

CLASA a XII-a ALGEBRĂ

1. Ordinul unui element al unui grup (D. Heuberger)
2. Teoremele lui Lagrange și Cauchy pentru grupuri finite (D. Heuberger)
3. Aplicații ale teoremei lui Lagrange în probleme de teoria numerelor (V. Pop)
  - 3.1. Noțiuni și rezultate utilizate
  - 3.2. Funcții aritmetice. Funcția lui Euler
  - 3.3. Teoreme fundamentale
4. Condiții suficiente de comutativitate în grupuri (D. Heuberger)
  - 4.1. Centrul unui grup
  - 4.2.  $(a, b)$  – Grupuri comutative
  - 4.3. Câteva grupuri de exponent 2
5. Morfisme de grupuri (D. Heuberger, V. Pop)
  - 5.1. Caracteristici ale lui  $\text{Hom}(G;H)$
  - 5.2. Caracteristici ale lui  $\text{End}(G)$  pentru unele grupuri finite
  - 5.3. Transport de structură
6. Congruențe de grupuri. Grupuri cât. Teoreme de izomorfism (V. Pop, V. Lușor)
  - 6.1. Relații de echivalență definite de subgrupuri
  - 6.2. Relații de congruență. Subgrupuri normale
  - 6.3. Nucleul unui morfism
  - 6.4. Teoreme de izomorfism
7. Grupuri de transformări geometrice (V. Pop, V. Lușor)
  - 7.1. Planul euclidian. Modele geometrice și algebrice
  - 7.2. Principalele izometrii ale planului
  - 7.3. Interpretări geometrice ale unor grupuri remarcabile
8. Inele (D. Heuberger)
  - 8.1. Centrul unui inel
  - 8.2. Condiții suficiente pentru inele Boole
  - 8.3. Inele și corpuri de caracteristică finită
9. Ecuații funcționale pe structuri algebrice (V. Pop)
  - 9.1. Ecuații funcționale pe grupuri de numere reale
10. Polinoame cu coeficienți într-un inel comutativ (D. Heuberger)
  - 10.1. Ireductibilitate și descompunere în  $\mathbb{Z}_p[X]$
  - 10.2. Inelul resturilor inelului  $A[x]$  modulo un polinom  $f \in A[x]$

Coordonator Vasile Pop  
Viorel Lușor

CLASA a XII-a ANALIZĂ

1. Funcții primitivabile (Gh. Boroica)
  - 1.1. Funcții primitivabile
  - 1.2. Operații cu funcții primitivabile
  - 1.3. Clase de funcții discontinue primitivabile
2. Metode de calcul al primitivelor (I. Magdaș)
  - 2.1. Aspecte teoretice
  - 2.2. Calculul primitivelor unor funcții iraționale
  - 2.3. Calculul primitivelor funcțiilor trigonometrice și hiperbolice
3. Criterii de integrabilitate (N. Mușuroia)
  - 3.1. Funcții integrabile
  - 3.2. Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann
  - 3.3. Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann
4. Metode de calcul al integralelor definite (A. Magdaș)
  - 4.1. Metode de integrare a funcțiilor
5. Șiruri și integrala Riemann (A. Magdaș)
  - 5.1. Calculul limitelor unor șiruri utilizând integrala definită
  - 5.2. Șiruri ai căror termeni generali conțin integrala definită
6. Teoreme de medie. Inegalități integrale (A. Magdaș)
  - 6.1. Teoreme de medie ale calculului integral
  - 6.2. Inegalități integrale remarcabile
7. Aplicații ale calculului integral (A. Magdaș)
  - 7.1. Calculul ariilor
  - 7.2. Calculul volumelor
8. Ecuații diferențiale și integrale (Gh. Boroica)
  - 8.1. Ecuații diferențiale de ordin întâi și doi
  - 8.2. Ecuații diferențiale clasice de ordin întâi

Coordonator Vasile Pop  
Viorel Lușor

**MATEMATICĂ**  
**PROGRAMA ȘCOLARĂ PENTRU CLASELE DE EXCELENȚĂ**  
**X-XII**

**ARGUMENT**

Studiul matematicii prin clasele de excelență, urmărește în principal crearea unui cadru organizat, în care elevii talentați la matematică, proveniți din diferite medii școlare, să poată intra în contact, și în timp relativ scurt, să formeze un grup performant. Acești elevi, beneficiind de o pregătire pe măsura potențialului lor intelectual, vor contribui ulterior la formarea unei elite românești în domeniul matematicii.

Realizarea unei programe pentru clasele de excelență, precum și modul în care se va lucra pe această programă, constituie o noutate pentru învățământul românesc. Din acest motiv elaborarea prezentei programe trebuie înțeleasă ca o etapă necesară unui început de drum.

Un colectiv de cadre didactice din învățământul preuniversitar și universitar din CRTCP Cluj, cu experiență în domeniul pregătirii elevilor capabili de performanțe superioare, au format o echipă care a realizat programa și manualul care conține exerciții și probleme extrem de utile pentru desăvârșirea pregătirii acestor elevi.

În selectarea conținuturilor programei s-a ținut cont de tendințele actuale în formularea subiectelor la concursurile și olimpiadele școlare, dar și de tradițiile școlii românești de matematică. Numeroasele cărți și reviste adresate "vârfurilor" au constituit o importantă sursă bibliografică în tratarea temelor. Temele propuse constituie o extindere firească a programei analitice obligatorii de matematică și parcurgerea lor este necesară pentru abordarea unor probleme mai dificile. Anumite teme vor fi tratate pe parcursul mai multor ani de studiu (evident cu o problemă corespunzătoare) asigurându-se astfel continuitatea și coerența procesului de învățare. Mai trebuie precizat că la elaborarea programei echipa a avut în vedere faptul că matematica nu este un produs finit, ci un proces intelectual în care, pe suportul unor cunoștințe solide, primează inițiativa personală. Astfel, această programă oferă posibilități autentice de opțiuni pentru profesori și elevi.

Programa se adresează elevilor claselor X-XII și a fost concepută pentru un număr de 2 ore/săptămână ( în cele 30 de săptămâni ale anului școlar în care se lucrează cu clasele sau grupele de excelență). Ca o completare la programa obligatorie de matematică, competențelor generale le-au mai fost adăugate încă două care au rolul de a orienta demersul didactic către formarea unor ansambluri structurate de cunoștințe generate de specificul activității

intelectuale matematice la nivel de performanțe superioare. Programa are următoarele componente:

- competențe generale
- competențe specifice și conținuturile corelate cu acestea
- valori și atitudini
- sugestii metodologice.

### **Competențe generale**

- 1. Folosirea corectă a terminologiei specifice matematicii în contexte variate**
- 2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice**
- 3. Utilizarea corectă a algoritmilor matematici în rezolvarea de probleme cu grade diferite de dificultate**
- 4. Exprimarea și redactarea corectă și coerentă în limbaj formal sau în limbaj cotidian, a rezolvării sau a strategiilor de rezolvare a unei probleme**
- 5. Analiza unei situații problematice și determinarea ipotezelor necesare pentru obținerea concluziei**
- 6. Generalizarea unor proprietăți prin modificarea contextului inițial de definire a problemei sau prin îmbunătățirea sau generalizarea algoritmilor**
- 7. Emiterea unor judecăți de valoare pentru rezolvarea problemelor inventiv și euristic-creative**
- 8. Dobândirea unei imagini de ansamblu a matematicii elementare ca parte a unui sistem aflat în permanentă evoluție și interacțiune cu lumea înconjurătoare**

<i>Competențe specifice</i>	<i>Conținuturi</i>
<p>1.1. Identificarea legăturilor dintre primitivabilitate și proprietatea Darboux</p> <p>1.2. Utilizarea metodei schimbării de variabilă în cele două variante la calculul primitivelor</p> <p>2. Prelucrarea inegalităților clasice în scopul obținerii unor inegalități integrale</p> <p>3. Aplicarea unor schimbări de variabilă consacrate la calculul primitivelor funcțiilor iraționale</p> <p>4. Exprimarea unei funcții dintr-o ecuație diferențială sau integrală</p> <p>5.1. Utilizarea integralei definite la calculul limitelor unor șiruri, stabilirea unor identități și inegalități</p> <p>5.2. Interpretarea graficului pentru stabilirea formulei de calcul a ariei cuprinsă între două curbe plane</p> <p>6.1. Utilizarea integralei definite la calculul volumului unor corpuri geometrice care nu sunt de rotație</p> <p>7. Realizarea unor implicații între problemele tipice ale calculului integral și cele date la concursurile și olimpiadele școlare</p> <p>8. Conștientizarea potențialului inter-disciplinar al calculului integral</p>	<p><b>Elemente de Analiză Matematică</b></p> <p><b>Primitive</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Funcții primitivabile</li> <li>• Metode de calcul a primitivelor</li> </ul> <p>- schimbarea de variabilă</p> <p>- calculul primitivelor unor funcții iraționale ( cu ajutorul unor algoritmi consacrați, de ex.: Euler, Cebâșev)</p> <p>- calculul primitivelor funcțiilor trigonometrice și hiperbolice</p> <p><b>Integrale definite</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Criterii de integrabilitate</li> <li>• Proprietăți generale ale funcțiilor integrabile</li> <li>• Metode de calcul a integralelor definite</li> <li>• Identități deduse prin integrare</li> <li>• Șiruri și integrala Riemann</li> <li>• Teoreme de medie</li> <li>• Inegalități integrale</li> </ul> <p><b>Aplicații ale calculului integral</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Calculul ariei cuprinsă între două curbe</li> <li>• Volumul unor corpuri geometrice</li> </ul> <p><b>Ecuatii diferențiale și integrale</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ecuatii diferențiale de ordinul I și II</li> <li>• Ecuatii cu variabile separabile</li> <li>• Ecuatii integrale de tip Voltera</li> </ul>

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Caracterizarea unor grupuri prin ordinul elementelor sale sau prin endomorfismele care se pot defini pe acestea</li> <li>2. Identificarea proprietăților unor grupuri, inele și corpuri particulare</li> <li>3.1. Utilizarea structurilor algebrice în probleme de teoria numerelor</li> <li>3.2. Rezolvarea de ecuații funcționale pe structuri algebrice</li> <li>4. Stabilirea unor condiții care să asigure ca un inel să fie comutativ, Boole, sau de caracteristică finită</li> <li>5. Studiarea unor grupuri, inele și corpuri particulare și interpretarea rezultatelor</li> <li>6. Determinarea unor analogii între polinoamele cu coeficienți reali și cele cu coeficienți într-un corp comutativ</li> <li>7. Realizarea unor implicații între problemele tipice cu structuri algebrice și cele propuse la concursurile și olimpiadele școlare</li> <li>8. Conștientizarea vastului potențial pe care îl au structurile algebrice în stabilirea unor proprietăți matematice globale</li> </ol>	<p><b>Elemente de algebră</b></p> <p><b>Grupuri :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ordinul unui element al unui grup</li> <li>• Teoremele lui Lagrange și Cauchy pentru grupuri</li> <li>• Condiții suficiente de comutativitate în grupuri : <ul style="list-style-type: none"> <li>- centrul unui grup</li> <li>- grupuri de exponent 2</li> </ul> </li> <li>• Morfisme de grupuri : <ul style="list-style-type: none"> <li>- caracteristici ale lui <math>\text{End}(G)</math> pentru unele grupuri finite</li> <li>- transport de structuri</li> </ul> </li> <li>• Grupuri de transformări geometrice</li> <li>• Teoreme de izomorfism pentru grupuri. Grupuri cât</li> </ul> <p><b>Inele și corpuri :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Inele : <ul style="list-style-type: none"> <li>- centrul unui inel</li> <li>- condiții suficiente pentru inele Boole</li> <li>- inele și corpuri de caracteristică finită <ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinoame cu coeficienți într-un inel comutativ :</li> </ul> </li> <li>- ireductibilitate și descompunere în <math>Z_n[X]</math></li> <li>- inelul <math>A_f</math> al resturilor inelului <math>A[X]</math> modulo un polinom <math>f</math> din <math>A[X]</math></li> </ul> </li> </ul> <p><b>Aplicații ale structurilor algebrice în probleme de teoria numerelor</b></p> <p><b>Ecuații funcționale pe structuri algebrice</b></p>
--	---

## VALORI ȘI ATITUDINI

Noul curriculum școlar pentru clasele de excelență propus la matematică are în vedere formarea la elevi a următoarelor valori și atitudini în plus față de cele specificate prin curriculumul școlar obligatoriu :

- Manifestarea unor opinii competente cu privire la abordarea problemelor intuitiv și euristic-creative bazate pe explorare, inspirație și invenție
- Dezvoltarea unei gândiri reflexive, independente, flexibilă și abstractă specifică matematicii
- Interesul pentru modul de dezvoltare a ideilor și rezultatelor matematice
- Curiozitatea față de noile deschideri din domeniul matematicii

## SUGESTII METODOLOGICE

Prin prezentul curriculum pentru clasele de excelență se intenționează ca, pe parcursul liceului, elevii să dobândească competențe și să-și structureze un set de valori și atitudini specifice pregătirii de înaltă performanță. Acestea se regăsesc în următoarele aspecte ale învățării, vizate de practica pedagogică :

- Analizarea și elaborarea unui plan de rezolvare pentru problemele atipice și/sau dificile din domeniile studiate
- Formarea obișnuinței de a formula probleme și situații problemă
- Analiza unei probleme din punct de vedere al ideii centrale
- Reparcurgerea căii de rezolvare a problemei pentru a obține un rezultat mai bun, ameliorat sau optimizat printr-o reproiectare creativă
- Identificarea unor metode de lucru valabile pentru clase de probleme
- Inițierea și realizarea creativă a unei investigații pornind de la tematica propusă
- Formarea deprinderii de a anticipa rezultate matematice pornind de la datele existente
- Formarea obișnuinței de a face conexiuni intra și interdisciplinare

Acest curriculum are drept obiectiv ca fiecare elev capabil de performanțe superioare să-și poată dezvolta competențele într-un ritm individual, de a-și transfera cunoștințele acumulate dintr-o zonă de studiu în alta. Pentru aceasta se recomandă următoarele activități :

- Alternarea prezentării conținuturilor, cu moduri variate de antrenare a gândirii
- Solicitarea de frecvente corelații intra și interdisciplinare

- Punerea elevului în situația ca el însuși să formuleze sarcini de lucru adecvate
- Obținerea de soluții sau interpretări variate pentru aceeași unitate informațională
- Prevederea de sarcini rezolvabile prin activitatea în grup
- Utilizarea unor softuri educaționale

Având în vedere specificul claselor de excelență, metodele folosite în practică instructiv-educativă vizează următoarele aspecte:

- Utilizarea strategiilor euristice, care lasă elevul să-și asume riscul incertitudinii, al încercării și erorii, specifice investigației științifice
- Utilizarea strategiilor creative, care lasă elevul să se afirme în planul originalității, spontaneității, diversității și care pun accentul pe capacitatea de reflecție, sinteză, evaluare critică și creație
- O îmbinare și o alternanță sistematică a activității bazate pe efort individual cu cele care solicită efort colectiv
- Însușirea unor metode de informare și de documentare independentă, care oferă deschiderea spre autoinstruire și spre învățarea continuă



# ALGEBRĂ

## 1. Ordinul unui element al unui grup

### 1.1. Proprietăți ale ordinului unui element al unui grup

Proprietățile noțiunii de ordin al unui element al unui grup sunt de multe ori foarte utile în probleme de concurs, facilitând deseori rezolvarea acestora.

Considerăm cunoscute noțiunile și rezultatele fundamentale ale teoriei grupurilor studiate în liceu (grup, subgrup, morfisme de grupuri).

În cele ce urmează,  $G$  este o mulțime nevidă, careia o lege de compoziție notată multiplicativ îi conferă structură de grup.

Notăm cu  $\text{ord}(G)$  sau  $|G|$  numărul elementelor grupului  $G$ , dacă  $G$  are un număr finit de elemente și spunem că  $\text{ord}(G) = +\infty$  dacă  $G$  are o infinitate de elemente.

Reamintim următoarele concepte și proprietăți:

**1.1.1. Definiție** Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $X$  o submulțime nevidă a sa.

Notăm cu  $\langle X \rangle = \bigcap \{ H \mid X \subseteq H, H \text{ subgrup al lui } G \}$ .

**1.1.2. Proprietate**  $(\langle X \rangle, \cdot)$  este un subgrup al lui  $G$  (numit subgrupul generat de mulțimea  $X$ ).

#### 1.1.3. Observații

a)  $\langle X \rangle$  este cel mai mic subgrup (în raport cu relația de ordine „ $\subseteq$ ”) al lui  $G$ , astfel încât  $X \subseteq \langle X \rangle$ .

b)  $\langle X \rangle =$

$$\left\{ \alpha \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in X, \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}, \alpha = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n} \right\}$$

c) Dacă  $x \in G$ , atunci subgrupul generat de elementul  $x$  este  $\langle x \rangle = \{ x^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$ .

**1.1.4. Definiție** Grupul  $(G, \cdot)$  se numește grup ciclic dacă există  $x \in G$  astfel încât  $\langle x \rangle = G$ . În acest caz elementul  $x$  se numește generator al grupului  $G$ .

**1.1.5. Observație** Dacă  $(G, \cdot)$  este un grup ciclic de ordinul  $n$ ,  $a$  este un generator al grupului  $G$  și  $k \in \mathbb{Z}$ , atunci  $a^k$  este un generator al lui  $G$  dacă și numai dacă  $(n, k) = 1$ .

**1.1.6. Definiție** Grupul  $(G, \cdot)$  se numește finit generat dacă există  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$  astfel încât  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = G$ .

În acest caz elementele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  se numesc generatori ai grupului  $G$ .

### 1.1.7. Observatii

- a) Orice grup ciclic este comutativ.
- b) Orice grup finit este finit generat.

**Exemple de grupuri ciclice:**  $(\mathbf{Z}, +)$ ,  $(\mathbf{Z}_n, +)$ ,  $(U_n, \cdot)$ , unde  $U_n$  este grupul rădăcinilor de ordinul  $n$  ale unității.

**1.1.8. Definiție** Fie grupul  $(G, \cdot)$  cu elementul neutru  $e$ .

Elementul  $x \in G$  este de ordin finit dacă  $\exists m \in \mathbf{N}^*$ ,  $x^m = e$ .

În acest caz,  $\min \{ m \in \mathbf{N}^* \mid x^m = e \} = \overset{\text{not}}{\text{ord}(x)}$  se numește ordinul elementului  $x$ .

Elementul  $x \in G$  este de ordin infinit dacă  $x$  nu este de ordin finit.

**1.1.9. Teoremă** Fie grupul  $(G, \cdot)$  și  $x \in G$ .

a) Dacă  $\text{ord}(x) = n \in \mathbf{N}^*$ , atunci elementele  $e, x, \dots, x^{n-1}$  sunt distincte două câte două și  $\forall k \in \mathbf{Z}$ ,  $x^k = x^{k(\text{mod } n)}$ .

b)  $\text{ord}(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ ,  $k_1 \neq k_2$ , avem  $x^{k_1} \neq x^{k_2}$ .

### 1.1.10. Consecințe

**C 1.** Fie grupul  $(G, \cdot)$ . Dacă  $x \in G$  și  $\text{ord}(x) = n \in \mathbf{N}^*$ , atunci  $\text{ord} \langle x \rangle = n$  și  $\langle x \rangle = \{e, x, \dots, x^{n-1}\}$ .

**C 2.** Grupul finit  $G$  de ordinul  $n \in \mathbf{N}^*$  este ciclic  $\Leftrightarrow G$  are un element ordinul  $n$ .

**C 3.** Fie grupul  $(G, \cdot)$ . Dacă  $x \in G$ ,  $\text{ord}(x) = n \in \mathbf{N}^*$  și  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $x^k = e$ , atunci  $n \mid k$ .

**Demonstrație:** Conform teoremei împărțirii cu rest,  $\exists! q, r \in \mathbf{Z}$ ,  $0 \leq r < \text{ord}(x)$ , astfel încât  $k = \text{ord}(x) \cdot q + r$ .

Atunci  $x^k = x^{nq+r} = (x^n)^q \cdot x^r$  și cum  $x^n = e$ , rezultă că  $x^k = x^r$  și deci  $x^r = e$ .

Dar  $n = \text{ord}(x) = \min \{ m \in \mathbf{N}^* \mid x^m = e \}$  și rezultă  $r = 0$ , deci  $k = n \cdot q$ , adică  $n \mid k$ .

**C 4.** Orice element al unui grup finit are ordinul finit.

**C 5.** Orice două grupuri ciclice de același ordin sunt izomorfe. Dacă  $G$  este un grup ciclic de ordinul  $n$ , atunci  $(G, \cdot) \approx (\mathbf{Z}_n, +)$

**C 6.** Orice subgrup al unui grup ciclic este ciclic.

**C 7.** Dacă  $x, y \in G$ , atunci

**a)**  $\text{ord}(x) = \text{ord}(x^{-1})$

**b)**  $\text{ord}(x \cdot y) = \text{ord}(y \cdot x)$

Demonstrație:

**a) I. Dacă  $\text{ord}(x) = n \in \mathbf{N}^*$  avem  $x^n = e$  și  $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1} = e^{-1} = e$ .**

Fie  $k = \text{ord}(x^{-1})$ . Din **C3**. rezultă  $k \mid n$ .

Cum  $e = (x^{-1})^k = (x^k)^{-1}$ , rezultă că  $x^k = e$  și cum  $\text{ord}(x) = n$ , din **C3**. rezultă că  $n \mid k$ . Așadar  $n = k$ .

**II. Dacă  $\text{ord}(x) = +\infty$  să presupunem că  $\text{ord}(x^{-1}) = k \in \mathbf{N}^*$ . Atunci din cazul anterior rezultă că  $\text{ord}(x) = \text{ord}(x^{-1})^{-1} = k$ , fals. Așadar  $\text{ord}(x^{-1}) = +\infty$ .**

**b) I. Dacă  $\text{ord}(x \cdot y) = n \in \mathbf{N}^*$  avem  $(x \cdot y)^k = e \Leftrightarrow x \cdot (y \cdot x)^{k-1} \cdot y = e \Leftrightarrow (y \cdot x)^k \cdot y = y \Leftrightarrow (y \cdot x)^k = e$ , așadar  $\text{ord}(y \cdot x) = k' \in \mathbf{N}^*$  și  $k' \mid k$ .**

Dar  $(y \cdot x)^{k'} = e \Leftrightarrow y \cdot (x \cdot y)^{k'-1} \cdot x = e \Leftrightarrow (x \cdot y)^{k'} = e$  și cum  $\text{ord}(x \cdot y) = k$  rezultă și  $k \mid k'$  și deci  $k = k'$ .

**II. Dacă  $\text{ord}(x \cdot y) = +\infty$ , presupunând că  $\text{ord}(y \cdot x) = k \in \mathbf{N}^*$  rezultă ca mai înainte că  $\text{ord}(x \cdot y) = k$ , fals. Așadar  $\text{ord}(y \cdot x) = +\infty$ .**

**C 8.** Dacă  $f : G \rightarrow G'$  este un morfism injectiv de grupuri multiplicative și  $a \in G$ ,

atunci  $\text{ord}(a) = \text{ord}(f(a))$ .

Demonstrație:

**I. Dacă  $\text{ord}(a) = k \in \mathbf{N}^*$  avem  $e' = f(a^k) = (f(a))^k$  și deci și ordinul elementului  $f(a) \in G'$  este finit. Fie  $t = \text{ord}(f(a))$ . Rezultă că  $t \mid k$ .**

Dar  $e' = f(a^t) = (f(a))^t$  și pentru că  $f$  este o funcție injectivă rezultă că  $a^t = e$  și cum  $\text{ord}(a) = k$  avem și  $k \mid t$ , deci  $k = t$ .

**II. Dacă  $\text{ord}(a) = +\infty$ , presupunem că  $\text{ord}(f(a)) = k \in \mathbf{N}^*$ .**

Atunci  $(f(a))^k = e = f(a^k)$  și din injectivitatea lui  $f$  rezultă că  $a^k = e$ , ceea ce este fals. Așadar  $\text{ord}(f(a)) = +\infty$ .

Să observăm că afirmația anterioară este adevărată și în cazul izomorfismelor de grupuri, ceea ce întărește imaginea intuitivă că elementele asociate printr-un izomorfism „au aceleași proprietăți”.

**C 9.** Fie grupul  $(G, \cdot)$  și  $a, b \in G$  cu  $\text{ord}(a) = m \in \mathbf{N}^*$ ,  $\text{ord}(b) = n \in \mathbf{N}^*$ , astfel încât  $a \cdot b = b \cdot a$ . Notăm cu  $d = (m, n)$ ,  $p = [m, n]$ . Atunci:

- a)  $\text{ord}(a \cdot b) / p$   
 b)  $\frac{p}{d} / \text{ord}(a \cdot b)$

Demonstrație: Se știe că dacă  $a \cdot b = b \cdot a$ , atunci  $\forall k \in \mathbf{Z}$ ,  $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$

a) Avem  $m = d \cdot m_1$  și  $n = d \cdot n_1$ , cu  $m_1, n_1 \in \mathbf{N}$ ,  $(m_1, n_1) = 1$ , iar  $p = d \cdot m_1 \cdot n_1$ .

$$(a \cdot b)^p = (a \cdot b)^{d \cdot m_1 \cdot n_1} = a^{m \cdot n_1} \cdot b^{n \cdot m_1} = (a^m)^{n_1} \cdot (b^n)^{m_1} = e \stackrel{1.1.10, C3}{\Rightarrow} k / p,$$

unde  $\text{ord}(a \cdot b) = k$  (este evident că  $\text{ord}(a \cdot b) \in \mathbf{N}^*$ ).

b)  $\frac{p}{d} = m_1 \cdot n_1$ . Demonstrăm că  $m_1 \cdot n_1 / k$ .

$$(a \cdot b)^k = e \Rightarrow a^k = b^{-k} \Rightarrow a^{k \cdot n} = b^{-k \cdot n} = e \stackrel{1.1.10, C3}{\Rightarrow} m / k \cdot n \Leftrightarrow d \cdot m_1 / k \cdot d \cdot n_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} m_1 / k \cdot n_1 \\ (m_1, n_1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow m_1 / k.$$

Analog rezultă că  $n_1 / k$  și cum  $(m_1, n_1) = 1$  obținem  $m_1 \cdot n_1 / k$

**Observații:**

a)  $\text{ord}(a \cdot b) / m \cdot n$

b) Dacă  $a, b \in G$ ,  $a \cdot b = b \cdot a$ ,  $\text{ord}(a) = m$ ,  $\text{ord}(b) = n$  și  $(m, n) = 1$ , atunci  $\text{ord}(a \cdot b) = [m, n] = m \cdot n$ .

c) Există situații când  $\text{ord}(a, b) = \frac{[m, n]}{(m, n)} = m_1 \cdot n_1$ .

De exemplu, în grupul  $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ ,  $\text{ord}(\hat{6}) = 2$ ,  $\text{ord}(\hat{2}) = 6$  și  $\text{ord}(\hat{2} + \hat{6}) = 3$ .

d) Există situații când  $\text{ord}(a \cdot b) = [m, n]$ , chiar dacă  $(m, n) \neq 1$ .

De exemplu, în grupul  $(\mathbf{Z}_{24}, +)$ ,  $\text{ord}(\hat{6}) = 4$ ,  $\text{ord}(\hat{12}) = 6$  și  $\text{ord}(\hat{12} + \hat{6}) = 4$ .

**C 10.** Fie grupul  $(G, \cdot)$  și  $x \in G$ ,  $\text{ord}(x) = n \in \mathbf{N}^*$ . Atunci:

a)  $\forall k \in \mathbf{Z}$ ,  $\text{ord}(x^k) / n$

**b)**  $\forall k \in \mathbf{Z}, \text{ord}(x^k) = \frac{n}{(k, n)}$ .

Demonstrație: **a)**  $(x^k)^n = e \stackrel{1.1.10, C3}{\Rightarrow} \text{ord}(x^k) / n$ .

**b)** Fie  $d = (k, n)$ . Atunci există  $n_1, k_1 \in \mathbf{Z}$  astfel încât  $n = d \cdot n_1, k = d \cdot k_1, (n_1, k_1) = 1$ .

Cum  $(x^k)^{n_1} = x^{n \cdot k_1} = e \stackrel{1.1.10, C3}{\Rightarrow} \text{ord}(x^k) / n_1$  (1)

Fie  $s = \text{ord}(x^k)$ . Avem  $x^{k \cdot s} = e$  și cum  $\text{ord}(x) = n \stackrel{1.1.10, C3}{\Rightarrow} n / k \cdot s \Rightarrow d \cdot n_1 / d \cdot k_1 \cdot s \Rightarrow n_1 / k_1 \cdot s$  și deoarece  $(n_1, k_1) = 1$  rezultă că  $n_1 / s$ .

Ținând cont de (1) obținem  $n_1 = s$ , adică  $\text{ord}(x^k) = n_1 = \frac{n}{d} = \frac{n}{(k, n)}$ .

**C 11.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup ciclic de ordinul  $n, G = \langle a \rangle$  și  $k \in \mathbf{Z}$ .

Atunci:  $a^k$  este generator al grupului  $\Leftrightarrow (k, n) = 1$ .

Demonstrație: Reamintim următoarea

**Lemă** Fie  $k, n \in \mathbf{Z}$ . Atunci:  $(k, n) = 1 \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbf{Z}, k \cdot t + n \cdot s = 1$

„ $\Rightarrow$ ” Cum  $\langle a^k \rangle = G$ , există  $t \in \mathbf{Z}$  astfel încât  $(a^k)^t = a$  și deci  $a^{k \cdot t - 1} = e$   
 $\stackrel{1.1.10, C3}{\Rightarrow} \text{ord}(a) = n / (k \cdot t - 1) \Rightarrow \exists s \in \mathbf{Z}, k \cdot t - 1 = s \cdot n \Leftrightarrow n \cdot (-s) + k \cdot t = 1 \stackrel{\text{Lemă}}{\Leftrightarrow} (k, n) = 1$ .

„ $\Leftarrow$ ”  $(k, n) = 1 \stackrel{\text{Lemă}}{\Leftrightarrow} \exists t, s \in \mathbf{Z}, k \cdot t + n \cdot s = 1$ .

Atunci  $a = a^{k \cdot t + n \cdot s} = (a^k)^t \cdot (a^n)^s = (a^k)^t$  și deci  $a \in \langle a^k \rangle$  și cum grupul  $G$  este generat de  $a$ , rezultă că  $G \subseteq \langle a^k \rangle$ . Dar  $\langle a^k \rangle \subseteq G$  și deci  $G = \langle a^k \rangle$ .

Să observăm că există  $\varphi(n)$  generatori ai lui  $G$ .

**Consecință** Dacă  $(G, \cdot)$  este un grup ciclic de ordinul  $p$ , cu  $p \in \mathbf{N}$  număr prim, atunci: **a)** orice element al lui  $G$  este generator al grupului

**b)**  $G$  nu are subgrupuri proprii.

## **Bibliografie**

- 1. Gh. Andrei, C-tin Caragea, V. Ene** – *Algebră – Culegere de probleme pentru examene de admitere și olimpiade școlare*, Ed. Scorpion 7, București 1995
- 2. M. Burtea, G. Burtea** – *Matematică – clasa a XII-a – Elemente de analiză matematică. Algebră superioară*, Ed. Carminis 2001
- 3. I. Purdea, Gh Pic** – *Tratat de algebră modernă*, vol I, Ed Academiei, București, 1977
- 4. D. Andrica, N. Bișboacă, I. Șerdean, M. Andronache, M. Piticari, D. Zaharia** - *Matematică – Manual pentru clasa a XII-a, M1*, Ed. Plus, 2002
- 5.** Colecția „Gazeta Matematică”

### Probleme rezolvate

R1.2.1. Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $g \in G$ , cu  $\text{ord}(g) = m \cdot n$ , unde  $m, n \in \mathbf{N}^*$ ,  $(m, n) = 1$

Să se demonstreze că există și sunt unice  $a, b \in G$  astfel încât  $g = a \cdot b = b \cdot a$  și  $\text{ord}(a) = m$ ,  $\text{ord}(b) = n$ .

Soluție: Existența Cum  $(m, n) = 1$ , există  $k, t \in \mathbf{Z}$  astfel încât  $m \cdot k + n \cdot t = 1$  (1)

Fie  $a = g^{n \cdot t}$  și  $b = g^{m \cdot k}$ . Observăm că  $a^m = (g^{n \cdot t})^m = (g^{m \cdot n})^t = e$  și analog  $b^n = e$ .

Cum  $a^m = e$ , din 1.1.10, C 3. rezultă că  $\text{ord}(a) = p \in \mathbf{N}^*$  și  $p \mid m$  (2)

Presupunem că  $p \neq m$ . Atunci  $a^p = (g^{n \cdot t})^p = g^{n \cdot t \cdot p}$  și cum  $\text{ord}(g) = m \cdot n$ , din 1.1.10, C 3, rezultă că  $m \cdot n \mid n \cdot t \cdot p$  și deci  $m \mid t \cdot p$ . Din (1) rezultă că  $(m, t) = 1$  și obținem  $m \mid p \stackrel{(2)}{\Rightarrow} p = m \Leftrightarrow \text{ord}(a) = m$ . Analog se demonstrează că  $\text{ord}(b) = n$ .

Unicitatea Fie  $a, b \in G$  astfel încât  $g = a_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot a_1$  și  $\text{ord}(a_1) = m$ ,  $\text{ord}(b_1) = n$ .

Atunci  $g^n = (a_1 \cdot b_1)^n = a_1^n \cdot b_1^n = a_1^n$ . Fie  $k, t$  din relația (1).

Avem  $n \cdot t = 1 - m \cdot k$  și  $a_1^{n \cdot t} = g^{n \cdot t}$ , deci  $a_1 \cdot (a_1^m)^{-k} = g^{n \cdot t}$  și cum  $a_1^m = e$ , rezultă  $a_1 = g^{n \cdot t} = a$  ( $a$  este cel din demonstrația existenței)

Analog rezultă că  $b_1 = g^{m \cdot k} = b$ .

R1.2.2. Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $x \in G$ , un element de ordin finit. Dacă  $m, n \in \mathbf{Z}$  astfel încât  $(m, n) = 1$ ,  $\text{ord}(x^m) = n$  și  $\text{ord}(x^n) = m$ , să se demonstreze că  $\text{ord}(x) = m \cdot n$ .

Soluție: Fie  $d = \text{ord}(x)$ . Din 1.1.10, C 10, cum  $x^m$  și  $x^n$  comută, avem că

$\text{ord}(x^{m \cdot n}) \mid \text{ord}(x)$ , deci  $m \cdot n \mid d$  (1)

Din  $\text{ord}(x^m) = n$  rezultă că  $x^{m \cdot n} = e$  și deci (1.1.10, C 3.)  $d \mid m \cdot n$ .

Folosind și relația (1) rezultă că  $d = m \cdot n$ .

R1.2.3. Fie  $(G, \cdot)$  un grup. Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

1) Orice submulțime  $H$  a sa care este parte stabilă în raport cu operația grupului, este subgrup al lui  $G$ .

2) Toate elementele grupului  $G$  sunt de ordin finit.

Marian Andronache

Soluție: „1  $\Rightarrow$  2” Fie  $x \in G$ . Cum  $(G, \cdot)$  este grup, rezultă că  $\forall t \in \mathbf{N}^*$ ,  $x^t \in G$  și deci mulțimea  $H = \{x^t \mid t \in \mathbf{N}^*\}$  este parte stabilă a lui  $G$  în raport cu operația grupului. Așadar, conform ipotezei,  $H$  este subgrup al lui  $G$  și deci  $H$  conține elementul neutru  $e$  al lui  $G$ . În consecință, există  $k \in \mathbf{N}^*$  astfel încât  $x^k = e$  și deci afirmația (2) este adevărată.

„2  $\Rightarrow$  1” Fie  $H \subset G$ ,  $H$  parte stabilă a lui  $G$  în raport cu operația lui  $G$ .

Fie  $x \in H$ . Din ipoteză rezultă că  $\exists k \in \mathbf{N}^*$ ,  $x^k = e$ .

Cum  $H$  este parte stabilă, avem  $x^h \in H$ ,  $\forall h \in \mathbf{N}^*$  și deci  $e \in H$ .

$x^k = e \Rightarrow x^{-1} = x^{k-1}$  și cum  $H$  este parte stabilă avem că și  $x^{k-1}$  (adică  $x^{-1}$ ) se află în  $H$ . Așadar  $H$  este subgrup al lui  $G$ .

### Observații

1. Există grupuri infinite cu toate elementele de ordin finit.

De exemplu  $(\mathbf{Z}_p[X], +)$ , dacă  $p$  este un număr prim.

2. Dacă  $(G, \cdot)$  este un grup finit, atunci  $\forall H \subset G$ , avem:

$H$  e parte stabilă a lui  $G$  în raport cu operația lui  $G \Leftrightarrow H$  e subgrup al lui  $G$ .

3. Dacă impunem condiția de finitudine doar asupra lui  $H$  obținem rezultatul

cunoscut:

Pentru grupul  $(G, \cdot)$  și mulțimea finită  $H \subset G$ ,

$H$  e parte stabilă a lui  $G$  în raport cu operația lui  $G \Leftrightarrow H$  e subgrup al lui  $G$ .

R1.2.4. Să se demonstreze că orice subgrup al unui grup ciclic este ciclic.

Soluție: Fie  $(G, \cdot)$  un grup ciclic.

I. Dacă  $\text{ord}(G) = +\infty$  și  $G = \langle a \rangle$ , atunci grupul  $G$  este izomorf cu  $(\mathbf{Z}, +)$

(un izomorfism este  $f: G \rightarrow \mathbf{Z}$ ,  $f(a^k) = k$ ,  $\forall k \in \mathbf{Z}$ ) și cum subgrupurile lui  $\mathbf{Z}$  sunt de forma  $n\mathbf{Z} = \langle n \rangle$ , cu  $n \in \mathbf{Z}$ , rezultă că și subgrupurile lui  $G$  sunt ciclice, pe baza următorului rezultat cunoscut:

**Lemă** dacă grupurile  $(G, \cdot)$  și  $(G', \cdot)$  sunt izomorfe și  $f: G \rightarrow G'$  este un izomorfism, atunci:  $H$  este subgrup al lui  $G \Leftrightarrow f(H)$  este subgrup al lui  $G'$ .



II. Dacă  $\text{ord}(G) = n \in \mathbf{N}^*$  și  $G = \langle a \rangle$ , subgrupurile improprii ale lui  $G$  fiind evident ciclice, fie  $H$  un subgrup propriu al lui  $G$ ,  $H = \langle a^{k_1}, a^{k_2}, \dots, a^{k_t} \rangle$ , cu

$k_1 < k_2 < \dots < k_t$  numere naturale nenule.

Demonstrăm, prin inducție după  $s$ , că  $H = \langle a^{k_1} \rangle$ , deci că  $\forall s \in \mathbf{N}^*$ ,  $a^{k_s} \in \langle a^{k_1} \rangle$ .

Pentru  $s = 2$ ,  $a^{k_1}, a^{k_2} \in H$ . Cum  $H$  e subgrup al lui  $G$  obținem  $(a^{k_1})^{-1} \cdot a^{k_2} \in H$  și deci  $a^{k_2 - k_1} \in H$  și din  $k_2 - k_1 < k_2$  rezultă că avem  $k_2 = 2 \cdot k_1$  și  $a^{k_2} \in \langle a^{k_1} \rangle$ .

Presupunem că avem  $k_{s-1} = (s-1) \cdot k_1$  și demonstrăm că și  $k_s = k_1 \cdot s$ .

Avem:  $k_s - k_1 > k_s - k_2 > \dots > k_s - k_{s-1}$  și  $a^{k_s - k_1}, a^{k_s - k_2}, \dots, a^{k_s - k_{s-1}} \in H$  iar

$k_s - k_1, k_s - k_2, \dots, k_s - k_{s-1} \in \{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}\}$  și deci  $k_s - k_{s-1} = k_1$  și folosind ipoteza de inducție obținem  $k_s = s \cdot k_1$  și  $a^{k_s} = (a^{k_1})^s \in \langle a^{k_1} \rangle$ , așadar  $H$  este ciclic, generat de  $a^{k_1}$ .

## 2. Teoremele lui Lagrange și Cauchy pentru grupuri finite

### 2. 1. Teorema lui Lagrange și teorema lui Cauchy

**2.1.1. Definiție** Fie  $H$  un subgrup al grupului  $(G, \cdot)$ . Se definesc relațiile de echivalență  $\rho_H, \rho'_H$  (la stânga, respectiv la dreapta) pe  $G$ , după cum urmează:  
 $x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$  și  $x \rho'_H y \Leftrightarrow yx^{-1} \in H$ .

$xH$  și  $Hx$  sunt clasele de echivalență la stânga, respectiv la dreapta ale lui  $x$  în raport cu  $H$  ( $y \in xH \Leftrightarrow x \rho_H y$  și  $y \in Hx \Leftrightarrow x \rho'_H y$ )

Mulțimile  $G / \rho_H = \{H, xH, yH, \dots\}$  și  $G / \rho'_H = \{H, Hx, Hy, \dots\}$  sunt mulțimile claselor de echivalență la stânga, respectiv la dreapta în raport cu  $H$ .

### 2.1.2. Observații

1) Funcția  $f: G / \rho_H \rightarrow G / \rho'_H$  dată prin relația  $f(xH) = Hx^{-1}$  este bijectivă,  $|G / \rho_H| = |G / \rho'_H| = |G : H|$  și se numește indicele subgrupului  $H$  în grupul  $G$ .

2)  $xH \cap yH \neq \emptyset \Leftrightarrow xH = yH$

Într-adevăr, dacă  $a \in xH \cap yH$ , atunci  $\exists h_1, h_2 \in H$ , astfel încât  $a = xh_1 = yh_2$ .

Atunci  $x = yh_2h_1^{-1}$  și cum  $h_2h_1^{-1} \in H$ , rezultă că  $x \in yH$ , așadar  $xH \subseteq yH$ .

Analog se demonstrează cealaltă incluziune.

**2.1.3. Definiție** Fie  $N$  un subgrup al grupului  $(G, \cdot)$ .  $N$  se numește subgrup normal dacă și numai dacă pentru orice  $x \in G$ ,  $xN = Nx$ .

### 2.1.4. Observații

1) Dacă  $N$  este subgrup normal al lui  $G$ ,  $G / \rho_N = G / \rho'_N = G / N = \{N, xN, yN, \dots\}$   
Se demonstrează ușor că  $G / N$  este grup (numit grupul factor al lui  $G$  în raport cu  $N$ ) împreună cu operația „ $\cdot$ ” definită astfel:  $xN \cdot yN = (xy)N$ .

2)  $|G / N| = |G : N|$

3) Orice subgrup de indice 2 este normal.

**Demonstrație:** Fie  $N$  un subgrup de indice 2. Atunci  $G = N \cup xN$  (cu clasele  $N$  și  $xN$  disjuncte) și de asemenea  $G = N \cup Nx$  (cu clasele  $N$  și  $Nx$  disjuncte).

Rezultă deci că  $xN = Nx$  și  $N$  este subgrup normal.

### 2.1.5. Teorema lui Lagrange

Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit și  $H$  un subgrup al lui  $G$ . Atunci:

a)  $\text{ord}(H) \mid \text{ord}(G)$

b)  $\text{ord}(G) = \text{ord}(H) \cdot \text{ord}(G / H)$

Demonstrație:

Fie  $\rho_H$  relația de echivalență la stânga din definiția 2.1. Conform observației 2 ce îi urmează, mulțimea claselor de echivalență la stânga în raport cu  $H$  este o partiție a mulțimii  $G$  (adică  $\bigcup_{x \in G} xH = G$  și clasele sunt disjuncte

două câte două). Mai mult, funcția  $f : H \rightarrow xH$  dată prin  $f(h) = xh$  este bijectivă, deci  $\forall x, y \in G, |xH| = |yH| = |H|$ . Așadar,  $\text{ord}(G) = \text{ord}(H) \cdot \text{ord}(G / \rho_H)$ , unde  $G / \rho_H$  este mulțimea claselor de echivalență modulo  $\rho_H$ , numită și mulțime cât a lui  $G$  în raport cu relația de echivalență  $\rho_H$ .

**2.1.6. Consecințe:** Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit. Atunci:

- 1) Pentru orice  $x \in G, \text{ord}(x) \mid \text{ord}(G)$
- 2) Pentru orice  $x \in G, x^{\text{ord}(G)} = e$ , unde  $e$  este elementul neutru al grupului  $G$ .
- 3) Orice grup de ordin prim este ciclic (deci izomorf cu  $(\mathbb{Z}_p, +)$ )

**2.1.7. Teorema lui Cauchy**

*Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit și  $p$  un număr prim,  $p \mid \text{ord}(G)$ . Atunci numărul soluțiilor ecuației  $x^p = 1$  este un multiplu nenul al lui  $p$ .*

Demonstrație:

Fie  $\text{ord}(G) = n$  și  $S = \{(a_1, a_2, \dots, a_p) \mid a_i \in G, \forall i \in \{1, 2, \dots, p\} \text{ și } a_1 \cdot a_2 \cdots a_p = 1\}$

Pentru orice alegere a elementelor  $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_p = (a_1 \cdot a_2 \cdots a_{p-1})^{-1}$ , deci  $a_p$  este unic determinat. Așadar  $\text{ord}(S) = n^{p-1}$  (1)

Definim relația de echivalență „ $\sim$ ” pe  $S$ :

$x \sim y \Leftrightarrow x$  este o permutare circulară a lui  $y$ .

Dacă  $a_1 = a_2 = \dots = a_p$ , clasa de echivalență a lui  $x = (a_1, a_2, \dots, a_p)$  conține un singur element și exact  $p$  elemente în caz contrar.

Într-adevăr, fie  $x = (a_1, a_2, \dots, a_p)$  și  $i, j$ , primul respectiv ultimul rang pentru care  $a_i = a_j$  și  $a_i = a_{i_1} = a_{i_2} = \dots = a_{i_k} = a_j$  pentru  $i < i_1 < \dots < i_k < j$  și  $k > 0$ , iar pentru  $k = 0, i_1 = j$ . Ca să obținem prin permutări circulare aceleași elemente pe locurile  $i, i_1, \dots, i_k, j$  (și eventual să nu rezulte permutări distincte ale lui  $x$ ), ar trebui ca „distanțele” dintre elemente să fie aceleași, deci  $p - j + i = j - i_k = \dots = i_2 - i_1 = s$ .

Așadar  $j - i_k = s, \dots, i_2 - i_1 = s, i_1 - i = s$  și adunând relațiile membru cu membru obținem  $j - i = (k+1) \cdot s$  și cum  $p = s + j - i$ , avem  $p = (k+2) \cdot s$ . Cum  $p$  este număr prim, rezultă  $s = 1$  și deci  $j = p - 1 + i$ . Cum însă  $j \leq p$ , obținem că  $p - 1 + i \leq p$ , deci că  $i \leq 1$ . Așadar  $i = 1$  și  $j = p$  și suntem în prima situație, cu toate elementele lui  $x$  identice. Deci dacă cel puțin 2 elemente ale permutării

diferă, atunci există exact  $p$  permutări circulare ce se pot obține din permutarea respectivă (a  $p$  elemente).

Fie  $r$  numărul claselor cu un element ( $r$  este deci numărul soluțiilor ecuației  $x^p = 1$ ) și  $t$  numărul claselor cu câte  $p$  elemente.

Din relația (1), rezultă că  $n^{p-1} = r + p \cdot t$  și cum  $p \mid n$ , rezultă că  $p \mid r$ .

Observăm că  $r \neq 0$ , pentru că  $(1, 1, \dots, 1) \in S$

### **2.1.8. Consecințe**

**1)** Dacă  $(G, \cdot)$  e un grup finit și  $p$  e un număr prim,  $p \mid \text{ord}(G)$ , atunci există

$x \in G$  astfel încât  $\text{ord}(x) = p$ .

**2)** Numărul subgrupurilor de ordin  $p$  ale lui  $G$ , (în condițiile consecinței 1) este congruent cu 1 (mod  $p$ ).

*Demonstrație:* Din teorema lui Cauchy, există elemente de ordinul  $p$  ale grupului  $G$ . Notăm cu  $k \in \mathbb{N}^*$  numărul subgrupurilor de ordinul  $p$  ale lui  $G$ . Numărul  $p$  fiind prim, acestea sunt ciclice.

$H_i = \langle x_i \rangle$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$  și  $H_i \cap H_j = \{e\}$ ,  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $i \neq j$ .

Fie  $H$  mulțimea soluțiilor ecuației  $x^p = 1$ . Rezultă  $H = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k$  și deci  $\text{ord}(H) = \text{ord}(H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k) = k(p - 1) + 1$ .

Din teorema lui Cauchy, cum numărul soluțiilor ecuației  $x^p = 1$  este un multiplu nenul al lui  $p$ , rezultă  $k(p - 1) + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ , deci  $k \equiv 1 \pmod{p}$ .

**2.1.9. Propoziție** Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit astfel încât pentru orice  $x \in G$ ,  $x^2 = e$

Atunci: **a)**  $(G, \cdot)$  este grup comutativ

**b)** există  $k \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $\text{ord}(G) = 2^k$

*Demonstrație* Prima parte a propoziției este un exercițiu foarte cunoscut, prezent în manuale, care este adevărat și pentru cazul în care  $G$  nu este grup finit.

Vom prezenta trei demonstrații pentru afirmația de la b).

**Soluția I:** Vom demonstra concluzia prin inducție după  $n = \text{ord}(G)$ :

Pentru  $n = 1$ , evident,  $\text{ord}(G) = 2^0$ . Fie  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $m > 1$

Presupunem că afirmația e adevărată pentru grupurile de ordin mai mic decât  $m$  cu proprietatea din enunț. Fie  $(G, \cdot)$  un grup de ordin  $m$  și fie  $x \in G$ . Cum  $G$  este grup comutativ (conform cu punctul a)), subgrupul  $N = \{e, x\}$  este un subgrup normal al lui  $G$ , adică pentru orice  $y \in G$ ,  $yN = Ny$ .

Cum  $(xN)xN = x^2N = eN = N$ , pentru orice  $x \in G$ , rezultă că  $(G/N, \cdot)$  este un grup factor care are proprietatea din enunț.

Din teorema lui Lagrange avem că  $\text{ord}(G/N) = \frac{\text{ord}(G)}{\text{ord}(N)} < \text{ord}(G) = m$  și deci

din ipoteza de inducție rezultă că există  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\text{ord}(G/N) = 2^k$ .

Atunci  $\text{ord}(G) = 2 \cdot \text{ord}(G/N) = 2^{k+1}$  și conform principiului inducției matematice, afirmația b) este adevărată pentru orice grup finit cu proprietatea din enunț.

**Soluția a II-a:** Vom organiza grupul  $G$  ca spațiu vectorial și pentru simplitatea scrierii, vom considera de această dată operația grupului în notație aditivă.

Pe  $(G, +)$ , care are toate elementele de ordin  $\leq 2$ , se poate introduce o structură de  $\mathbb{Z}_2$  – spațiu vectorial. Cele 4 axiome ale spațiului vectorial se verifică prin calcul direct, mulțimea scalarilor fiind finită. Se definește  $\hat{1} \cdot x = x$  și  $\hat{0} \cdot x = 0$ .

Cum  $G$  este un spațiu vectorial finit, el este de dimensiune finită.

Fie  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  o bază a acestuia.

Atunci,  $\forall x \in G, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_2, x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e_i$ .

Așadar, numărul elementelor din  $G$  coincide cu numărul  $n$ -uplurilor  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  ce se pot forma cu elemente din  $\mathbb{Z}_2$ , deci cu numărul funcțiilor ce se pot defini de la o mulțime cu  $n$  elemente la  $\mathbb{Z}_2$ , care este  $2^n$ .

**Soluția a III-a:** Presupunem că ordinul grupului  $G$  nu este o putere a lui 2.

Atunci  $\exists p \in \mathbb{N}$ ,  $p$  număr prim,  $p \geq 3$ , astfel încât  $p \mid \text{ord}(G)$ . Atunci, din consecința 1 a teoremei lui Cauchy rezultă că există  $a \in G$ ,  $\text{ord}(a) = p$ . Avem  $a^p = e$  și cum  $a^2 = e$  obținem  $a^{(p \cdot 2)} = a^1 = e$ , fals. Așadar  $\exists n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{ord}(G) = 2^n$ .

**2.1.10. Generalizare** Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit și  $p \in \mathbb{N}$  un număr prim astfel încât  $\forall x \in G, x^p = e$ . Atunci ordinul lui  $G$  este o putere a lui  $p$ .

Demonstrația acestui rezultat se face cel mai ușor prin reducere la absurd și folosind teorema lui Cauchy, ca în cazul precedent.

## Bibliografie

1. Gh. Andrei, C-tin Caragea, V. Ene – Algebră – Culegere de probleme pentru examene de admitere și olimpiade școlare, Ed. Scorpion 7, București 1995
2. M. Burtea, G. Burtea – Matematică – clasa a XII-a – Elemente de analiză matematică. Algebră superioară, Ed. Carminis 2001
3. D. Popescu, C-tin Vraciu – Elemente de teoria grupurilor finite, Ed Științifică și Enciclopedică București 1986 – pag 77 - 78
4. Colecția G. M.

## Probleme rezolvate

R2.2.1. Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit. Dacă  $m$  și  $n$  sunt divizori ai ordinului grupului, atunci ecuațiile  $x^m = e$  și  $x^n = e$  au o singură soluție comună dacă și numai dacă  $(m, n) = 1$ .

Mihai Piticari

Soluție: Observăm că  $x = e$  este soluție comună a ecuațiilor.

„ $\Leftarrow$ ”  $(m, n) = 1 \Rightarrow \exists h, k \in \mathbf{Z}, m \cdot h + n \cdot k = 1$ .

Fie  $a \in G$  o soluție comună a celor două ecuații. Atunci  $a^{m \cdot h} = e$ ,  $a^{n \cdot k} = e$  și obținem  $a = a^{m \cdot h + n \cdot k} = e$

„ $\Rightarrow$ ” Fie  $(m, n) = d$ . Dacă  $d \geq 2$ , există  $p \in \mathbf{N}$ ,  $p$  prim, astfel încât  $p \mid d$ .

Din consecința 1 a teoremei lui Cauchy rezultă că există  $b \in G \setminus \{e\}$ ,  $\text{ord}(b) = p \Rightarrow b^p = e$  și cum  $b^d = e \Rightarrow$  ecuația  $x^d = e$  nu are soluție unică, fals. Rezultă  $d=1$ .

R2.2.2. Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit. Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

a)  $G$  este ciclic

b) Pentru orice  $d \in \mathbf{N}^*$ , există cel mult un subgrup de ordinul  $d$  în  $G$ .

Soluție: Reamintim că pentru  $n \in \mathbf{N}$ , indicatorul  $\varphi(n)$  al lui Euler ( $\varphi(n)$  este numărul tuturor numerelor naturale mai mici decât  $n$  și prime cu  $n$ ) verifică formula lui Gauss:  $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$  (sumarea făcându-se după toți divizorii lui  $n$ ,

inclusiv 1 și  $n$ ).

„a  $\Rightarrow$  b” Dacă  $\text{ord}(G) = n$  și  $d \mid n$ ,  $d \in \mathbf{N}^*$ , atunci unicul subgrup de ordinul  $d$  al lui  $G$  este  $H = \{x \in G \mid x^d = 1\}$

Într-adevăr,  $\text{ord}(H) = d$ , pentru că grupul ciclic  $G$  are un element de ordinul  $d$   $\left( \text{dacă } G = \langle y \rangle \Rightarrow \text{ord} \left( y^{\frac{n}{d}} \right) = d \right)$ , care se află în  $H$  și care de fapt îl

generează pe  $H$ . Presupunând că există  $H' \neq H$ ,  $H'$  subgrup de ordinul  $d$  al lui  $G$ , avem că  $\forall x \in H', x^{\text{ord}(H')} = x^d = 1 \Rightarrow x \in H \Rightarrow H' \subset H$  și cum au același număr de elemente, rezultă că  $H' = H$ .

„b  $\Leftarrow$  a” Dacă afirmația b) este adevărată, pentru  $d \in \mathbf{N}^*$ , fie

$M_d = \{a \in G \mid \text{ord}(a) = d\}$ . Mulțimile  $M_d$  sunt disjuncte două câte două și reuniunea lor este mulțimea elementelor lui  $G$ . În plus, dacă  $x \in M_d \Rightarrow \text{ord}(x) / d$ .

