a_3 \ldots a_n + a_1 a_3 a_4 \ldots a_n + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_{n-1},$$

de unde rezultă concluzia.

5.5. Probleme rezolvate (5.1)

R5.2.1. Fie $\sigma \in S_n$ o permutare de ordinul *n*.

a) Demonstrați că există $k \in \mathbf{N}^*$, $1 \le k \le n!$ astfel încât $\sigma^k = e$;

b) Dacă $m, p \in \mathbf{N}^*$, cu proprietatea $\sigma^m = \sigma^p = e$ atunci $\sigma^{(m,p)} = e$;

c) Dacă *h* este cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea $\sigma^h = e$, demonstrați că pentru orice $m \in \mathbf{N}^*$ cu $\sigma^m = e$, avem $h \mid m$.

Soluție: a) Considerăm şirul de permutări $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \ldots$, şir de elemente din S_n. Cum S_n este mulțime finită, există numerele naturale i, j, $0 \le i < j$ astfel încât $\sigma^i = \sigma^j$ (aceasta deoarece în caz contrar ar rezulta că mulțimea S_n ar fi infinită). Rezultă $\sigma^{j-i} = e$ şi alegând $j - i = k$, obținem $\sigma^k = e$;

b) Dacă $m, p \in \mathbf{N}^*$, atunci există $r, q \in \mathbf{Z}$ astfel încât $(m, p) = r \cdot m + q \cdot p$, de unde $\sigma^{(m,p)} = \sigma^{r \cdot m + q \cdot p} = (\sigma^m)^r \cdot (\sigma^p)^q = e$.

c) Aplicând teorema împărțirii cu rest pentru *m* şi *h*, avem $m = h \cdot q + r$, de unde $\sigma^r = e$, dar $0 \le r < h$, contradicție dacă $r \ne 0$. Deci $r = 0$ şi atunci $h \mid m$.

R5.2.2. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Să se arate că nu există nici o permutare $x \in S_7$ astfel încât $x^2 = u$.

Soluție: Presupunem că $(\exists) x \in S_7$ astfel încât $x^2 = u$. Atunci $\varepsilon(x^2) = \varepsilon(u)$. Cum $\varepsilon(x^2) = 1$ şi $\varepsilon(u) = (-1)^{C_7^2} = (-1)^{21} = -1$, rezultă că nu există o astfel de permutare.

R5.2.3. Pentru o permutare $\varphi \in S_n$ se notează $S_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{\varphi(k)}$. Să se arate că $S_n(\varphi)$ este minimă dacă φ este permutarea identică.

Soluție: Aplicând inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski, obținem:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{\varphi(k)} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \ge \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\varphi(k)}} \right)^2$$

Dar $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\varphi(k)}}$ datorită bijecției φ, deci

$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\varphi(k)}\geq\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$. Deci $\min S_n(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ şi se realizează când în inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski are loc egalitate, adică $\varphi(k)=k$.

Deoarece $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ şi $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty$, rezultă că $\lim_{n\to\infty}S_n(\varphi)=\infty$.

R5.2.4. Fie $n\in\mathbf{N}^*$. Să se afle permutarea $\sigma\in S_n$ în cazurile:

a) $\frac{1}{\sigma(1)}=\frac{2}{\sigma(2)}=\cdots=\frac{n}{\sigma(n)}$;

b) $1\cdot\sigma(1)=2\cdot\sigma(2)=\cdots=n\cdot\sigma(n)$.

Soluție: a) Putem scrie $\frac{1}{\sigma(1)}=\frac{2}{\sigma(2)}=\cdots=\frac{n}{\sigma(n)}=\frac{1+2+\ldots+n}{\sigma(1)+\sigma(2)+\ldots+\sigma(n)}=1$, de unde rezultă

$\sigma(1)=1,\sigma(2)=2,\ldots,\sigma(n)=n$, adică $\sigma=e=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$.

b) Din $1\cdot\sigma(1)=n\cdot\sigma(n)$ rezultă $\sigma(1)=n$ şi $\sigma(n)=1$, deci $i\sigma(i)=n$, $(\forall)i=\overline{2,n-1}$.

Obținem $(n-1)\sigma(n-1)=n$, de unde $\sigma(n-1)=1+\frac{1}{n-1}$, de unde rezultă $n=2$ şi atunci $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

Probleme rezolvate (5.2)

R5.4.1. Dacă $A,B\in M_n(\mathbf{R})$ astfel încât $AB=BA$, atunci $\det(A^2+B^2)\geq 0$.

Soluție: Din $AB=BA$ avem $A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)=(A+iB)\overline{(A+iB)}$ şi deci putem scrie

$$\det\left(A^2+B^2\right)=\det\left(A+iB\right)\overline{\left(A+iB\right)}=$$
$$=\det\left(A+iB\right)\cdot\det\overline{\left(A+iB\right)}=\det\left(A+iB\right)\cdot\overline{\det\left(A+iB\right)}=\left|\det\left(A+iB\right)\right|^2\geq 0$$

, ceea ce încheie demonstrația.

R5.4.2. Să se demonstreze că dacă $X, Y \in M_n(\mathbf{C})$ şi $XY = I_n$, atunci şi $YX = I_n$.

Soluție: Din $XY = I_n$ rezultă $\det(XY) = \det(I_n) = 1$ sau $\det X \cdot \det Y = 1$, adică $\det X \neq 0$ şi $\det Y \neq 0$, ceea ce înseamnă că *X* şi *Y* sunt inversabile.

Fie X^{-1} inversa lui *X*. Înmulțind relația $XY = I_n$ (la stânga) cu X^{-1} obținem $Y = X^{-1}$ şi deci $YX = X^{-1} \cdot X = I_n$.

R5.4.3. Fie *p* şi *q* două numere reale astfel încât $p^2 - 4p < 0$. Să se arate că dacă *n* este un număr natural impar şi $A \in M_n(\mathbf{R})$ atunci $A^2 + pA + qI_n \neq O_n$, unde I_n este matricea unitate de ordinul *n* şi O_n este matricea nulă de ordinul *n*.

Soluție: Presupunem prin absurd că $A^2 + pA + qI_n = O_n$. Atunci din identitatea

$$A^2 + pA + qI_n = \left(A + \frac{p}{2} I_n\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} I_n$$

rezultă

$$\left(A + \frac{p}{2} I_n\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4} I_n$$

Aplicând determinantul în ambii membri, obținem:

$$\det\left(A + \frac{p}{2} I_n\right)^2 = \left(\frac{p^2 - 4q}{4}\right)^n.$$

Membrul stâng al egalității este pozitiv iar membrul drept al egalității este strict negativ deoarece $p^2 - 4p < 0$ şi *n* este impar, deci am ajuns la o contradicție şi rezultă deci că $A^2 + pA + qI_n \neq O_n$.

R5.4.4. Dacă $n \in 2\mathbf{N} + 1$ şi $A \in M_n(\mathbf{R})$ cu proprietatea că $A^2 = O_n$ sau $A^2 = I_n$, atunci $\det(A + I_n) \geq \det(A - I_n)$.

Soluție: Dacă $A^2 = O_n$, atunci avem

$$\det(A + I_n) = \det\left(\frac{1}{4}A^2 + A + I_n\right) = \det\left(\frac{1}{2}A + I_n\right)^2 = \left(\det\left(\frac{1}{2}A + I_n\right)\right)^2 \geq 0 \quad (1)$$

De asemenea, avem:

$$\det(A - I_n) = \det(-(I_n - A)) = (-1)^n \det(I_n - A) =$$

$$= (-1)^n \det\left(I_n - A + \frac{1}{4}A^2\right) = (-1)^n \det\left(I_n - \frac{1}{2}A\right)^2 =$$

$$= (-1)^n \left(\det\left(I_n - \frac{1}{2} A \right) \right)^2 \le 0, \text{ deoarece } n \in 2\mathbf{N}+1 \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) deducem cerinţa enunţului.

Dacă $A^2 = I_n$, adică matricea A este involutivă, atunci

$$\left(\det(A+I_n)\right)^2 = \det(A+I_n)^2 = \det\left(A^2+2A+I_n\right) = \det(2A+2I_n) = 2^n \det(A+I_n) \ge 0$$

(3)

Totodată:

$$\det(A-I_n) = (-1)^n \det(I_n - A) = (-1)^n \det\left(\frac{1}{2}(2I_n - 2A)\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \det(2I_n - 2A) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \det(A-I_n)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(\det(A-I_n)\right)^2 \le 0 \quad (4)$$

Din (3) şi (4) deducem cerinţa enunţului şi în acest caz.

R5.4.5. Să se calculeze determinantul de ordinul n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 3 & 8 & 5 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

Soluţie: Dezvoltând după prima coloană obţinem relaţia de recurenţă $\Delta_n = 8\Delta_{n-1} - 15\Delta_{n-2}$, cu ecuaţia caracteristică $r^2 - 8r + 15 = 0$, de unde $r_1 = 3$ şi $r_2 = 5$.

Rezultă $\Delta_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot 5^n$ cu $\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = 49$. Obţinem în final

$\Delta_n = \frac{1}{2}\left(5^{n+1} - 3^{n+1}\right),\ n \ge 1.$

R5.4.6. Să se calculeze determinantul

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}, \text{ unde } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Soluție: Dezvoltând după prima linie obținem relația de recurență $\Delta_n = 2\cos\alpha\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$, $n \geq 3$.

Avem $\Delta_1 = \cos\alpha$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$. Presupunând că $\Delta_k = \cos k\alpha$, $(\forall)k = \overline{1,n}$, avem:

$$\Delta_{n+1} = 2\cos\alpha \cdot \cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha = \cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha - \cos(n-1)\alpha = \cos(n+1)\alpha$$

.

Conform principiului inducției matematice complete avem $\Delta_n = \cos n\alpha$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

R5.4.7. Să se calculeze:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 2+x_2^2 & x_2x_3 & \cdots & x_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \cdots & n+x_n^2 \end{vmatrix}, \text{ unde } x_k \in \mathbf{C},\ k = \overline{1,n}.$$

Soluție: Fie $x_k \neq 0$, $(\forall)k = \overline{1,n}$, atunci putem scrie:

$$\Delta_n = x_1x_2\ldots x_n \cdot \begin{vmatrix} x_1 + \dfrac{1}{x_1} & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 + \dfrac{2}{x_2} & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n + \dfrac{n}{x_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} x_k \cdot \left(\begin{vmatrix} x_1 + \dfrac{1}{x_1} & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 + \dfrac{2}{x_2} & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 + \dfrac{1}{x_1} & x_2 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_2 + \dfrac{2}{x_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & \dfrac{n}{x_n} \end{vmatrix} \right) =$$

$$=\prod_{k=1}^{n} x_k \cdot \left(\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{x_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix} + \frac{n}{x_n} \begin{vmatrix} x_1+\frac{1}{x_1} & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2+\frac{1}{x_2} & \cdots & x_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1}+\frac{1}{x_{n-1}} \end{vmatrix} \right) = (n-1)! \cdot x_n^2 + n\Delta_{n-1}$$

.

Cum $\Delta_1 = 1 + x_1^2$, rezultă imediat $\Delta_n = n!\left(1 + \frac{x_1^2}{1} + \frac{x_2^2}{2} + \ldots \frac{x_n^2}{n}\right)$. Dacă $(\exists)k \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $x_k = 0$, atunci Δ_n se dezvoltă după linia k şi se procedează analog, rezultatul rămânând acelaşi.

R5.4.8. Să se determine $\det\left(\frac{1-a_i^n b_j^n}{1-a_i b_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$.

Soluție: Avem $a_{ij} = \frac{1-a_i^n b_j^n}{1-a_i b_j} = 1 + a_i b_j + a_i^2 b_j^2 + \ldots + a_i^{n-1} b_j^{n-1} = P_i(b_j)$, unde $P_i(x) = 1 + a_i x + a_i^2 x^2 + \ldots + a_i^{n-1} x^{n-1}$. Deci, determinantul cerut este un determinant polinomial cu $\operatorname{grad} P_i \le n-1$. Avem $D = \det P \cdot V(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, unde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, \ \det P = V(a_1, a_2, \ldots, a_n), \text{ deci}$$

$$D = V(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot V(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

R5.4.9. Să se calculeze valoarea determinantului circular: $C(1,2,3,\ldots,n)$.

Soluție: Avem $C(1,2,3,\ldots,n) = \prod_{i=1}^{n-1} P(\varepsilon_i)$, unde ε_i ($i = \overline{1,n}$) sunt rădăcinile de ordinul n ale unității, iar

$$P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^n\right)' = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)', \qquad x \ne 1.$$

$P(\varepsilon_i) = \frac{n}{\varepsilon_i - 1}$, $i = \overline{1,n}$,

$P(\varepsilon_0) = P(1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Deci, $C(1,2,3,\ldots,n) = \dfrac{n(n+1)}{2}\prod_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{\varepsilon_i - 1}$. Fie $y_i = \varepsilon_i - 1$, căutăm polinomul cu rădăcinile y_i, $i = \overline{1, n-1}$. Avem $\varepsilon_i = y_i + 1$ şi polinomul în rădăcinile ε_i, $i = \overline{1, n-1}$ este $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$, deci $g(y) = f(y+1) = y^{n-1} + \ldots + n$, deci $\prod_{i=1}^{n-1} y_i = (-1)^{n-1} n$ şi rezultă $C(1,2,3,\ldots,n) = (-1)^{n-1}\dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.

Probleme rezolvate (5.3)

R5.6.1. Fie $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ care comută între ele şi $\det(A^2 + B^2) = 0$. Atunci det$A$ = det$B$.

Soluţie: Fie $f(x)$=det(A+xB). Conform teoremei 5.5.1. rezultă că:

$$(1)\ f(x) = \det B \cdot x^2 + ax + \det A.$$

Atunci $\det(A^2 + B^2) = \det(A + iB)\cdot\det(A - iB) = f(i)f(-i) = 0$, deci, pentru că f are coeficienţi reali, $f(i) = f(-i) = 0$.

Deoarece grad f = 2 $\Rightarrow$ $f(x) = m(x^2 + 1)$. Comparând cu (1) rezultă că det$A$ = det$B$.

R5.6.2. Fie $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât det(AB+BA) $\leq$0. Să se arate că det(A^2+B^2)$\geq$0.

Soluţie: Fie $f(x)$ = det(A^2 +B^2 +x(AB+BA)).

Observăm că $f(1)$=det(A^2 +B^2 +AB+BA)=det(A +B)^2 $\geq$0 şi $f(-1)$=det(A^2 +B^2 –AB–BA)=det(A–B)^2 $\geq$0. Pe de altă parte, graficul lui f este o parabolă cu maxim deoarece coeficientul lui x^2 este det(AB+BA)< 0. Dacă det(AB+BA)=0, atunci f este liniară. Oricum, din faptul că $f(1) \geq 0$ şi $f(-1) \geq 0$ rezultă că $f(0) \geq 0$, adică det(A^2 +B^2)$\geq$0.

R5.6.3. Fie $A \in M_2(\mathbf{Q})$ astfel încât $\det(A - 2I_2) = 0$. Să se arate că $A^2 = 2I_2$ şi $\det A = -2$.

Soluţie: Fie $f(x) = \det(A - xI_2)$, având coeficientul x^2 egal cu $\det I_2 = 1$. atunci:

$$\det(A^2 - 2I_2) = \det(A - \sqrt{2}I_2)\det(A + \sqrt{2}I_2) = 0 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = 0$$

pentru că f are coeficienți raționali. Deci $f(x) = \alpha(x^2 - 2)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. deoarece coeficientul lui x^2 este 1, rezultă că $\alpha = 1$ şi implicit $f(x) = x^2 - 2$, adică:

$$(2)\quad \det(A - xI_2) = x^2 - 2,\ (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

Pentru $x = 0 \Rightarrow \det A = -2$. Cum (2) este ecuația caracteristică a lui A, rezultă că A o verifică, deci $A^2 - 2I_2 = O \Rightarrow A^2 = 2I_2$.

R5.6.4. Fie $A, B, C \in M_n(\mathbf{R})$ care comută între ele şi $\det C=0$. Să se arate că $\det(A^2 + B^2 + C^2) \geq 0$.

Soluție: Fie $f(x) = \det(A^2 + B^2 + C^2 + xBC)$.

Avem $f(-2) = \det(A^2 + B^2 + C^2 - 2BC) = \det(A^2 + (B^2 - C^2)) \geq 0$ şi $f(2) = \det(A^2 + B^2 + C^2 + 2BC) = \det(A^2 + (B^2 + C^2)) > 0$. Coeficientul lui x^2 în dezvoltarea lui f este $\det(BC) = \det B \det C = 0$, deci f este funcție liniară.
Cum $f(-2)$ şi $f(2)$ sunt pozitive, rezultă că $f(0) \geq 0$, adică $\det(A^2 + B^2 + C^2) \geq 0$.

R5.6.5. Fie A şi B două matrice de acelaşi ordin k ($k \in \mathbf{N}^*$). Să se demonstreze că dacă $\det(A + nB) = \det(nA + B)$ pentru cel puțin $k + 1$ valori distincte ale numărului natural $n > 1$, atunci $\det A = \det B$.

Soluție: Fie polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = \det(A+xB) - \det(xA+B)$. Acest polinom are gradul cel mult k (având matricele de ordinul k şi ținând seama produsele care apar în definiția unui determinant). Cum prin ipoteză f are cel puțin $k + 1$ rădăcini $\Rightarrow$ că f este polinomul nul. Făcând $x=0 \Rightarrow f(0) = 0$, adică $\det A = \det B$.

R5.6.6. Fie $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ şi $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Arătați că:

$$\det(A+B) + \det(A+\varepsilon B) + \ldots + \det(A+\varepsilon^{n-1}B) = n(\det A + \det B).$$

Soluție: Fie $P(x) = \det(A+xB) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, unde $a_0 = \det A$ şi $a_n = \det B$. Atunci avem:

$\det(A+B) + \det(A+\varepsilon B) + \ldots + \det(A+\varepsilon^{n-1}B) = f(1) + f(\varepsilon) + ..$
$+ f(\varepsilon^{n-1}) = na_0 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) \cdot$
$\cdot (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1}) + na_n = n(a_0 + a_n) = n(\det A + \det B)$, deoarece
$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} = 0$

R5.6.7. Să se demonstreze că, $(\forall)A, B \in M_n(\mathbf{C})$ avem:

$$\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA).$$

Soluție: Dacă matricea A este invariabilă, atunci:
$\det(I_n+AB)=\det(I_n+BA)\,A^{-1}=\det A\cdot\det(I_n+BA)\cdot\det A^{-1}=\det(I_n+BA)$.
Dacă A este singulară, observăm că matricea $z\cdot I_n + A$ este invariabilă pentru toate numerele complexe z cu excepția rădăcinilor ecuației $\det(zI_n+A)=0$ şi, deci exceptând aceste rădăcini, $\det(I_n+(zI_n+A)B)=\det(I_n+B(zI_n+A))$.
Întrucât cei doi membri ai egalității sunt funcții polinomiale de z, coincid peste tot şi deci şi pentru $z = 0$, ceea ce încheie demonstrația.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. Mulțimi dense

Rezultatul de bază este teorema lui Kronecker care joacă un rol important în teoria numerelor. Această teoremă este interesantă şi din alt punct de vedere deoarece cu ajutorul ei se pot rezolva uşor unele probleme dificile cu enunț elementar.

1.1.1. Definiție. O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte densă în $\mathbb{R}$ dacă orice element din $\mathbb{R}$ este limita unui şir neconstant cu elemente din *A*.

Facem precizarea că mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ este densă în $\mathbb{R}$ dacă pentru oricare $a \in \mathbb{R}$ şi orice vecinătate *V* a punctului *a*, avem $V \bigcap A$ este infinită.

1.1.2. Propoziție. O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ este densă în $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ orice interval $I \subset \mathbb{R}$, de lungime nenulă, conține cel puțin un număr din *A*.

Demonstrație. "$\Rightarrow$" Presupunem că *A* este densă în $\mathbb{R}$. Trebuie demonstrat că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, există $x \in A$ astfel ca $a < x < b$. Presupunem contrariul. Atunci $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ astfel încât $(\forall)$ $x \in A$ să avem că

$$x \notin (\alpha, \beta).$$

(1)

Luăm $u = \dfrac{\beta + \alpha}{2} \in (\alpha, \beta)$. Cum *A* este densă în $\mathbb{R}$, există un şir (x_n) de elemente din *A* astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u$. De aici rezultă că $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ să avem $x_n \in (\alpha, \beta)$ deoarece (α, β) este o vecinătate pentru *u*. Aceasta este o contradicție cu presupunerea făcută (1), de aceea obținem concluzia dorită.

"$\Leftarrow$" Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar. Atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, în intervalul $\left(\alpha - \dfrac{1}{n},\, \alpha + \dfrac{1}{n}\right)$ se găseşte cel puțin un element $a_n \in A$, conform ipotezei. Cum $\alpha - \dfrac{1}{n} < a_n < \alpha + \dfrac{1}{n}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$, cu teorema cleştelui, se obține $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. De unde rezultă că mulțimea *A* este densă în $\mathbb{R}$. Cu aceasta demonstrația se încheie.

1.1.3. Exemplu. Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale este densă în $\mathbb{R}$.

Demonstrație. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $a + n > 0$. Fie numerele $a_1 = a + n$, $b_1 = b + n$. De aici $b_1 - a_1 = b - a > 0$ şi atunci putem găsi un $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $k(b_1 - a_1) > 1 \Leftrightarrow 1 + k \cdot a_1 < k \cdot b_1$. Fie *m* cel mai mic număr natural cu proprietatea $m > k \cdot a_1$ şi deci $m - 1 \le k \cdot a_1$ sau $m \le 1 + k \cdot a_1 < k \cdot b_1$. În acest mod se obține

$$k \cdot a_1 < m < k \cdot b_1 \Leftrightarrow a_1 < \frac{m}{k} < b_1 \Leftrightarrow a + n < \frac{m}{k} < b + n \Leftrightarrow a < \frac{m}{k} - n < b,$$

cu $\frac{m}{k} - n \in \mathbb{Q}$.

1.1.4. Exemplu. Mulțimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a numerelor iraționale este densă în $\mathbb{R}$.

Demonstrație. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar. Dacă $\alpha = 0$, atunci există $x_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$, $(\forall)\ n \ge 1$ de elemente din $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 = \alpha$. Dacă $\alpha \ne 0$, atunci din faptul că $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$ rezultă că există $(a_n)_{n\ge 0}$ un şir de numere raționale astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2} \cdot \alpha \in \mathbb{R}^*$. Presupunem în continuare că $a_n \ne 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ (în caz contrar, avem un număr finit de termeni nuli (limita fiind nenulă) şi se poate renunța la aceştia). Luăm şirul $(b_n)_{n\ge 0}$, $b_n = \frac{a_n}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{a_n}{2} \in \mathbb{R} / \mathbb{Q}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ şi avem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \alpha}{2} = \alpha$. Aşadar, orice element din $\mathbb{R}$ este limita unui şir de elemente din $\mathbb{R} / \mathbb{Q}$, deci $\mathbb{R} / \mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$.

1.1.5. Exemplu. Demonstrați că dacă A este densă în $\mathbb{R}$ iar $r_1 \in \mathbb{R}$, $r_2 \in \mathbb{R}^*$, atunci şi mulțimile

$$A_1 = \{ r_1 + a \mid a \in A \} \text{ şi } A_2 = \{ r_2 \cdot a \mid a \in A \}$$

sunt dense în $\mathbb{R}$.

Demonstrație. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar. Atunci $\alpha - r_1 \in \mathbb{R}$ şi cum A este densă în $\mathbb{R}$, rezultă că există un şir $(x_n)_{n\ge 0}$ de elemente din A astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha - r_1$. De aici rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + r_1) = \alpha$ şi cum $x_n + r_1 \in A$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, va rezulta că A_1 este densă în $\mathbb{R}$.

Analog, pentru $\beta \in \mathbb{R}$, arbitrar, există un şir $(y_n)_{n\ge 0}$ de elemente din A astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{\beta}{r_2}$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} (r_2 \cdot y_n) = \beta$ şi cum $r_2 \cdot y_n \in A_2$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, va rezulta că A_2 este densă în $\mathbb{R}$.

1.1.6. Teoremă. (teorema lui Dirichlet). *Dacă α este irațional şi $p \in \mathbb{N}^*$, atunci există $m, n \in \mathbb{Z}$, $0 < m \le p$ astfel încât*

$$|\alpha \cdot m - n| \le \frac{1}{p}.$$

Demonstrație. Împărțim intervalul $[0,1]$ în p intervale egale de lungime p, $I_1 = \left[0, \frac{1}{p}\right]$, $I_2 = \left[\frac{1}{p}, \frac{2}{p}\right], \ldots, I_p = \left[\frac{p-1}{p}, 1\right]$ şi considerăm numerele $x_1 = \alpha - [\alpha]$, $x_2 = 2\alpha - [2\alpha], \ldots, x_{p+1} = (p+1)\alpha - [(p+1)\alpha]$. Aceste $p+1$ numere se află în intervalul $[0,1) \subset [0,1]$. Cum intervalul $[0,1]$ a fost împărțit în p intervale ca şi mai sus, va rezulta că cel puțin două numere sunt situate în acelaşi interval. Presupunem că acestea sunt $k\alpha - [k\alpha]$ şi $l\alpha - [l\alpha]$ cu $k, l \in \{1, 2, \ldots, p+1\}$ şi $k > l$. Distanța dintre ele nu poate depăşi lungimea intervalului în care se află, adică $\frac{1}{p}$, prin urmare

$$\left|(k\alpha - [k\alpha]) - (l\alpha - [l\alpha])\right| \le \frac{1}{p} \Leftrightarrow |(k-\alpha)l - ([k\alpha] - [l\alpha])| \le \frac{1}{p}.$$

Luăm $m = k - l \in \mathbb{N}^*$ şi $n = [k\alpha] - [l\alpha] \in \mathbb{Z}$. Aceste numere îndeplinesc cerințele din concluzia teoremei căci $m \le p + 1 - 1 = p$.

1.1.7. Teoremă. (teorema lui Kronecker). *Dacă α este irațional, atunci mulțimea*

$$A = \{m\alpha + n \mid m, n \in \mathbb{Z}\},$$

este densă în $\mathbb{R}$.

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, există $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a < m_1\alpha + n_1 < b$. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $d = b - a$ lungimea intervalului $[a, b]$. Atunci există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{p} \le d$ (de exemplu $p = \left[\frac{1}{d}\right] + 1$). Din teorema lui Dirichlet, există $m \in \mathbb{N}^*$ şi $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $|m\alpha - n| < \frac{1}{p} \le d$. Deoarece $m\alpha - n$ este irațional rezultă imediat că $m\alpha - n \ne 0$. În continuare vom propune că $m\alpha - n > 0$ şi $a > 0$ (analog se va proceda şi în celelalte situații). Numerele $u, 2u, 3u, \ldots, ku, \ldots$, $u = m\alpha - n$, sunt distincte două câte două şi cel puțin unul îl depăşeşte pe a (cel pentru care $k \ge \left[\frac{a}{u}\right] + 1$). Demonstrăm că cel mai mic dintre numerele care îl depăşeşte pe a, fie acesta $k_1 \cdot u$, aparține intervalului (a, b).

Într-adevăr, din alegerea lui k_1 avem $(k_1 - 1)u \le a$. Dacă am avea $k_1 \cdot u > b$, atunci $k_1 u - (k_1 - 1)u > b - a = d$, în contradicție cu $m\alpha - n < d$. Deoarece numărul $k_1 u = (mk_1)\alpha + (-nk_1) \in (a,b)$ şi $mk_1, -nk_1 \in \mathbb{Z}$, atunci luăm $m_1 = mk_1$, $n_1 = -nk_1$ şi avem $a < m_1\alpha + n_1 < b$ iar teorema este demonstrată.

1.1.8. Observație. Se poate demonstra că dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci mulțimea

$$B = \left\{ m\alpha - n \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z} \right\},$$

este densă în $\mathbb{R}$.

1.1.9. Definiție. Fie *A* şi *B* două mulțimi astfel încât $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Se spune că mulțimea *A* este densă în mulțimea *B* dacă pentru orice $b \in B$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $A \bigcap (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \ne \varnothing$.

1.1.10. Observații. 1) Mulțimea *A* este densă în mulțimea *B* dacă pentru orice $b \in B$, una din afirmațiile următoare este adevărată

a) $b \in A$

b) $b \notin A$ dar există un şir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in A$, $a_n \ne b$, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = b$;

2) Facem precizarea că observația anterioară este în concordanță cu definiția 1.1.1.

1.1.11. Propoziție. Dacă $A \subset B \subset \mathbb{R}$ şi mulțimea *A* este densă în *B*, iar $f : B \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci mulțimea $f(A)$ este densă în mulțimea $f(B)$.

Demonstrație. Fie $y \in f(B)$ arbitrar. Atunci, există $b \in B$ astfel încât $y = f(b)$. Deoarece *f* este continuă, pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât $f(x) \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ dacă $x \in (b - \delta, b + \delta) \bigcap B$. Cum *A* este densă în *B*, există $a \in A \bigcap (b - \delta, b + \delta)$ şi atunci $f(a) \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$, deci $f(A) \cap (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \ne \varnothing$ şi demonstrația este încheiată.

1.1.12. Definiție. Fie C un cerc în planul P şi $A \subset \mathcal{C}$ o mulțime. Spunem că mulțimea *A* este densă pe cercul C, dacă pentru orice $C \in \mathcal{C}$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$\mathcal{D}(C, \varepsilon) \bigcap A \ne \varnothing,$$

unde $\mathcal{D}(C, \varepsilon) = \left\{ X \in \mathcal{P} \,\middle|\, d(X, C) < \varepsilon \right\}$ reprezintă discul de centru *C* şi rază ε din planul P.

1.1.13. Propoziție. Fie $\mathcal{U} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}$ cercul trigonometric ale cărui puncte le putem privi şi ca numere complexe. Considerăm pe acest cerc un şir de puncte $(A_n) n \in \mathbb{N}$, plasate pe cerc în sens trigonometric şi astfel încât fiecare arc dintre două puncte consecutive A_i şi A_{i+1} să aibă aceeaşi lungime $a > 0$, $(l(\overset{\frown}{A_i A_{i+1}}) = a > 0)$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Atunci avem

a) Dacă $\dfrac{a}{\pi} \in \mathbb{Q}$ atunci şirul $(A_n)n \in \mathbb{N}$ este periodic;

b) Dacă $\dfrac{a}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ atunci mulțimea $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este densă pe cerc, dar nu există nici un poligon regulat cu vârfurile în mulțimea $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstrație. a) Dacă $a = \dfrac{p}{q} \cdot \pi$, $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$, atunci $2qa = 2p \cdot \pi$ şi mulțimea $A_k = A_{k+2q}$, $k \in \mathbb{N}$, adică şirul are perioada $2q$.

c) Dacă $\dfrac{a}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci arătăm că şirul este format din puncte distincte. Dacă, prin absurd $A_k = A_{k+m}$ atunci $ma = p \cdot 2\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, deci $a = \dfrac{2p}{m} \in \mathbb{Q}$, contradicție, deci presupunerea făcută este falsă. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{2\pi}{k} < \varepsilon$. Printre punctele $A_1, A_2, \ldots, A_k$ există două puncte pentru care $l(\overset{\frown}{A_i, A_j}) \le \dfrac{2\pi}{k} < \varepsilon$.

Dacă $i = j + p$, atunci punctele $A_j, A_{j+p}, \ldots, A_{j+kp}, \ldots$ sunt echidistante pe cerc şi distanța dintre două puncte consecutive este mai mică decât ε. În orice disc $D(C, \varepsilon)$ cu C pe cerc există cel puțin un punct din şir. Să arătăm că nu există poligoane regulate cu toate vârfurile în punctele din şir.

Dacă prin absurd $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_p}$ ar fi vârfurile unui poligon regulat cu p vârfuri, atunci am avea $n_2 - n_1 = 2k\pi + \dfrac{2\pi}{p}$, $k \in \mathbb{Z}$ sau $\pi = \dfrac{p(n_2 - n_1)}{2kp + 2} \in \mathbb{Q}$, contradicție.

1.1.14. Propoziție. Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale pozitive cu proprietățile $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \infty$, atunci şirul $(\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ este dens în [0,1], unde s-a notat $\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$ partea zecimală a numerelor $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Fie $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ şi $c_n = \{b_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Vom arăta că în orice interval $(a,b) \subset [0,1]$ există elemente din şirul $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Fie $\varepsilon = \min\{a, b-a, 1-b\}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $0 < a_n < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N_\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

Dacă $c_{n_0} \in [0,a]$ mai putem adăuga termeni astfel încât să ajungem în intervalul (a,b) (există n minim, notat n_0, pentru care $c_n < a < c_{n+1}$ şi atunci $c_{n+1} < b$).

Dacă $c_{n_0} \in [b,1]$ mai adăugăm la b_{n_0} termeni ai căror sumă să depăşească $1-b+a$ (lucru posibil deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$) şi ajungem cu c_n în intervalul (a,b).

Bibliografie

1. **Andrica D., Buzețeanu Şt.,** *Relatively dense universal sequences for the class of continuous periodical functions of period T*, Mathematica – Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation, Tome 16, No.1 (1987), 1-9
2. **Marius Burtea, Georgeta Burtea,** *Elemente de analiză matematică*, Editura Carmins, Piteşti.
3. **Costel Chiteş,** *Aplicații ale teoremei de densitate a lui* $\mathbb{Q}$ *în* $\mathbb{R}$, G.M. 1/1996, Seria pentru informare ştiințifică şi perfecționare metodică
4. **Mircea Ganga,** *Teme şi probleme de matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1991
5. **Stelian Găină,** Articolul: *O metodă generală de rezolvare a unor probleme referitoare la funcții continue*, G.M. Perfecționare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, nr. 2/1980
6. **Dorel Miheț,** Articolul: *Teorema lui Kronecker*, R.M.T. 1/1990

Probleme rezolvate

R1.2.1. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime densă în $\mathbb{R}$, iar $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții continue pe $\mathbb{R}$ şi cu proprietatea că $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$. Atunci $f = g$ pe $\mathbb{R}$ **.**

Soluție. Trebuie demonstrat că $f(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R} \setminus A$. Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus A$ arbitrar. Cum A este densă în $\mathbb{R}$, atunci există un şir $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n \in A$ astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \alpha$. Cum f şi g sunt continue în α rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\alpha)$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = g(\alpha)$. Cum $f(x_n) = g(x_n)$ $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, se va obține $f(\alpha) = g(\alpha)$. Deoarece α a fost ales arbitrar, rezultă concluzia dorită.

R1.2.2. Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Demonstrați că $(\forall)\ \varepsilon > 0, \exists m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ astfel încât $|\alpha m - n| < \varepsilon$.

Soluție. Cum $\varepsilon > 0$, există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{1}{p} < \varepsilon$ (de exemplu $p = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}^*$) . Atunci , din teorema lui Dirichlet, există $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 < m \leq p$, astfel încât $|\alpha m - n| < \dfrac{1}{p}$. Cum $\dfrac{1}{p} < \varepsilon$, va rezulta că $|\alpha m - n| < \varepsilon$.

R1.2.3. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \pi x + \sin(\pi\sqrt{2} \cdot x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, nu poate lua valoarea 2, dar ia valori oricât de apropiate de 2.

Soluție. Presupunem contrariul, atunci $(\exists)\ \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(\alpha) = 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sin \pi\alpha + \sin(\pi\sqrt{2} \cdot \alpha) = 2$. De aici rezultă că $\sin \pi\alpha = 1 = \sin(\pi\sqrt{2}\,\alpha)$, de unde $\pi\sqrt{2} \cdot \alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ şi $\pi\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$. Obținem

$$\sqrt{2} = \frac{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi}{\dfrac{\pi}{2} + 2k_1\pi} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{\dfrac{1}{2} + 2k}{\dfrac{1}{2} + 2k_1},\ k, k_1 \in \mathbb{Z},$$

adică $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, fals. Deci $f(x) < 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ deoarece $\sin t \in [-1, 1]$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$. Pentru $x = \dfrac{1}{2} + 2m$, $m \in \mathbb{Z}$, avem

$$f\left(\frac{1}{2}+2m\right)=1+\sin\left(\pi\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+2m\right)\right).$$

(1)

Arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $m,n \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)-\varepsilon < \pi\sqrt{2}\left(2m+\frac{1}{2}\right) < \pi\left(\frac{1}{2}+2n\right)+\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n+\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{\pi} < \sqrt{2}\left(2m+\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}+2n+\frac{\varepsilon}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{2}-\frac{2\varepsilon}{\pi}\right) < m\sqrt{2}-n < \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{2}+\frac{2\varepsilon}{\pi}\right).$$

(2)

Deoarece mulțimea $A=\left\{m\sqrt{2}-n \mid m,n \in \mathbb{Z}\right\}$ este densă în $\mathbb{R}$, existența lui $m,n \in \mathbb{Z}$ care verifică (2) este asigurată. Relația (2) ne dă faptul că găsim $m,n \in \mathbb{Z}$ astfel încât numărul $\sqrt{2}\left(2m+\frac{1}{2}\right)$ să se apropie oricât de mult de $2n+\frac{1}{2}$. Utilizând acum relația (1) şi continuitatea funcției $\sin x$, deducem că f ia valori oricât de apropiate de 2.

R1.2.4. Fie $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x+\cos ax$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ nu este periodică.

Soluție. Să presupunem prin absurd că există $T>0$ astfel încât $f(x+T)=f(x)$,
$(\forall)\ x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \sin(x+T)+\cos a(x+T)=\sin x+\cos ax$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$. Punând $x=2m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$ în relația anterioară, obținem

$$\sin T+\cos a(2m\pi+T)=\cos a(2m\pi),\ (\forall)\ m\in\mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin T+\cos a\left(2m\pi+\frac{2n\pi}{a}+T\right)=\cos a(2m\pi+2n\pi),\ (\forall)\ m,n\in\mathbb{Z}.$$

Cum $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow \frac{1}{a}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi din teorema lui Kronecker, şi Exemplul 1.1.5 rezultă că mulțimea $A=\left\{2\pi\left(m+\frac{1}{a}\cdot n\right) \mid m,n\in\mathbb{Z}\right\}$ este densă în $\mathbb{R}$. Obținem atunci că

$$\sin T+\cos a(x+T)=\cos ax,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

Pentru $x=0$ şi respectiv $x=-T$ în ultima egalitate, obținem

$$\begin{cases} \sin T + \cos aT = 1 \\ \sin T - \cos aT = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin T = 0 \\ \cos aT = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ aT \in \{2s\pi \mid s \in \mathbb{Z}\}, \end{cases}$$

deci $a = \dfrac{a \cdot T}{T} = \dfrac{2s\pi}{k\pi} = \dfrac{2s}{k} \in \mathbb{Q}$, absurd.

R1.2.5. Fie $a \in \mathbb{R}$. Să se determine toate funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $\int\limits_a^b f(x)\,dx = e^b - e^a$, $(\forall)\ b \in \mathbb{Q}$.

Soluție. Fie funcțiile $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $h(x) = e^x - e^a$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$. Deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}$, g este continuă pe $\mathbb{R}$ (este chiar derivabilă pe $\mathbb{R}$) şi evident h este continuă pe $\mathbb{R}$. În plus, $g(x) = h(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{Q}$, de unde, utilizând problema R.1.2.1 şi faptul că mulțimea $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$ rezultă că $g(x) = h(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$. Deci

$$\int\limits_a^x f(x)\,dx = e^x - e^a,\ (\forall)\ x \in \mathbb{R},$$

de unde, prin derivare, deducem că

$$f(x) = e^x,\ (\forall)\ x \in \mathbb{R},$$

funcție care verifică condițiile din ipoteză.

R1.2.6. Fie $a \in [0,1]$ şi $\varepsilon > 0$. Demonstrați că există o infinitate de numere naturale n pentru care $|\sin n - a| < \varepsilon$.

Soluție. Din $a \in [0,1] \Rightarrow (\exists)\ \alpha \in [0,\pi]$ astfel încât $a = \sin \alpha$. Atunci avem

$$|\sin n - a| = |\sin n - \sin \alpha| = |\sin n - \sin(\alpha + 2k\pi)| =$$
$$= 2\left|\sin \frac{n - \alpha - 2k\pi}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{n + \alpha + 2k\pi}{2}\right| \le 2\left|\sin \frac{n - \alpha - 2k\pi}{2}\right| \le |n - \alpha - 2k\pi|$$

(1)

Din teorema lui Kronecker, mulțimea $A = \{-2\pi \cdot k + n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ este densă în $\mathbb{R}$, ca urmare, există o infinitate de numere naturale n, k astfel încât

$$\alpha - \varepsilon < n - 2k\pi < \alpha + \varepsilon \Leftrightarrow |n - 2k\pi - \alpha| < \varepsilon ,$$

de unde, utilizând şi (1) rezultă concluzia problemei.

R1.2.7. Fie $(a_n)_{n \ge 0}$ un şir de numere reale diferite de zero, astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. Atunci mulțimea $A = \{m \cdot a_n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ este densă în $\mathbb{R}$.

Soluție. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât $a_n < \alpha$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Fie $n \geq n_0$. Cum şirul de termen general $b_m = \dfrac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}^*$, converge la zero, există $m' \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{1}{m'} \leq \dfrac{|a_n|}{\alpha} < 1$. Fie m'' cel mai mic număr natural cu această proprietate. Notând $m_n = m''$ dacă $a_n > 0$ şi $m_n = -m''$ dacă $a_n < 0$, avem

$$0 \leq m_n \cdot a_n - \alpha < |a_n| \text{, pentru orice } n \geq n_0 .$$

(1)

Luând $m_n = 1$ pentru $n < n_0$, $n \in \mathbb{N}^*$, obținem astfel şirul $(m_n a_n)_{n\geq 0}$ de elemente din *A* care, în baza relației (1) converge la *α*.

Dacă $\alpha < 0$, atunci, ca şi mai sus, rezultă că există un şir $(m_n a_n)_{n\geq 0}$ de elemente din *A* care converge la $-\alpha$ şi deci şirul $(-m_n a_n)_{n\geq 0}$, care conține tot elemente din *A*, va converge la *α*.

Dacă $\alpha = 0$, atunci şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n \in A$, converge către $\alpha = 0$. În concluzie, mulțimea *A* este densă în $\mathbb{R}$.

Observație. Luând în problema 6 pe $a_n = \dfrac{1}{n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, va rezulta că mulțimea *A* este chiar mulțimea $\mathbb{Q}$ şi deci $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$.

R1.2.8. Mulțimea $A = \left\{ m\sqrt{3} + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ este densă în $\mathbb{R}$.

Soluție. Numărul $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ este irațional şi din teorema lui Kronecker rezultă că mulțimea $B = \left\{ m\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + n \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ este densă în $\mathbb{R}$. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar. Atunci există un şir de termen general $x_k = m_k \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + n_k$, $k \in \mathbb{N}$, format cu elemente din *B*, care converge către $\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$, deci şirul de termen general $\sqrt{2} \cdot x_k$, care este un şir de elemente din *A* converge către *α*. Prin urmare, mulțimea *A* este densă în $\mathbb{R}$.

R1.2.9. a) Să se arate că mulțimea $\left\{ \sqrt[n]{m} \mid n, m \in \mathbb{N},\ n > 1 \right\}$ este densă în $[1, \infty)$.

b) Ce se poate spune, din acest punct de vedere, despre mulţimea $\left\{\sqrt[p]{q} \mid p, q \text{ numere prime}\right\}$?

Soluţie. a) Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$. Dacă $a>1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, există $m\in\mathbb{N}$ astfel încât $m\le a^n<m+1$, deci $\sqrt[n]{m}\le a<\sqrt[n]{m+1}$. Deoarece $\sqrt[n]{m+1}-\sqrt[n]{m}<\frac{1}{n}\to 0$ deducem că şirul $\left(\sqrt[n]{m}\right)_{n\ge 2}$ are limita *a* (*a* arbitrar în $(1,\infty)$). Aşadar, mulţimea din enunţ este densă în $[1,\infty)$.

b) Dacă $n=p$ este număr prim şi $a>1$, există $m\in\mathbb{N}$ astfel încât $m\le a^p<2m$ şi există *q* prim astfel ca $m\le q<2m$. Rezultă că $\sqrt[p]{m}\le a<\sqrt[p]{2m}$ şi $\sqrt[p]{m}\le\sqrt[p]{q}<\sqrt[p]{2m}$. Dar $\sqrt[p]{2m}-\sqrt[p]{m}\le\frac{a}{p}\to 0$ pentru $p\to\infty$, deci $\left|\sqrt[p]{q}-a\right|\to 0$. Rezultă că şi a doua mulţime este densă în $[1,\infty)$.

R1.2.10. Fie α un număr real şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă cu proprietăţile:

$$f(x+1)=f(x)+1 \text{ şi } f(x+\alpha)=f(x)+\alpha,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

a) Să se arate că dacă α este un număr iraţional, atunci există un număr $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=x+c$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că afirmaţia a) nu este adevărată dacă α este un număr raţional arbitrar.

Soluţie. a) Din egalităţile $f(x+1)=f(x)+1$ şi $f(x+\alpha)=f(x)+\alpha$, rezultă $f(x+n+m\alpha)=x+n+m\alpha$, pentru orice $n,m\in\mathbb{Z}$. Trebuie să demonstrăm că $f(x)-x=$constant. Fie $f(x)=f(x)-x$. Presupunem că afirmaţia nu este adevărată. Atunci există $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $h(x)\ne h(y)$. Avem

$$h(x+n+m\alpha)=f(x+n+m\alpha)-(x+n+m\alpha)=f(x)-x=h(x)$$

pentru orice $n,m\in\mathbb{Z}$. Deoarece α este iraţional, mulţimea $\{n+m\alpha \mid n,m\in\mathbb{Z}\}$ este densă în $\mathbb{R}$. Prin urmare, există un şir $(n_k,m_k)\in\mathbb{Z}^2$, astfel încât $x+n_k+m_k\cdot\alpha\to y$ pentru $k\to\infty$, ceea ce implică $h(x+n_k+m_k\cdot\alpha)\to h(y)$. Dar $h(x+n_k+m_k\cdot\alpha)=h(x)\ne h(y)$. Contradicţia obţinută demonstrează afirmaţia a).

b) Fie $\alpha=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $q>0$. Funcţia $f(x)=qx^2$, pentru $x\in\left[0,\frac{1}{q}\right)$, $f\left(x+\frac{m}{q}\right)=f(x)+\frac{m}{q}$, pentru $m\in\mathbb{Z}$ este continuă, satisface condiţiile

$f(x+1) = f(x)+1$ şi $f(x+\alpha) = f(x)+\alpha$. Această funcţie nu este, însă, de forma $f(x) = x+c$ cu $c \in \mathbb{R}$.

R1.2.11. Să se arate că şirurile $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt dense în $[-1,1]$.

Soluţia I. Mulţimea $A = \{n + m\cdot 2\pi \mid n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}\}$ este densă în $\mathbb{R}$ deoarece $2\pi \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Considerând funcţiile continue $f = \sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ şi $g = \cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$, rezultă în conformitate cu Propoziţia 1.1.11 că mulţimile $f(A)$ şi $g(A)$ sunt dense în $f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = [-1,1]$. Dar

$$f(A) = \{\sin(n + m\cdot 2\pi) \mid n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}\} = \{\sin n \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ şi}$$

$$g(A) = \{\cos(n + m\cdot 2\pi) \mid n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}\} = \{\cos n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

şi soluţia problemei se încheie.

Soluţia II. Fie $z = \cos 1 + i\sin 1 \in U$, un număr complex de pe cercul de rază 1 din planul complex. Şirul $(z^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ determină un şir de afixe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de pe acest cerc astfel încât $l = (\overset{\frown}{A_n A_{n+1}}) = 1$. Conform Propoziţie 1.1.13 şirul $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ formează o mulţime densă pe cerc.

Această mulţime densă se proiectează pe diametrele de pe axele Ox şi Oy în mulţimi dense. Proiecţiile pe Ox sunt punctele B_n de abscisă $\cos n$, iar proiecţiile pe Oy sunt punctele C_n de ordonată $\sin n$ dense fiecare în $[-1,1]$.

R1.2.12. Fie şirul $(b_n)_{n\ge 1}$, $b_n = \sin\dfrac{\pi}{1^\alpha} + \sin\dfrac{\pi}{2^\alpha} + \ldots + \sin\dfrac{\pi}{n^\alpha}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\alpha \in \left(\dfrac{1}{3}, 1\right]$ iar $c_n = \{b_n\}$ partea zecimală a lui b_n, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că mulţimea $\{c_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este densă în $[0,1]$.

Soluţie. Vom arăta că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{k^\alpha}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ $k = \overline{1,n}$ verifică condiţiile din Propoziţia 1.1.14.

Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{n^\alpha}\right) = 0$ (pentru $\alpha > 0$);

Din inegalitatea $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$, $x > 0$ rezultă că

$$\sin\left(\frac{\pi}{k^\alpha}\right) > \frac{\pi}{k^\alpha} - \frac{\pi^3}{6}\cdot\frac{1}{k^{3\alpha}} \qquad (1)$$

Deoarece $\alpha \le 1$ şirul $\left(\frac{\pi}{1^{\alpha}}+\frac{\pi}{2^{\alpha}}+\ldots+\frac{\pi}{n^{\alpha}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este divergent cu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{1^{\alpha}}+\frac{\pi}{2^{\alpha}}+\ldots+\frac{\pi}{n^{\alpha}}\right)=+\infty$ şi cum $\alpha>\frac{1}{3}$ obținem că şirul $\left(\frac{1}{1^{3\alpha}}+\frac{1}{2^{3\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent. Folosind acum inegalitatea (1) şi însumând pentru $k=\overline{1,n}$, găsim că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$. Utilizând acum Propoziția 1.1.14, rezultă concluzia problemei.