Dar  $\text{ord}(x) / \text{ord}(G) = n$ . În concluzie,  $M_d \neq \emptyset \Leftrightarrow d / n \Leftrightarrow \exists$  un subgrup ciclic  $H_d$ , de ordin  $d$  al lui  $G$ . Din ipoteză,  $H_d$  este unicul subgrup de ordin  $d$  al lui  $G$  și deci  $M_d = \{a \in G \mid \langle a \rangle = H_d\}$ , iar  $|M_d| = \varphi(d)$ .

$$\text{Avem } n = |G| = \sum_{d/n} |M_d| = \sum_{d/n} \varphi(d).$$

Relația anterioară este adevărată (Gauss) și cum unul dintre divizorii lui  $n$  din formula anterioară este chiar  $n$ , există un subgrup ciclic  $H_n$  de ordinul  $n$ , al lui  $G$ . Atunci  $G = H_n$  și  $G$  este ciclic.

R2.2.3. Fie  $(G, \cdot)$  un grup cu  $4n + 2$  elemente ( $n \in \mathbf{N}$ ). Să se determine numărul elementelor  $x \in G$  astfel încât  $x^{2n+1} = e$ .

*Marian Andronache*

Soluție: Fie  $G = \{e, a_1, \dots, a_{n-1}\}$  și  $S(G)$  mulțimea permutărilor lui  $G$  (a funcțiilor bijective de la  $G$  la  $G$ ).

Pentru  $a \in G$ , funcția  $\sigma_a : G \rightarrow G$ ,  $\sigma_a(x) = a \cdot x$ ,  $\forall x \in G$  este în  $S(G)$ , iar

$f : G \rightarrow S(G)$ ,  $f(a) = \sigma_a$ ,  $\forall a \in G$  este un morfism injectiv de grupuri.

Fie  $H = f(G)$ . Atunci  $G \approx f(G) = H = \{\sigma_e, \sigma_{a_1}, \dots, \sigma_{a_{n-1}}\}$  și  $H$  este un subgrup al lui  $S(G)$  (Acest rezultat este teorema lui Cayley).  $2 / \text{ord}(G) \Rightarrow \exists a \in G$ ,  $\text{ord}(a) = 2$

Atunci,  $\sigma_a^2(x) = a(ax) = x$ ,  $\forall x \in G \Rightarrow \sigma_a^2 = \bar{e}$  (permutarea identică)

$a \neq e \Rightarrow \sigma_a$  nu are puncte fixe  $\Rightarrow$  în  $\sigma_a$  apar  $2n + 1$  perechi de tipul  $\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_a$  este produsul a  $2n + 1$  transpoziții disjuncte  $\Rightarrow \varepsilon(\sigma_a) = -1$  (1)

În consecință,  $H$  este un grup de permutări care are o permutare impară și de aici, numărul permutărilor pare din  $H$  este egal cu numărul permutărilor impare din  $H$  ( $= 2n + 1$ ). Într-adevăr, dacă  $e, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$  sunt toate permutările pare din  $H$  și  $\sigma_k, \dots, \sigma_{n-1}$  sunt toate permutările impare din  $H$ , avem  $\sigma_k^2, \dots, \sigma_k \cdot \sigma_{n-1}$  permutări pare  $\Rightarrow n - k \leq k$  și cum  $\sigma_k \cdot e, \sigma_k \cdot \sigma_1, \dots, \sigma_k \cdot \sigma_{k-1}$  sunt permutări impare  $\Rightarrow k \leq n - k$  și deci  $k = n - k$ .

Fie  $A = \{x \in G \mid x^{2n+1} = e\}$  și  $x \in A$ .

$\bar{e} = f(e) = (f(x))^{2n+1} = (\sigma_x)^{2n+1} \Rightarrow \varepsilon((\sigma_x)^{2n+1}) = 1 \Rightarrow \varepsilon(\sigma_x) = 1 \Rightarrow \sigma_x$   
 permutare pară  $\Rightarrow |A| \leq 2n+1$  (2)

Fie  $B = \{x \in G \mid x^{2n+1} \neq e\}$  și  $y \in B \Rightarrow a = y^{2n+1} \neq e$  și  $a^2 = e \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \varepsilon(\sigma_a) = -1$   
 $\sigma_a = f(a) = (f(y))^{2n+1} = (\sigma_y)^{2n+1}$  și cum  $\varepsilon(\sigma_a) = -1$  obținem că  $\varepsilon(\sigma) = -1$   
 $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow |B| \leq 2n+1$  (3) Din (2) și (3) deducem că  $|A| = |B| = 2n+1$ .

**R2.2.4. Demonstrați că un grup cu  $4n+2$  elemente admite cel mult un subgrup cu  $2n+1$  elemente.**

*Eugen Păltănea, Sabin Tăbărcă*

Soluție: Dacă  $H$  e un subgrup al lui  $G \Rightarrow \text{ord}(H) < 4n+2 \Rightarrow \text{ord}(H) \leq 2n+1$ .

Pentru  $n=0$  enunțul este adevărat.

Pentru  $n \geq 1$ , dacă  $H = \{e, x_1, \dots, x_{2n}\}$  este nu subgrup al lui  $G$  cu  $2n+1$  elemente și  $x \in G$ ,  $\text{ord}(x) = 2$  (există, din consecința teoremei lui Cauchy), atunci  $x \notin H \Rightarrow x \cdot x_i \notin H, \forall i=1, 2n \Rightarrow G = H \cup \{x \cdot x_i \mid i=1, 2n\}$ .

Demonstrăm că  $\forall y, z \in G \setminus H, y \cdot z \in H$  (1)

Fie  $y, z \in G \setminus H \Rightarrow \exists x_i, x_j \in H, y = x \cdot x_i, z = x \cdot x_j. x_i \cdot x_j \notin H \Rightarrow \exists x_k \in H, x_i \cdot x = x \cdot x_k$

Atunci  $y \cdot z = x \cdot x_i \cdot x \cdot x_j = x \cdot (x_i \cdot x) \cdot x_j = x \cdot x \cdot x_k \cdot x_j = x_k \cdot x_j$ .

Deci  $y \cdot z = x_k \cdot x_j$  și cum  $x_k, x_j \in H$  deducem că  $y \cdot z \in H$ , așadar (1) este adevărată.

Presupunem că există subgrupul  $H'$  al lui  $G$ , de ordin  $2n+1$ , cu  $H' \neq H$ .

Avem  $H \cap H'$  subgrup al lui  $G$  și  $H \cap H' \neq H, H \cap H' \neq H'$ .

Notăm  $\text{ord}(H \cap H') = p \Rightarrow p \mid 2n+1, p \neq 2n+1$ . Atunci  $p < \left[ \frac{2n+1}{2} \right] = n$ .

Notăm, după o eventuală redenumire a elementelor,  $H \cap H' = \{e, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$ .

Atunci  $H' = \{e, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, y_p, \dots, y_{2n}\}$  cu  $\{y_p, \dots, y_{2n}\} \subset x \cdot H = G \setminus H$ .

Din (1) obținem  $y_p^2, y_p \cdot y_{p+1}, \dots, y_p \cdot y_{2n} \in H \cap H'$  și deci

$p = |H \cap H'| \geq 2n - p + 1 \geq n + 1$ , fals.



**Observații: 1)** Dacă  $G$  are un subgrup  $H$  cu  $2n+1$  elemente, atunci din (1) rezultă că subgrupurile  $K$  ale lui  $G$  astfel încât  $K \cap H = \{e\}$  sunt de ordinul 2.

**2)** Dacă  $|G| = 4n+2$ , atunci  $G$  nu poate avea doar subgrupuri proprii de ordinul 2 (ar rezulta că ordinul lui  $G$  este o putere a lui 2, fals.)

R2.2.5. Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit și  $H_1, H_2$  subgrupuri ale lui  $G$ . Fie mulțimea  $H_1H_2 = \{x \cdot y \mid x \in H_1, y \in H_2\}$ . Dacă  $\max\{\text{ord}(H_1), \text{ord}(H_2)\} > \frac{1}{2}\text{ord}(G)$ , să se demonstreze că  $H_1H_2 = G$ .

Soluție: s Presupunem că  $\text{ord}(H_1) \geq \text{ord}(H_2)$ , deci că  $\text{ord}(H_1) > \frac{n}{2}$ , unde  $\text{ord}(G) = n$ . Atunci, cum din teorema lui Lagrange avem că  $\text{ord}(H_1) \mid \text{ord}(G)$ , rezultă că  $\text{ord}(H_1) = n$  și deci  $H_1 = G$ . Așadar  $H_1H_2 = GH_2 = \{x \cdot y \mid x \in G, y \in H_2\}$  Elementul neutru  $e$  al grupului  $G$  se află și în  $H_2$  și deci, oricare ar fi  $x \in G$ ,  $x = x \cdot e \in GH_2$ , așadar  $G \subset GH_2$  și cum și  $GH_2 \subset G$ , rezultă că  $G = GH_2 = H_1H_2$ .

### 3. Aplicații ale teoremei lui Lagrange în probleme de teoria numerelor

#### 3.1. Noțiuni și rezultate utilizate

Deoarece cunoștințele necesare înțelegerii acestei teme sunt puține, vom rezuma toate rezultatele ce le vom folosi.

**3.1.1.** Dacă  $(G, \cdot)$  este un grup și  $(H, \cdot)$  un subgrup al său atunci relațiile  $\rho_H \subset G \times G$  și  $\rho'_H \subset G \times G$  definite prin:

$$(x, y) \in \rho_H \stackrel{def}{\Leftrightarrow} x^{-1}y \in H \quad \text{și} \quad (x, y) \in \rho'_H \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

sunt relații de echivalență pe  $G$  iar clasele de echivalență au toate același cardinal ca mulțimea  $H$ .

**3.1.2.** Dacă  $(G, \cdot)$  este un grup finit și  $(H, \cdot)$  este un subgrup al său, atunci  $|H|$  divide  $|G|$ . (Lagrange)

(Dacă  $|H|=k, |G|=n$  atunci  $k|n$  și dacă  $n=km$  numărul  $m$  se numește indicele lui  $H$  în  $G$  și se notează  $[G:H]$ , avem  $|G|=|H|[G:H]$ ).

**3.1.3.** Dacă  $(G, \cdot)$  este un grup finit și  $x \in G$  un element al său, atunci ordinul lui  $x$  este finit (există  $k \in \mathbf{N}^*$  minim cu  $x^k=1$ ) și  $ord(x)$  divide  $|G|$ .

(Ordinul lui  $x$  este cardinalul subgrupului ciclic generat de  $x$ ).

**3.1.4.** Dacă  $G = \langle a \rangle$  există un grup ciclic finit (generat de  $a$ ) și  $|G|=n$ , atunci un element  $a^k \in G$  generează tot grupul  $G$  dacă și numai dacă  $(k, n)=1$ .

**3.1.5.** În monoidul  $(\mathbf{Z}_n, \cdot)$ , al claselor de resturi modulo  $n$ , un element  $\hat{k}$  este element inversabil, dacă și numai dacă  $(k, n)=1$ .

**3.1.6.** Dacă  $(M, \cdot)$  este un monoid și notăm  $U(M)$  mulțimea elementelor inversabile din  $M$ , atunci  $(U(M), \cdot)$  formează o structură de grup.

**3.1.7.** Dacă  $(G, \cdot)$  este un grup abelian finit atunci

$$\prod_{g \in G} g = \prod_{\sigma(g) \leq 2} g'$$

(al doilea termen al egalității este produsul tuturor elementelor din  $G$  care au ordinul doi).

Demonstrație. Dacă  $g \in G$  și  $ord(g) \geq 3$  atunci  $g \neq g^{-1}$  și  $ord(g) = ord(g^{-1})$ , deci mulțimea  $\{g \in G \mid ord(g) \geq 3\}$  o putem partiționa în mulțimi de forma  $\{g, g^{-1}\}$  (numărul elementelor de ordin  $\geq 3$  este par) și atunci

$$\prod_{ord(g) \geq 3} g = 1 \quad (g \cdot g^{-1} = 1).$$

**3.1.8.** Numărul elementelor de ordin diferit de 2, dintr-un grup finit este impar.

(Elementele de ordin  $\geq 3$  se cuplează în perechi  $\{g, g'\}$  deci sunt în număr par și se mai adaugă 1 care este de ordin 1.)

**3.1.9.** În orice grup finit de ordin par, există elemente de ordin 2.

(Numărul elementelor de ordin diferit de 2 este impar, deci și numărul celor de ordin 2 este impar, adică cel puțin 1.)

## 3.2. Funcții aritmetice. Funcția lui Euler

În teoria numerelor apar numeroase funcții aritmetice (definite pe  $\mathbf{N}^*$ ) unele din ele foarte des (clasice). Vom aminti câteva din ele și vom da câteva proprietăți ale lor, ocupându-ne în special de funcția lui Euler.

**3.2.1. Definiție.** Se numește funcție aritmetică orice funcție  $f: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{C}$ .

**3.2.2. Observație.** • În general în teoria numerelor se consideră că 0 nu este număr natural și din acest motiv se notează cu  $\mathbf{N}$  mulțimea  $\{1, 2, 3, \dots\}$ . Noi vom nota  $\{1, 2, 3, \dots\} = \mathbf{N}^*$  pentru a menține notația adoptată în manualele noastre.

• Majoritatea funcțiilor aritmetice clasice sunt definite cu valori în  $\mathbf{N}$ , dar pentru definirea unor funcții "inverse" este necesară extinderea codomeniului.

• Vom nota mulțimea funcțiilor aritmetice cu  $F_a$ .

**3.2.3. Definiție.** O funcție aritmetică  $f \in F_a$  se numește funcție multiplicativă dacă  $f \neq 0$  și  $f(mn) = f(m)f(n)$  pentru orice pereche de numere  $m, n$  relativ prime,  $(m, n) = 1$ .

**3.2.4. Observație.** a) Dacă  $f$  este o funcție multiplicativă atunci  $f(1) = 1$  (pentru  $n \in \mathbf{N}^*$  cu  $f(n) \neq 0$  avem  $f(1, n) = f(1)f(n) \Leftrightarrow f(n) = f(1)f(n)$  deci  $f(1) = 1$ ).

b) O funcție multiplicativă este unic determinată de valorile pe care le ia în puterile numerelor prime, adică pe mulțimea  $M = \{p^k \mid k \in \mathbf{N}^*, p \text{ număr prim}\}$ .

(Dacă  $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$  este descompunerea în factori primi a numărului  $n$  atunci  $f(n) = f(p_1^{k_1})f(p_2^{k_2}) \dots f(p_m^{k_m})$ .)

c) Dacă  $f$  este o funcție multiplicativă și notăm cu  $D_n$  mulțimea divizorilor (naturali) lui  $n$  atunci avem:

$$\sigma_f(n) = \sum_{d \in D_n} f(d) =$$

$$= (1 + f(p_1) + f(p_1^2) + \dots + f(p_1^{k_1})) \dots (1 + f(p_m) + f(p_m^2) + \dots + f(p_m^{k_m}))$$

unde  $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ ,  $p_1, p_2, \dots, p_m$  fiind numere prime.

(În produsul din membrul doi, efectuând înmulțirea parantezelor se obțin termeni de forma  $f(p_1^{\alpha_1})f(p_2^{\alpha_2}) \dots f(p_m^{\alpha_m})$  care se regăsește în membrul stâng al egalității pentru divizorul  $d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ ,

$$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}) = f(p_1^{\alpha_1})f(p_2^{\alpha_2}) \dots f(p_m^{\alpha_m}).$$

d) Dacă  $f$  este funcție multiplicativă atunci funcția  $\sigma_f$  definită prin  $\sigma_f(n) = \sum_{d|n} f(d)$  este tot o funcție multiplicativă.

**3.2.5. Definiție.** Se spune că funcția aritmetică  $f \in F_a$  este o funcție complet multiplicativă dacă  $f \neq 0$  și  $f(mn) = f(m)f(n)$  pentru orice pereche  $(m, n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ .

**3.2.6. Observație.** a) O funcție complet multiplicativă este în particular o funcție multiplicativă, deci are toate proprietățile acestor funcții.

b) O funcție complet multiplicativă este unic determinată de valorile pe care le ia în numerele prime.

(Avem  $f(1) = 1$  și  $f(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}) = (f(p_1))^{k_1} (f(p_2))^{k_2} \dots (f(p_m))^{k_m}$ .)

c) Proprietatea c) din observația anterioară, pentru funcții complet multiplicative devine:

$$\sigma_f(n) = \sum_{d|n} f(d) =$$

$$= (1 + f(p_1) + \dots + (f(p_1))^{k_1}) \dots (1 + f(p_m) + \dots + (f(p_m))^{k_m})$$

unde  $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$  este descompunerea lui  $n$  în factori primi.

d) Dacă  $s$  este un număr arbitrar (natural, întreg, real sau chiar complex) este evident că funcția  $f: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $f(n) = n^s$  este complet multiplicativă.

În cazul  $s = 0$  egalitatea c) devine

$$\sum_{d|n} 1 = (1 + k_1)(1 + k_2) \dots (1 + k_m),$$

deci  $T(n)$ , numărul divizorilor lui  $n$  este  $T(n) = (1 + k_1)(1 + k_2) \dots (1 + k_m)$ , unde  $k_1, k_2, \dots, k_m$  sunt exponenții numerelor prime care apar în descompunerea lui  $n$  în factori primi.

**Funcția  $T: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$ ,  $T(n) = \text{numărul divizorilor naturali ai lui } n$**  este o funcție aritmetică multiplicativă, dar nu este complet multiplicativă.

În cazul  $s = 1$  egalitatea c) devine

$$\sum_{d|n} d = \frac{p_1^{k_1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_m^{k_m} - 1}{p_m - 1}$$

deci  $\sigma(n)$ , suma divizorilor naturali ai numărului  $n$  este:

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_m^{k_m} - 1}{p_m - 1}$$

unde  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$  este descompunerea lui  $n$  în factori primi.

**Funcția  $\sigma: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$ ,  $\sigma(n)$  = suma divizorilor naturali ai numărului  $n$**  este o funcție aritmetică multiplicativă (dar nu complet multiplicativă).

Pe mulțimea  $F$  a funcțiilor aritmetice se definesc operațiile:

Suma:  $f, g \in F_a$ ,  $f + g \in F_a$ ,  $(f + g)(n) \stackrel{\text{def}}{=} f(n) + g(n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$

Produsul:  $f, g \in F_a$ ,  $fg \in F_a$ ,  $(fg)(n) \stackrel{\text{def}}{=} f(n)g(n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$

**Produsul Dirichlet (de convoluție):**  $f, g \in F_a$ ,  $f * g \in F_a$

$$(f * g)(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

(Suma se face după toți divizorii naturali  $d$  ai lui  $n$ .)

**3.2.7. Observație.** Se pot verifica cu ușurință (recomandăm ca exerciții) următoarele afirmații:

a)  $(F_a, +)$  este un grup comutativ cu elementul neutru funcția  $f = 0$ .

b)  $(F_a, \cdot)$  este un monoid comutativ cu elementul neutru funcția  $f = 1$  și elementele inversabile, funcțiile care nu iau valoarea zero.

c)  $(F_a, *)$  este un monoid cu elementul neutru funcția  $\delta$  definită prin

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{daca } n = 1 \\ 0, & \text{daca } n \neq 1 \end{cases} \quad (\text{funcția lui Dirac}).$$

Elementele inversabile în acest monoid comutativ sunt funcțiile  $f$  pentru care  $f(1) \neq 0$  și elementul simetric față de legea "\*" al lui  $f$  este o funcție  $f^*: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{C}$  care se definește recurent prin relațiile

$$f^*(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)}, & n = 1 \\ -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} f(d) f^*\left(\frac{n}{d}\right), & n > 1 \end{cases}$$

sau

$$f^*(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)}, & n > 1 \\ -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} f^*(d) f\left(\frac{n}{d}\right), & n > 1 \end{cases}$$

d) Produsul obișnuit și produsul Dirichlet sunt operații distributive față de sumă:

$$\begin{aligned} f(g+h) &= fg + fh \\ f*(g+h) &= (g+h)*f = f*g + f*h. \end{aligned}$$

e)  $(F_a, +, \cdot)$  și  $(F_a, +, *)$  sunt inele comutative unitare.

f) Dacă notăm cu  $M$  mulțimea funcțiilor aritmetice multiplicative atunci  $(M, *)$  formează o structură de grup.

(Produsul Dirichlet a două funcții multiplicative dă o funcție multiplicativă; Pentru orice două funcții multiplicative  $g$  și  $h$  există o unică funcție multiplicativă  $f$  cu proprietatea:  $f * g = h$ .)

g) Funcția  $\mu \in F_a$  cu proprietatea  $\mu * 1 = \delta$ , unde  $1$  este funcția constantă  $f=1$ , iar  $\delta$  este funcția Dirac se numește **funcția lui Moebius** (este simetrica funcției  $1$  față de produsul de convoluție, deci  $\mu = 1^*$ ).

Se deduce ușor că expresia funcției lui Moebius este

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{daca } n = 1 \\ 0, & \text{daca in descompunerea lui } n \text{ in factori primi} \\ & \text{exista exponenti diferiti de } 1 \\ (-1)^m, & \text{daca } n \text{ este produs de } m \text{ numere prime (distincte)} \end{cases}$$

b) Funcția lui Moebius are următoarele proprietăți:

$$\mu_1: \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{daca } n = 1 \\ 0, & \text{daca } n > 1 \end{cases} \quad (\text{din definiție})$$

(sau  $\sigma_\mu = \sigma$  (conform observației 3d))

$\mu_2$ : Funcția lui Moebius este o funcție multiplicativă.

(Se poate constata direct din expresia ei sau folosind punctul f) al observației 6).

$\mu_3$ : Pentru orice funcție multiplicativă  $f$ , avem egalitatea

$$\sigma_{\mu f}(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(d) = (1 - f(p_1))(1 - f(p_2)) \dots (1 - f(p_m))$$

unde  $p_1, p_2, \dots, p_m$  sunt numerele prime care apar în descompunerea lui  $n$  în factori primi.

(Funcția  $\mu^f$  fiind produs de funcții multiplicative, este o funcție multiplicativă și aplicăm relația dată de Observația 3c)

$$\sigma_{\mu^f}(n) = (1 + \mu^f(p_1) + \mu^f(p_1^2) + \dots + \mu^f(p_1^{k_1})) \dots (1 + \mu^f(p_m) + \dots + \mu^f(p_m^{k_m}))$$

în care  $\mu(p_1) = \mu(p_2) = \dots = \mu(p_m) = -1$ ,  $\mu(p_1^2), \dots, \mu(p_1^{k_1})$ ,

$\mu(p_m^2), \dots, \mu(p_m^{k_m})$  sunt zero, deci

$$\sigma_{\mu^f}(n) = (1 - f(p_1))(1 - f(p_2)) \dots (1 - f(p_m))$$

$$\mu_4: \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right), \quad n > 1$$

(Se aplică  $\mu_3$  pentru funcția multiplicativă  $f(d) = \frac{1}{d}$ .)

**3.2.8. Definiție.** Funcția aritmetică  $\varphi: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$ ,  $\varphi(n) =$  numărul numerelor naturale  $k$ , mai mici sau egale cu  $n$  și prime cu  $n$ , se numește **funcția aritmetică a lui Euler**.

**3.2.9. Observație.**  $\varphi(n) = \{k \in \mathbf{N}^* \mid 1 \leq k \leq n \text{ și } (k, n) = 1\}$ .

b) Dacă  $(\mathbf{Z}_n, +)$  este grupul claselor de resturi modulo  $n$  atunci  $\hat{k} \in \mathbf{Z}_n$  este generator pentru  $\mathbf{Z}_n$  dacă și numai dacă  $(k, n) = 1$ , deci  $\varphi(n)$  este numărul generatorilor din  $\mathbf{Z}_n$  al grupului  $\mathbf{Z}_n$ .

c) Dacă  $(\mathbf{Z}_n, \cdot)$  este monoidul multiplicativ al claselor de resturi modulo  $n$ , o clasă  $\hat{k} \in \mathbf{Z}_n$  este element inversabil dacă și numai dacă  $(k, n) = 1$ , deci dacă  $(U(\mathbf{Z}_n), \cdot)$  este grupul unităților modulului  $(\mathbf{Z}_n, \cdot)$  atunci  $\varphi(n) = |U(\mathbf{Z}_n)|$  (ordinul grupului  $(U(\mathbf{Z}_n), \cdot)$ ) ( $\varphi(n)$  este numărul elementelor inversabile ale inelului  $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$ ).

**3.2.10. Propoziție.** Funcția lui Euler  $\varphi: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$  are expresia

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$$

unde  $p_1, p_2, \dots, p_m$  sunt numerele prime care apar în descompunerea lui  $n$  în factori primi ( $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ ).

Demonstrație. Notăm  $\varphi(n) = n - \psi(n)$ , unde  $\psi(n)$  este numărul numerelor mai mici sau egale cu  $n$ , neprime cu  $n$ . Dacă singurii divizori ai lui  $n$  sunt  $p_1, p_2, \dots, p_m$  atunci un număr  $1 < a \leq n$  este neprim cu  $n$  dacă și numai dacă el se divide cu cel puțin unul din numerele  $p_1$  sau  $p_2$  sau ...  $p_m$ .

Considerăm mulțimile  $A_i = \{a \mid 1 < a \leq n, p_i \mid a\}$ ,  $i = \overline{1, m}$  și atunci

$$\psi(n) = \left| \bigcup_{i=1}^m A_i \right| = \sum_{i=1}^m |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

(conform principiului includerii și excluderii).

Dar

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad |A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad |A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{n}{p_i p_j p_k}, \dots$$

deci

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n \left( 1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum \frac{1}{p_i p_j} - \sum \frac{1}{p_i p_j p_k} + \dots \right) = \\ &= n \left( 1 - \frac{1}{p_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{p_m} \right) \end{aligned}$$

**3.2.11. Observație.** a) Funcția  $\varphi$  poate fi dată și prin expresia

$$\varphi(n) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1})(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}) \dots (p_m^{k_m} - p_m^{k_m-1})$$

dacă  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$  este descompunerea lui  $n$  în factori primi.

b) Funcția  $\varphi$  este funcție aritmetică multiplicativă

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n) \quad \text{dacă} \quad (m, n) = 1.$$

### 3.3. Teoreme fundamentale

**3.3.1. Teorema lui Euler.** Dacă  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$  și  $(a, n) = 1$  atunci

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Demonstrație. Dacă  $(a, n) = 1$  atunci în  $\mathbf{Z}_n$ ,  $\hat{a} \in U(\mathbf{Z}_n)$  deci  $\hat{a}$  este element al grupului multiplicativ  $(U(\mathbf{Z}_n), \cdot)$  care are ordinul  $\varphi(n)$ . Conform teoremei lui Lagrange ordinul lui  $\hat{a}$  divide  $\varphi(n)$ , deci oricum  $(\hat{a})^{\varphi(n)} = \hat{1}$  în  $\mathbf{Z}_n$  sau  $a^{\varphi(n)} = \hat{1}$  sau  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .

**3.3.2. Teorema lui Fermat (mică).** Dacă  $p \in \mathbf{N}^*$  este un număr prim și  $a \in \mathbf{Z}$  un număr întreg, atunci

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Demonstrație. Dacă  $\hat{a} = \hat{0}$  în  $\mathbf{Z}_p$  atunci  $(\hat{0})^p = \hat{0}$ .

Dacă  $\hat{a} \neq \hat{0}$  în  $\mathbf{Z}_p$ , atunci  $\hat{a} \in \mathbf{Z}_p \setminus \{\hat{0}\} = \mathbf{Z}_p^*$  iar  $(\mathbf{Z}_p^*, \cdot)$  este grup cu  $(p-1)$  elemente ( $(\mathbf{Z}_p, +, \cdot)$  este corp). Ordinul oricărui element



$\hat{a} \in \mathbf{Z}_p^*$  divide ordinul grupului, deci oricum  $(\hat{a})^{p-1} = \hat{1}$  în  $\mathbf{Z}_p$  sau  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  sau  $a^p \equiv a \pmod{p}$ .

**3.3.3. Teorema lui Wilson.** Dacă  $p \geq 2$  este un număr natural atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- a)  $p$  este număr prim
- b)  $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

Demonstrație. Avem  $U(\mathbf{Z}_p) = \mathbf{Z}_p^*$  (grup multiplicativ cu  $(p-1)$  elemente) și conform C7 avem:

$$(1) \quad \prod_{\hat{k} \in \mathbf{Z}_p^*} \hat{k} = \prod_{ord(\hat{k})=2} \hat{k}'$$

dar  $ord(\hat{k}') = 2$  dacă  $(\hat{k}')^2 = \hat{1}$  sau  $(\hat{k}' - \hat{1})(\hat{k}' + \hat{1}) = \hat{0}$  sau  $p \mid (k'-1)(k'+1)$  și  $p$  fiind prim divide unul din factori, deci  $p \mid (k'-1)$  sau  $p \mid (k'+1)$ , adică  $\hat{k}' = \hat{1}$  sau  $\hat{k}' = -\hat{1}$  (singurele clase de ordin 2). Relația (1) devine  $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdots (p-1) = \hat{1}(-\hat{1}) = -\hat{1}$  deci  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$  sau  $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ .

Reciproc. Dacă  $p$  este neprim,  $p = ab$ ,  $a > 1, b > 1$ , atunci  $a < p-1$ ,  $b < p-1$  și  $a \mid (p-1)!$ . Dacă am avea  $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  atunci  $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{a}$  (contradicție cu  $(p-1)! \equiv 0 \pmod{a}$ ).

## Bibliografie

- I. M. Vinogradov: Bazele teoriei numerelor, Ed. Academiei Române, 1954
- I. Cucurezeanu: Probleme de aritmetică și teoria numerelor, Ed. Tehnică, București 1976
- P. Radovici: Probleme de teoria elementară a numerelor, Ed. Tehnică, București 1986
- D. Bușneag, F. Boboc, D. Piciu: Aritmetică și teoria numerelor, Ed. Univ. Craiova 1999

### Probleme rezolvate

R3.4.1. Fie  $p$  un număr prim. să se arate că ecuația  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$  are soluție, dacă și numai dacă  $p = 2$  sau  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

Soluție. Din teorema lui Wilson,  $p$  fiind prim rezultă

$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ . Dacă  $p > 2$  atunci  $p$  este impar,  $\frac{p-1}{2}$  este întreg și avem:

$$(p-1)! = \left(1 \cdot 2 \cdots \frac{p-1}{2}\right) \left(\frac{p+1}{2} \cdots (p-1)\right) = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k(p-k) \equiv \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k(-k) \pmod{p}$$

deci  $(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} x^2$  și atunci avem relația  $(-1)^{\frac{p-1}{2}} x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ . Pentru

$p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\frac{p-1}{2}$  este par deci relația devine  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ . Dacă

$p \equiv 3 \pmod{4}$  și presupunem că există  $a$  cu  $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$  avem:

$$a^{p-1} \equiv (a^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p},$$

dar cum  $a^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$  rezultă că  $p$  nu divide  $a$ , deci din Teorema lui Fermat rezultă  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  și ajungem la contradicția  $1 \equiv -1 \pmod{p}$ , căci  $p > 2$ . Pentru  $p = 2$  avem  $1^2 \equiv 1 \equiv -1 \pmod{2}$ , deci ecuația  $x^2 = -1$  are soluție.

**Observație.** Problema poate fi formulată astfel: Să se arate că dacă  $p$  este un număr prim de forma  $4m+1$ ,  $m \in \mathbf{N}$  și  $A$  este o mulțime de  $p-1$  numere consecutive, atunci  $A$  nu poate fi partiționată în două submulțimi de numere, care să aibă produsele elementelor aceleași.

R3.4.2. Fie  $p$  un număr prim și  $k$  un număr natural cu condiția  $1 \leq k \leq p$ . Să se arate că numărul  $(p-k)!(k-1)! + (-1)^{k-1}$  este divizibil cu  $p$ .

(A. Simionov)

Soluție. Avem congruențele modulo  $p$ :  $1 \equiv -(p-1)$ ,  $2 \equiv -(p-2)$ , ...,

$k-1 \equiv -(p-k+1)$  care înmulțite dau

$$(k-1)! \equiv (-1)^{k-1} (p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)$$

deci:  $(p-k)!(k-1)! \equiv (-1)^{k-1} (p-1)! \equiv (-1)^k$  (ultima egalitate datorită teoremei lui Wilson).

**Observație.** Problema poate fi privită ca o generalizare a teoremei lui Wilson, care o obținem în cazul particular  $p = k$ .

R3.4.3. Să se arate că dacă  $p$  este un număr prim și  $a$  un număr întreg atunci  $p$  divide pe  $(p-1)!a^p + a$ .

Soluție. Scriem teoremele lui Fermat și Wilson:

$$p \mid ((p-1)! + 1), \quad p \mid (a^p - a) \quad \text{deci}$$

$$p \mid (a^p((p-1)!+1) - (a^p - a)) \text{ sau } p \mid (a^p(p-1)!+a).$$

**Observație.** Problema reunește rezultatele teoremelor Fermat și Wilson: pentru  $a=1$  obținem teorema lui Wilson și apoi deoarece  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$  rezultă  $((p-1)!a^p + a) \equiv (-a^p + a)$  deci  $-(a^p - a) \equiv 0 \pmod{p}$  sau  $a^p \equiv a \pmod{p}$ .

R3.4.4. Fie  $p$  un număr prim și  $a, b$  numere întregi. Să se arate că dacă  $p \mid (a^p - b^p)$  atunci  $p^2 \mid (a^p - b^p)$ .

Soluție. Din teorema lui Fermat  $a^p \equiv a, b^p \equiv b \pmod{p}$  deci  $a \equiv b \pmod{p}$ . Putem scrie  $a = b + mp$  și atunci:

$$\begin{aligned} a^p - b^p &= (b + mp)^p - b^p = C_p^1 b^{p-1} mp + C_p^2 b^{p-2} m^2 p^2 + \dots + C_p^p m^p p^p = \\ &= p^2 (b^{p-1} m + C_p^2 b^{p-2} m^2 + C_p^3 b^{p-3} m^3 p + \dots + C_p^p m^p p^{p-2}) \end{aligned}$$

care este divizibil cu  $p^2$ .

R3.4.5. Să se arate că pentru orice numere naturale  $a, b$  relativ prime (cu  $(a, b) = 1$ ) numărul  $(a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} - 1)$  este divizibil cu produsul  $ab$ .

Soluție. Din teorema lui Euler  $a^{\varphi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$  și  $b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{a}$  deci putem scrie  $a^{\varphi(b)} = 1 + kb$  și  $b^{\varphi(a)} = 1 + ma$  cu  $k \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}$ , atunci  $(a^{\varphi(b)} - 1)(b^{\varphi(a)} - 1) = (km)(ab)$  deci  $(a^{\varphi(b)} b^{\varphi(a)} - a^{\varphi(b)} - b^{\varphi(a)} + 1)$  este divizibil cu  $ab$  și cum  $a^{\varphi(b)} b^{\varphi(a)}$  este și el divizibil, rezultă concluzia dorită.

R3.4.6. Să se demonstreze următoarea caracterizare a numerelor prime: Un număr natural  $p \geq 2$  este număr prim dacă și numai dacă  $\varphi(p) \mid (p-1)$  și  $(p+1) \mid \sigma(p)$  (unde  $\varphi$  este funcția lui Euler și  $\sigma$  este "funcția suma divizorilor").

Soluție. " $\Rightarrow$ " Dacă  $p$  este număr prim atunci  $\varphi(p) = p-1$  și  $\sigma(p) = p+1$ .

" $\Leftarrow$ " Fie  $n \in \mathbf{N}^*$  cu proprietatea  $n \geq 2$ ,  $\varphi(n) \mid (n-1)$  și  $(n+1) \mid \sigma(n)$ . Mai întâi să observăm că pentru orice  $n > 2$  numărul  $\varphi(n)$  este par. (Din expresia lui  $\varphi(n)$ , dacă  $n$  conține în descompunerea în factori primi numere prime  $p$  diferite de 2 (impare) atunci  $\varphi(n) = (p^k - p^{k-1})m = p^{p-1}(p-1)m$  care este număr par. Dacă  $n = 2^k, k > 2$  atunci  $\varphi(n) = 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$  care este par). Din relația  $\varphi(n) \mid (n-1)$  rezultă că  $n$  trebuie să fie impar (conține în descompunerea în factori primi numai puteri de numere prime impare (diferite de 2)).

Arătăm că toți factorii din descompunere sunt numere prime (fără exponent). Dacă prin absurd ar exista  $p_i^{k_i}$  factori în  $n$  cu  $k_i \geq 2$  atunci  $(p^{k_i} - p_i^{k_i-1}) \mid \varphi(n) \mid (n-1)$  deci  $p_i^{k_i-1} \mid (n-1) = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m} - 1$  ceea ce este fals.

Deci  $n = p_1 p_2 \dots p_m$ . Atunci  $\varphi(n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_m - 1)$  și  $\sigma(n) = (p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_m + 1)$ , cu  $p_1, p_2, \dots, p_m$  impare, deci  $2^m \mid \varphi(n)$  și  $2^m \mid \sigma(n)$ .

Dacă  $m \geq 2$  atunci  $4 \mid \varphi(n) \mid (n-1)$ , deci  $4m$  divide  $(n+1)$ . Din ipoteză numărul  $\frac{\sigma(n)}{n+1}$  este întreg,  $(n+1)$  este par, nedivizibil cu 4, iar  $\sigma(n)$  este

divizibil cu  $2^m$ . Atunci  $2^{m-1} \mid \frac{\sigma(n)}{n+1}$  și atunci

$$2^{m-1} < \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{(p_1 + 1) \dots (p_m + 1)}{p_1 \dots p_m} = \left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_m}\right) < \left(1 + \frac{1}{3}\right)^m = \left(\frac{4}{3}\right)^m,$$

inegalitate falsă, deci  $m = 1$  și atunci  $n = p_1$  număr prim.

R3.4.7. Să se arate că  $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$  pentru orice număr natural  $n$ .

Soluție. Vom demonstra prin inducție, după numărul factorilor primi din descompunerea lui  $n$ .

Fie  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m} = n_1 p_m^{k_m}$  (facem inducția după  $m$ ). Avem

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = \sum_{d \mid n_1} \varphi(d') + \sum_{d \mid n_1} \varphi(d' p_m) + \dots + \sum_{d \mid n_1} \varphi(d' p_m^{k_m}) =$$

$$= \sum_{d \mid n_1} \varphi(d') + \sum_{d \mid n_1} \varphi(d') \varphi(p_m) + \dots + \sum_{d \mid n_1} \varphi(d') \varphi(p_m^{k_m}) =$$

$$= (1 + \varphi(p_m) + \dots + \varphi(p_m^{k_m})) \sum_{d \mid n_1} \varphi(d') =$$

$$= (1 + (p_m - 1) + (p_m^2 - p_m) + \dots + (p_m^{k_m} - p_m^{k_m-1})) \sum_{d \mid n_1} \varphi(d') = p_m^{k_m} n_1 = n$$

(am folosit faptul că  $\varphi$  este o funcție aritmetică multiplicativă).

R3.4.8. Să se arate că dacă  $S(n)$  este suma numerelor naturale prime cu  $n$ ,

mai mici ca  $n$  atunci  $S(n) = \frac{n\varphi(n)}{2}$ , pentru orice  $n \geq 2$ .

Soluție.  $S(2) = \frac{2 \cdot 1}{2} \Leftrightarrow 1 = 1$ . Pentru  $n > 2$  numărul  $\varphi(n)$  este par și

grupăm cele  $\varphi(n)$  numere în grupe de forma  $\{1, n-1\}, \{a, n-a_1\}, \dots, \{a_q, n-a_q\}$

unde  $q = \frac{\varphi(n)}{2}$ . Suma lor este  $nq = \frac{n\varphi(n)}{2}$ .

## 4. Condiții suficiente de comutativitate în grupuri

### 4.1. Centrul unui grup

Vom evidenția câteva proprietăți interesante ale centrului unui grup, a căror utilizare în probleme de concurs duce la soluții elegante și accesibile.

Multe din problemele de comutativitate în grupuri, altfel delicate, se rezolvă mai ușor dacă ținem seama de structura algebrică de subgrup a centrului unui grup.

Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $X \subset G$  o submulțime a sa.

#### 4.1.1. Definiție

Mulțimea  $Z(X) = \{g \in G \mid g \cdot x = x \cdot g, \forall x \in X\}$  se numește centralizatorul mulțimii  $X$

#### 4.1.2. Definiție

Mulțimea  $Z(G) = \{g \in G \mid g \cdot x = x \cdot g, \forall x \in G\}$  se numește centrul grupului  $G$ .

**Exemplu:** Fie  $(A, +, \cdot)$  un inel comutativ. Centrul grupului  $(GL_n(A), \cdot)$  al matricelor inversabile din  $M_n(A)$  este  $Z(GL_n(A)) = \{a \cdot I_n \mid a \in U(A)\}$

Într-adevăr, alegând matricea  $E_{1i} \in M_n(A)$  care are 1 pe poziția  $(1, i)$  și 0 în rest și matricea  $B = (b_{ij}) \in Z(GL_n(A))$ , din  $B \cdot A_{1i} = A_{1i} \cdot B$  obținem  $a_{11} = a_{ii}, \forall i = 1, n$  și  $a_{i1} = \dots = a_{i, i-1} = a_{i, i+1} = \dots = a_{in} = 0$ . De aici,  $B = a \cdot I_n$  și  $B \in GL_n(A) \Leftrightarrow a \in U(A)$

**4.1.3. Propoziție** Pentru orice mulțime  $X \subset G$ ,  $(Z(X), \cdot)$  este subgrup al lui  $(G, \cdot)$

**Demonstrație:** Dacă  $g_1, g_2 \in Z(X)$  avem  $(g_1 \cdot g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot (x \cdot g_2) = (g_1 \cdot x) \cdot g_2 = (x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 \cdot g_2)$  deci  $g_1 \cdot g_2 \in Z(X)$ .

Din  $g_1 \cdot x = x \cdot g_1$  rezultă  $x \cdot g_1^{-1} = g_1^{-1} \cdot x$  deci  $g_1^{-1} \in Z(X)$ .

#### 4.1.4. Observații

1) Subgrupul  $Z(X)$  este format din elementele lui  $G$  care comută cu toate elementele mulțimii  $X$ .

2)  $Z(X) = \bigcap_{x \in X} \text{Fix}(i_x)$ , unde  $\text{Fix}(i_x)$  este mulțimea punctelor fixe ale automorfismului interior  $i_x$ ,  $i_x(g) = g^{-1} \cdot x \cdot g, \forall g \in G$ .

3)  $Z(X) = \{g \in G \mid [x, g] = 1, \forall x \in X\}$ , unde  $[x, g] = x \cdot g \cdot x^{-1} \cdot g^{-1}$  este comutatorul elementelor  $x$  și  $g$ .

4) Dacă  $X_1 \subset X_2$  atunci  $Z(X_2) \subset Z(X_1)$ , în particular centrul grupului  $G$ ,  $Z(G)$  este subgrup în orice centralizator  $Z(X)$ , deci  $Z(G) = \bigcap_{x \in G} Z(X)$  și în

consecință  $Z(G)$  este subgrup al lui  $G$ .

5) Spunem că  $y \in G$  este conjugat cu  $x \in G$  ( $x \sim y$ ) dacă  $\exists g \in G, y = g^{-1} \cdot x \cdot g$ . Dacă  $X = \{x\}$  și grupul  $G$  este finit, atunci numărul elementelor lui  $G$  conjugate

cu  $x$  este  $|\{g^{-1} \cdot x \cdot g \mid g \in G\}| = [G : Z(X)]$ , adică indicele subgrupului centralizator  $Z(X)$  în  $G$ .

Demonstrație Demonstrăm afirmația 5.

Considerăm pe  $G$  relația de echivalență la dreapta definită de subgrupul  $Z(X)$ ,

$$g_1 \rho g_2 \Leftrightarrow g_1 \cdot g_2^{-1} \in Z(X) \Leftrightarrow g_1 \cdot g_2^{-1} \cdot x = x \cdot g_1 \cdot g_2^{-1}.$$

Clasa unui element este  $\hat{g} = Z(X) \cdot g$ .

Definim funcția  $F$  pe mulțimea claselor  $G / \rho$  cu valori în mulțimea elementelor din  $G$ , conjugate cu  $x$ ,  $C(x) = \{g^{-1} \cdot x \cdot g \mid g \in G\}$ ;  $F : G / \rho \rightarrow C(x)$ ,  $F(\hat{g}) = g^{-1} \cdot x \cdot g$

Arătăm că funcția  $F$  este bine definită (nu depinde de alegerea reprezentantului  $g$  al clasei  $\hat{g}$ ). Dacă  $g_1 \in \hat{g}$ , arătăm că  $g_1^{-1} \cdot x \cdot g_1 = g^{-1} \cdot x \cdot g$ .

$$g_1^{-1} \cdot x \cdot g_1 = g^{-1} \cdot x \cdot g \Leftrightarrow (g \cdot g_1^{-1}) \cdot x = x \cdot (g \cdot g_1^{-1}) \Leftrightarrow g \cdot g_1^{-1} \in Z(X) \Leftrightarrow g \rho g_1 \Leftrightarrow g_1 \in \hat{g}$$

$$\text{Fie } \hat{g}_1, \hat{g}_2 \in G / \rho. F(\hat{g}_1) = F(\hat{g}_2) \Leftrightarrow g_1^{-1} \cdot x \cdot g_1 = g_2^{-1} \cdot x \cdot g_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (g_1 \cdot g_2^{-1}) \cdot x = x \cdot (g_1 \cdot g_2^{-1}) \Leftrightarrow g_1 \cdot g_2^{-1} \in Z(X) \Leftrightarrow g_1 \rho g_2 \Leftrightarrow \hat{g}_1 = \hat{g}_2.$$

Așadar funcția  $F$  este bijectivă și  $G / \rho$  și  $C(x)$  au același număr de elemente.

**4.1.5. Definiție** Mulțimea  $N(X) = \{g \in G \mid g \cdot X = X \cdot g\}$  se numește normalizatorul mulțimii  $X$ .

**4.1.6. Propoziție** Pentru orice submulțime  $X \subset G$ , normalizatorul  $(N(X), \cdot)$  este un subgrup al grupului  $(G, \cdot)$ .

Demonstrație: Dacă  $g_1, g_2 \in N(X)$  avem  $(g_1 \cdot g_2) \cdot X = g_1 \cdot (g_2 \cdot X) = g_1 \cdot (X \cdot g_2) = (g_1 \cdot X) \cdot g_2 = (X \cdot g_1) \cdot g_2 = X \cdot (g_1 \cdot g_2)$ , deci  $g_1 \cdot g_2 \in N(X)$ .

Pentru  $g \in G$ ,  $g \cdot X = X \cdot g \Leftrightarrow X = g^{-1} \cdot X \cdot g \Leftrightarrow X \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot X \Leftrightarrow g^{-1} \in N(X)$ .

#### **4.1.7. Observații**

1)  $N(X) = \{g \in G \mid i_g(X) = X\}$ , este format din elementele  $g \in G$  pentru care mulțimea  $X$  este invariantă față de automorfismul interior  $i_g$ .

- 2)  $Z(X)$  este subgrup al lui  $N(X)$ .  
 3) Dacă  $H$  este subgrup al lui  $G$ , atunci  $H$  este subgrup al lui  $N(H)$   
 4) Subgrupul  $H$  al lui  $G$  este subgrup normal dacă și numai dacă  $N(H) = G$   
 5) Clasa de conjugare a mulțimii  $X$ ,  $C(X) = \{g^{-1} \cdot X \cdot g \mid g \in G\} \subset P(G)$  are cardinalul  $|C(X)| = [G : N(X)]$ , adică indicele subgrupului  $N(X)$  în  $G$ .  
 (Se arată la fel ca în observația 4.1.4. punctul 5)

**4.1.8. Propoziție** Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $(H, \cdot)$  un subgrup al său. Fie  $n, p \in \mathbf{Z}$ .

Notăm cu  $d = (n, p)$ . Dacă  $x \in G$  și  $x^n \in H$  și  $x^p \in H$ , atunci și  $x^d \in H$ .

*Demonstrație:*

Dacă  $d = (n, p) > 0$ , atunci există  $h, k \in \mathbf{Z}$  astfel încât  $h \cdot n + k \cdot p = d$ .

Cum  $H$  este subgrup al lui  $G$  și  $x^n \in H$ , rezultă că  $(x^n)^h = x^{h \cdot n} \in H$ .

Analog rezultă că  $x^{k \cdot p} \in H$ .

Din axioma 1 a subgrupului obținem că  $x^{h \cdot n} \cdot x^{k \cdot p} = x^{h \cdot n + k \cdot p} = x^d \in H$ .

#### **4.1.9. Consecințe**

**C1.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $n, p \in \mathbf{Z}$ . Notăm cu  $d = (n, p)$ .

Dacă  $x \in G$  și  $x^n \in Z(G)$  și  $x^p \in Z(G)$ , atunci și  $x^d \in Z(G)$ .

**C2.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $n, p \in \mathbf{Z}$ ,  $(n, p) = 1$ .

Dacă  $\forall x \in G$ ,  $x^n \in Z(G)$  și  $x^p \in Z(G)$ , atunci  $(G, \cdot)$  este grup abelian.

**4.1.10. Propoziție** Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $n \in \mathbf{Z}$ .

Dacă  $f: G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^n$  este un morfism surjectiv, atunci  $\forall x \in G$ ,  $x^{n-1} \in Z(G)$ .

*Demonstrație:* Fie  $x \in G$ . Atunci  $\exists! z \in G$ ,  $x \cdot z = y$ . Așadar  $x^{n-1} \cdot y = x^{n-1} \cdot (x \cdot z) = x^n \cdot z$ .

Cum  $f$  este un morfism surjectiv,  $\exists u \in G$ ,  $u^n = z$ .

Deci  $x^{n-1} \cdot y = x^n \cdot z = x^n \cdot u^n \stackrel{f \text{ morfism}}{=} (x \cdot u)^n = x \cdot (u \cdot x)^{n-1} \cdot u = x \cdot (u \cdot x)^{n-1} \cdot (u \cdot x)^{-1} \cdot u =$

$= x \cdot (u \cdot x)^{n-1} \cdot x^{-1} \cdot u^{-1} \cdot u \stackrel{f \text{ morfism}}{=} x \cdot u^n \cdot x^n \cdot x^{-1} = x \cdot z \cdot x^{n-1} = y \cdot x^{n-1}$ .

Așadar,  $x^{n-1} \cdot y = y \cdot x^{n-1}$ ,  $\forall x, y \in G$ , adică  $\forall x \in G$ ,  $x^{n-1} \in Z(G)$ .

## **4.2. (a, b) – grupuri comutative**

**4.2.1. Definiție** Fie  $a, b \in \mathbf{Z}$ . Un grup  $(G, \cdot)$  se numește  $(a, b)$  – grup dacă aplicațiile  $x \rightarrow x^a$  și  $x \rightarrow x^b$  sunt endomorfisme ale lui  $G$ .

Ne punem problema: care sunt perechile  $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$  pentru care orice  $(a, b)$  – grup este comutativ? Răspunsul este dat de următorul rezultat:

**4.2.2. Teoremă** Fie  $a, b \in \mathbf{Z}$ . Orice  $(a, b)$  – grup este abelian dacă și numai dacă  $(a \cdot (a-1), b \cdot (b-1)) = 2$ .

Demonstrație:

Necesitatea: Presupunem că  $\exists n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$  astfel încât  $(a \cdot (a-1), b \cdot (b-1)) = 2 \cdot n$ .

Demonstrăm că în acest caz există un  $(a, b)$  – grup neabelian.

$n \geq 2 \Rightarrow \exists p \in \mathbf{N}$ ,  $p$  prim, astfel încât  $p \mid n$ .

I.  $p \neq 2$  Fie grupul  $(G, \cdot)$  de ordin  $p^3$ , neabelian, de exponent  $p$  (adică în care  $\forall g \in G$ ,  $g^p = 1$ ) definit astfel:

$G = \langle u, v, w \mid u^p = v^p = w^p = 1, v \cdot u = u \cdot v \cdot w, w \cdot u = u \cdot w, w \cdot v = v \cdot w \rangle$

Cum  $p \mid n$ , rezultă cazurile:

1)  $p \mid (a, b)$ ; 2)  $p \mid (a-1, b)$ ; 3)  $p \mid (a, b-1)$ ; 4)  $p \mid (a-1, b-1)$

În fiecare dintre aceste situații se demonstrează că  $G$  este un  $(a, b)$  – grup.

De exemplu în cazul 3), ținând cont de faptul că  $g^p = 1$ ,  $\forall g \in G$  și că

$a \equiv 0 \pmod{p}$  și  $b \equiv 0 \pmod{p}$ , aplicația  $x \rightarrow x^a = 1$  este morfismul nul iar aplicația  $x \rightarrow x^b = x$  este morfismul identic.

II.  $p = 2$  Exemplul anterior nu mai este potrivit, deoarece orice grup de exponent 2 este abelian. În schimb, grupul cuaternionilor  $H = \{-1, 1, -i, i, -j, j, -k, k\}$  ale cărui elemente au proprietățile  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ;  $i \cdot j = k$ ;  $i \cdot k = -j$ ;  $j \cdot i = -k$ ;  $j \cdot k = i$ ;  $k \cdot i = j$ ;  $k \cdot j = -i$  este un grup necomutativ de ordinul 8 și de exponent 4.

Deoarece  $4 \mid (a \cdot (a-1), b \cdot (b-1))$  și  $(a, a-1) = (b, b-1) = 1$ , distingem cazurile:

1)  $4 \mid (a, b)$ ; 2)  $4 \mid (a-1, b)$ ; 3)  $4 \mid (a, b-1)$ ; 4)  $4 \mid (a-1, b-1)$ .

Rezultă în mod analog cu cazul I că  $H$  este un  $(a, b)$  – grup necomutativ.

Suficiența: Fie  $(G, \cdot)$  un  $(a, b)$  – grup astfel încât  $(a \cdot (a-1), b \cdot (b-1)) = 2$  și  $x, y \in G$

Aplicația  $x \rightarrow x^a$  este endomorfism, adică  $(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$  (1)

și  $\exists u, v \in \mathbf{Z}$ ,  $u \cdot a \cdot (a-1) + v \cdot b \cdot (b-1) = 2$  (2)

Simplificând (1) obținem:  $(x \cdot y)^{a-1} = y^{a-1} \cdot x^{a-1}$  (3)

și  $(x \cdot y)^a = (x \cdot y)^{a-1} \cdot (x \cdot y) \stackrel{(3)}{=} (y^{a-1} \cdot x^{a-1}) \cdot (x \cdot y) = y^{a-1} \cdot x^a \cdot y = x^a \cdot y^a$

de unde după simplificări deducem:  $x^a \cdot y^{a-1} = y^{a-1} \cdot x^a$  (4)



Din (1) și (4) rezultă:  $(x \cdot y)^{a(a-1)}$

$$= \left( (x \cdot y)^a \right)^{a-1} \stackrel{(1), (3)}{=} y^{a(a-1)} \cdot x^{a(a-1)} = \left( (y)^a \right)^{a-1} \cdot \left( (x)^{a-1} \right)^a$$

$$\stackrel{(4)}{=} \left( (x)^{a-1} \right)^a \cdot \left( (y)^a \right)^{a-1} = x^{a(a-1)} \cdot y^{a(a-1)}. \text{ Rezultă că } x^{a(a-1)} \text{ și } y^{a(a-1)} \text{ comută.}$$

$$\text{Atunci } (x \cdot y)^{a(a-1)} = x^{a(a-1)} \cdot y^{a(a-1)} = y^{a(a-1)} \cdot x^{a(a-1)} = (y \cdot x)^{a(a-1)} \quad (5)$$

$$\text{și } (x \cdot y)^2 \stackrel{(2)}{=} (x \cdot y)^{u \cdot a(a-1) + v \cdot b(b-1)} \stackrel{(5)}{=} (y \cdot x)^{u \cdot a(a-1) + v \cdot b(b-1)} \stackrel{(2)}{=} (y \cdot x)^2 \quad (6)$$

Demonstrăm că  $x^{a(a-1)} \in Z(G)$ .

Cum  $2 \mid a(a-1)$ , avem  $2 \mid a$  sau  $2 \mid (a-1)$ .

$$\text{Dacă } 2 \mid a, \text{ atunci } (x \cdot y)^a = \left( (x \cdot y)^2 \right)^{\frac{a}{2}} = (y \cdot x)^a \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x^a \cdot y^a = y^a \cdot x^a \quad \text{și}$$

$$y^a \cdot x^a = x^a \cdot y^a = x^a \cdot y^{a-1} \cdot y \stackrel{(4)}{=} y^{a-1} \cdot x^a \cdot y. \text{ Simplificând ultima relație obținem } y \cdot x^a = x^a \cdot y \text{ și cum } y \text{ este arbitrar, deducem că } x^a \in Z(G), \forall x \in G.$$

$$\text{Dacă } 2 \mid (a-1), \text{ atunci } x^a \cdot y^a \stackrel{(1)}{=} (x \cdot y)^a = (x \cdot y)^{a-1} \cdot (x \cdot y) = \left( (x \cdot y)^2 \right)^{\frac{a-1}{2}} \cdot (x \cdot y) \stackrel{(6)}{=}}$$

$$= \left( (y \cdot x)^2 \right)^{\frac{a-1}{2}} \cdot (x \cdot y) = (y \cdot x)^{a-1} \cdot (x \cdot y) \stackrel{(3)}{=} (x^{a-1} \cdot y^{a-1}) \cdot (x \cdot y) \text{ și după simplificări}$$

deducem că  $x \cdot y^{a-1} = y^{a-1} \cdot x, \forall x, y \in G$ , adică  $y^{a-1} \in Z(G), \forall y \in G$ .

$$\text{Așadar, în orice situație, } x^{a(a-1)} \in Z(G), \forall x \in G. \quad (7)$$

Analog se demonstrează că  $x^{b(b-1)} \in Z(G), \forall x \in G$ .

$$\text{Avem } (x \cdot y)^2 \stackrel{(2)}{=} (x \cdot y)^{u \cdot a(a-1) + v \cdot b(b-1)} = (x \cdot y)^{u \cdot a(a-1)} \cdot (x \cdot y)^{v \cdot b(b-1)} \stackrel{(5)}{=} \left( x^{a(a-1)} \cdot y^{a(a-1)} \right)^u \cdot$$

$$\left( x^{b(b-1)} \cdot y^{b(b-1)} \right)^v \stackrel{(7)}{=} x^{u \cdot a(a-1) + v \cdot b(b-1)} \cdot y^{u \cdot a(a-1) + v \cdot b(b-1)} \stackrel{(2)}{=} x^2 \cdot y^2.$$

Așadar  $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2, \forall x, y \in G \Rightarrow y \cdot x = x \cdot y, \forall x, y \in G$ , deci grupul este abelian.

### 4.3. Câteva grupuri de exponent 2

**4.3.1. Definiție** Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit cu elementul neutru  $e$ . Cel mai mic număr natural nenul  $n$  cu proprietatea că pentru orice  $x \in G, x^n = e$  se numește exponentul grupului  $G$ .

#### 4.3.2. Observații

a) Dacă  $p \in \mathbf{N}$  este un număr prim și grupul finit  $G$  are exponentul  $p$ ,  $G$  se mai numește  $p$ -grup elementar.

b) Se știe (2.1.10) că ordinul unui  $p$ -grup elementar este o putere nenulă a lui  $p$ .

c) Pentru orice număr prim  $p \geq 3$  există  $p$ -grupuri necomutative. De exemplu,

$$\text{grupul multiplicativ } G_p = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{array} \right) \mid \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in Z_p \right\} \text{ este un grup}$$

necomutativ cu  $p^3$  elemente și are exponentul  $p$ .

(Etapa județeană a Olimpiadei de matematică, 2003)

d) Dacă  $p = 2$ , se știe că orice grup de exponent 2 este comutativ.

Iată câteva condiții suficiente pentru ca un grup comutativ finit să aibă exponentul 2:

**4.3.3. Propoziție** Fie  $(G, \cdot)$  un grup comutativ cu cel puțin  $3k$  elemente ( $k \in \mathbb{N}^*$ )

astfel încât oricare ar fi  $3k$  elemente ale sale există printre acestea  $k+1$  elemente de ordin  $\leq 2$ . Dacă  $G$  nu are elemente de ordinul 4, atunci toate elementele lui  $G$  sunt de ordin  $\leq 2$ .

Dana Heuberger

**Demonstrație** Presupunem că există  $c \in G$ ,  $\text{ord}(c) \geq 3 \stackrel{\text{ord}(c) \neq 4}{\Rightarrow} \text{ord}(c^2) \geq 3$ .

Fie  $e, a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \in G$ , elemente de ordin  $\leq 2$ . ( $e$  = elementul neutru al grupului)

Rezultă că  $e, c, c^2, a_1, a_1 \cdot c, a_1 \cdot c^2, \dots, a_{k-1}, a_{k-1} \cdot c, a_{k-1} \cdot c^2$  sunt  $3k$  elemente distincte ale lui  $G$ , dintre care doar  $e, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  au ordinul 2, contradicție.

Rezultă că  $G$  nu are elemente de ordin  $\geq 3$ .

**4.3.4. Propoziție** Fie  $(G, \cdot)$  un grup comutativ cu cel puțin  $n$  elemente, unde  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \not\equiv 0 \pmod{n}$ . Dacă oricare ar fi  $n$  elemente ale sale există printre acestea  $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$  elemente de ordin  $\leq 2$  și  $G$  nu are elemente de ordinul 4, atunci toate elementele lui  $G$  sunt de ordin  $\leq 2$ .

Dana Heuberger

**Demonstrație** Presupunem că există  $c \in G$ ,  $\text{ord}(c) \geq 3 \stackrel{\text{ord}(c) \neq 4}{\Rightarrow} \text{ord}(c^2) \geq 3$ .

$$n = 3k+r, \quad k = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor, \quad r \in \{1, 2\}.$$

Alegem  $k+1$  elemente de ordin  $\leq 2$  ale lui  $G$ :  $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ .

Atunci  $a_1, a_1 \cdot c, a_1 \cdot c^2, a_2, a_2 \cdot c, a_2 \cdot c^2, \dots, a_k, a_k \cdot c, a_k \cdot c^2, a_{k+1}, a_{k+1} \cdot c$  sunt  $3k+2$  elemente distincte ale lui  $G$ , dintre care doar  $k+1$  au ordinul  $\leq 2$ , contradicție.

**4.3.5. Propozitie.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit comutativ de ordin  $n \geq \left\lceil \frac{3p}{2} \right\rceil$ ,

$(p \in \mathbb{N}, p \geq 2)$ . Dacă oricare ar fi  $p$  elemente ale sale există printre acestea 2 elemente de ordin  $\leq 2$  și  $G$  nu are elemente de ordinul 4, atunci toate elementele lui  $G$  sunt de ordin  $\leq 2$ .

Dana Heuberger

Demonstrație Dacă  $p = 2$ , ipoteza înseamnă că toate elementele grupului au ordin  $\leq 2$ .

Pentru  $p \geq 3$ , din  $p$  elemente ale grupului alegem elementele  $a_1, a_2$  de ordinul 2. Celorlalte  $p-2$  elemente le mai adăugăm 2 elemente și obținem alte  $p$  elemente

ale grupului, din care mai alegem 2 elemente de ordin  $\leq 2$ :  $a_3, a_4$ .

Continuăm procedeul cu elementele rămase, până când obținem:

1)  $n - p + 2$  elemente de ordin  $\leq 2$ , dacă  $n - p$  este un număr par,

2)  $n - p + 1$  elemente de ordin  $\leq 2$ , dacă  $n - p$  este un număr impar.

Așadar am obținut  $n - p + r$  elemente de ordinul  $\leq 2$  ale grupului, cu  $r \in \{1, 2\}$

Fie  $c \in G$ , unul din cele  $p - r$  elemente cărora nu le cunoaștem ordinul.

Presupunem că  $\text{ord}(c) \geq 3 \stackrel{\text{ord}(c) \neq 4}{\Rightarrow} \text{ord}(c^2) \geq 3$ .

Obținem elementele  $c \cdot a_i, c^2 \cdot a_i \in G, i \in \{1, 2, \dots, n - p + r\}$  de ordin  $\geq 3$ , în număr de  $2 \cdot (n - p + r)$  și distincte două câte două.

$n \geq \left\lceil \frac{3p}{2} \right\rceil \Rightarrow n > \frac{3p}{2} - 1 \Leftrightarrow 2n > 3p - 2 \geq 3p - 2r \Rightarrow 2n - 2p + 2r > p$ , ceea ce

înseamnă că am găsit mai mult de  $p$  elemente ale grupului care au ordinul  $> 2$ , contradicție cu ipoteza.

Rezultă că și celelalte  $p - r$  elemente ale grupului au ordinul  $\leq 2$ , adică toate elemente ale grupului au ordinul  $\leq 2$ .

**4.3.6. Propozitie** Dacă  $(G, \cdot)$  este un grup finit de ordin  $n \geq 2p-1$ ,  $(p \in \mathbb{N}, p \geq 2)$  și oricare ar fi  $p$  elemente ale sale există printre acestea 2 elemente din  $Z(G)$  atunci grupul este comutativ.

Dana Heuberger

Demonstrație Dacă  $p = 2$ , ipoteza înseamnă că toate elementele grupului au ordin  $\leq 2$ , deci grupul este comutativ.

Pentru  $p \geq 3$ , procedând analog cu problema anterioară se obține:

$\text{ord}(Z(G)) \geq n - p + r \geq 2p - 1 - p + r = p + r - 1 > p - r$ , căci  $r \in \{1, 2\}$ .

Așadar  $\text{ord}(Z(G)) > \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(G)$  și cum  $Z(G)$  este un subgrup al grupului  $(G, \cdot)$ ,

din teorema lui Lagrange rezultă că  $Z(G) = G$  și deci grupul este comutativ.

### **Bibliografie**

1. **T. Albu, Ion D. Ion** – Itinerar elementar în algebra superioară Ed ALL, București, 1997
2. **Gh. Andrei, C-tin Caragea, V. Ene** – Algebră – Culegere de probleme pentru examene de admitere și olimpiade școlare, Ed. Scorpion 7, București 1995
3. **M. Deaconescu** – „Asupra comutativității grupurilor”, G. M. 4-5 / 1990, pag. 133-134 și G. M. 9 / 1991, pag. 324-325
4. **D. Heuberger** – „Aplicații ale centrului unui grup”, Argument, revista de matematică a C. N. „Gh. Șincai” Baia Mare, nr. 3, pag 9-12
5. **D. Heuberger** – „Câteva grupuri cu toate elementele de ordin  $\leq 2$ ”, Argument, revista de matematică a C. N. „Gh. Șincai” Baia Mare, nr. 5, pag 10-12
6. **D. Isac** – „Probleme de comutativitate”, revista „Astra Matematică”, vol 1, nr2, 1990, pag. 32-34
7. **I. Purdea, Gh Pic** – Tratat de algebră modernă, vol I, Ed Academiei, București, 1977
8. **D. Andrica, N. Bișboacă I. Șerdean, M. Andronache, M. Piticari, D. Zaharia**  
Matematică – Manual pentru clasa a XII-a, M1, Ed. Plus, 2002
9. **Colecția G. M.**

## Probleme rezolvate

R4.4.1. Fie  $(G, \cdot)$  un grup de ordinul  $p \in \mathbf{N}$  astfel încât există  $n \in \mathbf{Z}$  pentru care funcțiile  $f, g : G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^n$  și  $g(x) = x^{n+2}$  sunt endomorfisme surjective. Demonstrați că:

- a) dacă  $p$  este impar, atunci grupul  $(G, \cdot)$  este abelian.  
 b) dacă  $p$  este par,  $p \geq 4$ ,  $p \neq 2^k$  ( $k \in \mathbf{N}$ ), atunci  $|Z(G)| \geq 3$ .

Dana Heuberger

Soluție: Fie  $x \in G$ . Din propoziția 4.1.10. rezultă că  $x^{n-1} \in Z(G)$  și  $x^{n+1} \in Z(G)$ .

Fie  $d = (n-1, n+1)$ . Atunci  $d \mid (n-1)$  și  $d \mid (n+1)$ , deci  $d \mid 2$ .

Așadar  $d \in \{1, 2\}$  și  $x^d \in Z(G)$  (1)

Notând cu  $e$  elementul neutru al grupului, avem că  $e = x^p \in Z(G)$  și din (1) rezultă că și  $x^{(d,p)} \in Z(G)$ .

a)  $p$  impar  $\Rightarrow (d, p) = 1$  și deci  $x^1 \in Z(G)$ ,  $\forall x \in G$ . Așadar grupul  $G$  este abelian.

b) Dacă  $d = 1$ , atunci relația (1) devine  $x \in Z(G)$ ,  $\forall x \in G$ , adică  $G$  este comutativ

Dacă  $d = 2$ , (1)  $\Leftrightarrow x^2 \in Z(G)$ ,  $\forall x \in G$ .

Cum  $d = 2 = (n-1, n+1)$ , rezultă că  $n$  este impar.

Din teorema lui Cauchy obținem că există  $t \geq 3$ ,  $t$  număr prim,  $t \mid \text{ord}(G)$ .

Atunci  $G$  are cel puțin un element  $x_0$  de ordinul  $t$ .

Avem  $x_0^t = e \in Z(G)$  și  $x_0^2 \in Z(G)$ , deci  $x_0^{(t,2)} = x_0 \in Z(G)$ .

Cum  $p = \text{ord}(G)$  este par, din aceeași teoremă rezultă că există  $a \in G$ ,  $\text{ord}(a) = 2$ .

Din faptul că  $f$  și  $g$  sunt morfisme obținem pentru  $a$  și un element oarecare  $x \in G$ :

$$(a \cdot x)^n = a^n \cdot x^n = a \cdot x^n \text{ și analog } (a \cdot x)^{n+2} = a \cdot x^{n+2}.$$

Cum  $(a \cdot x)^{n+2} = (a \cdot x)^2 \cdot (a \cdot x)^n$ , folosind relațiile anterioare obținem:

$$(a \cdot x)^2 \cdot a \cdot x^n = a \cdot x^{n+2} \Leftrightarrow (a \cdot x)^2 \cdot a = a \cdot x^2 \Leftrightarrow a \cdot x \cdot a \cdot x \cdot a = a \cdot x^2 \Leftrightarrow x \cdot a \cdot x \cdot a = x^2 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot a \cdot x \cdot a^2 = x^2 \cdot a \stackrel{\text{ord } a=2}{\Leftrightarrow} x \cdot a \cdot x = x^2 \cdot a \Leftrightarrow a \cdot x = x \cdot a \Leftrightarrow a \in Z(G).$$

Cum  $e, a, x_0 \in Z(G)$ , evident  $|Z(G)| \geq 3$ .

Să observăm că există grupuri de ordinul  $2^k$  (cu  $k \in \mathbf{N}^*$ ) pentru care  $|Z(G)| < 3$ .

Un astfel de grup este grupul cuaternionilor  $K = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ , cu

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ,  $i \cdot j = k$ ,  $j \cdot k = i$ ,  $k \cdot i = j$ ,  $j \cdot i = -k$ ,  $k \cdot j = -i$ ,  $i \cdot k = -j$  care are  $Z(G) = \{1, -1\}$ . Așadar condiția  $p \neq 2^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) este esențială.

R4.4.2. Fie  $(G, \cdot)$  un grup de ordinul  $p \in \mathbb{N}$ , cu  $p \geq 2$  impar. Dacă funcția  $f: G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^5$  este un morfism surjectiv, atunci grupul  $(G, \cdot)$  este abelian.

Dana Heuberger

Soluție: Fie  $x \in G$ .  $f$  fiind surjectivă, din propoziția 4.1.10. rezultă că  $x^4 \in Z(G)$ .

Metoda I. Fie  $x, y \in G$ .  $f$  morfism  $\Leftrightarrow (x \cdot y)^5 = x^5 \cdot y^5 \Leftrightarrow (y \cdot x)^4 = x^4 \cdot y^4$  (1)

$$x^4 \cdot y^4 \stackrel{x^4 \in Z(G)}{=} y^4 \cdot x^4 \stackrel{(1)}{=} (x \cdot y)^4 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} (x \cdot y)^4 = (y \cdot x)^4 \quad (2)$$

$$p = 2 \cdot t + 1 \Rightarrow (x \cdot y)^{2 \cdot t + 1} = (y \cdot x)^{2 \cdot t + 1} = e \quad (3)$$

Ridicând la pătrat relația (3) obținem:  $(x \cdot y)^{4 \cdot t + 2} = (y \cdot x)^{4 \cdot t + 2}$

Din (2) obținem  $(x \cdot y)^{4 \cdot t} = (y \cdot x)^{4 \cdot t}$  și folosind și relația precedentă deducem:

$(x \cdot y)^2 = (y \cdot x)^2 \Rightarrow (x \cdot y)^{2 \cdot t} = (y \cdot x)^{2 \cdot t}$ . Folosind și relația (3) obținem  $x \cdot y = y \cdot x$  și cum  $x$  și  $y$  sunt oarecare, rezultă că  $G$  este abelian.

Metoda a II-a. Cum  $e = x^p \in Z(G)$  deducem din propoziția 4.1.8. că și  $x^{(4, p)} = x^1 \in Z(G)$ ,  $\forall x \in G$ , adică  $G$  e abelian.

Observații:

1) Este evidentă eleganța metodei a doua, chiar dacă necesită cunoștințe în plus.

2) Se poate demonstra analog următoarea generalizare:

Fie  $(G, \cdot)$  un grup de ordinul  $p \in \mathbb{N}$ , cu  $p \geq 2$  impar și fie  $k \in \mathbb{N}$ .

Dacă funcția  $f: G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^{2^k + 1}$  este un morfism surjectiv, atunci grupul  $(G, \cdot)$  este abelian.

3) Fie  $(G, \cdot)$  un grup de ordinul  $p \in \mathbb{N}$ , cu  $p \geq 2$  impar.

Dacă  $\forall x \in G, \exists k \in \mathbb{N}$  astfel încât  $x^{2^k} \in Z(G)$ , atunci grupul  $G$  este abelian.

R4.4.3. Fie grupul  $(G, \cdot)$  și  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  astfel încât funcția

$f: G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^{n+1}$  este un automorfism al lui  $G$ . Să se demonstreze că:

- a) Funcția  $g : G \rightarrow G$ ,  $g(x) = x^n$  este un endomorfism al lui  $G$ .  
 b) Dacă  $g$  este injectivă sau  $g$  este surjectivă, atunci  $G$  este grup abelian.

(Olimpiada Județeană Constanța, 1994)

Soluție: a)  $f$  automorfism  $\Rightarrow f$  morfism surjectiv  $\stackrel{4.1.10}{\Rightarrow} x^n \in Z(G), \forall x \in G$   
 Fie  $x, y \in G$ .  $g(x \cdot y) = (x \cdot y)^n = (x \cdot y)^{n+1} \cdot (x \cdot y)^{-1} = (x \cdot y)^{n+1} \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} = x^{n+1} \cdot y^{n+1} \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} =$

$$= x^{n+1} \cdot y^n \cdot x^{-1} \stackrel{y^n \in Z(G)}{=} x^{n+1} \cdot x^{-1} \cdot y^n = x^n \cdot y^n, \forall x, y \in G \Rightarrow g \text{ este endomorfism.}$$

b) I.  $g$  injectivă Fie  $x, y \in G$ . Avem  $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \stackrel{x^n \in Z(G)}{=} y^n \cdot x^n = (y \cdot x)^n \stackrel{g \text{ inj}}{\Rightarrow}$   
 $\Rightarrow x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in G \Leftrightarrow G$  este grup abelian.

II.  $g$  surjectivă Fie  $x, y \in G$ . Atunci  $\exists \alpha \in G, \alpha^n = y$ .

$$x \cdot y = x \cdot \alpha^n \stackrel{\alpha^n \in Z(G)}{=} \alpha^n \cdot x = y \cdot x, \forall x, y \in G \Rightarrow G \text{ este grup abelian.}$$

## 5. Morfisme de grupuri

Considerăm cunoscute noțiunile despre morfisme de grupuri din programa școlară. Notăm, ca de obicei,  $\text{End}(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ endomorfism}\}$  și

$$\text{Aut}(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ automorfism}\}$$

În cele ce urmează vom stabili câteva proprietăți interesante referitoare la aceste mulțimi.

### 5.1. Caracteristici ale lui $\text{Hom}(G, H)$

Pentru început vom expune câteva proprietăți generale în legătură cu morfismele de grupuri.

Fie  $(G, B)$  și  $(H, ( ))$  două grupuri.

Notăm cu  $\text{Hom}(G, H) = \{f \in G^H \mid f \text{ morfism de grupuri}\}$ .

Dacă grupul  $(H, ( ))$  este comutativ, atunci pe mulțimea  $\text{Hom}(G, H)$  putem defini o lege de compoziție internă, determinată în mod natural de cele două operații date: dacă  $f, g \in \text{Hom}(G, H)$ , definim  $h = f \circ g$  prin  $h(x) = (f \circ g)(x) = f(x)(g(x))$ ,  $\forall x \in G$

**5.1.1. Propoziție** Dacă  $(G, B)$  și  $(H, ( ))$  sunt grupuri, iar  $(H, ( ))$  este comutativ, atunci  $(\text{Hom}(G, H), ( ))$  este grup comutativ (cu elementul neutru funcția constantă  $f(x) = e_H$ ,  $\forall x \in G$  și simetricul unui morfism  $f$  fiind morfismul  $\bar{f}$ , cu  $\bar{f}(x) = f(x^{-1})$ ,  $\forall x \in G$ ).

*Demonstrație:* Dacă  $f, g \in \text{Hom}(G, H)$  atunci  $(f \circ g)(xBy) = f(xBy)(g(xBy)) = (f(x)(f(y)))(g(x)(g(y))) = (f(x)(g(x)))(f(y)(g(y))) = (f \circ g)(x)((f \circ g)(y))$ , deci  $f \circ g$  este morfism.

Dacă  $e_H$  este elementul neutru din  $H$  și notăm tot cu  $e_H$  morfismul constant  $e_H(x) = e_H$ ,  $\forall x \in H$ , atunci  $f \circ e_H = e_H \circ f = f$ , pentru orice  $f \in \text{Hom}(G, H)$ .

Definind  $\bar{f}$  prin  $\bar{f}(x) = f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ ,  $\forall x \in G$ ,  $\bar{f}$  verifică relația  $f \circ \bar{f} = \bar{f} \circ f = e_H$ .

Asocativitatea se verifică ușor.

**5.1.2. Observații a)** Dacă  $(G, ( ))$  este un grup comutativ, atunci mulțimea endomorfismelor  $(\text{End}(G), ( ))$  formează o structură de grup.



**b)** Fără ipoteza de comutativitate, operația „ $\circ$ ” nu e lege de compoziție pe  $\text{End}(G)$

În continuare vom considera  $(G, \cdot)$  un grup arbitrar și vom urmări structurile algebrice dotate cu operația de compunere a funcțiilor definite pe  $G$ .

Definim  $\text{End}(G) = \text{Hom}(G, G)$  mulțimea endomorfismelor lui  $G$ .

$\text{Aut}(G) = \{f \in \text{End}(G) \mid f \text{ bijectivă}\}$  mulțimea automorfismelor lui  $G$ .

$\text{Inn}(G) = \{i_G \in \text{Aut}(G) \mid g \in G\}$ , unde  $i_G(x) = g^{-1} \cdot x \cdot g, \forall x \in G$   
mulțimea automorfismelor interioare ale lui  $G$ .

### **5.1.3. Propozitie**

*a)  $(\text{End}(G), \circ)$  este monoid.*

*b)  $(\text{Aut}(G), \circ)$  este grup*

*c)  $\text{Aut}(G) = U(\text{End}(G))$  este grupul unităților monoidului  $\text{End}(G)$ .*

Demonstrație: **a)** În general, compunerea morfismelor este morfism, elementul neutru este funcția identică a lui  $G$ , care este endomorfism, compunerea funcțiilor este asociativă.

**b), c)** Este suficient să demonstrăm c), deci că automorfismele sunt elementele inversabile ale monoidului  $(\text{End}(G), \circ)$ , ceea ce este evident, din definiție.

**5.1.4. Propozitie** *Mulțimea automorfismelor interioare  $(\text{Inn}(G), \circ)$  formează un subgrup normal în grupul automorfismelor  $(\text{Aut}(G), \circ)$ .*

Demonstrație: Dacă  $i_{g_1}, i_{g_2} \in \text{Inn}(G)$ , atunci  $i_{g_1} \circ i_{g_2} = i_{g_2 \cdot g_1} \in \text{Inn}(G)$ ,

$$(i_g)^{-1} = i_{g^{-1}},$$

deci  $(\text{Inn}(G), \circ)$  este subgrup. Pentru a verifica faptul că  $\text{Inn}(G)$  este subgrup normal în  $\text{Aut}(G)$  trebuie să arătăm că  $f^{-1} \circ \text{Inn}(G) \circ f = \text{Inn}(G), \forall f \in \text{Aut}(G)$ .

$$(f^{-1} \circ i_g \circ f)(x) = f^{-1}(i_g(f(x))) = f^{-1}(g^{-1} \cdot f(x) \cdot g) = f^{-1}(g^{-1}) \cdot x \cdot f^{-1}(g) =$$

$$(f^{-1}(g))^{-1} \cdot x \cdot f^{-1}(g) =$$

$$= (g')^{-1} \cdot x \cdot g' = i_{g'}(x), \text{ unde } g' = f^{-1}(g), \text{ deci } \text{Inn}(G) \text{ e subgrup normal în } \text{Aut}(G).$$

**5.1.5. Propozitie** *Dacă  $(G, \cdot)$  este un grup, atunci funcția  $F : G \rightarrow \text{Inn}(G)$ ,*

$F(g) = i_{g^{-1}}$  este un morfism surjectiv de grupuri și nucleul său este  $\text{Ker}(F) = Z(G)$ , centrul grupului  $G$ .

*Demonstrație:* Avem  $F(g_1 \cdot g_2) = i_{(g_1 \cdot g_2)^{-1}} = i_{g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}} = i_{g_1^{-1}} \circ i_{g_2^{-1}} = F(g_1) \circ F(g_2)$ ,

deci  $F$  este morfism (evident surjectiv).

$$\text{Ker}(F) = \{g \in G \mid F(g) = 1_G\} = \left\{ g \in G \mid i_{g^{-1}}(x) = x, \forall x \in G \right\} =$$

$$= \{g \in G \mid g \cdot x \cdot g^{-1} = x, \forall x \in G\} = \{g \in G \mid g \cdot x = x \cdot g, \forall x \in G\} = Z(G)$$

**5.1.6. Observație** Conform primei teoreme de izomorfism,  $Z(G)$  este subgrup normal în  $G$  și grupul cât  $G / Z(G)$  este izomorf cu grupul  $\text{Inn}(G)$ .

Deci:  $G / Z(G) \approx \text{Inn}(G)$

Cu ajutorul automorfismelor interioare se definește o relație de echivalență importantă pe mulțimea  $P(G)$  a submulțimilor unui grup  $G$ , relația de conjugare.

**5.1.7. Definiție** Spunem că  $X_1, X_2 \in P(G)$  sunt submulțimi conjugate (și notăm

$X_1 \sim X_2$ ), dacă există un automorfism interior  $f \in \text{Inn}(G)$  astfel ca  $f(X_1) = X_2$ .

Dacă  $H$  este un subgrup al lui  $G$ , se definește relația de conjugare relativă la  $H$ :

**5.1.8. Definiție** Spunem că  $X_1, X_2 \in P(G)$  sunt submulțimi conjugate relativ

la subgrupul  $H$  (și notăm  $X_1 \sim^H X_2$ ) dacă există  $h \in H$  astfel ca  $X_2 = h^{-1} \cdot X_1 \cdot h = i_H(X_1)$

### **5.1.9. Observații**

a) Relația de conjugare este o relație de echivalență pe  $P(G)$ . Mai mult, toate mulțimile dintr-o clasă de echivalență au același cardinal.

b) Relația de conjugare relativă la un subgrup este o relație de echivalență pe  $P(G)$  și toate mulțimile unei clase de echivalență au același cardinal.

c) Dacă grupul  $G$  este comutativ, atunci relația de conjugare este relația de egalitate.

d) Dacă subgrupul  $H$  este inclus în centrul grupului  $G$  atunci relația de conjugare relativă la  $H$  este relația de egalitate.

Dacă restrângem relațiile de conjugare la submulțimile lui  $G$  formate din câte un element, identificând  $g \in G$  cu  $\{g\} \in P(G)$  obținem relații pe  $G$ :

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G, y = g^{-1} \cdot x \cdot g \quad \text{și} \quad x \overset{H}{\sim} y \Leftrightarrow \exists h \in H, y = h^{-1} \cdot x \cdot h$$

### 5.1.10. Observatii

a) Clasele de echivalență pentru relațiile de conjugare sunt:

$$\hat{x} = \{g^{-1} \cdot x \cdot g \mid g \in G\} \quad \text{și} \quad \hat{x}_H = \{h^{-1} \cdot x \cdot h \mid h \in G\}$$

b) O clasă de conjugare este formată dintr-un singur element,  $\hat{x} = \{x\}$  dacă și numai dacă  $x \in Z(G)$ .

c) Dacă notăm cu  $\hat{G}$  mulțimea claselor de conjugare pentru un grup finit, avem:

$$|G| = \sum_{\hat{g} \in \hat{G}} |\hat{g}| = |Z(G)| + \sum_{\substack{\hat{g} \in \hat{G} \\ |\hat{g}| \geq 2}} |\hat{g}|.$$

**Exemplu:** Considerăm grupul  $GL_n(\mathbb{C})$  al matricelor pătratice de ordinul  $n$ , nesingulare. Relația de conjugare este relația de asemănare: două matrice  $A, B$  sunt asemenea (conjugate) dacă există o matrice  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  astfel ca  $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ .

## 5.2. Caracteristici ale lui $\text{End}(G)$ pentru unele grupuri finite

Fie grupul comutativ  $(G, \cdot)$ . Pe  $\text{End}(G)$  definim operația:

$$\cdot : \text{End}(G) \times \text{End}(G) \rightarrow \text{End}(G), (f \cdot g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in G. \quad (\text{ca în 5.1.})$$

Atunci (5.1.1.)  $(\text{End}(G), \cdot)$  este grup abelian, iar dacă grupul  $G$  este finit, atunci, evident și grupul  $\text{End}(G)$  este finit.

Reamintim că elementul neutru al acestui grup este funcția constantă  $\bar{e} \in \text{End}(G)$

$\bar{e}(x) = e, \forall x \in G$  și că pentru  $f \in \text{End}(G), \bar{f} \in \text{End}(G), \bar{f}(x) = f(x^{-1})$  este simetricul său în grupul  $(\text{End}(G), \cdot)$ .

**5.2.1. Propozitie** Fie  $(G, \cdot)$  un grup abelian finit. Atunci numărul endomorfis-melor lui  $G$  are aceeași paritate cu numărul elementelor lui  $G$ .

*Marian Andronache*

**Demonstrație:** Dacă  $|\text{End}(G)| = 2k$ , cu  $k \in \mathbb{N}^*$ , din teorema lui Cauchy obținem că există  $f \in \text{End}(G)$ ,  $\text{ord}(f) = 2$  (și deci  $f \neq \bar{e}$ ). Așadar,  $\forall x \in G, f^2(x) = \bar{e}(x) = e$ .

Fie  $x \in G$  astfel încât  $f(x) \neq e$ . Atunci  $\text{ord}(f(x)) = 2$  și deci  $G$  are un element de ordin par, așadar (din teorema lui Lagrange) rezultă că  $\text{ord}(G)$  este par.

Reciproc, dacă  $\text{ord}(G)$  este par, există  $a \in G$ ,  $\text{ord}(a) = 2$ .

Cum  $(\text{End}(G), \cdot)$  este grup, avem  $1_G^{|\text{End}(G)|}(a) = \bar{e}(a) = e$  și deci  $a^{|\text{End}(G)|} = e$  și cum  $a^2 = e$  rezultă că  $|\text{End}(G)|$  este par (din 1.1.10, C3.)

**5.2.2. Propozitie** Fie  $(G, \cdot)$  un grup abelian finit și  $H$  un subgrup al său.

Notăm  $F(H) = \{f \in \text{End}(G) \mid f(H) = H\}$ . Atunci:  $f \in F(H) \Leftrightarrow \bar{f} \in F(H)$ .

Demonstrație: „ $\Rightarrow$ ” Dacă  $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$ .

Atunci:  $\bar{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x^{-1}) \stackrel{\text{ip}}{\in} H$  și deci  $\bar{f}(H) \subset H$ .

Fie  $y \in H$ . Atunci, cum  $f(H) = H$ ,  $\exists x \in H$ ,  $y = f(x) = \bar{f}(x^{-1}) \Rightarrow y \in \bar{f}(H)$  și deci  $H \subset \bar{f}(H)$ . În concluzie,  $\bar{f}(H) = H$ , adică  $\bar{f} \in F(H)$ .

„ $\Leftarrow$ ” Evident, folosind implicația „ $\Rightarrow$ ” și faptul că  $\bar{\bar{f}} = f$ .

**5.2.3. Propozitie** Fie  $(G, \cdot)$  un grup abelian finit și  $H \neq \{e\}$  un subgrup al său,

a) Dacă există  $a \in H$ , cu  $a^2 \neq e$ , atunci  $|F(H)|$  este par.

b) Dacă există  $a \in G$ , cu  $a^2 \neq e$ , atunci  $|Aut(G)|$  este par.

Marian Andronache

Demonstrație: a) Fie  $f \in F(H)$ . Atunci  $f(a^2) \in H$ .

$G$  fiind grup finit, funcția surjectivă  $f|_H : H \rightarrow H$  este și injectivă și cum  $f(e) = e$  și  $a^2 \neq e$ , rezultă că  $f(a^2) \neq e$ .

Avem (din 5.2.2.) că și  $\bar{f} \in F(H)$ .

Presupunem că  $f = \bar{f}$ . Atunci  $f(a) = \bar{f}(a) = f(a^{-1})$  și deci  $f(a^2) = e$ , fals.

Așadar,  $F(H) = \bigcup_{f \in H} \{f, \bar{f}\}$  și deci  $|F(H)|$  este par.

b)  $G$  fiind grup finit, endomorfismele  $f$  astfel încât  $f(G) = G$  sunt și injective și deci  $F(G) = Aut(G)$  și din punctul a) rezultă concluzia.

**5.2.4. Consecință** Grupurile comutative finite care au un număr impar de automorfisme sunt grupul nul și grupurile de ordinul 2.

Demonstrație: Din proprietatea anterioară deducem că pentru ca  $|Aut(G)|$  să fie impar e necesar ca  $\forall a \in G$ ,  $a^2 = e$ . Atunci  $G$  se poate organiza ca  $\mathbf{Z}_2 -$

spațiu vectorial. Dacă  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  este o bază în  $G$ ,  $\forall x \in G, \exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \{0, 1\}$  astfel încât  $x = e_1^{\alpha_1} \cdot e_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot e_k^{\alpha_k}$ .

I.  $k \geq 2$  Definem  $f: G \rightarrow G$ ,  $f(x) = f(e_1^{\alpha_1} \cdot e_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot e_k^{\alpha_k}) = e_1^{\alpha_2} \cdot e_2^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot e_k^{\alpha_k}$ .

Se verifică ușor că  $f \in \text{Aut}(G)$  și  $f^2 = 1_G$ , adică  $\text{ord}(f) = 2$ , deci  $|\text{Aut}(G)|$  e par.

II.  $k = 1$  Atunci  $G \approx \mathbf{Z}_2$  și  $\text{Aut}(\mathbf{Z}_2) = \{1_{\mathbf{Z}_2}\}$ .

III.  $k = 0$  Atunci  $G = \{e\}$  și  $\text{Aut}(G) = \{1_G\}$ .

Așadar grupurile căutate sunt  $\{e\}$  și grupurile cu 2 elemente.

**5.2.5. Definiție** Fie  $(G, \cdot)$  un grup. Funcția  $f: G \rightarrow G$  are proprietatea (S) dacă oricare ar fi un subgrup  $H$  al lui  $G$ ,  $f(H)$  este un subgrup al lui  $G$ .

**5.2.6. Propoziție** Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $H$  un subgrup propriu al său. Atunci funcția  $f: G \rightarrow G$ ,  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in H \\ e, & x \in G \setminus H \end{cases}$  are proprietatea (S) și  $f$  nu este un endomorfism al lui  $G$ .

*Demonstrație:* Evident,  $f(H) = H$  și  $\forall H_1$  subgrup al lui  $G$ ,  $f(H_1) = H_1 \cap H$ . Cum intersecția a 2 subgrupuri ale lui  $G$  este un subgrup al lui  $G$ , obținem că  $f$  are proprietatea (S).

Fie  $a \in H$ ,  $a \neq e$  și  $b \in G \setminus H$ . Atunci  $a \cdot b \in G \setminus H$ .

Rezultă  $e = f(a \cdot b)$ , iar  $f(a) \cdot f(b) = a$  și deci  $f$  nu este morfism.

**5.2.7. Propoziție** Fie  $(G, \cdot)$  un grup cu  $|G| \geq 3$ . Dacă orice funcție cu (S) este un endomorfism al lui  $G$ , atunci  $(G, \cdot) \approx (\mathbf{Z}_3, +)$ .

Marian Andronache

*Demonstrație:* Din propoziția anterioară deducem că pentru ca ipoteza să fie verificată este necesar ca  $G$  să nu aibă subgrupuri proprii. (Așadar, dacă  $G$  este grup finit, ordinul său trebuie să fie prim)

Presupunem că  $\text{ord}(G) \geq 4$ . Atunci  $G$  nu are elemente de ordinul 2 (un element de ordinul 2 ar genera un subgrup propriu)

Fie  $a, b \in G \setminus \{e\}$ ,  $a \neq b$ ,  $a^{-1} \neq b$  și funcția  $f: G \rightarrow G$ ,  $f(x)$

$$= \begin{cases} b, & x = a \\ a, & x = b \\ x, & \text{în rest} \end{cases}$$

din ipoteză, cum  $f$  are proprietatea (S) rezultă că  $f$  este nu endomorfism al lui  $G$ .

Avem  $a^{-1} \neq a$  și  $a^{-1} \neq b$  (din alegerea făcută).

Mai mult,  $b^{-1} = (f(a))^{-1} = f(a^{-1}) = a^{-1} \Rightarrow b = a$ , contradicție.

Așadar  $\text{ord}(G) = 3$  și  $(G, \cdot) \approx (\mathbb{Z}_3, +)$ .

### 5.3. Transport de structură

Scopul acestui paragraf este de a furniza o metodă mai simplă de a demonstra că o mulțime are structură de grup în raport cu o operație oarecare, decât metoda verificării efective a axiomelor din definiție. Pentru aceasta, va fi suficient să identificăm o funcție bijectivă convenabilă de la mulțimea respectivă la un grup cunoscut, datorită următorului rezultat:

**5.3.1. Teoremă** Fie  $(G, \cdot)$  un grup,  $M$  o mulțime nevidă și  $f: G \rightarrow M$  o funcție bijectivă. Atunci:

a) există o unică lege „ $B$ ” pe  $M$  astfel încât  $\forall x, y \in G, f(x \cdot y) = f(x) B f(y)$

b)  $(M, B)$  este un grup izomorf cu  $(G, \cdot)$

(Spunem că legea „ $B$ ” este obținută prin transportul legii „ $\cdot$ ” de la  $G$  la  $M$ , prin funcția  $f$ .)

Demonstrație: Fie  $\alpha, \beta \in M$ . Definim  $\alpha B \beta = f(f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(\beta)))$

$f^{-1}(\alpha) \in G, f^{-1}(\beta) \in G \Rightarrow f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(\beta)) \in G \Rightarrow \alpha B \beta \in M$  și „ $B$ ” e lege de compoziție

Asociativitatea: Fie  $\alpha, \beta, \gamma \in M$ .  $(\alpha B \beta) B \gamma = f(f^{-1}(\alpha B \beta)(f^{-1}(\gamma))) =$

$f(f^{-1}(f(f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(\beta))))(f^{-1}(\gamma))) = f((f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(\beta)))(f^{-1}(\gamma))) \stackrel{*}{\underset{\text{asoc}}{=}} f(f^{-1}(\alpha)((f^{-1}(\beta)(f^{-1}(\gamma))))$

$= f((f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(f(f^{-1}(\beta))(f^{-1}(\gamma)))))) = f((f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(\beta B \gamma))) = \alpha B (\beta B \gamma)$

Element neutru: Dacă  $e \in G$  este elementul neutru, notăm  $e' = f(e) \in M$ .

Fie  $\alpha \in M$ .  $\alpha B e' = f(f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(e'))) = f(f^{-1}(\alpha)(e)) = f(f^{-1}(\alpha)) = \alpha$ .

Analog rezultă  $e' B \alpha = \alpha$  și deci  $e'$  este elementul neutru al lui  $(M, B)$ .

Elemente simetrizabile: Fie  $\alpha \in M \stackrel{f \text{ bijectivă}}{\Rightarrow} \exists! x \in G, f(x) = \alpha$ .

Notăm  $\alpha' = f(x')$ , unde  $x'$  este simetricul din  $G$  al lui  $x$ .

$\alpha B \alpha' = f(f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(\alpha'))) = f(x(x')) = f(e) = e'$  și analog obținem  $\alpha' B \alpha = e'$ ,

așadar  $\alpha'$  este simetricul din  $M$  al lui  $\alpha$ .

În concluzie,  $(M, B)$  este grup.

Mai mult,  $\forall x, y \in G, f(x) B f(y) = f(f^{-1}(f(x))(f^{-1}(f(y)))) = f(x \cdot y)$ .

Demonstrăm acum că „ $B$ ” este unica lege cu proprietatea din enunț.

Fie „ $\perp$ ” o lege de compoziție pe  $M$  astfel încât  $f(x(y) = f(x) \perp f(y), \forall x, y \in G$ .

Pentru  $\alpha, \beta \in M, \exists! x, y \in G$  astfel încât  $f(x) = \alpha, f(y) = \beta$ .

$\alpha \perp \beta = f(x) \perp f(y) = f(x(y) = f(f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(\beta)) = \alpha B \beta$ , așadar legile coincid.

### 5.3.2. Observatii

a) Dacă grupul  $(G, ( ))$  este comutativ, atunci și grupul  $(M, B )$  este comutativ.

b)  $f$  este un izomorfism de la  $G$  la  $M$ .

c) Dacă pentru grupul  $(G, ( ))$  și mulțimea nevidă  $M$  avem funcția bijectivă

$g : M \rightarrow G$ , atunci există o unică lege „ $B$ ” pe  $M$  astfel încât

$$\forall x, y \in G, g(xBy) = g(x)(g(y),$$

și anume:  $\forall \alpha, \beta \in M, \alpha B \beta = g^{-1}(g(\alpha)(g(\beta))$

iar  $(M, B )$  este un grup izomorf cu grupul  $(G, ( ))$ .

### 5.3.3. Exemple

1) a) să se arate că funcția  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$  este bijectivă.

b) Să se înzestreze mulțimea  $G = (-1, 1)$  cu o structură de grup comutativ.

Soluție: a)  $f$  este strict crescătoare, deci injectivă.

$f$  e continuă pe  $(-1, 1)$  și  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ , deci  $f$  e și surjectivă.

b) Conform observației 5.3.2. c), considerând grupul comutativ  $(\mathbf{R}, +)$  și

definind legea „ $B$ ” astfel:  $xBy = \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} \right), \forall x, y \in (-1, 1)$ ,

obținem că  $(G, B )$  este grup abelian și  $(G, B ) \approx (\mathbf{R}, +)$ .

2) Determinați grupul  $(G, ( ))$  știind că funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow G, f(x) = x+1$  este un izomorfism de grupuri de la  $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$  la  $(G, ( ))$ .

Soluție:  $f$  bijectivă  $\Rightarrow \operatorname{Im} f = G$ , dar  $\operatorname{Im} f = (1, \infty)$  și deci  $G = (1, \infty)$ .

Grupul  $(G, ( ))$  se obține prin transport de structură al grupului  $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$  prin

funcția  $f$  și deci legea este:  $x(y = f(f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)), \forall x, y \in (1, \infty)$ .

Avem  $f^{-1} : (1, \infty) \rightarrow (0, \infty), f^{-1}(y) = y-1$  și deci

$$x(y = f((x-1)(y-1)) = (x-1)(y-1)+1 = x \cdot y - x - y + 2, \forall x, y \in (1, \infty)$$

## **Bibliografie**

- 1. Gh. Andrei, C-tin Caragea, V. Ene** – Algebră – Culegere de probleme pentru examene de admitere și olimpiade școlare, Ed. Scorpion 7, București 1995
- 2. M. Burtea, G. Burtea** – Matematică – clasa a XII-a – Elemente de analiză matematică. Algebră superioară, Ed. Carminis 2001
- 3. I. Purdea, Gh Pic** – Tratat de algebră modernă, vol I, Ed Academiei, București, 1977
- 4. T. Albu, Ion D. Ion** – Itinerar elementar în algebra superioară Ed ALL, București, 1997
- 5. D. Andrica, N. Bișboacă, I. Șerdean, M. Andronache, M. Piticari, D. Zaharia** - Matematică – Manual pentru clasa a XII-a, M1, Ed. Plus, 2002
- 6. Colecția G. M.**



### Probleme rezolvate

R5.4.1. Să se arate că  $\text{Hom}(\mathbf{Z}, G) \approx G$ , pentru orice grup  $G$ . ( $\mathbf{Z}$  este grupul aditiv al numerelor întregi)

Soluție: Un morfism  $f \in \text{Hom}(\mathbf{Z}, G)$  este unic determinat de valoarea  $f(1)$ , pentru că  $\forall k \in \mathbf{Z}, f(k) = k \cdot f(1)$ .

Se verifică ușor că funcția  $F : \text{Hom}(\mathbf{Z}, G) \rightarrow G, F(f) = f(1)$  este un izomorfism de grupuri.

R5.4.2. Să se arate că  $\text{End}(\mathbf{Q}) \approx \mathbf{Q}$ .

Soluție: Se demonstrează ușor că dacă  $f \in \text{End}(\mathbf{Q})$  și  $f(1) = a \in \mathbf{Q}$ , atunci  $\forall x \in \mathbf{Q}, f(x) = a \cdot x$  și că funcția  $F : \text{End}(\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Q}, F(f) = f(1)$  este un izomorfism de grupuri.

R5.4.3. Să se arate că  $\text{Hom}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) = \{0\}$ , unde cu  $0$  am notat morfismul nul.

Soluție: Dacă  $f \in \text{Hom}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$  și  $f(1) = a \in \mathbf{Z}$ , atunci  $\forall n \in \mathbf{N}^*, f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot a$  și deci  $\frac{1}{n} \cdot a \in \mathbf{Z}, \forall n \in \mathbf{N}^*$ . În consecință  $a = 0$  și  $f$  este morfismul nul.

R5.4.4. Fie  $(G, \cdot)$  un grup, iar  $u, v \in \text{End}(G)$ . Definem funcțiile  $f, g : G \rightarrow G$ ,  
 $f(x) = x - v(u(x)), g(x) = x - u(v(x))$ . Să se arate că  $f$  este surjectivă dacă și numai dacă  $g$  este surjectivă.

Soluție: Se cunoaște următorul rezultat:

**Lemă** Fie  $M$  și  $N$  două mulțimi nevide și funcția  $f : M \rightarrow N$ . Atunci:

1)  $f$  este injectivă  $\Leftrightarrow f$  admite o retractsă (o inversă la stânga), adică

$$\exists g : N \rightarrow M \text{ astfel încât } gBf = I_M$$

2)  $f$  este surjectivă  $\Leftrightarrow f$  admite o secțiune (o inversă la dreapta), adică

$$\exists h : N \rightarrow M \text{ astfel încât } fBg = I_N$$

3)  $f$  este bijectivă  $\Leftrightarrow f$  este inversabilă la stânga și la dreapta  $\Leftrightarrow f$  este inversabilă.

**Observații a)** Este posibil ca  $f : G \rightarrow H$  să fie un morfism injectiv de grupuri și nici o retractă a sa să nu fie morfism de grupuri. De exemplu, morfismul  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$   $f(n) = 3n$  este injectiv. Dacă ar exista retracta  $r : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  care să fie și morfism, am avea  $1 = (rBf)(1) = r(f(1)) = r(3) = 3r(1)$ , relație imposibilă în  $\mathbf{Z}$ .

**b)** Este posibil ca nici o secțiune a unui morfism surjectiv să nu fie morfism. De exemplu,  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_n$ ,  $f(x) = \hat{x}$  este un morfism surjectiv, dar singurul morfism de la  $\mathbf{Z}_n$  la  $\mathbf{Z}$  este morfismul nul.

Revenim la soluția problemei:

Presupunem că  $f$  e surjectivă. Din leamnă, deducem că  $\exists s : G \rightarrow G$ ,  $fBs = 1_G$ , adică  $\forall x \in G$ ,  $(1_G - vBu)(s(x)) = x$ , deci  $(vBuBs)(x) = s(x) - x$ ,  $\forall x \in G$  (1)

Demonstrăm că funcția  $\alpha : G \rightarrow G$ ,  $\alpha(x) = x + (uBsBv)(x)$  este o secțiune a lui  $g$ .

Într-adevăr,  $(gB\alpha)(x) = \alpha(x) - (uBv)(\alpha(x)) = x + (uBsBv)(x) - (uBv)(x + (uBsBv)(x)) =$

$$\stackrel{u \circ v \in \text{End}(G)}{=} x + (uBsBv)(x) - (uBv)(x) - (uBvBuBsBv)(x) \stackrel{(1)}{=} x + (uBsBv)(x) - (uBv)(x) - (uBvBuBsBv)(x) =$$

$$x + (uBsBv)(x) - (uBv)(x) - u(s(v(x)) - v(x)) \stackrel{u \in \text{End}(G)}{=} x + (uBsBv)(x) - (uBv)(x) - (uBsBv)(x) + u(v(x)) = x, \forall x \in G.$$

Analog se demonstrează cealaltă implicație.

**R5.4.5.** Fie  $\text{Aut}(D_n)$  grupul automorfismelor grupului diedral de grad  $n$ .

Să se arate că  $\text{ord}(\text{Aut}(D_n)) = \varphi(n) \cdot n$ , unde  $\varphi$  este indicatorul lui Euler.

Olimpiadă, Constanța 1988

Soluție : Reamintim că dacă  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\varphi(n)$  este numărul numerelor naturale mai mici decât  $n$  și prime cu  $n$  și că  $D_n$  este grupul izometriilor planului ce invariază poligonul regulat cu  $n$  laturi ( $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $n \geq 3$ ). Dacă  $\rho$  este rotația de unghi  $\frac{2\pi}{n}$  în

jurul centrului poligonului, iar  $\varepsilon$  este simetria față de o axă de simetrie a poligonului, atunci  $\text{ord}(\rho) = n$ ,  $\text{ord}(\varepsilon) = 2$ ,  $\rho \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \rho^{n-1}$  și grupul diedral de grad  $n$  este  $D_n = \{e, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \varepsilon, \varepsilon \cdot \rho, \varepsilon \cdot \rho^2, \dots, \varepsilon \cdot \rho^{n-1}\}$

Reamintim de asemenea că dacă  $(G, \cdot)$  și  $(G', \cdot)$  sunt grupuri,  $f$  este un morfism injectiv de grupuri și  $a \in G$ , atunci  $\text{ord}(a) = \text{ord}(f(a))$ ,  $\text{ord}(a^k) = \frac{m}{(k, m)}$ , unde  $m = \text{ord}(a)$ .

Revenind la soluția problemei, pentru ca  $f \in \text{Aut}(D_n)$  să fie bine definit, este suficient să știm cum acționează asupra elementelor  $\varepsilon, \rho \in D_n$ .

Fie  $k, p \in \{0, 1\}$ ,  $s, t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , astfel încât  $f(\rho) = \varepsilon^k \cdot \rho^t$  și  $f(\varepsilon) = \varepsilon^p \cdot \rho^s$ . Presupunem că  $t = 0$  și deci că  $f(\rho) = \varepsilon^k$ , așadar sau  $f(\rho) = e$ , ceea ce contrazice injectivitatea lui  $f$ , sau  $f(\rho) = \varepsilon$ , imposibil, pentru că  $\rho$  și  $\varepsilon$  nu au același ordin.

Așadar  $t \neq 0$ . Presupunem  $k \neq 0$  și deci  $f(\rho) = \varepsilon \cdot \rho^t$ . Dar  $\varepsilon \cdot \rho^t$  este o simetrie, deci are ordinul 2, iar  $f(\rho)$  are ordinul  $n$ , contradicție.

Așadar,  $k = 0$  și  $f(\rho) = \rho^t$ , cu  $t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

Mai mult,  $\text{ord}(\rho^t) = \frac{n}{(t, n)}$  și cum  $\text{ord}(\rho) = n = \text{ord}(f(\rho))$ , rezultă că  $(t, n) = 1$

și

deci există  $\varphi(n)$  posibilități pentru a alege  $f(\rho)$  (1)

Pentru ca  $f(\varepsilon)$  să aibă același ordin cu  $\varepsilon$ , care este o simetrie, trebuie ca  $f(\varepsilon)$  să fie tot o simetrie, deci de forma  $f(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \rho^s$ , cu  $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Există deci  $n$  posibilități de a alege  $f(\varepsilon)$ . Folosind afirmația (1) deducem că există  $\varphi(n) \cdot n$  posibilități de a alege  $f(\varepsilon)$  și  $f(\rho)$  și așadar există  $\varphi(n) \cdot n$  automorfisme ale lui  $D_n$ .

## 6. Congruențe pe grupuri. Grupuri cât. Teoreme de izomorfism

### 6.1. Relații de echivalență definite de subgrupuri

Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $H \subset G$  o submulțime. Pe mulțimea  $G$  definim relațiile  $\rho_H \subset G \times G$  și  $\rho'_H \subset G \times G$  prin:

$$(x, y) \in \rho_H \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x^{-1}y \in H$$

$$(x, y) \in \rho'_H \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} yx^{-1} \in H$$

**6.1.1. Propoziție.** Relațiile  $\rho_H$  și  $\rho'_H$  sunt relații de echivalență pe  $G$  dacă și numai dacă  $(H, \cdot)$  este subgrup în  $(G, \cdot)$ .

Demonstrație. Dacă  $(H, \cdot)$  este subgrup în  $(G, \cdot)$  atunci  $e \in H$  sau  $x^{-1}x \in H$  sau  $xx^{-1} \in H$  deci  $(x, x) \in \rho_H$  și  $(x, x) \in \rho'_H$ .

$H$  este parte stabilă deci dacă  $(x, y) \in \rho_H$  și  $(y, z) \in \rho_H$  atunci  $x^{-1}y \in H$  și  $y^{-1}z \in H$  deci  $(x^{-1}y)(y^{-1}z) = x^{-1}z \in H$  sau  $(x, z) \in \rho_H$  deci relația  $\rho_H$  este tranzitivă (la fel și relația  $\rho'_H$ ).

Dacă  $(x, y) \in \rho_H$  atunci  $x^{-1}y \in H$  care este subgrup și atunci  $(x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x \in H$  sau  $(y, x) \in \rho_H$  deci relația  $\rho_H$  este simetrică. În concluzie relația  $\rho_H$  este echivalența pe  $G$  (la fel și relația  $\rho'_H$ ).

Reciproc. Să presupunem că  $\rho_H$  este relație de echivalență și să arătăm că  $(H, \cdot)$  este subgrup în  $(G, \cdot)$ .

Din reflexivitatea relației  $\rho_H$ ,  $(x, x) \in \rho_H$  deci  $x^{-1}x = 1 \in H$ .

În loc de  $x \in H$  putem scrie  $1 \cdot x \in H$  sau  $(1, x) \in \rho_H$  și din simetria relației  $\rho_H$  rezultă  $(x, 1) \in \rho_H$  sau  $x^{-1} \cdot 1 \in \rho_H$  deci  $x^{-1} \in H$ .

Dacă  $x \in H$  și  $y \in H$  atunci  $x^{-1} \in H$ ,  $(x^{-1}, 1) \in \rho_H$ ,  $(1, y) \in \rho_H$  și din tranzitivitatea relației  $\rho_H$  rezultă  $(x^{-1}, y) \in \rho_H$  sau  $xy \in H$ . În concluzie  $H$  este subgrup. Analog se arată că din  $\rho'_H$  relație de echivalență rezultă  $H$  este subgrup.

**6.1.2. Definiție.** Dacă  $(G, \cdot)$  este grup și  $(H, \cdot)$  un subgrup al său, relațiile  $\rho_H$  și  $\rho'_H$  se numesc relațiile de echivalență induse de subgrupul  $H$  (la stânga, respectiv la dreapta).