R1.2.13. Să se arate că există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât primele patru cifre ale numărului 2^n să fie 2002.

Soluție. Condiția ca primele patru cifre ale lui 2^n să fie 2002 este

$$2002\cdot 10^k \le 2^n < 2003\cdot 10^k \Leftrightarrow k+\lg 2002 \le n\lg 2 < k+\lg 2003 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg 2002 \le n\lg 2 - k < \lg 2003 .$$

Deoarece $\lg 2 \notin \mathbb{Q}$ (se arată prin reducere la absurd), mulțimea $\left\{n\lg 2 - k \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}$ este densă în $\mathbb{R}$, va rezulta că ea are elemente şi în $[\lg 2002, \lg 2003)$. Aşadar, există $n\in\mathbb{N}$ cu proprietatea cerută.

2. Subşir. Şir fundamental. Criterii de convergență

2.1. Subşir al unui şir

În acest paragraf vom defini noțiunea de subşir al unui şir şi vom prezenta câteva teoreme referitoare la subşiruri.

2.1.1. Definiție

Fiind dat şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ şi un şir de numere naturale $(n_k)_{k\geq 1}$ strict crescător, atunci şirul $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ se numeşte subşir al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

2.1.2. Exemplu

Şirul $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ admite subşirurile $x_{2n} = \frac{1}{2n}$ şi $x_{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}$.

2.1.3. Observații

i) Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător (descrescător) atunci orice subşir al său este crescător (descrescător)
ii) Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior (inferior), atunci orice subşir al său este mărginit superior (inferior).

2.1.4. Teoremă

Fie $(x_n)_{n\in N}$ un şir de numere reale care are limita $x \in \overline{R}$. Atunci orice subşir al său are limita x

Demonstrație. Fie $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ un subşir fixat al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi fie $V\in \mathcal{V}(x)$. Atunci $\exists$ $N\in N^*$ astfel încât $x_n \in V$, $(\forall)$ $n\geq N$. Fie k_0 cel mai mic număr natural cu proprietatea $n_{k_0} \geq N$. Atunci $\forall$ $k\geq k_0$: $x_{n_k} \in V$. Prin urmare $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

2.1.5. Observații

Din teorema 2.1.4. decurge imediat că:

a) Dacă un şir conține cel puțin un subşir divergent, atunci el este divergent
b) Dacă un şir conține (cel puțin) două subşiruri convergente către limite diferite atunci el este divergent.

2.1.6. Exemplu

Şirul $x_n = \frac{1}{n} + (-1)^n \cdot 2$ este divergent. Într-adevăr, considerând subşirurile $x_{2n} = \frac{1}{2n} + 2$ şi $x_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - 2$ avem că $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 2$ şi $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = 2$

2.1.7. Teoremă (Lema lui Cesaro).

Orice şir mărginit din R posedă un subşir convergent.

Demonstrație: Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit de numere reale. Atunci există un interval $I_1=[a,b] \subseteq R$ astfel încât $x_n \in I_1$, $\forall\ n\geq 1$. Fie $c = \frac{a+b}{2}$. Cel puțin unul din intervalele $[a,c]$ sau $[c,b]$ conține o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi îl vom nota cu I_2. Continuăm procedeul împărțind intervalul I_2 în două părți egale şi observăm că cel puțin unul din intervalele formate, notat cu I_3, are o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ ş.a.m.d. Am construit astfel un şir de intervale $I_k = [a_k,b_k]$, $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$. Considerăm $x_{n_1} \in I_1$, $x_{n_2} \in I_2$, … , $x_{n_k} \in I_k$ cu $n_k > n_{k-1}$, … un subşir al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

Întrucât $I_k \supseteq I_{k+1}$ obținem: $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_1 \leq ... \leq b_1$, de unde şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt monotone şi mărginite, şi deci conform teoremei lui Weierstrass convergente. Fie $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Evident, $a \leq b$, dar $0 \leq b-a \leq b_n-a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, deci $b= a$. Întrucât $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ obținem prin trecere la limită, aplicând criteriul cleştelui, că subşirul $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ este convergent şi $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a = b.$

2.1.8. Observaţii:

a) Orice şir nemărginit superior conţine un subşir care are limita + ∞.
b) Orice şir nemărginit inferior conţine un subşir care are limita – ∞.

Următoarea teoremă ne ajută să stabilim convergenţa unui şir studiind subşirurile sale:

2.1.9. Teoremă:

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că subşirurile $(x_{2n})_{n\geq 1}$ şi $(x_{2n+1})_{n\geq 1}$ au aceeaşi limită. Atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$.

Demonstraţie: Vom analiza cazul: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a \in R$. Fie $\varepsilon>0$. Atunci rezultă că $\exists\ n'_\varepsilon \in N^*$ astfel încât $|x_{2n}-a|<\varepsilon$, $\forall\ n\in N$, $n \geq n'_\varepsilon$ şi $n''_\varepsilon \in N^*$ astfel încât $|x_{2n+1}-a|<\varepsilon$, $\forall\ n\in N$, $n \geq n''_\varepsilon$.

Fie $n_\varepsilon = \max\ \{2n'_\varepsilon,\ n''_\varepsilon + 1\}$. Atunci întrucât orice număr natural n este fie par, fie impar, obţinem că $|x_n - x| < \varepsilon$, $\forall n\in N$, $n \geq n_\varepsilon$. Prin urmare şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent către x.

Analog se studiază cazurile $a = +\infty$, sau $a = -\infty$.

2.1.10. Exemple:

Să se studieze existenţa limitei şirurilor

a) $x_n = (-1)^n$

b) $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$

c) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Soluţie:

a) $x_{2n} = 1 \to 1$, $x_{2n+1} = -1 \to -1$ deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită

b) $x_{2n} = 0 \to 0$, $x_{4n+1} = 1 \to 1$, $x_{4n+3} = -1 \to -1$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită

c) $x_{2n} = \dfrac{1}{2n} \to 0$, $x_{2n+1} = \dfrac{-1}{2n+1} \to 0$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent spre 0.

2.1.11. Problemă rezolvată

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că subşirurile sale $(x_{2n})_{n\geq 1}$, $(x_{2n+1})_{n\geq 1}$ şi $(x_{3n})_{n\geq 1}$ au limită. Atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are limită.

Demonstraţie: Să presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = b$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = c$.

Deoarece $(x_{6n})_{n\geq 1}$ este un subşir al şirurilor $(x_{2n})_{n\geq 1}$ şi $(x_{3n})_{n\geq 1}$, în baza unicităţii limitei avem $a = c$. Analog $(x_{3(2n+1)})_{n\geq 1}$ este un subşir al şirurilor $(x_{3n})_{n\geq 1}$ şi

$(x_{2n+1})_{n\geq 1}$, deci $b = c$. Aşadar $a = b$. Aplicând Teorema 2.1.9. rezultă că şirul $(x_n)_{n\in N}$ are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2.1.12. Observaţie:

Condiţia din problema rezolvată 2.1.11. ca şirul $(x_{3n})_{n\geq 1}$ să aibă limită asigură de fapt aceeaşi limită pentru subşirurile $(x_{2n})_{n\geq 1}$ şi $(x_{2n+1})_{n\geq 1}$.

2.2. Şir fundamental. Criteriul lui Cauchy

2.2.1. Definiţie:

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale. Spunem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir fundamental (Cauchy) dacă:
$(\forall)\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon \in N^*$ astfel încât $|x_m - x_n| < \varepsilon$, $(\forall)\ m, n \geq n_\varepsilon$. (2.2.1)

2.2.2. Observaţie:

Definiţia de mai sus este echivalentă cu următoarea afirmaţie:
$(\forall)\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon \in N^*$ astfel încât $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, $(\forall)\ p\in N^*$ şi $n \geq n_\varepsilon$. (2.2.2)

2.2.3. Exemple:

Şirul $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ este şir Cauchy.

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci:
$|x_m - x_n| = \left|\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{m^2} + \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, $(\forall)\ m,n \geq n_\varepsilon$, unde $n_\varepsilon = \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right] + 1$

2.2.4. Teoremă (Cauchy)

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir cu elemente din R. Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă şi numai dacă este fundamental.
Demonstraţie: Necesitatea
Presupunem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\varepsilon > 0$ fixat.

Atunci $(\exists)\ n_\varepsilon \in N^*$ astfel încât $|x_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$. De aici avem:

$|x_m - x_n| \leq |x_m - l| + |x_n - l| < \varepsilon$, $(\forall)\ m,n \geq n_\varepsilon$.
Deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este fundamental.

Suficiența: Să presupunem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este fundamental. Pentru $\varepsilon = 1 > 0$ există $n_1 \in N^*$ astfel încât $\left|x_n - x_{n_1}\right| < 1$, $(\forall)$ $n \geq n_1$, adică

$\left|x_n\right| \leq \left|x_n - x_{n_1}\right| + \left|x_{n_1}\right| < 1 + \left|x_{n_1}\right| = a$, $(\forall)\, n \geq n_1$.

Luând A = max $\{a, x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}$ obținem $\left|x_n\right| \leq A$, $(\forall)$ $n \in N^*$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Din Lema lui Cesaro (T. 2.1.7), şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ conține un subşir convergent $(x_{n_k})_{k\geq 1}$. Fie $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ şi $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)$ $k_\varepsilon \geq 1$ astfel încât

$\left|x_{n_k} - x\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)$ $k \geq k_\varepsilon$.

Pentru $\varepsilon > 0$, întrucât şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este fundamental, $(\exists)$ $n_\varepsilon \geq 1$ astfel încât

$\left|x_m - x_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$.

Avem: $\left|x_n - x\right| \leq \left|x_n - x_{n_{k_\varepsilon}}\right| + \left|x_{n_{k_\varepsilon}} - x\right| < \varepsilon$, $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$, prin urmare $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi are limita x.

2.2.5. Observație

a) Întrucât în R orice şir fundamental este convergent, se mai spune că R este un <u>spațiu complet</u>, în timp ce Q nu are această proprietate.
b) Teorema lui Cauchy nu permite să stabilim convergența unui şir fără a-i şti limita.

2.2.6. Exemple:

Să se studieze convergența şirurilor:

a) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2}$

b) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n}$

Soluție:
a)

$$\left|x_m - x_n\right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(m-1)m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$(\forall)$ $m, n \geq n_\varepsilon$, unde $n_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. De aici şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este fundamental, deci convergent.

b) $\left|x_{2n}-x_n\right|=\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2}$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este fundamental, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este convergent. Întrucât şirul este crescător, conform teoremei lui Weierstrass, există $\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

2.3. Criterii de convergență

În acest paragraf ne propunem să prezentăm câteva criterii de convergență a şirurilor, altele decât cele prevăzute în programa de analiză matematică pentru clasa a XI-a.

2.3.1. Teoremă:

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pentru care există $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\alpha\in\overline{R}$.

(i) Dacă $\alpha > 0$ atunci $\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$

(ii) Dacă $\alpha < 0$ atunci $\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty$

Demonstrație:

(i) Fie $V \in \mathcal{V}(\alpha)$, $0 \notin V$. Atunci există $n_1\in N^*$ astfel încât $(x_{n+1}-x_n)\in V$, $\forall\, n \geq n_1$, adică $x_{n+1}-x_n>0$, $\forall\, n\geq n_1$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Din teorema lui Weierstrass $x_n\to x$ unde $x \in R$ sau $x = +\infty$. Presupunând că $x \in R$ atunci $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$ contradicție. Deci $x = \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

(ii) analog.

2.3.2. Observație:

Teorema anterioară nu dă nici o indicație asupra naturii şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dacă $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$. În acest caz putem avea:

(i) $\lim_{n\to\infty} x_n\in R$, de exemplu $x_n=\frac{n}{n+1}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$, de exemplu $x_n=\sqrt{n}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty$, de exemplu $x_n=-\sqrt{n}$.

2.3.3. Teoremă (Criteriul raportului)

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive pentru care există

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lambda\in[0,+\infty]$.

(i) Dacă $\lambda \in [0,1)$ atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(ii) Dacă $\lambda \in (1,+\infty]$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Demonstrație:

i) Fie $V \in \mathcal{V}(\lambda)$, $1 \notin V$. Atunci există $n_1 \in N^*$ astfel încât $\frac{x_{n+1}}{x_n} \in V$, $(\forall)$ $n \geq n_1$. Avem aşadar $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict pozitiv şi mărginit inferior de zero. Conform teoremei lui Weierstrass rezultă că este convergent, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in [0,\infty)$. Dacă $a > 0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$ contradicție, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

ii) Analog cu punctul (i).

2.3.4. Observație:

Teorema anterioară nu dă nici o indicație asupra naturii şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$. În acest caz putem avea:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, de exemplu $x_n = 1+\frac{1}{n}$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, de exemplu $x_n = \frac{1}{n}$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, de exemplu $x_n = n$

Adăugând însă o condiție suplimentară asupra şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, se poate da următorul rezultat care asigură convergența spre zero a şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

2.3.5. Teoremă [5]

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent de numere reale nenule astfel încât există $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}-1\right)\in R^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demonstrație: Fie $(z_n)_{n\geq 1}$ şirul de numere reale cu proprietatea că:

$\dfrac{z_1+z_2+...+z_n}{n}=x_n$, pentru orice $n \geq 1$ (2.3.1)

Avem de aici $\begin{matrix} z_1+z_2+...+z_n=nx_n \\ z_1+z_2+...+z_{n-1}=(n-1)x_{n-1} \end{matrix}$, $n > 1$

De unde deducem relația $z_n = nx_n-(n-1)x_{n-1}$, $n > 1$ care se poate scrie sub forma echivalentă $z_n = x_{n-1}\left[n\left(\dfrac{x_n}{x_{n-1}}-1\right)+1\right]$. Din această relație, pe baza ipotezelor, rezultă că şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ are limită finită.

Pe de altă parte, din lema lui Cesaro-Stolz (vezi teorema 2.4.3) rezultă că: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_1+z_2+...+z_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}z_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ şi ținând seama de (2.3.1) obținem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=L\in R$.

Notând $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{x_n}{x_{n-1}}-1\right)=l\in R^*$, din relația (2.3.1) obținem $L = L\ (\ l + 1\ )$ şi cum $l \neq 0$ rezultă că $L = 0$.

2.3.6. Observații:

a) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{x_n}{x_{n-1}}-1\right)=0$, concluzia teoremei nu mai are loc.

Într-adevăr, considerând şirul $x_n=1+\dfrac{1}{n}$, avem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{x_n}{x_{n-1}}-1\right)=0$.

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{x_n}{x_{n-1}}-1\right)=+\infty$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=+\infty$.

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci există $n_\varepsilon \in N^*$ astfel încât $n\left(\dfrac{x_n}{x_{n-1}}-1\right)>\varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$.

De aici obținem: $\dfrac{x_n}{x_{n-1}}>1+\dfrac{\varepsilon}{n}$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$ şi prin înmulțiri succesive avem:

$$\frac{x_n}{x_{n_\varepsilon}-1}>\left(1+\frac{\varepsilon}{n_\varepsilon}\right)\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{n_\varepsilon+1}\right)\cdot...\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{n}\right)$$

de unde deducem că:

$$|x_n| \geq |x_{n_\varepsilon} - 1| \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{n_\varepsilon}\right) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{n_\varepsilon + 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{n}\right) > |x_{n_\varepsilon} - 1| \cdot \left[1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n_\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right]$$ şi

cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n_\varepsilon} + \frac{1}{n_\varepsilon + 1} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = +\infty$.

c) Condiția ca $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n-1}} - 1\right) \in R^*$ nu atrage după sine convergența şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

Într-adevăr luând $x_n = n^2$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n-1}} - 1\right) = 2$

2.3.7. Exemple

Să se determine limita şirurilor:

a) $x_n = \frac{\alpha^n}{n!}, (\alpha > 1)$

b) $x_n = \frac{(2n)!}{n^n}$

c) $x_n = \frac{2^n}{C_{2n}^n}$

d) $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}, n \geq 1$

e) $b_n = \frac{a \cdot (a+1) \cdot \ldots \cdot (a+n+1)}{n!}, a \in [0,1), n \geq 1$

Soluții

Avem

a) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\alpha}{n+1} \to 0$, deci conform criteriului raportului $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

b) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2(2n+1)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \infty$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

c) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

d) Avem $0 < a_n < 1$ şi $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2n-1}{2n} < 1$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător şi mărginit inferior, ca urmare este convergent. Întrucât $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}} - 1\right) = -\dfrac{1}{2}$, conform teoremei 2.3.3 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

e) Avem $0 < b_n$ şi $\dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{a+n-1}{n} < 1$, deci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător şi mărginit inferior, ca urmare este convergent. Întrucât $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{b_n}{b_{n-1}} - 1\right) = a - 1 \in R^*$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

2.4. Criteriul lui Cesaro-Stolz

2.4.1. Teoremă (Cesaro-Stolz, cazul $\frac{0}{0}$)

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri cu următoarele proprietăţi:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$; $y_n \neq 0$, $n \in N^*$

(ii) şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător

(iii) există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \overline{R}$

Atunci şirul $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq 1}$ are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$

Demonstraţie: Avem trei cazuri posibile $l \in R$, $l = +\infty$ sau $l = -\infty$.

Cazul I: $l \in R$. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $n_\varepsilon \in N^*$ astfel încât

$l - \varepsilon < \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < l + \varepsilon$, $(\forall) n \geq n_\varepsilon$.

Deoarece $y_{n+1} - y_n < 0$, $n \in N^*$, inegalitatea devine:

$(l+\varepsilon)(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < (l-\varepsilon)(y_{n+1} - y_n)$. Însumând aceste inegalităţi pentru $n = \overline{m, m+p-1}, m \geq n_\varepsilon$ şi $p \in N^*$ obţinem:

$(l+\varepsilon)(y_{m+p} - y_m) < x_{m+p} - x_m < (l-\varepsilon)(y_{m+p} - y_m)$

Pentru $m \geq n_\varepsilon$ şi $p \to \infty$, ţinând seama că $\lim\limits_{p\to\infty} x_{m+p} = \lim\limits_{p\to\infty} y_{m+p} = 0$ se obţine:

$(l+\varepsilon)(-y_m) < -x_m < (l-\varepsilon)(-y_m)$, $m \geq n_\varepsilon$.

Deci $\left|\dfrac{x_m}{y_m} - l\right| < \varepsilon$, $(\forall)$ $m \geq n_\varepsilon$ ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{x_n}{y_m} = l$.

Cazul II: $l = +\infty$. Fie $\varepsilon > 0$, atunci există $n_\varepsilon \in N^*$ astfel încât: $\dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} > \varepsilon$, $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$..

Deoarece $y_{n-1} - y_n < 0$, $n \in N^*$ inegalitatea devine:

$x_{n+1} - x_n < \varepsilon(y_{n+1} - y_n)$, $n \geq n_\varepsilon$.

Însumând aceste inegalităţi pentru $n = \overline{m, m+p-1}, m \geq n_\varepsilon$, $m \geq n_\varepsilon$ şi $p \in N^*$ obţinem:

$x_{m+p} - x_m < \varepsilon(y_{m+p} - y_m)$.

Pentru $m \geq n_\varepsilon$ şi $p \to \infty$ ţinând seama că $\lim\limits_{p\to\infty} x_{m+p} = \lim\limits_{p\to\infty} y_{m+p} = 0$, se obţine

$\dfrac{x_m}{y_m} > \varepsilon$, $(\forall) m \geq n_\varepsilon$, ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{x_m}{y_m} = +\infty$.

Cazul III: $l = -\infty$. Analog cazului II.

2.4.2. Exemplu:

Se consideră şirul $a_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$, $\forall$ $n \in N^*$. Admitem cunoscut că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\pi^2}{6}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a_n - \dfrac{\pi^2}{6}\right)$.

Soluţie: $n\left(a_n - \dfrac{\pi^2}{6}\right) = \dfrac{a_n - \frac{\pi^2}{6}}{\frac{1}{n}}$.

Fie $x_n = a_n - \dfrac{\pi^2}{6}$ şi $y_n = \dfrac{1}{n}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, $(y_n)_{n\geq 1}$ strict descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n}{n+1} = -1$.

Aplicând teorema 2.4.1 obținem că $\lim_{n\to\infty} n\left(a_n - \frac{\pi^2}{6}\right) = -1$.

2.4.3. Teoremă (Cesaro-Stolz, cazul $\frac{\infty}{\infty}$)

Fie $(x_n)_{n\ge1}$ şi $(y_n)_{n\ge1}$ două şiruri care au următoarele proprietăți:

(i) $y_n > 0$, $n \in N^*$, $(y_n)_{n\ge1}$ strict crescător şi nemărginit

(ii) există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \in \overline{R}$.

Atunci şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\ge1}$ are limită şi $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.

Demonstrație: Avem trei cazuri posibile: $l \in R$, $l = +\infty$ sau $l = -\infty$. Vom considera doar cazul $l = +\infty$, celelalte două cazuri demonstrându-le analog.

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $m_\varepsilon \in N^*$ astfel încât $|z_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)$ $n \ge m_\varepsilon$, unde

$z_n \overset{not}{=} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$. Fie $m \ge m_\varepsilon$ şi $p \in N^*$. Se observă că:

$$x_{m+p} = x_m + \sum_{k=m}^{m+p-1}(y_{k+1}-y_k)z_k = x_m + l(y_{m+p}-y_m) + \sum_{k=m}^{m+p-1}(y_{k+1}-y_k)(z_k - l)$$

Împărțind prin y_{m+p} se obține $\frac{x_{m+p}}{y_{m+p}} - l = u_p + v_p$, unde $u_p = \frac{x_m - l y_m}{y_{m+p}}$ şi

$$v_p = \frac{1}{y_{m+p}} \sum_{k=m}^{m+p-1}(y_{k+1}-y_k)(z_k - l).$$

Se observă că $\lim_{p\to\infty} u_p = 0$, deci există $p_\varepsilon \in N^*$ astfel încât $|u_p| < \frac{\varepsilon}{2}$, $(\forall) p \ge p_\varepsilon$.

$$|v_p| \le \frac{1}{y_{m+p}} \sum_{k=m}^{m+p-1}(y_{k+1}-y_k)|z_k - l| \le \frac{\varepsilon}{2y_{m+p}} \sum_{k=m}^{m+p-1}(y_{k+1}-y_k) =$$

$$\frac{\varepsilon}{2y_{m+p}}(y_{m+p}-y_m) = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{y_m}{y_{m+p}}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deci $\left|v_p\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, pentru $p \in N^*$. Rezultă că pentru orice $m \geq m_\varepsilon$ şi orice $p \geq p_\varepsilon$,

$$\left|\frac{x_{m+p}}{y_{m+p}} - l\right| = \left|u_p + v_p\right| < \left|u_p\right| + \left|v_p\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Notăm $n_\varepsilon = m_\varepsilon + p_\varepsilon$. Atunci pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ există $m \geq m_\varepsilon$ şi $p \geq p_\varepsilon$ astfel încât $n = m + p$ şi deci $\left|\dfrac{x_n}{y_n} - l\right| < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$.

2.4.4. Consecinţă

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale care are limită. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Demonstraţie: aplicăm Teorema 2.4.3 pentru $x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ şi $y_n = n$

2.4.5. Consecinţă

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive care are limită.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}\right)^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Demonstraţie: aplicăm consecinţa 2.4.4. pentru şirul $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$.

2.4.6. Consecinţă

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive care are limită. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Demonstraţie: trecem la limită în inegalitatea mediilor:

$\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$ şi ţinem cont de consecinţele 2.4.4 şi 2.4.5.

2.4.7. Consecință

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de umere reale pozitive. Dacă şirul $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ are limită, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$

Demonstrație: Fie $y_1 := x_1$, $y_n := \frac{x_n}{x_{n-1}}$. Atunci $x_n = y_1 y_2 ... y_n$, $(\forall)\ n \geq 1$.

Aplicăm consecința 2.4.6 şi avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_1 y_2 ... y_n} = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

2.4.8. Observație

Consecințele 2.4.4 – 2.4.6 afirmă: dacă un şir de numere reale pozitive are limită, atunci şirul mediilor aritmetice, geometrică şi armonică au aceeaşi limită cu şirul inițial.

2.4.9. Exemple

Calculați utilizând teorema lui Cesaro-Stolz:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + ... + n\cdot(n+1)\cdot(n+1)}{n^2(n+1)^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^s + 2^s + ... + n^s}{n^{s+1}}$, unde $s \in N$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ... + \frac{1}{\ln n}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_{2n}^n}$

Soluții

a) fie $x_n = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + ... + n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ şi $y_n = n^2(n+1)^2$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+1)^2[(n+2)^2-n^2]} = \frac{1}{4}$ şi în baza teoremei lui Cesaro-Stolz $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{4}$.

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^s+\ldots+n^s}{n^{s+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^s}{(n+1)^{s+1}+n^{s+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^s+C_s^1 n^{s-1}+\ldots+1}{C_{s+1}^1 n^s+\ldots}=\frac{1}{C_{s+1}^1}=\frac{1}{s+1}$

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0$

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ (vezi paragraful 2.5.2)

e) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_{2n}^n}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}=4$

2.4.10. Observație

Reciproca teoremei lui Cesaro-Stolz nu este totdeauna adevărată. Într-adevăr, considerând $x_n=(-1)^n$ şi $y_n=n$, avem $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$, dar $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ nu există.

Se poate formula însă următoarea teoremă reciprocă:

2.4.11. Teoremă (Reciproca teoremei lui Cesaro-Stolz)

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale cu următoarele proprietăți:

(i) $(y_n)_{n\geq 1}$ strict crescător şi nemărginit

(ii) există $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l\in\overline{R}$

(iii) există $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{y_{n+1}}=y\in R_+\setminus\{1\}$

Atunci există $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ şi este egală cu *l*.

Demonstrație. Avem

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{x_n-x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{y_n}=\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\cdot\frac{y_n-y_{n-1}}{y_n}+\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}\cdot\frac{y_{n-1}}{y_n}=\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\left(1-\frac{y_{n-1}}{y_n}\right)+\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}\cdot\frac{y_{n-1}}{y_n}$$

trecând la limită după n obținem:

$l=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\cdot(1-y)+ly$, de unde rezultă că $(1-y)l=(1-y)\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ şi întrucât $y\neq 1$ rezultă că:

$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$. Cu aceasta teorema este demonstrată.

2.5. Ordin de convergență al unui şir. Şiruri remarcabile

În ultimii ani au apărut numeroase probleme care au ca obiect studiul ordinului de convergență al unor şiruri de numere. Acest concept împreună cu şirurile remarcabile de numere fac parte nemijlocită din cultura matematică.

Ordin de convergență al unui şir

2.5.1. Definiție

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere pozitive, <u>convergente spre zero</u>, pentru care există $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$

Atunci:

i) dacă $l=0$ vom spune că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ converge mai repede decât şirul $(b_n)_{n\geq 1}$

ii) dacă $l\in R^*$ vom spune că şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ au acelaşi ordin (aceeaşi viteză) <u>de convergență</u>.

iii) dacă $l=+\infty$, vom spune că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ converge mai repede decât şirul $(a_n)_{n\geq 1}$

2.5.2. Exemplu

Întrucât $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$, conform definiției, şirul $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 1}$ converge mai repede decât şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$.

2.5.3. Observație:

Noțiunea de ordin de convergență poate fi uşor adaptată la cazul şirurilor convergente oarecare. Fie $(u_n)_{n\geq 1}$ şi $(v_n)_{n\geq 1}$ două şiruri convergente, $\lim_{n\to\infty}u_n=u$

şi $\lim_{n\to\infty} v_n = v$. Atunci şirurile $(u_n - u)_{n\geq 1}$ şi $(v_n - v)_{n\geq 1}$ sunt convergente spre zero. Presupunând că $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n - u}{v_n - v} = l$, atunci

i) dacă $l = 0$ şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ converge mai repede (către *u*) decât şirul $(v_n)_{n\geq 1}$ (către *v*)

ii) dacă $l \in (0,\infty)$ cele două şiruri au acelaşi ordin de convergenţă

iii) dacă $l = +\infty$ atunci şirul $(v_n)_{n\geq 1}$ converge mai repede decât şirul $(u_n)_{n\geq 1}$.

2.5.4. Definiţie

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale pozitive care tind spre +∞, pentru care există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Atunci:

i) dacă $l > 1$ vom spune că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ tinde „mai repede" la +∞ decât şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ şi vom nota $(b_n)_n \prec (a_n)_n$

ii) dacă $l = 1$ vom spune că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ tinde „la fel de repede" ca şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ spre +∞ şi vom nota $(a_n)_n \sim (b_n)_n$

2.5.5. Exemple

$(\ln n)_n \prec (n^\alpha)_n \prec (a^n)_n \prec (n!)_n \prec (n^n)_n$, unde $\alpha > 0$, $a > 1$.

2.5.6. Observaţie

Nu întotdeauna două şiruri sunt comparabile prin intermediul acestui concept de ordin de convergenţă.

Într-adevăr, pentru şirurile $a_n = \frac{1}{n}\sin n$, $n \geq 1$ şi $b_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ avem $a_n \to 0$ şi $b_n \to 0$ când $n \to \infty$, dar $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ nu există. Rezultatul obţinut exprimă diferenţa esenţială care există între comportamentul acestor două şiruri în procesul de „apropiere" de limita lor comună, zero.

Şirul lui *e*

Reamintim fără demonstraţie următorul rezultat:

2.5.7. Teoremă [1]

Fie $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$. Atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi mărginit, deci convergent. Limita sa se notează cu *e* şi avem $2 < e < 3$.

2.5.8. Corolar [1]

Şirul $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$ este strict crescător, iar şirul $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este strict descrescător şi avem inegalităţile:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ (\forall) n \geq 1$$

2.5.9. Observaţie

i) Se arată că numărul *e* (iniţiala de la Euler) este transcendent şi avem *e* = 2,7182818…

ii) Utilizând procedeele de calcul diferenţial se arată că cel mai mic număr β şi cel mai mare număr α astfel încât pentru orice $n \in N^*$ să aibă loc inegalitatea:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$ sunt $\alpha = \frac{1}{\ln 2} - 1$ şi $\beta = \frac{1}{2}$.

2.5.10. Teoremă [1]

i) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

ii) Dacă $(b_n)_{n\geq 1}$ este un şir convergent la 0 atunci:

$$\lim_{n\to\infty}(1+b_n)^{\frac{1}{b_n}} = e$$

2.5.11. Observaţie

Are loc inegalitatea:

$$\frac{e}{2n+2} < e - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1}$$

Această inegalitate precizează ordinul de convergență al şirului $(e_n)_{n\geq 1}$ către limita sa, numărul e, în sensul că $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\frac{e}{2}$, deci şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ converge către e la fel de repede ca şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ către zero. O demonstrație elementară a acestei inegalități se găseşte în [2].

2.5.12. Teoremă [1]

Şirul $(E_n)_{n\geq 1}$, $E_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$ este strict crescător şi are limita e.

Constanta lui Euler

2.5.13. Teoremă

Fie $c_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n$, $n\geq 1$. Atunci şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi minorat de 0, deci convergent. Limita sa, numită constanta lui Euler se notează cu c şi $0<c<1$.

Demonstrație: Logaritmând inegalitatea $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, obținem:

$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$, $\forall n\geq 1$ şi deci $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}<\ln(n+1)<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $\forall n\geq 1$

Atunci avem: $c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$, deci şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi $0<\ln(n+1)-\ln(n)<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n=c_n<c_1=1$

Aşadar $(c_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi minorat de 0, deci convergent. Fie c limita sa. Evident $0<c<1$

2.5.14. Observație

i) $c=0{,}5772156619...$ Nu se cunoaşte dacă c este rațional, irațional, algebric sau transcendent.

ii) Are loc inegalitatea $\frac{1}{2n+1}<c_n-c<\frac{1}{2n}$

Demonstrația acestor inegalități se face astfel:

Din inegalitatea: $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ (vezi Observația 2.5.9 ii) prin logaritmare se obține $\frac{2}{2n+1} < \ln(n+1) - \ln n$ (1)

Din inegalitatea: $\frac{e}{2n+2} < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (vezi Observația 2.5.11) se obține $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \cdot \frac{2n+1}{2n+2}$, de unde prin logaritmare avem $\ln(n+1) - \ln n < \frac{2n+1}{2n(n+1)}$
(2)

Deci din (1) şi (2) avem:

$$\frac{2}{2n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{2n+1}{2n(n+1)} \quad (3)$$

Fie şirurile $(u_n)_{n\geq 1}$ şi $(v_n)_{n\geq 1}$ definite prin $u_n = c_n - \frac{1}{2n+1}$ şi $v_n = c_n - \frac{1}{2n}$.

Folosind inegalitățile (3) se arată că şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, iar $(v_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Observând că $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = c$ avem:

$c_n - \frac{1}{2n+1} < c < c_n - \frac{1}{2n}$, de unde obținem $\frac{1}{2n} < c_n - c < \frac{1}{2n+1}$.

Această inegalitate stabileşte ordinul de convergență al şirului (c_n) în sensul că: $\lim_{n\to\infty} n(c_n - c) = \frac{1}{2}$, deci şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ convergent către c are acelaşi ordin de convergență cu şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n>1}$, altfel spus, şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ converge către c la fel de repede ca şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n>1}$ către 0.

iii) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{kn}\right) = \ln k$, $\forall k \geq 2$.

Într-adevăr, trecând la limită în egalitatea:

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{kn} = \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{kn} - \ln kn\right) - \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln k$ se obține rezultatul dorit.

2.5.15. Problemă rezolvată:

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}-e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\right)$

Rezolvare: Fie $a_n=e^{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}-e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\left(e^{\frac{1}{n+1}}-1\right)=e^{c_n}\cdot n\left(e^{\frac{1}{n+1}}-1\right)=$

$e^{C_n}\cdot\dfrac{e^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n}}$. Trecând la limită obținem $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e^c$

Şirul lui Lalescu. Generalizări

2.5.16. Exercițiu rezolvat

Să se arate că

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\dfrac{1}{e}$ (Traian Lalescu – GM 1901)

Rezolvare: Calculăm mai întâi

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\cdot\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{n}{\sqrt[n]{n}}=\dfrac{1}{e}\cdot1\cdot e=1$ deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$

(utilizând Criteriul lui Cesaro-Stolz)

Deci $a_n=\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{n!}\left(\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}-1\right)=\sqrt[n]{n!}(e^{b_n}-1)$, unde

$b_n=\ln\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\dfrac{1}{n+1}\ln(n+1)!-\dfrac{1}{n}\ln n!$, $n\in N^*$ şi $b_n\to0$.

Deci $a_n=\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot n\cdot\dfrac{e^{bn}-1}{b_n}\cdot b_n\to\dfrac{1}{e}\cdot1\cdot\lim\limits_{n\to\infty}nb_n$

Însă $nb_n=\dfrac{n\ln(n+1)!-(n+1)\ln n!}{n+1}=\dfrac{n\ln(n+1)-\ln n!}{n+1}=\dfrac{u_n}{v_n}$, $n\in N^*$

$v_n\to\infty$ şi $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}=(n+1)\ln\dfrac{n+2}{n+1}=\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\to\ln e=1$. Aşadar

$nb_n\to1$. Deci $a_n\to\dfrac{1}{e}$.

2.5.17. Observație

D.M. Bătinețu-Giurgiu s-a ocupat în numeroase articole de şirul $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$ (al lui Lalescu) şi de extinderi ale acestuia, reuşind să-l transforme într-un şir care să rivalizeze prin frumusețea sa cu şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ care defineşte numărul *e*. Legătura dintre aceste două şiruri este dată de relația:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$

2.5.18. Generalizare

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive pentru care $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = a \in R_*^+$ şi

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l \in \overline{R}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = e$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a$ (L. Şlicaru).

Demonstrație: Notăm $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $n \in N^*$. Se observă că

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{a_n} \to 1 \text{ şi}$$

$$a_{n+1} - a_n = a_n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = a_n(b_n - 1)\cdot\frac{\ln(b_n{}^n)}{n\ln b_n} = \frac{a_n}{n}\cdot\frac{b_n - 1}{\ln b_n}\cdot\ln(b_n{}^n)$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a\cdot 1\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\ln(b_n{}^n) = \begin{cases} a\cdot\ln l, l \in R \\ \infty, l = \infty \end{cases}$

Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) \in \overline{R}$. Din teorema lui Cesaro-Stolz, deoarece

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n} \in \overline{R}$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \begin{cases} a\cdot\ln l, l \in R \\ \infty, l = \infty \end{cases}$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = a \in R_+^*$, deci $l \in R$ şi $a = a\cdot\ln l$, de unde $l = e$. Aşadar

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = e$.

2.5.19. Cazuri particulare

a) luând $a_n := \sqrt[n]{n!}$ regăsim şirul lui Lalescu

b) luând $a_n := n\sqrt[n]{n!}$ obținem şirul lui Romeo Ianculescu (GM 1913+1914, vol. XIX, probl. 2042, pag. 160); care are termenul general
$I_n = (n+1)\sqrt[n+1]{n+1} - n\sqrt[n]{n}$ şi $\lim_{n\to\infty} I_n = 1$

c) luând $a_n := n\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-2}$ obținem şirul lui Mihail Ghermănescu (GM vol. XLI, 1935-1936, probl. 4600, pag. 216) care are termenul general
$G_n = \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} - \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-2}}$ şi $\lim_{n\to\infty} G_n = e$

d) luând $a_n := \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}$ obținem şirul lui D. M. Bătinețu-Giurgiu (GM vol. XCIV, 1989, probl. C:890, pag. 139) care are termenul general $B_n = \frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}$
şi $\lim_{n\to\infty} B_n = e$

Formulele lui Wallis şi a lui Stirling

Vom da fără demonstrație următorul rezultat util în calculul limitelor unor şiruri:

2.5.20. Propoziție*

Se consideră şirurile $w_n = \frac{C_{2n}^n}{4^n}\sqrt{n\pi}$ (Wallis) şi $s_n = \frac{n^n}{n!e^n}\sqrt{2n\pi}$ (Stirling).
Atunci şirurile $(w_n)_{n\geq 1}$ şi $(s_n)_{n\geq 1}$ sunt strict crescătoare şi $\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$

2.5.21. Observație

Datorită rezultatului precedent putem considera că pentru n suficient de mare $4^n \cong C_{2n}^n\sqrt{n\pi}$ şi $n! \cong n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$. Aproximarea utilă în calculul unor limite de rapoarte ce conțin factoriale, este neriguroasă, deşi când $n \to \infty$ raportul celor doi termeni tinde către 1, ei pot diferi mult între ei. Înlocuirea devine corectă dacă e făcută în cadrul limitei. Totodată, înlocuirea nu e utilă în calculul limitei unor diferențe ce conțin factoriale.

* O demonstrație elementară a teoremei lui Wallis se găseşte în [2] iar a teoremei lui Stirling în [4]. Se pot da şi demonstrații utilizând calculul diferențial şi integral. Vezi [1] (pag. 398-399 şi 408-409) (demonstrație cu ajutorul integralelor a formulelor lui Wallis şi Stirling)

2.5.22. Exemple

Calculați:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^n\cdot n!}{n^n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$

Soluții

a) înlocuirea $n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ conduce la:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^n}\cdot n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi n}=\infty$$

b) înlocuirea $n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ conduce la:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n-n+\ln\sqrt{2\pi n}}{n\ln n}=1$$

Bibliografie

[1] Gh. Şirețchi, Calcul diferențial şi integral, vol. I şi II, Ed. Şt. şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985
[2] A. Vernescu, Analiză Matematică, vol. I, Ed. Pantheon, Bucureşti, 1992
[3] V. Nicula, Analiză Matematică, Exercițiile şi probleme, Editura Adria-Press, Bucureşti, 1996
[4] A.M. Iaglom, I.M. Iaglom, Probleme neelementare tratate elementar, Editura Tehnică, Bucureşti
[5] Dorian Popa, Un criteriu pentru calculul limitelor de şiruri, RMT 3/1997
[6] D.M. Bătinețu-Giurgiu, O sută de ani de studierea şirului lui Traian Lalescu, Didactica Matematicii vol. 16/2000, pag. 33-40
[7] V. Berinde, Despre ordinul de convergență al şirurilor de numere reale, GM 4/1998, pag. 144-153

3. Teorema lui O. Toeplitz

3.1. Teorema lui Toeplitz

În această lecție vom enunța şi demonstra teorema lui O. Toeplitz, după care vom da câteva consecințe importante ale ei şi apoi aplicații la calculul unor limite de şiruri.

Definiția 3.1.1 Se numeşte matrice infinită sau şir dublu de numere reale o funcție $f : N^* \mathrm{X} N^* \to R$. Se notează prin $(a_{nk})_{n,k\geq 1}$, unde $a_{nk} = f(n,k)$, $n,k \in N^*$. O matrice infinită se numeşte matrice triunghiulară dacă $a_{nk} = 0$, $\forall n,k \in N^*$, $k > n$, adică este de forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.1.1. Fie $(a_{nk})_{n,k\geq 1}$ o matrice triunghiulară infintă de numere reale şi un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale. Dacă

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$, $\forall k \in N^*$;

(ii) există $M \in R_+^*$ astfel încât $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{nk}| \leq M$, $\forall n \in N^*$;

(iii) există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,

atunci şirul $(u_n)_{n\geq 1}$, definit prin $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} x_k$, $n \in N^*$ are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demonstrație . Din $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ rezultă că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in N$, $\forall n \in N$, $n \geq n_\varepsilon$,avem că $|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Pentru $\forall n \in N$, $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$|u_n| \leq \left|\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_{nk} x_k\right| + \left|\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} a_{nk} x_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_{nk} x_k\right| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |a_{nk}| \cdot |x_k| \leq$$

$\leq \left|\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_{nk} x_k\right| + \left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |a_{nk}|\right) \cdot \frac{\varepsilon}{2M}$, de unde , ținând seama de (ii), obținem

(1) $|u_n| \leq \left|\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_{nk} x_k\right| + \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \in N$, $n \geq n_\varepsilon$.

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_{nk} x_k = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} x_k \left(\lim_{n\to\infty} a_{nk}\right) = 0$, rezultă că $\exists m_\varepsilon \in N$, astfel încât

(2) $\left|\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_{nk} x_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \in N$, $n \geq m_\varepsilon$.

Din (1) şi (2), $\forall n \in N$, $n \geq \max(n_\varepsilon, m_\varepsilon)$, avem că $|u_n| < \varepsilon$, adică $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Teorema 3.1.2. (Toeplitz). Fie $(a_{nk})_{n,k\geq 1}$ o matrice triunghiulară infinită de numere reale şi
un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale. Dacă

(i) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$, $\forall k \in N^*$;

(ii) există $M \in R_+^*$ astfel încât $\sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| \leq M$, $\forall n \in N^*$;

(iii) există $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{nk}$ şi $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1$;

(iv) există $\lim_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x \in R$,

atunci şirul $(u_n)_{n\geq 1}$, definit prin $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} x_k$, $n \in N^*$ are limită şi $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Demonstrație. Avem că $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}(x_n - x) + x\sum_{k=1}^{n} a_{nk}$, $\forall n \in N^*$. Aplicând teorema 3.1.1. şirului $(x_n - x)_{n\geq 1}$ şi ținând seama de condiția (iii), rezultă afirmația din enunț.

Teorema 3.1.3. Fie $(a_{nk})_{n,k\geq 1}$ o matrice triunghiulară infinită de numere reale pozitive şi un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale. Dacă

(i) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$, $\forall k \in N^*$;

(ii) există $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{nk}$ şi $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1$;

(iii) există $\lim_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \{-\infty,+\infty\}$,

atunci şirul $(u_n)_{n\geq 1}$, definit prin $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_k$, $n \in N^*$ are limită şi $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Demonstrație. Considerăm cazul $x = +\infty$. Fie $\varepsilon > 0$. Din $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ rezultă că există $m = m(\varepsilon) \in N$ (m depinde de ε), astfel încât

(3) $x_n > 3\varepsilon$, $\forall n \in N$, $n \geq m$.

Deoarece $\lim_{n\to\infty}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m) = \sum_{k=1}^{m} x_k (\lim_{n\to\infty} a_{nk}) = 0$, există $m' \in N$, $\forall n \in N$, $n \geq m'$ avem că $|a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m| < \varepsilon$, sau

(4) $-\varepsilon < a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m < \varepsilon$, $\forall n \in N, n \geq m'$.

Deoarece $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1, \forall k \in N^*$, rezultă că există $m'' \in N$, astfel încât

(5) $a_{nm+1} + a_{nm+2} + ... + a_{nn} \geq \frac{2}{3}, \forall n \in N$, $n \geq m''$.

Fie $m_0 = \max(m, m', m'')$. Atunci pentru $\forall n \in N$, $n \geq m_0$, ținând seama de (3)-(5), avem că

$$u_n = (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m) +$$
$$+(a_{nm+1}x_1 + a_{nm+2}x_2 + ... + a_{nn}x_n) > -\varepsilon + 3\varepsilon(a_{nm+1} + a_{nm+2} + ... + a_{nn}) \geq$$
$$\geq -\varepsilon + 3\varepsilon \cdot \frac{2}{3} = \varepsilon$$, ceea ce înseamnă că $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$. Similar se demonstrează cazul când $x = -\infty$.

O altă formulare a teoremei lui Toeplitz este dată de teorema 3.1.4.

Teorema 3.1.4. Fie $(a_{nk})_{n,k\geq 1}$ o matrice triunghiulară infinită de numere reale pozitive şi un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale.Dacă

(i) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$, $\forall k \in N^*$;

(ii) $\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1$, $\forall n \in N^*$;

(iii) există $\lim_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{R}$, atunci şirul $(u_n)_{n\geq 1}$, definit prin $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} x_k$, $n \in N^*$ are limită şi $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Demonstraţie. Demonstraţia este similară cu demonstraţiile din teoremele 3.1.1, 3.1.2 şi 3.1.3.

Consecinţa 3.1.1. Fie un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale care are limită. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

Demonstraţie. În teorema 3.1.4 se consideră matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & ... & \frac{1}{n} & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}.$$

Consecinţa 3.1.2. Fie un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale strict pozitive care are limită. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

Demonstraţie. Se aplică consecinţa 3.1.1 şirului $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$.

Consecinţa 3.1.3. Fie un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale strict pozitive care are limită. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

Demonstrație. În inegalitatea mediilor

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \le \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$, $n \in N^*$, ținând seama de consecința 3.1.1 şi consecința 3.1.2 se trece la limită.

Consecința 3.1.4. Fie un şir $(x_n)_{n\ge1}$ de numere reale strict pozitive. Dacă şirul $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\ge1}$ are limită, atunci şirul $\left(\sqrt[n]{x_n}\right)_{n\ge2}$ are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Demonstrație. Fie şirul $(y_n)_{n\ge1}$ definit prin $y_1 = x_1$, $y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$, $\forall n \in N$, $n \ge 2$.

Atunci $x_n = y_1 \cdot y_2 \cdot ... \cdot y_n$, $\forall n \in N^*$ şi aplicând consecința 3.1.3 avem

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot ... \cdot y_n} = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Teorema 3.1.5. (Stolz-Cesaro) Fie $(a_n)_{n\ge1}$ şi $(b_n)_{n\ge1}$ două şiruri de numere reale cu proprietățile

(i) şirul $(b_n)_{n\ge1}$ este strict crescător, strict pozitiv şi nemărginit ;

(ii) există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{R}$.

Atunci există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l$.

Demonstrație. Fie şirurile $(\Delta a_n)_{n\ge1}$, $(\Delta b_n)_{n\ge1}$, definite prin $a_0 = b_0 = 0$, $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$, $\Delta b_n = b_n - b_{n-1}$, $\forall n \in N^*$.Avem relația

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta b_1}{b_1} & 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ \frac{\Delta b_1}{b_2} & \frac{\Delta b_2}{b_2} & ... & 0 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{\Delta b_1}{b_n} & \frac{\Delta b_2}{b_n} & ... & \frac{\Delta b_n}{b_n} & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\Delta a_1}{\Delta b_1} \\ \frac{\Delta a_2}{\Delta b_2} \\ ... \\ \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \\ ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{b_1} \\ \frac{a_2}{b_2} \\ ... \\ \frac{a_n}{b_n} \\ ... \end{pmatrix}$$

deoarece $\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta b_k}{b_n} \cdot \frac{\Delta a_k}{\Delta b_k} = \frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = \frac{a_n}{b_n}$, $\forall n \in N^*$.

Matricea infinită din membrul stâng satisface condițiile din teorema 3.1.2 sau teorema 3.1.3.

Bibliografie

[1] Achim, I., Transformări de şiruri, G.M. 7-8/1998, pag. 273-282.

[2] Bătinețu, D.M., Probleme de matematică pentru treapta a II-a de liceu, Editura Albatros, Bucureşti, 1979

[3] Bătinețu, D.M. şi colectiv, Exerciții şi probleme de analiză matematică pentru clasele a XI-a şi a XII-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[4] Miu, I.C., Câteva probleme de matematică, Craiova – S.C. Chimenerg S.A., pag. 33-45.

[5] Sirețchi, Gh., Analiză matematică vol. III, Fasc.1 ed III, Centrul de multiplicare al Universității Bucureşti, 1984

[6] Sirețchi, Gh., Teorema lui Toeplitz şi câteva consecințe ale sale, Gazeta Matematică nr.3/1985, pag. 65-70.

Probleme rezolvate

R3.2.1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x \in R$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{2^{n-1}}+\frac{x_2}{2^{n-2}}+...+\frac{x_n}{1}\right)=2x .$$

Soluție. Se consideră $a_{nk} = \dfrac{1}{2^{n+1-k}}$, $n,k \in N^*$, $k \leq n$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$,

$k \in N^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{nk}| = 1 - \dfrac{1}{2^n} < 1$, $\forall n \in N^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right) = 1$,

sunt îndeplinite condițiile din

teorema 3.1.2, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^{n+1-k}}x_k = x$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^{n-k}}x_k = 2x$.

R3.2.2. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x \in R$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx_1+(n-1)x_2+...+2\cdot x_{n-1}+1\cdot x_n}{n^2}=\frac{x}{2}.$$

Soluție. Se consideră $a_{nk} = \dfrac{2(n-k+1)}{n^2}$, $n,k \in N^*$, $k \leq n$. Deoarece

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$, $k \in N^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{nk}| = 2\dfrac{n(n+1)}{n^2} - \dfrac{2}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n^2+n}{n^2} \leq 2$, $\forall n \in N^*$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{n^2} = 1$, sunt îndeplinite condițiile din teorema 3.1.2, deci

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2(n-k+1)}{n^2}\cdot x_k = x$, de unde rezultă concluzia.

R3.2.3. Fie un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere reale care are limită. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} x_k C_n^k = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

Soluție. Se consideră matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2}C_1^0 & \frac{1}{2}C_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2^2}C_2^0 & \frac{1}{2^2}C_2^1 & \frac{1}{2^2}C_2^2 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2^n}C_n^0 & \frac{1}{2^n}C_n^1 & \frac{1}{2^n}C_n^2 & \dots & \frac{1}{2^n}C_n^n & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

deci $a_{nk} = \frac{1}{2^n}C_n^k$, $k \in \{0,1,\dots,n\}$. Se aplică teorema 3.1.2 sau teorema 3.1.3.

4. Şiruri recurente

Una dintre temele abordate in manualul de clasa a X-a o constituie "Şirurile recurente" mai precis determinarea formei generale a şirurilor definite prin recurenţe liniare de ordinul întâi şi recurenţe liniare şi omogene de ordinul doi. În cele ce urmează vom reaminti aceste rezultate ca punct de pornire în studiul convergenţei şirurilor recurente.

4.1. Recurenţe liniare de ordinul I

4.1.1. Definiţie. O relaţie de recurenţă de forma

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n,\ \forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad (4.1.1)$$

unde $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt şiruri de numere reale se numeşte relaţie de recurenţă liniară de ordinul 1 cu coeficienţi variabili.

4.1.2. Observaţii.

i)Considerând cazuri particulare pentru şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ se regăsesc progresiile aritmetică, respectiv geometrică.

ii) Dacă $a_n = a$ şi $b_n = f(n)$, unde $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ obţinem $x_{n+1} = ax_n + f(n)$, adică o relaţie de recurenţă liniară, neomogenă de ordinul 1.

În cazul unei recurenţe liniare de ordinul 1 se poate determina forma generală a şirului.

4.1.3. Teoremă. Forma generală a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin relaţia de recurenţă (4.1.1) este:

$$x_{n+1} = a_0 a_1 \ldots a_n x_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_n\right) + b_n \qquad (4.1.2)$$

4.1.4. Corolar. Forma generală a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = ax_n + f(n),\ \forall\, n \geq 0 \qquad (4.1.3)$$

unde $a \in \mathbf{R},\ f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ este

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) a^{n-k-1}. \qquad (4.1.4)$$

4.1.5. Corolar. Forma generală a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = ax_n + b,\ \forall\, n \in \mathbf{N} \qquad (4.1.5)$$

este:

$$x_n = a^n x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + 1) \qquad (4.1.6)$$

4.1.6 Observaţii. Ne propunem să discutăm convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin relaţia de recurenţă (4.1.5).

Pentru a putea vizualiza comportarea şirului (x_n) vom reprezenta într-un sistem de coordonate graficul funcţiei $f(x) = ax + b$ şi prima bisectoare $y = x$ (în general pentru o relaţie de recurenţă de ordinul 1, $x_{n+1} = f(x_n)$ se reprezintă graficul funcţiei *f* şi prima bisectoare). Pentru început se reprezintă punctul x_0 pe axa *Ox*. Paralela dusă prin punctul de coordonate $(x_0, f(x_0) = x_1)$ la axa *Ox* intersectează prima bisectoare în punctul de abscisă x_1. Continuând procedeul obţinem pe axa *Ox* termenii şirului (x_n).

- pentru $a = 1$, avem $x_n = x_0 + (n-1)b$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \infty, & b > 0 \\ x_0, & b = 0 \\ -\infty, & b < 0 \end{cases}$ (fig. 4.1)

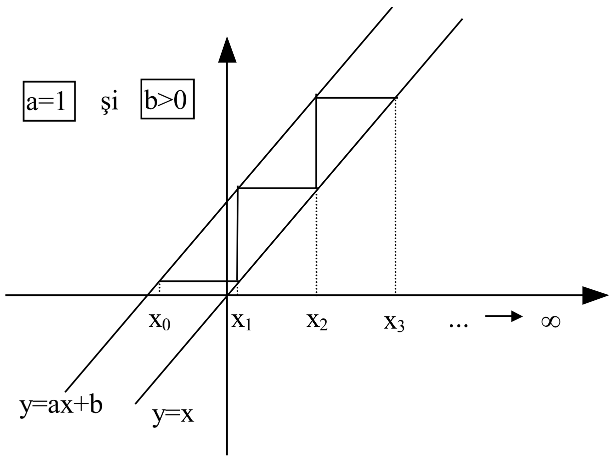


Fig. 4.1

În acest caz cele două drepte $(d_1): y = x + b$ şi $(d_2): y = x$ sunt paralele. Dacă $b > 0$, dreapta d_1 este situată deasupra dreptei d_2, dacă $b = 0$ cele două drepte coincid, iar dacă $b < 0$ dreapta d_1 este situată sub dreapta d_2.

- pentru $a \neq 1$ avem $x_n = a^n\left(x_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}$

- dacă $a \in (-1,1)$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{1-a}$ (fig. 4.2), adică tocmai soluţia ecuaţiei $f(x) = x$.

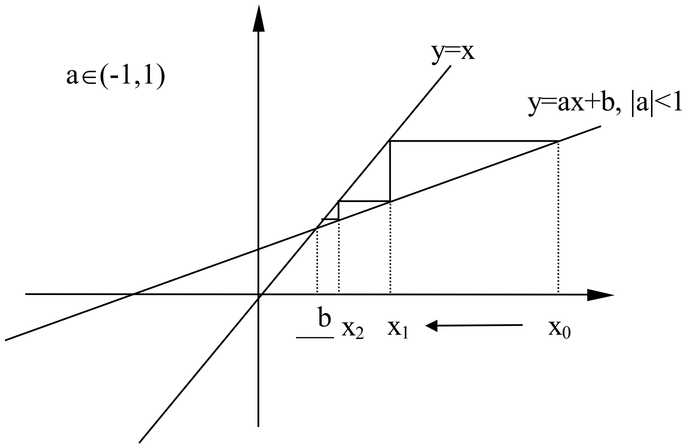


Fig. 4.2

- dacă $a \in (-\infty,-1] \cup (1,\infty)$ avem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \infty, & a>1 \quad \text{si} \quad x_0 > \dfrac{b}{1-a} \\ -\infty, & a>1 \quad \text{si} \quad x_0 < \dfrac{b}{1-a} \\ \text{nu exista}, & a<-1 \\ \dfrac{b}{1-a}, & x_0 = \dfrac{b}{1-a} \end{cases} \qquad \text{(fig. 4.3)}$$

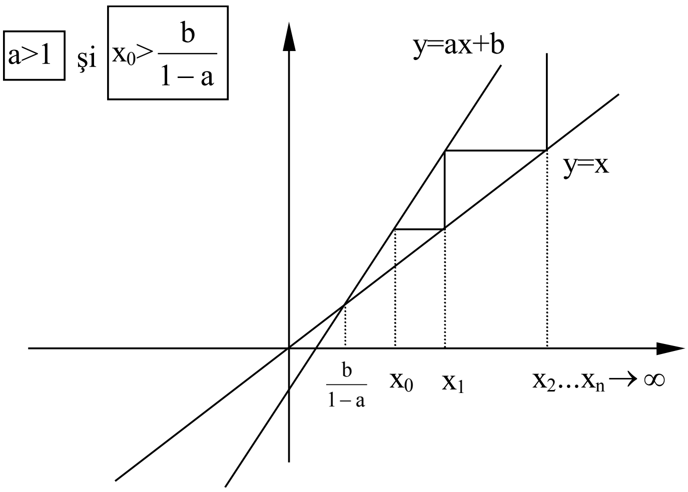


Fig. 4.3a

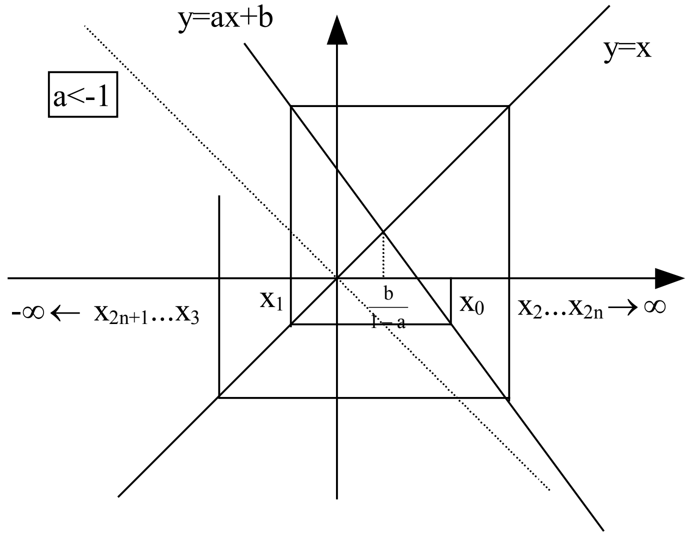


Fig. 4.3b

4.1.7. Exemple. Să se studieze convergența șirurilor definite prin:

a) $x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + 1,\ n \geq 0,\ x_0 = 0$

b) $x_{n+1} = 2x_n - 3,\ n \geq 0,\ x_0 = 2$

c) $x_{n+1} = -2x_n + 1,\ n \geq 0,\ x_0 = 1$

Soluție. a) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}$, $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$

b) $x_n = -2^n + 3$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

c) $x_n = (-2)^n \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$, $(x_n)_{n\geq 0}$ este divergent, $x_{2n} \to +\infty$, $x_{2n+1} \to -\infty$.

Studiul convergenței șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin relația de recurență (4.1.1) este mai dificil, avem însă următoarea teoremă, care dă o condiție necesară pentru ca șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ să fie convergent spre zero.

4.1.8. Teoremă. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ și $(b_n)_{n\geq 0}$ două șiruri de numere reale, $a_n \in (0,1)$, $|a_n| \to a \in [0,1)$ și $b_n \to 0$. Dacă șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ verifică relația de recurență (4.1.1) atunci $x_n \to 0$.

Demonstrație. Fie $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ șirul $c_n = a_0 a_1 ... a_{n-1}$, $\forall\, n \geq 1$. Se observă că $\frac{c_{n+1}}{c_n} = a_n$ și $x_{n+1} = c_{n+1}x_0 + c_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{a_0 a_1 ... a_k} = c_{n+1}\left(x_0 + \sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{c_{k+1}}\right)$.

Întrucât $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |a_n| \in (0,1)$, rezultă că $0 < |c_{n+1}| < |c_n|$, deci șirul $(|c_n|)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este descrescător și mărginit inferior. Conform teoremei lui Weierstrass, rezultă că șirul are limită.

Fie $\lim_{n\to\infty}|c_n| = l$.

Dacă $l \neq 0$, ar rezulta că $\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = 1 = \lim_{n\to\infty}|a_n|$ ceea ce contrazice ipoteza, deci $\lim_{n\to\infty}|c_n| = 0$.

Întrucât șirul $(|c_n|)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict descrescător, cu termenii nenuli și convergent către zero, rezultă că șirul $\left(\frac{1}{|c_n|}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător și $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|c_n|} = +\infty$.

Din $x_{n+1} = c_{n+1}\left(x_0 + \sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{c_{k+1}}\right)$ avem:

$$0 \leq |x_{n+1}| \leq |c_{n+1}|\left(|x_0| + \sum_{k=0}^{n}\frac{|b_k|}{|c_{k+1}|}\right) \qquad (*)$$

Întrucât $\lim_{n\to\infty}|c_{n+1}|\left(|x_0| + \sum_{k=0}^{n}\frac{|b_k|}{|c_{k+1}|}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{|x_0| + \sum_{k=0}^{n}\frac{|b_k|}{|c_{k+1}|}}{\frac{1}{|c_{n+1}|}}$.

Aplicând teorema lui Cesaro-Stolz (cazul $\frac{\infty}{\infty}$) obținem:

$$\lim_{n\to\infty}|c_{n+1}|\left(|x_0| + \sum_{k=0}^{n}\frac{|b_k|}{|c_{k+1}|}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{|b_{n+1}|}{1 - \frac{|c_{n+2}|}{|c_{n+1}|}} = \frac{0}{1-a} = 0$$

Aplicând teorema cleștelui în inegalitățile (*) obținem $\lim_{n\to\infty}|x_{n+1}| = 0$.

4.1.9. Exemple. Să se studieze convergenţa şirului (x_n) dat prin:

a) $x_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} x_n + \dfrac{1}{n},\ n \geq 1,\ x_1 = 0$

c) $x_{n+1} = \dfrac{1}{2} x_n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n,\ n \geq 0,\ x_0 = 1$.

Soluţie. a) Aplicând teorema 4.1.3. (sau folosind procedeul iterării directe) obţinem:

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[n + \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right] = \frac{n}{n+1} + \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n+1} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 \text{ (am aplicat Cesaro-Stolz).}$$

c) Vom folosi corolarul 4.1.4. şi obţinem

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2} + n\right)$$

şi $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

4.2. Recurenţe liniare omogene de ordinul 2 cu coeficienţi constanţi

4.2.1. Definiţie. O relaţie de recurenţă de forma

$$x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n,\ \forall\, n \in \mathbf{N},\ a, b \in \mathbf{R},\ b \neq 0 \qquad (4.2.1)$$

se numeşte relaţie de recurenţă liniară, omogenă, cu coeficienţi constanţi, de ordinul 2.

Pentru a determina forma generală a şirului (x_n) care verifică relaţia de recurenţă (4.2.1) vom folosi următoarele teoreme demonstrate în manualul de excelenţă pentru clasa a X-a .

4.2.2 Definiţie. Ecuaţia

$$r^2 = ar + b \qquad (4.2.2)$$

se numeşte ecuaţia caracteristică ataşată relaţiei de recurenţă (4.3.1).

4.2.3. Teoremă. Dacă ecuaţia caracteristică $r^2 = ar + b$ are două rădăcini reale şi distincte r_1 şi r_2, atunci şirul care satisface egalitatea (4.2.1) are termenul general de forma:

$$x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,\ \forall\, n \in \mathbf{N} \qquad (4.2.3)$$

unde c_1 şi c_2 se determină în mod unic din condiţiile iniţiale x_0 şi x_1.

4.2.4. Teoremă. Dacă ecuația caracteristică $r^2 = ar + b$ are o rădăcină dublă α, atunci şirul care satisface egalitatea (4.2.1) are termenul general de forma:

$$x_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^n, \forall\, n \in \mathbf{N} \tag{4.2.4}$$

unde c_1 şi c_2 se determină în mod unic din condițiile inițiale x_0 şi x_1.

4.2.5. Teoremă. Dacă ecuația caracteristică $r^2 = ar + b$ cu $\Delta<0$ are rădăcinile $r_{1,2} = r(\cos t \pm i \sin t)$, atunci şirul care satisface condiția (4.2.1) are termenul general de forma:

$$x_n = r^n(c_1 \cos nt + c_2 \sin nt), \forall\, n \in \mathbf{N} \tag{4.2.5}$$

unde c_1 şi c_2 se determină în mod unic din condițiile inițiale x_0 şi x_1.

4.2.6. Observație. Mulțimea

$$S_{a,b} = \{(x_n)_{n\geq 0} \mid x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \forall\, n \geq 0\}, \quad a,b \in \mathbf{R}$$

formează un subspațiu vectorial de dimensiune 2 a spațiului vectorial al şirurilor reale. Dacă ecuația caracteristică $r^2 = ar + b$ are:

- două rădăcini reale şi distincte r_1, r_2 atunci mulțimea soluțiilor de bază $\{r_1^n, r_2^n\}$ este bază a spațiului vectorial
- două rădăcini reale egale $r_1 = r_2$ atunci mulțimea $\{r_1^n, nr_1^n\}$ este bază a spațiului vectorial
- două rădăcini complexe $r_{1,2} = r(\cos t \pm i \sin t)$ atunci mulțimea $\{r^n \cos nt, r^n \sin nt\}$ este bază a spațiului vectorial.

4.3. Recurențe liniare omogene de ordin $k > 2$ cu coeficienți constanți

4.3.1. Definiție. O relație de recurență de forma

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \ldots + a_k x_n, \forall\, n \in \mathbf{N}, \tag{4.3.1}$$

unde $k \in \mathbf{N}^*, a_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1,k}, a_k \neq 0$ se numeşte relație de recurență liniară, omogenă cu coeficienți constanți de ordinul k.

4.3.2. Observații. (i) Dacă k=2 regăsim relația de recurență liniară de ordinul 2 cu coeficienți constanți:

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \forall\, n \in \mathbf{N}, a,b \in \mathbf{R}, b \neq 0$$

(ii) Dacă k=3 obținem o relație de recurență liniară de ordinul 3 cu coeficienți constanți:

$$x_{n+3} = ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n,\ \forall\ n \in \mathbf{N},\ a,b,c \in \mathbf{R},\ c \neq 0\,.$$

Pentru a determina forma generală a şirului (x_n) care verifică relaţia de recurenţă (4.3.1) vom proceda ca şi în cazul recurenţelor liniare de ordin 2, considerând ecuaţia caracteristică.

4.3.3. Definiţie. Ecuaţia

$$r^k = a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \ldots + a_{k-1} r + a_k \qquad (4.3.2)$$

se numeşte ecuaţia caracteristică asociată relaţiei de recurenţă (4.3.1).

4.3.4. Lemă. Dacă α este o rădăcină a ecuaţiei caracteristice (4.3.2) atunci şirul $(\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}}$ verifică relaţia de recurenţă (4.3.1).

Demonstraţie. Deoarece $\alpha^k = a_1\alpha^{k-1} + a_2\alpha^{k-2} + \ldots + a_k$ prin înmulţire cu α^n se obţine $\alpha^{n+k} = a_1\alpha^{n+k-1} + \ldots + a_k\alpha^n$ şi deci şirul cu termenul general α^n satisface relaţia de recurenţă.

4.3.5. Lemă.[1] Dacă α este o rădăcină multiplă de ordinul p ($p \in \mathbf{N}^*$, $p \le k$) a ecuaţiei caracteristice (4.3.2) atunci şirurile $(\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(n\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}}$,..., $(n^{p-1}\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}}$ verifică relaţia de recurenţă (4.3.1).

4.3.6. Lemă. Dacă α este o rădăcină complexă a ecuaţiei caracteristice (4.3.2) de forma $\alpha = r(\cos t + i\sin t)$ atunci şirurile $(r^n \cos nt)_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(r^n \sin nt)_{n\in\mathbf{N}}$ verifică relaţia de recurenţă (4.3.1).

Demonstraţie. Dacă α este rădăcină complexă şi deoarece coeficienţii ecuaţiei caracteristice sunt reali, ecuaţia (4.3.2) admite şi rădăcina complexă conjugată $\overline{\alpha} = r(\cos t - i\sin t)$.

Întrucât

$$\alpha^k = a_1\alpha^{k-1} + a_2\alpha^{k-2} + \ldots + a_k \mid \cdot\alpha^n$$
$$\alpha^{n+k} = a_1\alpha^{n+k-1} + a_2\alpha^{n+k-1} + \ldots + a_k\alpha^n\,.$$

Aplicând formula lui Moivre $\alpha^p = r^p(\cos pt + i\sin pt)$, $p = \overline{n, n+k}$ înlocuind, şi separând părţile reale de cele imaginare obţinem

$$r^{n+k}\cos(n+k)t = a_1 r^{n+k-1}\cos(n+k-1)t + \ldots + a_k r^n \cos nt$$
$$r^{n+k}\sin(n+k)t = a_1 r^{n+k-1}\sin(n+k-1)t + \ldots + a_k r^n \sin nt$$

deci şirurile $(r^n \cos nt)_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(r^n \sin nt)_{n\in\mathbf{N}}$ verifică relaţia de recurenţă.

[1] Ideea demonstraţiei este aceeaşi ca în cazul recurenţelor liniare de ordinul doi, însă ea se realizează folosind unele proprietăţi ale diferenţelor finite care depăşesc cadrul acestui manual. Demonstraţia completă se găseşte în [5] pg. 76-82.

Utilizând lemele 4.3.4, 4.3.5, 4.3.6 se poate da următorul rezultat care dă forma generală a unui şir dat printr-o relaţie de recurenţă liniară cu coeficienţi constanţi de ordin k>2.

4.3.7. Teoremă. Dacă ecuaţia caracteristică (4.3.2) are rădăcinile reale $r_1, r_2, ..., r_\ell$ cu ordinele de multiplicitate $p_1, p_2, ..., p_\ell$ $(p_1, p_2, ..., p_\ell \leq k)$ şi rădăcinile complexe $z_1, \bar{z}_1, ..., z_m \bar{z}_m$, $z_i = \rho_i(\cos t_i + i \sin t_i)$, $i = \overline{1,m}$ având ordinele de multiplicitate $q_1, q_2, ..., q_m$ $(q_1, q_2, ..., q_m \leq k/2)$, şi $p_1 + p_2 + ... + p_\ell + 2(q_1 + q_2 + ... + q_m) = k$ atunci forma generală a şirului $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ care satisface relaţia de recurenţă (4.3.1) este:

$$x_n = \sum_{i=1}^{\ell} (c_{1,i} + c_{2,i} n + ... + c_{p_i,i} n^{p_i - 1}) r_i^n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \rho_i^n [(c'_{1,i} + c'_{2,i} n + ... + c'_{q_i,i} n^{q_i - 1}) \cos nt_i + (c''_{1,i} + c''_{2,i} n + ... + c''_{q_i,i} n^{q_i - 1}) \sin nt_i],$$

unde constantele se determină din condiţiile iniţiale.

4.3.8. Observaţie. Fie $k \in \mathbf{N}^*$. Mulţimea

$$S_k = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \mid x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + ... + a_k x_n, \forall\, n \geq 0\}$$

unde $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbf{R}$ fixate, formează un subspaţiu vectorial de dimensiune k a spaţiului vectorial al şirurilor reale. Baza spaţiului vectorial este formată din cele k soluţii de bază:

- dacă ecuaţia caracteristică (4.3.2) are rădăcinile reale $r_1, r_2, ..., r_\ell$ cu ordinele de multiplicitate $p_1, ..., p_\ell \in \mathbf{N}$, $p_1, p_2, .., p_\ell \leq k$, atunci acestea generează soluţiile de bază: $r_i^n, nr_i^n, ..., n^{p_i - 1} r_i^n$, $i = \overline{1,\ell}$

- dacă ecuaţia caracteristică (4.3.2) are rădăcinile complexe $z_1, \bar{z}_1, ..., z_m, \bar{z}_m$, $z_i = \rho_i(\cos t_i + \sin t_i)$, $i = \overline{1,m}$ având ordinele de multiplicitate $q_1, ..., q_m \in \mathbf{N}$, $q_1, ..., q_m \leq k/2$ şi

$$p_1 + p_2 + ... + p_\ell + 2(q_1 + q_2 + ... + q_m) = k,$$

atunci acestea generează soluţiile de bază:

$$\rho_i^n \cos nt_i, \rho_i^n n \cos nt_i, ..., \rho_i^n n^{q_i - 1} \cos nt_i \text{ şi}$$

$$\rho_i^n \sin nt_i, \rho_i^n n \sin nt_i, ..., \rho_i^n n^{q_i - 1} \sin nt_i, \text{ unde } i = \overline{1,m}.$$

4.3.9. Exemple. Să se determine forma generală a şirului definit prin:

a) $x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n, n \geq 0$ şi $x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = 2$

b) $x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n, n \geq 0$ şi $x_0 = 1, x_1 = 6, x_2 = 17$

c) $x_{n+4}+2x_{n+3}+3x_{n+2}+2x_{n+1}+x_n=0, n\geq 0$ şi $x_0=0$, $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=0$.

Soluţie. a) Ecuaţia caracteristică $r^3-2r^2-r+2=0$ are rădăcinile $r_1=1, r_2=2, r_3=-1$, deci $x_n=c_1\cdot 1^n+c_2\cdot 2^n+c_3\cdot(-1)^n$ şi din condiţiile iniţiale obţinem: $c_1=-\dfrac{1}{2}$, $c_2=\dfrac{1}{3}$ şi $c_3=\dfrac{7}{6}$, deci

$$x_n=-\frac{1}{2}+\frac{2^n}{3}+\frac{7\cdot(-1)^n}{6}.$$

b) Ecuaţia caracteristică $r^3-3r^2+3r-1=0$ are rădăcina triplă $r=1$. Termenul general al şirului este dat deci de: $x_n=(c_1+c_2n+c_3n^2)\cdot 1^n$. Din condiţiile iniţiale obţinem $c_1=1, c_2=2, c_3=3$, deci

$$x_n=1+2n+3n^2.$$

c) Ecuaţia caracteristică $r^4+2r^3+3r^2+2r+1=0$ este o ecuaţie reciprocă, ale cărei rădăcini sunt $z_1=z_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ şi $\bar{z}_1=\bar{z}_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{2\pi}{3}-i\sin\dfrac{2\pi}{3}$. Termenul general este dat deci de:

$$x_n=(c_1+c_2n)\cos\frac{2n\pi}{3}+(c_1'+c_2'n)\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

Constantele c_1, c_2, c_1' şi c_2' se obţin din condiţiile iniţiale astfel:

$$\begin{cases} x_0=c_1 \\ x_1=(c_1+c_2)\cos\dfrac{2\pi}{3}+(c_1'+c_2')\sin\dfrac{2\pi}{3} \\ x_2=(c_1+2c_2)\cos\dfrac{4\pi}{3}+(c_1'+2c_2')\sin\dfrac{4\pi}{3} \\ x_3=c_1+3c_2 \end{cases}$$

deci $c_1=0, c_2=0, c_1'=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ şi $c_2'=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

4.4. Recurenţe liniare neomogene de ordin $k\geq 2$

Vom considera pentru început o recurenţă liniară neomogenă de ordinul 2.

4.4.1. Definiţie. O relaţie de recurenţă de forma:

$$x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n+f(n), \forall\, n\in\mathbf{N} \qquad (4.4.1)$$

unde $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$ şi $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ o funcţie, se numeşte relaţie de recurenţă liniară, neomogenă, de ordinul 2.

Avem următoarea teoremă care ne permite găsirea termenului general al unei relaţii de recurenţă liniare, neomogene.

4.4.2. Teoremă. Dacă şirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o soluţie generală a relaţiei de recurenţă liniară, omogenă de ordinul 2: $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ şi $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o soluţie particulară a relaţiei de recurenţă (4.4.1), atunci forma generală a şirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ care verifică relaţia de recurenţă (4.4.1) este:

$$x_n = y_n + z_n, \forall\, n \in \mathbf{N} \tag{4.4.2}$$

Demonstraţie. Întrucât $y_{n+2} = ay_{n+1} + by_n$ şi

$$z_{n+2} = az_{n+1} + bz_n + f(n).$$

Însumând obţinem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, unde $x_n = y_n + z_n$ satisface relaţia de recurenţă (4.4.1).

4.4.3. Consecinţă. Dacă $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o soluţie particulară a relaţiei de recurenţă (4.4.1) şi ecuaţia $r^2 = ar + b$ are:

a) două rădăcini reale şi distincte r_1, r_2 atunci

$$x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + z_n \tag{4.4.3}$$

b) o rădăcină dublă *r* atunci:

$$x_n = (c_1 + nc_2) r^n + z_n \tag{4.4.4}$$

c) două rădăcini complexe $r_{1,2} = r(\cos t \pm i \sin t)$ atunci

$$x_n = r^n (c_1 \cos nt + c_2 \sin nt) + z_n \tag{4.4.5}$$

Demonstraţie. Rezultă direct din Teoremele 4.4.2, 4.3.5, 4.3.8 şi 4.3.10.

Teorema 4.4.2 se poate extinde imediat şi pentru recurenţele liniare, neomogene de ordin $k > 2$ astfel:

4.4.4. Definiţie. O relaţie de recurenţă de forma:

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \ldots + a_k x_n + f(n), \forall\, n \in \mathbf{N} \tag{4.4.6}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbf{R}, a_k \neq 0$ şi $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ o funcţie, se numeşte relaţie de recurenţă liniară, neomogenă, de ordinul *k*.

4.4.5. Teoremă. Dacă şirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o soluţie generală a relaţiei de recurenţă liniară, omogenă de ordinul *k*: $x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + \ldots + a_k x_n$ şi $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o soluţie particulară a relaţiei de recurenţă (4.4.6), atunci forma generală a şirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ care verifică relaţia de recurenţă (4.4.6) este:

$$x_n = y_n + z_n, \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Demonstraţie. Analog cu Teorema 4.4.2.

Determinarea efectivă a şirului $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ din teoremele 4.4.2 şi 4.4.5 se poate face uşor în cazul în care $f(n)=\alpha^n P(n)$, unde $\alpha\in\mathbf{R}$ şi P este un polinom nenul, pe baza următoarei teoreme.

4.4.6. Teoremă. Fiind dată relația de recurență (4.4.6), unde $f(n)=\alpha^n P(n)$ cu $\alpha\in\mathbf{R}$ şi P un polinom nenul, atunci o soluție particulară $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ are forma

$$z_n=\alpha^n Q(n) \tag{4.4.7}$$

unde $Q(n)$ este un polinom, $gradQ=gradP+s$, s fiind ordinul de multiplicitate al lui α pentru polinomul caracteristic $x^k-a_1x^{k-1}-...-a_k$.

Demonstrație. Înlocuind $z_n=\alpha^n Q(n)$ în relația de recurență (4.4.6) obținem $\alpha^k Q(n+k)-a_1\alpha^{k-1}Q(n+k-1)-...-a_kQ(n)=P(n)$. De aici $gradP=gradQ-s$, coeficienții polinomului Q determinându-se prin metoda coeficienților nedeterminați.

4.4.7. Exemple. Să se determine şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ pentru care:

a) $x_{n+2}=3x_{n+1}-2x_n+3n(n+1), \forall\, n\in\mathbf{N}, x_0=0, x_1=2$

b) $x_{n+3}=3x_{n+2}-3x_{n+1}+x_n+2^n n, x_0=-6, x_1=2, x_2=4$.

Soluție. a) $x_n=y_n+z_n$, unde $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o soluție generală a relației de recurență omogenă: $y_{n+2}=3y_{n+1}-2y_n$. Ecuația caracteristică este $r^2-3r+2=0$, $r_1=1$, $r_2=2$, deci $y_n=c_1+c_2\cdot 2^n$.

$f(n)=3n^2+3n$ şi întrucât 1 este rădăcină simplă a polinomului caracteristic x^2-3x+2 avem $z_n=an^3+bn^2+cn+d$.

Înlocuind în relația de recurență obținem

$$a(n+2)^3+b(n+2)^2+c(n+2)+d=3a(n+1)^3+3b(n+1)^2+3c(n+1)+d-$$
$$-2an^3-2bn^2-2cn-2d+3n^2+3.$$

Egalând coeficienții obținem: $a=-1$, $b=-3$, $c=-8$, deci

$$z_n=-n^3-3n^2-8n+d.$$

Întrucât $z_0=0$, obținem $d=0$ şi deci $x_n=c_1+c_2\cdot 2^n-n^3-3n^2-8n$.

Din $x_0=0$ obținem $c_1+c_2=0$.

Din $x_1=2$ obținem $c_1+2c_2=14$.

De aici $c_1=-c_2=-14$, deci $x_n=-14+14\cdot 2^n-n^3-3n^2-8n$.

b) $x_n = y_n + z_n$, unde $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o soluție generală a relației de recurență omogenă: $y_{n+3} = 3y_{n+2} - 3y_{n+1} + y_n$. Ecuația caracteristică este $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$, $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, deci $y_n = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2)\cdot 1^n$.

$f(n) = 2^n \cdot n$ şi întrucât 2 nu este rădăcină a polinomului caracteristic avem $z_n = 2^n(an+b)$. Înlocuind în relația de recurență obținem:

$$2^3(an+3a+b) = 3\cdot 2^2(an+2a+b) - 3\cdot 2(an+a+b) + (an+b) + n.$$

Egalând coeficienții obținem $a = 1$, $b = -6$, deci $z_n = 2^n(n-6)$ şi $x_n = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2) + 2^n(n-6)$. Din condițiile inițiale obținem $c_1 = 0$, $c_2 = 8$, $c_3 = -2$, deci $x_n = (14n - 2n^2) + 2^n(n-6)$.

4.5. Recurențe neliniare

Pentru a stabili convergența unui şir recurent neliniar se foloseşte în general teorema lui Weierstrass de convergență a unui şir, pe care o vom reaminti aici fără demonstrație.

4.5.1. Teoremă (Weierstrass). [1] Orice şir monoton $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ are limită, adică:

(i) dacă $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este crescător şi nemărginit superior, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

(ii) dacă $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este descrescător şi nemărginit inferior, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

(iii) dacă $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este monoton şi mărginit, atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent.

4.5.2. Observație. a) Valoarea limitei unui şir recurent convergent se află trecând la limită în relația de recurență.

b) Dacă şirul nu este monoton se vor studia în general subşirurile sale $(x_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(x_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$.

4.5.1. Convergența unor şiruri recurente definite de funcții

4.5.3. Definiție. Fie $A\subseteq\mathbf{R}$ o mulțime şi $f: A\to A$ o funcție. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = f(x_n), \forall\, n\in\mathbf{N}, x_0\in A$ se numeşte şir recurent definit de funcția *f* şi $x_0 \in A$ (sau şirul aproximațiilor succesive asociat funcției *f* şi elementului $x_0\in A$).

Se observă că $x_n = f^n(x_0)$, unde $f^n = \underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

4.5.4. Exemple. a) Şirul $0, \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, ..., \sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$,... se poate defini recursiv astfel: $x_{n+1} = f(x_n)$, unde $f(x) = \sqrt{2+x}$ şi $x_0 = 0$.

b) Fie $a, b, c, d, x_0 \in \mathbf{R}$ şi $f : \mathbf{R} \setminus \{-d/c\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ ce satisface relaţia de recurenţă $x_{n+1} = f(x_n)$, adică $x_{n+1} = \dfrac{ax_n + b}{cx_n + d}$ se numeşte şir omografic. Aceste şiruri se vor trata utilizând metode matriceale la paragraful 3.2 (algebră).

4.5.5. Teoremă. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime şi $f : A \to A$ o funcţie şi şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ şirul aproximaţiilor succesive asociat funcţiei *f* şi lui $x_0 \in A$.

a) Dacă $x_0 = x_1$ atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este constant.

b) Dacă $x_0 < x_1$ (resp. $x_0 > x_1$) şi *f* strict crescătoare atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător (resp. strict descrescător) (fig. 4.4).

c) Dacă *f* este strict descrescătoare atunci şirurile $(x_{2n})_{n\geq 0}$ şi $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ sunt strict monotone de monotonii diferite (fig. 4.5).

d) Dacă *A* este mărginită, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit.

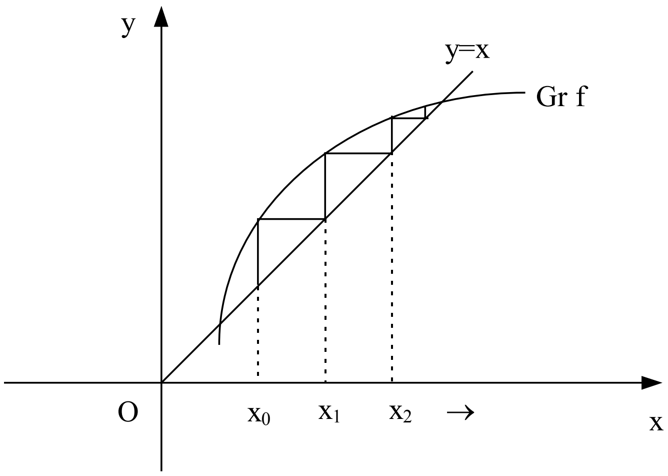


Fig. 4.4

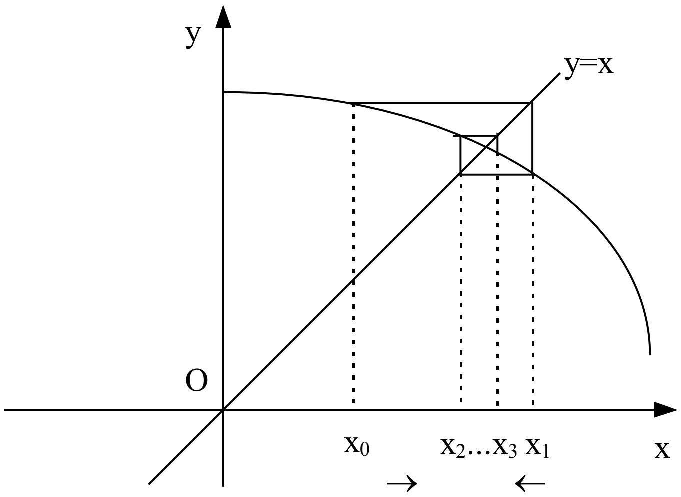


Fig. 4.5a.
Şir convergent

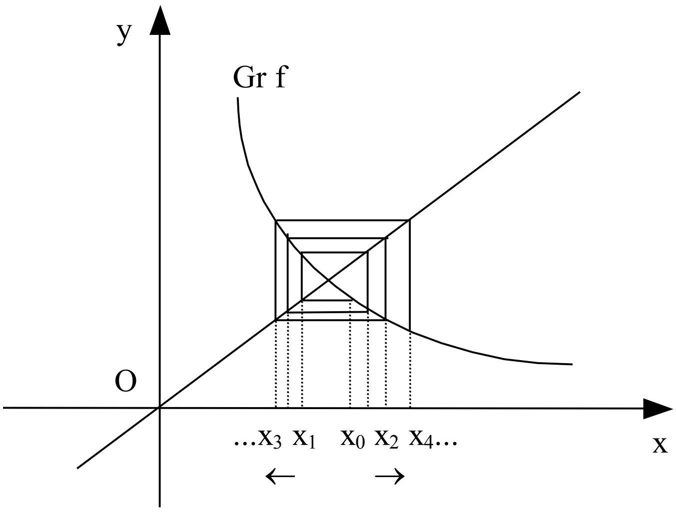


Fig. 4.5b.
Şir divergent

Demonstrație. a) Dacă $x_1 = x_0$ atunci $x_n = x_0, \forall\, n \in \mathbf{N}$.

b) Dacă $x_0 < x_1$ şi f strict crescătoare, demonstrăm prin inducție matematică, că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător. Într-adevăr să presupunem că

$x_k < x_{k+1}$, atunci $x_{k+1} = f(x_k) < f(x_{k+1}) = x_{k+2}$ şi deci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

c) Întrucât *f* este strict descrescătoare rezultă că $f \circ f$ este strict crescătoare. Rezultatul de la b) se aplică funcţiei $f \circ f$. Dacă $x_0 < x_2$ atunci $(x_{2n})_{n\geq 0}$ este strict crescător. În acest caz $x_{2n} < x_{2n+2}$, de unde $f(x_{2n-1}) < f(x_{2n+1})$, deci $x_{2n-1} > x_{2n+1}$.

Aşadar şirul $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ este strict descrescător.

Dacă $x_0 > x_2$ atunci $(x_{2n})_{n\geq 0}$ este strict descrescător. În acest caz $x_{2n} > x_{2n+2}$, de unde $f(x_{2n-1}) > f(x_{2n+1})$, deci $x_{2n-1} < x_{2n+1}$. Aşadar şirul $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ este strict crescător.

d) Se demonstrează prin inducţie matematică că $x_n \in A, \forall\, n \in \mathbf{N}$.

În continuare vom considera *I* un interval închis în **R**, adică

$$I \in \{[a,b],[a,\infty),(-\infty,b],\mathbf{R}\}.$$

4.5.6. Teoremă. Fie $f : I \to I$ o funcţie continuă şi $x_0 \in I$.

a) Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ al aproximaţiilor succesive este convergent către x^*, atunci $x^* \in I$ şi $f(x^*) = x^*$.

b) Dacă $f(x) \neq x, \forall\, x \in I$ atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ al aproximaţiilor succesive nu este convergent.

Demonstraţie. a) Se trece la limită în relaţia de recurenţă $x_{n+1} = f(x_n)$ şi se ţine cont că *f* este continuă.

4.5.7. Definiţie. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime, $f : A \to A$ o funcţie. $x_0 \in A$ se numeşte punct fix al funcţiei *f* dacă $f(x_0) = x_0$.

4.5.8. Observaţie. a) O funcţie *f* poate să nu aibă puncte fixe, poate avea un singur punct fix, un număr finit de puncte fixe sau o infinitate de puncte fixe.

b) O funcţie *f* are cel puţin un punct fix dacă şi numai dacă graficul funcţiei *f* intersectează prima bisectoare.

4.5.9. Exemple. Funcţiile sin şi cos au câte un singur punct fix, iar funcţiile tg şi ctg au o infinitate de puncte fixe.

În cele ce urmează vom da două teoreme de existenţă a punctelor fixe.

4.5.10. Teoremă (Knaster). Fie $f : [a,b] \to [a,b]$ o funcţie monotonă. Atunci există $c \in [a,b]$ astfel încât $f(c) = c$.

Demonstraţie. Presupunem *f* monoton crescătoare şi fie $B = \{x \in A : f(x) \geq x\}$. Cum $f(a) \geq a$ rezultă că $a \in B$ şi deci $B \neq \varnothing$. Fie $c = \sup B$. Deoarece $c \geq x, \forall\, x \in B$ şi *f* monoton crescătoare, rezultă că

$f(c) \geq f(x), \forall\, x \in B$, deci $f(c) \geq x, \forall\, x \in B$, deci $f(c) \geq \sup B = c$. Atunci $f(f(c)) \geq f(c)$, deci $f(c) \in B$, deci $f(c) \leq c$, prin urmare $f(c) = c$.

4.5.11. Teoremă. Fie $f:[a,b] \to [a,b]$. Dacă *f* este continuă pe $[a,b]$, atunci există $c \in [a,b]$ astfel încât $f(c) = c$.

Demonstrație. Considerăm funcția $g:[a,b] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - x$. Funcția *g* este continuă pe $[a,b]$; $g(a) \geq 0$, $g(b) \leq 0$. Întrucât *g* are proprietatea lui Darboux, rezultă că $\exists\, c \in [a,b]$ astfel încât $g(c) = 0$, deci $f(c) = c$.

4.5.12. Consecință. Dacă $f:[a,b] \to [a,b]$ este continuă şi monoton descrescătoare, atunci *f* are un singur punct fix.

Demonstrație. Existența este asigurată de teoremele 4.5.10 şi 4.5.11. Unicitatea rezultă din continuitatea şi monotonia strictă a funcției $x - f(x)$.

4.5.13. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime şi $f: A \to A$ o funcție. Spunem că *f* este **contracție** dacă există $K \in (0,1)$ astfel încât

$$| f(x) - f(y) | \leq K | x - y |, \forall\, x, y \in A.$$

4.5.14. Teoremă. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime mărginită şi închisă şi $f: A \to A$ o contracție. Atunci

a) există un unic $x^* \in A$ astfel încât $f(x^*) = x^*$

b) orice şir recurent $x_{n+1} = f(x_n), n \geq 0, x_0 \in A$ converge la x^*.

Demonstrație. Se demonstrează prin inducție:

$$| x_{n+1} - x_n | \leq K^n | x_1 - x_0 |.$$

Avem

$$| x_{n+p} - x_n | \leq | x_{n+p} - x_{n+p-1} | + | x_{n+p-1} - x_{n+p-2} | + ... + | x_{n+1} - x_n | \leq$$

$$\leq K^n (1 + K + ... + K^p) | x_1 - x_0 | = K^n \cdot \frac{1 - K^{p+1}}{1 - K} | x_1 - x_0 | \leq$$

$$\leq \frac{K^n}{1 - K} | x_1 - x_0 |$$

de unde ținând seama că $\lim\limits_{n \to \infty} K^n = 0$ obținem că şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este fundamental şi, deci, din criteriul lui Cauchy rezultă că şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent. Fie $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^* \in A$ pentru că *A* este închisă. Trecând la limită în raport cu *n* în relația de recurență $x_{n+1} = f(x_n)$ şi ținând cont că o contracție este funcție continuă, obținem $x^* = f(x^*)$, unde x^* este punct fix pentru funcția *f*.

Să presupunem că ar exista $y \in A$ cu proprietatea $f(y) = y$, atunci $0 < | x^* - y | = | f(x^*) - f(y) | \leq K | x^* - y |$ contradicție cu faptul că *K*<1, deci $x^* = y$.

4.5.15. Teoremă. Fie $f: I \to I$ derivabilă şi $|f'(x)| < 1, \forall x \in I$. Atunci:

a) ecuaţia $f(x) = x$ are o soluţie unică x^*

b) şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = f(x_n), n \geq 0$ şi $x_0 \in [a,b]$ este convergent la x^*.

Demonstraţie. Considerăm $x, y \in I, x < y$. Aplicând teorema lui Lagrange pe intervalul $[x,y] \subseteq [a,b]$ rezultă

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq K |x - y|,$$

deci *f* este contracţie. Aplicând teorema 4.5.14, rezultă concluzia.

4.5.16. Concluzii. Rezultatele enunţate în acest paragraf se pot sintetiza în următorul tabel.

Funcţia *f*	Puncte fixe	Convergenţa şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = f(x_n)$
f continuă şi crescătoare pe $[a,b]$	există	$(x_n)_{n\geq 0}$ monoton şi convergent la soluţia ecuaţiei $f(x) = x$
f continuă şi descrescătoare pe $[a,b]$	există în mod unic (x^*)	$(x_{2n})_{n\geq 0}$, $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ monoton de monotonii diferite (pentru condiţii de convergenţă vezi [3])
f contracţie pe $[a,b]$	există în mod unic (x^*)	$(x_n)_{n\geq 0}$ convergent la x^*
f derivabilă pe *I* şi $|f'(x)| < 1$	există în mod unic (x^*)	$(x_n)_{n\geq 0}$ convergent la x^*

Bibliografie

[1] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral*.

[2] D. Brânzei, R. Brânzei, S. Aniţa, A. Aniţa, *Şiruri recurente în liceu*, Ed. GIL, 1996.

[3] D. Barbu, V. Radu, *Convergenţa unor şiruri recurente definite de funcţii monotone*, RMT 1/1997, p. 3-10.

[4] D. M. Bătineţu, *Probleme de matematică pentru treapta a II-a de liceu. Şiruri*, Ed. Albatros, 1979.

[5] C. Avădanei, N. Avădanei, C. Borş, C. Ciurea, *De la matematica elementa-ră spre matematica superioară*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1987, p. 76-82.

Probleme rezolvate

1) Să se studieze convergența șirurilor:

a) $x_{n+1}=\sqrt[4]{2x_n^2+8}$, $x_0\in(0,2)$

b) $x_{n+1}=\sqrt{1-x_n^2}$, $x_0\in[0,1]$.

Soluție. a) Fie $f:[0,2]\to[0,2]$, $f(x)=\sqrt[4]{2x^2+8}$, avem *f* continuă, strict crescătoare și $x_1=\sqrt[4]{2x_0^2+8}>x_0$, deci conform Teoremei 4.5.5 șirul (x_n) este strict crescător și mărginit deci convergent către soluția ecuației $f(x)=x$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

b) Fie $f:[0,1]\to[0,1]$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, avem *f* continuă, strict descrescătoare deci șirurile $(x_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ și $(x_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sunt monotone de monotonii diferite. Fie $g(x)=(f\circ f)(x)=x$, deci subșirurile (x_{2n}) și (x_{2n+1}) sunt constante. În concluzie șirul (x_n) este convergent dacă și numai dacă $x_0=x_1$, adică pentru $x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Să se arate că șirul $x_{n+1}=\dfrac{1}{p}\left[(p-1)x_n+\dfrac{a}{x_n^{p-1}}\right]$, $n\geq 0$, $x_0>0$, $a\geq 0$, $p\in\mathbf{N}$, $p\geq 2$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[p]{a}$.

(D. M. Bătinețu, I. M. Stancu-Minasian, GMA 12/1973)

Soluție. Metoda I. Considerăm $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{p}\left[(p-1)x+\frac{a}{x^{p-1}}\right].$$

f continuă și derivabilă pe $(0,\infty)$ și

$$f'(x)=\frac{p-1}{p}\left(1-\frac{a}{x^p}\right).$$

Tabelul de variației al funcției *f* este:

x	0	$\sqrt[p]{a}$	∞
$f'(x)$	- - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + +
$f(x)$	∞ ↘	$\sqrt[p]{a}$	↗ ∞

Deci $f(x) \ge \sqrt[p]{a}$, $\forall\, x \in (0,\infty)$. Întrucât $x_{n+1} = f(x_n) \ge \sqrt[p]{a}$, $\forall\, n \ge 0$, rezultă că $x_n \ge \sqrt[p]{a}$, $\forall\, n \ge 1$.