**6.1.3. Observație.** a) Clasele de echivalență pentru relația  $\rho_H$  sunt  $\hat{x} = x \cdot H = \{xh \mid h \in H\}$ , iar pentru relația  $\rho'_H$  sunt  $\hat{x}' = H \cdot x = \{hx \mid h \in H\}$ .

b) Între clasele de echivalență la stânga și dreapta există bijecția  $xH \mapsto Hx$ , mulțimile cât  $G/\rho_H$  și  $G/\rho'_H$  sunt cardinal echivalente.

c) Dacă  $H = \{1\}$  relațiile  $\rho_H$  și  $\rho'_H$  sunt relațiile de egalitate iar dacă  $H = G$ , relațiile  $\rho_H$  și  $\rho'_H$  sunt relațiile universale,

## 6.2. Relații de congruență. Subgrupuri normale

Fie  $(G, \cdot)$  un grup.

**6.2.1. Definiție.** O relație de echivalență pe  $G$ ,  $\rho \subset G \times G$  se numește relație de congruență pe  $G$  sau relație de echivalență compatibilă cu structura de grup dacă din ipotezele  $(x_1, x_2) \in \rho$  și  $(y_1, y_2) \in \rho$  rezultă  $(x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2) \in \rho$ . Vom nota cu  $C(G)$  mulțimea congruențelor pe  $G$ .

**6.2.2. Exemplu.** Pe grupul  $(\mathbf{Z}, +)$  relația  $R = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid |x| = |y|\}$  este o relație de echivalență dar nu o relație de congruență, dar relația  $\rho = \{(x, y) \mid x \text{ și } y \text{ au aceeași paritate}\}$  este o relație de congruență.

**6.2.3. Propoziție.** Dacă  $\rho \subset G \times G$  este o relație de congruență pe grupul  $(G, \cdot)$  atunci:

a) Din  $(x, y) \in \rho$  rezultă  $(x^{-1}, y^{-1}) \in \rho$ .

b) Din  $(x_1, x_2) \in \rho$  și  $(y_1, y_2) \in \rho$  rezultă  $(x_1 y_1^{-1}, x_2 y_2^{-1}) \in \rho$ .

Dar:

a) Avem  $x^{-1} \rho x^{-1}$  și  $x \rho y$  deci  $xx^{-1} \rho x^{-1} y$  sau  $1 \rho x^{-1} y$ . Din  $1 \rho x^{-1} y$  și  $y^{-1} \rho y^{-1}$  rezultă  $y^{-1} 1 \rho (x^{-1} y) y^{-1}$  sau  $y^{-1} \rho x^{-1}$  sau  $x^{-1} \rho y^{-1}$ .

b) Din a) rezultă că dacă  $(y_1, y_2) \in \rho$  atunci  $(y_1^{-1}, y_2^{-1}) \in \rho$  și adăugând  $(x_1, x_2) \in \rho$  rezultă  $(x_1 y_1^{-1}, x_2 y_2^{-1}) \in \rho$ .

**6.2.4. Observație.** Dacă  $\rho \subset G \times G$  este o congruență pe  $G$  atunci clasa de echivalență în raport cu  $\rho$  a elementului neutru  $\rho(1) = \{x \in G \mid (x, 1) \in \rho\} = H$  este un subgrup iar relațiile de echivalență  $\rho_H$  și  $\rho'_H$  definite de  $H$  sunt  $\rho_H = \rho'_H = \rho$ . Reciproca nu este adevărată, nu orice subgrup  $H \leq G$  determină o congruență pe  $G$ .

**6.2.5. Definiție.** Se spune că subgrupul  $(N, \cdot)$  este subgrup normal în grupul  $(G, \cdot)$  dacă  $xN = Nx$  pentru orice  $x \in G$ .

( $\{xg = g \in N\} = \{gx \mid g \in N\}$ ) și notăm  $N \triangleleft G$ .

**6.2.6. Propoziție.** Dacă  $(N, \cdot)$  este subgrup în  $(G, \cdot)$  atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- a)  $(N, \cdot)$  este subgrup normal în  $(G, \cdot)$  ( $N \triangleleft G$ )  
 b)  $xNx^{-1} = N$  pentru orice  $x \in G$   
 c) Relațiile de echivalență induse de  $N, \rho_N$  și  $\rho'_N$  coincid ( $\rho_N = \rho'_N$ ).  
 d) Mulțimile cât  $G/\rho_N$  și  $G/\rho'_N$  coincid.

Demonstrație. a)  $\Leftrightarrow$  b)  $xN = Nx$  dacă și numai dacă pentru orice  $g \in N$  există  $g' \in N$  astfel ca  $xg = g'x \Leftrightarrow xgx^{-1} = g'$  sau putem inversa  $g$  cu  $g'$ .

$$b) \Leftrightarrow c) \quad x\rho_N y \Leftrightarrow x^{-1}y \in N \Leftrightarrow y \in xN$$

$$x\rho'_N y \Leftrightarrow yx^{-1} \in N \Leftrightarrow y \in Nx$$

deci  $\rho_N = \rho'_N \Leftrightarrow xN = Nx, x \in G$ .

$$c) \Leftrightarrow d) \quad \rho_N = \rho'_N \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{x}', x \in G \Leftrightarrow G/\rho_N = G/\rho'_N.$$

**6.2.7. Observație.** a) Într-un grup abelian orice subgrup este subgrup normal.

b) Dacă indicele subgrupului  $H$  în  $G$  este 2,  $[G:H]=2$  atunci  $H$  este normal în  $G$ .

( $[G:H]=2 \Leftrightarrow G = H \cup xH = H \cup Hx$  cu  $x \notin H$  și cum  $xH \cap H = \emptyset$  rezultă  $xH = Hx$ .)

c) În grupul permutărilor  $(S_n, \circ)$  subgrupul altern  $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn } \sigma = 1\}$  este normal.

( $S_n = A_n \cup I_n$  unde  $I_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn } \sigma = -1\}$ , dacă  $\tau$  este o transpoziție atunci  $I_n = A_n \circ \sigma = \sigma \circ A_n$  deci  $A_n$  este subgrup de indice 2.)

d) Centrul unui grup  $G$ ,  $Z(G)$  este subgrup normal în  $G$ .

Legătura dintre subgrupurile normale și congruente este dată de următoarea afirmație:

**6.2.8. Propoziție.** Relația de echivalență  $\rho \subset G \times G$  pe grupul  $G$  este o congruență pe  $G$  dacă și numai dacă există un subgrup normal  $N \triangleleft G$  astfel ca  $\rho = \rho_N$ .

Demonstrație. Dacă  $\rho \in C(G)$  este congruență, definim  $N = \rho(1) = \{x \in G \mid x\rho 1\} = \{x \in G \mid 1\rho x\}$ . Arătăm că  $N \triangleleft G$  și că  $\rho = \rho_N$ .

Dacă  $x, y \in N$  atunci  $x\rho 1, y\rho 1$  deci  $xy\rho 1$  sau  $xy \in N$ . Din  $x\rho 1$  rezultă  $x^{-1}\rho 1^{-1} = 1$  deci  $x^{-1} \in N$ , în concluzie  $(N, \cdot)$  este subgrup în  $G$ .

Pentru a arăta că  $N$  este subgrup normal trebuie verificată egalitatea  $xNx^{-1} = N$ . E suficient să arătăm că pentru orice  $x \in G$  și orice  $g \in N = \rho(1)$  elementul  $xgx^{-1} \in \rho(1)$ .

Avem  $x\rho x, g\rho 1, x^{-1}\rho x^{-1}$  din care rezultă  $xgx^{-1}\rho xx^{-1} = 1$ . Pentru a arăta că  $\rho = \rho_N = \rho'_N$  observăm că

$$x\rho_N y \Leftrightarrow x^{-1}y \in N = \rho\langle 1 \rangle \Leftrightarrow (xy^{-1})\rho 1 \Leftrightarrow xy^{-1}y\rho y \Leftrightarrow x\rho y$$

și analog  $x\rho'_N y \Leftrightarrow x\rho y$ .

Reciproc. Dacă  $N \triangleleft G$  arătăm că  $\rho_N$  este congruență pe  $G$ . Avem

$$x_1\rho_N x_2 \Leftrightarrow x_1^{-1}x_2 \in N \Leftrightarrow x_2 \in x_1N$$

$$y_1\rho_N y_2 \Leftrightarrow y_2 \in y_1N \text{ și atunci}$$

$$x_2y_2 = (x_1N)(y_1N) = x_1(Ny_1)N = x_1(y_1N)N = (x_1y_1)N$$

deci  $x_1y_1\rho_N x_2y_2$ .

**6.2.9. Observație.** Funcția  $F: C(G) \rightarrow S_N(G)$  ( $S_N(G)$  este mulțimea subgrupurilor normale în  $G$ ) definită prin  $F(\rho) = \rho\langle 1 \rangle$  cu inversa  $F^{-1}: S_N(G) \rightarrow C(G)$ ,  $F^{-1}(N) = \rho_N$  realizează o corespondență biunivocă între congruențe și subgrupuri normale.

### 6.3. Nucleul unui morfism. Grupuri cât

Fie  $(G, \cdot)$  și  $(G', \cdot)$  două grupuri și  $f: G \rightarrow G'$  un morfism de grupuri.

**6.3.1. Propoziție.** Dacă  $f: G \rightarrow G'$  este un morfism de grupuri atunci mulțimea  $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = 1'\}$  este  $1'$  este elementul neutru al grupului  $(G', \cdot)$ , este un subgrup normal în  $G$  numit nucleul morfismului  $f$ .

Demonstrație. Dacă  $x, y \in \ker f$  atunci  $f(1) = 1'$  sau  $f(yy^{-1}) = 1'$  sau  $f(y)f(y^{-1}) = 1'$  sau  $f(y^{-1}) = 1'$  deci  $y^{-1} \in \ker f$  și  $f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = 1' \cdot 1' = 1'$  deci  $xy^{-1} \in \ker f$ .

Dacă  $x \in G$ ,  $g \in \ker f$  atunci

$f(xgx^{-1}) = f(x)f(g)f(x^{-1}) = f(x) \cdot 1' \cdot f(x^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) = f(x)(f(x))^{-1} = 1'$  deci  $xgx^{-1} \in \ker f$ , ceea ce arată că grupul  $\ker f$  este normal în  $G$ .

**6.3.2. Observație.** Se știe că pentru orice funcție  $f: G \rightarrow M$  relația  $\text{Ker}f = \{(x, y) \in G \times G \mid f(x) = f(y)\}$  reprezintă o relație de echivalență pe  $G$ .

**6.3.3. Propoziție.** Dacă  $f: G \rightarrow G'$  este morfism de grupuri atunci relațiile  $\rho_{\ker f}$  și  $\text{Ker}f$  coincid.

Demonstrație. Avem

$$(x, y) \in \text{Ker}f \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x)(f(y))^{-1} = 1'$$

$$\Leftrightarrow f(x)f(y^{-1})=1' \Leftrightarrow f(xy^{-1})=1' \Leftrightarrow xy^{-1} \in \ker f \Leftrightarrow (x,y) \in \rho'_{\ker f} = \rho_{\ker f}.$$

**6.3.4. Observație.** Dacă  $f : G \rightarrow G'$  este un morfism de grupuri atunci relația  $\text{Ker} f$  este o congruență pe  $G$ .

**6.3.5. Propoziție.** Dacă  $(N, \cdot)$  este subgrup normal în grupul  $(G, \cdot)$  atunci pe mulțimea cât  $G/\rho_N = G/\rho_{N, \cdot}$  se poate defini o structură de grup definind operația pe clase:  $\hat{x} \cdot \hat{y} = x \cdot y, x, y \in G$ .

Demonstrație. Mai întâi să arătăm că operația este bine definită, adică dacă  $x_1, x_2 \in \hat{x}$  și  $y_1, y_2 \in \hat{y}$  atunci  $x_1 y_1 = x_2 y_2 = xy$ , ceea ce rezultă ușor pentru că relația  $\rho_N$  este congruentă. Se verifică ușor că elementul neutru al grupului  $(G/\rho_N, \cdot)$  este  $\hat{1} = N$ , operația este asociativă, inversul lui  $\hat{x}$  este  $(\hat{x})^{-1} = (x^{-1})$ .

**6.3.6. Definiție.** Dacă  $N$  este subgrup normal în  $G$ , grupul  $(G/\rho_N, \cdot)$  se numește grup cât și se notează  $G/N$ .

**6.3.7. Observație.** a) Funcția  $p_N : G \rightarrow G/N, p_N(x) = \hat{x} = xN = Nx$  se numește proiecția canonică și este un morfism surjectiv de grupuri pentru care nucleul  $\ker p_N = N$ .

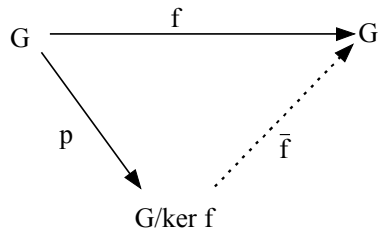
b) Orice subgrup normal este nucleul unui morfism de grupuri.

**6.3.8. Exemple.** Dacă  $G = (\mathbf{Z}, +)$  și  $N = (n\mathbf{Z}, +)$  atunci grupului  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  este grupul  $(\mathbf{Z}_n, +)$  al claselor de resturi modulo  $n$ . ( $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ ).

## 6.4. Teoreme de izomorfism

**6.4.1. Teoremă.** Dacă  $f : G \rightarrow G'$  este un morfism surjectiv de grupuri atunci grupurile  $G/\ker f$  și  $G'$  sunt izomorfe.

Demonstrație. Considerăm diagrama:



unde  $p : G \rightarrow G/\ker f$  este proiecția canonică  $p(x) = \hat{x}$  și definim  $\bar{f} : G/\ker f \rightarrow G'$  prin  $\bar{f}(\hat{x}) = f(x)$  (astfel ca diagrama să fie comutativă, adică  $f = \bar{f} \circ p$ ).



Arătăm că funcția  $\bar{f}$  este bine definită (nu depinde de alegerea reprezentantului într-o clasă) și că funcția  $\bar{f}$  este izomorfism de grupuri.

Dacă  $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$  atunci  $f(x_1) = f(x_2)$  deci  $\bar{f}(\hat{x}_1) = \bar{f}(\hat{x}_2)$ . Avem

$$\bar{f}(\hat{x} \cdot \hat{y}) = \bar{f}(xy) = f(xy) = f(x)f(y) = \bar{f}(\hat{x})\bar{f}(\hat{y})$$

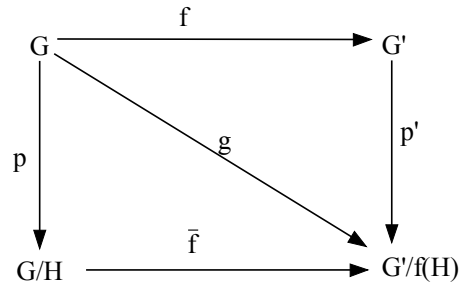
$$\bar{f}(\hat{x}_1) = \bar{f}(\hat{x}_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1x_2^{-1}) = 1'$$

$$x_1x_2^{-1} \in \ker f \Leftrightarrow \hat{x}_1 = \hat{x}_2.$$

**6.4.2. Observație.** Dacă  $f : G \rightarrow G'$  este izomorfism de grupuri atunci grupurile  $G/\ker f$  și  $f(G)$  sunt izomorfe.

**6.4.3. Teoremă.** Dacă  $f : G \rightarrow G'$  este un morfism surjectiv de grupuri și  $H$  este subgrup normal în  $G$  atunci  $f(H)$  este subgrup normal în  $G'$  iar grupurile  $G/H$  și  $G'/f(H)$  sunt izomorfe.

Demonstrație. Dacă  $y \in G'$  și  $f$  este surjectivă, există  $x \in G$  astfel ca  $f(x) = y$ . Avem  $xH = Hx$  deci  $f(xH) = f(Hx)$  sau  $f(x)f(H) = f(H)f(x)$  adică  $yH' = H'y$ ,  $y \in G'$  unde  $H' = f(H)$ , deci  $f(H)$  este normal în  $G'$ .



Notăm proiecțiile canonice  $p : G \rightarrow G/H$ ,  $p(\hat{x}) = \hat{x} = xH$  și  $p' : G' \rightarrow G'/f(H)$ ,  $p'(y) = \hat{y} = yf(H)$ . Funcția  $g = p' \circ f : G \rightarrow G'/f(H)$  este compunere de morfisme surjective, deci morfism surjectiv, pentru care putem aplica teorema 1 de izomorfism și avem:

$$G/\ker g \approx G'/f(H)$$

Rămâne să arătăm că  $\ker g = H$ .

$$\begin{aligned} \text{Avem } x \in \ker g &\Leftrightarrow g(x) = \hat{1}' \Leftrightarrow p'(f(x)) = \hat{1}' \Leftrightarrow f(x) = \hat{1} \Leftrightarrow \\ f(x) \in H' &\Leftrightarrow f(x) \in f(H) \Leftrightarrow x \in H \end{aligned}$$

Ultima echivalență trebuie justificată: dacă prin absurd ar exista  $x \in G \setminus H$  astfel ca  $f(x) \in f(H)$  atunci fie  $h \in H$  astfel ca  $f(x) = f(h) \Leftrightarrow f(xh^{-1}) = 1' \Leftrightarrow xh^{-1} \in \ker f \subset H$  ( $f^{-1}(\{1'\}) \subset f^{-1}(f(H))$ ) și atunci  $xh^{-1}h \in H$  deci  $x \in H$ .

## **Bibliografie**

- [1] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele algebrei*.
- [2] C. Niță, T. Spircu, *Probleme de algebră*, Ed. Tehnică, București, 1974.
- [3] T. Spircu, *Structuri algebrice prin probleme*, Ed. Științifică, București, 1991.
- [4] D. Popescu, C. Vraciu, *Elemente de teoria grupurilor finite*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1986.
- [5] I. Purdea, *Tratat de algebră*.
- [6] I. Purdea, *Culegere de probleme de teoria grupurilor*, UBB Cluj, 1985.

### Probleme rezolvate

R6.5.1. Fie  $f : G \rightarrow G'$  un morfism de grupuri. Să se arate că:

a) Dacă  $K \triangleleft G'$  atunci  $f^{-1}(K) \triangleleft G$ .

b) Dacă  $f$  este surjectiv și  $H \triangleleft G$  atunci  $f(H) \triangleleft G'$ .

c) Dacă  $f$  este surjectiv, aplicația  $H \mapsto f(H)$  realizează o bijecție între mulțimea subgrupurilor normale din  $G$  care conțin  $\ker f$  și mulțimea subgrupurilor normale din  $G'$ .

Soluție. a) Dacă  $x, y \in f^{-1}(K)$  atunci  $f(xy^{-1}) = f(x)(f(y))^{-1} \in K$  deci  $xy^{-1} \in f^{-1}(K)$ ,  $f^{-1}(K)$  este subgrup.

Dacă  $x \in G$  și  $h \in f^{-1}(K)$  atunci

$$f(xhx^{-1}) = f(x)f(h)(f(x))^{-1} = yky^{-1} \in K$$

deci  $xhx^{-1} \in f^{-1}(K)$  și astfel  $f^{-1}(K)$  este normal în  $G$ .

b) Dacă  $z, u \in f(H)$ ,  $z = f(x)$ ,  $y = f(y)$ ,  $x, y \in H$  atunci  $xy^{-1} \in H$ ,  $f(xy^{-1}) \in f(H)$  sau  $zu^{-1} \in f(H)$  deci  $f(H) \leq G'$ .

Pentru a arăta normalitatea lui  $f(H)$  în  $G'$  trebuie să folosim ipoteza surjectivității lui  $f$  (altfel  $f(H)$  este normal doar în  $f(G)$ ). Pentru  $z \in G'$  și  $k \in f(H)$  există  $x \in G$  și  $h \in H$  astfel ca  $f(x) = z$  și  $f(h) = k$ . Cum  $H$  este normal în  $G$  rezultă  $xhx^{-1} \in H$  deci  $f(xhx^{-1}) \in f(H)$  sau  $zky^{-1} \in f(H)$ , deci  $f(H) \triangleleft G'$ .

c) Vom arăta mai întâi că dacă  $f$  este surjectiv, atunci aplicația  $H \mapsto f(H)$  realizează o bijecție de la mulțimea subgrupurilor lui  $G$  care conțin  $\ker f$  la mulțimea tuturor subgrupurilor lui  $G'$ .

Fie  $K \leq G'$ . Arătăm că există un unic subgrup  $H \leq G$  astfel ca  $\ker f \leq H$  și  $f(H) = K$ . Mai întâi arătăm unicitatea: dacă  $\ker f \leq H \leq G$  și  $f(H) = K$  arătăm că  $H = f^{-1}(K)$ . Pentru  $h \in H$ ,  $f(h) \in f(H) = K$  și  $h \in f^{-1}(K)$  deci  $H \leq f^{-1}(K)$ . Reciproc, fie  $x \in f^{-1}(K)$ , deci  $f(x) \in K = f(H)$ , există  $h \in H$  astfel ca  $f(x) = f(h)$ , deci  $xh^{-1} \in \ker f \subset H$  și  $x = (xh^{-1})h \in H$  în concluzie  $H = f^{-1}(K)$ .

Fie acum  $H = f^{-1}(K)$ . Știm că  $H \leq G$  și dacă  $x \in \ker f$  avem  $f(x) = 1 \in K$  deci  $x \in f^{-1}(K) = H$ , adică  $\ker f \leq H$ . În fine, dacă  $x \in H$  avem  $f(x) \in K$ , deci  $f(H) \subset K$ . Reciproc, dacă  $y \in K$  și  $y = f(x)$  atunci  $x \in f^{-1}(K)$  deci  $y = f(x) \in f(H)$ , astfel  $f(H) = K$ .

R6.5.2. Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $AutG$  grupul automorfismelor lui  $G$ , iar  $IntG = \{f_g \in AutG \mid f_g(x) = gxg^{-1}, x \in G\}$  mulțimea automorfismelor interioare. Să se arate că  $G/Z(G) \approx IntG$ . ( $Z(G)$  este centrul grupului  $G$ ).

Soluție. Considerăm funcția  $F : G \rightarrow \text{Int}G$ ,  $F(g) = fg$ . Se verifică faptul că  $F$  este morfism surjectiv de grupuri. Avem

$$\begin{aligned} \ker F &= \{g \in G \mid f_g = 1_g\} = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x, x \in G\} = \\ &= \{g \in G \mid gx = xg, x \in G\} = Z(G). \end{aligned}$$

Conform teoremei de izomorfism

$$G/Z(G) \approx \text{Int}G$$

(izomorfismul este  $gZ(G) \mapsto f_g$ ).

R6.5.3. Fie  $GL_n(\mathbf{R})$  grupul general liniar (al matricelor nesingulare) și  $SL_n(\mathbf{R})$  grupul special liniar (al matricelor cu determinantul 1). Să se arate că  $SL_n(\mathbf{R})$  este subgrup normal în  $GL_n(\mathbf{R})$  și

$$GL_n(\mathbf{R})/SL_n(\mathbf{R}) \approx \mathbf{R}^*$$

Soluție. Considerăm funcția determinant:

$$\det : GL_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^*$$

și din  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$  rezultă că este morfism de grupuri (surjectiv). Nucleul său este  $\ker(\det) = \{A \in GL_n(\mathbf{R}) \mid \det A = 1\} = SL_n(\mathbf{R})$ , care fiind nucleul unui morfism este subgrup normal și se aplică teorema de izomorfism.

**Observație.** În  $GL_n(\mathbf{Z}_p)$  unde  $p$  este prim avem:

$$GL_n(\mathbf{Z}_p)/SL_n(\mathbf{Z}_p) \approx \mathbf{Z}_{p-1}$$

R6.5.4. Să se arate că dacă  $m, n$  sunt numere naturale prime între ele atunci  $\mathbf{Z}_{mn} \approx \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ .

Soluție. Considerăm funcția  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ ,  $f(x) = (\bar{x}, \hat{x})$ , unde am notat  $\mathbf{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$  și  $\mathbf{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, n-1\}$ . Avem

$$f(x+y) = (\overline{x+y}, \hat{x+y}) = (\overline{x+y}, \hat{x} + \hat{y}) = (\overline{x}, \hat{x}) + (\overline{y}, \hat{y}) = f(x) + f(y)$$

deci  $f$  este morfism de grupuri.

Arătăm că  $f$  este surjectivă: fie  $(\bar{y}, \hat{z}) \in \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ , arătăm că există  $x \in \mathbf{Z}$  astfel ca  $f(x) = (\bar{y}, \hat{z})$  sau  $m \mid (x-y)$ ,  $n \mid (x-z)$  sau  $x = y + k_1m$  și  $x = z + k_2n$ , deci trebuie arătat că există  $k_1, k_2$  astfel ca  $y + k_1m = z + k_2n$  sau  $y - z = k_2n - k_1m$ . Dar se știe că dacă  $(m, n) = 1$  atunci orice număr (în particular  $y - z$ ) se poate reprezenta sub forma  $\alpha n + \beta m$ , cu  $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$  (în cazul nostru  $\alpha = k_2$ ,  $\beta = -k_1$ ). Din teorema de izomorfism:

$$\mathbf{Z}/\ker f \approx \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n.$$

Determinăm  $\ker f$ . Dacă  $x \in \ker f$  atunci  $f(x) = (\bar{0}, \hat{0})$  sau  $(\bar{x}, \hat{x}) = (\bar{0}, \hat{0})$  deci  $m \mid x$  și  $n \mid x$  deci  $[m, n] \mid x$  dar din  $(m, n) = 1$  rezultă  $[m, n] = mn$  deci  $\ker f = mn\mathbf{Z}$  și atunci  $\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{mn}$ .

R6.5.5. Să se arate că  $\mathbf{C}^*/U \approx \mathbf{R}_+^*$  și  $\mathbf{C}^*/\mathbf{R}_+^* \approx U$  (unde  $U$  este cercul unitate).

Soluție. Definim funcția  $f: \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ ,  $f(z) = |z|$  (modulul lui  $z$ ) care este morfism surjectiv și  $\ker f = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\} = U$  deci  $\mathbf{C}^* / U \approx \mathbf{R}_+^*$ .

Considerăm funcția  $g: \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ ,  $g(z) = \frac{z}{|z|}$  care este morfism cu imaginea

$\text{Im } g = U$  și nucleul  $\ker g = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\} = \mathbf{R}_+^*$ . Din teorema de izomorfism:

$$\mathbf{C}^* / \mathbf{R}_+^* \approx U.$$

R6.5.6. Pentru un număr prim  $p$  și un număr natural  $n$  definim grupurile

$$C_{p^n} = \{z \in \mathbf{C} \mid z^{p^n} = 1\}, \text{ subgrupuri în } \mathbf{C}^* \text{ și definim } C_{p^\infty} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} C_{p^n}.$$

Să se arate că:

a)  $C_{p^\infty}$  este subgrup în  $\mathbf{C}^*$ .

b) Orice subgrup propriu al lui  $C_{p^\infty}$  este ciclic, de forma  $C_{p^n}$ .

c)  $C_{p^\infty} / C_{p^n} \approx C_{p^\infty}$ .

Soluție. a) Avem  $C_{p^0} \subset C_{p^1} \subset C_{p^2} \subset \dots \subset C_{p^n} \subset \dots$  din care se arată ușor

că  $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} C_{p^n}$  este grup.

b) Orice element al grupului  $C_{p^\infty}$  este de ordin finit, ordinul său fiind de forma  $p^n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .

Fie  $H$  un subgrup în  $C_{p^\infty}$ . Dacă  $H$  conține un element  $x$  de ordin  $p^n$  atunci  $x, x^2, x^3, \dots, x^p, \dots, x^{p^n}$  sunt distincte, toate din  $C_{p^n}$  în număr de  $p^n$  și deci  $\langle x \rangle \subset H$  sau  $C_{p^n} \subset H$  și atunci dacă ordinele elementelor lui  $H$  formează o mulțime infinită  $H = C_{p^\infty}$ . Dacă această mulțime este finită, atunci fie  $p^n$  ordinul maxim al unui element din  $H$ , avem  $H = C_{p^n}$ .

c) Definim funcția  $f: C_{p^\infty} \rightarrow C_{p^\infty}$ ,  $f(z) = z^{p^n}$  și se verifică faptul că  $f$  este morfism surjectiv:

$$f(C_{p^n}) = C_{p^0} = \{1\}, f(C_{p^{n+1}}) = f(C_{p^1}), \dots, f(C_{p^{n+m}}) = C_{p^m} \dots$$

și  $\ker f = C_{p^n}$ , deci din teorema de izomorfism

$$C_{p^\infty} / C_{p^n} \approx C_{p^\infty}$$

## 7. Grupuri de transformări geometrice

### 7.1. Planul euclidian. Modele geometrice și algebrice

Studiul geometriei planului euclidian este greoi dacă ne mărginim la definiția axiomatică a geometriei euclidiene plane. Folosirea unor metode algebrice este în multe probleme mai clară și eficace. De aceea, în funcție de specificul problemelor, vom putea privi planul euclidian în mai multe moduri.

a) **Axiomatic** (de exemplu după axiomele lui Hilbert), ceea ce generează "geometria sintetică".

b) **Vectorial**. Planul este privit ca mulțime de vectori, imaginea intuitivă a unui spațiu vectorial real de dimensiune doi,  $V = \{a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 \mid a, b \in \mathbf{R}\}$  cu  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  vectori liniar independenți. În cele mai multe cazuri baza va fi  $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\} = \{\bar{i}, \bar{j}\}$  și atunci planul este  $\bar{\mathbf{R}}^2 = \{\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ . Acest mod de a privi planul euclidian conduce la geometria vectorială.

c) **Analitic**. Planul este privit ca mulțime de puncte, reprezentare intuitivă a produsului cartezian  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , deci planul este  $\mathbf{R}^2 = \{A(x_A, y_A) \mid x_A, y_A \in \mathbf{R}\}$ . Acest mod de a privi planul, conduce la geometria analitică.

d) **Complex**. Planul este privit ca imaginea intuitivă a mulțimii numerelor complexe (planul complex)  $\mathbf{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ , unde  $i^2 = -1$ , care conduce la geometria planului complex.

Ultimele trei moduri de abordare a geometriei euclidiene plane au avantajul că pot fi cu ușurință folosite multe rezultate și metode din algebră, dar au și suficiente dezavantaje privind frumusețea, ingeniozitatea și eleganța soluțiilor sintetice.

Legăturile între cele patru modele ale planului euclidian sunt pe scurt următoarele:

a)  $\rightarrow$  b) Dacă în planul  $\pi$  alegem un punct fix  $O$  și două puncte  $A, B$  necoliniare cu  $O$  atunci segmentele orientate  $\overline{OA}$  și  $\overline{OB}$  pot fi luate ca vectori ce formează baza spațiului de vectori. Dacă  $\bar{v}_1 = \overline{OA}$ ,  $\bar{v}_2 = \overline{OB}$  și uniformizăm distanțele (definim  $\|\bar{v}_1\| = d(O, A)$ ,  $\|\bar{v}_2\| = d(O, B)$ ). Dacă punctele  $A, O, B$  sunt luate astfel ca  $\angle AOB = 90^\circ$  și  $d(O, A) = d(O, B) = 1$  atunci notăm  $\overline{OA} = \bar{i}$ ,  $\overline{OB} = \bar{j}$  și planul  $\pi$  devine  $\bar{\mathbf{R}}^2 = \{\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} \mid x, y \in \mathbf{R}\}$  în care baza canonică  $\{\bar{i}, \bar{j}\}$  este ortonormată.

b)  $\leftrightarrow$  c) Avem

$$\bar{\mathbf{R}}^2 = \{\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} \mid x, y \in \mathbf{R}\} \text{ și } \mathbf{R}^2 = \{M(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}.$$

Definim corespondența  $\overline{\mathbf{R}}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$  prin

$$\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} \mapsto M_{\bar{v}}(x, y) \in \mathbf{R}^2$$

Punctul  $M_{\bar{v}}$  se numește vârful vectorului  $\bar{v}$ .

Reciproc. De la  $\mathbf{R}^2$  la  $\overline{\mathbf{R}}^2$  definim aplicația

$$M(x, y) \mapsto \bar{r}_M = x\bar{i} + y\bar{j} \in \overline{\mathbf{R}}^2,$$

vectorul  $\bar{r}_M$  se numește vectorul de poziție al punctului  $M$ .

c)  $\leftrightarrow$  d) De la  $\mathbf{R}^2$  la  $\mathbf{C}$  definim funcția

$$F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}, \quad F(x, y) = z = x + iy,$$

cu funcția inversă  $F^{-1}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $F^{-1}(z) = F^{-1}(x + iy) = (x, y) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ .

De la modelele b), c), d) la modelul axiomatic a), reținem interpretarea intuitivă a planului ca mulțime de puncte.

Toate noțiunile geometriei: punct, dreaptă, segment, semidreaptă, unghi, măsură a unghiurilor, distanță, coliniaritate, concurență, paralelism, perpendicularitate, figuri geometrice sunt în corespondență în cele patru modalități de a privi planul euclidian.

## 7.2. Principalele izometrii ale planului

### 7.2.1. Translația

**7.2.1. Definiție.** Se numește translație în planul  $\pi$ , orice funcție  $f: \pi \rightarrow \pi$  prin care toate punctele planului se deplasează în aceeași direcție și sens, cu aceeași distanță între punct și imaginea sa.

**7.2.2. Observație.** a) Translația privită în planul de vectori  $\overline{\mathbf{R}}^2$  este o funcție  $t_{\bar{a}}$  determinată de un vector  $\bar{a} \in \overline{\mathbf{R}}^2$  fixat,

$$t_{\bar{a}}: \overline{\mathbf{R}}^2 \rightarrow \overline{\mathbf{R}}^2, \quad t_{\bar{a}}(\bar{v}) = \bar{a} + \bar{v}, \quad \bar{v} \in \overline{\mathbf{R}}^2.$$

b) Translația privită în planul punctual  $\mathbf{R}^2$  este o funcție  $T_{(x_0, y_0)}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $T_{(x_0, y_0)}(x, y) = (x + x_0, y + y_0)$ ,  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ .

Relațiile

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases} \quad T(x, y) = (x', y')$$

se numesc ecuațiile translației. (Originea  $(0, 0)$  este mutată în punctul  $(x_0, y_0)$ ).

c) Ca transformare geometrică, translația invariază distanțele ( $d(A,B) = d(t(A),t(B))$ ), invariază unghiurile, transformă drepte în drepte paralele, cercuri în cercuri.

d) Compunerea a două translații este tot o translație.

**7.2.3. Propoziție.** Mulțimea  $T$  a translațiilor planului  $\pi$ , formează un grup comutativ  $(T, \circ)$  subgrup al grupului  $(S_\pi, \circ)$  al bijecțiilor planului  $\pi$ .

Demonstrație. O translație este evident o funcție bijectivă, deci  $T \subset S_\pi$ .

Avem  $t_{\bar{a}_1} \circ t_{\bar{a}_2} = t_{\bar{a}_2} \circ t_{\bar{a}_1} = t_{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}$  și  $(t_{\bar{a}})^{-1} = t_{-\bar{a}}$ .

## 7.2.2. Simetria centrală

**7.2.4. Definiție.** Se numește simetrie centrată (față de punctul  $A$ ) o funcție  $s_A : \pi \rightarrow \pi$  care are un punct fix  $A \in \pi$  ( $s_A(A) = A$ ), punct care este mijlocul oricărui segment  $[M, M']$  unde  $M' = s_A(M)$ .

**7.2.5. Observație.** a) Dacă privim planul ca mulțime de vectori, simetria față de origine se definește prin  $s_O(\bar{v}) = -\bar{v}$ , iar simetria față de punctul  $A$  (de vector de poziție  $\bar{r}_A$ ) este:  $s_A : \bar{\mathbf{R}}^2 \rightarrow \bar{\mathbf{R}}^2$

$$s_A(\bar{v}) = 2\bar{r}_A - \bar{v}, \quad \bar{v} \in \bar{\mathbf{R}}^2$$

b) Ecuațiile analitice ale simetriei  $s_A : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  sunt

$$s_A(x, y) = (x', y') \text{ cu } x' = 2x_A - x \text{ și } y' = 2y_A - y.$$

c) Simetria centrală este o funcție bijectivă care păstrează distanțele, unghiurile și este involutivă ( $s_A \circ s_A = 1_\pi$  sau  $s_A = (s_A)^{-1}$ ).

**7.2.6. Propoziție.** a) Compunerea a două simetrii centrale (față de  $A$  și  $B$ ,  $A \neq B$ ) este o translație (de vector  $\overline{BA}$ ).

Dacă  $t_{\bar{a}}$  este o translație și  $s_A$  o simetrie centrală, funcția compusă  $t_{\bar{a}} \circ s_A$  este o simetrie centrală și avem:

$$t_{\bar{a}} \circ s_A = s_A \circ t_{(-\bar{a})}.$$

Demonstrație. a)  $s_A \circ s_B(\bar{v}) = s_A(s_B(\bar{v})) = s_A(2\bar{r}_B - \bar{v}) = 2\bar{r}_A - (2\bar{r}_B - \bar{v}) = 2\overline{BA} + \bar{v} = t_{2\overline{BA}}(\bar{v})$  cu  $s_B \circ s_A(\bar{v}) = t_{\overline{AB}}(\bar{v})$ .

b) Din  $t_{\bar{a}}(\bar{v}) = \bar{a} + \bar{v}$  și  $s_A(\bar{v}) = 2\bar{r}_A - \bar{v}$  rezultă:

$$(t_{\bar{a}} \circ s_A)(\bar{v}) = t_{\bar{a}}(2\bar{r}_A - \bar{v}) = \bar{a} + 2\bar{r}_A - \bar{v} = 2\left(\frac{\bar{a}}{2} + \bar{r}_A\right) - \bar{v} = s_{A'}(\bar{v})$$



unde  $\bar{r}_{A'} = \frac{\bar{a}}{2} + \bar{r}_A$  sau  $AA' = \frac{\bar{a}}{2}$ . Analog se arată că  $s_A \circ t_{(-\bar{a})} = s_{A'}$ .

O proprietate remarcabilă a unor figuri geometrice este simetria lor.

**7.2.7. Definiție.** Dacă  $F$  este o figură plană și  $s_A : \pi \rightarrow \pi$  este o simetrie centrală cu proprietatea  $s_A(F) = F$ , se spune că figura  $F$  este invariantă la simetria  $s_A$  sau că figura  $F$  admite punctul  $A$  ca centru de simetrie (figura  $F$  este central simetrică).

**7.2.8. Exemplu.** Un poligon regulat cu  $n$  laturi are un centru de simetrie dacă  $n$  este par și nu are centru de simetrie dacă  $n$  este impar.

**7.2.9. Propoziție.** a) Dacă  $F$  este o figură central simetrică față de punctul  $A$  atunci figurile  $F_1 = F \cup s_A(F)$  și  $F_2 = F \cap s_A(F)$  sunt figuri central simetrice față de punctul  $A$ .

b) O figură geometrică formată dintr-un număr finit de puncte sau o figură geometrică mărginită, admite cel mult un centru de simetrie.

Demonstrație. a) Avem

$$s_A(F_1) = s_A(F \cup s_A(F)) = s_A(F) \cup s_A(s_A(F)) = s_A(F) \cup F = F_1$$

și analog  $s_A(F_2) = F_2$ .

b) Dacă prin absurd, figura  $F$  ar avea două puncte de simetrie  $A$  și  $B$  atunci  $(s_A \circ s_B)^n(F) = F, n \in \mathbf{N}^*$ . Dar  $s_A \circ s_B = t_{\overline{BA}}$  și  $(s_A \circ s_B)^n = t_{n \cdot \overline{BA}}, n \in \mathbf{N}^*$ . Pentru un punct  $M \in F$  șirul de puncte  $(M_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  definit prin  $\bar{r}_{M_n} = \bar{r}_M + n \cdot \overline{BA}, n \in \mathbf{N}^*$  este format din puncte distincte (o infinitate) și este nemărginit.

### 7.2.3. Simetria axială

**7.2.10. Definiție.** Se numește simetrie axială (față de dreapta  $d$ ) o funcție  $s_d : \pi \rightarrow \pi$  cu proprietatea că mediatoarea segmentului  $[M, M']$  cu  $M' = s_d(M)$  este dreapta  $d$  pentru orice punct  $M \in \pi$ . Dreapta  $d$  se numește axă de simetrie, iar punctul  $M'$  se numește simetricul lui  $M$  față de  $d$ .

**7.2.11. Observație.** a) În  $\overline{\mathbf{R}}^2$  și  $\mathbf{R}^2$  simetriile axiale față de drepte arbitrare au ecuații complicate. Dacă însă axa de simetrie este  $Ox$  sau  $Oy$  atunci  $s_{Ox}(x, y) = (-x, y)$  și  $s_{Oy}(x, y) = (x, -y)$  iar față de prima bisectoare este  $s(x, y) = (y, x)$ .

b) Orice simetrie axială este o funcție bijectivă, involutivă ( $s_d \circ s_d = 1_\pi$ ), păstrează unghiurile și distanțele (este izometrie).

**7.2.12. Propoziție.** Compunerea a două simetrii axiale este:

- translație, dacă axele de simetrie sunt paralele
- simetrie centrală, dacă axele sunt ortogonale
- rotație, dacă axele sunt concurente, neperpendiculare.

Demonstrație. (Indicație) Se poate considera că planul a fost raportat la un reper astfel ca axele să fie:

- paralele cu  $Oy$
- axele  $Ox$  și  $Oy$
- axa  $Ox$  și dreapta ce trece prin origine  $d_2 : y = (\operatorname{tg}\alpha)x$ .

**7.2.13. Definiție.** O figură geometrică plană  $F$  pentru care există o simetrie axială  $s_d$  care o invariază ( $s_d(F) = F$ ) se numește figură cu axă de simetrie (axial-simetrică) iar dreapta  $d$  se numește axă de simetrie a figurii.

**7.2.14. Exemplanu.** - Un triunghi isoscel are o axă de simetrie.

- Un poligon regulat cu  $n$  laturi, are  $n$  axe de simetrie (diagonalele mari și mediatoarele laturilor dacă  $n$  este par, mediatoarele laturilor dacă  $n$  este impar).

**7.2.15. Propoziție.** Dacă dreptele  $d_1$  și  $d_2$  sunt axe de simetrie neperpendiculare pentru figura  $F$  atunci dreptele  $d_{12} = s_{d_1}(d_2)$  și  $d_{21} = s_{d_2}(d_1)$  sunt de asemenea axe de simetrie ale figurii  $F$ .

Demonstrație. Dacă  $M \in F$  notăm  $M_1 = s_{d_1}(M)$ ,  $M_{12} = s_{d_2}(M_1) = s_{d_2} \circ s_{d_1}(M)$ ,  $M_2 = s_{d_2}(M)$ . Punctele  $M, M_1, M_{12}, M_2$  sunt în  $F$  iar  $M_{12}$  și  $M_2$  sunt simetrice față de  $d_{21} = s_{d_2}(d_1)$ , deci  $d_{21}$  este axă de simetrie.

**7.2.16. Consecință.** Dacă figura  $F$  are doar două axe de simetrie, atunci ele sunt perpendiculare.

#### 7.2.4. Rotația

**7.2.17. Definiție.** Se numește rotație în plan o funcție  $R_\alpha : \pi \rightarrow \pi$  care admite un singur punct fix  $A \in \pi$  și pentru orice punct  $M$  unghiul orientat  $\angle MAM'$  cu  $M' = R_\alpha(M)$  are măsura  $\alpha$ .

Punctul fix  $A$  se numește centru de rotație iar unghiul  $\alpha$  este unghiul de rotație (dacă  $\alpha > 0$  rotația se face în sens trigonometric iar dacă  $\alpha < 0$  se face în sens opus).

**7.2.18. Observație.** a) În  $\mathbf{R}^2$  rotația de unghi  $\alpha$  în jurul originii are ecuațiile  $R_\alpha(x, y) = (x', y')$  cu

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

sau

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

matricea  $M_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$  se numește matrice de rotație de unghi  $\alpha$ .

Rotația în jurul unui punct arbitrar are ecuațiile:

$$\begin{cases} x' = x_0 + (x - x_0) \cos \alpha - (y - y_0) \sin \alpha \\ y' = y_0 + (x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha \end{cases}$$

b) Cel mai comod se lucrează cu rotații în planul complex  $\mathbf{C}$ . Dacă  $\varepsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha$  este un număr complex de modul 1, atunci funcția  $R_\alpha(z) = \varepsilon z$  este rotația de unghi  $\alpha$  în jurul originii. Pentru un punct  $A$  din plan de afix  $z_A \in \mathbf{C}$  rotația cu unghi  $\alpha$  în jurul lui  $A$  este dată de funcția

$$R_{A,\alpha} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, R_{A,\alpha}(z) = z_A + \varepsilon(z - z_A).$$

În particular funcția  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, f(z) = iz$  realizează o rotație cu unghi  $\frac{\pi}{2}$  în jurul originii.

c) Orice rotație este o funcție bijectivă iar inversa este rotație în sens opus. Rotațiile sunt izometrii ale planului.

**7.2.19. Propoziție.** Mulțimea rotațiilor  $R_O$  de centru dat  $O \in \pi$  formează un grup comutativ  $(R_O, \circ)$ .

Demonstrație. Este suficient să arătăm că  $(R_O, \circ)$  este subgrup în grupul bijecțiilor planului  $(S_\pi, \circ)$ . Avem  $R_\alpha \circ R_\beta = R_\beta \circ R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$  și  $(R_\alpha)^{-1} = R_{-\alpha}$ .

**7.2.20. Observație.** Un subgrup remarcabil al grupului rotațiilor de centru  $O$  este subgrupul  $R_n = \{R_O, R_{\frac{2\pi}{n}}, R_{\frac{4\pi}{n}}, \dots, R_{\frac{(n-1)2\pi}{n}}\}$ , subgrup de ordin  $n$ , izomorf cu grupul rădăcinilor de ordin  $n$  ale unității în  $\mathbf{C}$ .

**7.2.21. Propoziție.** a) Orice rotație se poate obține prin compunerea a două simetrii centrale (una din axe poate fi fixată în mod arbitrar din mulțimea dreptelor ce trec prin centrul de rotație).

b) Compunerea dintre o translație și o rotație este o rotație.

c) Mulțimea tuturor translațiilor și a tuturor rotațiilor formează un grup  $(T \cup R, \circ)$ , subgrup de izometrii ale planului.

Demonstrație. a) Dacă alegem două drepte  $d_1, d_2$  ce trec prin  $A$  și  $\angle d_1, d_2 = \frac{\alpha}{2}$  atunci  $s_{d_1} \circ s_{d_2} = R_{A, \alpha}$ .

b) Lucrăm în planul complex: fie  $t = t_{z_1}(z) = z_1 + z$  o translație și  $R = R_{z_0, \alpha}(z) = z_0 + \varepsilon(z - z_0)$  o rotație.

Avem  $(t \circ R)(z) = (z_1 + z_0) + \varepsilon(z - z_0)$ . Punctul fix al acestei transformări este  $z_2$  cu  $(t \circ R)(z_2) = z_2$ ,  $z_2 = z_0 + \frac{z_1}{1 - \varepsilon}$ , deci putem scrie  $(t \circ R)(z) = z_2 + \varepsilon(z - z_2)$  care arată că  $t \circ R$  este o rotație de același unghi  $\alpha$  în jurul punctului  $z_2$ .

Pentru compunerea inversă avem

$$(R \circ t)(z) = z_0 + \varepsilon(z + z_1 - z_0) = z_0 + \varepsilon(z_1 - z_0) + \varepsilon z.$$

Punctul fix este  $z_3 = z_0 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} z_1$  și putem scrie

$$(R \circ t)(z) = z_3 + \varepsilon(z - z_3).$$

c) Urmărind demonstrația punctului b) rezultă că pentru orice două puncte  $A_1, A_2$ , orice rotație în jurul lui  $A_1$  poate fi obținută prin compunerea unei rotații în jurul lui  $A_2$  cu o translație (rotațiile pot fi mutate în origine).

Dacă  $f, g \in T \cup R$  considerăm cazurile

c<sub>1</sub>)  $f, g \in R$ ,  $f = R_1$ ,  $g = R_2$ . Fie  $A_2$  centrul de rotație pentru  $R_2$  și  $R_1$  rotația în jurul lui  $A_2$  obținută din  $R_1$  compusă cu translația  $R_1 = t \circ R_1'$ . Avem  $f \circ g = t \circ R_1' \circ R_2 = t \circ R_3$  care este o rotație.

c<sub>2</sub>)  $f \in R$  și  $g \in T$ . Conform propoziției anterioare  $f \circ g$  și  $g \circ f$  sunt rotații.

c<sub>3</sub>)  $f, g \in T$ , atunci  $f \circ g \in T$ .

Mai avem:  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$  și din  $f, g \in T \cup R$  rezultă  $(f \circ g)^{-1} \in T \cup R$ .

**7.2.22. Definiție.** O figură geometrică plană  $F$  pentru care există o rotație de unghi  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  care o invariază, se numește figură cu simetrie de ordin  $n$ .

**7.2.23. Observație.** • O figură care admite simetrie de ordin par, admite centru de simetrie.

• O figură care nu se reduce la un punct și care este invariantă la o rotație de unghi  $\alpha$  cu  $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  are o mulțime infinită de puncte (punctele  $R^n(M) = M_n, n \in \mathbf{N}$  sunt distincte și formează o mulțime densă pe cercul cu centrul în centrul de rotație  $O$  și rază  $OM$ ).

**7.2.24. Observație.** În geometria euclidiană plană mai sunt și alte transformări geometrice importante, cum ar fi omotetiile și inversiunile. Acestea nu sunt izometrii dar și ele față de compunerea funcțiilor determină structuri algebrice de grup. Mulțimea omotetiilor de pol  $O$  și a inversiunilor de centru  $O$  formează un grup numit grupul conform al punctului  $O$ .

### 7.3. Izometriile planului euclidian

**7.3.1. Definiție.** O funcție  $f: \pi \rightarrow \pi$  se numește izometrie sau transformare ortogonală, dacă păstrează distanțele:

$$d(A, B) = d(f(A), f(B)), \text{ pentru orice } A, B \in \pi.$$

Mulțimea izometriilor o notăm  $I$ .

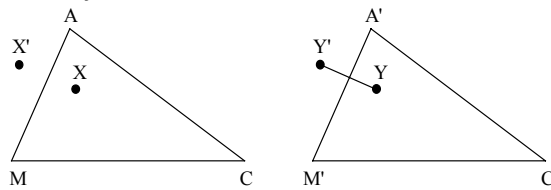
**7.3.2. Propoziție.** Orice izometrie este o funcție bijectivă, iar inversa este tot o izometrie.

Demonstrație. Dacă  $f(A) = f(B)$  atunci

$$d(A, B) = d(f(A), f(B)) = 0$$

deci  $A = B$  (funcția  $f$  este injectivă).

Pentru a demonstra surjectivitatea, considerăm  $ABC$  un triunghi și fie  $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$ . Triunghiul  $\Delta ABC$  și  $\Delta A'B'C'$  sunt congruente. Fie  $Y \in \pi$ , vom arăta că există  $X \in \pi$  astfel ca  $f(X) = Y$ . Dacă  $Y$  nu este pe dreapta  $A'B'$  luăm  $Y'$  simetricul lui  $Y$  față de  $A'B'$  și considerăm punctele  $X, X'$  astfel ca  $\Delta AXB \cong \Delta A'YB'$  și  $\Delta AX'B \cong \Delta A'Y'B'$ .



Avem:  $f(X) \in \{Y, Y'\}, f(X') \in \{Y, Y'\}$ . Dacă  $f(X) = Y$  atunci  $f(X') = Y'$  și dacă  $f(X) = Y'$  atunci  $f(X') = Y$ .

Pentru funcția inversă avem:

$$d(A, B) = d(f(f^{-1}(A)), f(f^{-1}(B))) = d(f^{-1}(A), f^{-1}(B))$$

deci  $f^{-1}$  este izometrie.

**7.3.3. Propoziție.** În raport cu compunerea funcțiilor, mulțimea izometriilor  $(I, \circ)$  formează un grup, subgrup al bijecțiilor planului.

Demonstrație. Pentru orice mulțime  $M$  se definește grupul simetric al mulțimii  $M$ ,  $S(M) = \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ S(M) bijectivă}\}$  și  $(S(M), \circ)$  este grup.

Este suficient să arătăm că  $(I, \circ)$  este subgrup în  $(S(\pi), \circ)$ . Dacă  $f, g \in I$  atunci

$$d((f \circ g)(A), (f \circ g)(B)) = d(f(g(A)), f(g(B))) = d(g(A), g(B)) = d(A, B).$$

Am arătat că dacă  $f \in I$  atunci  $f^{-1} \in I$ .

Se definește segmentul  $[A, B]$  astfel:

$$[A, B] = \{M \in \pi \mid d(A, M) + d(M, B) = d(A, B)\}$$

și se poate arăta:

**7.3.4. Propoziție.** Dacă  $f : \pi \rightarrow \pi$  este o izometrie atunci:

- Un segment  $[A, B]$  este dus în segmentul  $[f(A), f(B)]$ .
- O semidreaptă  $[A, B$  este dusă în semidreapta  $[f(A), f(B)$ .
- O dreaptă  $AB$  este dusă în dreapta  $f(A)f(B)$ .
- Un unghi  $\angle AOB$  este dus în unghiul  $\angle f(A)f(O)f(B)$  și măsurile lor sunt egale.
- Un cerc  $C(O, R)$  este dus în cercul  $C(f(O), R)$  și discul este dus în disc.
- Un semiplan limitat de dreapta  $AB$  este dus într-un semiplan mărginit de dreapta  $f(A)f(B)$ .
- Două drepte paralele sunt duse în două drepte paralele.

O importanță deosebită în studiul izometriilor planului o au punctele fixe și figurile invariante.

Fie  $F \subset \pi$  o mulțime de puncte (numită figură geometrică) și  $f : \pi \rightarrow \pi$  o izometrie.

**7.3.5. Definiție.** Se spune că figura  $F$  este invariantă la izometria  $f$  sau că izometria  $f$  invariază figura  $F$  dacă  $f(F) = F$ . Dacă  $F = \{A\}$  se spune că punctul  $A$  este punct fix pentru  $f$ .

**7.3.6. Propoziție.** Dacă  $F \subset \pi$  este o figură geometrică plană și notăm cu  $S(F) = \{f \in I \mid f(F) = F\}$  atunci  $(S(F), \circ)$  este un subgrup al grupului izometriilor planului, numit grupul de simetrie al figurii  $F$ .

**7.3.7. Observație.** Mulțimea punctelor fixe ale unei izometrii  $f$  poate fi:

- mulțimea vidă (translațiile)
- un punct (rotațiile)
- o dreaptă (simetriile axiale)

d) tot planul (aplicație identică).

Clasificarea izometriilor planului se face urmând ideile din următoarele afirmații:

**7.3.8. Propoziție.** Două izometrii  $f_1, f_2$  care iau valori egale în trei puncte necoliniare date, sunt identice.

Demonstrație. Funcția  $f = f_1 \circ f_2^{-1}$  are trei puncte fixe  $A, B, C$ . Dreptele  $AB, BC, CA$  sunt duse identic în  $AB, BC, CA$  deci sunt formate din puncte fixe. Dreptele  $MN$  cu  $M \in AB, N \in BC$  generează întreg planul și  $MN$  este dusă identic în  $MN$ , deci tot planul este format din puncte fixe pentru  $f$ .

**7.3.9. Propoziție.** Dacă triunghiurile  $\Delta ABC$  și  $\Delta A'B'C'$  sunt congruente atunci există o izometrie  $f: \pi \rightarrow \pi$  cu proprietatea  $f(A) = A', f(B) = B'$  și  $f(C) = C'$ .

Demonstrație. Dacă definim  $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$ ,  $f$  se prelungește unic la izometria pe punctele  $M \in AB$  și pe punctele  $N \in BC$ , iar apoi unic pe punctele dreptelor  $MN$ .

### 7.3.10. Teorema de structură a izometriilor planului

Fie  $f: \pi \rightarrow \pi$  este o izometrie a planului  $\pi$ .

a) Dacă  $f$  are cel puțin trei puncte fixe necoliniare atunci  $f$  este aplicație identică  $f = 1_\pi$ .

b) Dacă  $f$  are cel puțin două puncte fixe  $A_1$  și  $A_2$  atunci  $f = 1_\pi$  sau  $f$  este simetrie axială față de dreapta  $A_1A_2$ .

c) Dacă  $f$  are cel puțin un punct fix  $A$ , atunci  $f = 1_\pi$  sau  $f$  este o simetrie axială față de o dreaptă ce trece prin  $A$ , sau  $f$  este o rotație în jurul lui  $A_1$ .

d) Orice izometrie  $f$  este de forma  $f = R \circ t$  sau de forma  $s_d \circ t$  unde  $R$  este o rotație,  $t$  o translație și  $s_d$  o simetrie axială.