Considerând $g = f / [\sqrt[p]{a}, +\infty)$, avem $x_{n+1} = g(x_n)$, $\forall\, n \ge 1$, g derivabilă şi $|g'(x)| < 1$, deci aplicând teorema 4.5.15 rezultă că şirul $(x_n)_{n\ge 0}$ este convergent către unica soluție a ecuației $g(x) = x$, anume $\sqrt[p]{a}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[p]{a}$.

Metoda II. Din modul cum a fost definit şirul, rezultă că $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Observăm că:

$$x_{n+1} = \frac{\overbrace{x_n + x_n + \ldots + x_n}^{\text{de } (p-1) \text{ ori}} + \dfrac{a}{x_n^{p-1}}}{p} \ge \sqrt[p]{a}$$

conform inegalității mediilor.

Deci $x_n \ge \sqrt[p]{a}$, $\forall\, n \ge 1$.

Avem $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{p}\left(p - 1 + \dfrac{a}{x_n^p}\right) \le 1$, deci şirul este descrescător.

Fiind monoton şi mărginit rezultă că este convergent. Trecând la limită în relația de recurență obținem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[p]{a}$.

3) Se consideră un şir (u_n) definit prin relația de recurență

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}(64u_n + 15)^{1/3}.$$

Să se stabilească modul de comportare al acestui şir pentru $n \to \infty$.

(Problemă analizată de juriu a 22-a OIM SUA, 1981)

Soluție. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{4}\sqrt[3]{64x + 15}$ este strict crescătoare şi $u_{n+1} = f(u_n)$. Conform teoremei 4.5.5 există trei proprietăți:

i) dacă $u_0 = u_1$ atunci şirul este constant şi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$

$$u_0 = u_1 \Leftrightarrow 64u_0^3 - 6u_0 - 15 = 0 \Leftrightarrow u_0 \in \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1 \pm \sqrt{61}}{8}\right\}.$$

ii) dacă $u_0 < u_1$ atunci şirul $(u_n)_{n\ge 0}$ este strict crescător.

Aceasta are loc pentru $u_0 \in \left(\dfrac{1-\sqrt{61}}{8}, -\dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{61}}{8}, +\infty\right)$.

iii) dacă $u_0 > u_1$ atunci şirul $(u_n)_{n\ge 0}$ este strict descrescător.

Aceasta are loc pentru $u_0 \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{61}}{8}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, \frac{1+\sqrt{61}}{8}\right)$.

Fiind monoton, şirul $(u_n)_{n\geq 0}$ are întotdeauna limită finită sau infinită. Dacă şirul $(u_n)_{n\geq 0}$ este convergent atunci conform teoremei 4.5.6: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ şi $u \in \left\{\frac{1-\sqrt{61}}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1+\sqrt{61}}{8}\right\}$. Analizând combinațiile obținute anterior concluzionăm:

dacă $u_0 < \frac{1-\sqrt{61}}{8}$ atunci $u_n \to -\infty$

dacă $u_0 \in \left(\frac{1-\sqrt{61}}{8}, -\frac{1}{4}\right)$ atunci $u_n \uparrow -\frac{1}{4}$

dacă $u_0 \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1+\sqrt{61}}{8}\right)$ atunci $u_n \downarrow -\frac{1}{4}$

dacă $u_0 \in \left(\frac{1+\sqrt{61}}{8}, +\infty\right)$ atunci $u_n \to +\infty$.

Alte recurențe. Probleme rezolvate

În acest paragraf vom aborda câteva recurențe neliniare. Unele dintre ele se reduc (prin logaritmare sau substituții convenabile) la recurențe mai simple sau chiar liniare, iar altele se vor rezolva utilizând teorema lui Weierstrass de convergență a unui şir.

R4.5.18. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ cu $a_{n+1} = \sqrt[n]{n + a_n^{n-1}}, \forall\, n \in \mathbf{N}^*,\ n \geq 2$ şi $a_2 > 0$. Determinați a_n şi limita sa.

(V. Băndilă, Ol. locală Bucureşti)

Soluție. Evident avem $a_n > 0, \forall\, n \geq 2$, relație demonstrabilă prin inducție. Relația devine: $a_{n+1}^n = n + a_n^{n-1}$ şi vom folosi substituția

$$b_n = a_n^{n-1}, \forall\, n \geq 2.$$

Avem $b_{n+1} = b_n + n, \forall\, n \geq 2$. Dând valori lui n şi însumând obţinem: $b_n = b_2 + \frac{(n-1)n}{2} - 1$, de unde $a_n = \sqrt[n-1]{a_2 - 1 + \frac{(n-1)n}{2}}, \forall\, n \geq 2$. Trecând la limită obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

R4.5.19. Se dă şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_n > 0, \forall\, n \geq 0$ care satisface relaţia: $\sqrt{x_{n+1}} = \sqrt[3]{x_n} + \sqrt[6]{x_{n-1}}, \forall\, n \in \mathbf{N}^*$ şi $x_0 = x_1 = 1$. Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi-i limita.

Soluţie. Notăm $y_n = \sqrt[6]{x_n}$, $y_0 = y_1 = 1$. Relaţia de recurenţă devine: $y_{n+1}^3 = y_n^3 + y_{n-1}, \forall\, n \geq 1$. Se arată prin inducţie că şirul (y_n) este crescător şi mărginit superior de 2. Deci $(y_n)_{n\geq 0}$ este convergent, fie $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Obţinem $\ell(\ell^2 - \ell - 1) = 0$, de unde $\ell = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3$.

R4.5.20. Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ dat de: $x_{n+1}x_{n-1} = x_n^{\sqrt{2}}, \forall\, n \geq 1$ cu $x_n \geq 0, \forall\, n \geq 0$.

Soluţie. Dacă $x_0 = 0$ atunci $x_n = 0, \forall\, n \in \mathbf{N}$ şi şirul fiind constant este convergent spre 0.

Dacă $x_0 > 0$ şi $x_1 = 0$ atunci $x_2 = 0$ şi prin inducţie obţinem $x_n = 0, \forall\, n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, deci şirul este convergent spre 0.

Dacă $x_0 > 0$ şi $x_1 > 0$, atunci se demonstrează prin inducţie că $x_n > 0, \forall\, n \in \mathbf{N}$. Logaritmând relaţia de recurenţă şi notând $y_n = \ln x_n, n \in \mathbf{N}$ obţinem: $y_{n+1} + y_{n-1} = \sqrt{2} y_n$, deci o relaţie de recurenţă liniară şi omogenă de ordinul 2. Ecuaţia caracteristică este:

$$r^2 - \sqrt{2}r + 1 = 0, \quad r_{1,2} = \cos\frac{\pi}{4} \pm i \sin\frac{\pi}{4}.$$

Deci $y_n = c_1 \cos\frac{n\pi}{4} + c_2 \sin\frac{n\pi}{4}, \forall\, n \in \mathbf{N}$. Şirul este aşadar periodic de perioadă 8 (adică $y_{n+8} = y_n, \forall\, n \in \mathbf{N}$) şi el este convergent dacă şi numai dacă $c_1 = c_2 = 0$, adică $y_0 = y_1 = 0$ deci $x_0 = x_1 = 1$, în acest caz limita şirului fiind 1.

R4.5.21. Se dă $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1 > 0$ şi $x_1^2 + x_1 < 1$ cu $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$. Arătați că şirurile $(y_n)_{n\geq 2}$, cu $y_n = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{n-1}$ şi $(x_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente.

Soluție. Avem $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2}{n^2} \geq 0$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător. Se arată prin inducție că $x_n < n-1, \forall\, n \geq 2$. Avem că

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{n-1} - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) > \frac{1}{n}\left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) > 0,$$

de unde $(y_n)_{n\geq 2}$ este de asemenea crescător.

Presupunem că există $n_0 \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $x_{n_0} > 1 \Rightarrow x_n > 1, \forall\, n \geq n_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y_n = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{n-1} < 1 - \frac{1}{n-1} = \frac{n-2}{n-1} < 1, \forall\, n \geq n_0$, deci şirul $(y_n)_{n\geq 2}$ este convergent cu limita *y* şi $0 < y_2 \leq y \leq 1$.

Întrucât $x_n = \dfrac{1}{y_n + \frac{1}{n-1}}$ şi (y_n) este convergent, urmează că $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent cu limita $x = \frac{1}{y}$.

Dacă nu există $n_0 \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $x_{n_0} > 1 \Rightarrow x_n \leq 1, \forall\, n \in \mathbf{N} \Rightarrow (x_n)$ este convergent la *x* şi $0 < x_1 \leq x \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq 2}$ este convergent la $\frac{1}{x}$, deci $(y_n)_{n\geq 2}$ este convergent la $y = \frac{1}{x}$.

5. Câteva clase de şiruri

5. 1. Şiruri definite implicit

Se consideră un şir de funcţii reale $(f_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că fiecare dintre ecuaţiile $f_n(x)=0$ admite câte o singură soluţie situată într-o mulţime M fixată, soluţie pe care o notăm x_n. Spunem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este definit implicit.

În cazuri concrete se pune problema demonstrării existenţei şi unicităţii soluţiei x_n (mai rar a calculului ei) şi apoi a stabilirii unor proprietăţi ale şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

Există posibilitatea şi ca funcţiile f_n să nu fie definite pe mulţimi de numere reale (spre exemplu să fie definită pe submulţimi din $\mathbb{R}^2$), în general neexistând metode care să conducă la o abordare unitară a acestor probleme.

Exemple:

1) Demonstraţi că pentru fiecare număr natural n, ecuaţia $\sin x = x+n$ admite soluţie unică (pe care o notăm x_n). Stabiliţi natura şirurilor $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Soluţie: Funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sin x - x - n$, este injectivă fiind strict descrescătoare şi este continuă. În plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=-\infty$.

Deducem că ecuaţia $f_n(x)=0$ admite o unică soluţie reală, pe care o notăm x_n.

Deoarece $\sin x_n = x_n + n$, obţinem $x_n=\sin x_n - n$ şi $\frac{x_n}{n}=\frac{\sin x_n}{n}-1$.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este divergent şi are limita $-\infty$, iar şirul $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent la -1.

2) Considerăm şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ cu termenii numere raţionale astfel încât $x_n + y_n\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^n$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$.

Soluție: Știm că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, există și sunt unice numerele raționale x_n și y_n astfel ca $x_n + y_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^n$, ceea ce înseamnă că șirurile sunt bine definite (altfel spus funcțiile $f_n : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}$, $f_n(x,y) = x + y\sqrt{2} - \left(1-\sqrt{2}\right)^n$ sunt injective și admit rădăcină).

Știm de asemenea că $\mathrm{x_n} - \mathrm{y_n}\sqrt{2} = \left(1-\sqrt{2}\right)^{\mathrm{n}}$. Rezultă imediat

$$x_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2},\ y_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

Observăm că în acest caz am reușit să stabilim rădăcina funcției f_n.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} (1+\sqrt{2})^n \cdot \frac{1+\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{2} = +\infty.$$

Analog $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ și apoi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \sqrt{2}$.

3) Să se arate că ecuația $x^n - x^{n-1} - \ldots - x - 1 = 0$ are o singură rădăcină reală pozitivă x_n pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluție. Pentru $n=1$, $x_1 = 1$, iar pentru $n \geq 2$ ecuația are rădăcină pe 1 și atunci $x^n - x^{n-1} - \ldots - x - 1 = x^n - \dfrac{x^n - 1}{x-1} = \dfrac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x-1}$.

Considerăm funcția $f_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ și avem :

$$f_n'(x) = (n+1)x^n - 2n\cdot x^{n-1} = x^{n-1}((n+1)x - 2n).$$

Tabelul de variație al funcției f_n pe intervalul $[0,\infty)$ este:

x	0		1		$\frac{2n}{n+1}$		2		∞
f_n'	0	$- - -$	$-$	$- - -$	0	$+ + + +$	$+$	$+ + +$	$+$
f_n	1	$\searrow$	0	$\searrow$	z_n	$\nearrow$	1	$\nearrow$	

$f_n'(x) = 0$ pentru $x = y_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

Avem: $f\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)=z_n<0$ şi $f(2)=1>0$ deci unica rădăcină a ecuaţiei $f_n(x)=0$, diferită de 1, pozitivă este $x_n\in\left(\dfrac{2n}{n+1},2\right)$ şi atunci $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=2$.

4. Să se arate că ecuaţia $x^3-x^2-x-1=0$ are o singură rădăcină reală notată cu x_1 şi să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}(x_2^n+x_3^n)$ unde x_2,x_3 sunt celelalte două rădăcini ale ecuaţiei.

Soluţie. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x^2-x-1$, $f'(x)=3x^2-2x-1=3(x-1)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$. Tabelul de variaţie

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0	1		$+\infty$
f'	$+\ \ +\ \ +$		0	$-\ \ -\ \ -\ \ -$		0	$+\ \ +\ \ +\ \ +$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{1}{3}\right)$	$\searrow$		$f(1)$	$\nearrow$	

Avem: $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)<0$, $f(1)<0$ şi $f(\infty)>0$ deci există o unică rădăcină reală $x_1\in(1,\infty)$.

Celelalte două rădăcini x_2,x_3 sunt complex-conjugate $x_{2,3}=a\pm ib=\rho(\cos t\pm i\sin t)$.

Din relaţiile lui Viette, $x_1\cdot x_2\cdot x_3=1$ şi din $x_1>1$ rezultă $x_2\cdot x_3<1$ sau $\rho^2<1$, deci $\rho<1$.

Avem: $x_2^n+x_3^n=2\cos nt\cdot\rho^n, 0\le\left|x_2^n+x_3^n\right|<2\rho^n\to0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_2^n+x_3^n)=0$.

5. Să se arate că pentru $n\in\mathbb{N}^*$ ecuaţia $2^x+x=n$ are o unică soluţie notată x_n şi să se determine

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\frac{x_n}{\log_2 n}-1\right).$$

Soluţie. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+x$ este strict crescătoare, bijectivă cu inversa crescătoare şi atunci $x_n=f^{-1}(n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

Avem:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{\log_2 n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}(2^{x_n}+x_n)\frac{x_n-\log_2(2^{x_n}+x_n)}{\log_2(2^{x_n}+x_n)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(2^x+x)\frac{x-\log_2(2^x+x)}{\log_2(2^x+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+x}{2^x}\cdot\frac{2^x(x-\log_2(2^x+x))}{x\cdot\dfrac{\log_2(2^x+x)}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x(x-\log_2(2^x+x))}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x(\log_2 2^x-\log_2(2^x+x))}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2^x\log_2\dfrac{2^x+x}{2^x}}{x}=\lim_{x\to\infty}-\frac{\log_2\left(1+\dfrac{x}{2^x}\right)}{\dfrac{x}{2^x}}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}-\frac{\log_2(1+t)}{t}=-\frac{1}{\ln 2}=\log_2\left(\frac{1}{e}\right).$$

6. a) Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ ecuația

$$n^x+(n+1)^x=(n+2)^x$$

are o singură soluție x_n.

b) Să se arate că șirul $(y_n)_n$, $y_n=\dfrac{x_n}{n}$ este convergent și să se determine limita sa.

Soluție. a) Considerăm funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^x+\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^x$ care este descrescătoare, $f_n(-\infty)=\infty$, $f_n(0)=2>1$, $f_n(\infty)=0<1$ deci există un singur $x_n\in(0,\infty)$ cu $f_n(x_n)=1$ sau

$$n^{x_n}+(n+1)^{x_n}=(n+2)^{x_n}.$$

b) Avem: $x_n=n\cdot y_n$ și relația $\left(\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n\right)^{y_n}+\left(\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n\right)^{y_n}=1$.

Considerând funcțiile $\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^x$ și $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^x$ se arată că șirurile $a_n=\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n$ și $b_n=\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$ sunt descrescătoare. Avem: $a_n<a_{n+1}$, $b_n<b_{n+1}$, $a_n^{y_n}<a_{n+1}^{y_n}$, $b_n^{y_n}<b_{n+1}^{y_n}$ deci $1=a_n^{y_n}+b_n^{y_n}<a_{n+1}^{y_n}+b_{n+1}^{y_n}$, atunci

$1 = a_n^{y_{n+1}} + b_{n+1}^{y_{n+1}} < a_{n+1}^{y_n} + b_{n+1}^{y_n}$. Deoarece $a_{n+1} < 1$ şi $b_{n+1} < 1$ rezultă $y_{n+1} > y_n$, deci şirul $(y_n)_n$ este crescător.

Arătăm că şirul $(y_n)_n$ este mărginit: dacă prin absurd ar exista un subşir $(y_{n_k})_k$ cu $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = +\infty$ am avea

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{n_k}{n_k+2}\right)^{n_k}\right)^{y_{n_k}} = e^{-2\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}} = 0,\ \lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{n_k+1}{n_k+2}\right)^{n_k}\right)^{y_{n_k}} = e^{-\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}} = 0,$$

în contradicţie cu $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k})^{y_{n_k}} + (b_{n_k})^{y_{n_k}} = \lim\limits_{k\to\infty} 1 = 1$.

Deci şirul $(y_n)_n$ este convergent şi trecând la limită în relaţia $a_n^{y_n} + b_n^{y_n} = 1$ rezultă $e^{-2l} + e^{-l} = 1$, din care rezultă $e^l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. 2. Şiruri cu mulţimea termenilor finită

Fie M o mulţime finită. Considerăm cunoscute următoarele rezultate elementare:

5. 2. 1. Propoziţie. Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir de elemente din M, atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ admite cel puţin un subşir constant.

5. 2. 2. Propoziţie. Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir convergent de elemente din M, atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este constant începând cu un anumit rang.

5. 2. 3. Definiţie. Un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte periodic dacă există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_{n+p} = x_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$. Numărul p se numeşte perioadă a şirului.

5. 2. 4. Propoziţie. Un şir periodic este convergent dacă şi numai dacă este constant.

Ne propunem să analizăm două dintre cele mai dificile probleme date în ultimii ani la Olimpiada Naţională şi să sugerăm o metodă de rezolvare ale unor probleme asemănătoare.

La primul baraj de selecţie a lotului olimpic din 1996 s-a dat următoarea problemă:

P.5.2.5. Fie *x, y* numere reale. Să se arate că dacă mulţimea $A_{x,y} = \{\cos n\pi x + \cos n\pi y \mid n \in \mathbb{N}\}$ este finită, atunci $x \in \mathbb{Q}$ şi $y \in \mathbb{Q}$.

Soluţie. Fie $x_n = \cos n\pi x$ şi $y_n = \cos n\pi y$, $a_n = x_n + y_n$. Avem:

$$(x_n + y_n)^2 + (x_n - y_n)^2 = 2(x_n^2 + y_n^2) = 2 + (x_{2n} + y_{2n}) \Leftrightarrow (x_n - y_n)^2 = 2 + a_{2n} - a_n^2.$$

Deoarece mulțimea $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este finită, rezultă că mulțimea $\{b_n = x_n - y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este finită. Avem: $x_n = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$, $y_n = \dfrac{1}{2}(a_n - b_n)$ deci mulțimile $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sunt finite.

Există $p \neq q$ astfel ca $x_p = x_q$ și există $r \neq s$ astfel ca $y_r = y_s \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cos p\pi x = \cos q\pi x$ și $\cos r\pi y = \cos s\pi y \Rightarrow p\pi x \pm q\pi x \in 2\pi \cdot \mathbb{Z}$ și $r\pi y \pm s\pi y \in 2\pi \cdot \mathbb{Z}$ $\Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ și $y \in \mathbb{Q}$.

Observație. Reciproca afirmației din problemă este evident adevărată.

O formulare care generalizează Problema 5.2.5. este imediată:

P.5.2.6. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ un număr natural și $x_1, x_2, \dots, x_k$ numere reale. Să se arate că mulțimea $A_{x,y} = \{\cos n\pi x_1 + \cos n\pi x_2 + \dots + \cos n\pi x_k \mid n \in \mathbb{N}\}$ este finită dacă și numai dacă numerele $x_1, x_2, \dots, x_k$ sunt raționale.

Soluție. Se observă că soluția Problemei 5.2.5., deși foarte elegantă, nu oferă idei pentru rezolvarea problemei 5.2.6.

Fie $a_n = \cos n\pi x_1 + \cos n\pi x_2 + \dots + \cos n\pi x_k$.

Dacă mulțimea $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este finită, atunci și mulțimea $B = \{(a_n, a_{2n}, a_{3n}, \dots, a_{kn}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ este finită, deci există $m \neq n$ astfel ca

$$(a_n, a_{2n}, a_{3n}, \dots, a_{kn}) = (a_m, a_{2m}, a_{3m}, \dots, a_{km}).$$

Dacă notăm $y_1 = nx_1\pi, \dots, y_k = nx_k\pi$; $z_1 = mx_1\pi, \dots, z_k = mx_k\pi$ obținem relațiile

$$S: \begin{cases} \cos y_1 + \dots + \cos y_k = \cos z_1 + \dots + \cos z_k \\ \cos 2y_1 + \dots + \cos 2y_k = \cos 2z_1 + \dots + \cos 2z_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \cos ky_1 + \dots + \cos ky_k = \cos kz_1 + \dots + \cos kz_k \end{cases}$$

Se știe că funcția $\cos px$ se exprimă ca un polinom de grad p în raport cu $\cos x$ (Se obține din relația $(\cos x + i \sin x)^p = \cos px + i \sin px$). Sistemul *S* este echivalent cu sistemul *S'*

$$S': \begin{cases} b_1 + \dots + b_k = c_1 + \dots c_k \\ b_1^2 + \dots + b_k^2 = c_1^2 + \dots + c_k^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1^k + \dots + b_k^k = c_1^k + \dots + c_k^k \end{cases}$$

unde $b_i = \cos y_i$, $c_i = \cos z_i$, $i = \overline{1,k}$.

Relațiile sistemului *S'* spun că polinomul (unitar) cu rădăcinile $b_1, \ldots, b_k$ coincide cu polinomul (unitar) cu rădăcinile $c_1, \ldots, c_k$, deci $(c_1, \ldots, c_k)$ este o permutare a lui $(b_1, \ldots, b_k)$. Există o permutare $\sigma \in S_k$ astfel ca:

$$c_1 = b_{\sigma(1)}, \ldots, c_k = b_{\sigma(k)} \Leftrightarrow$$

$$\cos m\pi x_1 = \cos n\pi x_{\sigma(1)}, \ldots, \cos m\pi x_k = \cos n\pi x_{\sigma(k)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\pi x_1 \pm n\pi x_{\sigma(1)} \in 2\pi \cdot \mathbb{Z}, \ldots, m\pi x_k \pm n\pi x_{\sigma(k)} \in 2\pi \cdot \mathbb{Z}.$$

S-a obținut un sistem de ecuații liniare cu necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_k$ şi cu coeficienți raționali (întregi), care are soluție unică (deoarece $m \neq n$) formată din numere raționale.

P.5.2.7. Fie $k \in \mathbb{N}^*$, $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}^*$ distincte şi $u_1, u_2, \ldots, u_k \in \mathbb{C}^*$, astfel ca mulțimea $\left\{ a_n = u_1 \cdot z_1^n + u_2 \cdot z_2^n + \ldots + u_k \cdot z_k^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ să fie finită. Să se arate că există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $a_n = a_{n+p}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Soluții. Soluția 1. Dacă mulțimea $\left\{ a_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ este finită, atunci şi mulțimea $\left\{ (a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ este finită, deci există $m \neq n$ astfel ca:

$$(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) = (a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+k-1}).$$

Notând $m - n = p$ obținem relațiile

$$\begin{cases} u_1 \cdot z_1^n (z_1^p - 1) + u_2 \cdot z_2^n (z_2^p - 1) + \ldots + u_k \cdot z_k^n (z_k^p - 1) = 0 \\ u_1 \cdot z_1^{n+1} (z_1^p - 1) + u_2 \cdot z_2^{n+1} (z_2^p - 1) + \ldots + u_k \cdot z_k^{n+1} (z_k^p - 1) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1 \cdot z_1^{n+k-1} (z_1^p - 1) + u_2 \cdot z_2^{n+k-1} (z_2^p - 1) + \ldots + u_k \cdot z_k^{n+k-1} (z_k^p - 1) = 0 \end{cases}$$

Privind relațiile ca sistem de ecuații liniare cu necunoscutele $x_1 = z_1^p - 1$, $x_2 = z_2^p - 1, \ldots, x_k = z_k^p - 1$, determinantul sistemului este:

$$\begin{vmatrix} u_1 \cdot z_1^n & u_2 \cdot z_2^n & \ldots & u_k \cdot z_k^n \\ u_1 \cdot z_1^{n+1} & u_2 \cdot z_2^{n+1} & \ldots & u_k \cdot z_k^{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1 \cdot z_1^{n+k-1} & u_2 \cdot z_2^{n+k-1} & \ldots & u_k \cdot z_k^{n+k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{k} (u_i \cdot z_i^n) \cdot \prod_{1 \le j < i \le k} (z_i - z_j) \neq 0,$$

deci sistemul admite doar soluția banală şi atunci $z_1^p = z_2^p = \ldots = z_k^p = 1$, deci $z_i^n = z_i^{n+p}$, $n \in \mathbb{N}$ şi $a_n = a_{n+p}$, $n \in \mathbb{N}$.

Problema are o soluție mai elegantă, care foloseşte doar cunoştințe de clasa a X-a.

Soluția a doua. Se bazează pe următoarea observație:

Dacă mulțimea $A=\left\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ este finită, atunci pentru orice număr $b\in\mathbb{C}$, mulțimea $B=\left\{a_{n+1}-b\cdot a_n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ este finită.

Luând $b=z_k$ avem:

$$a_{n+1}-z_k\,a_n=u_1z_1^{n+1}+\ldots+u_{k-1}\,z_{k-1}^{n+1}+u_k\,z_k^{n+1}-u_1\cdot z_k\,z_1^n-\ldots-u_{k-1}\cdot z_k\,z_{k-1}^n-u_k\cdot z_k^{n+1}=$$

$$=u_1(z_1-z_k)\cdot z_1^n+\ldots+u_{k-1}(z_{k-1}-z_k)\cdot z_{k-1}^n=v_1\cdot z_1^n+\ldots+v_{k-1}\cdot z_{k-1}^n .$$

Ne-am redus de la o mulțime A_k la o mulțime B_{k+1}, verificând aceleaşi ipoteze, deci prin inducție după k, demonstrația este imediată.

O generalizare a acestei probleme, pentru ideea din prima soluție nu conduce la rezolvare, este

P.5.2.8. Fie $P,Q,R\in\mathbb{C}[X]$ polinoame nenule şi $a,b,c\in\mathbb{C}^*$ numere complexe, nenule şi distincte. Să se arate că dacă mulțimea:

$$Z=\left\{z_n=P(n)\cdot a^n+Q(n)\cdot b^n+R(n)\cdot c^n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$$

este finită, atunci există $p\in\mathbb{N}^*$ astfel ca $z_{n+p}=z_n$, $n\in\mathbb{N}$.

Soluție. Z finită $\Rightarrow Z_1=\left\{z_{n+1}-a\cdot z_n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ finită.

$$z_{n+1}-a\cdot z_n=[a(P(n+1)-P(n))]\cdot a^n+[b\cdot Q(n+1)-a\cdot Q(n)]\cdot b^n+$$
$$+[c\cdot R(n+1)-a\cdot R(n)]\cdot c^n=P_1(n)\cdot a^n+Q_1(n)\cdot b^n+R_1(n)\cdot c^n,$$

unde $P,Q,R\in\mathbb{C}[X]$ şi $\operatorname{grad}P_1<\operatorname{grad}P$, $\operatorname{grad}Q_1=\operatorname{grad}Q$, $\operatorname{grad}R_1=\operatorname{grad}R$ (avem aceeaşi ipoteză dar gradul lui P a scăzut).

Dacă $P_1\neq 0$, considerăm mulțimea $Z_2=\left\{u_{n+1}-au_n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$, unde $u_n=P_1(n)\cdot a^n+Q_1(n)\cdot b^n+R_1(n)\cdot c^n$, care este finită, şi rezultă

$$Z_2=\left\{v_n=P_2(n)\cdot a^n+Q_2(n)\cdot b^n+R_2(n)\cdot c^n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$$

şi $\operatorname{grad}P_2<\operatorname{grad}P_1$, $\operatorname{grad}Q_2=\operatorname{grad}Q=\operatorname{grad}Q_1$, $\operatorname{grad}R_2=\operatorname{grad}R_1=\operatorname{grad}R$.

După cel mult k paşi de acest fel $(k=\operatorname{grad}P+1)$ obținem $P_k=0$ şi mulțimea $Z'=\left\{z_n'=Q'(n)\cdot b^n+R'(n)\cdot c^n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ finită.

Considerăm mulțimea

$$Z_1'=\left\{z_{n+1}'-b\cdot z_n' \mid n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{Q'(n)\cdot b^n+R'(n)\cdot c^n \mid n\in\mathbb{N}\right\},$$

finită cu $\operatorname{grad}Q_1'=\operatorname{grad}Q_n'$ şi $\operatorname{grad}R_1'=\operatorname{grad}R'$.

La fel ca mai sus, scăpăm de b şi obținem mulțimea finită

$$Z''=\left\{z_n''=R''(n)\cdot c^n \mid n\in\mathbb{N}\right\},$$

unde $\operatorname{grad} R'' = \operatorname{grad} R$.

În mod analog, scădem gradul lui R'' până la un polinom constant, deci ajungem la mulțimea finită $\left\{\alpha \cdot c^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Există $p_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $c^{p_1} = 1$. Analog obținem $b^{p_2} = 1, c^{p_3} = 1$, deci $a^p = b^p = c^p = 1$, unde $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$.

Mulțimea $U = \left\{z_{k+p} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ este finită $\Leftrightarrow \left\{P(k \cdot p) + Q(k \cdot p) + R(k \cdot p) \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ este finită.

Rezultă că polinomul $f(x) = P(x) + Q(x) + R(x) = a_0$ este constant.

Mulțimea $V = \left\{z_{k \cdot p+1} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ este finită, deci polinomul $g(x) = a \cdot P(x) +$
$+ b \cdot Q(x) + c \cdot R(x) = a_1$ este constant și din mulțimea finită $W = \left\{z_{k \cdot p+2} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ obținem polinomul constant $h(x) = a^2 \cdot P(x) + b^2 \cdot Q(x) + c^2 \cdot R(x) = a_2$.

Din relațiile $f = a_0$, $g = a_1$, $h = a_2$ rezultă că polinoamele *P*, *Q*, *R* sunt constante. Se obține $a_{n+p} = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

O generalizare a problemei P.5.2.8, a cărei soluție este asemănătoare este:

P.5.2.9. Fie $k \in \mathbb{N}^*$, $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}^*$ distincte și $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[X]$ polinoame nenule. Să se arate că dacă mulțimea

$$\left\{f_1(n) \cdot z_1^n + f_2(n) \cdot z_2^n + \ldots + f_k(n) \cdot z_k^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

este finită, atunci polinoamele sunt constante și există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $z_1^p = z_2^p = \ldots = z_k^p = 1$.

Soluție. Se face inducție după *k*, urmărind soluția problemei P.5.2.8.

5.3. Evaluarea unor serii prin șiruri

Unele probleme cu caracter teoretic conțin idei ce permit deducerea multor tipuri de probleme: În general, o astfel de problemă este exploatată superficial, surprinzându-se răzleț câte un singur aspect. Ne propunem să dăm un model de analiză a implicațiilor pe care le poate avea un rezultat cu aspect teoretic.

Vom porni de la o problemă conținută în culegerile de analiză matematică și anume convergența șirului $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$, $n \geq 1$ la constanta *c* a lui

Euler. Ea se încadrează într-un context general în care se foloseşte aceeaşi tehnică de demonstrație.

Să considerăm o funcție derivabilă $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$, unde $a<1$ şi să definim şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)-f(n)$. Ne punem problema convergenței acestui şir.

5.3.1. Propoziție. Dacă funcția $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$, unde $a<1$ este derivabilă, cu derivata monotonă şi mărginită pe intervalul $[1,\infty)$ atunci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)-f(n)$ este convergent.

Demonstrație. Avem:

$$a_{n+1}-a_n = f'(n+1)-(f(n+1)-f(n)) = f'(n+1)-f'(c_n),$$

unde $c_n\in(n,n+1)$ din teorema lui Lagrange aplicată funcției *f* pe intervalul $[n,n+1]$.

Dacă f' este crescătoare, atunci $f'(n+1)\geq f'(c_n)$ deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător, iar dacă f' este descrescătoare, atunci $f'(n+1)\leq f'(c_n)$ de unde rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

În primul caz avem:

$$\begin{array}{l} f'(n)\leq f'(n+1)-f(n)\leq f'(n+1) \\ f'(n-1)\leq f(n)-f(n-1)\leq f'(n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'(1)\leq f(2)-f(1)\leq f'(2) \end{array}$$

Adunând aceste inegalități obținem:

$$f'(1)-f(1)<a_n<f(n+1)-f(n)=f'(c_n)-f(1)\leq M'-f(1)$$

unde M' este un majorant pentru mulțimea $\left\{f'(x)\,\middle|\, x\in[1,\infty)\right\}$.

În concluzie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi mărginit, deci convergent.

Celălalt caz se demonstrează la fel.

5. 3. 2. Observație. Dacă există limita $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=1'$ şi notăm cu $1=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, atunci $1\in[f'(1)-f(1),1'-f(1)]$.

5. 3. 3. Observație. Dacă funcția *f* verifică ipotezele propoziției 5.3.1. şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)}{f(n)}=1$.

5. 3. 4. Observație. Dacă pentru şirul din propoziția 5.3.1. notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, atunci pentru un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ se poate pune problema determinării limitei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot (f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(n) - f(n) - a)$ (dacă există), care este o limită de tipul $\infty \cdot 0$ şi care în general se abordează cu criteriul lui Stolz în cazul $\dfrac{0}{0}$.

5. 3. 5. Observaţie. Folosind secvenţe de forma $\sum\limits_{k=p(n)}^{q(n)} f'(k)$ se obţin şiruri interesante a căror limită se determină folosindu-ne tot de propoziţia 5.3.1.

Notând $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f'(k)$, avem:

$$\sum_{k=p(n)}^{q(n)} f'(k) = S_{q(n)} - S_{p(n)} + f'(p(n)) =$$

$$= (S_{q(n)} - f(q(n))) - (S_{p(n)} - f(p(n)) - f(p(n)) + f(q(n)) + f'(p(n))$$

şi de aici

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=p(n)}^{q(n)} f'(k) = \lim_{n\to\infty} (f(q(n)) - f(p(n)) + f'(p(n))),$$

dacă $p, q : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sunt funcţii strict crescătoare, cu $p(n) < q(n)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

Bibliografie:

1. **Ion Colojară,** *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
2. **Octavian Stănăşilă,** *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981
3. *** * *,** *Teste grilă de matematică*, - Admiterea 2003, U.T. Pres, Cluj-Napoca, 2002
4. *** * *,** *Colecţia Gazetea Matematică*
5. *** * * ,** *Colecţia "Argument"* – Revista catedrei de matematică a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai" Baia Mare

Probleme rezolvate

R5.4.1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale, convergent şi cu limita nenulă.

a) Să se arate că există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n > N$ să existe un unic $x_n \in \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$a_{n+3} \cdot 3^{x_n} + a_{n+4} \cdot 4^{x_n} = a_{n+5} \cdot 5^{x_n} \tag{1}$$

b) Să se arate că şirul $(x_n)_{n>N}$ este convergent şi să se calculeze limita sa.

Soluție. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $l \in \mathbb{R}^*$. Deoarece în relația (1) putem schimba a_n cu $-a_n$, putem considera $l > 0$.

a) Există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n \in \left[\frac{3}{4}l, \frac{5}{4}l\right]$, $(\forall)$ $n > N$. Relația (1) se poate scrie

$$\frac{a_{n+3}}{a_{n+5}} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{x_n} + \frac{a_{n+4}}{a_{n+5}} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{x_n} = 1 \tag{2}$$

Funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{a_{n+3}}{a_{n+5}} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{x} + \frac{a_{n+4}}{a_{n+5}} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{x}$ este strict descrescătoare fiind sumă de funcții strict descrescătoare. Evident f_n este continuă.

$$f_n(0) = \frac{a_{n+3} + a_{n+4}}{a_{n+5}} \geq \frac{2 \cdot \frac{3}{4}l}{\frac{5}{4}l} = \frac{6}{5} > 1$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 < 1 .$$

Există aşadar un unic $x_n \in \mathbb{R}$ (mai mult $x_n > 0$) pentru care $f_n(x_n) = 1$.

b) Notând $b_n = \frac{a_{n+3}}{a_{n+5}}$ şi $c_n = \frac{a_{n+4}}{a_{n+5}}$, şirurile $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente la 1. Obținem $b_n \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{x_n} + c_n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{x_n} = 1$ şi de aici

$$(b_n-1)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x_n}+(c_n-1)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{x_n}+\left(\frac{3}{5}\right)^{x_n}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_n}=1.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-1)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-1)\rangle\left(\frac{4}{5}\right)^{x_n}=0$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{x_n}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_n}\right)=1$$

(3)

Vom demonstra că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Deoarece relația (3) este adevărată şi pentru orice subşir al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ nu poate să aibă subşiruri nemărginite şi deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. În plus, deoarece funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x}$ este injectivă, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu poate să admită două subşiruri convergente la numere reale distincte. Rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Din relația (3) deducem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent la 2.

R5.4.2. a) Demonstrați că pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, ecuația

$$\frac{1^{n\cdot x}+2^{n\cdot x}+\ldots+n^{n\cdot x}}{n^{n\cdot x}}=\frac{e}{e-1}$$

(*)

are o unică rădăcină reală (notată x_n).

b) Demonstrați că şirul $(x_n)_{n\geq 2}$ este convergent şi calculați $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot(x_n-1)$.

Soluție. a) (*) $\Leftrightarrow\dfrac{1^{nx}+2^{nx}+\ldots+(n-1)^{nx}}{n^{nx}}=\dfrac{1}{e-1}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{x}+\left[\left(\frac{2}{n}\right)^{n}\right]^{x}+\ldots+\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\right]^{x}=\frac{1}{e-1}.$$

Considerăm $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{x}+\left[\left(\frac{2}{n}\right)^{n}\right]^{x}+\ldots+\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\right]^{x}$, f_n este o funcție continuă strict descrescătoare (sumă de exponențiale de bază subunitară)

$$f_n(0)=n-1\geq 1>\frac{1}{e-1},\ \lim_{x\to\infty}f_n(x)=0<\frac{1}{e-1}.$$

Rezultă că ecuația (*) are o unică soluție reală strict pozitivă.

Este cunoscută inegalitatea $\ln(1-x) < -x$, $(\forall)\ x \in (0,1)$.

Rezultă $\ln\left(1-\frac{k}{n}\right) < -\frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $k < n$ şi de aici $\left(1-\frac{k}{n}\right)^n < \frac{1}{e^k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $k < n$.

$$f_n(1) = \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{n-1}{n}\right)^n + \left(1-\frac{n-2}{n}\right)^n + \ldots + \left(1-\frac{1}{n}\right)^n <$$

$$< \frac{1}{e^{n-1}} + \frac{1}{e^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e}\cdot\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{1-\frac{1}{e}} < \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}.$$

Rezultă că ecuaţia (*) are o unică soluţie reală $x_n \in (0,1)$, şirul $(x_n)_{n\geq 2}$ fiind aşadar mărginit.

b) Fie $\varphi : [1,n] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{(x+1)^{n+1}}{x^n}$. φ este derivabilă şi

$$\varphi'(x) = \frac{x^{n-1}\cdot(x+1)^n\cdot(x-n)}{x^{2n}} \leq 0.$$

Rezultă că φ este strict descrescătoare şi deci pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $k < n$, are loc $\frac{(k+1)^{n+1}}{k^n} > \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$.

Deducem inegalitatea

$$\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{k}{n}\right)^n,\ (\forall)\ k \in \mathbb{N}^*,\ k < n.$$

$$f_{n+1}(x) = \left[\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^x + \left[\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right]^x + \left[\left(\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}\right]^x + \ldots + \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right]^x.$$

Pentru $x > 0$, aplicând inegalitatea (1) termenilor funcţiei f_{n+1}, începând cu al doilea termen, obţinem:

$$f_{n+1}(x) = \left[\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^x + \left[\left(\frac{1}{n}\right)^n\right]^x + \left[\left(\frac{2}{n}\right)^n\right]^x + \ldots + \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right]^x > f_n(x)$$

(2)

Deoarece $f_{n+1}(x_{n+1}) = f_n(x_n) = \frac{1}{e-1}$, din (2) deducem că pentru fiecare $n \geq 2$ are loc $f_n(x_n) > f_n(x_{n+1})$ şi cum f_n este strict descrescătoare, rezultă $x_n < x_{n+1}$. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ fiind strict crescător şi mărginit, este convergent la un număr real 1 ∈ (0, 1].

R5.4.3. Să se determine limita şirului $(a_n)_n$,

$$a_n = n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n-a\right),$$

unde $a=\lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$.

Soluţie. Notăm cu $x_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n-a$ şi cu $y_n=\frac{1}{n}$. Conform criteriului lui Stolz avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}-\ln(x+1)+\ln x}{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

R5.4.4. Să se determine

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=p\cdot n}^{q\cdot n}\frac{1}{k},$$

unde p, q sunt numere naturale $1\le p<q$.

Soluţie. Fie $(a_n)_n$ un şir de numere reale, $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ şi $(b_n)_n$ un şir cu proprietatea că şirul $(S_n-b_n)_n$ este convergent. Dacă $(p_n)_n$ şi $(q_n)_n$ sunt două şiruri de numere naturale $p_n\le q_n$, $n\in\mathbb{N}$ atunci:

$$\sum_{k=p_n}^{q_n}a_k=S_{q_n}-S_{p_n}+a_{p_n}=(S_{q_n}-b_{q_n})-(S_{p_n}-b_{p_n})+(b_{q_n}-b_{p_n})+a_{p_n}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=p_n}^{q_n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}(b_{q_n}-b_{p_n}+a_{p_n})$.

Pentru $a_k=\frac{1}{k}$, $p_n=p\cdot n$, $q_n=q\cdot n$, $b_n=\ln n$ obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=p\cdot n}^{q\cdot n}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\left(\ln q\cdot n-\ln p\cdot n+\frac{1}{p\cdot n}\right)=\ln\frac{q}{p}.$$

R5.4.5. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=p\cdot n}^{q\cdot n}\sin\frac{\pi}{k}=\pi\ln\frac{q}{p}$.

Soluție. Fie $x_n = \sum_{k=p\cdot n}^{q\cdot n} \sin\frac{\pi}{k} = \sum_{k=p\cdot n}^{q\cdot n} \frac{1}{k}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}}$. Avem:

$$\min_{p\cdot n\le k\le q\cdot n} \frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} \sum_{k=p\cdot n}^{q\cdot n} \frac{1}{k} \le x_n \le \max_{p\cdot n\le k\le q\cdot n} \frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} \sum_{k=p\cdot n}^{q\cdot n} \frac{1}{k}.$$

Trecând la limită cu $n\to\infty$ rezultă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pi\cdot\ln\frac{q}{p}.$$

6. Proprietatea lui Darboux

6.1. Funcții cu proprietatea lui Darboux. Generalități

6.1.1. Definiție

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcție. Spunem că f are Proprietatea lui Darboux (prescurtat P.D.) dacă
$\forall\, a,b \in I$, $a < b$ şi oricare ar fi γ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$ există $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = \gamma$.

6.1.2. Observații

a) Funcția $f : I \to R$ are P.D. $\Leftrightarrow$ $\forall\, a,b \in I, a < b$ şi $\forall\, \lambda \in (0,1)\ \exists\ c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$
b) Funcția $f : I \to R$ are P.D. $\Leftrightarrow$ $\forall\, a,b \in I$, $a < b$ şi $\forall\, \gamma$ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$, paralela la axa *Ox* care trece prin punctul $(0,\gamma)$ intersectează graficul lui *f* în cel puțin un punct $(x, f(x))$ cu $x \in (a,b)$
c) Punctul *c* din definiție nu este întotdeauna unic determinat. Pot exista o infinitate de puncte $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = \gamma$
d) Fie $f : I \to R$ o funcție cu proprietatea:
$\forall\, a,b \in I,\ a < b$ şi oricare ar fi γ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$ există $c \in I$ astfel încât $f(c) = \gamma$.
De aici nu rezultă numaidecât că f are P.D., ci doar faptul că $f(I)$ este un interval.
De multe ori definiția P.D. este destul de greu de utilizat. De aceea vom enunța următoarea propoziție:

6.1.3. Propoziție

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcție. Funcția f are P.D. dacă şi numai dacă $\forall\, J \subseteq I$ un interval $\Rightarrow$ $f(J)$ este interval
Demonstrație
$(\Rightarrow)$
Fie $J \subseteq I$ un interval. Fixăm $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ şi $y_1 < \lambda < y_2$. Evident există $x_1, x_2 \in J$ astfel încât $f(x_1) = y_1$ şi $f(x_2) = y_2$. Conform definiției P.D. există x_0 între x_1 şi x_2 astfel încât $f(x_0) = \lambda \in f(J)$. Deci $\forall\, y_1, y_2 \in f(J)$ rezultă că $[y_1, y_2] \subseteq f(J)$. De aici rezultă că $f(J)$ este un interval.
$(\Leftarrow)$

Fie $a,b \in I$, $a < b$ şi γ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$. Întrucât $f([a,b])$ este un interval şi $f(a), f(b) \in f([a,b])$, rezultă că $\gamma \in f([a,b])$, deci există $c \in [a,b]$ astfel încât $f(c) = \gamma$.

6.1.4. Exemple

Care dintre funcțiile următoare au P.D. ?

a) $f : R \to R$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$

b) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x, x \le 0 \\ 1 - x, x > 0 \end{cases}$

c) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 0, x \in Q \\ 1, x \in R \setminus Q \end{cases}$

d) $f : [0,1] \to R$, $f(x) = \begin{cases} x, x \in Q \\ x^3, x \notin Q \end{cases}$

Soluții

a) $f([-1,1]) = \{-1,0,1\}$ care nu este interval, deci *f* nu are P.D.

b) $f\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = f\left(\left[-\frac{1}{2}, 0\right]\right) \cup f\left(\left(0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ care nu este interval, deci *f* nu are P.D.

c) $f([0,1]) = \{0,1\}$ care nu este interval, deci *f* nu are P.D.

d) Fie $J = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. Arătăm că $f(J)$ nu este interval. Într-adevăr:

$$f(J \cap Q) = X \subseteq \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$$

$$f(J \setminus Q) = Y \subseteq \left[\frac{1}{27}, \frac{1}{8}\right]$$

Deci $f(J) = X \cup Y$ şi $X \cap Y = \varnothing$, de unde rezultă că $f(J)$ nu este interval. Deci *f* nu are P.D.

6.1.5. Observații

a)Din exemplul 6.1.4 b) se observă că există funcții surjective care nu au P.D.
b) S-a arătat la exemplele 6.1.4 c) şi d) că cele două funcții de tip Dirichlet nu au P.D. Se poate da un rezultat mai general (vezi P 6.4.5)

6.1.6. Propoziție

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcție injectivă cu P.D. Atunci f este monotonă

Demonstrație

Fie $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ fixați. Atunci $J_1 := f([x_1, x_2])$ şi $J_2 = f([x_2, x_3])$ sunt intervale. Cum $f(x_2) \in J_1 \cap J_2$ şi *f* este injectivă rezultă că $J_1 \cap J_2 = \{f(x_2)\}$.

Aşadar $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ sau $f(x_3) < f(x_2) < f(x_1)$, prin urmare *f* este strict monotonă.

6.1.7. Corolar

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcție cu P.D. Atunci *f* este strict monotonă $\Leftrightarrow$ *f* este injectivă

6.1.8. Propoziție

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcție cu P.D.. Dacă mulțimea $f(I)$ este cel mult numărabilă, atunci *f* este constantă.

Demonstrație

Deoarece *f* are P.D. rezultă că $f(I)$ este un interval. Cum $f(I)$ este cel mult numărabilă şi un interval care nu se reduce la un punct este echipotent cu *R*, deci nenumărabil, rezultă că $f(I)$ se reduce la pun punct.

Aşadar, există $c \in R$ astfel încât $f(I) = \{c\}$, deci *f* este constantă

6.1.9. Corolar

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcție cu P.D. care se anulează cel puțin într-un punct. Dacă mulțimea $f(I)$ este cel mult numărabilă, atunci $f = 0$.

6.1.10. Propoziție

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcție cu P.D. care nu se anulează în nici un punct. Atunci $f > 0$ sau $f < 0$.

Demonstrație

Presupunem că există $a, b \in I$ cu $f(a) < 0$ şi $f(b) > 0$. Atunci γ = $0 \in \big(f(a), f(b)\big)$, deci există *c* cuprins între *a* şi *b* astfel încât $f(c) = 0$ contradicție. Rămâne că $f > 0$ sau $f < 0$

6.1.11. Corolar
Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcţie cu P.D. Dacă $a,b \in I$, $a < b$ şi $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = 0$.