Demonstrație. a) Dacă prin absurd există  $B \in \pi$  cu  $f(B) = B' \neq B$  și  $A_1, A_2, A_3$  sunt punctele fixe necoliniare atunci

$$d(A_i, B) = d(f(A_i), f(B)) = d(A_i, f(B)) = d(A_i, B')$$

deci punctele  $A_1, A_2, A_3$  sunt pe mediatoarea segmentului  $[B, B']$ , adică sunt coliniare.

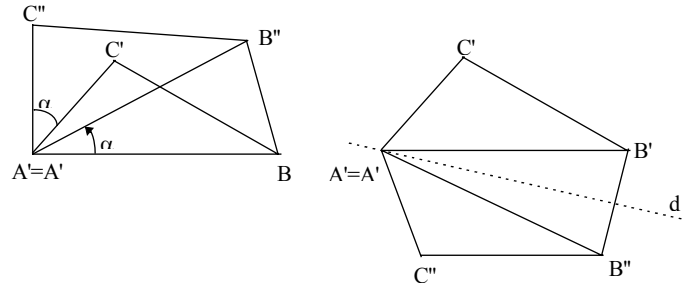
b) Dacă există  $B \in \pi$  cu  $f(B) = B' \neq B$  atunci ca la a),  $A_1$  și  $A_2$  sunt pe mediatoarea  $d$  a segmentului  $[B, B']$ . Pentru izometria  $s_d \circ f$  punctele  $B, A_1, A_2$  sunt puncte fixe necoliniare deci  $s_d \circ f = 1_A, f = s_d$ .

c) Dacă  $f \neq 1_\pi$ ,  $f(B) = B' \neq B$  și  $d$  este mediatoarea segmentului  $[B, B']$ , funcția  $g = s_d \circ f$  are puncte fixe pe  $A_1$  și  $B$  și conform punctului b)

avem  $g = 1_\pi$  sau  $g = s_{d_1}$  unde  $d_1$  este dreapta  $A_1B$ . Dacă  $s_d \circ f = 1_\pi$  atunci  $f = s_d$  și dacă  $s_d \circ f = s_{d_1}$  atunci  $f = s_d \circ s_{d_1} = R$  (compunerea a două simetrii axiale este o rotație).

d) Fie  $\Delta ABC$  un triunghi cu  $d(A, B) \neq d(A, C)$  și  $A' = f(A)$ ,  $B' = f(B)$ ,  $C' = f(C)$ . Triunghiurile  $\Delta ABC$  și  $\Delta A'B'C'$  sunt congruente.

Dacă translătăm triunghiul  $ABC$  astfel ca  $A$  să ajungă în  $A'$  și notăm  $t(A) = A'$ ,  $t(B) = B''$ ,  $t(C) = C''$  atunci triunghiurile  $\Delta A'B'C'$  și  $\Delta A''B''C''$  sunt congruente. Ele pot fi suprapuse sau printr-o rotație în jurul lui  $A' = A''$  sau printr-o rotație în jurul lui  $A' = A''$  sau printr-o simetrie față de dreapta  $d$  mediatoarea segmentului  $B'B''$ .



## 7.4. Interpretări geometrice ale unor grupuri remarcabile

Numeroase grupuri abstracte au interpretări geometrice interesante, ele fiind grupuri de simetrie ale unor figuri geometrice plane sau din spațiu. Vom da câteva exemple des întâlnite.

### 7.4.1. Interpretarea grupurilor ciclice

Orice grup ciclic este izomorf sau cu  $(\mathbf{Z}, +)$  sau cu  $(\mathbf{Z}_n, +)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ . Pentru o interpretare a grupului  $(\mathbf{Z}, +)$  considerăm figura geometrică formată din punctele unei drepte ce determină o diviziune echidistantă (de exemplu punctele de pe axa  $Ox$  de coordonate (abscise) numere întregi). Deci  $F = \{A_k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ . Avem  $\overline{A_k A_{k+1}} = \bar{v}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  și pentru orice  $k \in \mathbf{Z}$ , figura  $F$  este invariantă la translația  $t_{k\bar{v}}$ . Mulțimea tuturor acestor translații  $(\{t_{k\bar{v}} \mid k \in \mathbf{Z}\}, \circ)$  formează un grup izomorf cu  $\mathbf{Z}$ .  $(t_{k_1\bar{v}} \circ t_{k_2\bar{v}} = t_{(k_1+k_2)\bar{v}})$ .

În concluzie  $(\mathbf{Z}, +)$  este **grupul translațiilor unei diviziuni echidistante a unei drepte.**



Pentru grupul ciclic  $(\mathbf{Z}_n, +)$  folosim grupul izomorf  $(U_n, \cdot) = \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\}$  al rădăcinilor de ordin  $n$  ale unității. Avem

$$U_n = \left\{ \varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \mid k = \overline{0, n-1} \right\}$$

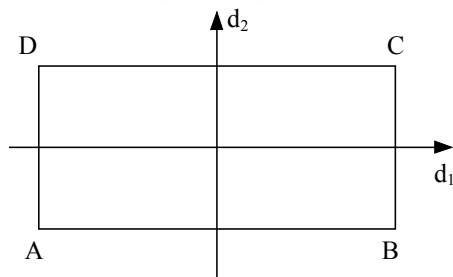
și corespunzător notăm  $R_n = \{R_{\frac{2k\pi}{n}} \mid k = \overline{0, n-1}\}$  mulțimea rotațiilor cu unghiurile

$\left\{ 0, \frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1) \frac{2\pi}{n} \right\}$  în jurul originii. Am văzut că orice astfel de rotație

este  $R_{\frac{2k\pi}{n}}(z) = \varepsilon_k z, k = \overline{0, n-1}$  și grupurile  $(R_n, \circ)$  și  $(U_n, \cdot)$  sau  $(\mathbf{Z}_n, +)$  sunt izomorfe. Pe de altă parte, dacă notăm cu  $A_1, A_2, \dots, A_n$  vârfurile unui poligon regulat cu centrul  $O$ , este evident că acesta este invariant la orice rotație  $R \in R_n$ . În concluzie  $(R_n, \circ)$  este grupul rotațiilor unui poligon regulat cu  $n$  laturi, deci **orice grup ciclic finit este grupul rotațiilor unui poligon regulat.**

#### 7.4.2. Grupul lui Klein

Considerăm un dreptunghi  $ABCD$  care nu este pătrat. Vom arăta că grupul Klein  $(K_4, \circ)$  este grupul de simetrie  $S(F)$  unde  $F = \{A, B, C, D\}$ . Orice izometrie duce puncte diametral opuse în puncte diametral opuse.



Dacă  $f(A) = C$  atunci  $f(C) = A, f(B) \in \{B, D\}, f(D) \in \{B, D\}$  pentru cazul  $f(B) = B$  obținem contradicția

$$d(A, B) = d(f(A), f(B)) = d(C, B)$$

deci obținem doar situația  $f(B) = D$  și  $f(D) = B$  care este simetrică față de centrul dreptunghiului.

Dacă  $f(A) = A$  atunci  $f(C) = C, f(B) \in \{B, D\}, f(D) \in \{B, D\}$ . Pentru cazul  $f(B) = D$  obținem contradicția

$$d(A, B) = d(f(A), f(B)) = d(A, D)$$

rămâne doar cazul  $f(B) = B, f(D) = D$  și obținem  $f = 1_\pi$ .

Dacă  $f(A) = B$  atunci  $f(C) = D$  și  $f(B) \in \{A, C\}$ ,  $f(D) \in \{A, C\}$ . Pentru  $f(B) = C$  obținem contradicția

$$d(A, B) = d(f(A), f(B)) = d(B, C),$$

deci  $f(B) = A$  și  $f(D) = C$  iar  $f = s_{d_2}$  este simetrica axială față de dreapta  $d_2$  mediatoarea laturilor  $[AB]$  și  $[CD]$ .

Dacă  $f(A) = D$  se obține  $f = s_{d_1}$  simetria față de mediatoarea celorlalte laturi. În concluzie  $S(F) = \{1_\pi, s_{d_1}, s_{d_2}, s_0\}$ . Se observă făcând tabla Cayley de compunere a grupului  $S(F)$  că  $(S(F), \circ) \approx (K_4, \circ)$ .

$$K_4 = \{1, a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1\}$$

O posibilă generalizare este următoarea:

Considerăm grupul  $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \dots \times \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_2^n$ , izomorf cu grupul părților unei mulțimi cu  $n$  elemente  $(P(a_1, a_2, \dots, a_n), \Delta)$  (operația de diferență simetrică  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ).

În caz particular  $n = 2$ ,  $K_4 \approx \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ .

În cazul  $n = 3$  se consideră ca figură  $F$  o prismă dreptunghiulară dreaptă. Grupul său de simetrie este format din trei simetrii față de plane paralele cu fețele, simetrii axiale, față de drepte paralele cu laturile, simetria centrală față de centrul figurii și aplicația identică, deci acest grup are opt elemente și  $S(F) \approx \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ .

### 7.4.3. Grupul diedral

Am văzut că rotațiile care invariază un poligon regulat cu  $n$  laturi formează un grup de ordin  $n$ , dar mai sunt și alte izometrii care invariază acest poligon. În general grupul diedral  $D_n$  este grupul simetriilor unui poligon regulat  $P_n$ , deci  $D_n = S(P_n)$ .

Dacă  $R_n$  este grupul rotațiilor atunci  $R_n \subset D_n$  și deci  $P_n = [A_1, A_2, \dots, A_n]$  pentru orice  $f \in D_n$  cu  $f(A_1) = A_k$  există o rotație  $R$  astfel ca  $f \circ R(A_1) = A_1$ , deci putem să ne rezumăm a căuta doar izometriile care au pe  $A_1$  ca punct fix.

Dacă  $r = 2k$  și  $f(A_1) = A_1$  atunci  $f(A_{k+1}) = A_{k+1}$  (din condiția de izometrie două puncte diametral opuse sunt duse în puncte diametral opuse. Punctele cele mai apropiate de  $A_1$  sunt  $A_2$  și  $A_{2k}$ , deci  $f(A_2) \in \{A_2, A_{2k}\}$ ,  $f(A_{2k}) \in \{A_2, A_{2k}\}$ . Dacă  $f(A_2) = A_2$  și  $f(A_{2k}) = A_{2k}$  se deduce  $f = 1_\pi$ . Dacă

$f(A_2) = A_{2k}$  și  $f(A_{2k}) = A_2$  se deduce  $f = s_{d_1}$  este simetria față de dreapta  $A_1A_{k+1}$ . Se obține  $2n = 4k$  izometrii

$$\{R_1, R_2, \dots, R_n, R_1 \circ s_{d_1}, R_2 \circ s_{d_1}, \dots, R_n \circ s_{d_1}\} = S(P_n) = D_n.$$

Dacă notăm cu  $R$  rotația de unghi  $\frac{2\pi}{n}$  și  $s$  simetria față de o diagonală atunci  $D_n$  este grupul generat de  $r$  și  $s$  ca subgrup al grupului izometriilor planului

$$D_n = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, r \cdot s, r^2 s, \dots, r^{k-1} s\}$$

sau  $D_n = \langle x, y \rangle$  unde  $x^n = 1, y^2 = 1$  și  $xy = yx^{-1}$  (are un generator de ordin  $n$ , un generator de ordin 2 și o relație de "comutare" ( $xy = yx^{-1}$ )).

Dacă  $n = 2k + 1$  este impar și  $f(A_1) = A_1$  atunci  $f(A_k) \in \{A_k, A_{k+1}\}$  și  $f(A_{k+1}) \in \{A_k, A_{k+1}\}$  fiind punctele cele mai depărtate de  $A_1$ . Raționând analog se deduce că dacă  $f(A_k) = A_k$  și  $f(A_{k+1}) = A_{k+1}$  atunci  $f = 1_\pi$  iar dacă  $f(A_k) = A_{k+1}$  și  $f(A_{k+1}) = A_k$  atunci  $f = s_{d_1}$  este simetria față de mediatoarea segmentului  $[A_k, A_{k+1}]$  (care trece prin  $A_1$ ). Obținem tot un grup cu  $2n$  elemente.

Se știe că un grup este un grup de permutări, subgrup într-un grup de bijecții. Este ușor de arătat că grupul diedral  $D_n$  este izomorf cu subgrupul lui  $(S_n, \circ)$  generat de permutările

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

## Bibliografie

- [1] D. Smaranda, N. Soare, *Transformări geometrice*, Ed. Academiei, București, 1988.
- [2] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, București, 1986.
- [3] D. Popescu, C. Vraciu, *Elemente de teoria grupurilor finite*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1986.
- [4] T. Albu, Ion G. Ion, *Itinerar elementar în algebra superioară*, Editura ALL Educational, București, 1997.

## Probleme rezolvate

R7.5.1. Să se determine grupurile de simetrie pentru următoarele figuri geometrice plane:

- a) triunghi
- b) trapez
- c) paralelogram
- d) romb
- e) dreaptă.

Soluție. a) Fie triunghiul  $\Delta ABC$ . Dacă triunghiul nu este echilateral sau isoscel și  $a > b > c$  punctele cele mai depărtate  $B$  și  $C$  (în care se realizează diametrul mulțimii) sunt duse în  $B$  sau  $C$ , iar cele mai apropiate  $A$  și  $B$  în  $A$  sau  $B$ . se obține  $f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C$ , deci  $f = 1_\pi$  și atunci  $S(\Delta ABC) = \{1_\pi\}$ .

Dacă triunghiul  $\Delta ABC$  este isoscel  $b = c$  atunci din  $d(A, B) = d(A, C)$  rezultă  $d(f(A), f(B)) = d(f(A), f(C))$  deci  $f(A) = A$  și  $f(B) \in \{B, C\}$ ,  $f(C) \in \{B, C\}$ . Dacă  $f(B) = B$  și  $f(C) = C$  atunci  $f = 1_\pi$  iar dacă  $f(B) = C$  și  $f(C) = B$  atunci  $f = s_d$  unde  $d$  este mediatoarea laturii  $[BC]$ , deci  $S(\Delta ABC) = \{1_\pi, s_d\}$ . Dacă triunghiul este echilateral, suntem în cazul particular al unui poligon regulat cu 3 laturi deci  $S(\Delta ABC) = D_3$  care are 6 elemente.

b) Fie  $T$  trapezul  $ABCD$  cu bazele  $AB \parallel CD, d(A, B) \neq d(D, C)$ , de exemplu  $d(A, B) > d(D, C)$ . O funcție  $f \in S(T)$  este în particular o izometrie a planului, deci duce drepte paralele în drepte paralele și atunci  $f(A) \in \{A, B\}, f(B) \in \{A, B\}, f(C) \in \{C, D\}, f(D) \in \{C, D\}$ . Dacă trapezul nu este isoscel avem  $f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C, f(D) = D$  și  $S(T) = \{1_\pi\}$  iar dacă trapezul este isoscel  $S(T) = \{1, s_d\}$  unde  $s_d$  este simetria față de mediatoarea laturilor paralele.

c)  $S(P) = \{1_\pi\}$

d)  $S(R) = K_4$  (simetriile față de diagonale, față de centrul rombului și simetria identică).

e) Dacă  $f(A) = A'$  atunci pentru orice  $x$  cu  $d(A, B) = x$  notăm cu  $B'_1$  și  $B'_2$  cele două puncte de pe  $d$  cu proprietatea  $d(A', B'_1) = d(A', B'_2) = x$ . Atunci  $f(B) \in \{B'_1, B'_2\}$ , cele două variante dau o translație sau o translație compusă cu o simetrie centrală, deci  $f$  este de forma  $f = t_{\vec{a}}$  sau  $f = u_{\vec{a}}$  cu  $t_{\vec{a}}(\vec{v}) = \vec{a} + \vec{v}$  și

$u_{\bar{a}}(\bar{v}) = \bar{a} - \bar{v}$ . Avem:  $S(d) = \{t_{\bar{a}}, u_{\bar{a}} \mid \bar{a} \in \overline{\mathbf{R}}\}$  (avem  $u_{\bar{a}} \circ u_{\bar{b}} = t_{\bar{a}-\bar{b}}$ ,  
 $u_{\bar{a}} \circ t_{\bar{b}} = u_{\bar{a}-\bar{b}}$ ,  $t_{\bar{b}} \circ u_{\bar{a}} = u_{\bar{a}+\bar{b}}$  și  $t_{\bar{a}} \circ t_{\bar{b}} = t_{\bar{a}+\bar{b}}$ ), sau  $s(d) \approx \mathbf{R} \times \mathbf{Z}_2$ .

R7.5.2. Să se arate că dacă  $d_1, d_2, d_3$  sunt drepte concurente atunci simetriile axiale  $s_{d_1}, s_{d_2}, s_{d_3}$  verifică egalitatea

$$s_{d_3} \circ s_{d_2} \circ s_{d_1} = s_{d_1} \circ s_{d_2} \circ s_{d_3}.$$

Soluție. Compunerea a două simetrii axiale  $s_{d_2}$  și  $s_{d_1}$  este o rotație  $R_{\alpha} = s_{d_2} \circ s_{d_1}$  și atunci  $R_{-\alpha} = s_{d_1} \circ s_{d_2}$ . Pe de altă parte rotația  $R_{\alpha}$  poate fi obținută prin compunerea  $R_{\alpha} = s_{d_3} \circ s_{d_4}$  și  $R_{-\alpha} = s_{d_4} \circ s_{d_3}$ , avem

$$s_{d_3} \circ s_{d_2} \circ s_{d_1} = s_{d_3} \circ R_{\alpha} = s_{d_3} \circ s_{d_3} \circ s_{d_4} = s_{d_4}$$

$$s_{d_1} \circ s_{d_2} \circ s_{d_3} = R_{-\alpha} \circ s_{d_3} = s_{d_4} \circ s_{d_3} \circ s_{d_3} = s_{d_4}$$

(compunerea a trei simetrii axiale este o simetrie axială).

R7.5.3. Să se arate că dacă dreptele  $d_1, d_2, \dots, d_n$  sunt concurente atunci  $s_{d_1} \circ s_{d_2} \circ \dots \circ s_{d_n}$  este rotație sau simetrie axială.

Soluție. Dacă  $n = 2k$  este număr par  $s_{d_1} \circ s_{d_2}, s_{d_3} \circ s_{d_4}, \dots, s_{d_{n-1}} \circ s_{d_n}$  sunt rotații și compunerea lor este tot o rotație.

Dacă  $n = 2k + 1$ ,  $s_{d_1} \circ s_{d_2} \circ \dots \circ s_{d_{n-1}} = R$  este rotație și putem scrie  $R = s_d \circ s_{d_n}$ . Atunci  $s_{d_1} \circ s_{d_2} \circ \dots \circ s_{d_n} = s_d \circ s_{d_n} \circ s_{d_n} = s_d$ .

R7.5.4. Să se arate că dacă  $d_1, d_2, \dots, d_{2n+1}$  sunt drepte concurente atunci  $s_{d_1} \circ s_{d_2} \circ \dots \circ s_{d_{2n+1}} = s_{d_{2n+1}} \circ s_{d_{2n}} \circ \dots \circ s_{d_1}$ .

Soluție. Se face inducție după  $n$ .

## 8. Inele

Considerăm cunoscute toate noțiunile și proprietățile referitoare la inele și corpuri din programa școlară. Inelele cu care vom lucra sunt peste tot în această carte, ca în materia de liceu, inele unitare, iar morfismele de inele (și corpuri) sunt morfisme unitare de inele (corpuri) unitare.

### 8.1. Centrul unui inel

Multe din problemele de concurs cu structuri algebrice conțin condiții ce asigură comutativitatea unui grup sau a unui inel. Deseori, noțiunile de centru al unui grup și centru al unui inel sunt instrumente eficiente de lucru în cazul unor astfel de probleme.

**8.1.1. Definiție** Fie inelul  $(A, +, \cdot)$ . Mulțimea  $Z(A) = \{x \in A \mid x \cdot y = y \cdot x, \forall y \in A\}$  se numește centrul inelului  $A$ .

**8.1.2. Observatii** Fie inelul  $(A, +, \cdot)$ .

a)  $Z(A) \neq \emptyset$  ( $1 \in Z(A)$ )

b) Fie  $k \in \mathbf{Z}$ . Notând  $k = \underbrace{1+1+\dots+1}_{k \text{ ori}}$ , avem  $k \in Z(A)$ .

c) Inelul  $(A, +, \cdot)$  este comutativ  $\Leftrightarrow A = Z(A)$

Următorul rezultat, foarte util, se demonstrează ușor:

**8.1.3. Propozitie** Fie inelul  $(A, +, \cdot)$ . Atunci:

a) Centrul  $Z(A)$  al inelului este un subgrup al grupului aditiv  $(A, +)$ .

b) Fie inelele  $(A_1, +, \cdot)$  și  $(A_2, +, \cdot)$ . Atunci  $A_1 \approx A_2 \Rightarrow Z(A_1) \approx Z(A_2)$ .

c) Fie inelul comutativ  $(A, +, \cdot)$ . Atunci  $Z(M_n(A)) = \{a \cdot I_n \mid a \in A\}$  și  $A \approx Z(M_n(A))$

**8.1.4. Lemă** Fie corpul comutativ  $(L, +, \cdot)$ ,  $m \in \mathbf{N}^*$  și  $A \in M_m(L)$  o matrice nilpotentă ( $\exists p \in \mathbf{N}^*$ ,  $A^p = 0_m$ ). Atunci  $A^m = 0_m$ .

Demonstrație: Dacă  $m = 1$ ,  $M_1(L) = L$  și  $A$  este element nilpotent în corpul  $L$ , deci  $A = 0$ .

Pentru  $m \geq 2$ , notăm cu  $r$  cel mai mic număr natural astfel încât  $A^r = 0_m$ .

Presupunem că  $r > m$ .

Din teorema Hamilton – Cayley,  $A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \dots + a_1A + a_0I_m = 0_m$ , (1)

unde  $p_A(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \overline{L[X]}$  este polinomul caracteristic al matricei  $A$ . Deoarece  $A^k \neq 0_m, \forall k = \overline{1, r}$  și  $A^k = 0_m, \forall k \geq r$ , înmulțind pe rând relația (1) cu  $A^{r-1}, A^{r-2}, \dots, A^{r-m}$  obținem  $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$  și (1) devine  $A^m = 0_m$ , ceea ce contrazice minimalitatea lui  $r$ . Așadar  $r \leq m$ , de unde rezultă că  $A^m = A^r \cdot A^{m-r} = 0_m$ .

**8.1.5. Propozitie** Fie corpurile comutative  $(K, +, \cdot)$  și  $(L, +, \cdot)$  și  $m, n \in \mathbb{N}^*, n > m$ . Singurul morfism de inele de la  $M_n(K)$  la  $M_m(L)$  este morfismul nul.

Demonstrație: Fie  $f: M_n(K) \rightarrow M_m(L)$  un morfism de inele.

Pentru fiecare  $a \in K$ , notăm  $e_{ij}(a) \in M_n(K)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  matricea care are pe poziția  $(i, j)$  elementul  $a \in K$  și celelalte elemente egale cu 0 și

$$U = U(a) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_{12}(a) + \sum_{k=2}^{n-2} e_{k, k+1}(1)$$

Avem  $U^p = e_{1, p+1}(a) + \sum_{k=2}^{n-p} e_{k, k+p}(1)$ ,  $p = \overline{1, n-2}$ ;  $U^{n-1} = e_{1, n}(a)$ ;  $U^n = 0_n$ .

Fie  $A = f(U) \in M_m(L)$ . Avem  $A^n = (f(U))^n \stackrel{f \text{ morfism}}{=} f(U^n) = f(0_n) = 0_m$ , deci  $A \in M_m(L)$  este o matrice nilpotentă. Din Lema 8.1.4. rezultă  $A^m = 0_m$ .  $n > m \Rightarrow 0_m = A^{n-1} = (f(U))^{n-1} = f(U^{n-1}) = f(e_{1, n}(a))$ , deci  $f(e_{1, n}(a)) = 0_m, \forall a \in K$  (1)

Avem  $e_{i, j}(a) = e_{i, 1}(1) \cdot e_{1, j}(a) \forall a \in K, \forall i, j = \overline{1, n}$ .

Obținem  $f(e_{i, j}(a)) = f(e_{i, 1}(1)) \cdot f(e_{1, j}(a)) \stackrel{(1)}{=} 0_m, \forall a \in K, \forall i, j = \overline{1, n}$  (2)

Fie  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$ .

Avem  $A = \sum_{1 \leq i, j \leq n} e_{ij}(a_{ij})$  și  $f(A) = f\left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} e_{ij}(a_{ij})\right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} f(e_{ij}(a_{ij})) \stackrel{(2)}{=} \sum_{1 \leq i, j \leq n} 0_m = 0_m$

și cum  $A$  a fost oarecare, deducem că  $f$  este morfismul nul.

**Observație** Pentru  $m = 1$  și  $L = K$  obținem că singurul morfism de inele de la  $M_n(K)$  la  $K$  este morfismul nul.

**8.1.6. Propozitie** Fie corpurile comutative  $(K, +, \cdot)$  și  $(L, +, \cdot)$  și  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

Inelele  $M_n(K)$  și  $M_m(L)$  sunt izomorfe dacă și numai dacă  $m = n$  și  $K \approx L$ .

Demonstrație: „ $\Leftarrow$ ” Dacă inelele  $K$  și  $L$  sunt izomorfe și  $m = n$ , fie  $f: K \rightarrow L$

un izomorfism.

Se verifică atunci că funcția  $f^*: M_n(K) \rightarrow M_n(L)$ ,  $f^*\left(\left(a_{ij}\right)_{1 \leq i, j \leq n}\right) = \left(f(a_{ij})\right)_{1 \leq i, j \leq n}$

este un izomorfism de inele.

„ $\Rightarrow$ ” Avem (8.1.3.)  $M_n(K) \approx M_m(L) \Rightarrow Z(M_n(K)) \approx Z(M_m(L))$ .

Cum  $K \approx Z(M_n(K))$  și  $L \approx Z(M_m(L))$ , rezultă  $K \approx L$ .

Fie  $f: M_n(K) \rightarrow M_n(L)$  un izomorfism de inele. Din propoziția 8.1.5. rezultă că  $n \leq m$ . Dar și funcția  $f^{-1}: M_n(L) \rightarrow M_n(K)$  este un izomorfism de inele și din aceeași propoziție deducem că  $m \leq n$ , deci  $m = n$ .

**8.1.7. Propozitie** Fie inelul  $(A, +, \cdot)$  și  $n, p \in \mathbb{Z}$ . Notăm cu  $d = (n, p)$ .

Dacă  $x \in A$  astfel încât  $n \cdot x \in Z(A)$  și  $p \cdot x \in Z(A)$ , atunci și  $d \cdot x \in Z(A)$ .

Demonstrația proprietății anterioare este o consecință imediată a propoziției 4.1.8.

**8.1.8. Consecință** Fie inelul  $(A, +, \cdot)$  și  $n, p \in \mathbb{Z}$ .

Dacă  $(n, p) = 1$  și  $\forall x \in A$ ,  $n \cdot x \in Z(A)$  și  $p \cdot x \in Z(A)$ , atunci inelul este comutativ.

**8.1.9. Teorema lui Mac Hale** Fie inelul  $(A, +, \cdot)$ . Dacă există endomorfismul surjectiv  $f$  al grupului aditiv  $(A, +)$  astfel încât  $\forall x \in A$ ,  $(x^2 - f(x)) \in Z(A)$ , atunci inelul este comutativ.

Demonstrație: Fie  $x \in A$ . Din ipoteză,  $x^2 - f(x) \in Z(A)$  (1)

Cum  $-x \in A$ , din (1) obținem  $x^2 + f(x) \in Z(A)$  (2)

Scăzând din (2) relația (1), obținem, deoarece  $(Z(A), +)$  este grup,  $2 \cdot f(x) \in Z(A)$

$\Rightarrow \forall a \in A$ ,  $2 \cdot a \in Z(A)$

Fie  $x, y \in A$ . Cum  $x + y \in A$ , din (1) obținem  $(x+y)^2 - f(x+y) \in Z(A)$



$(x+y)^2 - f(x+y) = x^2 - f(x) + y^2 - f(y) + x \cdot y + y \cdot x$  și cum  $x^2 - f(x), y^2 - f(y) \in Z(A)$  obținem  $x \cdot y + y \cdot x \in Z(A)$ . Atunci:  $\forall x, y \in A, x \cdot (x \cdot y + y \cdot x) = (x \cdot y + y \cdot x) \cdot x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in A, x^2 \cdot y = y \cdot x^2 \Leftrightarrow \forall x \in A, x^2 \in Z(A) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \forall x \in A, f(x) \in Z(A)$$

$f$  surj  
 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall a \in A, a \in Z(A) \Leftrightarrow A$  e comutativ.

**8.1.10. Propozitie** Fie  $(A, +, \cdot)$  un inel și  $f, g$  endomorfisme surjective ale sale.

Oricare din condițiile următoare asigură comutativitatea lui  $A$ :

a)  $\forall x \in A, (f(x^3) - g(x^2)) \in Z(A)$

b)  $\forall x \in A, (f(x) - g(x^3)) \in Z(A)$

Demonstrație: a) Fie  $x \in A$ . Din ipoteză,  $f(x^3) - g(x^2) \in Z(A)$  (1)

Cum  $-x \in A$ , din (1) obținem  $-f(x^3) - g(x^2) \in Z(A)$  (2)

$$(1) - (2) \text{ și } (1) + (2) \Rightarrow 2f(x^3), 2g(x^2) \in Z(A) \stackrel{\text{surj}}{\Rightarrow} \forall a \in A, 2a^3, 2a^2 \in Z(A)$$

$f$  și  $g$  morfisme  $\Rightarrow f(1) = g(1) = 1$  și  $\forall k \in \mathbb{Z}, f(k) = k \in Z(A)$ .

$x \leftarrow x+1$  în (1)  $\Rightarrow f((x+1)^3) - g((x+1)^2) \in Z(A)$  și ținând cont de faptul că  $f$  și  $g$  sunt morfisme, obținem:  $\forall x \in A, f(3x^2+3x) - g(2x) \in Z(A)$  (3)

$$x \leftarrow -x \text{ în } (3) \Rightarrow \forall x \in A, f(3x^2-3x) + g(2x) \in Z(A) \quad (4)$$

$$(3) - (4) \Rightarrow \forall x \in A, f(6x) - g(4x) \in Z(A) \quad (5)$$

$$x \leftarrow x+1 \text{ în } (3) \Rightarrow f(3x^2+9x+6) - g(2x+2) \in Z(A) \Leftrightarrow f(3x^2+9x) - g(2x) + 4 \in Z(A) \stackrel{4 \in Z(A)}{\Leftrightarrow} f(3x^2+9x) - g(2x) \in Z(A) \stackrel{-(3)}{\Rightarrow} f(6x) \in Z(A) \stackrel{(5)}{\Rightarrow} g(4x) \in Z(A) \stackrel{\text{surj}}{\Rightarrow} \forall a \in A, 4a, 6a \in Z(A) \Rightarrow \forall a \in A, 2a \in Z(A) \quad (6).$$

$$(3) \Leftrightarrow 2f(x^2) + 2f(x) - 2g(x) + f(x^2+x) \in Z(A) \stackrel{(6)}{\Rightarrow} f(x^2+x) \in Z(A) \stackrel{\text{surj}}{\Rightarrow}$$

$$\forall a \in A, a^2 + a \in Z(A) \quad (7)$$

Cum funcția  $h: A \rightarrow A, h(a) = -a$  este un endomorfism surjectiv al lui  $(A, +)$ , din (7) rezultă, folosind teorema lui Mac Hale, că inelul  $A$  este comutativ.

b) Fie  $x \in A$ . Din ipoteză,  $f(x) - g(x^3) \in Z(A)$  (1)

$$x \leftarrow x+1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(x) - g(x^3) - 3g(x^2) - 3g(x) \in Z(A) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \forall x \in A, 3g(x^2) +$$

$$3g(x) \in Z(A) \stackrel{\text{surj}}{\Rightarrow} \forall a \in A, 3a^2 + 3a \in Z(A) \quad (2)$$

$$x, y \in A \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 3(x+y)^2 + 3(x+y) \in Z(A) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \forall x, y \in A, 3xy + 3yx \in Z(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(3xy+3yx) = (3xy+3yx)x \Leftrightarrow \forall x, y \in A, 3x^2 \cdot y = y \cdot (3x^2) \Rightarrow \forall x \in A, 3x^2 \in Z(A)$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \forall a \in A, 3a \in Z(A) \quad (3) \\
& x, y \in A \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(x+y) - g((x+y)^3) \in Z(A) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \\
& g(x^2y + y^2x + xyx + xy^2 + yx^2 + yxy) \in Z(A) \\
& \stackrel{\text{surj}}{\Rightarrow} \forall a, b \in A, a^2b + b^2a + aba + ab^2 + ba^2 + bab \in Z(A) \quad (4) \\
& b \leftarrow -b \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \forall a, b \in A, -a^2b + b^2a - aba + ab^2 - ba^2 + bab \in Z(A) \quad (5) \\
& (4) - (5) \Rightarrow \forall a, b \in A, 2a^2b + 2aba + 2ba^2 \in Z(A) \quad (6) \\
& (6) \Rightarrow a \cdot (2a^2b + 2aba + 2ba^2) = (2a^2b + 2aba + 2ba^2) \cdot a \Leftrightarrow (2a^3) \cdot b = b \cdot (2a^3), \forall a, \\
& b \in A \Rightarrow \forall a \in A, 2a^3 \in Z(A) \text{ și cum din (3) avem și că } \forall a \in A, 3a^3 \in Z(A) \\
& \text{rezultă că} \\
& \forall a \in A, a^3 \in Z(A) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \forall x \in A, f(x) \in Z(A) \stackrel{\text{surj}}{\Rightarrow} \forall a \in A, a \in Z(A), \text{ deci } A \text{ e} \\
& \text{comutativ.}
\end{aligned}$$

## 8.2. Condiții suficiente pentru inele Boole

**8.2.1. Definiție** Fie inelul  $(A, +, \cdot)$ . Dacă  $\forall x \in A, x^2 = x$  (toate elementele inelului sunt idempotente), atunci inelul se numește inel Boole.

**8.2.2. Teoremă a)** Orice inel Boole este comutativ.

**b)** Dacă un inel Boole nu are divizori ai lui zero, atunci el are cel mult două elemente.

**Demonstrație:** **a)** Fie  $(A, +, \cdot)$  un inel Boole. Atunci,  $\forall x \in A, x^2 = x$  (1)

$$x \leftarrow x + 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \forall x \in A, x^2 + x + x + 1 = x + 1 \Leftrightarrow \forall x \in A, x + x = 0 \quad (2)$$

$$x \leftarrow x + y \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \forall x, y \in A, x^2 + x \cdot y + y \cdot x + y^2 = x + y \Leftrightarrow \forall x, y \in A, x \cdot y = -y \cdot x$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} y \cdot x = -y \cdot x \Rightarrow \forall x, y \in A, x \cdot y = y \cdot x, \text{ deci inelul este comutativ.}$$

**b)** Fie  $x, y \in A$ . Atunci  $x \cdot y(x + y) \stackrel{\text{com}}{=} x^2 \cdot y + x \cdot y^2 \stackrel{(1)}{=} xy + xy \stackrel{(2)}{=} 0$ .

$$\text{Așadar, } \forall x, y \in A, x \cdot y(x + y) = 0 \quad (3)$$

$y = 1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \forall x \in A, x(x + 1) = 0$  și dacă  $A$  nu are divizori ai lui 0, rezultă că

$$\forall x \in A, x = 0 \text{ sau } x = -1 = 1 \text{ și deci } |A| \leq 2.$$

Există mai multe probleme cunoscute în care apar condiții suficiente ca un inel să fie inel Boole. Astfel, egalitățile de forma  $x^6 = x, \forall x \in A$  sau  $x^{12} = x, \forall x \in A$  sau  $x^{20} = x, \forall x \in A$  implică idempotența tuturor elementelor inelului.

Ne punem să generalizăm aceste relații.

**8.2.3. Definiție** Fie  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

Inelul  $(A, +, \cdot)$  se numește  $n$ -inel dacă  $\forall a \in A, a^n \in A$ .

**8.2.4. Lemă** Dacă  $(A, +, \cdot)$  este un  $n$ -inel, atunci  $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall a \in A, a^{m(n-1)+1} = a$ .

**Demonstrație:** Prin inducție după  $m \in \mathbb{N}$ . Pentru  $m = 0$  este evident.

Fie  $k \in \mathbb{N}$ . Presupunem că  $\forall a \in A, a^{k(n-1)+1} = a$

Pentru  $a \in A, a^{(k+1)(n-1)+1} = a^{k(n-1)+1} \cdot a^{n-1} \stackrel{\text{ip ind}}{=} a \cdot a^{n-1} = a^n = a$  și din principiul I de inducție rezultă că  $\forall m \in \mathbb{N}, a^{m(n-1)} = e$ . Atunci  $a^{-m(n-1)} = (a^{m(n-1)})^{-1} = e$ .

**8.2.5. Lemă** Fie  $n = n_0 + n_1 \cdot 2 + \dots + n_{r-1} \cdot 2^{r-1} + n_r \cdot 2^r$ , cu  $n_i \in \{0, 1\}, \forall i = \overline{0, r}$ , scrierea numărului natural  $n$  în baza de numerație 2. Dacă  $s$  dintre numerele  $n_i$  sunt egale cu 1, atunci există exact  $2^s$  coeficienți binomiali  $C_n^k$  impari.

Să observăm că  $6 = 110_{(2)} = 5 + 1, 12 = 1100_{(2)} = 11 + 1, 20 = 1010_{(2)} = 19 + 1$ , ceea ce sugerează următorul enunț:

**8.2.6. Teoremă** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $(A, +, \cdot)$  un  $n$ -inel. Oricare dintre următoarele condiții este suficientă pentru ca  $A$  să fie inel Boole:

(i)  $\exists k, m, p \in \mathbb{N}^*, k > m, p$  prim, astfel încât  $n = 2^k + 2^m = p + 1$

(ii)  $\forall x \in A$  avem  $x + x = 0$  și  $\exists k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $n = 2^k + 1$ .

**Demonstrație:** (i)  $n$  este par  $\Rightarrow (-1)^n = 1$ . A fiind  $n$ -inel, avem  $(-1)^n = -1$ , de unde rezultă  $1 + 1 = 0$  și deci dintre coeficienții binomiali  $\left\{ C_n^k \mid k = \overline{0, n} \right\}$  sunt nenuli doar cei impari, aceștia fiind egali cu 1.

$n = 2^k + 2^m$  înseamnă că în scrierea în baza 2 a lui  $n$  avem doar două cifre de 1. În acest caz, din Lema 8.2.5., există exact 4 coeficienți binomiali

nenuli:  $C_n^0 = C_n^n = 1 = C_n^r = C_n^{n-r}$ , cu  $r \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}$ .

$$(1+a)^n = 1+a \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k = 1+a \Rightarrow C_n^r \cdot a^r + C_n^{n-r} \cdot a^{n-r} = 0 \Leftrightarrow a^r = a^{n-r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{2r} = a^n = a. \text{ Cum } 2r < n = p+1 \Rightarrow 2r-1 < p \stackrel{p \text{ prim}}{\Rightarrow} (2r-1, p) = 1 \Rightarrow \exists h, k \in \mathbf{Z},$$

$$(2r-1) \cdot k = (n-1) \cdot h + 1 \text{ și din Lema 8.2.4. deducem că } a^{(2r-1) \cdot k} = a^1 \quad (1).$$

$$a^{2r} = a \Rightarrow A \text{ este un } 2r - \text{inel și din lema 8.2.4. rezultă } a^{(2r-1) \cdot k+1} = a \quad (2).$$

(1), (2)  $\Rightarrow a^2 = a, \forall a \in A$  și  $A$  este un inel Boole.

**(ii)** Avem  $1+1=0$  și scrierea în baza 2 având tot două cifre nenule, rezultă că

dintre coeficienții binomiali  $\{C_n^k \mid k=0, n\}$  sunt nenuli doar 4, aceștia fiind,

$$\text{deoarece } n \text{ este impar, } C_n^0 = C_n^n = 1 = C_n^1 = C_n^{n-1}.$$

$$(1+a)^n = 1+a \Leftrightarrow a^{n-1} + a = 0 \Leftrightarrow a^{n-1} = a \Leftrightarrow a = a^n = a^2, \forall a \in A.$$

### 8.3. Inele și corpuri de caracteristică finită.

**8.3.1. Definiție** Fie inelul  $(A, +, \cdot)$  cu elementele neutre  $0$ , respectiv  $1$ .

Dacă  $\text{ord}(1) = n \in \mathbf{N}^*$ , spunem că inelul are caracteristica  $\text{char}(A) = n$ .

Dacă  $\text{ord}(1) = \infty$ , spunem că inelul are caracteristica  $\text{char}(A) = 0$ .

**8.3.2. Observație** Un inel finit nu poate avea caracteristica  $0$ , pentru că atunci  $\langle 1 \rangle$  este un subgrup cu o infinitate de elemente al grupului finit  $(A, +)$ , fals.

**8.3.3. Propoziție** Fie inelul  $(A, +, \cdot)$  și mulțimea  $P(A) = \{n \cdot 1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$  (am notat  $n \cdot 1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ ori}}$ ). Mulțimea  $P(A)$  este un subinel al lui  $A$  (numit

subinelul prim al lui  $A$ ) și orice subinel al lui  $A$  include  $P(A)$  ( $P(A)$  este cel mai mic subinel al lui  $A$ , în raport cu relația de incluziune).

**8.3.4. Propoziție** Fie inelul  $(A, +, \cdot)$ . Atunci:

a)  $\text{char}(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) \approx \mathbf{Z}$ .

b)  $\text{char}(A) = n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow P(A) \approx \mathbf{Z}_n$ .

**8.3.5. Propoziție** Caracteristica unui domeniu de integritate  $A$  este sau  $0$  sau un număr prim. În particular, orice corp finit are caracteristica un număr prim.

Demonstrație: Fie  $\text{char}(A) = n \in \mathbf{N}$ . Dacă  $n \neq 0$ , presupunem că  $n$  nu este un număr prim.

Atunci  $\exists p, t \in \mathbf{N}^*$ ,  $n = p \cdot t$  și  $0 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ ori}} = \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{p \text{ ori}} \cdot \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{t \text{ ori}}$

de unde,  $A$  fiind domeniu de integritate, deducem că  $\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{p \text{ ori}} = 0$  sau

$\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{t \text{ ori}} = 0$ , contradicție cu  $\text{ord}(1) = n$ . Așadar  $n$  este prim.

**8.3.6. Propoziție** Dacă  $(A, +, \cdot)$  este un inel finit a cărui caracteristică este un număr prim  $p$ , atunci există  $n \in \mathbf{N}^*$  astfel încât  $|A| = p^n$ .

Demonstrație: Pe  $(A, +)$ , care are toate elementele nenule de ordinul  $p$ , se poate introduce o structură de  $\mathbf{Z}_p$  – spațiu vectorial astfel:  $\hat{1} \cdot x = x$  și  $\hat{0} \cdot x = 0$ ,  $\forall x \in A$ , iar  $\hat{k} \cdot x = \underbrace{(x + x + \dots + x)}_{k \text{ ori}}$ ,  $\forall k \in \mathbf{R}_p$ . Se verifică ușor axiomele

spațiului vectorial.

Cum  $A$  este un spațiu vectorial finit, el admite o bază de dimensiune finită,

$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset A$ , cu  $n \in \mathbf{N}^*$ . Atunci  $\forall x \in A$ ,  $\exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{Z}_p$  astfel

încât  $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$  și deci  $|A|$  coincide cu numărul  $n$  – uplurilor  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots,$

$\alpha_n)$  ce se pot forma cu elemente din  $\mathbf{Z}_p$ , deci cu  $p^n$ .

**8.3.7. Propoziție** Fie  $(K, +, \cdot)$  un corp finit. Atunci:

a) Există  $p, n \in \mathbf{N}^*$ ,  $p$  prim, astfel încât  $\text{ord}(K) = p^n$

b) Orice funcție  $f: K \rightarrow K$  este polinomială.

Demonstrație: a) Rezultă imediat din propozițiile 8.3.5. și 8.3.6.

b) Fie  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  un corp finit și funcția  $f: K \rightarrow K$ .

Vom demonstra că găsim o funcție polinomială,  $g: K \rightarrow K$ ,

$g(x) = a_m \cdot x^{m-1} + a_{m-1} \cdot x^{m-2} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ , cu  $a_i \in K$ ,  $i = \overline{0, m}$ , astfel încât  $f = g$ .

Într-adevăr, impunând condițiile: 
$$\begin{cases} g(k_1) = f(k_1) \\ g(k_2) = f(k_2) \\ \vdots \\ g(k_m) = f(k_m) \end{cases} \quad \text{obținem un sistem în}$$

necunoscutele  $a_0, a_1, \dots, a_m$ . Sistemul este un sistem Cramer, căci determinantul

sistemului este un determinant de tip Vandermonde,  $V(k_1, k_2, \dots, k_m)$  și elementele  $k_1, k_2, \dots, k_m$  fiind distincte,  $V(k_1, k_2, \dots, k_m)$  este un element nenul al corpului  $K$  deci este inversabil în  $K$ . Așadar sistemul anterior are soluție unică în  $K$ , ceea ce implică  $f = g$ . În concluzie, orice funcție  $f: K \rightarrow K$  este o funcție polinomială de grad  $\leq \text{ord}(K) - 1$ .

**8.3.8. Propoziție** Fie  $(A, +, \cdot)$  este un inel cu  $0 \neq 1$ .

Dacă orice funcție  $f: A \rightarrow A$  este polinomială, atunci  $(A, +, \cdot)$  este corp.

Demonstrație: Fie  $a \in A$ ,  $a \neq 0$  și funcția  $f_a: A \rightarrow A$ ,  $f_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$

(1)

Din ipoteză,  $f_a$  este polinomială, adică  $\exists n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$ , astfel încât

$$f_a(x) = \alpha_n \cdot x^n + \alpha_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0, \quad \forall x \in A$$

(2)

$$a \neq 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f_a(0) = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \alpha_0 = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f_a(x) = \alpha_n \cdot x^n + \alpha_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot x, \quad \forall x \in A$$

(1)

$$\Rightarrow \alpha_n \cdot a^n + \alpha_{n-1} \cdot a^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot a = 1 \Leftrightarrow (\alpha_n \cdot a^{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot a^{n-2} + \dots + \alpha_1) \cdot a = 1.$$

Notând  $b = \alpha_n \cdot a^{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot a^{n-2} + \dots + \alpha_1$ , avem  $b \cdot a = 1$ . Demonstrăm că și  $a \cdot b = 1$ .

$$b \cdot a = 1 \stackrel{l \neq 0}{\Rightarrow} b \neq 0 \stackrel{\text{analog}}{\Rightarrow} \exists c \in A, c \cdot b = 1.$$

$$c \cdot b \cdot a = c \cdot (b \cdot a) = c \cdot 1 = c \quad \text{și} \quad c \cdot b \cdot a = (c \cdot b) \cdot a = 1 \cdot a = a \quad \text{și deci} \quad c = a, \text{ adică } a \cdot b = 1.$$

Așadar  $U(A) = A^*$ , adică  $(A, +, \cdot)$  este corp.

**8.3.9. Propoziție** Fie  $(A, +, \cdot)$  un inel comutativ cu  $0 \neq 1$ .

Dacă orice funcție  $f: A \rightarrow A$  este polinomială, atunci  $A$  este un corp finit.

Demonstrație: Funcția  $f_a$  din 8.3.8. este polinomială și dacă  $A$  este o mulțime infinită, atunci, din construcție,  $f_a$  are o infinitate de rădăcini. Din 8.3.8. rezultă că  $(A, +, \cdot)$  este corp și deci  $f_a = 0$ , contradicție cu modul în care am definit-o. Așadar  $(A, +, \cdot)$  este un corp finit.

**8.3.10 Propoziție** Fie  $(A, +, \cdot)$  un inel integru, de caracteristică  $p \in \mathbf{N}^*$ .

Atunci operațiile din  $A$  induc pe  $K = \{l \cdot k \mid k = 0, p-1\}$  o structură de corp.

Demonstrație: Inelul fiind integru,  $p$  este prim (8.3.5.). Enunțul este evident, datorită transportului de structură pe care îl putem construi, de la corpul  $(\mathbf{Z}_p, +, \cdot)$  la mulțimea  $K$ . Proprietatea la care ne referim este următoarea:

**Lemă** Fie inelul  $(A, +, \cdot)$ , mulțimea nevidă  $B$  și funcția bijectivă  $f: A \rightarrow B$ .

Pe  $B$  definim:  $u \oplus v = f(f^{-1}(u) + f^{-1}(v))$  și  $u \otimes v = f(f^{-1}(u) \cdot f^{-1}(v))$ . Atunci:

**a)**  $(B, \oplus, \otimes)$  este inel (funcția  $f$  realizează transportul de structură de la  $A$  la  $B$ )

**b)**  $(A, +, \cdot)$  comutativ  $\Rightarrow (B, \oplus, \otimes)$  comutativ

**c)**  $(A, +, \cdot)$  cu divizori ai lui  $0 \Rightarrow (B, \oplus, \otimes)$  cu divizori ai lui  $0$ .

**d)**  $a$  inversabil în  $A \Rightarrow f(a)$  inversabil în  $B$  și  $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$

Funcția  $f: \mathbf{Z}_p \rightarrow K$ ,  $f(\hat{k}) = k$ ,  $\forall k \in \mathbf{R}_p$  este bijectivă și asigură, conform lemei anterioare, transportul de structură de la  $\mathbf{Z}_p$  la  $K$ , operațiile fiind chiar cele induse de cele ale inelului  $A$ .

Într-adevăr,  $\forall u, v \in K$ ,  $u \oplus v = f(\hat{u} + \hat{v}) = (u + v)(\text{mod } p) \stackrel{\text{char}(A)=p}{=} u + v$

și  $u \otimes v = f(\hat{u} \cdot \hat{v}) = (u \cdot v)(\text{mod } p) \stackrel{\text{char}(A)=p}{=} u \cdot v$ .

Se poate demonstra (neelementar) următorul rezultat:

**8.3.11 Propoziție** Fie  $(A, +, \cdot)$  un inel integru, de caracteristică  $p \in \mathbf{N}^*$ , cu un număr finit de elemente inversabile.

Atunci operațiile din  $A$  induc pe  $L = U(A) \cup \{0\}$  o structură de corp.

## Bibliografie

1. **Ioan Băietu** – Proprietăți în inele integrale, G. M. 1 / 2001, pag. 5-8
2. **A. Bejancu** – Asupra problemei C:728, G.M. 2-3 / 1992, pag. 53-54
3. **M. Burtea, G. Burtea** – Matematică – clasa a XII-a – Elemente de analiză matematică. Algebră superioară, Ed. Carminis 2001
4. **M. Ghergu** – Asupra unei probleme de concurs, G. M. 11 / 1996, pag 541-544
5. **D. Isac** – Probleme de comutativitate, revista „Astra Matematică” vol 1, nr. 2, 1990, pag 32-34
6. **D. Isac** – Condiții suficiente pentru inelele Boole, G. M. 3 / 1995, pag. 107-108
7. **D. Andrica, N. Bișboacă I. Șerdean, M. Andronache, M. Piticari, D. Zaharia** – Matematică – Manual pentru clasa a XII-a, M1, Ed. Plus, 2002
8. **Colecția G. M.**

### Probleme rezolvate

R8.4.1. Fie  $(A, +, \cdot)$  un inel astfel încât  $\forall x \in A, x^3 - x^2 \in Z(A)$ .  
 Demonstrați că inelul este comutativ.

Soluție: Avem  $\forall x \in A, x^3 - x^2 \in Z(A)$  (1)  
 $x \leftarrow -x$  în (1)  $\Rightarrow \forall x \in A, -x^3 - x^2 \in Z(A)$  (2)  
 (1) - (2) și (1) + (2)  $\Rightarrow \forall x \in A, 2 \cdot x^3, 2 \cdot x^2 \in Z(A)$  (3)  
 $x \leftarrow x+1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \forall x \in A, (x+1)^3 - (x+1)^2 \in Z(A) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \forall x \in A, x^3 + x \in Z(A) \stackrel{-(1)}{\Rightarrow}$   
 $\Rightarrow \forall x \in A, x^2 - x \in Z(A)$  (4)

$1_A$  fiind endomorfism surjectiv al grupului  $(A, +)$ , relația (4) este chiar ipoteza teoremei lui Mac Hale, deci inelul este comutativ.

R8.4.2. Fie  $n \geq 2$  și  $G = U(\mathbf{Z}_n)$ . Dacă  $\forall x \in G, x^{-1} = x$ ,  
 a) demonstrați că  $\text{ord}(G)$  este o putere a lui 2.  
 b) determinați numărul  $n$ .

Olimpiada Națională, 1987

Soluție: Punctul a) rezultă din propoziția 2.1.9.

b) Conform punctului a), există  $k \in \mathbf{N}$  astfel încât  $\text{ord}(G) = \varphi(n) = 2^k$ .

Fie  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$ , cu  $p_1 < p_2 < \dots < p_t$  numere prime.

$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2-1} \cdots p_t^{\alpha_t-1} \cdot (p_1-1)(p_2-1) \cdots (p_t-1) = 2^k$ , de unde rezultă că  $p_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_t = 1$  și  $p_i = 2^{s_i} + 1$ , pentru  $i \in \{2, 3, \dots, t\}$ . Deci  $n = 2^{\alpha_1} \cdot p_2 \cdots p_t$ .

Atunci există izomorfismul de inele  $f: \mathbf{Z}_n \rightarrow \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbf{Z}_{p_t}$ ,  $f(\hat{x}) = (\hat{x}, \hat{x},$

$\dots, \hat{x})$  unde  $p = 2^{\alpha_1}$  și  $p_2 < \dots < p_t$  sunt numere prime impare

Evident, pentru  $i \geq 2$ ,  $\hat{x}$  de pe locul  $i$  este clasa lui  $x$  în  $\mathbf{Z}_{p_i}$  și clasa lui  $x$  în

$\mathbf{Z}_p$ , pentru  $i = 1$ .

Cum  $\hat{x}^2 = 1, \forall x \in G$ , avem că  $f(\hat{x}^2) = (\hat{x}^2, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^2) = f(\hat{1}) = (\hat{1}, \hat{1}, \dots, \hat{1})$ ,  
 adică  $\hat{x}^2 = \hat{1}$  în  $\mathbf{Z}_{p_i}$ .

Elementelor inversabile din  $\mathbf{Z}_n$  le corespund  $n$ -upluri de elemente inversabile din  $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbf{Z}_{p_t}$  și reciproc.

Cum  $(2, p_i) = 1$ , rezultă că  $\hat{2} \in U(\mathbf{Z}_{p_i}), \forall i \in \{2, \dots, t\}$ .

Elementul  $(\hat{1}, \hat{2}, \hat{2}, \dots, \hat{2})$  este inversabil în  $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbf{Z}_{p_t}$  și deci există

$\hat{x} \in U(\mathbf{Z}_n)$  astfel încât  $f(\hat{x}) = (\hat{1}, \hat{2}, \hat{2}, \dots, \hat{2})$ . Așadar, conform argumentației de mai înainte,  $\hat{2}^2 = \hat{1}$  în  $\mathbf{Z}_{p_i}$  și în concluzie,  $p_i = 3, \forall i \in \{2, \dots, t\}$ .



Aceasta implică  $t = 2$ , pentru că factorii primi din descompunerea lui  $n$  au fost luați distincți.

Deci  $n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1}$ , cu  $\beta_1 \geq 0$ . Cum  $(5, n) = 1$ , rezultă că  $\hat{5} \in U(\mathbf{Z}_n)$  și deci  $\hat{5}^2 = \hat{1}$  în  $\mathbf{Z}_n$ , ceea ce implică  $n \mid 24$  și deci  $n \in \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$  și toate aceste valori verifică enunțul.