6.2. Clase de funcţii cu proprietatea lui Darboux

6.2.1. Teoremă (Bolzano)
Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcţie continuă. Atunci $f(I)$ este un interval.
Demonstraţie
Fie $y_1, y_2 \in J := f(I)$, $y_1 < y_2$ şi $y_1 < \lambda < y_2$, fixaţi. Evident există $a,b \in I$ cu $f(a) = y_1$ şi $f(b) = y_2$. Presupunem $a < b$. Considerăm mulţimea $A := \{x \in [a,b] : f(x) \le \lambda\}$ şi fie $c = \sup A$. Din definiţia marginii superioare rezultă că există $(x_n)_{n\ge1} \subseteq A$ cu $x_n \to c$, deci $f(x_n) \le \lambda$, $(\forall) n \ge 1$. Cum *f* este continuă, avem $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \le \lambda$. Deoarece $\lambda < f(b)$, avem $c < b$.
Evident $f(x) > \lambda$, $(\forall) c \in (c,b]$. Fie $(y_n)_{n,1} \subseteq (c,b)$, $y_n \to c$. Atunci $f(y_n) > \lambda$, $(\forall)$ $n \ge 1$, deci $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) \ge \lambda$. Din $f(c) \le \lambda$ şi $f(c) \ge \lambda$, deducem că $f(c) = \lambda$, deci $\lambda \in J$. Aşadar $[y_1, y_2] \subseteq J$, $(\forall)$ $y_1, y_2 \in J$. Deci *J* este un interval.

6.2.2. Corolar
Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcţie continuă. Atunci *f* are P.D.
Demonstraţie
Fie $J \subseteq I$ un interval. Atunci conform Teoremei 6.2.1 $f(J)$ este un interval, deci conform Propoziţiei 6.1.3, *f* are P.D.

6.2.3. Corolar
Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcţie continuă. Atunci:
i) dacă $f(I) \subseteq R^*$ $\Rightarrow$ $f > 0$ sau $f < 0$
ii) dacă există $a,b \in I$, $a < b$ astfel încât $f(a) \cdot f(b) < 0$ $\Rightarrow$ există $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = 0$
iii) *f* strict monotonă $\Leftrightarrow$ *f* injectivă
Demonstraţie i) şi ii) rezultă din P 6.1.10 şi C 6.1.11, iii) rezultă din C 6.1.7

6.2.4. Exemple

Funcțiile polinomiale, sin, cos, 1_R, $|\cdot|$, exp, ln au toate P.D.

În continuare vom da caracterizări ale punctelor de discontinuitate pentru funcții cu P.D.

6.2.5. Teoremă

Fie $I \subseteq R$ un interval, $a = \inf I$, $b = \sup I$ şi $f : I \to R$ o funcție cu P.D. Atunci $(\forall) x_0 \in I \setminus \{a\}$ (respectiv $I \setminus \{b\}$), $(\exists) x_n \in I$, $x_n \nearrow x_0$ (respectiv $x_n \searrow x_0$) astfel încât $f(x_n) \to f(x_0)$

Demonstrație

Fie $x_0 \in I \setminus \{a\}$ fixat şi $r_n \searrow 0$ cu proprietatea că $I_n := (x_0 - r_n, x_0) \subseteq I$, $(\forall) n \geq 1$. Deoarece *f* are P.D. rezultă (P 6.1.3) că $f(I_n)$ şi $f(I_n \cup \{x_0\})$ sunt intervale, evident care diferă între ele cel mult prin punctul $y_0 := f(x_0)$. Atunci $\forall n \geq 1$, avem că $y_0 \in f(I_n)$ sau y_0 este un capăt al lui $f(I_n)$, deci $(\exists) y_n \in f(I_n)$ cu $|y_n - y_0| < \frac{1}{n}$ şi fie $x_n \in I_n$ cu $f(x_n) = y_n$. Cum avem $x_0 - r_n < x_n$ şi $|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{1}{n}$ deducem că $x_n \to x_0$ şi $f(x_n) \to f(x_0)$. Extragem mai departe un subşir strict crescător al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi evident acesta are proprietatea din enunț.

În continuare vom nota cu $\overset{0}{I} = \operatorname{int} I = \{x_0 \in I / \exists V \in V(x_0) : V \subseteq I\}$ interiorul lui I

6.2.6. Corolar

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcție cu P.D. Atunci $(\forall) x_0 \in \overset{0}{I}$ $(\exists) x_n, y_n \in I \setminus \{x_0\}$, $x_n \nearrow x_0$ şi $y_n \searrow x_0$ astfel încât:

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$

6.2.7. Corolar

Fie $I \subseteq R$ un interval, $a = \inf I$, $b = \sup I$ şi $f : I \to R$ o funcție cu P.D. Dacă $x_0 \in I \setminus \{a\}$ (respectiv $I \setminus \{b\}$) şi $f(x_0^-)$ (respectiv $f(x_0^+)$) există, atunci $f(x_0) = f(x_0^-)$ (respectiv $f(x_0) = f(x_0^+)$) deci *f* nu are discontinuități de speța I

Demonstrație

Din P 6.2.5 rezultă că $(\exists) x_n \in I \setminus \{x_0\}$, $x_n \nearrow x_0$ cu $f(x_n) \to f(x_0)$. Deoarece $f(x_0^-)$ există, avem $f(x_n) \to f(x_0^-)$ şi cum limita unui şir din *R* este unică, deducem că $f(x_0) = f(x_0^-)$.

6.2.8. Corolar

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcție monotonă, cu P.D. Atunci *f* este continuă pe *I*.

Demonstrație

Din Corolarul 6.2.7 rezultă că *f* nu are discontinuități de speța I, iar întrucât o funcție monotonă nu are discontinuități de speța a doua ([1] pag. 169, T 5.5.18, Cor 2), rezultă că F este continuă pe I.

Pentru Teorema 6.2.5 se poate formula o reciprocă:

6.2.9. Teoremă

Fie $I \subseteq R$ un interval, $x_0 \in \overset{0}{I}$ şi $f : I \to R$ o funcție continuă pe $I \setminus \{x_0\}$. Dacă

i) $(\exists)$ $x_n \in I$, $x_n \nearrow x_0$ astfel încât $f(x_n) \to f(x_0)$

ii) $(\exists)$ $y_n \in I$, $y_n \searrow x_0$ astfel încât $f(y_n) \to f(x_0)$

atunci *f* are P.D.

Demonstrație:

Fie $\varepsilon > 0$ astfel încât $J_\varepsilon = [x_0, x_0 + \varepsilon] \subseteq I$

$f(J_\varepsilon) = \{f(x_0)\} \cup f((x_0, x_0 + \varepsilon])$

Din (ii) rezultă că $(\exists) N_\varepsilon \in N$ astfel încât $y_n \in (x_0, x_0 + \varepsilon]$, $(\forall) n \geq N_\varepsilon$ şi deci $f(y_n) \in f((x_0, x_0 + \varepsilon])$, $(\forall) n \geq N_\varepsilon$

Întrucât *f* este continuă pe $(x_0, x_0 + \varepsilon]$ avem că $f((x_0, x_0 + \varepsilon]) = I_\varepsilon$ este un interval care conține şirul convergent $(f(y_n))_{n \geq N_\varepsilon}$.

Avem aşadar $\lim_{n \to \infty} f(y_n) = f(x_0) \in \overline{I_\varepsilon}$ şi deci $f(J_\varepsilon) = \{f(x_0)\} \cup I_\varepsilon$ este tot un interval.

Analog se demonstrează că pentru $(\forall) \delta > 0$, $f([x_0 - \delta, x_0] \cap I)$ este un interval.

Deci $(\forall) J \subseteq I$ un interval avem:

- dacă $x_0 \notin J \Rightarrow f(J)$ este un interval (întrucât *f* este continuă pe $I \setminus \{x_0\}$)

- dacă $x_0 \in J \Rightarrow \exists\, \varepsilon, \delta > 0$ astfel încât $J = [x_0 - \delta, x_0 + \varepsilon]$ şi $f(J) = f([x_0 - \delta, x_0]) \cup f([x_0, x_0 + \varepsilon])$ este o reuniune de două intervale care au un punct comun, pe $f(x_0)$, deci şi reuniunea lor va fi un interval.

6.2.10. Corolar

Fie $I \subseteq R$ un interval, $x_0 \in \overset{0}{I}$ şi $f : I \to R$ o funcție continuă pe $I \setminus \{x_0\}$.
Atunci *f* are P.D. dacă şi numai dacă:
(i) $(\exists) x_n \in I$, $x_n \nearrow x_0$ astfel încât $f(x_n) \to f(x_0)$
(ii) $(\exists) y_n \in I$, $y_n \searrow x_0$ astfel încât $f(y_n) \to f(x_0)$
Demonstrație
($\Rightarrow$) se aplică T. 6.2.5
($\Leftarrow$) se aplică T. 6.2.9

6.2.11. Corolar

Fie $f : [a,b] \to R$ continuă pe $(a,b]$ (respectiv $[a,b)$). Atunci *f* are P.D. dacă şi numai dacă:
$(\exists) x_n \in (a,b]$, $x_n \searrow a$ astfel încât $f(x_n) \to f(a)$
$(\exists) y_n \in [a,b)$, $x_n \nearrow b$ astfel încât $f(y_n) \to f(b)$)

6.2.12. Observații

a) Teorema 6.2.9 dă o caracterizare a punctelor de discontinuitate de spețа a II-a pentru funcții cu P.D.
b) Teorema 6.2.9 se poate extinde pentru o funcție $f : I \to R$ discontinuă pe o mulțime finită de puncte cu proprietățile (i) şi (ii)
c) Lebesgue a demonstrat că există funcții $f : R \to R$ discontinue pe *R* şi care au P.D. (demonstrația depăşeşte cadrul acestui manual)

6.2.13. Probleme rezolvate

a) Funcția $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, $\alpha \in R$ are P.D. $\Leftrightarrow |\alpha| \le 1$

b) Funcția $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, $\alpha \in R$, unde (t) este distanța de la t la cel mai apropiat întreg are P.D. $\Leftrightarrow$ $\alpha \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

Soluții

a) f este continuă pe $R \setminus \{0\}$. Atunci conform Corolarului 6.2.10, f are P.D. dacă şi numai dacă $(\exists) x_n \in R$, $x_n \nearrow 0$ astfel încât $f(x_n) \to \alpha$ şi $(\exists) y_n \in R$, $y_n \searrow 0$ astfel încât $f(y_n) \to \alpha$. Întrucât $\sin\dfrac{1}{x} \in [-1,1]$, $(\forall)$ $x \in R^*$, rezultă că dacă $|\alpha| > 1$ atunci $(\forall) x_n \nearrow 0$, $f(x_n) \not\to \alpha$ şi $(\forall) y_n \searrow 0$, $f(y_n) \not\to \alpha$, deci f nu are P.D.

Dacă $|\alpha| \leq 1$, considerăm şirurile $x_n = \dfrac{1}{\arcsin\alpha - 2n\pi} \nearrow 0$ şi $f(x_n) \to \alpha$, respectiv $y_n = \dfrac{1}{\arcsin\alpha + 2n\pi} \searrow 0$ şi $f(y_n) \to \alpha$. Conform T. 6.2.9, f are P.D.

b) Funcția $g: R \to R$, $g(x) = (x) = \begin{cases} x - k, & x \in \left[k, k + \dfrac{1}{2}\right] \\ (k+1) - x, & x \in \left(k + \dfrac{1}{2}, k+1\right) \end{cases}$ este continuă pe R, deci f este continuă pe R^*.

Atunci conform Corolarului 6.2.10 f are P.D. $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $x_n \in R$, $x_n \nearrow 0$ astfel încât $f(x_n) \to \alpha$ şi $(\exists)$ $y_n \in R$, $y_n \searrow 0$ astfel încât $f(y_n) \to \alpha$

Întrucât $\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $\forall\, x \in R^*$, rezultă că dacă $\alpha \notin \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ atunci $(\forall) x_n \nearrow 0$, $f(x_n) \not\to \alpha$ şi $(\forall) y_n \searrow 0$, $f(y_n) \not\to \alpha$.

Dacă $\alpha \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, considerăm şirurile $x_n = \dfrac{1}{\alpha - n} \nearrow 0$ şi $f(x_n) = (\alpha - n) = \alpha \to \alpha$, respective $y_n = \dfrac{1}{\alpha + n} \searrow 0$ şi $f(y_n) = (\alpha + n) = \alpha \to \alpha$. Conform T. 6.2.9, f are P.D.

6.2.14. Teoremă

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcţie derivabilă. Atunci funcţia f' are P.D.

Demonstraţie

Fie $a, b \in I$, $a < b$ şi λ cuprins între $f'(a)$ şi $f'(b)$ fixaţi. Presupunem $f'(a) < f'(b)$, deci $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Considerăm funcţia $\varphi : I \to R$, $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$. Evident φ este derivabilă şi avem $\varphi'(x) = f'(x) - \lambda$, $x \in I$. Deci $\varphi'(a) = f'(a) - \lambda < 0$ şi $\varphi'(b) = f'(b) - \lambda > 0$. Deoarece

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(a) < 0$, $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} = \varphi'(b) > 0$, rezultă că $(\exists)$ $c, d \in (a, b),\ c < d$ cu proprietăţile: $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} < 0$, $(\forall)\, x \in (a, c)$ şi

$\dfrac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} > 0$, $(\forall)\ x \in (d, b)$, deci $\varphi(x) < \varphi(a)$, $(\forall)\, x \in (a, c)$ şi $\varphi(x) < \varphi(b)$, $(\forall)\ x \in (d, b)$ (1)

Funcţia φ fiind continuă şi $[a, b]$ un interval compact, rezultă că φ îşi atinge minimul într-un punct $x_0 \in [a, b]$. Din (1) rezultă că $x_0 \neq a$ şi $x_0 \neq b$, deci $x_0 \in (a, b)$ şi deci $x_0 \in \overset{0}{I}$. Aşadar x_0 este un punct de minim local pentru φ, deci conform teoremei lui Fermat avem $\varphi'(x_0) = 0$, deci $f'(x_0) = \lambda$. Prin urmare f' are P.D.

6.2.15. Corolar

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcţie derivabilă cu proprietatea că $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in I$. Atunci *f* este strict monotonă.

Demonstraţie

Din Teorema 6.2.14 avem că f' are P.D., deci (P. 6.1.10) $f' > 0$ sau $f' < 0$ şi deci *f* este strict monotonă.

6.2.16. Observaţie

Rezultatul Teoremei 6.2.14 este deosebit de util în studiul primitivabilităţii funcţiilor (care se va studia în clasa a XII-a)

6.3. Păstrarea P.D. asupra funcției sumă, produs, cât, compunere a două funcții cu P.D.

6.3.1. Observație

Există funcții $f, g : R \to R$ care au P.D., pentru care funcția sumă $f + g$, produs $f \cdot g$, respectiv cât ${}^{f}\!/_{g}$ ($g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in R$) nu au P.D.

Demonstrație

a) Sumă

Într-adevăr, fie $f, g : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -\sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$

f şi *g* au P.D., dar $f + g : R \to R$, $(f+g)(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$ are o discontinuitate de speța I, deci nu are P.D.

b) Produs

Fie $f, g : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$.

f şi *g* au P.D., dar $f \cdot g : R \to R$, $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$ nu are PD întrucât

$f \cdot g$ este continuă pe R^*, $\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{x} \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ şi $(\forall)\, x_n \,\square\, 0$, $(f \cdot g)(x_n) \to 1$ şi $(\forall)\, y_n \,\square\, 0$, $(f \cdot g)(y_n) \to 1$

c) Cât

Fie $f, g : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} + 2, x \neq 0 \\ 2, \quad x = 0 \end{cases}$

f are P.D., *g* este continuă pe R^*, şi considerând şirurile $x_n = \dfrac{-1}{n\pi} \,\square\, 0$, $g(x_n) = 2 \to 2$ şi $y_n = \dfrac{1}{n\pi} \,\square\, 0$, $g(y_n) = 2 \to 2$ obținem (conform Corolarului 6.2.10) că *g* are P.D. Se observă că $g(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in R$

$\frac{f}{g}: R \to R$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}+2}, x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, \qquad x = 0 \end{cases}$ nu are P.D. întrucât $\frac{f}{g}$ este continuă pe

R^*, $\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}+1} = 1 - \dfrac{2}{\sin\frac{1}{x}+2} \in \left[-1, \frac{1}{3}\right]$ şi $(\forall)\, x_n \nearrow 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) \not\to \frac{1}{2} \notin \left[-1, \frac{1}{3}\right]$ şi

$(\forall)\, y_n \searrow 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)(y_n) \not\to \frac{1}{2}$.

Este de asemenea cunoscut următorul rezultat pe care îl vom prezenta aici fără demonstraţie :

6.3.2. Teoremă (Sierpinski)

Fie $f: R \to R$ o funcţie arbitrară. Atunci există $f_1, f_2 : R \to R$ două funcţii discontinue pe *R* şi care au P.D. astfel încât $f = f_1 + f_2$

6.3.3. Teoremă

Fie *A* şi $B \subseteq [a,b]$ două mulţimi finite disjuncte şi $f, g : [a,b] \to R$ două funcţii cu următoarele proprietăţi :

a) *f* este continuă pe $[a,b] \setminus A$ şi discontinuă pe *A* cu P.D.

b) *g* este continuă pe $[a,b] \setminus B$ şi discontinuă pe *B* cu P.D.

Atunci $f+g$ şi $f \cdot g$ au P.D.

Demonstraţie

$f+g$ şi $f \cdot g$ sunt continue pe $[a,b] \setminus (A \cup B)$. Fie $x_0 \in A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$.

Atunci $x_0 \in A \setminus B$ sau $x_0 \in B \setminus A$. Să presupunem că $x_0 \in A \setminus B$ şi $x_0 \in (a,b)$.

Atunci conform Corolarului 6.2.10 :

(i) $(\exists)$ $x_n \in [a,b]$, $x_n \nearrow x_0$ astfel încât $f(x_n) \to f(x_0)$

(ii) $(\exists)\, y_n \in [a,b], y_n \searrow y_0$ astfel încât $f(y_n) \to f(x_0)$

Avem: $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$ întrucât $f(x_n) \to f(x_0)$ şi *g* continuă în x_0, deci şi $g(x_n) \to g(x_0)$

Analog $(f+g)(y_n) \to (f+g)(x_0)$

Conform Corolarului 6.2.10 avem $(f+g)$ are P.D.

Analog se arată că $(f \cdot g)$ are P.D.

6.3.4. Corolar

Fie $A \subseteq [a,b]$ o mulțime finită și $f,g:[a,b] \to R$ două funcții cu următoarele proprietăți:
a) *f* continuă pe $[a,b]$
b) *g* continuă pe $[a,b] \setminus A$ și discontinuă pe A.
Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
1) *g* are P.D.
2) $f+g$ are P.D.
De asemenea 1) $\Rightarrow$ 3) și dacă în plus $f(x) \neq 0$, $(\forall)$ $x \in A$ atunci 1) este echivalentă cu 3)
3) $f \cdot g$ are P.D.

Demonstrație

1) $\Rightarrow$ 2) conform T 6.3.3
2) $\Rightarrow$ 1) *f* continuă pe $[a,b]$ atunci $(-f)$ este continuă pe $[a,b]$ și $f+g$ continuă pe $[a,b] \setminus A$ și are P.D., atunci $(-f)+(f+g)=g$ are P.D. (conform T 6.3.3)
1) $\Rightarrow$ 3) conform T 6.3.3
3) $\Rightarrow$ 1) *f* continuă pe $[a,b]$, $f(x) \neq 0$, $\forall$ $x \in A$, $f \cdot g$ continuă pe $[a,b] \setminus A$ și are P.D.
Fie $x_0 \in A$. Putem presupune că $x_0 \in (a,b)$. Atunci, conform Corolarului 6.2.10:
$(\exists) x_n \in [a,b]$, x_n □ x_0 astfel încât $(f \cdot g)(x_n) \to (f \cdot g)(x_0)$
$(\exists) y_n \in [a,b]$, y_n □ x_0 astfel încât $(f \cdot g)(y_n) \to (f \cdot g)(x_0)$
Întrucât $f(x_0) \neq 0$ și *f* continuă în x_0 rezultă că $(\exists)$ $V \in V(x_0)$ astfel încât $f(x) \neq 0$, $(\forall) x \in V$ și deci $(\exists)$N$\in$*N* astfel încât $(\forall)\, n \geq$N: $x_n \in V$, de unde $f(x_n) \neq 0$, $\forall n \geq$N

Avem $g(x_n) = \dfrac{(f \cdot g)(x_n)}{f(x_n)} \to \dfrac{(f \cdot g)(x_0)}{f(x_0)} = g(x_0)$

Analog se demonstrează că $g(y_n) \to g(x_0)$ și conform Corolarului 6.2.10 avem că *g* are P.D.

6.3.5. Propoziție

Fie $I,J \subseteq R$ două intervale și $f: I \to J$, $g: J \to R$ două funcții care au P.D. Atunci $g \circ f$ are P.D.

Demonstrație

Fie $J \subseteq I$ un interval, $(g \circ f)(I) = g(f(I)) = g(I') = I''$ unde I' și I'' sunt intervale întrucât *f*, respectiv *g* au P.D. Deci $g \circ f$ are P.D.

6.3.6. Corolar

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcție cu P.D. Atunci $|f|$ are P.D.

6.3.7. Corolar

Fie $I, J \subseteq R$ două intervale şi $f : I \to J$, $g : J \to R$ două funcții, una continuă şi cealaltă având P.D. Atunci $g \circ f$ are P.D.

Bibliografie

[1] Gh. Sirețchi, „Calcul diferențial şi integral”, vol. I şi II, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985

[2] Gh. Sirețchi, „Funcții cu Proprietatea lui Darboux”, Materiale pentru perfecționarea profesorilor de liceu, vol. IV (partea a II-a), Univ. Bucureşti, Fac. de Matematică, 1993

[3] W.W. Breckner, „Funcții cu Proprietatea lui Darboux”, Did. Matem. 1986-1987, 34-37

[4] Z. Finta, „Din nou despre Proprietatea lui Darboux”, Did. Matem. vol. 51/2000, 39-50

[5] I. Magdaş, „O condiție suficientă pentru ca suma (produsul) a două funcții să aibă Proprietatea lui Darboux”, Did. Matematicii, vol. 14/2000, 181-186

[6] O. Konnerth, „Greşeli tipice în învățarea analizei matematice”, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1982

Indicații şi relații: (6.4. – cls. XI – Analiză)

P. 6.4.1.

a) continuă $\Rightarrow$ are P.D.

b) continuă $\Rightarrow$ are P.D.

c) *f* are discontinuități de speța I $\Rightarrow$ *f* nu are P.D.

d) vezi exemplul 6.1.4. d) şi P. 6.4.5

e) *f* are P.D. $\Leftrightarrow$ $a \in [-1,1]$

f) *f* are P.D., $(\forall)$ $a \in R$ (*f* continuă pe $(0,\infty)$, $x_n = \dfrac{1}{\arcsin\dfrac{a}{2n\pi} + 2n\pi} \to 0$,

$f(x_n) \to a$)

g) f are P.D. $\Leftrightarrow$ $|a| \le |p|$
h) dacă $p > 0$, f are P.D. $\Leftrightarrow a = 0$
dacă $p = 0$, f are P.D. $\Leftrightarrow$ $a \in [-1,1]$
dacă $p < 0$, f are P.D. $(\forall)$ $a \in R$

i) $f = g \cdot h$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-2^x}, x \ne 0 \\ -\dfrac{1}{\ln 2}, \ x = 0 \end{cases}$ continuă, $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, x \ne 0 \\ -\ln 2 \cdot a, x = 0 \end{cases}$ continuă pe R^*, are P.D. $\Rightarrow f$ are P.D.

j) $f = g + h$, $g(x) = \begin{cases} e^{1-x}, x \ne 0 \\ e, \quad x = 0 \end{cases}$ continuă, $h(x) = \begin{cases} \cos\left|\dfrac{1}{x}\right|, \ x \ne 0 \\ a - e, \quad x = 0 \end{cases}$ continuă pe R^*

f are P.D. $\Leftrightarrow h$ are P.D. $\Leftrightarrow$ $|a - e| \le 1 \Leftrightarrow a \in [e-1, e+1]$

P. 6.4.2.
A: a,c,d,f,h,i,j
Contraexemple:

b) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x, \quad x \le 0 \\ x+1, x > 0 \end{cases}$

e) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x, \quad x \le 0 \\ -1-x, x > 0 \end{cases}$

g) $f : [0,2] \to R$, $f(x) = \begin{cases} x, \quad x \in [0,1) \\ 3 - x, \ x \in [1,2] \end{cases}$, $f([0,2]) = [0,2]$

P. 6.4.3.
$(\Rightarrow)$ $g(R) = g(R^*) \cup \{g(0)\} = [-1,1] \cup \{\alpha\} \ \Rightarrow |\alpha| \le 1$
$(\Leftarrow)$ Fie $I \subseteq R$ un interval fixat. Distingem următoarele cazuri:

1) $I \subseteq R_+$. Atunci $J := \left\{ \dfrac{1}{x}, x \in I \right\}$ este un interval şi avem $g(I) = f(J)$ şi întrucât $f(J)$ interval $\Rightarrow$ $g(I)$ interval

2) $0 \in I \subseteq R_+$ şi $I \ne \{0\}$. Atunci $(\exists) n_0 \ge 1$ cu $\left[0, \dfrac{1}{n_0}\right] \subseteq I$, $(\forall) n \ge n_0$, deci $g(I) = \{\alpha\} \cup f([n_0, \infty]) = \{\alpha\} \cup [-1,1] = [-1,1]$

3) $0 \in I \subseteq R_-^*$ analog 2)

4) $0 \in \overset{0}{I}$, folosim 2) şi 3)

P. 6.4.4.

g continuă pe R^*, $x=0$ este punct de discontinuitate de speța a doua.
Se consideră $I \subseteq R$ un interval compact. Dacă $I \subseteq R_+^*$ sau $I \subseteq R_-^*$, atunci $g(I)$ este un interval compact. Dacă $0 \in I$ şi $I \neq \{0\}$ se arată că $g(I) = [-1,1]$.
Într-adevăr, dacă $I \cap R_+^* \neq \emptyset$, $(\exists)\, n \in N$ par cu $\frac{1}{n} \in I$, deci $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \subseteq I$ şi deci

$[-1,1] \supseteq g(I) \supseteq g\left(\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) = f([n, n+1]) \supseteq [-1,1]$, etc.

P. 6.4.5.

$(\Rightarrow)$ Fie $x_0 \in I$ şi presupunem că $f(x_0) \neq g(x_0)$ de exemplu $f(x_0) < g(x_0)$ şi fie $\gamma = g(x_0) - f(x_0) > 0$. f, g continue în $x_0 \Rightarrow (\exists)\, \delta > 0$ astfel încât

$\left|f(x) - f(x_0)\right| < \frac{\gamma}{3}$ şi $\left|g(y) - g(x_0)\right| < \frac{\gamma}{3}$, $(\forall)$ $x, y \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) := J$

$h(J \cap Q) = X \subseteq \left(f(x_0) - \frac{\gamma}{3}, f(x_0) + \frac{\gamma}{3}\right)$;

$h(J \setminus Q) = Y \subseteq \left(g(x_0) - \frac{\gamma}{3}, g(x_0) + \frac{\gamma}{3}\right)$

Deci $h(J) = X \cup Y$ şi $X \cap Y = \emptyset$ $\Rightarrow$ $h(J)$ nu este un interval
$(\Leftarrow)$ dacă $f = g$, atunci $h = f = g$ continuă $\Rightarrow h$ are P.D.

P. 6.4.6.

Un calcul simplu arată că $f(x) = \begin{cases} a_n x + b_n, x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], n \in N^* \\ a, \qquad x = 0 \end{cases}$, unde

$a_n = (-1)^n (2n^2 + 4n + 1)$ şi $b_n = (-1)^{n+1}(2n+3)$

P. 6.4.7.

a) Fie $\varphi : [-1,1] \to R$, $\varphi(x) = x \arcsin x$. φ este continuă pe $[-1,1]$, strict crescătoare şi întrucât $\varphi(-1) = -\frac{\pi}{2}$; $\varphi(1) = \frac{\pi}{2}$ rezultă că există $b \in [-1,1]$ astfel încât $\varphi(b) = \pi a$.

Fie şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{\pi}{\arcsin b + 2n\pi}$ □ 0 şi $f(x_n) = a \to a$
b) se aplică Cor. 6.2.11

P. 6.4.8.

Se consideră restricția funcției *f* la $[0,1]$

P. 6.4.9.

Presupunem că există *f* cu P.D. care verifică $(f \circ f)(x) = -x \Rightarrow f$ injectivă $\Rightarrow f$ strict monotonă $\Rightarrow f \circ f$ strict crescătoare, contradicție. Generalizare: Fie $a > 0$ şi $b \in R$. Atunci nu există funcție cu P.D. $f : R \to R$ pentru care $(f \circ f)(x) + ax + b = 0$, $\forall x \in R$.

P. 6.4.10.

a) fie $u \in J$. Atunci $(\exists)\, a,b \in I$ astfel încât $a < b$ şi $u = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Din teorema lui Lagrange $(\exists)\, c \in (a,b)$ astfel încât $u = f'(c)$. Se arată că $(\forall)\, u,v \in J$, $u < v \Rightarrow (u,v) \subset J$.

b) din a) $\Rightarrow f'(I) \supset J$. Fie $x_0 = f'(c) \in f'(I)$. Atunci $x_0 = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

Dacă $(x_n)_n \subset I$, $x_n \neq c$, $x_n \to c$ atunci $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}$, deci x_0 este limita unui şir de puncte din *J*. Cum *J* este interval, atunci $f'(I)$ nu poate conține în plus față de *J* decât cel mult capetele lui *J*. În particular, rezultă că $f'(I)$ este un interval.

c) Fie $I_1 \subset I$ un interval şi $J_1 = \left\{ \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \Big/ a,b \in I_1, a < b \right\}$. Din demonstrațiile de la a), b) $\Rightarrow J_1$ este un interval şi deci $f'(I_1)$ este interval.

P. 6.4.11.

Dacă $0 \in I$ se demonstrează că $(a,b) \subseteq f(I) \subseteq [a,b]$

P. 6.4.12.

$f = g + (f - g)$. $f - g$ este continuă pe R^*, $(f - g)(0) = 0$ şi întrucât $\lim\limits_{x \to 0} [f(x) - g(x)] = 0$, rezultă că $(\forall)\, x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, $(f - g)(x_n) \to 0 = (f - g)(0)$, deci conform Cor. 6.2.10, $f - g$ are P.D. Atunci conform Cor. 6.3.4, *f* are P.D. $\Leftrightarrow$ *g* are P.D.

Probleme rezolvate

Să se arate că:

a) $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ \alpha, \quad x = 0 \end{cases}$, $\alpha \in R$ are P.D. $\Leftrightarrow$ $\alpha \in [0,1]$

b) $f:[0,\infty)\to R$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{2k}+1}{x^{k}}\sin\dfrac{1}{x^{k}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$, unde

c???? $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{|x|}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$ are P.D.

d) Nu există funcţii cu P.D. $f: R \to R$ astfel încât $(f \circ f)(x) = \frac{2x}{x^2+1}$,

$(\forall) x \in R$

Soluţii

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\begin{cases} \cos\frac{2}{x}, x \neq 0 \\ 1-2\alpha, x = 0 \end{cases} = g(x) + h(x)$, unde

$g(x) = \frac{1}{2}, (\forall) x \in R$ şi $h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\cos\frac{2}{x}, x \neq 0 \\ \frac{1-2\alpha}{2}, \quad x = 0 \end{cases}$

g este continuă şi *h* continuă pe R^*. Atunci, conform Cor. 6.3.4, *f* are P.D. $\Leftrightarrow$ *h* are P.D. (conform Cor. 6.3.4)

h are P.D. dacă şi numai dacă $\frac{-1+2\alpha}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, adică $\alpha \in [0,1]$

b) $f(x) = g(x) + h(x)$, unde $g(x) = \begin{cases} x^k \sin\frac{1}{x^k}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$ şi $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^k}\sin\frac{1}{x^k}, x \neq 0 \\ a, \quad x = 0 \end{cases}$

g este continuă pe $[0,\infty)$ şi h este continuă pe $(0,\infty)$ şi are P.D. întrucât

considerând şirul $x_n = \dfrac{1}{\left(\arcsin\dfrac{a}{2n\pi}+2n\pi\right)^{\frac{1}{k}}}$ □ 0 avem

$$h(x_n)=\left(\arcsin\frac{a}{2n\pi}+2n\pi\right)\frac{a}{2n\pi}=a+\frac{a}{2n\pi}\arcsin\frac{a}{2n\pi}\to a=h(0)$$

Aplicând Cor. 6.3.4, urmează că f are P.D.

c) $f=g\circ h$, unde $g:R\to R$, $g(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$ are P.D. şi $h:R\to R$,

$h(x)=|x|$ este continuă pe R, deci are P.D.

Conform Prop. 2.3.5 rezultă că $g\circ h=f$ are P.D.

d) Presupunem că există $f:R\to R$ o funcție cu P.D. astfel încât

$$(f\circ f)(x)=\frac{2x}{x^2+1},\ \forall\, x\in R$$

Considerăm restricția funcției $f\circ f$ la intervalul $[1,\infty)$

Avem $f\circ f\big/_{[1,\infty)}:[1,\infty)\to(0,1]$ este strict descrescătoare şi injectivă.

Fie $x,y\in[1,\infty)$, $f(x)=f(y)\Rightarrow f(f(x))=f(f(x))\Rightarrow(f\circ f)(x)=(f\circ f)(y)$

$\Rightarrow x=y$

Deci $f/_{[1,\infty)}$ este injectivă şi are P.D. Conform Cor. 6.1.7 rezultă că $f/_{[1,\infty)}$ este strict monotonă $\Rightarrow$ $f \circ f/_{[1,\infty)}$ este strict crescătoare, contradicție

7. Aplicații ale teoremelor fundamentale: Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy

Teoremele care fac obiectul acestei teme se dovedesc utile în demonstrarea unor inegalități, calcul de limite sau determinarea numărului de rădăcini reale ale unei ecuații. Deoarece aceste teoreme sunt cunoscute vom face câteva comentarii şi vom insista mai ales asupra tipurilor de probleme în care se aplică.

7.1. Teorema lui Fermat

7.1.1. Teoremă. (Fermat) Fie $a,b \in \mathbf{R}$, $a<b$ şi $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe (a,b). Dacă $x_0 \in (a,b)$ este un punct de extrem local al lui *f*, atunci $f'(x_0)=0$.

7.1.2. Observații. (i) Pentru ca *f* să admită în x_0 punct de extrem, anularea derivatei în x_0 nu este nici necesară şi nici suficientă. Într-adevăr $f(x)=|x|$ are în $x=0$ un minim cu toate că *f* nu este derivabilă în 0, iar $f(x)=x^3$ nu are extrem în $x=0$ cu toate că derivata se anulează în acest punct.

(ii) Condiția ca punctul de extrem local să se afle în interiorul intervalului (a,b) este esențială.

Într-adevăr, fie $f:[0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x)=x$. Evident $0,1 \in [0,1]$ şi sunt puncte de extrem local pentru *f*. Totuşi $f'(0)=f'(1)=1 \neq 0$. Pentru aflarea punctelor de extrem în care *f* nu este derivabilă se pot folosi uneori următoarele teoreme.

7.1.3. Teoremă. [4] Dacă $f:I \to \mathbf{R}$ are un punct de extrem x_0 interior intervalului *I* şi în acest punct funcția nu este derivabilă, dar are derivate laterale finite nenule sau infinite, atunci aceste derivate sunt de semne contrare.

Demonstrație. Să presupunem că x_0 este un punct de maxim relativ (cazul în care x_0 este punct de minim relativ tratându-se analog). Atunci $\exists V \in V(x_0)$ astfel încât $f(x) \leq f(x_0), (\forall) x \in V$. Întrucât $\exists f_s^{'}(x_0)$ şi $f_d^{'}(x_0) \in \overline{\mathbf{R}^*}$, rezultă că $f_s^{'}(x_0)=\lim\limits_{x \uparrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ şi $f_d^{'}(x_0)=\lim\limits_{x \downarrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$, deci $f_s^{'}(x_0) \cdot f_d^{'}(x_0) < 0$.

7.1.4. Teoremă. Dacă funcția $f: I \to \mathbf{R}$ are în x_0 interior intervalului *I*, derivate laterale finite nenule sau infinite, de semne contrare, atunci x_0 este un punct de extrem şi anume dacă $f_d^{'}(x_0) < 0$ atunci x_0 este un punct de maxim, iar dacă $f_s^{'}(x_0) < 0$ atunci x_0 este un punct de minim

7.1.5. Exemplu. Să se determine extremele funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

Soluție. *f* este continuă pe **R**, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2}}$, *f* este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{0,3\}$. $f_s^{'}(0) = +\infty$, $f_d^{'}(0) = -\infty$, deci $x = 0$ este punct de maxim conform Teoremei 7.1.4, iar $f'(3) = \infty$ deci 3 nu este punct de extrem conform Teoremei 7.1.3.

7.1.6. Problemă rezolvată. Arătați că există un singur număr real $a > 0$ cu proprietatea $a^x \geq x + 1, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

(W. Sierpinski)

Soluție. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a^x - x$. Se observă că $f(x) \geq f(0)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Deci 0 este punct de minim global (deci şi local) pentru funcția *f*. Aplicând teorema lui Fermat rezultă că $f'(0) = 0$. Dar $f'(x) = a^x \ln a - 1$, deci $f'(0) = \ln a - 1 = 0 \Rightarrow a = e$. Se poate demonstra uşor că $e^x \geq x + 1$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

7.1.7. Problemă rezolvată. Fie $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încât $a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x \geq n, (\forall) x \in \mathbf{R}$. Atunci $a_1 a_2 ... a_n = 1$.

(S. Rădulescu)

Soluție. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x$. Evident $f(0) = n$ şi *f* derivabilă. Deoarece $f(x) \geq f(0), (\forall) x \in \mathbf{R}$ avem că 0 este punct de minim pentru *f*. Atunci din teorema lui Fermat rezultă că $f'(0) = 0$. Însă $f'(x) = a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + ... + a_n^x \ln a_n$ deci

$$f'(0) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n = \ln(a_1 a_2 ... a_n)$$

iar $f'(0) = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 ... a_n = 1$.

7.2. Teorema lui Rolle

7.2.1. Teoremă (Rolle). Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ şi $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietățile:

1) *f* continuă pe $[a,b]$,

2) *f* derivabilă pe (a,b) şi

3) $f(a) = f(b)$.

Atunci există cel puțin un punct $x_0 \in (a,b)$ pentru care $f'(x_0)=0$.

7.2.2. Observații. (i) O funcție care satisface condițiile 1) şi 2) se numeşte funcție Rolle.

(ii) Dacă în particular $f(a)=f(b)=0$, teorema lui Rolle afirmă că între două rădăcini a şi b ale unei funcții derivabile există cel puțin o rădăcină a derivatei sale.

(iii) În teorema lui Rolle condiția *f* derivabilă pe (a,b) poate fi înlocuită cu una mai slabă, şi anume: "*f* are derivată pe (a,b)", întrucât demonstrația, în care se aplică teorema lui Fermat, nu foloseşte faptul că derivata ar fi finită.

(iv) Fiecare din condițiile teoremei lui Rolle este fundamentală, în sensul că renunțând doar la una din cele trei condiții nu mai rezultă concluzia. Într-adevăr

$f:[0,1]\to \mathbf{R}$, $f(x)=x$ îndeplineşte doar condițiile 1) şi 2) şi $f'(x)\neq 0,(\forall)x\in[0,1]$;

$f:[0,1]\to \mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1) \\ 0, & x=0 \end{cases}$ îndeplineşte numai condițiile 2) şi 3), *f* nu este continuă în $x=1$. Evident $f'(x)\neq 0$, $(\forall)x\in(0,1)$;

$f:[-1,1]\to \mathbf{R}$, $f(x)=|x|$ îndeplineşte numai condițiile 1) şi 3), *f* nu este derivabilă în $x=0$. Evident $f'(x)\neq 0,(\forall)x\in(-1,1)\setminus\{0\}$.

(v) Ipotezele teoremei lui Rolle sunt suficiente, dar nu şi necesare pentru ca derivata să aibă cel puțin o rădăcină. Există chiar funcții care nu satisfac nici una din condiții pe un anumit interval pe care totuşi derivata se anulează. Astfel pentru $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in \mathbf{Q}\cap[0,1] \\ 0, & x\in[0,1]\setminus \mathbf{Q} \end{cases}$ avem $f'(0)=0$.

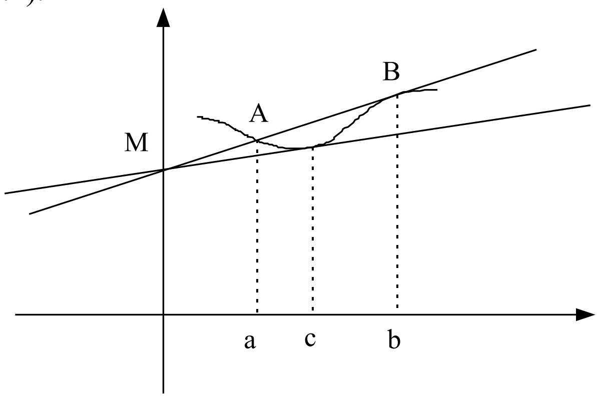
7.2.3. Teorema lui Pompeiu. Fie funcția Rolle $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ şi $0\notin[a,b]$. Atunci există un punct $c\in(a,b)$ astfel încât

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(c)-cf'(c).$$

Demonstrație. Se consideră funcția $F:[a,b]\to \mathbf{R}$, $F(x)=\dfrac{f(x)-\lambda}{x}$. Vom determina $\lambda\in \mathbf{R}$ astfel încât $F(a)=F(b)$. Se obține $\lambda=\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$. Aplicând teorema lui Rolle rezultă că există $c\in(a,b)$ astfel încât $F'(c)=0$ adică $cf'(c)-f(c)+\lambda=0$.

7.2.4. Interpretarea geometrică a teoremei lui Pompeiu. Dreapta *AB*, unde $A(a,f(a)),B(b,f(b))\in G_f$ întâlneşte axa *Oy* în punctul $M(0,\lambda)$, unde

$\lambda = \dfrac{af(b) - bf(a)}{a - b}$. Conform teoremei lui Pompeiu, există $c \in (a,b)$ astfel încât tangenta în punctul $C(c, f(c)) \in G_f$ la graficul funcţiei *f*, întâlneşte axa *Oy* în punctul *M* (fig. 7.1).



7.2.4. Problemă rezolvată. Fie $a_k, b_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{1,n}$. Să se demonstreze că există $x_0 \in (0,2\pi)$ astfel încât

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx_0 + b_k \cos kx_0) = 0.$$

Soluţie. Fie funcţia $f : [0,2\pi) \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (a_k \cos kx - b_k \sin kx).$$

Evident *f* este derivabilă pe $[0,2\pi]$ şi avem $f(0) = f(2\pi) = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} a_k \right)$ deci conform teoremei lui Rolle există $x_0 \in (0,2\pi)$ astfel încât $f'(x_0) = 0$. Dar $f'(x) = -\sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx)$, deci

$$-f'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx_0 + b_k \cos kx_0) = 0.$$

7.3. Teorema lui Lagrange

7.3.1. Teoremă (Lagrange). Fie $a,b \in \mathbf{R}$, $a<b$ şi funcţia $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ o funcţie Rolle. Atunci există un punct $c\in(a,b)$ astfel încât

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

7.3.2. Observaţii. (i) Teorema lui Lagrange rămâne adevărată dacă înlocuim condiţia 1) cu 1'): *f* are proprietatea lui Darboux, sau 2) cu 2'): funcţia *f* are derivată finită sau infinită pe (a,b).

(ii) Teorema lui Lagrange ne asigură de existenţa punctului intermediar *c*, fără nici o precizare asupra unicităţii.

(iii) Teorema lui Rolle este un caz particular al teoremei lui Lagrange, însă teorema lui Rolle nu poate fi considerată o consecinţă a teoremei lui Lagrange, deoarece în demonstraţia teoremei lui Lagrange se foloseşte chiar teorema lui Rolle.

(iv) Dacă în locul intervalului $[a,b]$ considerăm un interval de forma $[x_0,x_0+h]\subseteq[a,b]$, formula lui Lagrange poate fi scrisă astfel:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)\cdot h, \quad \text{unde} \quad \theta\in(0,1)$$

sau $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0+\theta h)$,

de unde apare şi denumirea de "teorema creşterilor finite" care se foloseşte adesea în loc de teorema lui Lagrange.

7.3.3. Problemă rezolvată. Să se arate că dacă *a* şi *b* sunt numere pozitive, $a<b$, iar $n\in\mathbf{N}$, atunci avem inegalităţile:

$$n(b-a)a^{n-1}<b^n-a^n<n(b-a)b^{n-1} \quad \text{(Cauchy)}$$

Soluţie. Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^n$. Conform teoremei lui Lagrange, $\exists c\in(a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\Leftrightarrow\frac{b^n-a^n}{b-a}=nc^{n-1}$$

Din $c\in(a,b)$ rezultă $na^{n-1}<nc^{n-1}<nb^{n-1}$, de unde obţinem:

$$na^{n-1}<\frac{b^n-a^n}{b-a}<nb^{n-1}.$$

7.3.4. Problemă rezolvată. Să se demonstreze că şirul cu termenul general $a_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n$ este convergent, iar limita sa este un număr cuprins între 0 şi 1. (Euler)

Soluție. Fie $f:[n,n+1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. Conform teoremei lui Lagrange, $\exists c_n\in(n,n+1)$ astfel încât

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}=f'(c_n)\Leftrightarrow \ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{c_n}$$

Din $c_n\in(n,n+1)$ rezultă $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{c_n}<\frac{1}{n}$, de unde obținem:

$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n} \qquad (*)$$

Dând valori lui n putem scrie:

$$\frac{1}{2}<\ln 2-\ln 1<\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{3}<\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}$$

....

$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$$

Însumând membru cu membru deducem:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \qquad (**)$$

Din prima parte a inegalităților (**) rezultă:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)<1,$$

adică $a_{n+1}<1,(\forall)n\in\mathbf{N}$.

Din a doua parte a inegalităților (**) rezultă

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)>\frac{1}{n+1}>0,$$

deci $a_{n+1}>0,(\forall)n\in\mathbf{N}$. În concluzie, $a_{n+1}\in(0,1),(\forall)n\in\mathbf{N}$, adică şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este mărginit. Rămâne de studiat monotonia:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n<0, \quad \text{conform (*)},$$

deci şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict descrescător.

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ fiind monoton şi mărginit, este convergent.

Din $a_n\in(0,1)$ şi $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ strict descrescător obținem

$$c\overset{not}{=}\lim_{n\to\infty}a_n\in[0,1).$$

Numărul c se numeşte constanta lui Euler.

7.4. Teorema lui Cauchy

7.4.1. Teoremă (Cauchy). Fie funcțiile Rolle $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ şi $g'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in (a,b)$. Atunci $g(a) \neq g(b)$ şi există $c \in (a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

7.4.2. Observație. Teorema lui Cauchy rămâne adevărată dacă se presupune că funcțiile *f* şi *g* au derivată finită sau infinită pe intervalul deschis (a,b) şi dacă în fiecare punct $x_0 \in (a,b)$ cel puțin una din derivatele $f'(x_0)$ şi $g'(x_0)$ este finită.

7.4.3. Interpretarea geometrică a teoremei lui Cauchy. Pentru a face această interpretare vom trece la alte notații. Să considerăm curba (C) dată de ecuațiile parametrice:

$$(C)\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

Aplicând teorema lui Cauchy funcțiilor φ şi ψ obținem:

$$\frac{\psi(\beta)-\psi(\alpha)}{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)} = \frac{\psi'(\gamma)}{\varphi'(\gamma)}, \quad \text{unde} \quad \gamma \in (\alpha, \beta).$$

Membrul stâng al formulei reprezintă coeficientul unghiular al coardei ce uneşte capetele curbei, iar membrul drept coeficientul unghiular al tangentei într-un punct interior corespunzător lui $t = \gamma$. Cu alte cuvinte coarda ce uneşte capetele curbei este paralelă cu o tangentă la curbă dusă într-un punct interior (fig. 7.2).

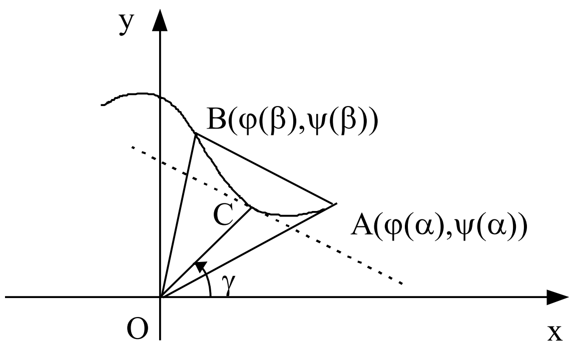


Fig. 7.2

7.4.4. Problemă rezolvată. Fie I un interval şi funcţiile $f,g:I\to\mathbf{R}$ derivabile, $g'(x)\neq 0,(\forall)x\in I$. Dacă funcţia $h:I\to\mathbf{R}$, $h=\dfrac{f'}{g'}$ este injectivă, atunci din $f(a)+f(b)=f(c)+f(d)$ şi $g(a)+g(b)=g(c)+g(d)$, cu $a,b,c,d\in I$, rezultă $a=c$ şi $b=d$ sau $a=d$ şi $b=c$.

(L. Panaitopol)

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea presupunem $a\le b$, $c\le d$ şi $g'(x)>0,(\forall)x\in I$. Dacă $a=c$ rezultă $g(b)=g(d)$ de unde $b=d$. Analog, pentru $b=d$ obţinem $a=c$. Tot fără restrângerea generalităii presupunem $a<c$, deci $g(a)<g(c)$ de unde $g(b)>g(d)$, adică $b>d$. Avem deci ordinea $a<c\le d<b$. Din relaţiile din enunţ rezultă

$$\frac{f(a)-f(c)}{g(a)-g(c)}=\frac{f(d)-f(b)}{g(d)-g(b)}.$$

Aplicând funcţiilor f şi g teorema lui Cauchy pe intervalele $[a,c]$ şi $[d,b]$ rezultă că există α şi β, $\alpha\in(a,c)$, $\beta\in(d,b)$ astfel încât

$$\frac{f(a)-f(c)}{g(a)-g(c)}=h(\alpha)\quad\text{şi}\quad\frac{f(d)-f(b)}{d-b}=h(\beta).$$

De aici rezultă $h(\alpha)=h(\beta)$ şi cum h este injectivă avem $\alpha=\beta$ ceea ce contrazice inegalitatea $\alpha<\beta$. Aşadar $a=c$ şi $b=d$. Presupunând iniţial $a\le b$ şi $d\le c$ va rezulta $a=d$ şi $b=c$.

7.4.5. Problemă rezolvată. Fie $ABCD$ un dreptunghi şi $\lambda\in\mathbf{R}$. Să se afle locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea:

$$MA^{\lambda}+MC^{\lambda}=MB^{\lambda}+MD^{\lambda} \tag{1}$$

Soluţie. Are loc relaţia

$$MA^{2}+MC^{2}=MB^{2}+MD^{2} \tag{2}$$

deci pentru $\lambda=2$ locul geometric este tot planul.

Dacă $\lambda\neq 2$ atunci din (1) şi (2), aplicând problema 7.4.4 funcţiilor $f,g:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{\lambda}$ şi $g(x)=x^{2}$, rezultă $MA=MB$ şi $MC=MD$ sau $MA=MD$ şi $MC=MB$. Deci locul geometric este reuniunea celor 2 mediatoare ale segmentelor $[AB]$ şi $[BC]$.

Bibliografie

[1] D. Buşneag, I. Maftei, *Teme pentru cercurile de matematică ale elevilor*, Ed. Scrisul Românesc, Craiova, 1983.
[2] V. Nicula, *Analiză matematică*, partea a II-a, Bucureşti, 1997.
[3] V. Săseanu, S. Bîrsan, *Teoremele de medie din analiza matematică*, Ed. Radical, 1997.
[4] I. Gligor, *Câteva observații asupra predării graficelor*, GMA 3/66, pg.95.
[5] Gh. Schneider, *Culegere de probleme de analiză matematică pentru clasele XI-XII*, Ed. Hyperion, 1997.

8. Funcții convexe

8.1. Noțiuni teoretice

8.1.1. Definiție. Mulțimea $A \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte **convexă** dacă $(\forall)\ x, y \in A$ şi $(\forall)\ t \in [0,1] \Rightarrow (1-t)x + ty \in A$, unde $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-\text{ori}}$.

Exemple.

1) $\mathbb{R}$ este mulțime convexă;
2) Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este interval, atunci *I* este mulțime convexă;
3) Mulțimea vidă este mulțime convexă;
4) $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ este mulțime convexă;
5) Mulțimea $A = [1,2) \bigcup (3,4)$ nu este mulțime convexă.

Observație. Intersecția a două mulțimi convexe este o mulțime convexă.

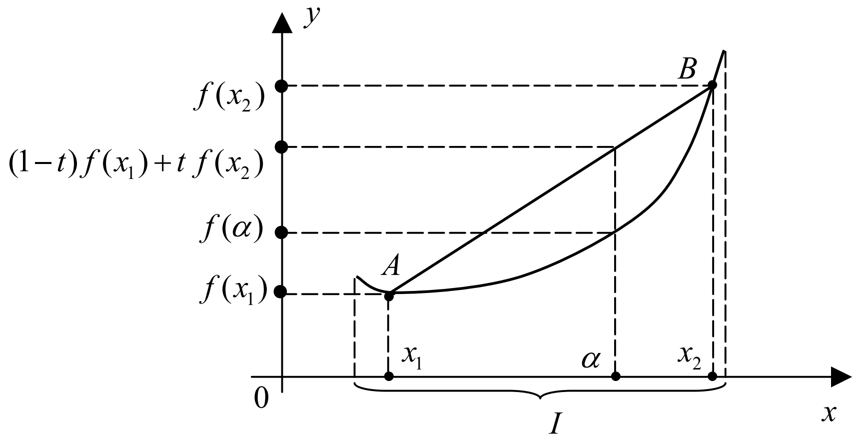
8.1.2. Definiție. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte **convexă pe *I*** dacă $(\forall)\ x_1, x_2 \in I$ şi $(\forall)\ t \in [0,1]$ avem:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + t\,f(x_2).$$

(1)

Dacă în (1) inegalitatea este strictă pentru $t \in (0,1)$ şi $x_1 \ne x_2$ vom spune că *f* este strict convexă pe *I*.

Interpretare geometrică.



$\alpha = (1-t)x_1 + t\,x_2$, $t \in [0,1]$

$A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $x_1 \ne x_2$.

Dacă $A, B \in G_f$, $\alpha \in [x_1, x_2]$, atunci ecuația coardei $[AB]$ este

$$y = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

şi ordonata punctului de abscisă α de pe această coardă va fi

$$\beta = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}[(1-t)x_1 + t\,x_2 - x_2] =$$
$$= f(x_2) + (1-t)\,[f(x_1) - f(x_2)] = (1-t)f(x_1) + t\,f(x_2),$$

ceea ce se poate scrie $f(\alpha) \le \beta$ şi înseamnă că graficul lui *f* este situat sub orice coardă care se obţine unind două puncte situate pe graficul funcţiei şi având abscisele aparţinând lui *I*.

8.1.3. Definiţie. Funcţia *f* se numeşte **concavă pe *I*** dacă –*f* este convexă pe *I*.

Observaţii. a) Dacă *f* este concavă pe *I*, atunci în (1) inegalitatea este inversă.

b) Funcţia *f* este strict concavă pe *I* dacă –*f* este strict convexă pe *I*.

8.1.4. Exemplu. Să se demonstreze, pe baza definiţiei că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $a > 0$, este convexă.

Demonstraţie. Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ oarecare. Fără să restrângem generalitatea putem presupune că $x_1 < x_2$. Atunci, $(\forall)$ $\alpha \in [x_1, x_2]$ există $t \in [0,1]$ astfel încât $\alpha = (1-t)x_1 + t\,x_2$, deoarece $[x_1, x_2]$ este un interval şi deci o mulţime convexă. Avem:

$$f(\alpha) = f((1-t)x_1 + tx_2) = ax_1^2 - 2atx_1^2 + t^2ax_1^2 + at^2x_2^2 +$$
$$+2atx_1x_2 - 2at^2x_1x_2 + bx_1 - btx_1 + btx_2 + c$$

Pe de altă parte

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) = ax_1^2 - atx_1^2 + bx_1 - btx_1 + c - ct +$$
$$+atx_2^2 + btx_2 + ct\ .$$

Făcând diferenţa obţinem:

$$f(\alpha) - [(1-t)f(x_1) + tf(x_2)] = -at(1-t)(x_2 - x_1)^2\,.$$

Cum $a > 0$ şi $t \in [0,1]$ rezultă că:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

adică *f* este convexă.

Observaţie. Dacă $a < 0$ funcţia *f* este concavă. Aceasta rezultă imediat din faptul că $-f(x) = -ax^2 - bx - c$ este convexă.

8.1.5. Teoremă. (criteriu de convexitate). *Fie* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbb{R}$ *o funcţie de două ori derivabilă pe I. Funcţia f este convexă pe I dacă şi numai dacă* $f''(x) \ge 0$ *pe I.*

Demonstrație. Vom demonstra că teorema este adevărată pe orice interval de forma $(a,b) \subseteq I$, $a < b$ şi în consecință pe *I*.

"$\Leftarrow$" Dacă $f''(x) \geq 0$ pe (*a*, *b*), atunci $f'(x)$ este crescătoare pe (*a*, *b*), deci $(\forall)$ $\alpha_1, \alpha_2 \in (a,b)$, $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow f'(\alpha_1) \leq f'(\alpha_2)$.

Fie $t \in [0,1]$ şi $x_0 = ta + (1-t)b$. Avem $a < x_0 < b$. Conform teoremei lui Lagrange există $\alpha_1 \in (a, x_0)$ şi $\alpha_2 \in (x_0, b)$ astfel încât

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = f'(\alpha_1) \text{ şi } \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = f'(\alpha_2).$$

Cum $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow f'(\alpha_1) \leq f'(\alpha_2)$, deci:

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}.$$

Înlocuind la numitori x_0 prin $ta + (1-t)b$ şi grupând convenabil se ajunge la:

$$f(x_0) \leq f(a)t + f(b)(t-1) \Leftrightarrow f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b),$$

adică *f* este convexă.

"$\Rightarrow$" Presupunem că *f* este convexă pe (*a*, *b*) şi fie trei numere reale oarecare $\alpha < \beta < \gamma$ din (*a*, *b*). Vom demonstra că $\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq \dfrac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$.

Fie $t = \dfrac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} \in (0,1)$. Avem $1 - t = \dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ şi din *f* convexă rezultă

$$f\left(\frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} \cdot \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \cdot \gamma\right) \leq \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} f(\alpha) + \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} f(\gamma).$$

După efectuarea calculelor avem:

$$f(\beta)(\gamma - \alpha) \leq f(\alpha)(\gamma - \beta) + f(\gamma)(\beta - \alpha)$$

sau

$$f(\beta)[(\gamma - \beta) + (\beta - \alpha)] \leq f(\alpha)(\gamma - \beta) + f(\gamma)(\beta - \alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [f(\beta) - f(\gamma)](\beta - \alpha) \leq [f(\alpha) - f(\beta)](\gamma - \beta) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} \geq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Pentru oricare $x_1, x_2 \in (a,b)$ astfel încât $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$ şi ținând cont de (1) avem:

$$\frac{f(x_2) - f(\alpha)}{x_2 - \alpha} \geq \frac{f(\alpha) - f(x_1)}{\alpha - x_1} \text{ şi } \frac{f(\beta) - f(x_2)}{\beta - x_2} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Dacă $\alpha \to x_1$ şi $\beta \to x_2$ obținem $f'(x_2) \geq f'(x_1)$ pentru că $f(x)$ este derivabilă şi cum alegerea lui x_1 şi x_2 este arbitrară, condiționată numai de $x_1 < x_2$, avem $f'(x_2) - f'(x_1) \geq 0$.

Împărțind cu $x_2 - x_1 > 0$, obținem

$$\frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 .$$

Trecând la limită avem:

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = f''(x_1) \geq 0$$

şi afirmația este demonstrată.

8.2. Inegalități

8.2.1. Inegalitatea lui Jensen. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcție şi* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Funcția f este convexă pe* $[a,b]$ *dacă şi numai dacă oricare ar fi punctele* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ *şi oricare ar fi numerele* $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ *cu* $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ *are loc inegalitatea*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

(1)

Demonstrație. Demonstrăm, mai întâi, că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ cu $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ şi $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, atunci $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i = [a,b]$.

Avem $a \leq x_1 \leq b, \ldots, a \leq x_n \leq b$. Înmulțind inegalitățile respective cu numerele pozitive $t_1, t_2, \ldots, t_n$ şi adunându-le obținem:

$$a(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) \leq t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n \leq b(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) .$$

Cum $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \Rightarrow a \leq \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \leq b$.

Demonstrăm necesitatea prin inducție;

Fie *f* convexă. Dacă $n = 1$, inegalitatea (1) este evidentă.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru n şi demonstrăm că este adevărată şi pentru $n+1$.

Luăm $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in [a,b]$ şi numerele $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1} \in [0,1]$ astfel încât $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$. Vom demonstra că

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i).$$

(2)

Conform ipotezei de inducție avem:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i + (t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1})\right) \leq$$

$$\leq t_1 f(x_1) + \ldots + t_{n-1} f(x_{n-1}) + (t_n + t_{n+1}) f\left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} \cdot x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} \cdot x_{n+1}\right),$$

(3)

deoarece $t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1} = (t_n + t_{n+1})\left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1}\right)$.

Datorită convexității lui *f* avem:

$$f\left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1}\right) \leq \frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} f(x_n) + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} f(x_{n+1})$$

şi înlocuind în (3) obținem inegalitatea (2). Suficiența este evidentă.

8.2.2. Teoremă. (Inegalitatea lui Hölder). *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \geq 0$, $p > 1$, $q > 1$ *şi* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *atunci:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

Demonstrație. Considerăm funcția $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Avem: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow f$ este strict concavă pe $(0,\infty)$.

Fie $a = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}$ şi $b = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Inegalitatea din enunț se scrie $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq ab$. Cum f este concavă pe $(0,\infty)$, rezultă din inegalitatea lui Jensen:

$$\ln\left(\frac{1}{p} \cdot \frac{a_i^p}{a^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{b_i^q}{b^q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln\left(\frac{a_i}{a}\right)^p + \frac{1}{q} \ln\left(\frac{b_i}{b}\right)^q,$$

sau

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{a_i^p}{a^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{b_i^q}{b^q}\geq\frac{a_ib_i}{ab},$$

echivalent cu:

$$a_ib_i\leq ab\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{a_i^p}{a^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{b_i^q}{b^q}\right)$$

şi însumând după i de la 1 la n obţinem:

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leq ab\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{a^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{\sum_{i=1}^n b_i^q}{b^q}\right),\ \text{sau}\ \sum_{i=1}^n a_ib_i\leq ab\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right),$$

dar $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ şi avem:

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$

Observaţie. Dacă $p=q=2$ inegalitatea lui Hölder se reduce la inegalitatea Cauchy–Buniakovski–Schwartz.

Dacă $a_1,a_2,\ldots,a_n\geq 0$, $b_1,b_2,\ldots,b_n\geq 0$, atunci

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

8.2.3. Inegalitatea mediilor. Dacă $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}_+^*$, atunci $\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

Demonstraţie. Considerăm funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$. Avem $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$, deci f este strict concavă pe $(0,\infty)$. Din inegalitatea lui Jensen avem:

$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ia_i\right)\geq\sum_{i=1}^n\lambda_if(a_i),$$

şi luând $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=\frac{1}{n}$ avem: $\ln\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{n}\geq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln a_i$, deci

$$\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Bibliografie

1. **Bătinețu D.M., Maftei I.V., Stancu Minasian I.M.,** *Exerciții şi probleme de analiză matematică pentru clasele a XI-a şi a XII-a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981
2. **Buşneag D., Maftei I.,** *Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor*, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1983
3. **Ganga M.,** *Elemente de analiză matematică*, Editura Mathpress, 1997
4. **Găină S.,** *Metoda funcțiilor convexe*, Gazeta Matematică nr.6, 1980
5. **Leonte A., Niculescu C.,** *Culegere de probleme de algebră şi analiză matematică*, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1981
6. **Nicolescu M.,** *Analiză matematică*, vol. II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958

Probleme rezolvate

R8.3.1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $f_i : I \to (0,\infty)$, $i = \overline{1,n}$, n funcţii pozitive şi concave iar $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Atunci rezultă că funcţia $f = f_1^{\alpha_1} \cdot f_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot f_n^{\alpha_n}$ este concavă.

Soluţie. Fie $x, y \in I$ arbitrar şi $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Cum f_i este concavă, rezultă că $f_i(\alpha x + \beta y) \geq \alpha \cdot f_i(x) + \beta \cdot f_i(y)$, $i = \overline{1,n}$. Obţinem:

$$\prod_{i=1}^{n} \left(f_i(\alpha x + \beta y) \right)^{\alpha_i} \geq \prod_{i=1}^{n} \left(\alpha f_i(x) + \beta \cdot f_i(y) \right)^{\alpha_i} . \tag{1}$$

Trebuie demonstrat că $f(\alpha x + \beta y) \geq \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y) \Leftrightarrow$

$$\prod_{i=1}^{n} \left(f_i(\alpha x + \beta y) \right)^{\alpha_i} \geq \alpha \cdot \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}(x) + \beta \cdot \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}(y) \tag{2}$$

Demonstrăm că

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\alpha f_i(x) + \beta f_i(y) \right)^{\alpha_i} \geq \alpha \cdot \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}(x) + \beta \cdot \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}(y) . \tag{3}$$

Notăm $f_i(x) = a_i$, $f_i(y) = b_i$. Relaţia (3) este echivalentă cu

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\alpha a_i + \beta b_i \right)^{\alpha_i} \geq \alpha \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i} + \beta \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i^{\alpha_i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \frac{a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{\alpha_n}}{(\alpha a_1 + \beta b_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\alpha a_n + \beta b_n)^{\alpha_n}} + \beta \cdot \frac{b_1^{\alpha_1} \cdot b_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot b_n^{\alpha_n}}{(\alpha a_1 + \beta b_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\alpha a_n + \beta b_n)^{\alpha_n}} \leq 1 \tag{4}$$

Folosind inegalitatea $x_1^{R_1} \cdot x_2^{R_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{R_n} \leq R_1 x_1 + R_2 x_2 + \ldots + R_n x_n$ pentru $x_i > 0$, $R_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} R_i = 1$ şi notând cu A membrul stâng al relaţiei (4), obţinem:

$$A \leq \alpha \cdot \left(\frac{a_1 \alpha_1}{\alpha a_1 + \beta b_1} + \ldots + \frac{a_n \alpha_n}{\alpha a_n + \beta b_n} \right) + \beta \cdot \left(\frac{b_1 \alpha_1}{\alpha a_1 + \beta b_1} + \ldots + \frac{b_n \alpha_n}{\alpha a_n + \beta b_n} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \leq \alpha_1 \cdot \frac{\alpha a_1 + \beta b_1}{\alpha a_1 + \beta b_1} + \ldots + \alpha_n \cdot \frac{\alpha a_n + \beta b_n}{\alpha a_n + \beta b_n} \Leftrightarrow A \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n = 1 .$$

Aşadar, inegalitatea (4) este adevărată, deci inegalitatea dată de relaţia (3) este adevărată. Din (1) şi (3) rezultă că relaţia (2) este adevărată, deci *f* este concavă.

Consecință. Dacă $f_i : I \to (0,\infty)$, $I \subset \mathbb{R}$ sunt funcții concave ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Atunci funcția $\sqrt[n]{f_1 f_2 \cdot \ldots \cdot f_n}$ este concavă.

R8.3.2. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ și $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ cu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Atunci $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}$.

Soluție. Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Avem $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, $(\forall)\ x > 0$, deci *f* este strict concavă pe $(0,\infty)$. Conform inegalității lui Jensen avem: $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$, echivalent cu $\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}\right)$ ceea ce este echivalent cu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}$.

Observație. Dacă în egalitatea precedentă facem $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ obținem $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$, adică inegalitatea mediilor.

R8.3.3. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, astfel încât $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ și $p \in \mathbb{N}^*$, atunci $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^p \geq \frac{(n^2+1)^p}{n^{p-1}}$.

Soluție. Considerăm funcția $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^p$. Avem

$$f''(x) = p(p-1)\left(x + \frac{1}{x}\right)^{p-2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{2p}{x^3}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{p-1} > 0,$$

$(\forall)\ x \in (0,\infty)$, deci *f* este strict convexă pe $(0,\infty)$.
Din inegalitatea lui Jensen avem:

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\,[\,f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)]$$

și ținând cont că $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \Rightarrow nf\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} f(a_i)$. Avem

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(n+\frac{1}{n}\right)^p=\frac{(n^2+1)^p}{n^p} \text{ şi } \sum_{i=1}^n f(a_i)=\sum_{i=1}^n\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^p,$$

adică avem:

$$\frac{(n^2+1)^p}{n^{p-1}}\le\sum_{i=1}^n\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^p.$$

R8.3.4. Dacă $x_1,x_2,\dots,x_n\in(0,1)$ şi $\sum_{i=1}^n x_i=1$, atunci $\sum_{i=1}^n\frac{1}{1-x_i}\ge\frac{n^2}{n-1}$.

Soluţie. Fie funcţia $f:(0,1)\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

Deoarece $f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}>0$, $(\forall)\ x\in(0,1)$, rezultă că *f* este strict convexă pe $(0,1)$.

Luând $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=\frac{1}{n}$ avem conform inegalităţii lui Jensen $f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)$, deci $\frac{n^2}{n-1}\le\sum_{i-1}^n\frac{1}{1-x_i}$. Cum *f* este strict convexă, relaţia din enunţ devine egalitate dacă şi numai dacă $x_1=x_2=\dots=x_n=\frac{1}{n}$.

R8.3.5. Dacă $a,b,x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}_+^*$ şi $\sum_{i=1}^n x_i=1$, atunci

$$\prod_{i=1}^n\left(a+\frac{b}{x_i}\right)\ge(a+nb)^n.$$

Soluţie. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(a+\frac{b}{x}\right)$. Deoarece $f''(x)=\frac{2abx+b^2}{(ax^2+bx)^2}>0$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}_+^*$, rezultă că *f* este strict convexă pe $(0,\infty)$.

Luând $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=\frac{1}{n}$ avem:

$$\ln(a+nb)\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln\left(a+\frac{b}{x_i}\right)\Leftrightarrow(a+nb)^n\le\prod_{i=1}^n\left(a+\frac{b}{x_i}\right).$$

Egalitatea se realizează dacă şi numai dacă $x_1=x_2=\dots=x_n=\frac{1}{n}$.

R8.3.6. Dacă $A_1A_2\dots A_n$ este poligon convex, atunci $\sum_{k=1}^{n}\sin^{\alpha} A_k \le n\sin^{\alpha}\frac{2\pi}{n}$ $\alpha \in (0,1)$.

Soluție. Fie $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to \mathbb{R}$, $f(x)=\sin^{\alpha} x$, f este concavă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
Rezultă din inegalitatea lui Jensen că:

$$\sin^{\alpha}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k\right)\ge \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^{\alpha} A_k \text{, dar } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{\pi}{n}(n-2)=\pi-\frac{2\pi}{n}$$

şi cum $\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)=\sin\frac{2\pi}{n}$, avem

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^{\alpha} A_k \le n\sin^{\alpha}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k\right)=n\sin^{\alpha}\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)=n\sin^{\alpha}\frac{2\pi}{n},$$

deci inegalitatea din enunț.

R8.3.7. Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ şi de două ori derivabilă pe (a,b) şi astfel încât $f''(x)>0$, $(\forall)\ x\in(a,b)$. Să se arate că $(\forall)\ \alpha\in(a,b)$ tangenta la graficul lui f în punctul $(\alpha, f(\alpha))$ este sub graficul lui f.

Soluție. Cum $f''>0$ pe $(a,b)\Rightarrow f'$ este crescătoare pe (a,b). Ecuația tangentei la grafic în punctul $(\alpha, f(\alpha))$ este $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$, adică $y=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul (α,x), $x>\alpha$, obținem

$f(x)=f(\alpha)+f'(c)(x-\alpha)$ cu $\alpha<c<x$, şi cum

$f'(c)>f'(\alpha)\Rightarrow f(x)>y$.

Pentru cazul $x<\alpha$ se raționează analog.

9. Polinoamele Taylor asociate unor funcții

9.1. Formula lui Taylor şi polinoamele Taylor ale funcțiilor elementare

În jurul unui punct o funcție derivabilă poate fi aproximată printr-o funcție de gradul întâi. Ne punem în continuare problema aproximării unei funcții printr-un polinom de grad superior.

9.1.1. Fie $D \subset \mathbb{R}$ o submulțime a lui $\mathbb{R}$, $x_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de n ori ($n \in \mathbb{N}^*$) în punctul x_0. Funcția polinomială $T_n f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$ prin

$$(T_n f)(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

se numeşte **polinomul lui Taylor de grad *n*** ataşat funcției f şi punctului x_0, iar funcția $r_n f : D \to \mathbb{R}$ definită prin

$$(r_n f)(x) = f(x) - (T_n f)(x), \ (\forall)\ x \in D,$$

se numeşte **restul Taylor de ordinul *n*** ataşat funcției f şi punctului x_0.

Orice egalitate de forma $f = T_n f + r_n f$, unde pentru $r_n f$ este dată o formulă de calcul, se numeşte **formulă Taylor** de ordinul n corespunzător funcției f şi punctului x_0.

9.1.2. Exemplu. Pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, polinomul lui Taylor de grad n ataşat funcției f şi punctului $x_0 = 0$ este

$$(T_n f)(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, \ (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$

9.1.3. Exemplu. Pentru funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, polinomul lui Taylor de gradul $2n-1$ ataşat funcției g şi punctului $x_0 = 0$ este

$$(T_n g)(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \ (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$

9.1.4. Exemplu. Pentru funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, polinomul lui Taylor de ordinul $2n-2$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) ataşat funcției h şi punctului $x_0 = 0$ este

$$(T_n h)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}.$$

9.1.5. Exemplu. Pentru funcția $u : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $u(x) = \ln(x+1)$, $(\forall)\ x \in (-1, \infty)$, avem

$u^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot \dfrac{(k-1)!}{(x+1)^k}$, $(\forall)\ x \in (-1,\infty)$ şi $k \in \mathbb{N}^*$, polinomul lui Taylor de grad n este

$$(T_n u)(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n},\ (\forall)\, x \in (-1,\infty).$$

9.1.6. Exemplu. Pentru funcția $f:(-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha$, pentru orice $x \in (-1,\infty)$ şi $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, polinomul lui Taylor de grad n este

$$(T_n f)(x) = 1 + \frac{\alpha}{1!} \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n,$$

deoarece avem $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, $(\forall)\ x > -1$ şi $(\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$.

Convenim să notăm $\dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ şi $\dbinom{\alpha}{0} = 1$. Cu această notație avem

$$(T_n f)(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} \cdot x + \binom{\alpha}{2} \cdot x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} \cdot x^n.$$

Funcția $f:(-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha$ se numeşte **funcție binomială de exponent α.**

9.1.7. Exemplu. Pentru funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ (cosinus hiperbolic), polinomul lui Taylor de grad $2n$ este:

$$(T_n f)(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

9.1.8. Exemplu. Pentru funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ (sinus hiperbolic), polinomul lui Taylor de grad $2n-1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, este

$$(T_n f)(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Facem observația că polinoamele de la ultimele două exemple pot fi obținute utilizând Exemplul 9.1.2.

9.1.9. Definiție. Fie A o mulțime nevidă din $\mathbb{R}$ şi funcțiile $f_n : A \to \mathbb{R}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$. Spunem că şirul $(f_n)_{n\ge 0}$ este **punctul convergent** şi se notează $f_n \xrightarrow{\text{P.C.}} f$ dacă pentru orice $x_0 \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$. Şirul $(f_n)_{n\ge 0}$ se zice că este **uniform convergent** pe A către funcția f şi se notează $f_n \xrightarrow{\text{U.C.}} f$, dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0\ \ \exists\, N(\varepsilon)$ natural astfel încât $(\forall)\ n \geq N(\varepsilon)$ să avem $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$, pentru orice $x \in A$.

9.1.10. Observație. Fie A o mulțime nevidă, $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcții definite pe A şi cu valori în $\mathbb{R}$ iar

$$s_n = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}.$$

Dacă şirul de funcții $(s_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent pe A către funcția s ($\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x),\ (\forall)\ x \in A$), convenim să facem notația $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $(\forall)\ x \in A$. Aceasta se numeşte **dezvoltarea în serie a funcției *s***.

Se poate demonstra că:

a) $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!}, (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) $\cos x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2}}{(2n-2)!},\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!},\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n},\ (\forall)\ x \in (-1,1]$.

e) $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n,\ (\forall)\ x \in (-1,1),\ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$.

f) $\operatorname{ch} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!},\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

g) $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

9.1.11. Observație. Polinomul lui Taylor de grad n ataşat funcției f şi punctului x_0, coincide în x_0 atât cu funcția f cât şi cu derivatele ei până la ordinul n.

Demonstrație. Evident, $T_n f$ este o funcție indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$(T_n f)'(x) = f'(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(x_0);$$

$$(T_n f)''(x) = f''(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} \cdot f^{(n)}(x_0)\,;$$

....

$$(T_n f)^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f^{(n)}(x_0)\,;$$

$$(T_n f)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0)\,;$$

$(T_n f)^{(k)}(x) = 0$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n+1$.

De aici deducem că

$$(T_n f)(x) = f(x_0),\ (T_n f)'(x_0) = f'(x_0), \ldots, (T_n f)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,.$$

Cu aceasta demonstrația este încheiată.

9.1.12. Teoremă. *Fie* $D \subset \mathbb{R}$ *un interval,* $x_0 \in D$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcție derivabilă de n ori* $(n \in \mathbb{N}^*)$ *în punctul* x_0. *Atunci avem*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(r_n f)(x)}{(x-x_0)^n} = 0\,.$$

Demonstrație. Deoarece f şi $T_n f$ sunt derivabile de n ori în x_0 rezultă că şi restul $r_n f = f - T_n f$ este o funcție derivabilă de n ori în x_0 şi

$$(r_n f)(x_0) = 0,\ (r_n f)'(x_0) = 0, \ldots, (r_n f)^{(n)}(x_0) = 0\,.$$

Aplicând de $n-1$ ori regula lui L'Hôpital şi ținând seama că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = f^{(n)}(x_0)\,,$$

obținem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(r_n f)(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (T_n f)(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - (T_n f)'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ldots =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - (T_n f)^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!\,(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right] = 0\,.$$

9.1.13. Observație. Dacă notăm cu $\alpha_n f : D \to \mathbb{R}$ funcția dată prin

$$(\alpha_n f)(x) = \begin{cases} \dfrac{(r_n f)(x)}{(x-x_0)^n}, & x \in D \setminus \{x_0\} \\ 0 & , \ x = 0, \end{cases}$$

atunci din Teorema 9.1.12 rezultă că funcția $\alpha_n f$ este continuă în x_0.

Aşadar are loc teorema

9.1.14. Teoremă. (Teorema lui Taylor-Young). *Fie* $D \subset \mathbb{R}$ *un interval,* $x_0 \in D$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcţie. Dacă funcţia f este derivabilă de n ori în punctul* x_0, *atunci există o funcţie* $\alpha_n f : D \to \mathbb{R}$ *care satisface următoarele proprietăţi:*

a) $(\alpha_n f)(x_0) = 0$.

b) Funcţia $\alpha_n f$ *este continuă în punctul* x_0.

c) Pentru orice $x \in D$ *are loc egalitatea*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \cdot (\alpha_n f)(x).$$

Vom deduce, în continuare, o formulă pentru calculul restului $r_n f$ al formulei Taylor.

Fie $D \subset \mathbb{R}$ interval, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de $(n+1)$ ori pe *D*, $p \in \mathbb{N}^*$ şi *x* şi x_0 două puncte distincte din *D*. Fie $k \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^p k$$

Funcţia $\varphi : D \to \mathbb{R}$, definită pentru orice $t \in D$ prin

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n + (x - t)^p \cdot k,$$

este derivabilă pe *D* ca şi sumă de funcţii derivabile.

Deoarece $\varphi(x_0) = f(x) = \varphi(x)$, aplicând teorema lui Rolle funcţiei φ pe intervalul $[x_0, x]$ sau $[x, x_0]$, rezultă că există un punct *c* cuprins strict între x_0 şi *x* astfel încât $\varphi'(c) = 0$. Dar

$$\varphi'(t) = f'(t) - f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \frac{(x - t)}{1!} f''(t) + \frac{(x - t)^2}{2!} f'''(t) - \ldots -$$

$$- \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) + \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - p \cdot (x - t)^{p-1} \cdot k =$$

$$= \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - p(x - t)^{p-1} \cdot k, \ (\forall)\ t \in D.$$

Atunci egalitatea $\varphi'(c) = 0$ devine $\frac{(x - c)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) = p(x - c)^{p-1} \cdot k$, de unde obţinem:

$$k = \frac{(x - c)^{n-p+1}}{n! \cdot p} \cdot f^{(n+1)}(c).$$

De aici se obține că restul $r_n f$ are forma

$$(r_n f)(x) = \frac{(x-x_0)^p \cdot (x-c)^{n-p+1}}{n! \cdot p} \cdot f^{(n+1)}(c).$$

În consecință, se obține teorema

9.1.15. Teoremă. (Teorema lui Taylor). *Fie $D \subset \mathbb{R}$ un interval, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție de $(n+1)$ ori derivabilă pe D şi $x_0 \in D$. Atunci pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in D \setminus \{x_0\}$, există cel puțin un punct c cuprins strict între x şi x_0 astfel încât*

$$(r_n f)(x) = \frac{(x-x_0)^p \cdot (x-c)^{n-p+1}}{n! \cdot p} \cdot f^{(n+1)}(c).$$

(1)

*Restul scris sub forma (1) se numeşte **restul lui Schlömilch – Roche.***

*Luând $p = 1$ obținem **restul lui Cauchy**:*

$$(r_n f)(x) = \frac{(x-x_0)(x-c)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(c).$$

(2)

*Luând $p = n+1$, obținem **restul lui Lagrange**:*

$$(r_n f)(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c).$$

(3)

9.1.16. Observație. Deoarece $c \in (x_0, x)$ sau $c \in (x, x_0)$, notând $\theta = \frac{c-x_0}{x-x_0}$ obținem că $\theta \in (0,1)$ şi $c = x_0 + \theta(x-x_0)$. Atunci restul $r_n f$ se poate exprima şi în felul următor:

$$(r_n f)(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1} \cdot (1-\theta)^{n-p+1}}{n! \cdot p} \cdot f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0));$$

(Schlömilch – Roche)

$$(r_n f)(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1} \cdot (1-\theta)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0));$$

(Cauchy)

$$(r_n f)(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)).$$

(Lagrange)

9.1.17. Definiție. Formula lui Taylor de ordin n corespunzătoare funcției f şi punctului $x_0 = 0$, cu restul lui Lagrange, se numeşte **formula lui Mac Laurin**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1},$$

unde $\theta \in (0,1)$.

9.1.18. Exemplu. Pentru funcțiile f, g, h şi u din exemplele 9.1.2–9.1.4, formula lui Mac Laurin se scrie:

1) $f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0,1)$;

2) $g(x) = \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x$
, $x \in \mathbb{R}$ şi $\theta \in (0,1)$;

3) $h(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos\theta x,$
$x \in \mathbb{R}$ şi $\theta \in (0,1)$;

4) $u(x) = \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$,
$x > -1$ şi $\theta \in (0,1)$.

9.1.19. Exemplu. Pentru funcția $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha$, $(\forall)$ $x > -1$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, formula lui Mac Laurin este:

$$f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \text{ unde } \theta \in (0,1).$$

Demonstrație. Funcția f este indefinit derivabilă pe $(-1,\infty)$ şi avem
$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$; $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$; $f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$
şi prin inducție matematică se obține

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},\ k \in \mathbb{N}^*.$$

În consecință, obținem

$$f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}.$$

9.1.20. Propoziție. Avem inegalitățile:

a) $e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $(\forall)\ x > 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} < e^x < 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(\forall)\ x < 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$;

c) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} < \sin x <$

$< x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)!}$, $(\forall)\ x > 0$ şi $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ impar.

d) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} < \cos x <$

$< 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^*$ şi $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ impar.

e) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots +$

$+ \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} + \frac{(-1)^{n+2} \cdot x^{n+1}}{n+1}$, $(\forall)\ x > 0$ şi $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ par.

Demonstrație. Inegalitățile date se arată utilizând formula lui Taylor cu restul Lagrange pentru funcțiile sugerate de fiecare inegalitate. Să justificăm, spre exemplu b). Avem

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x},\ (\forall)\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^* \text{ şi } \theta \in (0,1).$$

Atunci

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} < e^x < 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{x^{2n}}{(2n)!} e^{\theta \cdot x} < \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^{2n}}{(2n)!} e^{\theta \cdot x} > 0 \ \text{(adevărat)} \\ \frac{x^{2n}}{(2n)!} e^{\theta \cdot x} < \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{cases} \Leftrightarrow e^{\theta \cdot x} < 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \theta \cdot x < 0$, relație adevărată. Aşadar, inegalitatea de la b) este adevărată.

9.1.21. Consecință. Avem inegalitățile:

a) $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$, $(\forall)\ x>0$;

b) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, $(\forall)\ x>0$.

Demonstrație. Sunt cazuri particulare ale inegalităților de la Propoziția 9.1.20.

Bibliografie

1. **Dorin Andreica, Dorel I.Duca, Ioana Pop, Ioan Purdea,** *Matematica de bază*, Editura Studium, Cluj-Napoca, 2000
2. **Marius Burtea, Georgeta Burtea,** *Elemente de analiză matematică*, Editura Carminis, Pitești
3. **Paul Flondor, Octavian Stănăşilă,** *Lecții de analiză matematică*, Editura All, Bucureşti, 1993
4. **Kolumbán Iosif, Angela Vasiu, Paula Ciceo, Mărcuş Andrei,** *Culegere de probleme de analiză matematică, geometrie şi algebră*, Universitatea din Cluj-Napoca, 1988
5. **Adrian Muscalu,** Articolul: *Dezvoltarea în serie Taylor şi aplicații*, G.M. 4/2001
6. **Gheorghe Sireţchi,** *Calcul diferențial şi integral*, vol.2, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985

Probleme rezolvate

R9.2.1. Să se arate că şirul $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este convergent şi să se afle limita sa.

Soluție. Pentru funcția $u:(-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $u(x) = \ln(1+x)$, $(\forall)\ x > -1$, utilizăm formula lui Mac Laurin şi obținem

$$u(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\ x > -1$$

şi $\theta \in (0,1)$. Pentru $x = 1$ obținem: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}$. De aici obținem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\ln 2 - \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}\right) = \ln 2 .$$

R9.2.2. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție de trei ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu proprietatea că $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ şi $\lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0$. Să se arate că $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ şi $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$.

Soluție. Cu formula lui Taylor obținem:

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{f''(x)}{2!} + \frac{f'''(a)}{3!},\ \text{unde } a \in (x, x+1)$$

(1)

şi

$$f(x+2) = f(x) + 2\cdot f'(x) + 2^2 \cdot \frac{f''(x)}{2!} + 2^3 \cdot \frac{f'''(b)}{3!}\quad \text{unde}\quad b \in (x, x+2)$$

(2)

Deoarece pentru $x \to \infty$ avem $a \to \infty$ şi $b \to \infty$, din relațiile (1) şi (2) obținem:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f'(x) + \frac{f''(x)}{2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(f(x+1) - f(x) - \frac{1}{3!}f'''(b)\right) \overset{\text{ip.}}{=} c - c - 0 = 0;$$

(1')

$$\lim_{x\to\infty}(2f'(x) + 2f''(x)) = \lim_{x\to\infty}\left(f(x+2) - f(x) - \frac{8}{3!}f'''(b)\right) \overset{\text{ip.}}{=} c - c - 0 = 0;$$

Utilizând ultimele două relații avem:

$$\lim_{x\to\infty} f''(x) = \lim_{x\to\infty}\left[(2f'(x) + 2f''(x)) - 2\left(f'(x) + \frac{1}{2}f''(x)\right)\right] = 0 - 2\cdot 0 = 0$$

şi apoi din (1') rezultă că $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

R9.2.3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi cu derivata a doua continuă astfel încât

$$f(x+y)\cdot f(x-y)\le f^2(x),\ (\forall)\ x,y\in\mathbb{R}.$$

Arătaţi că

$$f(x)\cdot f''(x)\le f'^2(x),\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

Soluţie. Aplicând formula lui Taylor obţinem:

$$f(x+y)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\cdot y+\frac{f''(c_1)}{2!}\cdot y^2,\ c_1\in(x,x+y);$$

$$f(x-y)=f(x)-\frac{f'(x)}{1!}\cdot y+\frac{f''(c_2)}{2!}\cdot y^2,\ c_2\in(x-y,y).$$

Folosind relaţia din ipoteză obţinem:

$$f^2(x)-y^2f'^2(x)+\frac{y^2}{2}\big(f(x)-yf'(x)\big)\big(f''(c_1)+f''(c_2)\big)+\frac{y^4}{4}f''(c_1)f''(c_2)\le f^2(x)$$

de unde prin reducerea termenilor şi împărţirea la y^2 avem:

$$-f'^2(x)+\big(f(x)-yf'(x)\big)\big(f''(c_1)+f''(c_2)\big)+\frac{y^2}{2}f''(c_1)\cdot f''(c_2)\le 0.$$

Pentru $y\to 0$ avem că $c_1\to x$ şi $c_2\to x$, şi relaţia devine:

$$-f'^2(x)+f''(x)\cdot f(x)\le 0\Rightarrow f(x)\cdot f''(x)\le f'^2(x).$$

R9.2.4. Să se calculeze $\sqrt{e}$ cu cinci zecimale exacte.

Soluţie. Scriem formula lui Taylor cu restul lui Lagrange şi obţinem:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^{\theta x},\ \theta\in(0,1).$$

De aici rezultă:

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{1!\cdot 2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!\cdot 2^{n-1}}+\frac{1}{n!\cdot 2^n}\cdot e^{\frac{\theta}{2}}.$$

Determinăm pe *n* astfel încât

$$r_n=\frac{1}{n!\cdot 2^n}\cdot e^{\frac{\theta}{2}}<\frac{1}{10^6}.$$

Avem:

$$r_n<\frac{1}{n!\cdot 2^n}\cdot e^{\frac{1}{2}}<\frac{\sqrt{3}}{n!\cdot 2^n}<\frac{1}{n!\cdot 2^{n-1}}\ \text{şi}\ \frac{1}{n!\cdot 2^{n-1}}<\frac{1}{10^6}\ \text{pentru}\ n\ge 8.$$

Prin urmare,

$$\sqrt{e} \approx 1+\frac{1}{1!\cdot 2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{7!\cdot 2^7} \approx 1+0,5+0,125+0,0208333+$$
$$+0,0026041+0,0002604+0,0000271+0,0000015=1,6487345$$

.

R9.2.5. Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Soluție. Avem :

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+r_1(x) \text{ cu } \lim_{x\to 0}\frac{r_1(x)}{x^4}=0 \text{ şi}$$
$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{1!\cdot 2}+\frac{x^4}{2!\cdot 4}+r_2(x) \text{ cu } \lim_{x\to 0}\frac{r_2(x)}{x^4}=0.$$

Atunci avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2!\cdot 4}\right)+r_1(x)-r_2(x)}{x^4}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2!\cdot 4}\right)+\frac{r_1(x)}{x^4}-\frac{r_2(x)}{x^4}\right]=\frac{1}{24}-\frac{1}{8}=-\frac{1}{12}.$$

R9.2.6. Să se arate că: $e^x>1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$, $\big((\forall)\ x\in(0,\infty)\big)$ şi $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție. Scriind formula lui Taylor cu restul lui Lagrange, obținem:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\theta x},\ \theta\in(0,1).$$

De aici, utilizând faptul că $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\theta x}>0$, $(\forall)\ x>0$ şi $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$, obținem concluzia.

R9.2.7. Demonstrați inegalitatea $e^n>\dfrac{(n+1)^n}{n!}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție. Procedând ca şi la problema anterioară, avem:

$$e^n=1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n}{n!}\cdot e^{\theta n},\ \theta\in(0,1).$$

Deoarece $\dfrac{1}{n!},\dfrac{1}{(n-1)!},\ldots,\dfrac{1}{1!}$ sunt mai mici sau egale cu 1 şi $e^{\theta n}>1$, avem:

$$e^n > 1\cdot\frac{1}{n!}+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{(n-1)!}+\ldots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{1!}+\frac{n^n}{n!}=\frac{1}{n!}\left(1+n\cdot n+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot n^2+\ldots+n^n\right)=$$

$$=\frac{1}{n!}(1+n)^n .$$

R9.2.8. Să se arate că: $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin(2\pi e\cdot n!)=2\pi$.

Soluție. Avem :

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{e^\theta}{(n+2)!},\ \theta=\theta_n \text{ (depinde de } n) \in (0,1),$$

de unde:

$$n\cdot\sin(2\pi e\cdot n)=n\cdot\sin\left[2\pi\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{e^\theta}{(n+2)!}\right)\cdot n!\right]=$$

$$=n\cdot\sin\left[2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{e^\theta}{(n+1)(n+2)}\right)\right].$$

Ca urmare,

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin(2\pi e\cdot n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\frac{\sin\left[2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{e^\theta}{(n+1)(n+2)}\right)\right]}{2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{e^\theta}{(n+1)(n+2)}\right)}\cdot 2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{e^\theta}{(n+1)(n+2)}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty} 2\pi n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{e^\theta}{(n+1)(n+2)}\right)=2\pi(1+0)=2\pi .$$

R9.2.9. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de două ori derivabilă astfel încât $f(0)=f(1)=0$ şi $\inf\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$. Să se arate că $\sup\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\geq 8$.

Soluție. Din ipoteză avem f continuă pe $[0,1]\Rightarrow -1=\inf\limits_{x\in[0,1]} f(x)=\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ şi cum f este derivabilă pe [0, 1] va rezulta că $(\exists)$ $a\in(0,1)$ astfel încât $f'(a)=0$ şi $f(a)=-1$. Scriind formula lui Taylor, avem:

$$f(x)=-1+\frac{1}{2!}\cdot f''(a+\theta_x(x-a))\cdot(x-a)^2,\ \theta_x\in(0,1).$$

Pentru $x=0$ se obține $0=-1+\dfrac{f''(a+\theta_x(-a))}{2}\cdot a^2$ iar pentru $x=1$ avem $0=-1+\dfrac{f''(a+\theta_1(1-a))}{2}(1-a)^2$.

Deci $f''(a+\theta_i(i-a))=c_i$, unde $c_0=\dfrac{2}{a^2}$, $c_1=\dfrac{2}{(1-a)^2}$, $i\in\{0,1\}$.

Dacă $a<\dfrac{1}{2}$, atunci $c_0\geq 8$, iar dacă $a\geq\dfrac{1}{2}$, atunci $c_1\geq 8$, deci $\sup\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\geq 8$.

R9.2.10. Fie P o funcție polinomială de grad n, $n\in\mathbb{N}^*$ şi având coeficienți reali. Să se arate că dacă:

$$P(a)>0,\ P'(a)\geq 0,\ldots,P^{(n)}(a)\geq 0\ ,$$

atunci, orice rădăcină reală a lui P este mai mică decât a.

Soluție. Pentru orice $x>a$, avem

$$P(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n>P(a),$$

de unde rezultă concluzia problemei.

10. Aplicații ale metodelor topologice în geometrie

10.1. Aspecte teoretice

Unele probleme de geometrie, în special probleme de existență care nu pot fi rezolvate constructiv, au soluții elegante dacă se folosesc cunoştințe de analiză matematică (în special continuitatea unor funcții). Cunoştințele necesare unor astfel de abordări sunt foarte legate de intuiția geometrică şi necesită foarte puține extinderi față de cunoştințele din programa de analiză matematică a clasei a XI-a.

Cadrul general în care se dezvoltă analiza matematică este spațiul topologic.

10.1.1. Definiție. Dacă *X* este o mulțime şi $D = \{D_i \mid i \in I\}$ este o familie de submulțimi din *X* cu proprietățile:

a) $\varnothing \in D, X \in D$

b) Pentru orice $J \subset I, \bigcup_{j \in J} D_j \in D$

c) Pentru orice mulțime finită $\{i_1, i_2, ..., i_n\} \subset I$,

$$D_{i_1} \cap D_{i_2} \cap ... \cap D_{i_n} \in D$$

atunci *D* se numeşte topologie pe *X*, iar perechea (X, D) se numeşte spațiu topologic.

10.1.2. Exemple. 1. Pe **R** (axa reală) o mulțime $D \subset \mathbf{R}$ este deschisă dacă pentru orice $x_0 \in D$ există $\varepsilon > 0$ astfel ca intervalul deschis: $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ să fie inclus în *D*.

2. În $\mathbf{R}^2$ (plan) o mulțime $D \subset \mathbf{R}^2$ este deschisă dacă pentru orice punct $(x_0, y_0) \in D$ există $\varepsilon > 0$ astfel ca discul deschis $D_{(x_0, y_0), \varepsilon}$ centrat în (x_0, y_0) şi de rază ε să fie în întregime inclus în *D*.

3. În $\mathbf{R}^3$ (spațiu) o mulțime $D \subset \mathbf{R}^3$ este deschisă dacă pentru orice punct $M \in D$ există $\varepsilon > 0$ astfel ca bila deschisă (fără frontieră), de centru *M* şi rază ε să fie complet inclusă în *D*.

10.1.3. Definiție. Dacă (X, D_X) şi (Y, D_Y) sunt spații topologice şi $f : X \to Y$ este o funcție, spunem că funcția *f* este continuă dacă pentru orice $D_Y \in D_Y$ prin imagine $f^{-1}(D_Y) \in D_X$. (O funcție este continuă dacă şi numai dacă întoarce mulțimi deschise în mulțimi deschise.)

Vom enumera câteva rezultate care sunt necesare în astfel de probleme, justificând doar cele necunoscute din manuale.

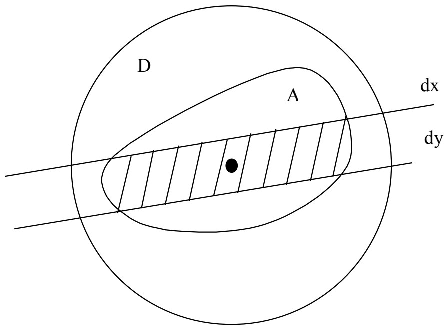
10.1.4. Rezultate fundamentale

1. Dacă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este o funcție continuă și $f(a)f(b)<0$ atunci există cel puțin un $c\in(a,b)$ astfel ca $f(c)=0$.