R8.4.3. *Să se arate că produsul elementelor diferite de zero ale unui corp finit abelian este egal cu  $-1$ .*

*Olimpiada Națională, 1981*

Soluție: Este cunoscut următorul rezultat fundamental:

***Teorema lui Wedderburn*** *Orice corp finit este comutativ.*

Această teoremă, deși cu o demonstrație care depășește programa de liceu, simplifică multe probleme. În cazul de față, se poate renunța la condiția de comutativitate din ipoteză.

Fie  $(K, +, \cdot)$  corpul finit cu care lucrăm. Atunci  $(K^*, \cdot)$  este grup finit și produsul elementelor sale este egal cu produsul elementelor sale de ordin  $\leq 2$  (conform problemei P.1.3.1.).

Căutăm așadar eventualele elemente de ordin 2 ale lui  $(K^*, \cdot)$ .

Fie  $x \in K^*$  astfel încât  $x^2 = 1$ . Atunci  $(x-1)(x+1) = 0$  și cum corpul  $K$  nu are divizori ai lui zero, avem că  $x-1 = 0$  sau  $x+1 = 0$ .

Deci singurul element de ordin 2 al lui  $K$  este  $x = -1$  și în consecință, produsul tuturor elementelor nenule ale lui  $K$  este egal cu  $-1$ .

R8.4.4. *Fie  $(A, +, \cdot)$  un inel cu 5 elemente. Să se arate că 5 e cel mai mic număr  $n \in \mathbf{N}^*$ , astfel încât  $\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ ori}} = 0$  și să se demonstreze că  $A$  este*

*comutativ.*

*Olimpiada Județeană, 1981*

Soluție:  $(A, +)$  este un grup de ordinul 5 și din teorema lui Lagrange rezultă că  $\text{ord}(1) \mid 5$ . Cum  $\text{ord}(1) > 1$ , rezultă că  $\text{ord}(1) = 5$  și deci  $(A, +)$  este grup ciclic generat de 1. Elementele 0 și 1 comută cu toate celelalte.

Fie  $x, y \in A \setminus \{0, 1\}$ ,  $x = \underbrace{1+1+\dots+1}_{k \text{ ori}}$  și  $y = \underbrace{1+1+\dots+1}_{t \text{ ori}}$ . Avem atunci:

$$xy = (\underbrace{1+1+\dots+1}_{k \text{ ori}}) \cdot (\underbrace{1+1+\dots+1}_{t \text{ ori}}) = \underbrace{1+1+\dots+1}_{k \cdot t \text{ ori}} = (\underbrace{1+1+\dots+1}_{t \text{ ori}}) \cdot (\underbrace{1+1+\dots+1}_{k \text{ ori}}) =$$

$yx$

și deci inelul  $A$  este comutativ.

## 9. Ecuatii funcționale pe structuri algebrice

Structurile algebrice reprezintă abstractizări ale unor mulțimi, operații, proprietăți. Prin aceste abstractizări se câștigă în generalitate dar se pierde în particularitate. Între două structuri algebrice de același tip, funcțiile reprezentative sunt morfismele sau morfismele parțiale, motiv pentru care în general soluțiile ecuațiilor funcționale se reprezintă cu ajutorul morfismelor.

### 9.1. Ecuatii funcționale pe grupuri de numere reale

Una dintre primele ecuații funcționale, considerată de Cauchy înainte de 1900 a deschis cele două drumuri principale pe care s-a dezvoltat studiul ecuațiilor funcționale pur algebric sau cu condiții ce țin de analiza matematică. De fapt ecuația lui Cauchy,

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbf{R},$$

reprezintă ecuația endomorfismelor grupului aditiv  $(\mathbf{R}, +)$ . Aceste morfisme se numesc funcții aditive pe  $\mathbf{R}$ .

Pentru rezolvarea acestei ecuații folosirea doar a structurii de grup nu este suficientă, ideea care a condus după foarte multe studii la determinarea tuturor soluțiilor a fost de a folosi structura de spațiu vectorial a lui  $(\mathbf{R}, +)$  peste corpul  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ .

**Definiția 9.1.1.** Ecuația funcțională

$$(C): \begin{cases} f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ f(x+y) = f(x) + f(y); \quad x, y \in \mathbf{R} \end{cases}$$

se numește ecuația lui Cauchy iar soluțiile ei se numesc funcții aditive.

**Teorema 9.1.2.** Dacă  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție aditivă, atunci:

- $f(q) = qf(1)$ , pentru orice  $q \in \mathbf{Q}$
- $f(qx) = qf(x)$ , pentru orice  $q \in \mathbf{Q}$  și  $x \in \mathbf{R}$
- Mulțimea  $\text{Ker}f = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = 0\}$  este un subgrup al grupului  $(\mathbf{R}, +)$ , numit subgrupul perioadelor funcției  $f$ .
- Mulțimea  $\text{Fix}f = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = x\}$  este un subgrup al grupului  $(\mathbf{R}, +)$ , numit subgrupul punctelor fixe.
- Funcția  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = f(x) - f(1) \cdot x$ ,  $x \in \mathbf{R}$  este funcție aditivă și restricția ei la  $\mathbf{Q}$  este  $g|_{\mathbf{Q}} = 0$ .

Demonstrație. Din condiția  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ;  $x, y \in \mathbf{R}$ , prin inducție rezultă  $f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  și în particular  $f(nx) = nf(x)$ ;  $n \in \mathbf{N}$

$$f(0) = 0$$

$$f(-nx) + f(nx) = f(0) = 0, \text{ deci } f(-nx) = -nf(x).$$

$$\text{Deci } f(kx) = kf(x); k \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{R}.$$

$$\text{Avem: } f(x) = f\left(\frac{x}{n} + \dots + \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right), \text{ deci } f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x) \text{ și}$$

$$f\left(\frac{mx}{n}\right) = \frac{1}{n}f(mx) = \frac{m}{n}f(x); m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0, x \in \mathbf{R}, \text{ deci } f(qx) = qf(x); x \in \mathbf{R}, q \in \mathbf{Q}.$$

Pentru  $x=1$  obținem  $f(q) = qf(1)$ ,  $q \in \mathbf{Q}$ , deci punctele (a) și (b) din teoremă sunt demonstrate.

(c) Dacă  $x, y \in \text{Ker}f \Rightarrow f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow f(-y) = 0$  și din  $f(x-y) = f(x) + f(-y) = 0 \Rightarrow x-y \in \text{Ker}f$ .

(d) Dacă  $f(x) = x, f(y) = y$  atunci  $f(-y) = -f(y) = -y$  și  $f(x-y) = f(x) + f(-y) = x-y$ , deci  $x-y \in \text{Fix}f$ .

(e) Din (a)  $f(q) = qf(1)$ ;  $q \in \mathbf{Q}$ , deci  $f(q) = f(q) - qf(1) = 0$ . Avem  $g(x+y) = f(x+y) - (x+y)f(1) = f(x) - xf(1) + f(y) - yf(1) = g(x) + g(y)$   $x, y \in \mathbf{R}$ , deci  $g$  este aditivă.

**Observația 9.1.3.** • Din (a) rezultă că restricția la  $\mathbf{Q}$  a unei funcții aditive este perfect determinată de valoarea  $f(1)$ . (Dacă  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  și  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  sunt funcții aditive cu proprietatea  $f(1) = g(1)$  atunci  $f|_{\mathbf{Q}} = g|_{\mathbf{Q}}$ ).

• În general, dacă  $\lambda \in \mathbf{R}$  atunci mulțimea  $A_\lambda = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = \lambda x\}$  formează un subgrup în  $(\mathbf{R}, +)$ .

• Din punctul (c) rezultă că orice funcție aditivă  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este de forma  $f(x) = g(x) + ax$ , unde  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este funcția aditivă și  $g|_{\mathbf{Q}} = 0$ , deci clasa funcțiilor în care se caută soluțiile ecuației lui Cauchy se poate restrânge la funcțiile ce au restricția la  $\mathbf{Q}$ , funcția nulă.

**Observația 9.1.4.** se poate arăta că dacă restrângem clasa funcțiilor  $f$  în care căutăm soluțiile atunci în oricare din clasele de funcții: continue, local mărginite, monotone, singurele soluții sunt de forma  $f(x) = ax$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$  unde  $a \in \mathbf{R}$  este o constantă arbitrară.

**Definiția 9.1.5.** O funcție discontinuă  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  care verifică ecuația lui Cauchy:  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  $x, y \in \mathbf{R}$ , se numește funcție Hamel.

**Observația 9.1.6.** Funcțiile Hamel sunt soluțiile nebanale ale ecuației Cauchy, deci funcțiile aditive care nu sunt de forma  $f(x) = ax, x \in \mathbf{R}$ . Determinarea funcțiilor Hamel necesită câteva cunoștințe care nu sunt înglobate în cursurile standard.

**Definiția 9.1.7.** Se numește bază Hamel, orice bază a spațiului vectorial  $(\mathbf{R}, +)$  peste corpul  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ .

**Observația 9.1.8.** (a) Dacă  $(K, +, \cdot)$  este un corp comutativ și  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$  este un subcorp al său, atunci grupul  $(K, +)$  poate fi organizat ca spațiu vectorial peste corpul  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ , cu ajutorul aplicației  $\varphi: \mathbf{Q} \times K \rightarrow K$ ,  $\varphi(q, k) = q \cdot k$ .

(b) Dacă  $H = \{h_i \mid i \in I\}$  este o bază Hamel atunci pentru orice  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  există și sunt unici:  $i_1(x), \dots, i_n(x) \in I, q_1(x), \dots, q_n(x) \in \mathbf{Q}^*$  astfel încât

$$x = \sum_{k=1}^n q_k(x) h_{i_k}(x)$$

(Dacă  $q_k \in \mathbf{Q}, h_k \in H, k = \overline{1, n}$  și  $\sum_{k=1}^n q_k \cdot h_k = 0$ , atunci  $q_k = 0, k = \overline{1, n}$ ).

(c) Dacă  $h_1, h_2 \in \mathbf{R}$  și sunt independente peste  $\mathbf{Q}$ , atunci mulțimea  $\mathbf{Z}[h_1, h_2] = \{n_1 h_1 + n_2 h_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbf{Z}\}$  este densă în  $\mathbf{R}$ .

**Teorema 9.1.9.** Dacă  $H = \{h_i \mid i \in I\}$  este o bază Hamel, atunci cardinalul său este  $|H| = |I| = c$  (puterea continuului).

Demonstrație. Dacă  $H$  ar fi numărabilă atunci mulțimile

$$A_n = \{q_1 h_1 + \dots + q_n h_n \mid q_k \in \mathbf{Q}, k = \overline{1, n}\}$$

ar fi numărabile și la fel mulțimea  $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n = \mathbf{R}$ , contradicție ( $\aleph_0 \neq c$ )

Dacă  $H$  este nenumărabilă ( $|H| > \aleph_0$ ) arătăm că  $|H| = |\mathbf{Q}(H)|$ , unde  $\mathbf{Q}(H)$  este subspațiul generat de  $H$  peste  $\mathbf{Q}$

$$(\mathbf{Q}(H)) = \left\{ \sum_{k=1}^n q_k h_{i_k} \mid n \in \mathbf{N}, q_k \in \mathbf{Q}, h_{i_k} \in H \right\}.$$

Cardinalul mulțimii părților cu nelemente din  $H$  este  $|H|^n = |H|, n \in \mathbf{N}$ . Pentru fiecare parte  $\{h_{i_1}, \dots, h_{i_n}\} \subset H$  avem  $|\mathbf{Q}(\{h_{i_1}, \dots, h_{i_n}\})| = |\mathbf{Q}^n| = \aleph_0$ , deci  $\mathbf{Q}(H) = \aleph_0 |H| = |H|$  și cum  $\mathbf{Q}(H) = \mathbf{R}$  rezultă  $|H| = c$ .

**Observația 9.1.10.** (a) Dimensiunea lui  $\mathbf{R}$  ca spațiu vectorial peste  $\mathbf{Q}$  este  $c$ .

(b) Pentru orice bază Hamel  $H$ , există o funcție bijectivă  $\varphi: [0,1] \rightarrow H$ .  
Notând  $\varphi(t) = h_t$  rezultă  $H = \{h_t \mid t \in [0,1]\}$ .

Folosirea de către G. Hamel a bazelor Hamel, a fost decisivă în tentativa de rezolvare completă a ecuației funcționale Cauchy.

**Observația 9.1.11.** Dacă  $f, g$  sunt funcții aditive, iar  $a, b$  sunt numere reale, atunci funcțiile  $a \cdot f + b \cdot g$  și  $f \circ g$  sunt funcții aditive. Mulțimea funcțiilor aditive formează un spațiu vectorial real și un inel.

**Teorema 9.1.12.** Orice funcție aditivă  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este un endomorfism al spațiului vectorial  $\mathbf{R}$  peste  $\mathbf{Q}$ .

Demonstrație. Dacă  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție aditivă avem:

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f(x-x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Pentru  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) + \dots + f(x_n)$ , deci  $f(nx) = nf(x)$ .

$$\text{Pentru } m \in \mathbf{N}^*, f(x) = f\left(m \frac{x}{m}\right) = mf\left(\frac{x}{m}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m} f(x).$$

$$\text{Pentru } q \in \mathbf{Q}_+, q = \frac{n}{m} \text{ avem } f(qx) = f\left(n \cdot \frac{1}{m} \cdot x\right) = nf\left(\frac{1}{m}x\right) = \\ = \frac{n}{m} f(x) = qf(x), \text{ deci } f \text{ este } \mathbf{Q}\text{-omogenă.}$$

Pentru  $x, y \in \mathbf{R}$ ,  $r, q \in \mathbf{Q}$  avem:

$$f(rx + qy) = f(rx) + f(qy) = rf(x) + qf(y)$$

deci  $f$  este  $\mathbf{Q}$ -liniară, adică  $f$  este endomorfism.

**Teorema 9.1.13.** Dacă  $H \subset \mathbf{R}$  este o bază Hamel și  $f_H: H \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție arbitrară, atunci există o unică funcție aditivă  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  pentru care restricția  $f|_H = f_H$ .

Demonstrație. Un endomorfism este unic determinat de valorile lui pe o bază. Dacă  $x \in \mathbf{R}$  și exprimarea lui în baza  $H$  este  $x = \sum_{k=1}^n q_k h_k$ ,  $q_k \in \mathbf{Q}$ ,

$h_k \in H$  atunci definim  $f(x) = \sum_{k=1}^n q_k f_H(h_k)$  care definește unica prelungire  $\mathbf{Q}$ -liniară a funcției  $f_H$ .

**Observația 9.1.14.** (a) Funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este funcție aditivă dacă și numai dacă pentru orice bază Hamel  $H = \{h_i \mid i \in I\}$  există o mulțime

$\{\alpha_i \mid i \in I\} \subset \mathbf{R}$  astfel ca pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ , dacă  $x = \sum_{k=1}^n q_k h_k$ ,  $q_k \in \mathbf{Q}$ ,  $h_k \in H$  este scrierea unică a lui  $x$  în baza  $H$ , atunci

$$f(x) = \sum_{k=1}^n q_k \alpha_k.$$

(b) Cardinalul mulțimii funcțiilor aditive este  $c^c > c$  (mulțimea funcțiilor aditive este în bijecție cu mulțimea tuturor funcțiilor  $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ ).

(c) Dacă  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție aditivă și  $H$  o bază Hamel, atunci mulțimea  $f(H)$  este bază Hamel dacă și numai dacă funcția  $f$  este bijectivă (izomorfism de  $\mathbf{Q}$ -spații vectoriale).

Alte ecuații funcționale de tip Cauchy sunt:

$$(1) \begin{cases} f: \mathbf{R} \rightarrow (0, \infty) \\ f(x+y) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbf{R} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R} \\ f(xy) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbf{R} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \\ f(xy) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbf{R} \end{cases}$$

**Observația 9.1.15.** O funcție  $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, \infty)$  care verifică ecuația (1) este un morfism de grupuri, de la grupului aditiv  $(\mathbf{R}, +)$  la grupul multiplicativ  $((0, \infty), \cdot)$ , rezolvarea ecuației (1) revine la determinarea acestor morfisme. Se cunoaște că cele două grupuri sunt izomorfe prin izomorfismul  $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$

$$\varphi(x) = \ln x, \quad x \in (0, \infty).$$

Avem  $\mathbf{R} \xrightarrow{f} (0, \infty) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}$ , funcția  $f$  este morfism dacă și numai dacă funcție  $\varphi \circ f = g$  este endomorfism al grupului aditiv  $(\mathbf{R}, +)$ , deci funcție aditivă. Se obține  $f = \varphi^{-1} \circ g = e^g$ .

**Observația 9.1.16.** O funcție  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  care verifică ecuația (2) este morfism de grupuri, de la grupul multiplicativ  $((0, \infty), \cdot)$  la grupul aditiv  $(\mathbf{R}, +)$ . Folosind izomorfismul  $\psi: \mathbf{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $\psi(x) = e^x$ , între aceste grupuri, avem:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\psi} (0, \infty) \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

Funcția  $f$  este morfism dacă și numai dacă funcția  $g = f \circ \psi$  este endomorfism al grupului aditiv  $(\mathbf{R}, +)$ , deci funcția  $g$  este aditivă. Se obține:

$$f = g \circ \psi^{-1} \Leftrightarrow f(x) = g(\ln x), \quad x \in (0, \infty).$$

**Observația 9.1.17.** Funcțiile nenule care verifică ecuația (3) sunt endomorfismele grupului multiplicativ  $((0, \infty), \cdot)$ . Folosind izomorfismele  $\varphi(x) = \ln x$  și  $\psi(x) = e^x$  cu grupul aditiv  $(\mathbf{R}, +)$  avem:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\psi} (0, \infty) \xrightarrow{f} (0, \infty) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}$$

Funcția  $f$  este endomorfism al grupului  $((0, \infty), \cdot)$  dacă și numai dacă funcția  $g = \varphi \circ f \circ \psi$  este endomorfism al grupului aditiv  $(\mathbf{R}, +)$ , deci funcția  $g$  este aditivă.

Se obține  $f(x) = e^{g(\ln x)}$ ,  $x \in (0, \infty)$ .

### Bibliografie

J.Dhombres: Some aspect of functional equations, Chualalongkorn Univ. Bangkok 1979

M.Kuczma: An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Univ. Slaski, Warszawa 1985

V.Pop: Funcții Hamel, G.M-A 2/2000

V.Pop: Ecuații funcționale, Ed.Mediamira Cluj, 2002

### Probleme rezolvate

R9.2.1. Să se determine funcțiile  $f$  și  $g : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  astfel ca mulțimea matricelor  $M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ f(x,y) & g(x,y) \end{bmatrix}, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z} \right\}$  să formeze un subinel al inelului  $(M_2(\mathbf{Z}), +, \cdot)$ .

Soluție. Notăm  $A(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \\ f(x,y) & g(x,y) \end{bmatrix}$ . Mulțimea  $M$  trebuie să fie stabilă față de operația de adunare, deci pentru orice  $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbf{Z}$ , există  $x_3, y_3 \in \mathbf{Z}$  astfel ca  $A(x_1, y_1) + A(x_2, y_2) = A(x_3, y_3)$ . Obținem pentru  $f$  și  $g$  relațiile

$$(1) \quad \begin{cases} f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \\ g(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2) \end{cases}$$

Dacă punem  $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$  obținem  $f(0,0) = g(0,0) = 0$ .

Dacă punem  $x_1 = y_2 = 0, x_2 = x, y_1 = y$  avem:

$$\begin{cases} f(x,y) = f(x,0) + f(0,y) = f_1(x) + f_2(y) \\ g(x,y) = g(x,0) + g(0,y) = g_1(x) + g_2(y) \\ f_1(x) = f(x,0), \quad f_2(y) = f(0,y) \end{cases}$$

unde am notat:

$$g_1(x) = g(x,0), \quad g_2(y) = g(0,y)$$

Dacă în relațiile (1) luăm  $y_1 = y_2 = 0$  obținem:

$$\begin{cases} f_1(x_1 + x_2) = f_1(x_1) + f_1(x_2) \\ g_1(x_1 + x_2) = g_1(x_1) + g_1(x_2) \end{cases} \quad x_1, x_2 \in \mathbf{Z}$$

și pentru  $x_1 = x_2 = 0$ , aceleași relații pentru funcțiile  $f_2$  și  $g_2$ , deci funcțiile  $f_1, f_2, g_1, g_2$  sunt aditive.

Din  $h : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x+y) = h(x) + h(y), x, y \in \mathbf{Z}$  rezultă  $h(0) = 0, h(n) = nh(1), h(-n) = -h(n)$  deci  $h(x) = xh(1), x \in \mathbf{Z}$ .

Atunci  $f_1(x) = xf_1(1), f_2(x) = xf_2(1), g_1(x) = xg_1(1)$  și  $g_2(x) = xg_2(1)$ .

Punând condiția ca matricea unitate să fie în  $M$

$$\begin{aligned} I_2 \in M &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f(1,0) & g(1,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow f(1,0) = 0, \quad g(1,0) = 1 \Leftrightarrow f_1(1) \text{ și } g_1(1) = 1 \end{aligned}$$

deci



$$f_1(x) = 0, \quad x \in \mathbf{Z} \quad \text{și} \quad g_1(x) = x, \quad x \in \mathbf{Z}$$

Notând  $f_2(1) = a \in \mathbf{Z}$ ,  $g_2(1) = b \in \mathbf{Z}$  obținem:

$$f(x, y) = ay \quad \text{și} \quad g(x, y) = x + by, \quad \text{pentru } (x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}.$$

Se verifică ușor că aceste condiții sunt și suficiente.

R9.2.2. Să se determine toate funcțiile  $f$  și  $g : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ , pentru care  $(M, +, \cdot)$  formează un inel și  $I_2 \in M$ , unde

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & f(x, y) \\ g(x, y) & y \end{bmatrix}, x, y \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Soluție. Notăm  $A(x, y) = \begin{bmatrix} x & f(x, y) \\ g(x, y) & y \end{bmatrix}$ .

Din  $A(x_1, y_1) + A(x_2, y_2) \in M$  rezultă:

$$\begin{cases} f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \\ g(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2) \end{cases}$$

Pentru

$$y_1 = y_2 = 0 \Rightarrow f(x_1 + x_2, 0) = f(x_1, 0) + f(x_2, 0) \Rightarrow f(n, 0) = nf(1, 0), \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{și} \quad f(-n, 0) = -nf(1, 0), \quad \text{deci } f(k, 0) = ak, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{unde}$$

$$a = f(1, 0) \in \mathbf{Z}.$$

Analog se deduce  $f(0, k) = bk, k \in \mathbf{Z}$ , deci funcțiile  $f$  și  $g$  sunt de forma:

$$\begin{cases} f(x, y) = ax + by \\ g(x, y) = cx + dy \end{cases} \quad x, y \in \mathbf{Z}$$

$$\text{Din } I_2 \in M \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f(1, 1) \\ g(1, 1) & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{deci } f(1, 1) = g(1, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b = c + d = 0.$$

Se verifică ușor că mulțimea

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & a(x - y) \\ c(x - y) & y \end{bmatrix}, x, y \in \mathbf{Z} \right\}$$

formează cu adunarea și înmulțirea o structură de inel unitar.

În concluzie funcțiile sunt:

$$\begin{cases} f(x, y) = a(x - y), & (x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \\ g(x, y) = c(x - y), & (x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \end{cases}$$

unde  $a \in \mathbf{Z}, c \in \mathbf{Z}$  sunt arbitrare.

R9.2.3. Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $f : G \rightarrow G$  o funcție care satisface ecuația funcțională

$$f(xf(y)) = f(x)y, \quad x, y \in G.$$

Să se arate că  $f$  este un automorfism cu proprietatea  $f \circ f = 1_G$ .

Soluție. Dacă  $f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow f(x)y_1 = f(x)y_2$  deci funcția  $f$  este injectivă.

Pentru  $x = y = 1$  (elementul neutru al grupului) avem:

$$f(f(1)) = f(1) \Rightarrow f(1) = 1.$$

Pentru  $x = 1 \Rightarrow f(f(y)) = y, y \in G$ , deci  $f \circ f = 1_G$  ( $f$  este bijectivă și  $f^{-1} = f$ ).

Pentru orice  $z \in G$ , există  $y \in G$  astfel ca  $z = f(y), y = f(z)$  și ecuația se scrie  $f(xz) = f(x)f(z), x, z \in G$ , deci  $f \in \text{Aut}(G)$ . Reciproc se verifică ușor că orice automorfism involutiv este soluție a ecuației date.

R9.2.4. Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $f : G \rightarrow G$  o funcție cu proprietatea

$$E : f(f(x) \cdot f(y)) = x \cdot y, \quad \text{pentru orice } x, y \in G.$$

1. Să se arate că există  $a \in G$  și  $g : G \rightarrow G$  un morfism de grupuri, astfel ca  $g \circ g = 1_G$  și  $f(x) = ag(x), x \in G$ .

2. Să se determine toate funcțiile  $f$  cu proprietatea (E) în cazul  $(G, \cdot) = (U_6, \cdot)$  unde  $U_6 = \{z \in \mathbf{C} \mid z^6 = 1\}$ .

Soluție. 1) Dacă  $f$  verifică ecuația funcțională (E) atunci:  $f$  este bijectivă pentru  $x = 1$

$$f(f(1)f(y_1)) = y_1$$

$$f(f(1)f(y_2)) = y_2$$

$$f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2 = f \text{ este injectivă.}$$

Pentru  $f \in G$  avem  $f(f(1)f(y)) = y$ , deci  $f$  este surjectivă.

Dacă  $f(1) = a$ , atunci  $ax = xa, x \in G, a^3 = 1$  și  $f(f(x)) = a^2x, x \in G$ .

$$\text{Pentru } \left. \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow f(af(y)) = y \\ y = 1 \Rightarrow f(f(x)a) = x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{x=y} \\ \Rightarrow (faf(x)) = f(f(x)a) \end{array}$$

$$\xrightarrow{f_{inj}} af(x) = f(x)a \xrightarrow{f_{surj}} az = za, z \in G.$$

Pentru  $x = y = 1 \Rightarrow f(a^2) = 1$  și pentru  $x = a^2 \Rightarrow f(f(y)) = a^2y$ .

Pentru  $x = y = a^2 \Rightarrow f(1) = a^4 \Leftrightarrow a = a^4 \Rightarrow a^3 = 1$ .

Punând  $x \rightarrow f(x), y \rightarrow f(y)$ , rezultă:

$$f(a^4xy) = f(x)f(y) \Leftrightarrow f(axy) = f(x)f(y).$$

Făcând substituția  $f(x) = ag(x)$ , obținem pentru  $g$  relația  $g(axy) = ag(x)g(y)$ , din care pentru  $y = 1 \Rightarrow g(ax) = ag(x)$ , deci

$$g(zy) = g(z)g(y)$$

unde  $z = ax$  și  $y$  sunt arbitrare.

Din  $f(f(y)) = a^2 y$ , rezultă  $g(g(y)) = y \Leftrightarrow g^2 = 1_G$  și din  $f(f(1)) = a^2 \Leftrightarrow f(a) = a^2 \Rightarrow a^2 = ag(a) \Rightarrow g(a) = a$ .

R9.2.5. Fie  $(G, \cdot)$  un grup.

a) Să se arate că dacă ecuația funcțională

$$(E): \begin{cases} f: G \rightarrow G \\ f(xf(y)) = yf(x^{-1}), \quad x \in G, \quad y \in G \end{cases}$$

are soluție, atunci grupul  $G$  este comutativ.

b) Să se arate că singurele funcții  $f$  care verifică  $(E)$  sunt automorfismele lui  $G$  pentru care  $f \circ f = 1_G$ .

c) Dacă  $G = K_4$  (grupul lui Klein), atunci mulțimea soluțiilor ecuației  $(E)$  formează un grup izomorf cu  $K_4$ .

Soluție. a) Pentru  $x = 1 \Rightarrow f(f(y)) = yf(1)$ . Dacă

$f(f(y_1)) = f(f(y_2)) \Rightarrow y_1 f(1) = y_2 f(1) \Rightarrow y_1 = y_2$  deci  $f$  este injectivă.

Pentru  $x = y = 1 \Rightarrow f(f(1)) = f(1) \stackrel{inj}{\Rightarrow} f(1) = 1$  și  $f(f(y)) = y$  deci  $f$  este bijectivă și  $f^{-1} = f$ .

Pentru  $y = 1$  rezultă  $f(x) = f(x^{-1}) \stackrel{inj}{\Rightarrow} x = x^{-1} \Rightarrow x^2 = 1, x \in G$ .

Din  $x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1 \Rightarrow (xy)^2 = x^2 y^2 \Rightarrow x \cdot y \cdot x \cdot y = x \cdot x \cdot y \cdot y$   
 $\Rightarrow yx = xy, x, y \in G \Rightarrow G$  este comutativ.

b) Din  $f(f(y)) = y$  și  $f(x^{-1}) = f(x)$ , ecuația se scrie

$$f(xf(y)) = f(f(y))f(x), x, y \in G,$$

deci

$$f(xz) = f(x)f(z), x, z \in G.$$

Reciproc se verifică relația dată pentru orice automorfism  $f$  cu  $f^2 = 1_G$ .

c) Fie  $K_4 = \{1, a, b, c\}$ ,  $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ ,  $ab = c$ ,  $bc = a$ ,  $ca = b$ . Trebuie determinate morfismele  $f: K \rightarrow K$  cu  $f^{-1} = f$ . Evident  $f(1) = 1$  și pentru că  $f$  este bijectivă, rezultă că  $f$  realizează o permutare  $\tau$  a mulțimii  $\{a, b, c\}$  cu

$$\tau^2 = e. \text{ Acestea sunt } \tau_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix},$$

$\tau_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$  și obținem funcțiile:  $f_1, f_a, f_b, f_c$  definite prin tabelul de valori

$$\begin{array}{r}
1 \quad a \quad b \quad c \\
f_1: 1 \quad a \quad b \quad c \\
f_a: 1 \quad a \quad c \quad b \\
f_b: 1 \quad c \quad b \quad a \\
f_c: 1 \quad b \quad a \quad c
\end{array}$$

Aplicația  $1 \rightarrow f_1, a \rightarrow f_a, b \rightarrow f_b, c \rightarrow f_c$  este un izomorfism de la  $K$  la  $(\{f_1, f_a, f_b, f_c\}, \circ)$ .

R9.2.6. Fie  $M$  o mulțime finită și  $G = P(M)$  mulțimea părților sale. Să se determine toate funcțiile  $f: G \times G \rightarrow G$ , care determină pe  $G$  o lege de compoziție  $f(X, Y) = X * Y$ , astfel ca  $(G, *)$  să fie grup cu proprietatea că  $X * Y \subset X \cup Y$ , pentru orice  $X, Y \in P(M)$ .

Soluție. Din  $\phi * \phi \subset \phi \Rightarrow \phi * \phi = \phi \Rightarrow \phi$  este element neutru. Arătăm prin inducție după cardinalul mulțimii  $X$  că  $X * X = \phi$ , pentru orice  $X \in P(M)$ .

Pentru  $|X| = 0, X = \phi$  și  $X * X = \phi$ .

Fie  $A \in P(M)$ , cu  $|A| = n + 1$ .

Dacă  $X \subset A$  este arbitrară, atunci  $X * A \subset X \cup A = A$ , deci translația  $t_A: P(A) \rightarrow P(A), t_A(X) = X * A$  fiind injectivă, este surjectivă ( $P(A)$  este finită), deci există  $B \subset A$  astfel ca  $t_A(B) = \phi \Leftrightarrow B * A = \phi$ . Dacă presupunem că  $B \neq A$ , atunci  $|B| \leq n$  și din ipoteza de inducție  $B * B = \phi$ . Din  $B * B = B * A$ , rezultă  $B = A$ , deci  $A * A = \phi$ .

Arătăm prin inducție după  $|B|$  că dacă  $A \cap B = \phi$ , atunci  $A * B = A \cup B$ .

Pentru  $|B| = 0, B = \phi$  și  $A * \phi = A = A \cup \phi$ .

Dacă  $|B| = n + 1, B = B_n \cup \{y\}$  cu  $|B_n| = n, B_n \cap A = \phi, y \notin A$ . Atunci

$$\begin{aligned}
A * B &= A * (B_n \cup \{y\}) = A * (B_n * \{y\}) = (A * B_n) * \{y\} = \\
&= (A * B_n) \cup \{y\} = A \cup B_n \cup \{y\} = A \cup B.
\end{aligned}$$

Arătăm că

$$X * Y = X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$$

Fie  $X \cap Y = Z, X - Z = U, Y - Z = V$ , unde  $U, V, Z$  sunt disjuncte.

$$\begin{aligned}
X * Y &= (Z \cup U) * (Z \cup V) = (U * Z) * (Z * V) = U * Z * Z * V = U * V = \\
&= U \cup V = (X - Z) \cup (Y - Z) = (X - Y) \cup (Y - X) = X \Delta Y.
\end{aligned}$$

Deci singura funcție este  $f: P(M) \times P(M) \rightarrow P(M)$

$$f(X, Y) = X \Delta Y, \quad X, Y \in P(M)$$

( $\Delta$  = diferență simetrică).

R9.2.7. Fie  $M$  o mulțime finită și  $P(M)$  mulțimea părților sale. Să se determine toate funcțiile  $f$  și  $g : P(M) \times P(M) \rightarrow P(M)$  care determină operațiile  $X * Y = f(X, Y)$ ,  $X \circ Y = g(X, Y)$ , astfel ca  $(P(M), *, \circ)$  să fie un inel unitar și să fie verificate incluziunile:

$$X * Y \subset X \cup Y \quad \text{și} \quad X \circ Y \subset X \cap Y,$$

pentru orice  $X, Y \in P(M)$ .

Soluție. Vom arăta că signura structură de inel  $(P(M), *, \circ)$  care verifică condițiile  $X * Y \subset X \cup Y$  și  $X \circ Y \subset X \cap Y$  este inelul Boolean  $(P(M), \Delta, \cap)$ .

În problema R9.2.6 s-a arătat că singura structură de grup pe  $P(M)$  care verifică relația  $X * Y \subset X \cup Y$  este diferența simetrică, deci  $f(X, Y) = X \Delta Y$ .

Vom arăta în continuare că singura operație de monoid pe  $P(M)$ , distributivă față de  $\Delta$  și verificând condiția  $X \circ Y \subset X \cap Y$ , este  $g(X, Y) = X \cap Y$ .

Elementul neutru în monoidul  $(P(M), \circ)$  este  $E = M$ . ( $X = X \circ E \Rightarrow X \subset X \cap E$  pentru orice  $X \subset M \Rightarrow M \subset M \cap E \Rightarrow M = E$ ).

Dacă  $x, y \in M$ ,  $x \neq y$  atunci

$$\{x\} \circ \{y\} = \emptyset$$

$$\{x\} \circ \{x\} \subset \{x\} \cap \{x\} = \{x\}, \quad \text{deci} \quad \{x\} \circ \{x\} \in \{\emptyset, \{x\}\}.$$

$$\text{Dar } \{x\} \circ M = \{x\}, \quad M = \{x_1, y_1, \dots, y_k\} = \{x\} \Delta \{y_1\} \Delta \dots \Delta \{y_k\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \{x\} \circ M &= (\{x\} \circ \{x\}) \Delta (\{x\} \circ \{y_1\}) \Delta \dots \Delta (\{x\} \circ \{y_k\}) = \{x\} \circ \{x\} \\ &\Rightarrow \{x\} \circ \{x\} = \{x\} \end{aligned}$$

$$\text{Folosind distributivitatea } A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} = a_1 \Delta a_2 \Delta \dots \Delta a_p,$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\} = b_1 \Delta b_2 \Delta \dots \Delta b_q \Rightarrow A \circ B = A \cap B, \quad A, B \in P(M).$$

Deci funcțiile căutate sunt unice:

$$f(X, Y) = X \Delta Y \quad \text{și} \quad g(X, Y) = X \cap Y, \quad X, Y \in P(M).$$

## 10. Polinoame cu coeficienți într-un inel comutativ

### 10.1. Ireductibilitate și descompunere în $\mathbf{Z}_p[X]$ .

Unele ecuații algebrice cu coeficienți întregi se rezolvă spectaculos în  $\mathbf{Z}$  folosind redusele acestora într-un corp  $\mathbf{Z}_p$  convenabil ales. De aceea, în cele ce urmează vom prezenta un criteriu de ireductibilitate în inelul  $\mathbf{Z}[X]$  – criteriul lui Schönemann – în care se folosește redusul modulo  $p$  ( $p \in \mathbf{N}$  număr prim) al unui polinom cu coeficienți întregi și apoi vom evidenția câteva proprietăți ale simbolului lui Legendre care conduc la stabilirea ireductibilității sau reductibilității unor polinoame din  $\mathbf{Z}_p[X]$ . Considerăm cunoscute noțiunile despre polinoamele cu coeficienți într-un inel din programa școlară, precum și teoremele lui Euler și Fermat pentru  $\mathbf{Z}_n$ .

**10.1.1. Definiție** Fie  $(K, +, \cdot)$  un corp comutativ.  $f \in K[X]$  cu  $\text{grad}(f) = n \geq 1$  se numește reductibil (peste corpul  $K$ ) dacă există  $g, h \in K[X]$ , ambele de grad strict mai mic decât  $n$ , astfel încât  $f = g \cdot h$ . În caz contrar, polinomul  $f$  se numește ireductibil (peste corpul  $K$ ).

**10.1.2. Definiție** Fie  $p \geq 2$  un număr prim și  $f \in \mathbf{Z}[X]$ ,  $\text{grad}(f) = n$ ,  
 $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ .  
Polinomul  $\bar{f} \in \mathbf{Z}_p[X]$ ,  $\bar{f}(X) = \bar{a}_n X^n + \bar{a}_{n-1} X^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 X + \bar{a}_0$ , unde  $\bar{a}_k$  este clasa lui  $a_k$  din  $\mathbf{Z}_p$  se numește polinomul redus modulo  $p$  al lui  $f$ .

**10.1.3. Observație**  $\text{grad}(\bar{f}) \leq \text{grad}(f)$

#### **10.1.4. Criteriul de ireductibilitate al lui Schönemann**

Fie  $p \geq 2$  un număr prim și  $f \in \mathbf{Z}[X]$  un polinom monic (cu coeficientul dominant egal cu 1) de forma  $f(X) = g^n(X) + p \cdot h(X)$ , unde  $g, h \in \mathbf{Z}[X]$  și  $n \in \mathbf{N}$ . Fie  $\bar{g}$  și  $\bar{h}$  redusele polinoamelor  $g$  și  $h$  în  $\mathbf{Z}_p[X]$ . Dacă  $\bar{g}$  este ireductibil în  $\mathbf{Z}_p[X]$  și  $\bar{g}$  nu divide  $\bar{h}$ , atunci  $f$  este ireductibil în  $\mathbf{Z}[X]$ .

*Demonstrație:*  $f$  fiind un polinom monic,  $\text{grad}(h) < n \cdot \text{grad}(g)$  și  $g$  este (poate fi ales) de asemenea polinom monic. Rezultă și că  $n \neq 0$ .

Presupunem că  $f$  este reductibil în  $\mathbf{Z}[X] \Rightarrow \exists f_1, f_2 \in \mathbf{Z}[X]$ , neconstante, astfel încât  $f = f_1 \cdot f_2$ . Atunci și  $\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = \bar{f} = \bar{g}^n$ .

Cum  $\bar{g}$  este ireductibil în  $\mathbf{Z}_p[X]$  rezultă că există  $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ ,  $n_1 + n_2 = n$ ,  $\bar{f}_1 = \bar{g}^{n_1}$ ,  $\bar{f}_2 = \bar{g}^{n_2}$ .  $\bar{g}$  fiind un polinom monic, rezultă că există  $h_1, h_2 \in \mathbf{Z}[X]$ ,  $\text{grad}(h_i) < n_i \cdot \text{grad}(\bar{g})$ ,  $\forall i = \overline{1, 2}$  astfel încât  $f_1 = \bar{g}^{n_1} + p \cdot h_1$ ,  $f_2 = \bar{g}^{n_2} + p \cdot h_2$ .  
 Atunci:  $\bar{g}^n + p \cdot h = (\bar{g}^{n_1} + p \cdot h_1) \cdot (\bar{g}^{n_2} + p \cdot h_2) \Rightarrow h = h_2 \cdot \bar{g}^{n_1} + h_1 \cdot \bar{g}^{n_2} + p \cdot h_1 h_2$ .  
 Dacă  $n_1, n_2 \in (0, \infty)$ , din relația anterioară rezultă că  $\bar{g} \mid \bar{h}$ , fals.  
 Atunci  $n_1 = 0$  sau  $n_2 = 0$ , adică  $\text{grad}(f_2) = \text{grad}(f)$  sau  $\text{grad}(f_1) = \text{grad}(f)$ , deci  $f$  este ireductibil în  $\mathbf{Z}[X]$ .

### 10.1.5. Exemple

1) Fie  $n \in \mathbf{N}^*$ . Polinomul  $f(X) = (X^2 + 4)^n + 7 \cdot (X^{2n-1} + 7)$  este ireductibil în  $\mathbf{Z}[X]$ .

Într-adevăr, fie polinoamele  $g, h \in \mathbf{Z}[X]$ ,  $g(X) = X^2 + 4$ ,  $h(X) = X^{2n-1} + 7$ .  
 Atunci  $\bar{g} = X^2 + 4$  este ireductibil în  $\mathbf{Z}_7[X]$  iar  $\bar{h} = X^{2n-1}$  nu se divide cu  $\bar{g}$  în același inel. Din criteriul lui Schönemann rezultă că  $f$  este ireductibil în  $\mathbf{Z}[X]$ .

2) Fie  $p$  un număr prim de forma  $4k + 3$ , iar  $a, b \in \mathbf{Z}$  astfel încât  $p \nmid a$ ,  $p \nmid (b-1)$  și  $p^2 \nmid (b-1)$ . Polinomul  $f(X) = X^{2p} + aX + b$  este ireductibil în  $\mathbf{Z}[X]$ .

Într-adevăr, scriind  $f(X) = (X^2 + 1)^p + p \cdot h(X)$ , notând  $c = \frac{a}{p}$ ,  $d = \frac{b-1}{p}$ , avem:

$$h(X) = cX + d + \frac{1}{p} \cdot \left[ -C_p^1 (x^2 + 1)^{p-1} + C_p^2 (x^2 + 1)^{p-2} - \dots + C_p^{p-1} (x^2 + 1) \right],$$

Atunci  $\bar{g} = X^2 + 1$  este ireductibil iar  $\bar{g}$  nu divide  $\bar{h}$ , în  $\mathbf{Z}_p[X]$  și deci din criteriul lui Schönemann rezultă că  $f$  este ireductibil în  $\mathbf{Z}[X]$ .

Iată o situație interesantă în care nu putem aplica criteriul lui Schönemann:

### 10.1.6. Proprietate Fie $p$ un număr prim, $p \geq 3$ .

Atunci polinomul  $q(X) = X^2 + X + 1$  este ireductibil în  $\mathbf{Z}_p[X]$  dacă și numai dacă  $p \equiv 2 \pmod{3}$ .

Mircea Becheanu

Demonstrație: Fie  $a = \prod_{k=1}^{p-1} (k^2 + k + 1)$ .

$q$  este ireductibil în  $\mathbf{Z}_p[X] \Leftrightarrow q$  nu are rădăcini în  $\mathbf{Z}_p \Leftrightarrow a \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

Determinăm restul împărțirii lui  $a$  la  $p$ . Fie  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$ .

Atunci  $k^2 + k + 1 = (\varepsilon - k)(\bar{\varepsilon} - k)$  și  $a = \prod_{k=1}^{p-1} (\varepsilon - k) \cdot \prod_{k=1}^{p-1} (\bar{\varepsilon} - k) = f(\varepsilon) \cdot f(\bar{\varepsilon})$ ,

unde  $f(X) = (X-1)(X-2)\dots(X-p+1) \in \mathbf{Z}[X]$ . Fie  $g(X) = X^{p-1} - 1 \in \mathbf{Z}[X]$ .

Cum  $\hat{f}$  și  $\hat{g}$  au aceleași rădăcini în  $\mathbf{Z}_p$ , (toate elementele din  $\mathbf{Z}_p^*$ ) rezultă  $\hat{f} = \hat{g}$  și deci există  $h \in \mathbf{Z}[X]$ , astfel încât  $f = g + p \cdot h$ .

Obținem  $a = f(\varepsilon) \cdot f(\bar{\varepsilon}) = [g(\varepsilon) + p \cdot h(\varepsilon)][g(\bar{\varepsilon}) + p \cdot h(\bar{\varepsilon})] = g(\varepsilon) \cdot g(\bar{\varepsilon}) + p \cdot b + p^2 \cdot b_1$ , unde  $b = g(\varepsilon) \cdot h(\bar{\varepsilon}) + g(\bar{\varepsilon}) \cdot h(\varepsilon)$  și  $b_1 = h(\varepsilon) \cdot h(\bar{\varepsilon})$ .

Din  $g, h \in \mathbf{Z}[X]$ , rezultă că există  $u, v \in \mathbf{Z}$ , astfel încât  $b = u + v \cdot \varepsilon$ .

Din  $b = \bar{b}$  obținem  $u + v \cdot \varepsilon = u + v \cdot \bar{\varepsilon} \Rightarrow v(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow b = u \in \mathbf{Z}$ . analog rezultă că  $b_1 \in \mathbf{Z}$ .

$g(\varepsilon) \cdot h(\bar{\varepsilon}) = (\varepsilon^{p-1} - 1)(\bar{\varepsilon}^{p-1} - 1) = 2 - (\varepsilon^{p-1} + \bar{\varepsilon}^{p-1}) = 2 - 2 \cdot \operatorname{Re}(\varepsilon^{p-1}) = 2 - 2 \cdot \cos \frac{2\pi(p-1)}{3}$

Obținem  $a \equiv 2 - 2 \cdot \cos \frac{2\pi(p-1)}{3} \pmod{p}$

Dacă  $p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a \equiv 0 \pmod{p}$ , iar dacă  $p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow a \equiv 3 \pmod{p}$

Așadar  $q(X)$  este ireductibil în  $\mathbf{Z}_p[X] \Leftrightarrow p \equiv 2 \pmod{3}$ .

**10.1.7. Definiție** Fie  $p \in \mathbf{N}$  un număr prim și  $d \in \mathbf{Z}$ . Spunem că  $d$  este un rest pătratic modulo  $p$  dacă există  $a \in \mathbf{Z}$  cu  $d \equiv a^2 \pmod{p}$ .

**10.1.8. Observații** a) Orice  $d \in \mathbf{Z}$  este rest pătratic modulo  $2$ .

b) Dacă  $p \nmid d$ , atunci  $d$  este rest pătratic modulo  $p$ .

c)  $d$  este un rest pătratic modulo  $p$  dacă există  $r \in \mathbf{R}_p$  cu  $d \equiv r^2 \pmod{p}$ .

Este interesant cazul  $p > 2$  și  $d \in \mathbf{Z}$ ,  $(d, p) = 1$ .



**10.1.9. Definiție** Fie  $p \geq 2$  un număr prim și  $d \in \mathbf{Z}$  cu  $(d, p) = 1$ .

Numărul  $\left(\frac{d}{p}\right) = \begin{cases} 1, & d \text{ e rest pătratic mod } p \\ -1, & \text{în caz contrar} \end{cases}$  se numește simbolul lui

Legendre.

**10.1.10. Definiție** Fie  $p \in \mathbf{N}$  număr prim. Mulțimea  $R \subset \mathbf{Z}$  se numește sistem redus de resturi modulo  $p$  dacă are proprietățile:

- 1)  $r \in R \Rightarrow r \not\equiv 0 \pmod{p}$
- 2)  $\forall r, s \in R, r \neq s \Rightarrow r \not\equiv s \pmod{p}$
- 3)  $|R| = p-1$ .

**10.1.11. Propoziție** Fie  $p \geq 2$  un număr prim și  $a, b \in \mathbf{Z}$ ,  $(a, p) = (b, p) = 1$ . Atunci au loc afirmațiile:

- 1) Dacă  $a \equiv b \pmod{p}$ ,  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ .
- 2)  $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$ , în particular  $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$ .
- 3)  $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$  (Criteriul lui Euler)
- 4)  $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$
- 5)  $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$ .

*Demonstrație:* Proprietățile (1) și (2) sunt evidente.

Pentru a demonstra (3), vom folosi de mai multe ori următorul rezultat:

Fie corpul comutativ  $(K, +, \cdot)$  și polinomul  $f \in K[X]$ ,  $\text{grad}(f) \geq 1$ . Atunci  $f$  are cel mult  $n$  rădăcini în  $K$ .

Numărul  $p$  fiind prim, inelul  $\mathbf{Z}_p$  este un corp cu  $p$  elemente.

Avem  $a \equiv b \pmod{p} \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$  în  $\mathbf{Z}_p$ .

Fie mulțimea de numere întregi  $R = \left\{ \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{p-1}{2} \right\}$ .  $R$  este un sistem

redus de resturi modulo  $p$ . Notând  $\bar{R} = \left\{ \bar{r} \mid r \in R \right\}$ , deducem că  $\mathbf{Z}_p^* = \bar{R}$ .

Notăm  $\mathbf{Z}_p^{*2} = \{\bar{x}^{-2} \mid \bar{x} \in \mathbf{Z}_p^*\}$ . Obținem  $\mathbf{Z}_p^{*2} = \left\{ \bar{1}^{-2}, \bar{2}^{-2}, \dots, \left( \frac{p-1}{2} \right)^{-2} \right\}$ .

Dacă  $1 \leq r < s \leq \frac{p-1}{2}$ , atunci  $r^2 \not\equiv s^2 \pmod{p}$ , adică  $\bar{r}^{-2} \neq \bar{s}^{-2}$ .

Într-adevăr, presupunând  $\bar{r}^{-2} = \bar{s}^{-2} = \bar{a}$ , polinomul  $X^2 - \bar{a} \in \mathbf{Z}_p[X]$  ar avea cel puțin

4 rădăcini distincte în  $\mathbf{Z}_p$ , și anume  $\bar{r}, -\bar{r}, \bar{s}, -\bar{s}$  ( $\bar{r} \neq \bar{0}, \bar{2} \neq \bar{0} \Rightarrow \bar{r} \neq -\bar{r}$ ), fals.

Așadar  $|\mathbf{Z}_p^{*2}| = \frac{p-1}{2}$ . Mai mult,  $\bar{a} \in \mathbf{Z}_p^{*2} \Leftrightarrow \left( \frac{a}{p} \right) = 1$ .

Pentru  $\bar{a} \neq \bar{0}$ , din Mica Teoremă a lui Fermat avem:  $\left( \bar{a}^{-\frac{p-1}{2}} \right)^2 = (\bar{a})^{p-1} = \bar{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left( \bar{a}^{-\frac{p-1}{2}} - \bar{1} \right) \cdot \left( \bar{a}^{-\frac{p-1}{2}} + \bar{1} \right) = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a}^{-\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$  sau  $\bar{a}^{-\frac{p-1}{2}} = -\bar{1}$ . Relațiile anterioare

nu pot avea loc simultan, căci ar rezulta  $\bar{1} = -\bar{1}$  și deci  $\bar{2} = \bar{0}$ , adică  $p = 2$ , fals.

Fie  $\bar{a} \in \mathbf{Z}_p^{*2} \Rightarrow \exists x \in \mathbf{Z}$ , cu  $\bar{x} \neq \bar{0}$ , astfel încât  $\bar{a} = \bar{x}^{-2}$ .

Atunci  $\bar{a}^{-\frac{p-1}{2}} = \left( \bar{x}^{-2} \right)^{\frac{p-1}{2}} = \bar{x}^{-p+1} = \bar{1}$ , deci  $\mathbf{Z}_p^{*2} \subset M$ , unde  $M$  este mulțimea

rădăci-nilor din  $\mathbf{Z}_p$  ale polinomului  $X^{\frac{p-1}{2}} - \hat{1}$ , ceea ce implică  $\frac{p-1}{2} = |\mathbf{Z}_p^{*2}| \leq |M| \leq \frac{p-1}{2} \Rightarrow \mathbf{Z}_p^{*2} = M$ .

Adică  $\left( \frac{a}{p} \right) = 1 \Leftrightarrow \bar{a} \in \mathbf{Z}_p^{*2} \Leftrightarrow \bar{a}^{-\frac{p-1}{2}} = \bar{1} \Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

și  $\left( \frac{a}{p} \right) = -1 \Leftrightarrow \bar{a} \notin \mathbf{Z}_p^{*2} \Leftrightarrow \bar{a}^{-\frac{p-1}{2}} \neq \bar{1} \Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ .

În concluzie, relația (3) este adevărată.

(4) rezultă din (3), deoarece  $\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$  și numerele anterioare fiind egale sau cu 1 sau cu -1 și  $1 \equiv -1 \pmod{p}$ , rezultă că ele sunt egale. Demonstrăm relația (5).

$$(3) \Rightarrow \left(\frac{ab}{p}\right) \equiv (ab)^{\frac{p-1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} \cdot b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right) \pmod{p}$$

Cum  $\left(\frac{ab}{p}\right), \left(\frac{a}{p}\right), \left(\frac{b}{p}\right) \in \{1, -1\}$  și  $1 \equiv -1 \pmod{p}$ , deducem că  $\left(\frac{ab}{p}\right)$

și

$\left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$  nu pot fi decât ambele egale cu 1, sau ambele egale cu -1, adică

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right).$$

**10.1.12. Corolar** Fie  $p \geq 2$  un număr prim și  $a \in \mathbf{Z}$ . Au loc afirmațiile:

1) Dacă  $p = 2$ , atunci polinomul  $X^2 - \bar{a} \in \mathbf{Z}_2[X]$  este reducibil în  $\mathbf{Z}_2[X]$

2) Dacă  $p > 2$ , atunci polinomul  $X^2 - \bar{a} \in \mathbf{Z}_p[X]$  este reducibil în  $\mathbf{Z}_p[X] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{p} \text{ sau } a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

3) Dacă  $p > 2$ , atunci polinomul  $X^2 - \bar{a} \in \mathbf{Z}_p[X]$  este ireducibil în  $\mathbf{Z}_p[X]$

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

Demonstrație: 1) Avem  $X^2 - \bar{a} = X^2 - \bar{a}^2 = (X - \bar{a}) \cdot (X + \bar{a})$

2)  $X^2 - \bar{a}$  reducibil în  $\mathbf{Z}_p[X] \Leftrightarrow X^2 - \bar{a}$  are o rădăcină în  $\mathbf{Z}_p[X] \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$  sau

$$(\bar{a} \neq \bar{0} \text{ și } \exists \bar{x} \in \mathbf{Z}_p, \bar{x}^2 = \bar{a}) \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{p} \text{ sau } \left(\frac{a}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{p}$$

$$p) \text{ sau } a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Următoarele rezultate, împreună cu formulele din 10.1.11., permit calculul simbolului lui Legendre prin reduceri succesive:

### 10.1.13. Legea reciprocității pătratice a lui Legendre-Gauss

Dacă  $p$  și  $q$  sunt două numere naturale prime impare distincte, atunci:

$$a) \left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

$$b) \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

## 10.2. Inelul resturilor inelului $A[X]$ modulo un polinom $f \in A[X]$

În cele ce urmează,  $(A, +, \cdot)$  este un inel comutativ dat și în inelul  $A[X]$  am fixat polinomul  $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ , cu  $n \in \mathbf{N}^*$  și  $a_n \in U(A)$

Dacă  $a_n = 1$ ,  $f$  se numește polinom unitar (monic). În inelul  $A[X]$  funcționează teorema împărțirii cu rest. Notăm cu  $g \pmod{f}$ , restul  $r$  al împărțirii lui  $g$  la  $f$ .

Vom arăta că pentru orice număr natural  $n \geq 1$ , mulțimea polinoamelor din  $A[X]$  de grad cel mult  $n-1$  poate fi înzestrată în mod natural cu o structură de inel comutativ, în raport cu polinomul unitar  $f$  de gradul  $n$  din  $A[X]$ .

**10.2.1. Lemă** Fie  $g_1, g_2 \in A[X]$ . Atunci,  $\forall h_1, h_2 \in A[X]$ , avem:

$$1) ((g_1 + h_1 f) \cdot (g_2 + h_2 f)) \pmod{f} = (g_1 \cdot g_2) \pmod{f}$$

$$2) ((g_1 + h_1 f) + (g_2 + h_2 f)) \pmod{f} = (g_1 + g_2) \pmod{f}.$$

*Demonstrație:* Din teorema împărțirii cu rest, există  $q, r \in A[X]$ , astfel încât  $g_1 \cdot g_2 = f \cdot q + r$ , cu  $\text{grad}(r) < n$ .

$$\text{Așadar, } (g_1 + h_1 f) \cdot (g_2 + h_2 f) = g_1 \cdot g_2 + f \cdot (g_1 \cdot h_2 + g_2 \cdot h_1 + h_1 \cdot h_2 \cdot f) =$$

$$= f \cdot (g_1 \cdot h_2 + g_2 \cdot h_1 + h_1 \cdot h_2 \cdot f + q) + r. \text{ Datorită unicității restului, deducem că:}$$

$$(g_1 \cdot g_2) \pmod{f} = r = ((g_1 + h_1 f) \cdot (g_2 + h_2 f)) \pmod{f}$$

Cealaltă egalitate se demonstrează analog.

În cele ce urmează vom folosi următoarea notație:

$$A_f = \{b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0 \mid b_i \in A, i = \overline{0, n-1}\} = \{g \in A[X] \mid \text{grad}(g) < n\}$$

$A_f$  este în mod evident o parte stabilă a lui  $A[X]$  în raport cu operația de adunare a polinoamelor „+”. Deoarece pentru orice  $g \in A[X]$ ,  $g \pmod{f} \in A_f$ , are sens să definim pe  $A_f$  operația:  $g_1 \cdot g_2 = (g_1 \cdot g_2) \pmod{f}$ ,  $\forall g_1, g_2 \in A_f$ .

**10.2.2. Propozitie**  $(A_f, +, \cdot)$  este un inel comutativ.

Demonstrație: Dacă  $g, h \in A_f$ , evident  $g - h \in A_f$  și deci  $(A_f, +)$  este un subgrup al grupului  $(A[X], +)$ , adică  $(A_f, +)$  este un grup abelian.

Fie  $g_1, g_2, g_3 \in A_f$ .  $g_1(g_2)$  fiind restul împărțirii lui  $g_1 \cdot g_2$  la  $f$ , există  $q \in A[X]$ , astfel încât  $g_1 \cdot g_2 = f \cdot q + g_1(g_2)$ . Folosind lema 10.2.1., obținem:

$(g_1(g_2))(g_3) = ((g_1(g_2) \cdot g_3) \pmod{f}) = ((g_1 \cdot g_2 - f \cdot q) \cdot g_3 \pmod{f}) = ((g_1 \cdot g_2) \cdot g_3) \pmod{f}$   
 Analog se demonstrează că  $g_1((g_2(g_3)) = (g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)) \pmod{f}$  și datorită asociativității din  $A[X]$ , rezultă că  $g_1(g_2)(g_3) = g_1((g_2(g_3))$ .

Folosind aceeași leamnă, obținem:

$$(g_1 + g_2)(g_3) = ((g_1 + g_2) \cdot g_3) \pmod{f} = (g_1 \cdot g_3 + g_2 \cdot g_3) \pmod{f} = (g_1 \cdot g_3) \pmod{f} + (g_2 \cdot g_3) \pmod{f} = g_1(g_3) + g_2(g_3)$$

Cum  $1 \in A_f$  și „ $\cdot$ ” este comutativă, deducem că  $(A_f, +, \cdot)$  este un inel comutativ

**10.2.3. Definiție** Inelul  $(A_f, +, \cdot)$  se numește inelul resturilor inelului  $A[X]$ , modulo polinomul  $f$ .

**10.2.4. Definiție** Inelul comutativ  $(C, +, \cdot)$  se numește extindere comutativă a inelului  $(A, +, \cdot)$  dacă  $A \subset C$  și  $A$  este subinel (unitar) al lui  $C$ .

**10.2.5. Observatii**

1) Dacă  $g_1, g_2 \in A_f$  și  $\text{grad}(g_1 \cdot g_2) < n$ , atunci  $g_1 \cdot g_2 = g_1(g_2) \in A_f$ .

În particular,  $\forall a, b \in A$ ,  $a(b) = a \cdot b \in A$ , așadar  $A$  este un subinel (unitar) al lui  $A_f$  și deci inelul  $A_f$  este o extindere comutativă a inelului  $A$ .

Avem:  $A = A_f \Leftrightarrow \text{grad}(f) = 1$  și dacă  $\text{grad}(f) \geq 2$ ,  $A_f$  nu este un subinel al lui  $A[X]$ , deși  $A_f \subset A[X]$ .

Așadar  $A[X]$  este o extindere a inelului  $A_f \Leftrightarrow \text{grad}(f) = 1$ .

2) dacă  $g \in A_f$  și  $m \in \mathbb{N}^*$ , atunci notăm  $g^{*m} = \underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{m \text{ ori}}$

Atunci,  $\forall g \in A_f, \exists! b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in A$  astfel încât

$$g(X) = b_{n-1}(X^{*(n-1)}) + \dots + b_1(X) + b_0$$

3) Deoarece  $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ , deducem că

$$a_n X^n = f(X) \cdot 1 + (-a_{n-1} X^{n-1} - a_{n-2} X^{n-2} - \dots - a_1 X - a_0) \text{ și}$$

$$(a_n X^n) \pmod{f} = -a_{n-1} X^{n-1} - \dots - a_1 X - a_0 = -a_{n-1}(X^{*(n-1)}) - \dots - a_1(X) - a_0(1)$$

Cum  $a_n(X^{*n}) = (a_n X^n) \pmod{f}$ , rezultă  $a_n(X^{*n}) = -a_{n-1}(X^{*(n-1)}) - \dots - a_1(X) - a_0(1)$   
 $\Leftrightarrow a_n(X^{*n} + a_{n-1}(X^{*(n-1)}) + \dots + a_1(X) + a_0(1) = 0$ , adică elementul  $X$  al inelului  $A_f$  este o rădăcină a polinomului  $f \in A[X]$ .

4) Dacă  $g \in A_f$ ,  $\text{grad}(g) = n$ , cu coeficientul dominant inversabil în  $A$ , atunci inelele  $A_f$  și  $A_g$  au grupurile abeliene subiacente identice, dar dacă  $n \geq 2$ , de obicei operațiile de înmulțire diferă. Mai mult, în general, inelele  $A_f$  și  $A_g$  nu sunt izomorfe.

Dacă  $g = v \cdot f$ , cu  $v \in U(A)$ , atunci inelele  $A_g$  și  $A_f$  coincid.

Într-adevăr,  $\forall h \in A[X]$ ,  $\exists q \in A[X]$ ,  $h = f \cdot q + h \pmod{f}$  și deci

$$h = (f \cdot v) \cdot (v^{-1} \cdot q) + h \pmod{f} = g \cdot (v^{-1} \cdot q) + h \pmod{f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \pmod{f} = h \pmod{g}, \forall h \in A[X].$$

În particular, pentru  $v = a_n^{-1}$ , unde  $a_n$  este coeficientul dominant al lui  $f$ , avem că  $A_f = A_{f_1}$ , unde  $f_1 = v \cdot f$  și  $f_1$  este un polinom unitar. Așadar putem presupune de la început că polinomul  $f$  este unitar.

**10.2.6. Definiție** Fie inelul  $(A, +, \cdot)$  și  $(B, +, \cdot)$  o extindere comutativă a inelului  $A$ . Elementul  $b \in B$  este rădăcină a polinomului  $f \in A[X]$  dacă  $f(b) = 0$ .

Folosind această definiție și observația 3, deducem:

**10.2.7. Propozitie** Pentru orice inel comutativ  $(A, +, \cdot)$  și orice polinom  $f \in A[X]$  de grad  $n \geq 1$  având coeficientul dominant un element inversabil al lui  $A$ , există o extindere comutativă a lui  $A$ , și anume inelul  $A_f$ , care conține o rădăcină a lui  $f$ .

**10.2.8. Observatie** Folosind teorema lui Bézout și raționând prin inducție, obținem că pentru orice inel comutativ  $(A, +, \cdot)$  și orice polinom  $f \in A[X]$  de grad  $n \geq 1$  având coeficientul dominant un element inversabil al lui  $A$  există o extindere comutativă  $\overline{A}$  a lui  $A$ , astfel încât, în inelul  $\overline{A}$ ,  $f$  să fie produsul coeficientului dominant  $a_n$  cu  $n$  polinoame unitare de gradul 1.

În cele ce urmează, studiem cazul în care inelul  $A$  este un corp comutativ,  $K$ . În acest context, singura condiție care trebuie impusă polinomului  $f$  este ca  $\text{grad}(f) = n \geq 1$ . Rezultatul care urmează este analogul celui deja cunoscut: inelul  $(\mathbb{R}_n, \oplus, \otimes)$  este corp  $\Leftrightarrow n$  este număr prim (ireductibil).

**10.2.9. Propozitie** Fie corpul comutativ  $(K, +, \cdot)$  și polinomul  $f \in K[X]$ , cu  $\text{grad}(f) = n \geq 1$ . Următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1)  $(K_f, +, \cdot)$  este corp.
- 2)  $(K_f, +, \cdot)$  este domeniu de integritate.
- 3)  $f$  este un polinom ireductibil.

Demonstrație: Implicația „ $1 \Rightarrow 2$ ” este evidentă.

„ $2 \Rightarrow 3$ ” Presupunem că  $f$  este reductibil.

Atunci există  $g_1, g_2 \in K[X] \setminus \{0\}$ ,  $\text{grad}(g_1) < n$ ,  $\text{grad}(g_2) < n$ , astfel încât  $f = g_1 \cdot g_2$ .

Rezultă  $g_1(g_2 = (g_1 \cdot g_2) \pmod{f} = 0$ , fals, deoarece  $K_f$  este domeniu de integritate.

„ $3 \Rightarrow 1$ ” Demonstrăm că dacă  $f$  este un polinom ireductibil, atunci

$$\forall g \in K_f \setminus \{0\}, \exists h \in K_f, \text{ astfel încât } g(h = 1.$$

Fie  $d$  cel mai mare divizor comun (unitar) în  $K[X]$  al polinoamelor  $f$  și  $g$ .

Atunci  $d/f$  și deoarece  $f$  este ireductibil, rezultă sau  $d = 1$ , sau  $d = f$ .

Dacă  $d = f$ , cum  $d/g$ , rezultă  $f/g$ , fals ( $g \in K_f \setminus \{0\}$  și deci  $\text{grad}(g) < \text{grad}(f)$ )

Așadar  $d = 1$ . Atunci, există  $f_1, g_1 \in K[X]$  astfel încât  $g \cdot g_1 + f \cdot f_1 = 1$ .

Fie  $h = g_1 \pmod{f} \Rightarrow \exists q \in K[X]$  astfel încât  $g_1 = f \cdot q + h \stackrel{10.2.1}{\Rightarrow}$

$$(g \cdot g_1) \pmod{f} = (g \cdot (f \cdot q + h)) \pmod{f} = (g \cdot h) \pmod{f} = g(h.$$

Cum  $g \cdot g_1 = f \cdot (-f_1) + 1$ , deducem că  $(g \cdot g_1) \pmod{f} = 1$ , deci  $g(h = 1$ .

Așadar  $(K_f, +, \cdot)$  este corp.

**10.2.10. Observație** Dacă  $g \in K[X]$  este un polinom neconstant, atunci  $g$  se scrie ca un produs de polinoame ireductibile:  $g = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_m$ . Din propoziția anterioară,  $K_{f_1}$  este o extindere comutativă a corpului  $K$  și conform propoziției 10.2.7., corpul  $K_{f_1}$  conține o rădăcină a lui  $f_1$ .

Aplicând teorema lui Bézout și raționând prin inducție după gradul lui  $g$ , deducem că există un corp  $\overline{K}$  - extindere a lui  $K$ , ce conține toate rădăcinile polinomului  $g$  (polinomul  $g$ , considerat ca polinom peste corpul  $\overline{K}$ , poate fi exprimat ca un produs de polinoame de gradul 1 peste  $\overline{K}$ )

**10.2.11. Exemple** Fie  $K$  un corp finit cu  $q$  elemente și  $f \in K[X]$ , cu  $\text{grad}(f) = n \geq 1$ .

$$\text{Avem } K_f = \{b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0 \mid b_i \in K, i = \overline{0, n-1}\}.$$

$$\text{Mai mult, } \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i X^i \Leftrightarrow b_i = c_i, \forall i = \overline{0, n-1}.$$

Rezultă că funcția  $f : K^n \rightarrow K_f$ ,  $f(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) = b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0$  este bijectivă, așadar  $|K_f| = |K^n|$  și deci inelul  $K_f$  are  $q^n$  elemente.

Atunci (10.2.9)  $K_f$  este corp  $\Leftrightarrow f$  este ireductibil în  $K[X]$ .

Știm că orice polinom  $f \in K[X]$  de grad 2 sau 3 este ireductibil în  $K[X]$  dacă și numai dacă  $f$  nu are nici o rădăcină în  $K$ .

Fie  $p \in \mathbb{N}$  un număr prim. Alegând  $K = \mathbb{Z}_p$ , rezultă că putem construi efectiv, prin procedeul descris mai sus, corpuri cu  $p^n$  elemente ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ), de îndată ce cunoaștem cel puțin un polinom  $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ , de grad  $n$  și ireductibil.

De exemplu, în  $\mathbb{Z}_2[X]$ , polinomul  $f(X) = X^2 + X + \hat{1}$  este ireductibil și corpul  $(\mathbb{Z}_2)_f$  are 4 elemente.

Într-adevăr,  $(\mathbb{Z}_2)_f = \{a + bX \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\} = \{\hat{0}, \hat{1}, X, \hat{1} + X\}$  iar tablele operațiilor sunt:

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$X$	$\hat{1} + X$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$X$	$\hat{1} + X$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1} + X$	$X$
$X$	$X$	$\hat{1} + X$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{1} + X$	$\hat{1} + X$	$X$	$\hat{1}$	$\hat{0}$

(	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$X$	$\hat{1} + X$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$X$	$\hat{1} + X$
$X$	$\hat{0}$	$X$	$\hat{1} + X$	$\hat{1}$
$\hat{1} + X$	$\hat{0}$	$\hat{1} + X$	$\hat{1}$	$X$

deoarece  $X(X = X^2 \pmod{f}) \Rightarrow X(X = X + \hat{1}, (X + \hat{1})(X = \hat{1}, (X + \hat{1})(X + \hat{1}) = X$

Considerând inelul  $(\mathbb{Z}_2)_g$ , cu  $g(X) = X^2$ , rezultă că  $X(X = \hat{0}$ , deci inelul cu 4 elemente  $(\mathbb{Z}_2)_g$  are elementul nenul nilpotent  $X$ . Așadar inelul  $(\mathbb{Z}_2)_g$  nu este izomorf cu inelul produs direct  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , deoarece acesta nu are elemente nilpotente.

**10.2.12. Definiție** Fie  $(A, +, \cdot)$  un inel comutativ. Perechea  $(B, \alpha)$  se numește  $A$ -algebră, dacă  $B$  este un inel și  $\alpha : A \rightarrow B$  este un morfism de inele, cu proprietatea că  $\forall a \in A, \forall b \in B, \alpha(a) \cdot b = b \cdot \alpha(a)$ .

$\alpha$  se numește morfismul structural al  $A$ -algebrei.

$A$ -Algebra  $(B, \alpha)$  este comutativă dacă inelul  $B$  este comutativ.

Când nu e pericol de confuzie, nu se specifică morfismul structural al  $A$ -algebrei  $B$ .

**10.2.13. Exemple 1)** Dacă  $A$  este un subinel unitar și comutativ al inelului  $B$ , care este conținut în  $Z(B)$ , atunci  $B$  este o  $A$ -algebră, de morfism structural incluziunea canonică. În particular, orice extindere comutativă a lui



$A$  este o  $A$  – algebră. Așadar,  $\mathbf{R}$  este o  $\mathbf{Q}$  – algebră,  $\mathbf{C}$  este o  $\mathbf{R}$  – algebră, iar dacă inelul  $A$  este comutativ, atunci inelele  $A[X]$  și  $A_f$  (cu  $f \in A[X]$  având coeficientul dominant inversabil în  $A$ ) sunt  $A$  – algebre comutative.

2) Orice inel  $A$  are o unică structură de  $\mathbf{Z}$  – algebră, cu morfismul structural  $\alpha : \mathbf{Z} \rightarrow A$ ,  $\alpha(n) = n \cdot 1$ ,  $\forall n \in \mathbf{Z}$ .

3) Dacă  $(A, +, \cdot)$  este un inel comutativ, atunci inelul  $M_n(A)$  este o  $A$  – algebră, de morfism structural  $\alpha : A \rightarrow M_n(A)$ ,  $\alpha(a) = a \cdot I_n$

**10.2.14. Definiție** Fie  $(A, +, \cdot)$  un inel comutativ,  $(B, \alpha)$  o  $A$  – algebră,  $u \in B$  și  $f \in A[X]$ ,  $f(X) = a_n \cdot X^n + \dots + a_1 \cdot X + a_0$ . Elementul  $f(u) = \alpha(a_n) \cdot u^n + \dots + \alpha(a_1) \cdot u + \alpha(a_0)$  se numește valoarea polinomului  $f$  în  $u$ . Elementul  $u \in B$  se numește rădăcină a lui  $f$  dacă  $f(u) = 0$ .

**10.2.15. Observatii** 1) De obicei, dacă nu se poate face nici o confuzie, notăm  $\alpha(a) = a$ , pentru  $a \in A$  și avem:  $f(u) = a_n \cdot u^n + \dots + a_1 \cdot u + a_0 \cdot e$ , unde  $e$  este elementul unitate al inelului  $B$ .

2) Evident,  $\forall f, g \in A[X]$ ,  $\forall u \in B$ ,  $(f+g)(u) = f(u)+g(u)$  și  $(f \cdot g)(u) = f(u) \cdot g(u)$ .

În consecință, funcția  $\alpha_u : A[X] \rightarrow B$ ,  $\alpha_u(f) = f(u)$ ,  $\forall f \in A[X]$ , este un morfism de inele, numit morfismul de evaluare în  $u$  al polinoamelor din  $A[X]$ .

3) În condițiile din definiția 10.2.14., notăm  $A[u] = \{f(u) \mid f \in A[X]\} = (\text{Im}(\alpha_u))$   $\alpha_u$  fiind morfism de inele, rezultă că  $A[u]$  este un subinel comutativ al lui  $B$ , fiind și o  $A$  – algebră de morfism structural  $\varphi : A \rightarrow A[u]$ ,  $\varphi(a) = a \cdot e$ ,  $\forall a \in A$ . Inelul  $A[u]$  se numește  $A$  – subalgebra lui  $B$  generată de elementul  $u \in B$ .

**10.2.16. Definiție** Fie  $(A, +, \cdot)$  un inel comutativ,  $(B, \alpha)$  o  $A$  – algebră și  $u \in B$ . Elementul  $u$  este algebric peste  $A$  dacă  $\exists f \in A[X]$ ,  $f \neq 0$ , cu  $f(u) = 0$ . În caz contrar,  $u$  se numește transcendent peste  $A$ .

**10.2.17. Propoziție** Fie corpul  $(K, +, \cdot)$  și  $(B, +, \cdot)$  o  $K$  – algebră.

Fie  $u \in B$ , algebric peste  $K$  și  $f \in K[X]$  un polinom nenul de grad minim astfel încât  $f(u) = 0$ . Atunci  $\forall g \in K[X]$ , cu  $g(u) = 0$ , avem  $f \mid g$ .

**Demonstrație:** Din teorema împărțirii cu rest,  $\exists q, r \in K[X]$  astfel încât  $g = f \cdot q + r$ , cu  $\text{grad}(r) < \text{grad}(f)$ . Atunci:  $0 = g(u) = f(u) \cdot q(u) + r(u) = r(u)$ .

Cum  $f$  este polinom de grad minim printre polinoamele nenule din  $K[X]$  care au rădăcina  $\alpha$ , rezultă  $r = 0$ , deci  $f \mid g$ .

**10.2.18. Observație** Dacă  $f \in K[X]$ ,  $f(X) = a_n \cdot X^n + \dots + a_1 \cdot X + a_0$ , cu  $a_n \neq 0$ , este un polinom ca și în 10.2.17., atunci și  $a_n^{-1} \cdot f = f_1$  este tot un polinom nenul din  $K[X]$  care are rădăcina  $u$  și în plus, este unitar.

**10.2.19. Definiție** Fie  $u$  un element algebric al unei  $K$  – algebre  $B$ . Polinomul unitar de grad minim din  $K[X]$  care are rădăcina  $u$ , se numește polinomul minimal (peste  $K$ ) al lui  $u$ .

**10.2.20. Observație** Polinomul minimal peste corpul  $K$  al unui element algebric al unei  $K$  – algebre este unic determinat. El se notează  $\text{Min}(u, K)$ .

**10.2.21. Propoziție** Fie  $B$  o  $K$  – algebră peste corpul comutativ  $K$ ,  $u \in B$  un element algebric peste  $K$ ,  $f = \text{Min}(u, K)$  și  $n = \text{grad}(f)$ . Atunci:

- 1)  $\forall b \in K[u]$ ,  $\exists! g \in K_f$  astfel încât  $b = g(u)$
- 2) Funcția  $\beta: K_f \rightarrow K[u]$ ,  $\beta(g) = g(u)$ ,  $\forall g \in K_f$  este un izomorfism de inele.
- 3)  $K[u]$  este domeniu de integritate  $\Leftrightarrow K[u]$  este corp  $\Leftrightarrow f$  este ireductibil.

**Demonstrație:** 1) Fie  $b \in K[u] \Rightarrow \exists h \in K[X]$ ,  $h(u) = b$ . Alegem  $g = h \pmod{f}$   
Din teorema împărțirii cu rest,  $\exists! q \in K[X]$ ,  $h = f \cdot q + g \Rightarrow h(u) = b = g(u)$ .

Presupunem că există  $g' \in K_f$ ,  $g' \neq g$ , astfel încât  $g'(u) = b$ .

Obținem  $(g - g')(u) = 0$ , așadar  $u$  este rădăcină a lui  $g - g'$

Cum  $\text{grad}(g - g') < n = \text{grad}(f)$  iar  $f = \text{Min}(u, K) \Rightarrow g - g' = 0 \Leftrightarrow g = g'$ .

2) Din 1) rezultă că  $f$  este surjectivă.

Fie  $g_1, g_2 \in K_f$ , cu  $\beta(g_1) = \beta(g_2)$ . Atunci  $g_1(u) = g_2(u) \Leftrightarrow (g_1 - g_2)(u) = 0$

$\text{grad}(g_1 - g_2) < n$  și  $f = \text{Min}(u, K) \Rightarrow g_1 - g_2 = 0 \Leftrightarrow g_1 = g_2$ .

Așadar  $f$  este și injectivă, deci este bijectivă.

Pentru  $g_1, g_2 \in K_f$ , din teorema împărțirii cu rest,  $\exists q \in K_f$ ,  $g_1 \cdot g_2 = f \cdot q + g_1(g_2)$ .

Avem  $\beta(g_1(g_2)) = (g_1(g_2))(\alpha) = (g_1 \cdot g_2 - f \cdot q)(\alpha) = g_1(\alpha) \cdot g_2(\alpha) - f(\alpha) \cdot q(\alpha) =$   
 $= g_1(\alpha) \cdot g_2(\alpha) = \beta(g_1) \cdot \beta(g_2)$ ;  $\beta(g_1 + g_2) = (g_1 + g_2)(\alpha) = g_1(\alpha) + g_2(\alpha) = \beta(g_1) + \beta(g_2)$ , așadar  $\beta$  este izomorfism de inele.

3)  $K[u] \approx K_f$  și concluzia rezultă din propoziția 10.2.9.

**10.2.22. Observații** 1) Dacă  $g \in K[X]$  e un polinom unitar, ireductibil și pentru  $u \in B$ ,  $g(u) = 0$ , atunci  $g = \text{Min}(u, K)$ .

Într-adevăr, avem (din 10.2.17) că  $\text{Min}(u, K) / g$  și amândouă fiind ireductibile, iar  $\text{Min}(u, K)$  fiind de grad  $\geq 1$ , rezultă concluzia.

2) Izomorfismul din proprietatea precedentă este evident un izomorfism de  $K$  – algebre.

3) Propoziția anterioară nu funcționează în general pentru elementele algebrice peste un inel comutativ arbitrar  $A$ , pentru că nu se poate defini noțiunea de polinom minimal al unui element algebric peste un inel.

De exemplu, numărul  $\frac{1}{3} \in \mathbf{Q}$  este algebric peste  $\mathbf{Z}$ , fiind rădăcina polinomului

$3X-1 \in \mathbf{Z}[X]$ , dar nu există nici un polinom unitar din  $\mathbf{Z}[X]$  cu rădăcina  $\frac{1}{3}$ .

### 10.2.23. Exemple

1) Dacă  $f \in \mathbf{Q}[X]$  este un polinom ireductibil de grad  $n$  și  $z \in \mathbf{C}$  este o rădăcină a lui  $f$ , atunci  $\mathbf{Q}[z] = \{a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 \mid a_i \in \mathbf{Q}, i = \overline{0, n-1}\}$  este un subcorp al lui  $\mathbf{C}$  și numerele complexe  $1, z, z^2, \dots, z^{n-1}$  sunt liniar independente peste  $\mathbf{Q}$ .

De exemplu, dacă  $d \in \mathbf{Z} \setminus \{0, 1\}$  este un număr liber de pătrate, atunci polinomul  $X^2 - d$  este ireductibil în  $\mathbf{Q}[X]$ , deci  $\text{Min}(\sqrt{d}, \mathbf{Q}) = X^2 - d$  și  $\mathbf{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$  este un subcorp al lui  $\mathbf{C}$ . Numerele complexe  $1, \sqrt{d}$  sunt liniar independente peste  $\mathbf{Q}$ .

2) Dacă avem corpul comutativ  $(K, +, \cdot)$  și  $f \in K[X]$  este un polinom unitar de grad  $\geq 1$ , considerând  $K$  – algebra  $K_f$ , din propoziția 10.2.7. deducem că  $X \in K_f$  este algebric peste  $K$  și  $\text{Min}(X, K) = f$ .

**10.2.24. Propoziție** Fie  $p \in \mathbf{N}$  un număr prim,  $f \in \mathbf{Z}_p[X]$  un polinom ireductibil de grad  $n \geq 1$  și  $a \in \mathbf{N}$ . Condiția necesară și suficientă ca să existe un inel  $A$  cu  $n$  elemente având proprietățile

(i)  $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{p \text{ ori}} = 0$  ( $\text{char}(A) = p$ )

(ii) ecuația  $f(x) = 0$  are soluții în  $A$  este ca să existe  $k \in \mathbf{N}^*$  astfel încât  $a = p^{k \cdot n}$ .

*Demonstrație:* Fie  $K = \mathbf{Z}_p$  și corpul cu  $p^n$  elemente  $K_f$ .

„ $\Leftarrow$ ” Dacă  $a = p^{k \cdot n}$ , considerăm inelul  $A = \underbrace{K_f \times K_f \times \dots \times K_f}_{k \text{ ori}}$ , care are (din

10.2.4)

proprietățile cerute.

„ $\Rightarrow$ ” Presupunem că există un inel  $A$  cu  $a$  elemente, cu proprietățile din ipoteză.

Este evident că  $A$  este o  $K$  – algebră de morfism structural  $\alpha : K \rightarrow A$ ,  $\alpha(\hat{k}) = k$ .

Fie  $u \in A$  o soluție a ecuației  $f(x) = 0$  și funcția  $\beta : K_f \rightarrow A$ ,  $\beta(g) = g(u)$ .  
Atunci, din Propoziția 10.2.21. știm că  $\beta$  este un morfism injectiv de inele.

Mai mult,  $\beta$  induce un izomorfism al lui  $K_f$  pe  $\text{Im } \beta = K[u] = P$ .

Atunci  $P$  este un subinel al lui  $(A, +, \cdot)$ , fiind de fapt izomorf cu  $K_f$ , deci având  $p^n$  elemente. Deducem (inelul  $A$  admițând o structură de  $P$  – spațiu vectorial), că  $\exists k \in \mathbf{N}^*$  astfel încât  $|A| = |P|^k$  ( $\dim_P(A) = k$ ) și deci că  $\exists k \in \mathbf{N}^*$  astfel încât  $a = p^{k \cdot n}$ .

### **10.2.25. Aplicații**

**1)** Orice inel finit  $(A, +, \cdot)$  în care  $1+1 = 0$ , iar ecuația  $x^4+x^3+1 = 0$  are soluție în  $A$ , are proprietatea că  $\exists k \in \mathbf{N}^*$  astfel încât  $|A| = 16^k$ .

Soluție: Se ia  $p = 2$  și  $f = X^4+X^3+1 \in \mathbf{Z}_2[X]$

**2)** Fie  $a, p \in \mathbf{N}^*$  și  $p$  prim,  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Condiția necesară și suficientă ca să existe un inel  $A$  cu  $a$  elemente care să aibă proprietățile:

(i)  $\text{char}(A) = 2$

(ii) ecuația  $x^2+1 = 0$  are soluție în  $A$   
este:  $\exists k \in \mathbf{N}^*$ , astfel încât  $a = p^{2 \cdot k}$ .

Soluție: Se alege  $f = X^2+1 \in \mathbf{Z}_p[X]$ , care este ireductibil, conform cu 10.1.13.

**3)** Fie  $a, p \in \mathbf{N}^*$ . Condiția necesară și suficientă ca să existe un inel  $A$  cu  $a$  elemente care să aibă proprietățile:

(i)  $\text{char}(A) = 2$

(ii) ecuația  $x^2+x+1 = 0$  are soluție în  $A$   
este:  $\exists k \in \mathbf{N}^*$ , astfel încât  $a = 4^k$ .

Soluție: Se alege  $p = 2$  și  $f = X^2+X+1 \in \mathbf{Z}_p[X]$

### **Bibliografie**

*T. Albu - Construcții elementare de inele și corpuri, G. M. 8, 9, 10 / 1998*

*M. Andronache - O proprietate de descompunere a polinoamelor din  $\mathbf{Z}_n[X]$ , G.M. 5-6 / 1993, pag. 165-166*

*M. Burtea, G. Burtea - Matematică – clasa a XII-a – Elemente de analiză matematică. Algebră superioară, Ed. Carminis 2001*

**M. Crainic, N. Crainic** – Rezolubilitatea ecuațiilor polinomiale în inele, *G.M. 4 / 1999*, pag. 153-155  
**M. Ganga** - Teme și probleme de matematică, Ed. Tehnică, 1991, pag. 149-150  
**M. Țena** – Cinci teme de aritmetică superioară, Biblioteca Societății de Științe Matematice din România, Imprimeria Coresi, 1991  
**D. Bușneag, Al. Dincă, D. Ebâncă, C-tin P. Niculescu, M. Popescu, I. Vladimirescu, G. Vraciu** – Concursul de matematică „Gheorghe Țițeica” 1979-1998, Ed GIL, Zalău, 1999  
**Colecția G. M.**

# ANALIZĂ MATEMATICĂ

## 1. Funcții primitivabile

Importanța noțiunii de primitivă pentru calculul integral al funcțiilor reale de o variabilă reală este pusă în evidență în manualul de analiză matematică al clasei a XII-a. Pe de o parte, se constată în acest manual că datorită formulei lui Leibniz-Newton calculul integralei Riemann a unei funcții integrabile Riemann care admite primitive poate fi redus la determinarea unei primitive a acestei funcții iar, pe de altă parte, se arată apoi că, în cazul unei funcții continue, se poate construi o primitivă a acesteia cu ajutorul integralei Riemann.

### 1.1. Funcții primitivabile

**1.1.1. Definiție.** Fie  $J$  un interval nedegenerat din  $\mathbb{R}$ , adică  $J$  este un interval nevid care nu se reduce la un singur punct. O funcție derivabilă  $F: J \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **primitivă** pe  $J$  a unei funcții  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  dacă  $F$  este derivabilă pe  $J$  și  $F'(x) = f(x)$  pentru orice  $x \in J$ . Când punctul  $x$  din această definiție este o extremitate a lui  $J$ , prin  $F'(x)$  se notează derivata laterală a lui  $F$  în  $x$ .

Se spune că o funcție  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  este **primitivabilă** (sau **admite primitive**, sau, încă, este o **derivată**) pe  $J$  dacă există o primitivă a lui  $f$  pe  $J$ . Noțiunea de primitivă a fost introdusă de I. Newton (1665) sub denumirea de fluentă.

Notăm în continuare cu  $J$  un interval nedegenerat din  $\mathbb{R}$ .

**1.1.2. Propoziție.** Dacă  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  admite o primitivă  $F$  pe  $J$ , atunci restricția lui  $F$  la orice interval nedegenerat  $I \subset J$  este o primitivă a restricției lui  $f$  la  $I$ .

**1.1.3. Propoziție.** Dacă  $F$  și  $G$  sunt două primitive ale aceleiași funcții  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ , atunci există  $k \in \mathbb{R}$  astfel încât

$$F(x) - G(x) = k,$$

pentru orice  $x \in J$ .

**Demonstrație.** Notăm  $H = F - G$ .  $H$  este derivabilă pe  $J$  și  $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$  pentru orice  $x \in J$ . Rezultă că există  $k \in \mathbb{R}$  astfel încât  $H(x) = k$  pentru orice  $x \in J$ , adică  $F(x) - G(x) = k$  pentru orice  $x \in J$ .

**1.1.4. Observație.** Notăm în continuare cu  $C(J)$  sau  $C$  mulțimea funcțiilor continue pe  $J$  și cu  $P(J)$  mulțimea funcțiilor care au primitive pe intervalul nedegenerat  $J$ .

Acceptăm în continuare următorul rezultat

**1.1.5. Teoremă.** *Dacă funcția  $f$  este continuă pe intervalul nedegenerat  $J$ , atunci  $f$  are primitive pe  $J$ .*

**1.1.6. Observație.** Datorită importanței ei în analiza matematică, teorema 1.1.5 este denumită de mulți autori teorema fundamentală a calculului diferențial și integral. Facem observația că reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată. Aceasta va rezulta din următorul exemplu.

**1.1.7. Exemplu.** Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

**Demonstrație.** Funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  nu există, punctul  $x = 0$  este un punct de discontinuitate de speța a doua, deci  $f$  nu este continuă pe  $\mathbb{R}$ . Integrând prin părți pe orice interval ce nu conține originea obținem

$$\int \sin \frac{1}{x} dx = \int x^2 \cdot \left( \cos \frac{1}{x} \right)' dx = x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} - \int 2x \cdot \cos \frac{1}{x} dx$$

(1)

Aceasta ne sugerează să luăm funcția ajutoare,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Funcția  $g$  fiind continuă pe  $\mathbb{R}$  (așa a fost luată în  $x = 0$ ), are primitivă pe  $\mathbb{R}$  și notăm  $G$  o primitivă a funcției  $g$ . Utilizând (1) deducem că dacă  $f$  are primitive, atunci o primitivă pentru  $f$  va fi de forma:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} - G(x) + c_1, & x \neq 0, \\ c_2, & x = 0. \end{cases}$$

Determinăm constantele  $c_1$  și  $c_2$  astfel încât  $F$  să fie derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $F'(x) = f(x)$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ . Din construcția lui  $F$  avem că  $F$  este derivabilă pe  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  și  $F'(x) = f(x)$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Din condiția de continuitate pentru  $F$  în  $x = 0$  obținem:

$c_2 = -G(0) + c_1$  și avem

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} - G(x) + c_1, & x \neq 0, \\ -G(0) + c_2, & x = 0. \end{cases}$$

(2)  
Cum

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - G(x) + G(0)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cos \frac{1}{x} - \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} \right) = 0 - G'(0) = -g(0) = 0 = f(0). \end{aligned}$$

Rezultă că  $F$  este derivabilă în  $x = 0$  și  $F'(0) = f(0)$ . Deducem că  $F$  dată de (2) este primitivă pentru  $f$ .

**1.1.8. Teoremă. (Darboux 1875).** Dacă  $f : J \rightarrow \square$  este o funcție derivabilă pe  $J$  atunci derivata sa  $f'$  are proprietatea lui Darboux pe  $J$ .

**1.1.9. Proprietate (condiție necesară de existență a primitivelor).** Fie  $f : J \rightarrow \square$  o funcție care admite primitive pe  $J$ . Atunci  $f$  are proprietatea lui Darboux pe  $J$ . Avem deci incluziunea  $P(J) \subset D_a(J)$ .

**Demonstrație.** Fie  $F$  o primitivă a lui  $f$ . Atunci din teorema lui Darboux rezultă că  $F'$  are proprietatea lui Darboux, deci  $f$  are proprietatea lui Darboux pe  $J$ .

**1.1.10. Consecință.** Fie  $f : J \rightarrow \square$  o funcție care nu are proprietatea lui Darboux pe  $J$ . Atunci  $f$  nu admite primitive pe  $J$ .

**Demonstrație.** Presupunem contrariul. Rezultă că  $f$  are primitive pe  $J$  și din Proprietatea 1.1.9 rezultă că  $f$  are proprietatea lui Darboux, contradicție.

**1.1.11. Consecință.** Dacă  $f : J \rightarrow \square$  ( $J$  interval din  $\square$ ) este o funcție astfel încât  $\text{Im } f$  nu este interval, atunci  $f$  nu are primitive pe  $J$ .

**1.1.12. Proprietate.** Dacă funcția  $f : J \rightarrow \square$  are un punct de discontinuitate de prima speță, atunci funcția  $f$  nu admite primitive.

**Demonstrație.** Presupunem că  $f$  are primitive. Atunci deducem că  $f$  are proprietatea lui Darboux, de unde obținem că  $f$  nu are nici un punct de discontinuitate de prima speță, contradicție.

**1.1.13. Exemplu.** Funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \square$  dată prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$



nu are primitive pe  $(0, \infty)$ .

**Soluție.** Avem că  $f$  este continuă pe  $(0, \infty) \setminus \{1\}$  și  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$  și  $f(1) = 2$   $\left| \Rightarrow x = 1 \right.$

este un punct de discontinuitate de prima speță, deci  $f$  nu are primitive pe  $(0, \infty)$ .

**1.1.4. Propoziție.** Fie funcțiile  $f, g: J \rightarrow \mathbb{R}$  primitivabile pe  $J$  și  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Atunci funcțiile  $f + g$ ,  $\lambda f$ ,  $f - g$  sunt primitivabile pe  $J$ .

**Demonstrație.** Fie  $G, F: J \rightarrow \mathbb{R}$  primitive pentru  $g$  și  $f$ . Atunci rezultă imediat că funcțiile  $F + G$ ,  $\lambda F$ ,  $F - G$  sunt primitive, respectiv pentru  $f + g$ ,  $\lambda f$ ,  $f - g$ .

**1.1.15. Teoremă.** Dacă  $I \subset \mathbb{R}$  este un interval nedegenerat, care nu este deschis și interiorul căruia este notat cu  $J$ , iar  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție care admite primitive, atunci sunt adevărate următoarele afirmații:

a) Dacă  $F_0: J \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitivă a funcției  $f|_J$ , atunci  $F_0$  are limită finită în fiecare punct  $a \in I \setminus J$ , iar funcția  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$F(x) = \begin{cases} F_0(x), & x \in J \\ \lim_{t \rightarrow a} F_0(t), & x = a \in I \setminus J \end{cases} \quad (1)$$

este o primitivă a lui  $f$ .

b) Dacă  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă pentru care  $F|_J$  este o primitivă a lui  $f|_J$ , atunci  $F$  este o primitivă a lui  $f$ .

**Demonstrație.** a) Fie funcția  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a lui  $f$ . Atunci  $G|_J$  este o primitivă a lui  $f|_J$ . Deoarece funcția  $F_0$  este tot o primitivă a lui  $f|_J$ , există un număr real  $c$  astfel încât să aibă loc egalitatea

$$F_0(x) = G(x) + c, \quad (\forall) x \in J. \quad (2)$$

Fie acum  $a$  un punct oarecare din  $I \setminus J$ . Funcția  $G$  fiind derivabilă în  $a$ , este continuă în acest punct și din această cauză avem

$$\lim_{x \rightarrow a} G(x) = G(a).$$

Ținând seama de relația (2), rezultă

$$\lim_{x \rightarrow a} F_0(x) = G(a) + c. \quad (3)$$

Din relațiile (1), (2) și (3) deducem că

$$F(x) = G(x) + c \text{ pentru orice } x \in I.$$

În consecință,  $F$  este o primitivă a lui  $f$ .

b) Alegând  $F_0 = F|_J$  și aplicând afirmația a), deducem că  $F$  este o primitivă a lui  $f$ .

**1.1.16. Observație.** Din Teorema 1.1.15 rezultă un procedeu practic de determinare a unei primitive pentru o funcție  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , care admite primitive și care este definită pe un interval nedegenerat  $I \subset \mathbb{R}$  care nu este deschis; se determină mai întâi o primitivă  $F_0$  a restricției lui  $f$  la interiorul lui  $I$ , iar apoi se prelungește  $F_0$  la  $I$  prin formula (1), obținând astfel o primitivă  $F$  a lui  $f$ .

**1.1.17. Exemplanu.** Să se determine primitivele funcției  $f: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{x^2}, \text{ pentru orice } x \in (0,1].$$

**Soluție.** Funcția  $f$  are primitive pe  $(0,1]$  fiind continuă. Determinăm mai întâi o primitivă a funcției  $f_0 = f|_{(0,1)}$ . Aplicând formula de integrare prin părți găsim

$$\int f_0(x) dx = \int \left( -\frac{1}{x} \right)' \arcsin x dx = -\frac{1}{x} \arcsin x + \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Notăm  $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ , de unde  $\varphi'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$  și obținem

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)-1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+1} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right) + C. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\int f_0(x) dx = -\frac{1}{x} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right) + C.$$

Restricția la  $(0,1)$  a funcției continue  $F: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$F(x) = -\frac{1}{x} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right) \text{ pentru orice } x \in (0,1],$$

este deci o primitivă a lui  $f_0$ . Prin urmare, funcția  $F$  este, conform Teoremei 1.1.15, o primitivă a lui  $f$ , așa că avem

$$\int f(x) dx = F + C.$$

**1.1.18. Observație.** Se poate arăta că o funcție reală, definită pe un interval nedegenerat  $I \subset \mathbb{R}$  care nu este deschis și a cărei restricție la interiorul lui  $I$  admite primitive, nu trebuie să admită neapărat primitive. Pentru aceasta este suficient să analizăm problema rezolvată R.1.4.1. De aceea, nu se poate renunța în Teorema 1.1.15 la ipoteza că funcția  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  să aibă primitive.

În practică se întâmplă de multe ori ca o anumită metodă de găsim a primitivelor (inclusiv cea a prelungirii, descrisă anterior) să nu fie aplicabilă pe întregul interval  $I \subseteq \mathbb{R}$ , ci doar pe anumite subintervale  $I_1, I_2, \dots, I_n$  ale lui  $I$  ( $n \geq 2$ ) a căror reuniune este  $I$  și pentru care

$$\text{Int}(I_j) \cap \text{Int}(I_k) = \emptyset,$$

dacă  $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \neq k$ .

Se pune atunci întrebarea, cum să se “racordeze” primitivele găsite pe cele  $n$  subintervale astfel încât să se obțină o primitivă a lui  $f$ . În continuare dăm răspunsul la această întrebare în cazul în care  $I$  este reuniunea a două intervale fără puncte interioare comune.

**1.1.19. Teoremă.** Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval nedegenerat,  $a$  un punct interior lui  $I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție și  $F_1 : J \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a lui  $f|_J$ , iar

$F_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a lui  $f|_K$ , unde s-a notat

$$J = (-\infty, a) \cap I \text{ și } K = [a, \infty) \cap I.$$

Atunci funcția  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) - F_1(a), & x \in I, x < a \\ F_2(x) - F_2(a), & x \in I, x \geq a \end{cases}$$

este o primitivă a lui  $f$ .

**Demonstrație.** Observăm că în fiecare punct  $x \in I \setminus \{a\}$  funcția  $F$  este derivabilă și  $F'(x) = f(x)$ . A rămas de cercetat dacă funcția  $F$  este derivabilă în  $a$ . Întrucât

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{F_1(x) - F_1(a) - 0}{x - a} = F_1'(a) = f(a),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{F_2(x) - F_2(a) - 0}{x - a} = F_2'(a) = f(a),$$

deducem că funcția  $F$  este derivabilă în  $x = a$  și  $F'(a) = f(a)$ . În concluzie, funcția  $F$  este o primitivă a lui  $f$ .

**1.1.20. Observație.** Rezultatul anterior se poate extinde pentru cazul în care intervalul  $I$  se poate scrie ca o reuniune de  $n$  intervale distincte ( $n \geq 2$ ) având interioarele disjuncte două câte două.

Rezultatul următor ne dă modul de scriere a primitivei unei funcții continue și periodice, cunoscând o primitivă, a restricției funcției respective la un interval de lungime egal cu perioada funcției.

**1.1.21. Teoremă.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție periodică având perioada  $T > 0$ ,  $a$  un număr real, iar  $F_0 : [a, a+T] \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a lui  $f|_{[a, a+T]}$ .

Atunci funcția  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$F(x) = F_0(x - k \cdot T) + k(F_0(a+T) - F_0(a))$ ,  $(\forall) x \in (a + kT, a + (k+1)T)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , este o primitivă a lui  $f$ .

**Demonstrație.** Fie  $x_0$  un punct oarecare din  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a + kT, a + (k+1)T)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Atunci rezultă că  $F$  este derivabilă în  $x_0$  și

$$F'(x_0) = F'_0(x_0 - kT) = f(x_0 - kT) = f(x_0).$$

Dacă  $x_0 = a + (k+1)T$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{F_0(x - kT) - F_0(a+T)}{x - kT - (a+T)} = F'_0(a+T) = f(a+T) = f(x_0),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{F_0(x - (k+1)T) - F_0(a)}{x - (k+1)T - a} = F'_0(x_0) = f(a) = f(x_0),$$

Deci și în acest caz  $F$  este derivabilă în  $x_0$ , iar  $F'(x_0) = f(x_0)$ . Prin urmare,  $F$  este o primitivă a lui  $f$ .

**1.1.22. Exemplanu.** Să se determine primitivele funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

**Soluție.** Avem

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{(1 - \cos 2x)^2 + (1 + \cos 2x)^2} = \frac{4}{2 + 2 \cos^2(2x)} = \frac{2}{1 + \cos^2 2x} = \\ &= \frac{2}{1 + \frac{1 + \cos 4x}{2}} = \frac{4}{3 + \cos 4x}. \end{aligned}$$

Funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$  și periodică cu perioada principală  $T_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Fie  $f_0 = f|_{\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]}$  (restricția lui  $f$  la  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ) și notăm  $F_0$  o primitivă a sa.

Pentru  $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  avem

$$\int \frac{4}{3 + \cos 4x} dx = \int \frac{4}{3 + \frac{1 - \operatorname{tg}^2(2x)}{1 + \operatorname{tg}^2(2x)}} dx = \int \frac{4(1 + \operatorname{tg}^2 2x)}{4 + 2 \operatorname{tg}^2 2x} dx = \int \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 2x)}{2 + \operatorname{tg}^2 2x} dx =$$

$$= \int \frac{(\operatorname{tg} 2x)'}{\operatorname{tg}^2 2x + 2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} \right) + C .$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{4} \\ x > -\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} \right) = \frac{-\pi\sqrt{2}}{4} \quad \text{și} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ x < \frac{\pi}{4}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} ,$$

deducem că funcția  $F_0 : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \square$ ,

$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{-\pi\sqrt{2}}{4} & , x = -\frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} \right) & , x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{\pi\sqrt{2}}{4} & , x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

este o primitivă a funcției  $f_0$ . Cum  $f$  este periodică cu perioada  $T_0 = \frac{\pi}{2}$ , va

rezulta că funcția  $F : \square \rightarrow \square$ , definită prin

$$F(x) = F_0\left(x - k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + k \cdot \left(F_0\left(\frac{\pi}{4}\right) - F_0\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right), \quad (\forall)$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{-\pi}{4} + \frac{(k+1)\pi}{2}\right]$$

$k \in \square$ , este o primitivă a lui  $f$ . Obținem

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg}(2x - k\pi)}{\sqrt{2}} \right) + k \cdot \frac{2\pi\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \cdot k ,$$

$$(\forall) x \in \left[-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{-\pi}{4} + \frac{(k+1)\pi}{2}\right], \quad k \in \square \quad \text{și}$$

$$\int f(x) dx = F + C .$$

**1.1.23. Propoziție.** Dacă funcția  $f : \square \rightarrow \square$  este primitivabilă și aditivă, adică satisface ecuația funcțională a lui Cauchy,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{pentru orice } x, y \in \square ,$$

atunci  $f(x) = k \cdot x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , unde  $k \in \mathbb{R}$  este o constantă arbitrară.

**Demonstrație.** Fie  $F$  o primitivă pentru  $f$  și  $(a_n)$  un șir de numere reale convergent către zero cu  $a_n \neq 0$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . În conformitate cu relația din ipoteză obținem:

$$f(x + a_n) - f(a_n) = f(x) \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \in \mathbb{N}.$$

Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$ , funcția  $G_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$G_n(x) = F(x + a_n) - x \cdot f(a_n)$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și

$$G'_n(x) = F'(x + a_n) - f(a_n) = f(x + a_n) - f(a_n) = f(x)$$

oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ . Cum funcțiile  $F$  și  $G_n$  sunt primitive pentru funcția căutată  $f$ , rezultă că există constantele  $c_n$  astfel ca

$$F(x + a_n) - x f(a_n) = F(x) + c_n, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \in \mathbb{N},$$

din care pentru  $x = 0$  rezultă  $c_n = F(a_n) - F(0)$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Obținem

$$F(x + a_n) = x f(a_n) + F(x) + F(a_n) - F(0) \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \in \mathbb{N}.$$

De aici, pentru  $x = 1$  rezultă

$$f(a_n) = F(1 + a_n) - F(1) - F(a_n) + F(0), \quad (\forall) n \in \mathbb{N}.$$

Așadar,

$$\begin{aligned} f(x) = F'(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x + a_n) - F(x)}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x f(a_n) + F(a_n) - F(0)}{a_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ x \frac{(F(1 + a_n) - F(1))}{a_n} + (1 - x) \cdot \frac{F(a_n) - F(0)}{a_n} \right] = x \cdot F'(1) + (1 - x) F'(0) = \\ &= x f(1) + (1 - x) f(0) = x \cdot f(1), \end{aligned}$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , căci punând  $x = y = 0$  în relația din ipoteză găsim  $f(0) = 0$ . În concluzie,  $f(x) = kx$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

## 1.2. Operații cu funcții primitivabile

**1.2.1. Propoziție.** Dacă funcțiile  $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$  au primitive pe  $J$  și  $\lambda \in \mathbb{R}$ , atunci funcțiile  $f + g$ ,  $\lambda f$ ,  $f - g$  au primitive pe  $J$ .

**Demonstrație.** Vezi Propoziția 1.1.14 din paragraful precedent.

**1.2.2. Observație.** Un rezultat similar nu este adevărat pentru produsul, câtul, compunerea (atunci când au sens) a două funcții care au primitive pe intervalul  $J$ . Vom da în continuare condiții suficiente pentru ca produsul a două funcții primitivabile să fie funcție primitivabilă.

**1.2.3. Exempu.** Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  date prin

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}.$$

Să se arate că funcțiile  $f$  și  $g$  admit primitive pe  $\mathbb{R}$ , dar funcția  $f \cdot g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nu admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

**Soluție.** Avem  $f = f_1 - f_2$ ,  $g = f_1 + f_2$ , unde  $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sunt date de

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin^2 \left( \frac{1}{x} \right), & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Deoarece funcțiile  $f_1$  și  $f_2$  au primitive pe  $\mathbb{R}$ , deducem că  $f$  și  $g$  au primitive pe  $\mathbb{R}$  ca diferență, respectiv sumă de funcții primitivabile. Avem

$$\begin{aligned} \left( \sin^2 \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) \left( \sin^2 \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right) &= \sin^4 \frac{1}{x} - \sin^2 \frac{1}{x} = -\sin^2 \frac{1}{x} \cdot \cos^2 \frac{1}{x} = \\ &= -\frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{2}{x} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{și } f \cdot g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{2}{x} \right), & x \neq 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \end{cases}.$$

Funcția  $f \cdot g$  nu are primitivă pe  $\mathbb{R}$  deoarece nu are proprietatea lui Darboux.

**1.2.4. Propoziție.** Fie  $f, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J$  interval, două funcții cu proprietățile

- 1)  $f$  admite primitive pe  $J$ ;
- 2)  $g$  este derivabilă cu derivata continuă pe  $J$ .

Atunci funcția  $f \cdot g$  admite primitive pe  $J$ .

**Demonstrație.** Fie funcția  $u: J \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin  $u(x) = g(x) \cdot F(x)$ , unde  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ . Avem că  $u$  este derivabilă pe  $J$  și  $u' = g \cdot f + g' \cdot F$ , de unde  $g \cdot f = u' - g' \cdot F$ . Dar funcția  $u'$  are primitive (funcția  $u$ ) și  $g' \cdot F$  are primitive căci este continuă. Rezultă că  $f \cdot g$  este primitivabilă ca și diferență de două funcții primitivabile.

**1.2.5. Propoziție.** Fie  $f, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J \subset \mathbb{R}$  interval, două funcții cu proprietățile:

- 1)  $f$  admite primitive pe  $J$ ;
- 2)  $f(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in J$ ;
- 3)  $g$  este continuă pe  $J$ .

Atunci funcția  $f \cdot g$  admite primitive pe  $J$ .

**Demonstrație.** Fie  $F: J \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a funcției  $f$ . Din  $F'(x) = f(x) \neq 0$ ,  $(\forall) x \in J$  rezultă că funcția  $F$  este strict monotonă. Considerăm funcția  $H: J \rightarrow F(J)$ , dată prin  $H(x) = F(x)$ ,  $(\forall) x \in J$ . Funcția  $H$  astfel definită este derivabilă, surjectivă, injectivă (fiind strict monotonă) și  $H'(x) \neq 0$ ,  $(\forall) x \in J$ . Rezultă că funcția inversă  $H^{-1}: F(J) \rightarrow J$  este derivabilă.

Funcția  $g \circ H^{-1}: F(J) \rightarrow \mathbb{R}$  admite primitive, fiind funcție continuă. Fie  $G: F(J) \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a funcției  $g \circ H^{-1}$ . Atunci, funcția  $G \circ H: J \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă fiind compunerea a două funcții derivabile. De asemenea  $(G \circ H)'(x) = G'(H(x)) \cdot H'(x) = (g \circ H^{-1})(H(x)) \cdot H'(x) = g(x) \cdot f(x)$ ,  $(\forall) x \in J$

Prin urmare, funcția  $G \circ H$  este o primitivă a funcției  $f \cdot g$ .

**1.2.6. Teoremă (W. Wilkosz).** Fie  $f, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J$  interval, două funcții cu proprietățile:

- 1)  $f$  admite primitive pe  $J$ ;
- 2)  $f$  mărginită superior sau inferior;
- 3)  $g$  este continuă.

Atunci funcția  $f \cdot g$  admite primitive.

**Demonstrație.** Presupunem că  $f$  este mărginită inferior. Atunci există  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f(x) > m$ ,  $(\forall) x \in J$ . Considerăm funcția  $h: J \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin  $h(x) = m$ ,  $(\forall) x \in J$ . Atunci funcția  $f - h$  admite primitive și nu se anulează pe  $J$ . Conform Propoziției 1.2.5 rezultă că funcția  $(f - h) \cdot g$  admite primitive pe  $J$ . Deoarece  $h \cdot g$  admite primitive fiind continuă, deducem că  $f \cdot g$  are primitive pe  $J$ . Analog se procedează dacă  $f$  este mărginită superior.

**1.2.7. Propoziție.** Fie  $f, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J$  interval din  $\mathbb{R}$ , două funcții cu proprietățile:

- 1)  $f$  admite primitive;
- 2)  $g$  este derivabilă și cu derivata mărginită.

Atunci funcția  $f \cdot g$  admite primitive pe  $J$ .

**Demonstrație.** Fie  $F$  o primitivă a funcției  $f$ . Atunci funcția  $F \cdot g$  este derivabilă și  $(F \cdot g)' = f \cdot g + F \cdot g' \Leftrightarrow f \cdot g = (F \cdot g)' - F \cdot g'$ .



Conform Propoziției 1.2.6, rezultă că funcția  $F \cdot g'$  admite primitive. Prin urmare,  $f \cdot g$  admite primitive.