2. Dacă $f:[a,b]\to[a,b]$ este o funcție continuă, atunci există $c\in[a,b]$ astfel ca $f(c)=c$ (punct fix). (Se consideră funcția $g(x)=f(x)-x$, $g(a)g(b)\le 0$.)

3. Dacă $f:(a,b)\in\mathbf{R}$ este o funcție continuă și există $L>0$ astfel ca $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$ atunci funcția *f* este continuă. (Dacă $L<1$ ea este o contracție, în general este o funcție Lipschitziană. În particular izometriile sunt funcții continue.)

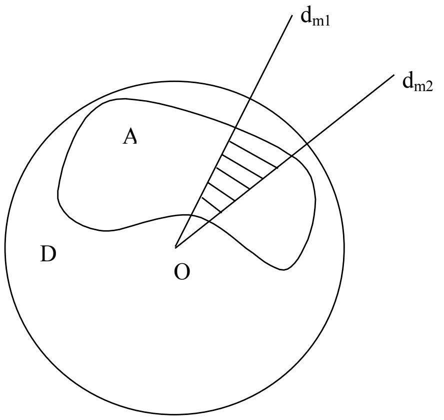
4. Dacă *A* este o mulțime mărginită în plan, $d:ax+by+c=0$ este o dreaptă fixă și definim $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(\lambda)=$ aria porțiunii cuprinsă între dreptele *d* și $d_\lambda : ax+by+c=\lambda$, atunci funcția *f* este continuă. (Deoarece *A* este mărginită, există un disc *D* de rază *R* în care este inclusă *A*.)

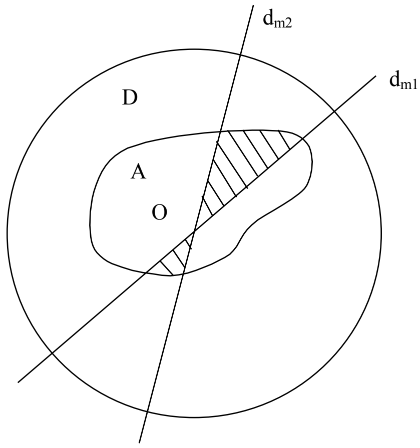


Distanța între dreptele paralele d_λ și d_μ este $\rho_{\lambda,\mu}=\dfrac{|\lambda-\mu|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Atunci $|f(\lambda)-f(\mu)|\le\dfrac{|\lambda-\mu|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot 2R=L|\lambda-\mu|$, unde $L=\dfrac{2R}{\sqrt{a^2+b^2}}$, deci *f* este o funcție Lipschitziană (continuă).

5. Dacă *A* este o mulțime mărginită în plan, (x_0,y_0) este un punct fix prin care trece dreapta *d* atunci funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(m)=$ aria porțiunii din *A* cuprinsă între dreptele *d* și $d_m : y-y_0=m(x-x_0)$ este o funcție continuă. (Deoarece *A* este mărginită, există un disc *D* de rază *R* cu centrul în $O(x_0,y_0)$ care conține mulțimea *A*. Notând cu $\alpha_{1,2}$ unghiul dintre dreptele d_{m_1} și d_{m_2},

obținem $|f(m_1)-f(m_2)| \leq 2R^2 \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{\pi}$, inegalitate ce asigură continuitatea funcției f.





6. Transformările geometrice ca: rotația în jurul unui punct (în plan sau spațiu), translația, omotetia, proiecția în plan sau proiecția pe o dreaptă (pe un plan), simetrie față de o dreaptă, un punct (sau un plan) sunt toate funcții continue, ele fiind izometrii (rotațiile, translațiile, simetriile) iar celelalte funcții Lipschitziene.

7. Distanța la un punct, la un plan sau la o dreaptă sunt funcții continue.

Bibliografie

[1] W. G. Chimm, M. E. Steenrod, *Introducere în topologie*, Ed. Tehnică, București, 1981.

[2] Dan Grecu, *Probleme de geometrie rezolvate prin metode topologice*, Revista Matematică Timişoara 1/1985, 3-10.

[3] R. Couran, H. Roberts, *Ce este matematica?*, Ed. Ştiințifică, Bucureşti, 1969, 334-337.

[4] Gh. Buicitu, *Probleme de construcții geometrice cu rigla și compasul*, Ed. Tehnică, București, 1957.

11. Ecuații transcendente

Această temă constituie o continuare firească a temei 7: "Ecuații exponențiale şi logaritmice nestandard", din Ghidul profesorului de matematică, pentru clasa a X-a.

Considerăm ecuația $f(x)=0$, unde $f:D\to R, D\subseteq R$ este o funcție dată. Dacă *f* este o funcție polinomială nenulă, ataşată unui polinom din $C[X]$, ecuația se numeşte **algebrică**. O ecuație care nu poate fi redusă la o ecuație algebrică, folosind operațiile: adunare, înmulțire, ridicare la putere, etc., se numeşte **transcendentă**.

De exemplu $x^3-5x+2=0$ reprezintă o ecuație algebrică de gradul 3; arătăm că ecuația $\ln(1+x)=2-2x,\ x>-1$ este transcendentă. Presupunem contrariul: există un polinom nenul $P\in R[X]$ astfel încât pentru funcția sa polinomială *f*, avem: $f(x)=\ln(1+x)+2x-2$, pentru orice $x>-1$. Evident P nu este un polinom constant. Fie grad P $=n\in N^*$. Derivând de n+1 ori în ambii membri ai relației de mai sus, obținem: $0=\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$, pentru orice $x>-1$. Punând x = 0, obținem: $0=(-1)^n\cdot n!$, care evident reprezintă o contradicție.

Nu ne propunem să verificăm că anumite ecuații sunt sau nu transcendente, scopul nostru este de a rezolva astfel de ecuații.

Nu există metode generale de rezolvare. Fiecare ecuație propusă trebuie examinată aparte: i se caută caracteristicile şi pe baza lor se elaborează un mod de rezolvare.

Vom indica câteva moduri de abordare a acestor ecuații. În mare parte, acestea au fost expuse în tema mai sus amintită, dar de data aceasta având la îndemână puternicul instrument oferit de aparatul analizei matematice.

11.1. Utilizarea monotoniei unor funcții

Amintim câteva rezultate cunoscute din teoria funcțiilor.

11.1.1. Propoziție : Fie $f,g:A\to R,\ A\subseteq R$.

a) Dacă funcțiile *f* şi g sunt strict crescătoare (descrescătoare) pe A, atunci *f* +g este o funcție strict crescătoare (descrescătoare) pe A.

b) Dacă $f,g:A\to(0,\infty)$ sunt strict crescătoare (descrescătoare), atunci $f\cdot g$ este funcție strict crescătoare (descrescătoare).

11.1.2. Propoziție : Fie $f : A \to B, \quad g : B \to C$.

a) Dacă *f* şi g sunt funcții strict monotone, de aceeaşi monotonie, atunci $g \circ f$ este strict crescătoare .

b) Dacă *f*, g sunt funcții strict monotone, de monotonii diferite, atunci $g \circ f$ este strict descrescătoare.

11.1.3. Propoziție : Dacă $I \subseteq R$ este interval şi $f : I \to R$ este o funcție derivabilă pe I, atunci sunt adevărate următoarele afirmații:

a) *f* este crescătoare dacă şi numai dacă $f'(x) \geq 0, \ \forall \ x \in I$.

b) *f* este descrescătoare dacă şi numai dacă $f'(x) \leq 0, \ \forall \ x \in I$.

11.1.4. Propoziție Dacă funcția *f* este strict monotonă pe un interval I, iar c este o constantă reală, atunci ecuația $f(x) = c$ are pe intervalul I cel mult o soluție.

Demonstrație : Fie *f* o funcție strict crescătoare. Presupunem că ecuația $f(x) = c$ are cel puțin două soluții diferite x_1, x_2 pe intervalul I. Fie $x_1 < x_2$. Din *f* strict crescătoare rezultă $f(x_1) < f(x_2)$. Contradicție cu $f(x_1) = f(x_2) = c$.

11.1.5. Teoremă : Dacă funcțiile *f* şi g sunt monotone pe intervalul I, de monotonii diferite, cel puțin una dintre ele strict monotonă, atunci ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult o soluție în intervalul I.

Demonstrație : Fie *f* strict crescătoare, iar g descrescătoare pe intervalul I. Presupunem că există cel puțin două soluții diferite x_1, x_2 din intervalul I, ale ecuației $f(x) = g(x)$. Fie $x_1 < x_2$. Atunci $f(x_1) = g(x_1) \geq g(x_2) = f(x_2)$. Contradicție cu *f* funcție strict crescătoare pe intervalul I.

11.1.6. Teoremă : Dacă funcția *f* are proprietatea lui Darboux pe intervalul I (în particular dacă *f* este continuă pe I) şi dacă $a, b \in I$ astfel încât $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$, are cel puțin o soluție între a şi b.

11.2. Rezolvarea unor ecuații cu ajutorul teoremei lui Rolle şi a teoremei lui Lagrange

11.2.1. Teoremă (Rolle):

Fie $a, b \in R, \ cu \ a < b$, iar $f : [a,b] \to R$ o funcție continuă pe [a,b], derivabilă pe (a,b) şi $f(a) = f(b)$.

Atunci există cel puțin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

11.2.2. Consecință : Între două rădăcini ale unei funcții derivabile pe interval se află cel puțin o rădăcină a derivatei.

11.2.3. Teoremă (Lagrange):

Fie $a, b \in R, cu\ a < b$, iar $f : [a,b] \to R$ o funcție continuă pe [a,b] şi derivabilă pe (a,b). Atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f^{'}(c)$.

11.3. Utilizarea convexității

11.3.1. Definiție : O funcție $f : I \to R$ este convexă pe intervalul $I \subseteq R$ dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, $\forall\ \lambda \in [0,1]$ are loc inegalitatea:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2).$$

Dacă inegalitatea este de sens contrar, funcția se numeşte concavă. Dacă inegalitățile precedente sunt stricte, atunci spunem că *f* este strict convexă (strict concavă).

11.3.2. Observație : Funcția *f* este concavă pe intervalul I dacă şi numai dacă –*f* este convexă.

11.3.3. Teoremă (Jensen): Fie $I \subseteq R$ un interval, iar $f : I \to R$ o funcție. Atunci f este convexă dacă şi numai dacă oricare ar fi $n \in N$, $n \geq 2$, $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ şi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda n \geq 0$, cu $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda n = 1$, are loc:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

11.3.4. Propoziție :

a) Produsul dintre o funcție convexă şi o funcție constantă pozitivă este o funcție convexă.
b) O sumă de funcții convexe este o funcție convexă.
c) Dacă $g : I \to J$ este convexă pe intervalul I, iar $f : J \to R$ este convexă şi crescătoare pe intervalul J, atunci $f \circ g$ este convexă.
d) Dacă $f : I \to J$ este inversabilă pe intervalul I, iar $g : J \to I$ este inversa sa, atunci:
    1) *f* convexă şi crescătoare $\Rightarrow$ g concavă şi crescătoare
    2) *f* convexă şi descrescătoare $\Rightarrow$ g convexă şi descrescătoare

e) Dacă $f : I \to R$ este convexă şi neconstantă pe intervalul I, atunci f nu-şi poate atinge valoarea cea mai mare în interiorul intervalului.

Demonstrație : Punctele a) şi b) se verifică imediat. Demonstrăm c). Din g convexă pe I, rezultă $g((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)g(x_1) + tg(x_2)$, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I, \forall\, t \in [0,1]$. Cum f este crescătoare şi convexă, rezultă: $(f \circ g)((1-t)x_1 + tx_2) \leq$ $f((1-t)g(x_1) + tg(x_2)) \leq (1-t)(f \circ g)(x_1) + t(f \circ g)(x_2)$, deci $f \circ g$ este convexă.

Atenție : Compusa a două funcții convexe nu este neapărat o funcție convexă. Contraexemplu: Fie $g : [-1,1] \to [0,1], g(x) = x^2$, iar $f : [0,1] \to R, f(x) = -x$. Deci f şi g sunt convexe, dar $(f \circ g)(x) = -x^2$ nu este convexă.

d) Demonstrăm numai 1). Dacă f este crescătoare, atunci şi $g = f^{-1}$ este crescătoare. Arătăm că g este concavă. Pentru $y_1\ y_2 \in J$ există $x_1, x_2, x \in I$ astfel încât $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x) = (1-t)y_1 + ty_2$. Din f convexă rezultă: $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) = (1-t)y_1 + ty_2$. Dar f este crescătoare şi de aici avem: $(1-t)x_1 + tx_2 \leq x$, adică $(1-t)g(y_1) + tg(y_2) \leq g((1-t)y_1 + ty_2)$, adică g este concavă.

e) Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că f îşi atinge cea mai mare valoare în x_0 din interiorul intervalului I. Deci există $x_1, x_2 \in I$ astfel încât $x_1 < x_0 < x_2$ şi $f(x_1) < f(x_0)$, $f(x_2) < f(x_0)$. Punem $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$. Înmulțind prima inegalitate cu (1-t) şi a doua cu t şi adunăm: $(1-t)f(x_1) + tf(x_2) < f(x_0) = f((1-t)x_1 + tx_2)$, relație care contrazice convexitatea lui f.

11.3.5. Propoziție : Dacă funcția $f : I \to R$ este strict convexă pe intervalul I, iar $g : I \to R$ este o funcție liniară, atunci ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult două soluții pe intervalul I.

Demonstrație : Admitem că există cel puțin trei soluții diferite x_1, x_2, x_3. Fie $x_3 \in (x_1, x_2)$. Atunci există $\lambda \in (0,1)$ astfel încât: $x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Dar $f(x_3) = g(x_3) = \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. Contradicție cu f strict convexă.

Bibliografie

1. Berinde V., explorare, investigare şi descoperire în matematică, Editura Efemeride, Baia Mare, 2001
2. Burtea M., Burtea G., Mateatică, clasa a XI-a, Elemente de analiză matematică, Editura Carminis, Piteşti, 2001
3. Ganga M., Ecuații şi inecuații, Editura Mathprss, Ploieşti, 1998
4. Gorgotă V., Şerdean I., Ulmeanu S., Matematica în concursurile şcolare 2002, IX-XII, Editura Paralela 45, 2002
5. Suceveanu V., Copaceanu R., Metode nestandard de rezolvare a ecuațiilor, Foaie Matematică, Nr. 3 şi Nr. 4, 1999, Chişinău
6. Tămâian T., Probleme selectate din reviste selecte, Editura Cub Press, Baia Mare, 2002
7. Universitatea Tehnică ,Cluj−Napoca, Teste grilă de matematică, admitere 2003, U.T. Pres, Cluj –Napoca, 2002.

Probleme propuse

R11.1.1 Să se rezolve ecuația:

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 6x \ln x + 2 = 0, \ \ x > 0.$$

Soluție :

Considerăm funcția $f : (0, \infty) \to R$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 6x \ln x + 2$.

Atunci $f^{'}(x) = 3x^2 - 12x + 6 \ln x + 6$ și $f^{''}(x) = 6\dfrac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

Variația funcției f este redată în tabelul următor:

x	0		1	
$f^{''}(x)$		+ + + +	0	+ + + +
$f^{'}(x)$		- - - $\nearrow$	0	+ + + + $\nearrow$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

Deducem că x = 1 este unica soluție.

R11.1.2 Rezolvați ecuația: $4^{x+\frac{1}{x}} + 9^{x+\frac{1}{x}} = 275.$

Soluție :

Pentru $x < 0$, $4^{x+\frac{1}{x}} + 9^{x+\frac{1}{x}} < 2$, deci ecuația nu are soluții.

Fie $x > 0$. considerăm funcția $f_a : (0, \infty) \to R$, $f_a(x) = a^{x+\frac{1}{x}}$, $a > 1$. Atunci $f_a = g \circ h$, unde $h : (0, \infty) \to [2, \infty)$, $h(x) = x + \dfrac{1}{x}$, iar $g : [2, \infty) \to R$, $g(x) = a^x$. Se constată că h este strict descrescătoare pe $(0,1]$ și strict crescătoare pe $[1, \infty)$, iar g este strict crescătoare. Atunci (din propoziția **11.1.3**) deducem cü funcția f_a este strict descrescătoare pe $(0,1]$ și strict crescătoare pe $[1, \infty)$. Funcția $F : (0, \infty) \to R$, $F(x) = 4^{x+\frac{1}{x}} + 9^{x+\frac{1}{x}} = f_4(x) + f_9(x)$ este strict descrescătoare pe $(0,1]$ și strict crescătoare pe $[1, \infty)$. În concluzie, ecuația: F(x)=275 are cel mult câte o soluție pe intervalele $(0,1]$, respectiv $[1,\infty)$. Dar $x=\frac{1}{2}\in(0,1]$ şi $x=2\in[1,\infty)$ sunt soluții. Deci $x=\frac{1}{2}$ şi $x=2$ sunt singurele soluții ale ecuației date.

R11.1.3 Să se rezolve în R ecuația: $\left(\sqrt{3}\right)^x-2^{x-1}=1$.

Soluție :

Fie $f:R\to R,\ f(x)=\left(\sqrt{3}\right)^x-2^{x-1}$. Atunci $f':R\to R$, $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{3}\right)^x\ln 3-2^x\ln 2\right)$ cu rădăcina $x_0=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\ln 2}{\ln 3}$. Se verifică că $x_0\in(2,4)$.

Variația funcției f dată de prima derivată este redată în tabloul:

x	$-\infty$		2		x_0		4		∞
$f'(x)$		+	+	+	0	-	-	-	
$f(x)$		$\nearrow$			$f(x_0)$		$\searrow$		

Deci f este strict crescătoare pe $(-\infty,x_0]$ şi strict descrescătoare pe $[x_0,\infty)$. Din teorema **11.1.4** deducem că ecuația $f(x)=0$ are cel mult câte o soluție pe fiecare din intervalele $(-\infty,x_0]$, respectiv (x_0,∞). Se verifică că x = 2 ∈ $(-\infty,x_0)$ şi x = 4 ∈ (x_0,∞) sunt soluții, deci acestea sunt singurele soluții ale ecuației date.

R11.1.4 Să se rezolve ecuația: $e^{x-1}=x\ln x+1$, $x\in R_+^*$.

Soluție :

Funcția $f:(0,\infty)\to R, f(x)=e^{x-1}-x\ln x-1$ are derivatele $f'(x)=e^{x-1}-\ln x-1$, $f''(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$, $f'''(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$. Rezultă că f''

este strict crescătoare, aşadar x = 1 este unica soluţie a ecuaţiei $f''(x)=0$. Cum $f'(1)=0$, rezultă că $f'(x)>0$ pentru $x\in(0,1)$ şi $f'(x)>0$ pentru $x\in(1,\infty)$, deci *f* este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. Cum $f(1)=0$, ecuaţia dată are unica soluţie x=1.

R11.2.1 Se consideră funcţia. $f:[0,1]\to R,\ f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x},\ dacă\ x\in(0,1] \\ 0,\ dacă\ x=0 \end{cases}$.

Aplicând teorema lui Rolle pe fiecare interval $\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right],\ n\in N^*$, să se arate că ecuaţia $tgx = x$ are soluţii pe fiecare interval $(n\pi,(n+1)\pi)$.

<u>Soluţie</u> :

Se verifică că *f* este continuă pe [0,1], derivabilă pe (0,1) şi $f'(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}-\dfrac{\pi}{x}\cos\dfrac{\pi}{x},\ \forall\ x\in(0,1]$. Cum $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$, suntem în condiţiile din teorema lui Rolle, deci există $c_n\in\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$ astfel încât $f'(c_n)=0$, adică: $\sin\dfrac{\pi}{c_n}-\dfrac{\pi}{c_n}\cos\dfrac{\pi}{c_n}=0$. Obţinem $tg\dfrac{\pi}{c_n}=\dfrac{\pi}{c_n}$, deci $\dfrac{\pi}{c_n}$ este soluţie a ecuaţiei $tgx=x$. Cum $c_n\in\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$, avem $\dfrac{\pi}{c_n}\in(n\pi,(n+1)\pi)$, pentru orice $n\in N^*$.

R11.2.2 Să se rezolve în R ecuaţia: $2^x+3^x+6^x=3x^2+5x+3$.

<u>Soluţie</u> :

Observăm că ecuaţia are soluţiile $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$. Arătăm că acestea sunt singurele soluţii.

Considerăm funcţia $f:R\to R$, $f(x)=2^x+3^x+6^x-3x^2-5x-3$. Presupunem că există $x_4\notin\{-1,0,1\}$ astfel încât $f(x_4)=0$. Conform teoremei lui Rolle, $f'(x)=0$ ar avea câte o soluţie

pe fiecare interval cu capetele soluții consecutive ale lui $f(x)=0$. Deci f' ar avea cel puțin 3 soluții diferite.
De aici, $f''(x)=0$ ar avea cel puțin două soluții reale, iar $f'''(x)=0$ ar avea cel puțin o soluție reală. Dar $f'''(x)=2^x(\ln 2)^3+3^x(\ln 3)^3+6^x(\ln 6)^3>0, \forall\, x\in R$, deci presupunerea făcută este falsă.

R11.2.3 Rezolvați ecuația: $3^x+6^x=4^x+5^x$.
<u>Soluție</u> :

Ecuația se scrie $\dfrac{6^x-5^x}{6-5}=\dfrac{4^x-3^x}{4-3}$. Considerăm funcția $f(t)=t^x$, $t>0$, căreia îi aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalele [3,4] și [5,6]. Deducem că există $t_1\in(3,4)$ și $t_2\in(5,6)$ pentru care $4^x-3^x=xt_1^{x-1}$ și $6^x-5^x=xt_2^{x-1}$. Atunci ecuația se mai scrie: $xt_1^{x-1}=xt_2^{x-1}$ sau echivalent $x\left(t_2^{x-1}-t_1^{x-1}\right)=0$. Obținem $x_1=0$ sau $t_2^{x-1}=t_1^{x-1}$. Cum $t_2>t_1$, din $\left(\dfrac{t_2}{t_1}\right)^{x-1}=0$ rezultă $x_2=1$. Soluțiile ecuației sunt $x_1=0$ și $x_2=1$.

R11.2.4 Rezolvați ecuația: $(x+1)\cdot 3^x=2^x+x\cdot 4^x$.
<u>Soluție</u> :

Scriem ecuația sub forma $\dfrac{3^x-2^x}{3-2}=\dfrac{x\cdot 4^x-x\cdot 3^x}{4-3}$. Notăm $f:[2,3]\to R,\ f(t)=t^x$ și $g:[3,4]\to R,\ g(t)=xt^x$. Din teorema lui Lagrange rezultă că există $a\in(2,3),\ b\in(3,4)$ astfel ca $f'(a)=g'(b)$, de unde $xa^{x-1}=x^2b^{x-1}$. Rezultă $x_1=0$ sau $a^{x-1}=xb^{x-1}$. Din $x=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x-1}$ și $0<\dfrac{a}{b}<1$. Obținem $x_2=1$. În concluzie, soluțiile ecuației sunt $x_1=0$ și $x_2=1$.

R11.2.5 Să se arate că ecuația $\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{1}{(x+1)^2}=0$ are în intervalul $(2\pi,3\pi)$ cel puțin o soluție.

Soluție :

Considerăm funcția $f(x) = \sin x - \dfrac{x-1}{x+1},\ x \geq 0$. Avem $f(2\pi) < 0,\ f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) > 0$ și $f(3\pi) < 0$. Deci există $x_1 \in \left(2\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right)$ și $x_2 \in \left(\dfrac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Rezultă din teorema lui Rolle că există $x_0 \in (x_1, x_2)$ cu $f'(x_0) = 0$. Cum $f'(x) = \cos x - \dfrac{2}{(x+1)^2}$, obținem rezultatul din enunț.

R11.3.1 Să se rezolve în N: $a^x + (a+2)^x + (a+6)^x = (a+1)^x + (a+3)^x + (a+4)^x$, unde $a > 1$.

Soluție :

Evident x = 0 și x = 1 sunt soluții. Arătăm că ecuația nu are alte soluții. Funcția $f : [0,\infty) \to R,\ f(t) = t^n$, unde $n \in N, n \geq 2$ este strict convexă. Atunci din definiție obținem: $\dfrac{a^n + b^n}{2} > \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$, pentru $a,b > 0$, $a \neq b$. Deci:

$$\frac{a^x + (a+2)^x}{2} > \left(\frac{2a+2}{2}\right)^x = (a+1)^x$$

$$\frac{(a+2)^x + (a+6)^x}{2} > \left(\frac{2a+8}{2}\right)^x = (a+4)^x$$

$$\frac{(a+6)^x + a^x}{2} > \left(\frac{2a+6}{2}\right)^x = (a+3)^x$$

Adunând aceste relații, obținem:
$a^x + (a+2)^x + (a+6)^x > (a+1)^x + (a+3)^x + (a+4)^x$. Deci ecuația nu are alte soluții.

R11.3.2 Fie $a > 1$, a fixat. Să se rezolve în R ecuația: $a^x + a^{\frac{1}{x}} = a^2 + \sqrt{a}$.

<u>Soluție</u> :

Funcția $f : R \to (0,\infty)$, $f(x) = a^x$ este convexă şi crescătoare pe R. Funcția $g : (0,\infty) \to R$, $g(x) = a^{\frac{1}{x}}$ este convexă pe $(0,\infty)$, deoarece $g''(x) = \frac{1}{x^3} a^{\frac{1}{x}}\left(2 + \frac{1}{x}\ln a\right)\ln a > 0$, pe $(0,\infty)$. Rezultă că $f + g$ este convexă pe $(0,\infty)$, prin urmare ecuația dată are cel mult două soluții în $(0,\infty)$. Acestea sunt 2 şi $\frac{1}{2}$. În intervalul $(-\infty,0)$, ecuația nu are soluții deoarece $a^x + a^{\frac{1}{x}} < 1 + 1 < a^2 + \sqrt{a}$, oricare ar fi $x \in (-\infty,0)$.

R11.3.3 Să se rezolve ecuația: $(2x+4)\cdot 4^x - (2x^2 + 6x + 5)\cdot 2^x + x + 1 = 0$.

<u>Soluție</u> :

Ecuația se scrie în formă echivalentă: $\left[(x+2)\cdot 2^{x+1} - 1\right]\left[2^x - (x+1)\right] = 0$. Obținem: $(x+2)\cdot 2^{x+1} = 1$ sau $2^x = x+1$. Ecuația $(x+2)\cdot 2^{x+1} = 1$ nu are soluții pe $(-\infty,-2]$, iar pe $(-2,\infty)$ ecuația se scrie $2^{x+1} = \frac{1}{x+2}$ cu soluție unică $x_1 = -1$, deoarece membrul stâng este o funcție strict crescătoare, iar membrul drept este o funcție strict descrescătoare.

Ecuația $2^x = x+1$ are soluțiile $x_2 = 0$ şi $x_3 = 1$ şi nu mai are altele deoarece graficul unei funcții strict convexe şi o dreaptă au cel mult două puncte distincte comune (propoziția **11.3.5**).

În concluzie, ecuația dată are soluțiile: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ şi $x_3 = 1$.

12. Exemple şi contraexemple în analiza matematică

Exemplele şi contraexemplele în matematică reprezintă de multe ori răspunsuri la o intensă dorinţă de a pune de acord intuiţia cu rigoarea raţionamentului ştiinţific. Este verificat însă că intuiţia ne joacă, nu de puţine ori, feste şi că exemple născute în urma unor eforturi îndelungate sau din contră apărute ca o revelaţie, spulberă ceea ce era aproape evidenţa însăşi. Alteori exemplele şi contraexemplele demonstrează că anumite rezultate nu pot fi substanţial îmbunătăţite dacă se slăbeşte prea mult ipoteza, derivând de aici necesitatea ca teoria să fie aplicată şi utilizată cu extremă exactitate.

În cele ce urmează vor fi prezentate unele rezultate de analiză, ele însele interesante sau care conduc uneori la concluzii surprinzătoare.

12.1. Completări şi precizări teoretice

Despre şiruri de numere raţionale convergente.

Se ştie că orice număr real este limită a unui şir de numere raţionale. Astfel, dacă un şir cu termenii numere raţionale converge la un număr iraţional, şirul numitorilor sau al numărătorilor termenilor poate fi mărginit ? Dar dacă şirul este neconstant şi converge la un număr raţional ?

12. 1. 1. Propoziţie Dacă $(r_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere raţionale $\left(r_n=\dfrac{p_n}{q_n},\ p_n\in\mathbb{Z},\ q_n\in\mathbb{N}^*\right)$, convergent la un număr iraţional x_0, atunci $(q_n)_{n\geq 1}$ are limita $+\infty$.

Demonstraţie: Presupunem că şirul $(q_n)_{n\geq 1}$ nu are limita $+\infty$. El admite atunci un subşir constant nenul $(q_{k_n})_{n\geq 1}$. Şirul $(p_{k_n})_{n\geq 1}$ este un şir de numere întregi care nu poate să aibă limita $-\infty$ sau $+\infty$ (altfel şirul $(r_{k_m})_{n\geq 1}$ ar avea limita $-\infty$ sau $+\infty$ şi nu x_0 cum are de fapt). Rezultă că şi şirul $(p_{k_n})_{n\geq 1}$ admite un subşir constant. Se obţine că şirul $(r_n)_{n\geq 1}$ admite un subşir constant. Acest subşir are o limită număr raţional ceea ce contrazice ipoteza că $(r_n)_{n\geq 1}$ este convergent la numărul iraţional x_0. Rezultă că presupunerea făcută a fost falsă şi deci $(q_n)_{n\geq 1}$ are limita $+\infty$.

Un rezultat analog se poate preciza şi pentru şirul modulului numărătorilor.

Într-un limbaj mai puţin exact, am demonstrat că pentru ca un număr iraţional să poată fi aproximat cu o eroare din ce în ce mai mică, cu ajutorul unor numere raționale, acestea din urmă vor trebui să aibă numitori şi numărători din ce în ce mai mari.

12. 1. 2. Propoziție Fie $(r_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere raționale $\left(r_n = \dfrac{p_n}{q_n},\right.$ $\left. p_n \in \mathbb{Z},\ q_n \in \mathbb{N}^*\right)$ convergent la un număr rațional x_0. Dacă $(q_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, atunci şirul $(r_n)_{n\geq 1}$ este constant începând cu un anumit rang.

Demonstrație: Din imaginea şirului $(q_n)_{n\geq 1}$, care este finită, reținem doar mulțimea A formată din acele numere naturale nenule care sunt valori a unui număr infinit de termeni ai acestui şir. Eliminăm termenii şirului $(q_n)_{n\geq 1}$ care nu aparțin mulțimii A. Numărul acestor termeni este evident finit. Există aşadar $n_0 \in \mathbb{N}^*$ asfel încât $q_n \in A$, $(\forall)\ n \geq n_0$.
Şirul $(q_n)_{n\,\geq\, n_0}$ poate fi acum „împărțit în totalitate” într-un număr finit de subşiruri constante care au valorile termenilor din A. Fie $(q_n)_{n\,\geq\, n_0}$ un astfel de subşir constant egal cu α. Subşirul $(p_{k_n})_{n\,\geq\, n_0}$ este convergent la $\alpha \cdot x_0$ şi are toți termenii numere întregi, rezultând că şi acest subşir este constant începând cu un anumit rang $n_1 \geq n_0$. Atunci şirul $(r_{k_n})_{n\,\geq\, n_1}$ este constant, constanta neputând fi decât x_0. Se procedează similar cu toate subşirurile care au valorile termenilor în A.

12. 1. 3. Corolar. Dacă $(r_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere raționale $\left(r_n = \dfrac{p_n}{q_n},\ p_n \in \mathbb{Z},\ q_n \in \mathbb{N}^*\right)$ convergent la un număr rațional x_0 şi dacă $r_n \neq x_0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(q_n)_{n\geq 1}$ are limita $+\infty$.

Proprietăți de continuitate ale unor funcții.

Intuitiv, continuitatea ca interpretare geometrică este percepută, în cele mai multe dintre cazuri, ca fiind proprietatea în urma căreia graficul unei funcții poate fi trasat fără a ridica creionul de pe hârtie.

Astfel este uşor să construim funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au un singur punct de discontinuitate, modificând într-un singur punct valoarea unei funcții continue.

Faptul că realitatea legată de funcțiile continue este mai complexă este relevat de exemple ale unor funcții continue într-un singur punct. Se pot construi nenumărate exemple de acest fel dacă avem în vedere următorul rezultat:

12. 1. 4. Propoziție Dacă $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sunt două funcții continue, atunci funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} f_1(x), \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x), \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este continuă în x_0 dacă şi numai dacă $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

Ne întrebăm în mod firesc, cât de multe pot fi punctele de discontinuitate ale unei funcții ?

12. 1. 5. Propoziție Există funcții care sunt discontinue în orice punct al domeniului lor de definiție.

Demonstrație: Funcția lui Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

are toate punctele din $\mathbb{R}$ puncte de discontinuitate de speța a II-a.

12. 1. 6. Propoziție Există funcții definite pe un interval I care să fie discontinue doar pe mulțimea numerelor raționale din I.

Demonstrație: Funcția lui Riemann $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \text{ sau } x = 0 \\ \dfrac{1}{q}, \text{ dacă } x = \dfrac{p}{q} \text{ unde } p, q \in \mathbb{N}^* \text{ sunt prime între ele}, \end{cases}$$

este continuă în $x = 0$ şi în toate punctele iraționale din [0, 1] şi este discontinuă în toate punctele raționale nenule din [0, 1]

Fie $x_0 \in [0,1]$. Este suficient să considerăm în continuare $(t_n)_{n \geq 1}$ un şir de elemente din [0, 1], cu toți termenii raționali sau toți iraționali, diferiți de x_0, dar convergent la x_0,

Dacă $t_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$, iar $t_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, unde $p_n \in \mathbb{N}^*, q_n \in \mathbb{N}^*$, atunci, conform propoziției 12.1.1. şi corolarului 12.1.3. avem $\lim\limits_{n \to \infty} q_n = +\infty$.

Rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(t_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{q_n} = 0.$

Dacă $t_n \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ atunci $\lim\limits_{n \to \infty} f(t_n) = \lim\limits_{n \to \infty} 0 = 0$.

În condițiile în care $f(x_0) = 0$ (deci dacă x_0 este 0 sau irațional), funcția f este continuă în x_0. Evident dacă $f(x_0) \neq 0$ (deci dacă x_0 este rațional nenul) funcția f nu este continuă în x_0.

Aşadar concluzia propoziţiei este adevărată dacă se consideră restricţia funcţiei Riemann la (0, 1]

12. 1. 7. Observaţie Funcţia lui Riemann este peste tot nederivabilă.

Demonstraţie: Vom arăta pentru început că funcţia Riemann este nederivabilă în punctul 0.

Dacă $(t_n)_{n\geq 1}$ este un şir cu termenii iraţionali, din [0, 1], convergent la 0, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(t_n)-f(0)}{t_n-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{0-0}{t_n}=0$$

(1)

Şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ este format din termeni nenuli situaţi în [0, 1] şi este convergent la 0. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}-0}=1$$

(2)

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că funcţia f a lui Riemann nu are derivată în 0.

În celelalte puncte raţionale din [0, 1] funcţia este nederivabilă, nefiind nici măcar continuă.

Fie acum x_0 un număr iraţional din [0, 1].

Dacă $(t_n)_{n\geq 1}$ este un şir cu termenii iraţionali, din $[0,1]\setminus\{x_0\}$, convergent la x_0, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(t_n)-f(x_0)}{t_n-x_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{0-0}{t_n-x_0}=0\,.$$

(3)

Fie $(t_n)_{n\geq 1}$, unde $t_n=\frac{[10^n\cdot x_0]}{10^n}$ ($(t_n)_{n\geq 1}$ este de fapt şirul aproximărilor lui x_0 cu n zecimale exacte). Se demonstrează uşor că $(t_n)_{n\geq 1}$ este din [0, 1] şi că este convergent la x_0. De asemenea $0<x_0-t_n<\frac{1}{10^n}$.

Deoarece t_n, scris ca mai înainte s-ar putea să nu fie o fracţie ireductibilă, rezultă că scriindu-l ca fracţie ireductibilă $t_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, unde $p_n \in \mathbb{Z}^*$, $q_n \in \mathbb{N}^*$, avem $q_n \le 10^n$. Obţinem astfel:

$$\left|\frac{f(t_n)-f(x_0)}{t_n - x_0}\right| = \left|\frac{\frac{1}{q_n}-0}{t_n - x_0}\right| = \frac{1}{q_n(x_0 - t_n)} > \frac{1}{10^n \cdot \frac{1}{10^n}} = 1 .$$

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(t_n)-f(x_0)}{t_n - x_0}$ chiar dacă există nu poate fi egală cu 0. Ţinând seama şi de relaţia (3), rezultă că f nu admite derivată în x_0.

Continuitatea şi proprietatea lui Darboux.

Este cunoscută „apropierea" dintre noţiunea de continuitate a unei funcţii pe un interval şi proprietatea lui Darboux. La o analiză mai aprofundată însă diferenţele dintre ele pot deveni surprinzător de mari.

Convenim ca în continuare, prin interval, să înţelegem interval nedegenerat. Este clasic următorul rezultat:

12. 1. 8. Propoziţie Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ \alpha\ , & \text{dacă } x=0\end{cases}$ este discontinuă în x = 0. Ea are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă $\alpha\in[-1,1]$.

Cât de "bogată" poate fi mulţimea punctelor de discontinuitate ale unei funcţii care are proprietatea lui Darboux ? Un posibil răspuns este conţinut în :

12. 1. 9. Propoziţie Există funcţii cu proprietatea lui Darboux şi care sunt discontinue în toate punctele intervalului de definiţie.

Demonstraţie: Exemplul pe care îl vom prezenta i se datorează, într-o formă uşor modificată, matematicianului francez Henri Lebesgue.

Amintim că orice $x\in[0,1)$ admite o scriere în baza 2 fără perioada 1 şi în plus putem conveni că $1 = 0{,}1111\ldots$.

Considerăm funcţia $f:[0,1]\to[0,1]$ definită astfel: pentru fiecare $x\in[0,1]$ scris în baza 2 sub forma $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$

$$f(x)=\begin{cases}0\ , & \text{dacă } (\forall)\ k\in\mathbb{N} \text{ şirul } (a_{2n+1})_{n\ge k} \text{ nu este periodic}\\ 0{,}a_{2k+2}a_{2k+4}a_{2k+6}\ldots, & \text{dacă şirul } (a_{2n+1})_{n\ge k} \text{ este periodic cu rangul } k.\end{cases}$$

În continuare vom arăta mai mult decât că *f* are proprietatea lui Darboux şi anume că pentru orice $a,b\in[0,1]$, $a<b$ are loc $f(\,[a,b]\,)=[0,1]$.

Deoarece $a<b$, ele vor avea scrierea binară:

$$a=0,u_1u_2\ldots u_s0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t0\ldots$$
$$b=0,u_1u_2\ldots u_s1\ldots$$

unde $s,t\in\mathbb{N}$, (dacă $s=0$ sau $t=0$, dispar cifrele $u_1u_2\ldots u_s$ respectiv $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t$).

În scrierea lui a apar o infinitate de cifre 0, deoarece din $a<b$, rezultă $a<1$, iar 1 este singurul număr care am convenit că are perioada 1.

Fie acum un $\lambda\in[0,1]$, $\lambda=0,\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots$.

Alegem $c=0,u_1u_2\ldots u_s0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t11\underbrace{0\ldots0}_{p\text{ ori}}\lambda_10\lambda_20\lambda_3\ldots$, unde $p\in\{1,2\}$ este ales astfel încât cifra 0 din faţa cifrei λ_1 să fie de rang impar în cadrul şirului cifrelor de după virgulă. Vom nota cu $\underline{0}$ această cifră 0. În scrierea lui *c*, şirul cifrelor de rang impar de după virgulă este:

$$u_1,u_3,\ldots,1,\underline{0},0,0,\ldots$$

Acest şir este periodic **începând** cu **0**, fiind constant nul. Nu poate fi periodic începând cu un termen de rang inferior, deoarece cifra 1 din fata cifrei $\underline{0}$ nu se regăseste în termenii de rang superior. Rezultă $f(c)=0,\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots=\lambda$.

Mai avem:

$$a=0,u_1u_2\ldots u_s0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t0\ldots$$
$$c=0,u_1u_2\ldots u_s0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t1\ldots$$
$$b=0,u_1u_2\ldots u_s1\ldots$$

şi deci $c\in[a,b]$. λ fiind arbitrar în [0, 1], rezultă $f(\,[a,b]\,)=[0,1]$. Aşadar *f* are proprietatea lui Darboux.

Mai mult, rezultă că pentru orice vecinătate *V* a unui număr $x_0\in[0,1]$ are loc $f(V\cap[0,1])=[0,1]$ obţinându-se de aici că *f* nu este continuă în x_0.
x_0 fiind arbitrar, rezultă că f nu este continuă în nici un punct al domeniului de definiție.

12. 1. 10. Corolar Există funcţii $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care transformă orice interval în $\mathbb{R}$, (aşadar funcţia *w* este nemărginită pe orice interval)

Demonstrație: Considerăm $f:[0,1]\to[0,1]$ funcţia definită anterior şi funcţiile:

$$\varphi:\mathbb{R}\to[0,1],\ \varphi(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x,$$

$$\psi:[0,1]\to\mathbb{R},\psi(x)=\begin{cases}0 & ,\ \text{dacă}\ x=0\ \text{sau}\ x=1\\ \operatorname{tg}\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right), & \text{dacă}\ x\in(0,1).\end{cases}.$$

Evident funcția φ este continuă, strict crescătoare, iar funcția ψ este surjectivă. Fie $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $w=\psi\circ f\circ\varphi$. Pentru orice interval $I\subseteq\mathbb{R}$, $J=\varphi(I)$ este interval şi de aici $w(I)=\psi\circ f\circ\varphi(1)=\psi(f(\varphi(I)))=\psi(f(J))=\psi([0,1])=\mathbb{R}$.

Se cunoaşte comportarea aleatorie în raport cu operațiile algebrice a funcțiilor cu proprietatea lui Darboux, acestea fiind stabile doar în raport cu compunerea funcțiilor (acolo unde compunerea se poate efectua). Ne putem întreba ce se întâmplă dacă se întăresc cu puțin proprietățile măcar a uneia dintre funcții.

12. 1. 11. Propoziție Există funcții $u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, u continuă şi v cu proprietatea lui Darboux astfel încât $u+v$ nu are proprietatea lui Darboux.

Demonstrație: Considerăm funcția w definită în Corolarul 12.1.10. Reamintim că pentru orice interval

$$I\subseteq\mathbb{R},\ w(I)=\mathbb{R}.$$

(1)

Fie $A=\{x\in\mathbb{R}\mid w(x)=x\}$. Definim funcția $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$v(x)=\begin{cases}w(x), & \text{dacă}\ x\in\mathbb{R}\setminus A\\ 1+x, & \text{dacă}\ x\in A.\end{cases}$$

Aşa definită, funcția v are proprietatea că $v(x)\neq x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

Vom arăta că v are proprietatea lui Darboux demonstrând că $(\forall)\ a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $v((a,b))=\mathbb{R}$.

Fie pentru aceasta $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ şi fie $y\in\mathbb{R}$. Din relația (1) deducem că există $x\in(a,b)$ astfel încât $w(x)=y$.

Dacă $x\in\mathbb{R}\setminus A$, atunci obținem:

$$v(x)=y \qquad (2)$$

Dacă $x\in A$, atunci considerăm întervalul (x, b), rezultând din (1) că există $t\in(x,b)$ astfel încât $w(t)=y$.

Deoarece avem $t\neq x=w(x)=y=w(t)$, rezultă $t\notin A$ şi de aici

$$v(t)=w(t)=y \qquad (3)$$

Din (2) şi (3) rezultă că există x sau t în intervalul (a, b) astfel încât $v(x)=y$ sau $v(t)=y$, adică $v((a,b))=\mathbb{R}$.

Considerăm acum $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $u(x)=-x$, funcție care este evident continuă.

Deoarece $v(x) \neq x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, rezultă că funcția $u+v$ nu se anulează.
Alegem $x_1 < 0$ astfel ca $v(x_1) > 0$ şi $x_2 < 0$ astfel ca $v(x_2) < 0$.
Avem:

$$(u+v)(x_1) = -x_1 + v(x_1) > 0$$

$$(u+v)(x_2) = -x_2 + v(x_2) < 0$$

şi cum $u+v$ nu se anulează, rezultă că $u+v$ nu are proprietatea lui Darboux.

Bibliografie

1. **V., Neagu,** *Contraexemple în analiza matematică pentru licee*, Foaia Matematică, Chişinău, 1/1996
2. **E., Popa,** *Probleme de analiză matematică pentru clasele XI-XII*, Editura Moldova, Iaşi, 1995
3. **B.R., Gelbaum, J.M.H. Olmsted,** *Contraexemple în analiză*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1973
4. **O., Koneth,** *Greşeli tipice în analiza matematică*,

12.2. Contraexemple sub formă de probleme rezolvate

Pornind de la unele “evidente intuitive” vom formula câteva probleme de existență a unor funcții cu anumite proprietăți “patologice” care au în mod surprinzător răspuns pozitiv.

Construcția unei funcții “anormale”, cum este şi funcția lui Riemann a apărut la începutul fundamentării analizei matematice. Un tip de astfel de funcții sunt funcțiile continue peste tot şi nederivabile în nici un punct. Primul exemplu de acest fel a fost dat de Weierstrass în jurul anului 1875. De atunci s-au construit numeroase exemple: Hardy (1916), Besicovitch (1922), Van der Werden (1930) şi alții.

R12.2.1. Există funcții nemărginite în orice interval?

Funcțiile elementare şi funcțiile obținute prin compuneri sau operații cu funcții elementare, cele care formează fondul principal de referință pentru funcție, sunt nemărginite sau nemărginite spre $\pm\infty$ şi pot fi nemărginite în vecinătatea unor puncte în care avem asimptota verticală. Este greu de imaginat o funcție care să fie nemărginită pe orice interval.

Contraexemplu. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} n \text{ dacă } x\in\mathbb{Q},\ x=\dfrac{m}{n},\ (m,n)=1,\ n>0, \\ 0 \text{ dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

este nemărginită pe orice interval $(a,b)\subset\mathbb{R}$.

Dacă prin absurd *f* ar fi mărginită în intervalul (a, b) atunci toți numitorii numerelor raționale din acest interval ar fi mai mici decât un anumit număr natural $M\in\mathbb{N}$. Deoarece intervalul (a, b) este mărginit, trebuie ca şi numărătorii să fie mărginiți şi fiind din $\mathbb{Z}$, ei ar lua doar o mulțime finită de valori. În consecință în (a, b) am avea un număr finit de numere raționale (contradicție)

R12.2.2. Există funcție mărginită pe un interval închis, care nu are extreme locale?

Se ştie că orice funcție continuă definită pe un interval închis, îşi atinge maximul şi minimul, în particular pe orice subinterval închis ea admite maxime şi minime locale. Pare absurd că există funcție mărginită dar care în nici un interval să nu admită puncte de extrem.

Contraexemplu. Funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{(-1)^n\cdot n}{n+1},\ x\in\mathbb{Q},\ x=\dfrac{m}{n},\ (m,n)=1,\ n>0 \\ 0 \quad,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Avem $\left|f(x)\right| < 1$, $x \in [0,1]$, mai precis imaginea oricărui interval $[a,b] \subset [0,1]$ cu $a < b$, este $f([a,b]) \subset (-1,1)$, căci în jurul oricărui punct irațional există şir $(x_n)_n$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ şi şir $(y_n)_n$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = -1$, dar valorile 1 şi -1 nu se iau.

R12.2.3. Dați exemplu de funcții transcendente şi demonstrați transcendența lor.

La clasele primare şi gimnaziale, elevii rămân cu senzația că numerele raționale sunt "cele mai multe", mult mai puține par a fi numerele iraționale algebrice (radicali) şi cu mult mai rare par a fi numerele transcendentale. Această impresie este complet eronată. De fapt, numerele raționale şi numerele algebrice pot fi puse în bijecție cu mulțimea numerelor naturale (pot fi ordonate într-un şir), adică sunt mulțimi numărabile, pe când mulțimea numerelor transcendete nu (este "mai mare").

Metodele de demonstrare a transcendenței unor numere (e sau π) sunt destul de grele şi, în general, specifice fiecărui număr. De aceea este interesant să punem în evidență şi să demonstrăm transcendența unor funcții.

Amintim câteva definiții:

Definiția 1. Un număr real A este **număr algebric** dacă există un polinom $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ astfel ca

$$a_0 + a_1 \cdot A + a_2 \cdot A^2 + \ldots + a_n \cdot A^n = 0 .$$

Un număr care nu este algebric se numeşte **număr transcendent**.

Definiția 2. O funcție $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte **funcție algebrică** dacă există o funcție nenulă de forma

$$P(u) = a_0(x) + a_1(x) \cdot u + \ldots + a_n(x) \cdot u^n$$

unde $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x) \in \mathbb{R}[X]$ sunt polinoame cu coeficienți reali, astfel ca

$$P(\varphi(x)) = a_0(x) + a_1(x) \cdot \varphi(x) + \ldots + a_n(x) \cdot (\varphi(x))^n = 0$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Exemple. 1). Funcția $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcție transcendentă. Dacă prin absurd am avea o relație de forma

$$a_0(x) + a_1(x) \cdot e^x + a_2(x) \cdot e^{2x} + \ldots + a_n(x) \cdot e^{nx} = 0, \ x \in \mathbb{R} ,$$

trecând la limită $x \to -\infty$ obținem $\lim\limits_{x\to-\infty} a_0(x) = 0$ şi a_0 fiind polinom, rezultă $a_0 = 0$. Apoi, împărțim în relație cu e^x şi trecând din nou la limită rezultă $a_1 = 0$ şi, inductiv, $a_2 = 0, \ldots, a_n = 0$.

2) Funcția $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcție transcendentă.

Dacă $a_0(x)+a_1(x)\cdot\sin x+a_2(x)\cdot\sin^2 x+\ldots+a_n(x)\cdot\sin^n x=0$, $x\in\mathbb{R}$. Pentru $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ rezultă $a_0(k\pi)=0$, $k\in\mathbb{Z}$, deci polinomul a_0 ar avea o infinitate de rădăcini, rezultă $a_0=0$. Apoi, avem:

$$\sin x(a_1(x)+a_2(x)\sin x+\ldots+a_n(x)\sin^{n-1} x)=0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Deoarece $\sin x$ se anulează doar în punctele izolate $A=\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ funcția continuă $a_1(x)+a_2(x)\sin x+\ldots+a_n(x)\sin^{n-1} x$ trebuie să se anuleze pe $\mathbb{R}\setminus A$, şi din construcție ea este nulă peste tot. Inductiv se arată că $a_1=0, a_2=0,\ldots,a_n=0$.

R12.2.4. Există funcții continue al căror produs este o funcție care nu este uniform continuă?

Se ştie că produsul a două funcții continue este tot o funcție continuă. Este de aşteptat ca şi produsul a două funcții uniform continue să dea o funcție uniform continuă.

Contraexemplu. Funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ şi
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sin x$

sunt uniform continue, dar funcția produs $h(x)=x\cdot\sin x$ nu este uniform continuă.

Avem $|f(x)-f(y)|=|x-y|$ şi $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$ relații care asigură uniform continuitatea funcțiilor *f* şi *g*. Fie $\varepsilon>0$, presupunem că există $\delta_\varepsilon>0$, $\delta_\varepsilon\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel ca: dacă $|x-y|<\delta_\varepsilon$ să avem $|h(x)-h(y)|<\varepsilon$. Luăm $x=y+\frac{1}{2}\delta_\varepsilon$ şi $y=2n\pi$, $n\in\mathbb{N}^*$ şi avem

$$|x-y|=\frac{1}{2}\delta_\varepsilon<\delta_\varepsilon,\ |h(x)-h(y)|=|x\sin x-y\sin y|=$$
$$=\left|\left(2n\pi+\frac{1}{2}\delta_\varepsilon\right)\sin\frac{1}{2}\delta_\varepsilon\right|=\left(2n\pi+\frac{1}{2}\delta_\varepsilon\right)\left|\sin\frac{1}{2}\delta_\varepsilon\right|\ne 0$$

şi pentru *n* suficient de mare $\left(2n\pi+\frac{1}{2}\delta_\varepsilon\right)\left|\sin\frac{1}{2}\delta_\varepsilon\right|>\varepsilon$ (contrar uniform continuității).

R12.2.5. Există funcție monotonă, discontinuă într-o mulțime numărabilă densă?

Intuitiv este greu de conceput un astfel de exemplu, deoarece în fiecare punct al unei mulțimi dense funcția trebuie să facă un salt ascendent.

Exemplu. Fie $A=\left\{a_n \,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}\subset\mathbb{R}$ o mulțime densă (în particular s-ar putea lua $A=\mathbb{Q}$ care să ordoneze într-un şir). Pentru fiecare $x\in\mathbb{R}$ considerăm mulțimea $A_x=\left\{a_n\in A \,\middle|\, a_n\le x\right\}$, mulțime care poate fi finită sau infinită. Dacă $A_x=\{a_{n_1},a_{n_2},\ldots,a_{n_k},\ldots\}$ atunci definim $f(x)=\frac{1}{n_1^2}+\frac{1}{n_2^2}+\ldots+\frac{1}{n_k^2}$ dacă A_x este finită, sau $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{n_1^2}+\frac{1}{n_2^2}+\ldots+\frac{1}{n_k^2}\right)$ dacă A_x este infinită. Se demonstrează uşor că şirul $h_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ este convergent şi atunci pentru orice $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$ şirul $c_k=\frac{1}{n_1^2}+\frac{1}{n_2^2}+\ldots+\frac{1}{n_k^2}$ este convergent. Astfel funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este bine definită şi discontinuă în punctele mulțimii A, în fiecare punct a_n avem un salt de mărimea $s_n=\lim\limits_{x\searrow a_n}f(x)-\lim\limits_{x\nearrow a_n}f(x)$.

R12.2.6. Există funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă pe (a,b) şi derivabilă pe (a,b) cu $f(a)=f(b)$ şi pentru care $f'(x)\neq 0$ pentru orice $x\in(a,b)$?

Teorema lui Rolle afirmă că dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este:

a) continuă pe $[a,b]$;
b) derivabilă pe (a,b);
c) $f(a)=f(b)$,

atunci există $c\in(a,b)$ astfel ca $f'(c)=0$.

Se poate arăta că fiecare din condițiile a), b), c) sunt necesare. Una din condițiile la care s-ar părea că se poate renunța este să cerem continuitatea doar pe intervalul (a,b).

Contraexemplu. Există funcții $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continue şi derivabile pe (a,b) cu $f(a)=f(b)$, pentru care $f'(c)\neq 0$ pentru orice $c\in(a,b)$.

Definim funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\\ 0, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases},$$

care îndeplineşte ipotezele contraexemplului dar $f'(x)=\cos x\neq 0$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

R12.2.7. Există funcție continuă doar într-un punct şi derivabilă în acest punct?

Exemplu. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$. Avem $C(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x^2=0\right\}=\{0\}$, $\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$, deci f este derivabilă în $x_0=0$ şi $f'(0)=0$.

R12.2.8. Există funcție derivabilă care are un punct de minim dar care nu este crescătoare pe nici un interval situat în dreapta punctului şi nici descrescătoare pe nici un interval din stânga punctului?

Exemplu. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2\left(\sin\dfrac{1}{x}+2\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ satisface proprietatea pentru $x_0=0$.

Avem $f(x)-f(0)=x^2\left(\sin\dfrac{1}{x}+2\right)>0$ pentru $x\neq 0$, deci punctul $x_0=0$ este un punct de minim absolut (global) pentru *f*. Funcția *f* este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ şi arătăm că este derivabilă şi în 0.

Avem: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\left(\sin\dfrac{1}{x}+2\right)=0$, deci $f'(0)=0$. Arătăm că în orice vecinătate $(0,\varepsilon)$, situată la dreapta lui zero, există a,a',b,b' astfel ca $a<a'$, $b<b'$, $f(a)<f(a')$ şi $f(b)>f(b')$ (pe $(0,\varepsilon)$ *f* nu este nici crescătoare nici descrescătoare).

Definim şirurile $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ prin $y_n=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{6}+n\pi}$, $z_n=\dfrac{1}{-\dfrac{\pi}{6}+n\pi}$, convergente la zero, şi avem: $y_{2n+1}<z_{2n+1}$, $y_{2n}<z_{2n}$, $n\in\mathbb{N}$ şi definim: $a_n=y_{2n+1}$, $a_n'=z_{2n+1}$, $b_n=y_{2n}$, $b_n'=z_{2n}$. Avem

$$f(a_n)=a_n^2\left(2-\frac{1}{2}\right)<(a_n')^2\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)=f(a_n')$$

$$f(b_n)=b_n^2\left(2+\frac{1}{2}\right)>(b_n')^2\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)=f(b_n').$$

O clasă de funcții cu proprietăți surprinzătoare este clasa funcțiilor Hamel, funcțiile aditive ($f(x+y)=f(x)+f(y)$) care nu sunt continue (nu sunt de forma $f(x)=a\cdot x$).

În capitolul de exerciții funcționale sunt demonstrate următoarele proprietăți:

P1. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție aditivă şi neinjectivă, atunci pentru orice $x_0\in\mathbb{R}$, mulțimea $\left\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)=f(x_0)\right\}$ este densă în $\mathbb{R}$.

P2. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție aditivă, surjectivă, atunci f este bijectivă sau f are proprietatea lui Darboux.

13. Ecuații funcționale în analiza matematică

Multe dintre ecuațiile funcționale care au fost studiate până în prezent, au apărut în mod natural, căutând funcțiile care verifică anumite proprietăți dorite. În rezolvarea unei ecuații în care domeniul de definiție şi codomeniul au şi structuri algebrice şi structuri topologice, metodele de algebră şi de analiză matematică se întrepătrund. Impunerea unor condiții suplimentare asupra soluțiilor (derivabilitate, continuitate, monotonie) permite de multe ori determinarea tuturor soluțiilor dintr-o clasă de funcții, soluții care se caracterizează greu în caz general.

13.1. Ecuația lui Cauchy pe R

Ecuația funcțională considerată de Cauchy încă înainte de anul 1900, pe cât de naturală, s-a dovedit deosebit de dificilă, părând că soluția "scapă printre degete". Determinarea soluțiilor discontinue (nebanale) ale acestei ecuații a dat de lucru multor matematicieni. Munca lor a contribuit la dezvoltarea sau consolidarea unor domenii diverse ale matematicii: spații vectoriale, baze Hamel, cardinale, densitate, teoria măsurii, structuri algebrice, morfisme. Proprietățile surprinzătoare ale funcțiilor aditive discontinue, oferă o mulțime de exemple de funcții "patologice", multe din ele contrazicând intuiția şi demonstrând necesitatea raționamentului algebric abstract.

Definiția 13.1.1. Ecuația funcțională

$$(C):\begin{cases} f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \\ f(x+y)=f(x)+f(y); \quad x,y\in\mathbf{R} \end{cases}$$

se numeşte ecuația lui Cauchy iar soluțiile ei se numesc funcții aditive.

Teorema 13.1.2. Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcție aditivă, atunci:

(a) $f(q)=qf(1)$, pentru orice $q\in\mathbf{Q}$

(b) $f(qx)=qf(x)$, pentru orice $q\in\mathbf{Q}$ şi $x\in\mathbf{R}$

(c) Funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)-f(1)\cdot x$, $x\in\mathbf{R}$ este funcție aditivă şi restricția ei la **Q** este $g|_{\mathbf{Q}}=0$.

Demonstrație. Din condiția $f(x+y)=f(x)+f(y)$; $x,y\in\mathbf{R}$, prin inducție rezultă $f(x_1+x_2+...+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$ şi în particular $f(nx)=nf(x)$; $n\in\mathbf{N}$

$f(0)=0$

$f(-nx)+f(nx)=f(0)=0$, deci $f(-nx)=-nf(x)$.

Deci $f(kx)=kf(x)$; $k\in\mathbf{Z}$, $x\in\mathbf{R}$.

Avem: $f(x)=f\left(\frac{x}{n}+...+\frac{x}{n}\right)=nf\left(\frac{x}{n}\right)$, deci $f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x)$ şi $f\left(\frac{mx}{n}\right)=\frac{1}{n}f(mx)=\frac{m}{n}f(x)$; $m,n\in\mathbf{Z}$, $n\neq 0$, $x\in\mathbf{R}$, deci $f(qx)=qf(x)$; $x\in\mathbf{R}$, $q\in\mathbf{Q}$.

Pentru $x=1$ obţinem $f(q)=qf(1)$, $q\in\mathbf{Q}$, deci punctele (a) şi (b) din teoremă sunt demonstrate.

(c) Din (a) $f(q)=qf(1)$; $q\in\mathbf{Q}$, deci $f(q)=f(q)-qf(1)=0$. Avem $g(x+y)=f(x+y)-(x+y)f(1)=f(x)-xf(1)+f(y)-yf(1)=g(x)+g(y)$ $x,y\in\mathbf{R}$, deci *g* este aditivă.

Observaţia 13.1.3. • Din (a) rezultă că restricţia la **Q** a unei funcţii aditive este perfect determinată de valoarea $f(1)$. (Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ şi $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ sunt funcţii aditive cu proprietatea $f(1)=g(1)$ atunci $f|_{\mathbf{Q}}=g|_{\mathbf{Q}}$).

• Din punctul (c) rezultă că orice funcţie aditivă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este de forma $f(x)=g(x)+ax$, unde $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este funcţia aditivă şi $g|_{\mathbf{Q}}=0$, deci clasa funcţiilor în care se caută soluţiile ecuaţiei lui Cauchy se poate restrânge la funcţiile ce au restricţia la **Q**, funcţia nulă.

Teorema 13.1.4. Dacă $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcţie aditivă şi $g|_{\mathbf{Q}}=0$, atunci pentru orice interval nevid $(a,b)\subset\mathbf{R}$ avem:

a) Dacă *g* este mărginită pe (a,b), atunci *g* este mărginită pe **R**.

b) $g((a,b))=g(\mathbf{R})$.

c) Dacă *g* este mărginită pe (a,b), atunci $g=0$.

d) Dacă $g\neq 0$, atunci mulţimea $g((a,b))$ este densă în **R**.

Demonstraţie. Afirmaţia a) este o consecinţă a afirmaţiei b).

b) Fie $y_0=g(x_0)\in \operatorname{Im} g=g(\mathbf{R})$ şi q un număr raţional din intervalul $(a-x_0,b-x_0)$. Atunci $x_0+q\in(a,b)$ şi $g(x_0)+g(q)=g(x_0)$, deci $y_0=g(x_0+q)\in g((a,b))$.

c) Presupunem prin absurd că există $x_0\in\mathbf{R}$ astfel ca $g(x_0)\neq 0$. Din $g(nx_0)=ng(x_0)$, $n\in\mathbf{N}$ rezultă că mulţimea $\{g(nx_0)\mid n\in\mathbf{N}\}$ este nemărginită, deci $g(\mathbf{R})$ este nemărginită şi din punctul a) rezultă că *g* este nemărginită pe (a,b).

d) Fie $x_0\in\mathbf{R}$ astfel ca $g(x_0)\neq 0$. Folosind punctul b) este suficient să arătăm că $\operatorname{Im} g=g(\mathbf{R})$ este densă în **R**.

Fie $I\subset\mathbf{R}$ un interval de lungime $\varepsilon>0$. Există $n\in\mathbf{N}$ astfel ca

$$\left|\frac{1}{n}g(x_0)\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|g\left(\frac{1}{n}x_0\right)\right| < \varepsilon .$$

Mulțimea $\left\{kg\left(\frac{1}{n}x_0\right) \middle| k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{g\left(\frac{k}{n}x_0\right) \middle| k \in \mathbf{Z}\right\}$ formează o diviziune echidistantă a axei reale, cu distanța între două noduri consecutive mai mică decât ε, deci în orice interval de lungime mai mică decât ε, în particular în *I*, există un nod al diviziunii, deci există $k \in \mathbf{Z}$ astfel ca $g\left(\frac{k}{n}x_0\right) \in I$.

Observația 13.1.5. Dacă $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție aditivă şi $g|_{\mathbf{Q}} = 0$, atunci $\operatorname{Im} g = \{0\}$ sau $\operatorname{Im} g$ este o mulțime densă în **R**.

Teorema 13.1.6. Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție aditivă şi are una din următoarele proprietăți:

a) *f* este mărginită pe un interval $(a,b) \subset \mathbf{R}$

b) *f* este local mărginită

c) *f* este monotonă

d) *f* este continuă

atunci $f(x) = f(1)x, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

Demonstrație. a) Dacă f este mărginită pe (a,b), atunci funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - xf(1)$ este mărginită pe (a,b) şi din Teorema 1, punctul e), *g* este aditivă şi $g|_{\mathbf{Q}} = 0$.

Din teorema 2, punctul c) rezultă că $g = 0$, deci $f(x) = xf(1)$, $x \in \mathbf{R}$.

b) Dacă *f* e local mărginită, atunci pentru orice $x_0 \in \mathbf{R}$ există un interval $(a,b) \subset \mathbf{R}$ astfel ca $x_0 \in (a,b)$ şi *g* este mărginită pe (a,b), deci suntem în ipoteza a).

c) Dacă *f* este monotonă şi $a < b$, atunci

$$f((a,b)) \subset f([a,b]) = [A,B],$$

unde $A = \min\{f(a), f(b)\}$ şi $B = \max\{f(a), f(b)\}$, deci *f* este mărginită pe (a,b) şi suntem în ipoteza a).

d) O funcție continuă transformă intervale închise în intervale închise.

Dacă $a < b$, atunci $f((a,b)) \subset f([a,b]) = [A,B]$, unde

$$A = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \text{ şi } B = \max\{df(x) \mid x \in [a,b]\},$$

deci $f((a,b))$ este mărginită şi suntem în ipoteza a).

Definiția 13.1.7. O funcție discontinuă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică ecuațiile Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbf{R}$ se numeşte funcție Hamel.

Următoarea teoremă pune în evidență câteva proprietăți "patologice" ale tuturor funcțiilor Hamel.

Teorema 13.1.8. Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcție Hamel şi *a, b, c, d* sunt numere reale cu $a<b$, $c<d$, atunci:

(a) Mulțimea $f((a,b))$ este densă în **R**.

(b) Mulțimea $f^{-1}((c,d))$ este densă în **R**.

(c) Mulțimea $G_f\subset\mathbf{R}^2$ (graficul funcției *f*), este densă în $\mathbf{R}^2$.

Demonstrație. Fie funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)-xf(1)$, $x\in\mathbf{R}$, care este aditivă şi restricția $g|_{\mathbf{Q}}=0$. Deoarece *f* este discontinuă (funcție Hamel), există $x_0\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ astfel ca $g(x_0)=y_0\neq 0$. Mulțimile $\{qy_0\mid q\in\mathbf{Q}\}$ şi $\{q'+qx_0\mid q\in\mathbf{Q}\}$ sunt dense în **R**, deci oricare ar fi intervalele $(c,d)\subset\mathbf{R}$ şi $(a,b)\subset\mathbf{R}$, există $q\in\mathbf{Q}$ astfel ca $qy_0\in(c,d)$ şi există $q'+qx_0\in(a,b)$.

Avem $g(q'+qx_0)=qy_0$, deci mulțimea $g((a,b))$ este densă în **R**.

(a) Dacă $f(1)=0$, atunci $f=g$, deci $f((a,b))=g((a,b))$ este densă.

Dacă $f(1)=k\neq 0$, atunci mulțimea $f((a,b))$ este densă, dacă şi numai dacă mulțimea $\frac{1}{k}f((a,b))=\left(\frac{1}{k}f\right)((a,b))$ este densă, deci putem presupune $f(1)=1$.

Există un interval $(a_1,b_1)\subset(a,b)$ astfel ca $b_1-a_1<d-c\Leftrightarrow c-a_1<d-b_1$. Deoarece mulțimea $g((a_1,b_1))$ este densă, există $x_0\in(a_1,b_1)$ astfel ca $g(x_0)\in(c-a_1,d-b_1)$.

Avem $f(x_0)=g(x_0)+x_0\in(c-a_1+a_1,d-b_1+b_1)=(c,d)$.

(b) Din punctul (a), mulțimea $f((a,b))$ este densă în **R** pentru orice $a<b$, deci $f((a,b))\cap(c,d)\neq\varnothing\Leftrightarrow f^{-1}((c,d))\cap(a,b)\neq\varnothing$.

(c) Din (a) şi (b) rezultă că pentru orice dreptunghi $(a,b)\times(c,d)\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, avem $f((a,b))\cap(c,d)\neq\varnothing$, deci $G_f\cap(a,b)\times(c,d)\neq\varnothing$.

Observația 13.1.9. Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcție aditivă, $Kerf=\{x\in\mathbf{R}\mid f(x)=0\}$ este nucleul funcției *f*, $\operatorname{Im}f=\{f(x)\mid x\in\mathbf{R}\}$ este imaginea funcției *f*, atunci:

(a) $Kerf=\{0\}$ sau $Kerf$ este densă în **R**.

(b) $\operatorname{Im}f=\{0\}$ sau $\operatorname{Im}f$ este densă în **R**.

(c) Dacă *f* este neinjectivă $\Leftrightarrow$ $Kerf$ este densă în **R**.

(d) Dacă f este neinjectivă, atunci toate mulțimile de nivel $N_y = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = y\}$, $y \in \operatorname{Im} f$, sunt dense în **R**.

Observația 13.1.10. Pe submulțimi ale lui **R** se pot considera alte ecuații "de tip Cauchy" ca $f(x+y) = f(x)f(y)$, $f(xy) = f(x)+f(y)$ sau $f(xy) = f(x)f(y)$, care prin substituții adecvate se pot reduce la ecuația lui Cauchy.

Rezolvarea unor astfel de ecuații, în ipoteze mai tari, ca de exemplu derivabilitatea devine foarte ușoară.

În ecuația lui Cauchy, derivăm în raport cu *y* și obținem:

$$f'(x+y) = f'(y), \quad x, y \in \mathbf{R}$$

Dacă facem $y = 0$ rezultă $f'(x) = f'(0) = c$ și $f(x) = cx + d$, $x \in \mathbf{R}$.

Întorcându-ne în ecuație obținem $d = 0$, deci soluțiile derivabile sunt $f(x) = cx$, $x \in \mathbf{R}$ unde $c \in \mathbf{R}$ este o constantă arbitrară.

13.2. Ecuația lui Jensen

Interesul pentru ecuația funcțională a lui Jensen, parvine din studiul funcțiilor convexe, des folosite în teoria aproximării, funcții definite prin inecuația lui Jensen.

Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval (mulțime convexă).

Definiția 13.2.1. Ecuația funcțională

$$J : \begin{cases} f : I \to \mathbf{R} \\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in I \end{cases}$$

se numește ecuația lui Jensen (pe intervalul *I*).

Observația 13.2.2. O funcție $f : I \to \mathbf{R}$ care verifică inecuația lui Jensen: $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ se numește convexă (mai precis $\dfrac{1}{2}$ convexă, *J* convexă sau **Q** convexă).

Pentru resolvarea ecuației *J* sunt utile următoarele observații:

Observația 13.2.3. (a) Dacă *f* este soluție a ecuației *J* atunci pentru orice $c \in \mathbf{R}$, funcția $f + c$ este de asemenea soluție a ecuației *J*, deci este suficient să căutăm doar soluțiile care într-un punct dat iau o valoare dată.

(b) Dacă $x_0 \in I$ verifică ecuația *J* pe *I* atunci funcția $g : I_1 \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x + x_0)$, $x \in I_1$, verifică ecuația lui Jensen pe intervalul

$I_1 = I - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in I\}$. De aici rezultă că este suficient să rezolvăm ecuația lui Jensen pe intervale care conțin originea.

(c) Dacă $0 \in I$ şi notăm cu $J_0 = \{f_0 : I \to \mathbf{R} \mid f$ verifică J şi $f_0(0) = 0\}$ atunci mulțimea soluțiilor ecuației Jensen este

$$J = \{f_0 + c \mid f_0 \in J_0, c \in \mathbf{R}\}.$$

Dacă $0 \in I$ şi $f_0 \in J$ atunci pentru orice $x \in I$ şi $n \in \mathbf{N}$ avem egalitatea:

$$f_0\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f_0(x)}{2^n}.$$

(Dacă în ecuația J punem $y = 0$ rezultă $f_0\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f_0(x)}{2}$ şi prin inducție înlocuind pe x cu $\frac{x}{2^n}$ obținem: $f_0\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{f_0(x)}{2^{n+1}}$).

(e) Funcția $f : I \to \mathbf{R}$ este soluție a ecuației J pe intervalul I, dacă şi numai dacă funcția $f_0 : I_1 \to \mathbf{R}$

$$f_0(x) = f(x + x_0) - f(x_0), \quad x \in I_1$$

este soluție a ecuației Jensen pe intervalul $I_1 = I - x_0$ şi verifică relația $f_0(0) = 0$.

(f) Orice funcție aditivă verifică ecuația lui Jensen pe orice interval ($f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2} = \frac{f(x) + f(y)}{2}$ deci $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$).

(g) Orice funcție de forma $f(x) = g(x) + c$, $x \in I$ cu $c \in \mathbf{R}$ o constantă arbitrară, verifică ecuația lui Jensen.

Vom vedea în continuare că singurele funcții care verifică ecuația J sunt cele de la (g).

Teorema 13.2.4. Dacă funcția $f_0 : (-a, a) \to \mathbf{R}$ verifică ecuația lui Jensen şi $f_0(0) = 0$, atunci există o unică funcție aditivă $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel ca restricția $f_1|_{(-a,a)} = f_0$.

Demonstrație. Din observația 1.4.2 (d), avem: $f_0\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f_0(x)}{2}$ şi f_0 fiind soluție a ecuației J

$f_0\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f_0(x)+f_0(y)}{2}$, deci $f_0(x+y)=f_0(x)+f_0(y)$, adică funcția f_0 este aditivă pe intervalul $(-a,a)$.

Dacă f_1 este aditivă atunci $f(2^n x)=2^n f(x)$ pentru orice $n\in\mathbf{N}$ şi orice $x\in\mathbf{R}$. Luăm intervalele $D_n=(-2^n a,2^n a)$, $n\in\mathbf{N}$ şi prelungim f_0 de la $(-a,a)$ la D_n prin relația $f_1(2^n x)=2^n f_0(x)$, unicul mod de prelungire ca f_1 să fie aditivă. Cum $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} D_n=\mathbf{R}$, rezultă că obținem funcția f_1 ca unica funcție aditivă a cărei restricție la $(-a,a)$ este funcția f_0.

Folosind teorema 1.4.1 şi observația 1.4.2(e) obținem:

Teorema 13.2.5. Funcția $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ verifică ecuația

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

pentru orice $x,y\in[a,b]$, dacă şi numai dacă există o funcție aditivă $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ şi o constantă reală $c\in\mathbf{R}$ astfel ca:

$$f(x)=g(x)+c,\quad x\in[a,b]$$

Corolarul 13.2.6. Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ verifică ecuația lui Jensen

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad x,y\in\mathbf{R}$$

dacă şi numai dacă funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)-f(0)$, $x\in\mathbf{R}$, verifică ecuația lui Cauchy

$$g(x+y)=g(x)+g(y),\quad x,y\in\mathbf{R}$$

Corolarul 13.2.7. Singurele funcții continue (monotone, local mărginite) $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ care verifică ecuația

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad x,y\in(a,b)$$

sunt funcțiile polinomiale $f(x)=cx+d$, $x\in(a,b)$ unde c şi d sunt constante reale arbitrare.

13.3. Ecuația lui D'Alembert

Ecuația funcțională

$$A:\begin{cases} f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y), \quad x,y\in\mathbf{R}\end{cases}$$

este cunoscută sub numele de ecuația cosinusului sau ecuația lui D'Alembert. Rezolvarea ei fără restricții este complicată şi nu ne vom ocupa de ea aici. Ne propunem să determinăm doar funcțiile continue care verifică ecuația (*A*).

Dacă punem în ecuație $y=0$, rezultă $2f(x)=2f(x)f(0)$, din care, dacă *f* este neconstantă ($f\neq 0$ şi $f\neq 1$), rezultă $f(0)=1$.

Dacă punem $x=0$, rezultă $f(-y)=f(y)$, $y\in\mathbf{R}$, deci soluțiile sunt funcții pare.

Dacă punem $x=ny$, rezultă

$$f((n+1)y)=2f(y)f(ny)-f((n-1)y) \tag{1}$$

Dacă în (1) punem $x=y$, rezultă $f(2x)+f(0)=2(f(x))^2$, în care dacă facem $t=2x$, obținem:

$$\left(f\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2=\frac{f(t)+1}{2},\quad t\in\mathbf{R} \tag{2}$$

(ecuația verificată de funcțiile cos şi ch).

Deoarece $f(0)=1$, există un interval $[-a,a]$ astfel ca $f(x)>0$, pentru orice $x\in[-a,a]$.

În continuare diferențiem două cazuri (inspirate de soluțiile cos şi ch).

Cazul 1. Dacă $0<f(a)\leq f(1)$, atunci există $c\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ astfel ca $f(a)=\cos c$. Din relația (2), prin inducție se arată că:

$$f\left(\frac{a}{2^n}\right)=\cos\frac{c}{2^n},\quad x\in\mathbf{N}. \tag{3}$$

Din (3) folosind relația (1) se arată prin inducție că:

$$f\left(\frac{k}{2^n}a\right)=\cos\left(\frac{k}{2^n}c\right),\quad \text{pentru orice } k,n\in\mathbf{N}.$$

Deoarece mulțimea $\left\{M=\frac{k}{2^n}a \mid k\in\mathbf{N},n\in\mathbf{N}\right\}$ este densă în $[0,\infty]$ şi *f* este continuă, rezultă:

$$f(x)=\cos bx,\quad x\in\mathbf{R}.$$

Cazul 2. Dacă $f(a)>1$, există $c>0$ astfel ca $f(a)=\mathrm{ch}c$. La fel ca în cazul 1, se arată că singura soluție continuă este $f(x)=\mathrm{ch}bx$, $x\in\mathbf{R}$, de unde $b=\frac{c}{a}$.

În concluzie obținem

Teorema 13.3.1. Funcțiile continue ce verifică ecuația lui D'Alembert sunt:

$$f = 0, \quad f(x) = \cos bx, \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{şi} \quad f(x) = \text{ch}bx, \quad x \in \mathbf{R},$$

unde $b \in \mathbf{R}$ este o constantă arbitrară.

Observația 13.3.2. Determinarea soluțiilor în ipoteza că funcțiile *f* sunt de două ori derivabile este mult mai simplă.

Derivăm în ecuație în raport cu *x*, respectiv cu *y* de două ori şi obținem relațiile:

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$$
$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$$

deci $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$ şi obținem $f''(x) = af(x)$.

Dacă $a = -\omega^2$ rezultă $f(x) = b\cos\omega x + c\sin\omega x$.

Dacă $a = \omega^2$ rezultă $f(x) = b\text{ch}\omega x + c\text{sh}\omega x$.

Impunând acestor funcții condițiile $f(0) = 1$, $f(-x) = f(x)$ rezultă $f(x) = \cos\omega x$ sau $f(x) = \text{ch}\omega x$, $x \in \mathbf{R}$.

13.4. Ecuația lui Pexider

În unele ecuații funcționale, apar mai multe funcții necunoscute, un tip de astfel de funcții fiind ecuațiile de tip Pexider.

Definiția 13.4.1. Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcții atunci ecuația funcțională:

$$(P) : f(x+y) = g(x) + h(y), \quad x, y \in \mathbf{R}$$

se numeşte ecuația lui Pexider cu funcțiile necunoscute f, g şi *h*.

Teorema 13.4.2. Funcțiile f, g şi *h* verifică ecuația lui Pexider (*P*) dacă şi numai dacă există o funcție aditivă $f_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi constantele $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca:

$$f = f_0 + a + b, \quad g = f_0 + a, \quad h = f_0 + b.$$

Demonstrație. Dacă *f, g, h* sunt de forma dată avem:

$$f(x+y) = f_0(x+y) + a + b = f_0(x) + f_0(y) + a + b =$$
$$= (f_0(x) + a) + (f_0(y) + b) = g(x) + h(y).$$

Reciproc. Dacă punem în (*P*) $y = 0$ rezultă: $f(x) = g(x) + h(0)$ şi notând $h(0) = b$ rezultă $g(x) = f(x) - b$.

Dacă punem în (*P*) $x = 0$ rezultă $f(y) = g(0) + h(y)$ şi notând $g(0) = a$ rezultă $h(y) = f(y) - g(0)$. Înlocuind *g* şi *h* în (*P*) obținem:

$$f(x+y) = f(x) - b + f(y) - a, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Dacă facem substituția $f(x) = f_0(x) + a + b$ obținem pentru noua funcție f_0 ecuația:

$$f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y), \quad x, y \in \mathbf{R}$$

deci f_0 este funcție aditivă şi atunci

$$f(x) = f_0(x) + a + b, \quad g(x) = f_0(x) + a, \quad h(x) = f_0(x) + b$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Observația 13.4.3. Dacă funcțiile *f, g, h* verifică ecuația (*P*) şi una din ele este funcție continuă, atunci toate cele trei funcții sunt funcții continue.

Corolarul 13.4.4. Funcțiile continue *f, g, h* care verifică ecuația lui Pexider (*P*) sunt:

$$f(x) = cx + a + b, \quad g(x) = cx + a, \quad h(x) = cx + b$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$, unde *a, b, c* sunt constante reale arbitrare.

Bibliografie

[1] J. Aczel, *Lectures on functional equations and their applications*, Academic Press, New York and London, 1966.

[2] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, Univ. Slaski, Warszawa. 1985.

[3] V. Pop, *Ecuații funcționale*, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2002.

Probleme rezolvate

R13.5.1. Să se arate că dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcţie aditivă şi neinjectivă, atunci pentru orice $x\in\mathbf{R}$ mulţimea $f^{-1}(\{f(x)\})$ este densă în **R**.

Soluţie. Deoarece *f* nu este injectivă, există $x_1,x_2\in\mathbf{R}$, $x_1\neq x_2$ astfel ca $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)=0\Leftrightarrow f(x_1-x_2)\neq 0$. Notând $x_0=x_1-x_2\neq 0$ avem $f(x_0)=0$ şi $f(qx_0)=0$, $q\in\mathbf{Q}$. Mulţimea $\{x+qx_0\mid q\in\mathbf{Q}\}=A$ este densă în **R** (pentru orice $x\in\mathbf{R}$) şi $f(x+qx_0)=f(x)+qf(x_0)=f(x)$, deci $A\subset f^{-1}(\{f(x)\})$.

R13.5.2. Să se arate că dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcţie aditivă surjectivă, atunci *f* este bijectivă sau *f* are proprietatea lui Darboux.

Soluţie. Dacă *f* nu este bijectivă, din surjectivitate rezultă că *f* este neinjectivă. Din problema 1.1.1, rezultă că pentru orice $y\in\mathbf{R}$ mulţimea $f^{-1}(\{y\})$ este densă în **R**. Dacă *y* este între $f(a)$ şi $f(b)$, mulţimea $f^{-1}(\{y\})$ fiind densă, are elemente între *a* şi *b*. Dacă $x\in(a,b)\cap f^{-1}(\{y\})$ atunci $x\in(a,b)$ şi $f(x)=y$.

R13.5.3. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie aditivă, neinjectivă. Să se arate că pentru orice $a\in\mathbf{R}$ mulţimea $N_a=\{x\in\mathbf{R}\mid f(x)=f(a)\}$ este densă în **R**.

Soluţie. Deoarece *f* este neinjectivă, există $x_1\neq x_2$ astfel ca $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow f(x_1-x_2)=0$. Dacă notăm $x_0=x_1-x_2\neq 0$, atunci mulţimea $\{a+qx_0\mid q\in\mathbf{Q}\}=A$ este densă în **R** şi

$$f(a+qx_0)=f(a)+qf(x_0)=f(a)$$

adică $A\subset N_a$, deci N_a este densă în **R**.

R13.5.4. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie aditivă cu proprietatea că există $x_0,y_0\in\mathbf{R}$ astfel ca $x_0f(y_0)\neq y_0f(x_0)$. Să se arate că oricare ar fi numerele reale $a<b$ şi $A<B$ mulţimile $f([a,b])$ şi $f^{-1}([A,B])$ sunt dense în **R**.

Soluţie. Funcţia $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)-xf(1)$ este aditivă şi $x_0g(y_0)\neq y_0g(x_0)$, deci $g(x_0)\neq 0$ sau $g(y_0)\neq 0$.

Să presupunem că $g(x_0)\neq 0$ $(x_0\neq 0)$ şi evident $g(q)=0$, $q\in\mathbf{Q}$.

Mulţimile $\{qg(x_0)q\in\mathbf{Q}\}$ şi $\{q'+qx_0\mid q'\in\mathbf{Q}\}$ sunt dense în **R**, deci oricare ar fi intervalele $[c,d]\subset\mathbf{R}$ şi $[a,b]\subset\mathbf{R}$, există $q\in\mathbf{Q}$ astfel ca $qg(x_0)\in[c,d]$ şi există $q'\in\mathbf{Q}$ astfel ca $q'+qx_0\in[a,b]$. Avem:

$g(q'+qx_0)=g(q')+qg(x_0)=qg(x_0)\in[c,d]$ deci mulțimea $f([a,b])$ este densă în **R**.

Deoarece $f([a,b])$ este densă în **R**, avem $f([a,b])\cap[A,B]\neq\varnothing \Leftrightarrow$ $f^{-1}([A,B])\cap[a,b]\neq 0$, cum intervalul $[a,b]$ este arbitrar, rezultă că $f^{-1}([A,B])$ este densă.

R13.5.5. Să se determine funcțiile continue $f:\mathbf{R}\to(-1,1)$ care verifică ecuația funcțională

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)},$$

pentru orice $x,y\in\mathbf{R}$.

Soluție. Considerăm funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care verifică relația

$$f(x)=\mathrm{th}g(x)\quad (g(x)=\mathrm{arcth}f(x)),\quad x\in\mathbf{R}$$

unde $\mathrm{th}y=\dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$, $\mathrm{th}:\mathbf{R}\to(-1,1)$ fiind funcție bijectivă cu inversa $\mathrm{arcth}:(-1,1)\in\mathbf{R}$.

Funcția g satisface ecuația:

$$\mathrm{th}g(x+y)=\frac{\mathrm{th}g(x)+\mathrm{th}g(y)}{1+\mathrm{th}g(x)\mathrm{th}g(y)}=\mathrm{th}(g(x)+g(y))$$

deci $g(x+y)=g(x)+g(y)$, $x,y\in\mathbf{R}$.

Deoarece f este continuă şi th este continuă, rezultă că funcția g este continuă şi aditivă, deci există $a\in\mathbf{R}$ astfel ca $g(x)ax$, $x\in\mathbf{R}$ $\Rightarrow f(x)=\mathrm{th}ax$, $x\in\mathbf{R}$.

R13.5.6. Să se determine funcțiile continue $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care verifică ecuația funcțională

$$f(x+y)=f(x)f(y),\quad x,y\in\mathbf{R}.$$

Soluție. Dacă există $x_0\in\mathbf{R}$ astfel ca $f(x_0)=0$ atunci $f(x)=f(x-x_0)f(x_0)=0$ deci $f=0$.

Dacă $f(x)\neq 0$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$ atunci $f(2x)=(f(x))^2>0$, deci $f:\mathbf{R}\to(0,\infty)$. Putem face substituția $f(x)=e^{g(x)}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Funcția g verifică relația $e^{g(x+y)}=e^{g(x)}\cdot e^{g(y)}=e^{g(x)+g(y)}$, deci

$$g(x+y)=g(x)+g(y),\quad x,y\in\mathbf{R}.$$

Funcția g este aditivă şi continuă, deci există $c\in\mathbf{R}$ astfel ca $g(x)=cx$, $x\in\mathbf{R}$.

Rezultă că soluțiile sunt $f=0$ sau $f(x)=^{cx}$, $x\in\mathbf{R}$ sau $f(x)=a^x$, $x\in\mathbf{R}$ unde $a>0$ este o constantă arbitrară.

R13.5.7. Să se determine funcțiile continue $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ care verifică ecuația funcțională

$$f(xy)=f(x)f(y),\quad x,y\in(0,\infty).$$

Soluție. Dacă există y_0 cu $f(y_0)=0$ atunci $f(xy_0)=0$, $x\in(0,\infty)$, deci $f=0$.

Dacă $f(x)\neq 0$, pentru orice $x\in(0,\infty)$ atunci $f(x^2)=(f(x))^2>0$ deci $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$.

Făcând schimbările de variabile $x=e^u$, $y=e^v$ și de funcție $g(u)=f(e^u)$, $g:\mathbf{R}\to(0,\infty)$, obținem pentru *g* ecuația $g(u+v)=g(u)g(v)$, $u,v\in\mathbf{R}$. Cum $g(u)>0$, pentru orice *u*, logaritmăm relația și obținem:

$$\ln g(u+v)=\ln g(u)=\ln g(v),\quad u,v\in\mathbf{R}.$$

Facem substituția $\ln g=h$ și obținem $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ funcție aditivă și continuă, deci $h(u)=au$, $u\in\mathbf{R}$, $g(u)=e^{au}$, $u\in\mathbf{R}$, $g(u)=(e^u)^a$, $u\in\mathbf{R}$, $f(x)=x^a$, $x\in(0,\infty)$, unde $a\in\mathbf{R}$ este o constantă arbitrară.

R13.5.8. Să se determine funcțiile continue $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care verifică ecuația lui Gauss

$$G: f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)f(y),\quad x,y\in\mathbf{R}.$$

Soluție. Pentru $x=y=0$ rezultă $f(0)=(f(0))^2$ deci $f(0)\in\{0,1\}$. Dacă $f(0)=0$ punem $y=0$ și obținem $f(|x|)=0$, $x\in\mathbf{R}$ deci $f(x)=0$ pentru orice $x\geq 0$. Punem în ecuație $x=y=-t$ și obținem:

$$f(-t))^2=f(\sqrt{2}\cdot|t|)=0\quad\text{deci}\quad f=0.$$

Dacă $f(0)=1$ și punem în ecuație $y=1$, rezultă $f(|x)=f(x)$ deci funcția *f* este funcție pară. E suficient să o determinăm pe $(0,\infty)$. Facem substituția de funcție $f(\sqrt{x})=g(x)$ și ecuația se scrie

$$f(\sqrt{x^2+y^2})=f(\sqrt{x^2})f(\sqrt{y^2})\Leftrightarrow g(x^2+y^2)=g(x^2)g(y^2)$$
$$\Leftrightarrow g(u+v)=g(u)g(v),\ u,v>0.$$

Dacă ar exista $u>0$ cu $g(u)=0$ atunci $g(u+v)=g(u)g(v)=0$ pentru orice $v\geq 0$, deci

$$g(t)=0,\text{pentru orice } t\geq u.$$

Dar $g(u)=g\left(2\dfrac{u}{2}\right)=\left(g\left(\dfrac{u'}{2}\right)\right)^2$, deci $g\left(\dfrac{u}{2}\right)=0$ și analog $g\left(\dfrac{u}{2^n}\right)=0$ rezultă $g(t)=0$, pentru orice $t>0$.

Rămâne de rezolvat cazul în care $g(u) \neq 0$, pentru orice $u > 0$ şi cum $g(2u) = (g(u))^2 > 0$ rezultă că funcţia g ia valori în $(0,\infty)$.

Determinăm $g:(0,\infty) \to (0,\infty)$ cu proprietatea $g(u+v) = g(u)g(v)$, $u,v \in (0,\infty)$ care se reduce la ecuaţia lui Cauchy prin logaritmare $\ln g(u+v) = \ln g(u) + \ln g(v)$ deci

$$h(u+v) = h(u) + h(v), \quad u,v \in (0,\infty)$$

unde $h(u) = \ln g(u)$.

Funcţia h fiind continuă rezultă că există $a \in \mathbf{R}$ astfel ca

$$h(x) = ax, \quad x \in (0,\infty).$$

Revenind la g şi f obţinem: $g(u) = e^{au}$, $u > 0$ şi $f(x) = e^{ax^2}$, $x \in \mathbf{R}$, unde $a \in \mathbf{R}$ este o constantă arbitrară.

Observaţie. Ecuaţia este atribuită lui Gauss şi este legată de teoria probabilităţilor, funcţia de repartiţie Gauss fiind $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbf{R}$ al cărui grafic este cunoscut sub numele de clopotul lui Gauss.

R13.5.9. Să se determine funcţiile continue $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică ecuaţia funcţională

$$f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)], \quad x,y \in \mathbf{R}.$$

Soluţie. Punând $x = y = 0$ rezultă $f(0) = 0$.

Dacă punem $\boxed{\quad\quad}$ rezultă $f(2x) = 4f(x)$.

Pentru $x = ny$ rezultă: $f((n+1)y) + f((n-1)y) = 2[f(ny) + f(y)]$.

Prin inducţie se demonstrează că $f(ny) = n^2 f(y)$, $n \in \mathbf{N}$ deci

$f\left(n\dfrac{z}{n}\right) = n^2 f\left(\dfrac{z}{n}\right) \Leftrightarrow f(z) = n^2 f\left(\dfrac{z}{n}\right)$ deci $f\left(\dfrac{z}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2} f(z)$ şi rezultă

$f(qy) = q^2 f(y), q \in \mathbf{Q} \cap (0,\infty)$.

Dacă punem în ecuaţie $x = 0$ rezultă $f(-y) = f(y)$, deci $f(qy) = q^2 f(y)$, pentru orice $q \in \mathbf{Q}$ şi orice $y \in \mathbf{R}$.

Din ipoteza de continuitate rezultă $f(x) = ax^2$, $x \in \mathbf{R}$ unde $a \in \mathbf{R}$ este o constantă arbitrară.

Observaţie. Ecuaţia dată se numeşte ecuaţia paralelogramului.

Dacă V este un spaţiu euclidian funcţia $f(x) = \|x\|^2$ verifică relaţia

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

R13.5.10. Fie $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 1$ şi $b \in \mathbf{R}$. Să se determine funcţiile continue $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică relaţia $f(x) = f(ax+b)$, $x \in \mathbf{R}$.

Soluție. Dacă $a=-1$. $f(x)=f(b-x), x\in\mathbf{R}$. Pentru $x<\frac{b}{2}$ avem $b-x>\frac{b}{2}$, deci ecuația funcțională dată nu impune nici o restricție pe fiecare din intervalele $\left(-\infty,\frac{b}{2}\right)$ și $\left(\frac{b}{2},\infty\right)$. Se obțin soluțiile de forma:

$$f(x)=\begin{cases} h(x), & x\le\frac{b}{2} \\ h(b-x), & x>\frac{b}{2} \end{cases}$$

unde $h:\left(-\infty,\frac{b}{2}\right)\to\mathbf{R}$ este o funcție continuă arbitrară.

Dacă $|a|\ne 1$ ecuația se mai scrie sub forma $f\left(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\right)=f(x)$.

Unul din numerele a sau $\frac{1}{a}$ este de modul subunitar și să presupunem că $|a|<1$.

Considerăm șirul definit prin relația de recurență:

$$x_0=x\in\mathbf{R},\quad x_{n+1}=ax_n+b,\quad n\in\mathbf{R}.$$

Din ecuație: $f(x_{n+1})=f(x_n), n\in\mathbf{N}$ deci

$$f(x_n)=f(x),\quad n\in\mathbf{N}$$

Avem: $x_n=a^nx+b\frac{1-a^n}{1-a}$, șirul (x_n) fiind convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{b}{1-a}$.

Dacă în relația $f(x)=f(x_n), n\in\mathbf{N}$, trecem la limită după $n\to\infty$, ținând cont că *f* este continuă, rezultă $f(x)=f\left(\frac{b}{1-a}\right)=c, x\in\mathbf{R}$.

Deci dacă $a\ne 1$ și $a\ne -1$, singurele funcții continue care verifică ecuația dată sunt funcțiile constante.

R13.5.11. Să se determine toate funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care au proprietățile:

a) *f* este continuă,

b) $f(x+1)=f(x)+2x+1, x\in\mathbf{R}$,

c) $f(x+\sqrt{2})=f(x)+2\sqrt{2}\cdot x+2$, $x\in\mathbf{R}$.

Soluție. Căutăm funcțiile $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definite prin substituția

$$f(x)=x^2+g(x),\quad x\in\mathbf{R}.$$

Funcția *g* verifică condițiile:

a_1) g continuă

b_1) $g(x+1) = g(x)$

c_1) $g(x+\sqrt{2}) = g(x)$.

Din b_1) şi c_1) obţinem (inducţie) $g(x+m+n\sqrt{2}) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{Z}$ şi $n \in \mathbf{Z}$.

Mulţimea $A = \{m - n\sqrt{2} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}\}$ este densă în **R**, deci pentru orice $x \in \mathbf{R}$, există un şir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x_n \in A, n \in \mathbf{N}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Din faptul că g este continuă, rezultă

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(0) = g(0), \quad (g(m+n\sqrt{2}) = g(0), \quad m,n \in \mathbf{Z}).$$

Obţinem ca soluţii funcţiile

$$f_c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad c \in \mathbf{R} \quad \text{şi} \quad f_c(x) = x^2 + c .$$

Bibliografie

1. Andreescu T., Andrica D., *O introducere în studiul ecuațiilor diofantiene*, Editura Gil, 2002
2. Andrei Gh., Caragea C., Bordea Gh., *Algebră pentru concursurile de admitere şi olimpiade şcolare*, Constanța, 1993
3. Buşneag Dumitru, Ioan Maftei, *Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor*, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1983
4. Dan si Rodica Brânzei, Sebastian şi Alice Anița, *Şiruri recurente în liceu*, Editura Gil, Zalău, 1996
5. Ion D. Ion, Nicolae Angelescu, Meri Constantinescu, *Algebră, clasa a XI-a*, Editura Paralela 45, 1999
6. Mortici Cristinel, *Probleme pregătitoare pentru concursurile de matematică*, Editura Gil, Zalău, 1999
7. Năstasescu C., Stănescu I., Niță C., *Elemente de algebră superioară, Manual pentru clasa a XI-a*, Editura Didactică si Pedagogică, Bucureşti, 1995
8. Pop Vasile, Corovei Ilie, *Culegere de probleme de algebră*, Universitatea Tehnică Cluj-N., 1995
9. Purdea I., Pic Gh, *Tratat de algebră modernă*, Vol I, Editura Academiei, Bucureşti, 1977.
10. Roger A. Horn, Charles R. Johnson, *Analiză matematică – Texte Matematice Esențiale*, Editura Theta, Bucureşti, 2002
11. Colecția „Gazeta Matematică”
12. Colecția „Revista de matematică a elevilor din Timişoara”