**1.2.8. Observație.** Funcțiile din Exemplul 1.2.3 sunt primitivabile dar produsul lor nu mai este o funcție primitivabilă. Cele două funcții, din exemplul respectiv, au fost alese în așa fel încât produsul lor să nu aibă proprietatea lui Darboux (deci să nu fie o funcție care are primitive). Se pune, în mod natural, problema primitivabilității câtului a două funcții primitivabile. Procedeu utilizat pentru alegerea funcțiilor din Exemplul 1.2.3 nu poate fi folosit și pentru câtul a două funcții primitivabile, căci Jarnik [7] a stabilit următorul rezultat:

**1.2.9. Teoremă.** Fie  $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$  două funcții cu proprietățile:

- 1)  $f, g$  primitivabile pe  $J$ ;
- 2)  $g(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in J$ .

Atunci funcția  $\frac{f}{g}$  are proprietatea lui Darboux pe  $J$ .

**1.2.10. Observație.** Există funcții primitivabile al căror cât nu este o funcție primitivabilă. Se poate arăta că funcția  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(0) = \frac{1}{2}$ , iar pentru  $x \neq 0$  graficul lui  $g$  este format din părți egale de triunghiuri isoscele de înălțime egală cu 1 construite pe segmentele  $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ ,  $\left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right]$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , are primitive pe  $[-1, 1]$ . Pe de altă parte, pentru  $a > 0$ , funcția  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

definită prin  $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{a+g(x)}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ \frac{2a}{a+1}, & x = 0 \end{cases}$ , unde  $g$  este funcția anterioară,

este cât a două funcții primitivabile, dar  $f$  nu este o funcție primitivabilă.

**1.2.11. Propoziție.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J \subset \mathbb{R}$  interval, două funcții cu proprietățile:

- 1)  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ ;
- 2)  $g$  este de două ori derivabilă cu  $g''$  continuă pe  $J$ ;
- 3)  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in J$ .

Atunci funcția  $f \circ g$  admite primitive.

**Demonstrație.** Fie  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a funcției  $f$ . Atunci funcția  $F \circ g$  este derivabilă pe  $J$  și  $(F \circ g)' = (f \circ g) \cdot g'$ . De aici rezultă că  $f \circ g = \frac{1}{g'} \cdot (F \circ g)'$ . Deoarece funcția  $(F \circ g)'$  este primitivabilă iar funcția  $\frac{1}{g'}$

este derivabilă și cu derivata continuă, folosind Propoziția 1.2.4 deducem că  $f \circ g$  admite primitive pe  $J$ .

### 1.3. Clase de funcții discontinue primitivabile

**1.3.1. Propoziție.** Dacă funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și satisface condiția  $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{F(y)}{y} = M(f) \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  fixat și  $F$  este o primitivă pentru  $f$ ,

atunci funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x-x_0}\right), & x \neq x_0 \\ M(f), & x = x_0 \end{cases}$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

**Demonstrație.** Deoarece  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ , ea admite primitive pe  $\mathbb{R}$ . Fie  $F$  o primitivă pentru  $f$  ce se anulează în  $x_0$ . Integrând prin părți pe un interval  $J$  ce nu conține punctul  $x_0$ , obținem:

$$\int f\left(\frac{1}{x-x_0}\right) dx = -\int \left(F\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)' (x-x_0)^2 dx = -F\left(\frac{1}{x-x_0}\right)(x-x_0)^2 + \int 2 \cdot F\left(\frac{1}{x-x_0}\right)(x-x_0) dx.$$

de unde

$$g(x) = \left(-F\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \cdot (x-x_0)^2\right)' + 2F\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \cdot (x-x_0), \quad (\forall) x \in J. \quad (1)$$

Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \cdot 2(x-x_0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot 2\alpha = \lim_{|y| \rightarrow \infty} F(y) \cdot \frac{2}{y} = 2 \cdot M(f),$$

rezultă că funcția  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \begin{cases} 2(x-x_0) \cdot F\left(\frac{1}{x-x_0}\right), & x \neq x_0 \\ 2 \cdot M(f), & x = x_0 \end{cases}$  este

continuă pe  $\mathbb{R}$  deci primitivabilă. Fie  $H$  o primitivă pentru  $h$ . Considerăm

$$\text{funcția } u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = \begin{cases} \left(-F\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \cdot (x-x_0)^2\right)', & x \neq x_0 \\ -M(f), & x = x_0 \end{cases}.$$

Funcția  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U(x) = \begin{cases} -(x-x_0)^2 \cdot F\left(\frac{1}{x-x_0}\right), & x \neq x_0 \\ 0 & , x = x_0 \end{cases}$  este o primitivă

pentru  $u$ . Într-adevăr, pentru  $x \neq x_0$  avem  $U'(x) = u(x)$ , iar în  $x = x_0$  avem

$$\begin{aligned} U'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-(x-x_0)^2 F\left(\frac{1}{x-x_0}\right)}{x-x_0} = -\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \cdot F\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \\ &= -\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{F(y)}{y} = -M(f) = u(x_0). \end{aligned}$$

Din (1) rezultă  $g = u + h$  și de aici obținem că  $g$  are primitive ca și sumă de funcții primitivabile.

**1.3.2. Consecințe.** a) Fie  $x_0 \in \mathbb{R}$  și funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuă. Dacă există  $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{F(y)}{y} = M(f) \in \mathbb{R}$ , unde  $F$  este o primitivă pentru  $f$ , atunci funcția

$$g : [x_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x-x_0}\right), & x > x_0 \\ M(f), & x = x_0 \end{cases} \text{ admite primitive pe } [x_0, \infty).$$

b) Fie  $x_0 \in \mathbb{R}$  și funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuă. Dacă există  $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{F(y)}{y} = M(f) \in \mathbb{R}$ , unde  $F$  este o primitivă pentru  $f$ , atunci funcția

$$g : (-\infty, x_0] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x-x_0}\right), & x < x_0 \\ M(f), & x = x_0 \end{cases} \text{ admite primitive pe } (-\infty, x_0].$$

**1.3.3. Exemplu.** Arătați că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \text{ admite primitive pe } \mathbb{R}.$$

**Soluție.** Fie funcția  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = x \cdot \sin(x^2)$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ . Funcția  $h$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ , iar  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H(x) = -\frac{1}{2} \cos(x^2)$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ , este o primitivă pentru  $h$ . Cum

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{H(y)}{y} = \lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{-\cos(y^2)}{2y} = 0,$$

folosind Propoziția 1.3.1, cu  $x_0 = 0$ , rezultă că  $f$  are primitive pe  $\mathbb{R}$ .

**1.3.4. Propoziție.** Fie  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  și  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  ( $J \subset \mathbb{R}$  interval) două funcții derivabile,  $f$  având derivata mărginită. Avem:

a) Dacă  $f(x) \neq 0$ , pentru orice  $x \in J$ , atunci funcția  $f' \cdot \left( g' \circ \frac{1}{f} \right)$

admite primitive.

b) Dacă  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = 0$  și mulțimea  $A = \{x \in J \mid f(x) = 0\}$

este nevidă și finită, atunci funcție  $h_\lambda: J \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$h_\lambda(x) = \begin{cases} f'(x) \cdot g' \left( \frac{1}{f(x)} \right), & x \in J \setminus A \\ \lambda, & x \in A \end{cases}, \text{ unde } \lambda \in \mathbb{R},$$

admite primitive dacă și numai dacă  $\lambda = 0$ .

**Demonstrație.** a) Funcția  $f^2 \cdot \left( g' \circ \frac{1}{f} \right)$  este derivabilă pe  $J$  și

$$\begin{aligned} \left( f^2 \cdot \left( g' \circ \frac{1}{f} \right) \right)' &= 2f \cdot f' \cdot \left( g' \circ \frac{1}{f} \right) - f^2 \cdot f' \cdot \left( g' \circ \frac{1}{f} \right) \cdot \frac{1}{f^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f' \cdot \left( g' \circ \frac{1}{f} \right) = 2f \cdot f' \cdot \left( g' \circ \frac{1}{f} \right) - \left( f^2 \cdot \left( g' \circ \frac{1}{f} \right) \right)'. \end{aligned}$$

Funcția  $2f \cdot f' \cdot \left( g' \circ \frac{1}{f} \right)$  admite primitive conform teoremei lui

Wilkosz. Rezultă că funcția  $f' \cdot \left( g' \circ \frac{1}{f} \right)$  admite primitive, fiind o combinație liniară de funcții care admit primitive.

b) Avem  $h_\lambda = h_0 + u_\lambda$ , unde  $u_\lambda: J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & x \in J \setminus A \\ \lambda, & x \in A \end{cases}$ . Dacă

vom demonstra că  $h_0$  admite primitive, atunci va rezulta că  $h_\lambda$  admite primitive dacă și numai dacă  $u_\lambda$  admite primitive, adică dacă și numai dacă  $\lambda = 0$ .

Fie funcția  $H : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H(x) = \begin{cases} f^2(x) \cdot g\left(\frac{1}{f(x)}\right), & x \in J \setminus A \\ 0, & x \in A. \end{cases}$  Funcția  $H$

este evident derivabilă pe  $J \setminus A$  și

$$H'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) \cdot g\left(\frac{1}{f(x)}\right) - f'(x) \cdot g'\left(\frac{1}{f(x)}\right),$$

pentru orice  $x \in J \setminus A$ .

Fie  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  elementele mulțimii  $A$ . Atunci, avem:

$$\lim_{x \rightarrow a_i} \frac{H(x) - H(a_i)}{x - a_i} = \lim_{x \rightarrow a_i} \frac{f^2(x) \cdot g\left(\frac{1}{f(x)}\right) - 0}{x - a_i} = \lim_{x \rightarrow a_i} \frac{f(x) - f(a_i)}{x - a_i} \cdot f(x) \cdot g\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 0$$

pentru orice  $i = \overline{1, n}$ . Prin urmare,  $H$  este derivabilă pe  $J$  și

$$H'(x) = \begin{cases} 2f(x) \cdot f'(x) \cdot g\left(\frac{1}{f(x)}\right) - h_p(x), & x \in J \setminus A \\ 0, & x \in A \end{cases}$$

Considerăm funcția  $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ , dată prin:

$$G(x) = \begin{cases} 2f(x) \cdot f'(x) \cdot g\left(\frac{1}{f(x)}\right), & x \in J \setminus A \\ 0, & x \in A \end{cases}$$

Atunci, avem relația

$$H' = G - h_0 \Leftrightarrow h_0 = G - H'.$$

Funcția  $G$  este continuă în  $a_i$  pentru orice  $i = \overline{1, n}$ . Conform teoremei lui Wilkosz, restricția funcției  $G$  la orice interval  $J' \subset J$  și care nu conține nici unul din punctele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  admite primitive. Aplicând de un număr finit de ori Teorema 1.1.15, rezultă că funcția  $G$  admite primitive. Prin urmare,  $h_0 = G - H'$  admite primitive și Propoziția este demonstrată.

**1.3.5. Propoziție.** Fie  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  și  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  ( $J$  interval) două funcții derivabile,  $f$  cu derivata continuă, mulțimea  $A = \{x \in J \mid f(x) = 0\}$  este nevidă și

finită, iar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ . Pentru fiecare  $\lambda \in \mathbb{R}$  se consideră funcția

$h_\lambda : J \rightarrow \mathbb{R}$ , dată prin

$$h_\lambda(x) = \begin{cases} f'(x) \cdot g'\left(\frac{1}{f(x)}\right), & x \in J \setminus A \\ \lambda, & x \in A \end{cases}.$$

Atunci, funcția  $h_\lambda$  admite primitive dacă și numai dacă  $\lambda = 0$ .

**Demonstrație.** Procedând ca în demonstrația Propoziției 1.3.4, se obține relația

$$h_\lambda = G - H' + u_\lambda,$$

unde  $G, H, u_\lambda$  sunt funcțiile introduse în Propoziția 1.3.4. Funcția  $G$  admite primitive fiind continuă. Atunci rezultă că  $h_\lambda$  admite primitive  $\Leftrightarrow u_\lambda$  admite primitive  $\Leftrightarrow \lambda = 0$ .

**1.3.6. Exemplu.** Fie funcția  $h_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_p(x) = \begin{cases} \sin \frac{\alpha}{x}, & x \neq 0 \\ p, & x = 0 \end{cases}$ , unde

$\alpha \in \mathbb{R}$  și  $p \in \mathbb{R}$ . Să se arate că  $h_p$  admite primitive dacă și numai dacă  $p = 0$ .

**Soluție.** Pentru  $\alpha = 0$  concluzia rezultă imediat. Fie în continuare  $\alpha \neq 0$ . Pentru funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  date prin  $f(x) = \frac{x}{\alpha}$  și  $g(x) = -\cos x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , se poate aplica Propoziția 1.3.5 cu  $A = \{0\}$ . Facem precizarea că se poate da o altă soluție acestei probleme utilizând integrarea prin părți.

**1.3.7. Exemplu.** Fie funcția  $h_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_p(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\alpha}{x}\right), & x \neq 0 \\ p, & x = 0 \end{cases}$ ,

unde  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Atunci  $h_p$  are primitive  $\Leftrightarrow p = 0$ .

**Soluție.** Se aplică Propoziția 1.3.5, pentru funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{\alpha}$  și  $g(x) = \sin x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

## Bibliografie

1. **D. Andrica**, *Asupra unei clase largi de funcții primitivabile*, G.M. (serie metodică) 6/1989, pag. 214-220 și 4/1986, pag. 169-176

2. **Bătinețu – Giurgiu D.M., și alții**, *Probleme date la Olimpiadele de matematică pentru licee*, Editura Științifică, București 1992
3. **V. Berinde**, *O clasă de funcții discontinue primitivabile*, G.M. 6/1989, pag. 214-220
4. **Gh. Boroica**, *Lucrare metodico-științifică pentru obținerea gradului didactic I cu tema: Primitive. Primitive generalizate. Calcul de primitive*, Baia Mare, 1996
5. **W.W., Breckner**, *Observații privind calculul primitivelor*, Univ. Babeș-Bolyai Cluj-Napoca, *Lucrările Seminarului de Didactica Matematicii*, vol.6, pag. 81-96 (1991)
6. **I.L. Dinulescu și Gh. Nedelea**, *Tratarea unitară a unor probleme privind existența primitivelor unor funcții*, G.M. 8/1995
7. **M. Ganga**, *Teme și probleme de matematică*, Editura Tehnică, pag. 166-198
8. **I. Muntean**, *Primitive și primitive generalizate*, *Lucrările Seminarului de Didactica Matematicii*, 2(1986), pag. 129-152
9. **L. Petracovici**, *În legătură cu existența primitivelor unor funcții uzuale*, Univ. de Nord Baia Mare, *Lucrările Seminarului de Creativitate Matematică*, vol. I (1991-1992), pag. 139-144
10. **V. Postolică**, *Utilizarea primitivelor în rezolvarea unor ecuații funcționale*, *Lucrările Seminarului de Didactica Matematicii*, 8(1992), pag. 139-144
11. **D. Săvulescu și alții**, *Culegere de probleme date la concursurile interjudețene Spiru Haret-Gh. Vrânceanu*, 1985-1993
12. **G. Sirețchi**, *Calcul diferențial și integral*, vol.2, Editura Științifică și Enciclopedică, București 1985, pag. 260-267
13. \* \* \*, *Gazeta Matematică*, 1975-2003
14. \* \* \*, *Revista Matematică de Timișoara*, 1990-2003
15. \* \* \*, *Revista de Matematică Dan Barbilian*, 1(1995), Editura Paralela 45
16. \* \* \*, *Revista de Matematică Argument*, 1999-2003
17. \* \* \*, *Revista de Matematică din Suceava*, 2(1992)

### Probleme rezolvate

R1.4.1. Fie  $a$  un număr real, iar  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funcția definită prin

$$f(x) = \begin{cases} a & , x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & , x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Să se arate că  $f$  nu admite primitive pe  $[0, \infty)$ .

Soluție. Funcția  $f_0 = f|_{(0, \infty)}$ , fiind continuă admite primitive, pe care le putem determina utilizând formula de integrare prin părți:

$$\begin{aligned} \int f_0(x) dx &= \int x' \cdot \sin \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} dx = x \sin \frac{1}{x} + \int \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} dx = \\ &= x \cdot \sin \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

În particular, funcția  $F_0 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$F_0(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}, \text{ pentru orice } x \in (0, \infty),$$

este o primitivă a lui  $f_0$ . Observăm că  $\lim_{x \rightarrow 0} F_0(x) = 0$ . Dacă  $f$  ar admite primitive, atunci funcția  $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$F(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , x \in (0, \infty) \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ar fi în baza afirmației a) din Teorema 1.1.15 o primitivă a lui  $f$ . Dar, această concluzie este falsă, căci se vede imediat că funcția  $F$  nu este derivabilă în  $x = 0$  deoarece

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sin \frac{1}{x},$$

care nu există. Prin urmare,  $f$  nu admite primitive.

R1.4.2. Dacă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție derivabilă cu derivata continuă, demonstrați că funcția  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin  $g(x) = \begin{cases} f(x) \cdot \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$  admite primitive.

Soluție. Metoda I. Avem:



$$g(x) = \begin{cases} (f(x) - f(0)) \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} + \begin{cases} f(0) \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = u(x) + f(0) \cdot v(x),$$

unde  $u$  este continuă pe  $\mathbb{R}$  și deci, posedă primitive, iar  $v$  are primitive în conformitate cu Exemplitul 1.1.7.

Deducem că  $g$  are primitive pe  $\mathbb{R}$  căci  $g$  se obține ca și o combinație liniară de funcții primitivabile.

Metoda a II-a. Notăm  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  și avem

$g = f \cdot u$ . Deoarece  $f$  este continuă iar  $u$  este primitivabilă și mărginită, în conformitate cu Propoziția 1.2.6 deducem că funcția  $g$  are primitive pe  $\mathbb{R}$ .

Metoda a III-a. Funcția  $u$  de la metoda anterioară este primitivabilă iar  $f$  este derivabilă având derivata continuă. În conformitate cu Propoziția 1.2.4 deducem că funcția  $g = f \cdot u$  are primitive pe  $\mathbb{R}$ .

Să observăm că era suficient ca funcția  $f$  să fie continuă.

R1.4.3. Se dau funcțiile  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) \cdot \sin x$  și  $h(x) = f(x) \cdot \cos x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Să se arate că dacă funcțiile  $g$  și  $h$  au primitive pe  $\mathbb{R}$ , atunci  $f$  are primitive pe  $\mathbb{R}$ .

Soluție. Fie funcțiile  $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  date prin  $u(x) = \sin x \cdot g(x)$ ,  $v(x) = \cos x \cdot h(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Utilizând propoziția 1.2.4 deducem că funcțiile  $u$  și  $v$  au primitive pe  $\mathbb{R}$ . Dar

$$u(x) + v(x) = f(x) \cdot \sin^2 x + f(x) \cdot \cos^2(x) = f(x), \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

Deducem că  $f$  este primitivabilă ca și sumă de funcții primitivabile.

R1.4.4. Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin

$$f(x) = \begin{cases} \cos \left( \frac{1}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})} \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

Soluție. Fie funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ . Funcția  $g$  admite

primitive pe  $\mathbb{R}$ . Avem  $f(x) = g(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Fie  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a funcției  $g$ , iar funcția  $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin

$H(x) = \sqrt{1+x^2} \cdot G(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Avem că  $H$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și derivata sa este

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot G(\ln(x+\sqrt{x^2+1})) + \sqrt{x^2+1} \cdot g(\ln(x+\sqrt{x^2+1})) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot G(\ln(x+\sqrt{x^2+1})) + f(x) \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Rezultă că  $f(x) = H(x) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot G(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))$  pentru orice

$x \in \mathbb{R}$  și deducem că  $f$  admite primitive ca diferență de două funcții care admit primitive (prima funcție are primitivă pe  $H$  în timp ce a doua funcție este primitivabilă fiind continuă).

R1.4.5. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție monotonă cu proprietatea că  $f^2$  are primitive pe  $\mathbb{R}$ .

a) Să se arate că  $f^4$  are primitive pe  $\mathbb{R}$ .

b) Dați un exemplu de o funcție  $f$  cu proprietatea de mai sus pentru care  $f^3$  nu are primitive.

Soluție. a) Deoarece  $f$  este monotonă rezultă că  $f$  poate avea numai discontinuități de speța I și, de aici obținem că  $f^2 = f \cdot f$  poate avea doar discontinuități de speța I. Cum  $f^2$  are primitive, rezultă că  $f^2$  are proprietatea lui Darboux. Dacă am presupune că  $f^2$  are cel puțin un punct de discontinuitate de speța I, conform Propoziției 1.1.12 ar rezulta că  $f^2$  nu admite primitive, contradicție. Rămâne  $f^2$  continuă pe  $\mathbb{R}$ . De aici  $f^4 = f^2 \cdot f^2$  este continuă, ca urmare  $f^4$  are primitive pe  $\mathbb{R}$ .

b) Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin  $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$ . Avem  $f$

descrescătoare,  $f^2 = 1$  și o primitivă pentru funcția  $f^2$  este funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = x$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ . Dar funcția  $f^3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este dată prin

$$f^3(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$$

și aceasta nu are proprietatea lui Darboux pentru că  $f^3(\mathbb{R}) = \{-1, 1\}$  care nu este interval. Ca urmare,  $f^3$ , nu admite primitive.

R1.4.6. Să se arate că oricare ar fi  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^*$ , funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n |x - a_i| \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

are proprietatea lui Darboux pe  $\square$ .

Soluție. Fie funcțiile  $f_i: \square \rightarrow \square$ ,  $f_i(x) = \begin{cases} |x - a_i| \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  unde

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Deoarece  $f_i(x) = g(x) \cdot h(x)$ , unde  $g(x) = |x - a_i|$  este continuă

pe  $\square$  și  $h(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  are primitive pe  $\square$  și este mărginită, deducem în

conformitate cu Teorema 1.2.6 că funcția  $f_i$  are primitive pe  $\square$ . Cum  $f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ , rezultă că  $f$  are primitive pe  $\square$ , deci  $f$  are proprietatea lui Darboux.

R1.4.7. Fie  $f: \square \rightarrow \square$  o funcție injectivă. Dacă funcția  $g: \square \rightarrow \square$ ,  $g(x) = f(x) + \sin(f(x))$ ,  $(\forall) x \in \square$ , are primitive pe  $\square$ , să se arate că  $f$  are primitive pe  $\square$ .

Soluție. Funcția  $h: \square \rightarrow \square$ ,  $h(x) = x + \sin x$ ,  $(\forall) x \in \square$ , este continuă și bijectivă. Deoarece funcția  $f$  este injectivă rezultă că  $g = h \circ f$  este injectivă și cum  $g$  are primitivă pe  $\square$ , deducem că  $g$  are proprietatea lui Darboux pe  $\square$ . Rezultă că  $g$  este strict monotonă și continuă. Din  $h$  continuă și bijectivă, iar  $g$  continuă, rezultă  $f = h^{-1} \circ g$  este continuă, deci  $f$  are primitive pe  $\square$ .

R1.4.8. Să se determine toate funcțiile  $f: \square \rightarrow (0, \infty)$  care satisfac ecuația funcțională  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x) \cdot f(y)}$  pentru orice  $x, y \in \square$  știind că funcția compusă  $\ln \circ f$  are primitive pe  $\square$ .

Soluție. Deoarece  $f > 0$  putem logaritma relația din ipoteză și obținem

$$\ln f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln f(x) + \frac{1}{2} \ln f(y) \text{ pentru orice } x, y \in \square,$$

de unde notând  $\varphi(x) = \ln f(x)$  avem:

$$2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ pentru orice } x, y \in \square.$$

Punem  $y = 0$  în relația precedentă și obținem

$$2\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x) + \varphi(0) \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Folosim ultimele două relații și obținem

$$\varphi(x+y) = 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \varphi(0) = \varphi(x) + \varphi(y) - \varphi(0), \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R},$$

sau notând  $u(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$  avem

$$u(x+y) = u(x) + u(y) \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Cum funcția  $u$  este primitivabilă ca și diferență de două funcții primitivabile, utilizând Propoziția 1.1.23 găsim  $u(x) = kx$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$  cu  $k \in \mathbb{R}$  arbitrar. În sfârșit,  $\varphi(x) = k \cdot x + \varphi(0)$  și  $f(x) = e^{k \cdot x + \varphi(0)}$ , de unde  $f(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$  și  $k \in \mathbb{R}$  constante arbitrare.

R1.4.9. Să se calculeze o primitivă pe  $\mathbb{R}$  a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dată prin  $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ .

Soluție. Funcția  $f$  fiind continuă pe  $\mathbb{R}$ , admite primitivă. Ea este periodică, cu perioada principală  $T = 2\pi$ . Pentru  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ ,

$$f(x) = \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2} = \left| \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right| = \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}$$

și

$$F_0(x) = -2 \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2}$$

este o primitivă a restricției  $f \Big|_{\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]}$ . Aplicând Teorema 1.1.21 rezultă că

funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$F(x) = F_0(x - 2k\pi) + k \left( F_0\left(\frac{5\pi}{2}\right) - F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

pentru orice  $x \in \left( (4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2} \right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , este o primitivă a lui  $f$ .

Deoarece  $F_0\left(\frac{5\pi}{2}\right) - F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sqrt{2}$  și  $\cos(k\pi) = (-1)^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , obținem

că

$$F(x) = 2 \cdot (-1)^{k+1} \cdot \left( \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) + 4k\sqrt{2},$$

pentru orice  $x \in \left( (4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2} \right]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  este o primitivă pentru  $f$ .

R1.4.10. Arătați că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \left[ \cos\left(\frac{1}{x-5}\right) - \frac{2}{x-5} \cdot \sin\left(\frac{1}{x-5}\right) \right] \cdot e^{-\frac{1}{(x-5)^2}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{5\} \\ 0, & x = 5 \end{cases}$$

are primitive pe  $\mathbb{R}$ .

Soluție. Fie funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (\cos x - 2x \cdot \sin x) \cdot e^{-x^2}$ . Funcția  $g$  este continuă pe  $\mathbb{R}$  iar  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G(x) = \sin x \cdot e^{-x^2}$  este o primitivă a lui  $g$ .

Deoarece  $M(g) = \lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{G(y)}{y} = \lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{\sin y}{y \cdot e^{y^2}} = 0$ , utilizând Propoziția 1.3.1

deducem că funcția  $f$  are primitive pe  $\mathbb{R}$ .

R1.4.11. Fie  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = 0.$$

Să se arate că funcția  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \begin{cases} g'\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  admite primitive.

Soluție. Se aplică Propoziția 1.3.5 pentru funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată de problemă.

R1.4.12. Fie  $p \in \mathbb{R}$ . Funcția  $h_p: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin

$$h_p(x) = \begin{cases} (\cos^n x) \cdot \cos\left(\frac{1}{\sin x}\right), & x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ p, & x = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}^*,$$

admite primitive dacă și numai dacă  $p = 0$ .

Soluție. Avem  $h_p = h_0 + v$ , unde  $v(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ p, & x = 0 \end{cases}$ .

Vom arăta că  $h_0$  admite primitive, de unde va rezulta că  $h_p$  admite primitive  $\Leftrightarrow p = 0$ .

Aplicând Propoziția 1.3.5 pentru funcțiile  $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$  și  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \sin x$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ , rezultă că pentru  $n=1$  funcția  $h_0$  admite primitive.

Pentru  $n \geq 2$  avem  $h_0 = r \cdot t$ , unde  $r, t : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  sunt date prin

$$r(x) = \begin{cases} \cos x \cdot \cos\left(\frac{1}{\sin x}\right), & x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ și } v(x) = \cos^{n-1} x, \quad (\forall) x \in (-\pi, \pi).$$

Cum  $r$  admite primitive iar  $g$  este derivabilă cu derivata continuă pe  $(-\pi, \pi)$ , va rezulta că  $h_0 = r \cdot t$  este primitivabilă și pentru  $n \geq 2$ .

## 2. Metode de calcul al primitivelor

### 2.1. Aspecte teoretice

În acest paragraf vom reaminti metoda integrării prin părți, "prima metodă de schimbare de variabilă" și vom prezenta pe scurt "a doua metodă de schimbare de variabilă" care nu este prevăzută în programa analitică a clasei a XII-a. Vom remarca faptul că în realitate avem o singură formulă de schimbare de variabilă, denumirile de prima și a doua formulă fiind pur convenționale.

**2.1.1. Teoremă (integrarea prin părți).** Fie  $I$  un interval,  $I \subseteq \mathbf{R}$ ,  $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții derivabile, cu derivate continue pe  $I$ , atunci funcțiile  $fg$ ,  $f'g$  și  $fg'$  admit primitive și ele sunt legate prin relația:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

**2.1.2. Teoremă (prima metodă de schimbare de variabilă).** Fie  $I, J$  intervale din  $\mathbf{R}$  și fie  $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$  două funcții cu proprietățile:

Ia)  $\varphi$  este derivabilă pe  $I$

Ib)  $f$  admite primitive (fie  $F$  o primitivă a sa).

Atunci funcțiile  $(f \circ \varphi)\varphi'$  admite primitive, iar funcția  $F \circ \varphi$  este o primitivă a sa, adică

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = (F \circ \varphi)(x) + C.$$

În practică ea se utilizează sub forma:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)} + C.$$

La prima metodă de schimbare de variabilă se caută să se pună funcția de integrat,  $h$ , sub forma  $h(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$  și o primitivă  $H$  a lui  $h$  se obține compunând o primitivă  $F$  a lui  $f$  cu funcția  $\varphi$ , deci  $H = F \circ \varphi$ .

Există situații când este mai ușor de găsit o primitivă a funcției  $h = (f \circ \varphi)\varphi'$  decât o primitivă a funcției  $f$ .

La a doua metodă de schimbare de variabilă se cunoaște o primitivă  $H$  a funcției  $h = (f \circ \varphi)\varphi'$  și se cere să se găsească o primitivă a funcției  $f$ .  $F$  se obține din  $H$  astfel:

$$F = H \circ \varphi^{-1}.$$

**2.1.3. Teoremă (a doua metodă de schimbare de variabilă).** Fie  $I, J$  intervale din  $\mathbf{R}$  și fie  $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$  două funcții cu proprietățile:

IIa)  $\varphi$  bijectivă, derivabilă, cu derivata nenulă pe  $I$

IIb) funcția  $h = (f \circ \varphi)\varphi'$  admite primitive (fie  $H$  o primitivă a sa).

Atunci funcția  $f$  admite primitive, iar funcția  $H \circ \varphi^{-1}$  este o primitivă a sa, adică

$$\int f(x)dx = (H \circ \varphi^{-1})(x) + C$$

**Demonstrație.** Funcția  $H$  fiind o primitivă a lui  $h$  este derivabilă și

$$H' = h = (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Însă din ipoteza IIa) rezultă că funcția inversă  $\varphi^{-1}$  este derivabilă pe  $J$ , deci  $H \circ \varphi^{-1}$  este derivabilă pe  $J$  și

$$\begin{aligned} (H \circ \varphi^{-1})(x) &= H'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = \\ &= (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x))\varphi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = \\ &= f(x)\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x), (\forall) x \in J \end{aligned}$$

Așadar, funcția  $H \circ \varphi^{-1}$  este o primitivă a lui  $f$ .

În practică ea se utilizează sub forma:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} + C$$

**2.1.4. Observație.** Fie  $f$  și  $\varphi$  două funcții  $\varphi: I \rightarrow J$ ,  $f: J \rightarrow \mathbf{R}$  cu proprietățile:

- $\varphi$  bijectivă, derivabilă cu derivata continuă și nenulă pe  $I$
- $f$  continuă pe  $J$ .

Ipotezele a) și b) implică atât ipotezele Ia) și Ib) din prima metodă de schimbare de variabilă, cât și ipotezele IIa) și IIb) din a doua metodă de schimbare de variabilă. În acest caz, pentru o funcție  $F: J \rightarrow \mathbf{R}$  are loc echivalența:

$$F \text{ este o primitivă a lui } f \Leftrightarrow F \circ \varphi \text{ este o primitivă a lui } (f \circ \varphi)\varphi'$$

Cu alte cuvinte în ipotezele a) și b) cele două metode de schimbare de variabilă sunt echivalente, deci în realitate avem o singură formulă de schimbare de variabilă, denumirile de prima formulă și a doua formulă sunt pur convenționale. Există însă mai multe variante de aplicare a ei care depind de expresia particulară a funcției de integrat și de experiența celui care aplică formula.

**2.1.5. Exemple.** Să se calculeze:

$$\text{a) } \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx, x \in \mathbf{R}; \quad \text{b) } \int \sqrt{\frac{2+x}{3-x}} dx, x \in (-2,3).$$

**Soluție.** a) Funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$  este continuă. Luăm funcția

$\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, \varphi(t) = \ln t, \varphi$  este bijectivă, derivabilă,  $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$  cu



$\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in (0, \infty)$ . Căutăm o primitivă a funcției  $h(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{t}{1+t}$ .

Avem  $\int h(t)dt = t - \ln(1+t) + C$ . Notând cu  $H(t) = t - \ln(1+t)$  primitiva lui  $h$ , rezultă în baza teoremei 2.1.3

$$\int f(x)dx = (H \circ \varphi^{-1})(x) + C = e^x - \ln(1 + e^x) + C.$$

b) Notăm  $\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = t \Rightarrow x = \frac{3t^2 - 2}{t^2 + 1} = \varphi(t), \varphi: (0, \infty) \rightarrow (-2, 3)$ .

$\varphi$  este bijectivă, derivabilă  $\varphi'(t) = \frac{10t}{(t^2 + 1)^2}, \varphi'(t) \neq 0, \forall t \in (0, \infty)$ .

Căutăm o primitivă a funcției  $h(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{10t^2}{(t^2 + 1)^2}$ .

Avem  $\int h(t)dt = \frac{-5t}{(t^2 + 1)} + 5\text{arctgt} + C$  (se aplică formula de integrare prin părți), rezultă în baza teoremei 2.1.3

$$\int f(x)dx = -5\sqrt{6+x-x^2} + 5\text{arctg}\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} + C.$$

## 2.2. Calculul primitivelor unor funcții iraționale

**2.2.1.** Calculul primitivelor de forma  $\int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \dots, \sqrt[n_k]{ax+b})dx$ ,

unde  $R$  este o funcție rațională de  $k+1$  variabile,  $n_i \in \mathbf{N}^*, n_i \geq 2, i = \overline{1, k}$ .

Fie  $n$  cel mai mic multiplu comun al numerelor  $n_1, \dots, n_k$ . Atunci  $(\forall)i = \overline{1, k}, (\exists)m_i \in \mathbf{N}$  astfel încât  $n = n_i m_i$ . Se face substituția  $t = \sqrt[n]{ax+b}$ .

Atunci  $\sqrt[n]{ax+b} = \sqrt[n]{(ax+b)^{m_i}} = t^{m_i}, x = \frac{t^n - b}{a}$  și  $dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$ .

Prin urmare primitiva dată devine:

$$\int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t^{m_1}, \dots, t^{m_k}\right) \frac{n}{a}t^{n-1}dt = \int R_1(t)dt,$$

unde  $R_1$  este o funcție rațională în variabila  $t$ .

R2.2.1. Calculați  $\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}} dx, x > 0$ .

**Soluție.** Se face substituția  $t = \sqrt[6]{x+1}$ . Obținem  $x = t^6 - 1, dx = 6t^5 dt$ , deci

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \frac{1+t^3}{1-t^2} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{1-t+t^2}{1-t} t^5 dt = 6 \int t^5 dt + 6 \int \frac{t^7}{1-t} dt = \\ &= t^6 + 6 \left[ \frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{6} t^6 + \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{3} t^3 + t + \ln(t-1) \right] + C. \end{aligned}$$

Înlocuim mai departe  $t$  cu  $\sqrt[6]{x+1}$ .

**2.2.2.** Calculul primitivelor de forma  $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ , unde  $R$  este o funcție rațională de două variabile,  $n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$ .

Se face substituția  $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$  care conduce la primitiva dintr-o funcție rațională în  $t$ .

R2.2.2. Calculați  $\int \frac{1}{x+1} \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx, x \in (0,2)$ .

**Soluție.** Se face substituția  $\sqrt{\frac{x}{2-x}} = t$ , obținem  $x = \frac{2t^2}{t^2+1}$ ,  
 $dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt$ . Avem

$$F(t) = \int \frac{4t^2}{(3t^2+1)(t^2+1)} dt, \quad \frac{4t^2}{(3t^2+1)(t^2+1)} = \frac{At+B}{3t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1},$$

de unde  $A = C = 0, B = -2, D = 2$ .

Deci  $F(t) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}t) + 2 \operatorname{arctg}t + C$ , și înlocuind  $t$  cu  $\sqrt{\frac{x}{2-x}}$  obținem

$$\int \frac{1}{x+1} \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3x}{2-x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{2-x}} + C.$$

**2.2.3.** Calculul primitivelor de forma  $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ , unde  $R$  este o funcție rațională de două variabile.

**Metoda I.** Calculul acestor integrale se reduce la calculul unor integrale din funcții raționale folosind niște substituții adecvate numite **substituțiile lui Euler**. Se deosebesc următoarele substituții:

(E1)  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$ , dacă  $a > 0$ . Semnul (+) sau (-) se alege în așa fel încât să fie îndeplinite condițiile cerute la schimbarea de variabilă.

(E2)  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$ , dacă  $c \geq 0$ .

(E3)  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0)$ , dacă  $\Delta > 0$ , unde am notat cu  $x_0$  o rădăcină a ecuației:  $ax^2 + bx + c = 0$ .

**Observație.** (i) Dacă  $\Delta = 0$  expresia de sub radical este un pătrat perfect și funcția de integrat este rațională.

(ii) Deoarece prin ridicare la pătrat în toate cele trei cazuri obținem  $x = R_1(t)$ ,  $dx = R_1'(t)dt$  și cum  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = R_2(t)$ , unde  $R_1$  și  $R_2$  sunt funcții raționale, deducem că integrala se reduce la calculul primitivelor unei funcții raționale.

**Metoda II.** Se aduce trinomialul  $ax^2 + bx + c$  la forma canonică:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

și făcând substituția  $t = x + \frac{b}{2a}$ , integrala se aduce sub forma:

$$(1) \int R(t, \sqrt{t^2 + m^2}) dt \quad (2) \int R(t, \sqrt{t^2 - m^2}) dt$$

(3)  $\int R(t, \sqrt{m^2 - t^2}) dt$  care se calculează folosind următoarele schimbări de variabilă:

$$(1) t = mtgu \text{ sau } t = mshu$$

$$(2) t = \frac{m}{\cos u} \text{ sau } t = mchu$$

$$(3) t = m \sin u \text{ sau } t = mthu$$

și se ajunge la calculul primitivelor unei funcții trigonometrice sau hiperbolice (vezi 2.3).

R2.2.3. Calculați:

$$a) \int \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx, x \in \mathbf{R}; \quad b) \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2 - x + 1}}, x \in (2, \infty),$$

$$c) \int \frac{x^2}{(x+1)\sqrt{x^2 - 1}} dx, x \in (1, \infty).$$

**Soluție.** a) Se face substituția (E1)  $\sqrt{x^2+x+1} = -x+t$ , de unde  $x = \frac{t^2-1}{2t+1}$ ,  $dx = \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2} dt$ . Avem

$$F(t) = \int \frac{2t(t^2+t+1)}{(t+1)(2t+1)^2} dt = \int \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{4t^2+t+1}{(t+1)(2t+1)^2} \right] dt$$

$$\frac{4t^2+t+1}{(t+1)(2t+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{2t+1} + \frac{C}{(2t+1)^2}$$

și prin identificarea coeficienților obținem:  $A=4, B=-6, C=3$ .

$$\text{Deci } F(t) = \frac{1}{2}t - 2\ln(t+1) + \frac{3}{2}\ln(2t+1) + \frac{3}{4}(2t+1) + C$$

$$F(t) = 2t - 2\ln(t+1) + \frac{3}{2}\ln(2t+1) + C$$

Așadar

$$\int \frac{x + \sqrt{x^2+x+1}}{x+1 + \sqrt{x^2+x+1}} dx = 2(x + \sqrt{x^2+x+1}) - 2\ln(x+1 + \sqrt{x^2+x+1}) + \frac{3}{2}\ln(2x+1 + 2\sqrt{x^2+x+1}) + C.$$

b) Se face substituția (E2)  $\sqrt{x^2-x+1} = tx-1$ , de unde  $x = \frac{2t-1}{t^2-1}$ ,  $dx = \frac{-2(t^2-t+1)}{(t^2-1)^2} dt$ . Avem

$$F(t) = 2 \int \frac{dt}{2t^2-2t-1} = \frac{4}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{2t-1-\sqrt{3}}{2t-1+\sqrt{3}} \right| + C, \text{ de unde}$$

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{4}{3} \ln \left| \frac{2\sqrt{x^2-x+1} - (1+\sqrt{3})x+2}{2\sqrt{x^2-x+1} - (1-\sqrt{3})x+2} \right| + C.$$

c) Se face substituția (E3)  $\sqrt{x^2-1} = (x-1)t$ , de unde  $x = \frac{t+1}{t-1}$ ,  $dx = \frac{-2}{(t-1)^2} dt$ . Avem

$$F(t) = \int \frac{-(t+1)^2}{2t^2(t-1)^2} dt = \frac{1}{2} \int \left[ -\frac{4}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{4}{t-1} - \frac{4}{(t-1)^2} \right] dt =$$

$$= -2\ln t + \frac{1}{2t} + 2\ln(t-1) + \frac{2}{t-1} + C, \text{ de unde}$$

$$\int \frac{x^2}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} dx = 2 \ln \left( 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{x^2-1} + x + C.$$

Primitivele următoare sunt cazuri particulare ale 2.2.3 deci se pot utiliza substituțiile lui Euler. Există însă niște substituții mai simple pe care le vom prezenta în continuare:

(i) Calculul primitivelor de forma  $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$

Metoda generală constă în a aduce trinomialul de sub radical la forma canonică  $ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$  și apoi făcând substituția  $t = x + \frac{b}{2a}$ , integrala se reduce la una din formele:

$$(1) \int \sqrt{t^2 + m^2} dt; \quad (2) \int \sqrt{t^2 - m^2} dt; \quad (3) \int \sqrt{m^2 - t^2} dt$$

care se calculează astfel:

$$\begin{aligned} (1) \int \sqrt{t^2 + m^2} dt &= \int \frac{t^2 + m^2}{\sqrt{t^2 + m^2}} dt = \int t(\sqrt{t^2 + m^2})' dt + \int \frac{m^2}{\sqrt{t^2 + m^2}} dt = \\ &= t\sqrt{t^2 + m^2} - \int \sqrt{t^2 + m^2} dt + m^2 \ln(t + \sqrt{t^2 + m^2}) \end{aligned}$$

de unde

$$(1) \int \sqrt{t^2 + m^2} dt = \frac{1}{2} t\sqrt{t^2 + m^2} + \frac{m^2}{2} \ln(t + \sqrt{t^2 + m^2}) + C. \text{ Analog}$$

$$(2) \int \sqrt{t^2 - m^2} dt = \frac{1}{2} t\sqrt{t^2 - m^2} - \frac{m^2}{2} \ln |t - \sqrt{t^2 - m^2}| + C \text{ și}$$

$$(3) \int \sqrt{m^2 - t^2} dt = \frac{1}{2} t\sqrt{m^2 - t^2} + \frac{m^2}{2} \arcsin \frac{t}{m} + C.$$

R2.2.4. Calculați  $\int \sqrt{x^2 + 3x + 2} dx, x \geq -1$ .

**Soluție.**  $x^2 + 3x + 2 = \left( x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$ . Se face substituția  $x + \frac{3}{2} = t$ ,

$dx = dt$ . Avem

$$\int \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} dt = \frac{1}{2} t\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{8} \ln \left| t - \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} \right| + C, \text{ de unde}$$

$$\int \sqrt{x^2 + 3x + 2} dx = \frac{2x+3}{4} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - \frac{1}{8} \ln \left( x + \frac{3}{2} - \sqrt{x^2 + 3x + 2} \right) + C.$$

(ii) Calculul primitivelor de forma  $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ , unde  $P_n(x)$  este

un polinom de gradul  $n$  ( $n \geq 1$ ).

Punem

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (*)$$

unde  $Q_{n-1}(x)$  este un polinom de gradul  $(n-1)$  cu coeficienți nedeterminați și  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Coeficienții polinomului  $Q_{n-1}(x)$  și numărul  $p$  sunt determinate derivând (\*).

**Observație.** Pentru a calcula primitivele funcției  $\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$  se aduce trinomialul de sub radical la forma canonică și apoi se face substituția  $t = x + \frac{b}{2a}$ .

R2.2.5. Calculați:

a)  $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+2}} dx$ ; b)  $\int x^2 \sqrt{x^2+4} dx$ .

**Soluție.** a)  $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}} = a\sqrt{x^2+2x+2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}},$

$a, p \in \mathbf{R}$ . Prin derivare obținem

$$\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{a(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

de unde egalând coeficienții avem:  $a=1, \lambda=2$ . Deci

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx &= \sqrt{x^2+2x+2} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2+2x+2} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \\ &= \sqrt{x^2+x+2} + 2 \ln(x+1+\sqrt{x^2+x+2}) + C. \end{aligned}$$

b)  $\int x^2 \sqrt{x^2+4} dx = \int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} dx =$

$$= (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{x^2+4} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

Derivând obținem:

$$\frac{x^4 + 4x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} = (3ax^2 + 2bx + c)\sqrt{x^2 + 4} + \frac{(ax^3 + bx^2 + cx + d)x}{\sqrt{x^2 + 4}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

de unde  $x^4 + 4x^2 = (3ax^2 + 2bx + c)(x^2 + 4) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)x + \lambda$   
și identificând coeficienții acelorași puteri ale lui  $x$  găsim:

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = 0, \quad \lambda = -2.$$

Prin urmare

$$\int x^2 \sqrt{x^2 + 4} dx = \left( \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x \right) \sqrt{x^2 + 4} - 2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) + C.$$

(iii) Calculul primitivelor de forma  $\int \frac{dx}{(x-d)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ , unde

$n \in \mathbf{N}^*$ .

Aceste integrale se reduc la cele precedente cu ajutorul schimbării de variabilă  $t = \frac{1}{x-d}$ .

R2.2.6. Calculați:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}, x > -1; \quad \text{b) } \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 2x + 3}}, x > 0.$$

**Soluție.** a) Se face substituția  $t = \frac{1}{x+1}$ , de unde  $x = \frac{1}{t} - 1$ ,

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}, \quad dx = -\frac{1}{t^2} dt. \text{ Avem}$$

$$\int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + C \quad \text{\textcircled{a.m.d}}$$

b) Se face substituția  $t = \frac{1}{x}$ , de unde  $x = \frac{1}{t}$ ,  $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = \frac{\sqrt{1 - 2t + 3t^2}}{t}$ ,

$$dx = -\frac{1}{t^2} dt. \text{ Avem}$$

$$\int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^2} \frac{\sqrt{1 - 2t + 3t^2}}{t}} = \int \frac{-tdt}{\sqrt{3t^2 - 2t + 1}}.$$

$3t^2 - 2 + 1 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$  și notând  $t - \frac{1}{3} = u$ ,  $dt = du$ , avem:

$$\int \frac{-\left(u + \frac{1}{3}\right)du}{\sqrt{3u^2 + \frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{-u - \frac{1}{3}}{\sqrt{u^2 + \frac{2}{9}}} du = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{u^2 + \frac{2}{9}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \ln\left(u + \sqrt{u^2 + \frac{2}{9}}\right) + C \text{ și}$$

revenind obținem:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 2x + 3}} = -\frac{1}{3x} \sqrt{x^2 - 2x + 3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{x\sqrt{3}} \right) + C.$$

**2.2.4.** Calculul primitivelor de forma (i.e. binome)  $\int x^m (ax^n + b)^p dx$ ,

unde  $a, b \in \mathbf{R}$ ;  $m, n, p \in \mathbf{Q}$  și care îndeplinesc una din condițiile de mai jos (numite **condițiile lui Cebâșev**):

(C1)  $p \in \mathbf{Z}$ , unde  $\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$ , atunci se face substituția  $t = (x^n)^{1/s}$

(C2)  $\frac{m+n}{n} \in \mathbf{Z}$ , unde  $p = \frac{r}{s}$ , atunci se face substituția  $t = (ax^n + b)^{1/s}$

(C3)  $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$ , unde  $p = \frac{r}{s}$ , atunci se face substituția  $t = (a + bx^{-n})^{1/s}$

Aceste substituții reduc calculul primitivei  $\int x^m (ax^n + b)^p dx$  la calculul primitivei dintr-o funcție rațională.

Într-adevăr

(C1) cu substituția  $t = (x^n)^{1/s}$ , avem  $x = (t^s)^{1/n}$ ,  $dx = \frac{s}{n} t^{\frac{s}{n}-1} dt$  de unde

$$\int (t^s)^{\frac{m}{n}} (at^s + b)^p \frac{s}{n} t^{\frac{s}{n}-1} dt = \frac{s}{n} \int t^{r-1} (at^s + b)^p dt = \int R(t) dt$$

(C2) cu substituția  $t = (ax^n + b)^{1/s}$ , avem

$$x = \left( \frac{t^s - b}{a} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{s}{na} \left( \frac{t^s - b}{a} \right)^{\frac{1}{n}-1} t^{s-1} dt$$

de unde

$$\int \left( \frac{t^s - b}{a} \right)^{\frac{m}{n}} t^{sp} \frac{s}{na} \left( \frac{t^s - b}{a} \right)^{\frac{1}{n}-1} t^{s-1} dt = \frac{s}{na} \int \left( \frac{t^s - b}{a} \right)^{\frac{m+1}{n}-1} t^{r+s-1} dt = \int R(t) dt$$

(C3) cu substituția  $t = (a + bx^{-n})^{1/s}$ , avem



$$x = \left( \frac{b}{t^s - a} \right)^{1/n}, \quad dx = \frac{-s}{nb} \left( \frac{b}{t^s - a} \right)^{\frac{1}{n}+1} t^{s-1} dt \quad \text{de unde}$$

$$\int \left( \frac{b}{t^s - a} \right)^{\frac{m}{n}} \left( \frac{bt^s}{t^s - a} \right)^p \frac{-s}{nb} \left( \frac{b}{t^s - a} \right)^{\frac{1}{n}+1} t^{s-1} dt =$$

$$= -\frac{s}{nb} \int \left( \frac{b}{t^s - a} \right)^{\frac{m+1}{n}+p+1} t^{r+s-1} dt = \int R(t) dt.$$

**Observație.** P.L. Cebâșev a arătat că, dacă  $p, \frac{m+1}{n}$  și  $\frac{m+1}{n} + p \notin \mathbf{Z}$ , atunci primitiva dată nu se poate reduce la primitiva unei funcții raționale. Calculul primitivei nu poate fi făcut prin mijloace elementare.

R2.2.7. Calculați:

a)  $\int \frac{x^4 \sqrt{x}}{(1+x\sqrt{x})^2} dx, x > 0$ ; b)  $\int x^3 \sqrt{(1-\sqrt[3]{x^2})^3} dx, x < 1$ ;

c)  $\int x^{-1/2} (1-x^{-4/3})^{-5/8} dx$ .

**Soluție.** a)  $\frac{x^4 \sqrt{x}}{(1+x\sqrt{x})^2} = x^{5/4} (1+x^{3/2})^{-2}$  de unde  $m = \frac{5}{4}, n = \frac{3}{2}$ ,

$p = -2 \in \mathbf{Z}$ , deci suntem în cazul (C1).  $\frac{m+1}{n} = \frac{3}{2}$ . Facem substituția

$t = (x^{3/2})^{1/2} = x^{3/4}$ , de unde  $x = t^{4/3}$ ,  $dx = \frac{4}{3} t^{1/3} dt$  deci

$$F(t) = \int t^{\frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 4}} (1+t^{\frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 2}})^{-2} \cdot \frac{4}{3} t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{4}{3} \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt =$$

$$= \frac{4}{3} \int t \left[ \frac{-1}{2(1+t^2)} \right] dt = \frac{4}{3} \left[ -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctgt} \right] + C$$

Deci  $\int \frac{x + \sqrt[4]{x}}{(1+x\sqrt{x})^2} dx = \frac{-2\sqrt[4]{x^3}}{3(1+x\sqrt{x})} + \frac{2}{3} \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^3} + C$

**Observație.** Pentru această integrală se putea aplica și substituția indicată la 2.2.1 și anume  $t = \sqrt[4]{x}$  care conducea la  $F(t) = \int \frac{4t^8}{(1+t^6)^2} dt$ , de

unde cu o nouă substituție  $u = t^3$  se ajunge la  $F(u) = \frac{4}{3} \int \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du$ , ș.a.m.d.

b)  $x^3 \sqrt{(1 - \sqrt[3]{x^2})^3} = x^3 (1 - x^{2/3})^{3/2}$  de unde  $m = 3$ ,  $n = \frac{2}{3}$ ,  $p = \frac{3}{2}$ ,  
 $\frac{m+1}{n} = 6 \in \mathbf{Z}$  deci suntem în cazul (C2). Facem substituția  $t = (1 - x^{2/3})^{1/2}$ , de  
unde  $x = (1 - t^2)^{3/2}$ ,  $dx = -3t(1 - t^2)^{1/2} dt$ . Avem

$$F(t) = \int (1 - t^2)^{9/2} (t^2)^{3/2} (-3t)(1 - t^2)^{1/2} dt = -3 \int t^4 (1 - t^2)^5 dt, \text{ ș.a.m.d.}$$

c)  $m = -\frac{1}{2}$ ,  $n = -\frac{4}{3}$ ,  $p = -\frac{5}{8}$ ,  $\frac{m+1}{n} = -\frac{3}{8}$ ,  $\frac{m+1}{n} + p = -1$  deci suntem  
în cazul (C3). Facem substituția  $t = (x^{4/3} - 1)^{1/8}$ , de unde  $x = (t^8 + 1)^{3/4}$ ,  
 $dx = 6t^7 (1 + t^8)^{-1/4}$ . Avem  $F(t) = 6 \int t^2 dt = 2t^3 + C$ , de unde

$$\int x^{-1/2} (1 - x^{-4/3})^{-5/8} dx = 2(x^{4/3} - 1)^{3/8} + C.$$

## 2.3. Calculul primitivelor funcțiilor trigonometrice și hiperbolice

### 2.3.1. Calculul primitivelor de forma

$$(1) \int R(\operatorname{tg} x) dx; \quad (2) \int R(\sin x, \cos x) dx; \quad (3) \int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) dx$$

$$(4) \int R(\sin nx, \cos nx, \operatorname{tg} nx, \operatorname{ctg} nx) dx, \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad n \geq 2$$

unde  $R$  este o funcție rațională.

(3) și (4): Deoarece  $\sin nx, \cos nx, \operatorname{tg} nx, \operatorname{ctg} nx$  sunt funcții raționale de  $\sin x$  și  $\cos x$  rezultă că funcția

$$R(\sin nx, \cos nx, \operatorname{tg} nx, \operatorname{ctg} nx) = R_1(\sin x, \cos x)$$

și deci primitivele de tipul (4) și (3) se reduc la primitive de tipul (2).

$$(2): \text{ Deoarece } \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \text{ și } \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \text{ rezultă că primitivele de tipul}$$

(2) se reduc la primitive de tipul (1) cu substituția  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

(1): Pentru a calcula primitiva  $\int R(\operatorname{tg} x)$  se face substituția:  $t = \operatorname{tg} x$ , de unde

$dx = \frac{1}{1+t^2} dt$ , deci avem de calculat  $\int R(t) \frac{1}{1+t^2} dt = \int R_1(t) dt$ , unde  $R_1$  este o funcție rațională.

R2.3.1. Calculați:

a)  $\int \frac{1+\operatorname{tg}x}{\sin 2x} dx$ ; b)  $\int \frac{dx}{a+b \cos x}, a^2+b^2 \neq 0$ .

**Soluție.** a) Se face substituția  $\operatorname{tg}x = t, \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

$$F(t) = \int \frac{(1+t)}{2t} dt = \frac{1}{2} \ln t + \frac{1}{2} t + C,$$

de unde  $\int \frac{1+\operatorname{tg}x}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}x) + \frac{\operatorname{tg}x}{2} + C$

b) Se face substituția  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \cos x = \frac{2t}{1+t^2}, x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$$F(t) = \int \frac{2dt}{(a-b)t^2 + (a+b)}.$$

Dacă  $a=b$  atunci  $F(t) = \frac{2t}{a+b} + C$ , de unde  $\int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$ .

Dacă  $a=-b$  atunci  $\int \frac{dx}{a+b \cos x} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C$ .

Dacă  $|a| \neq |b|$  și notăm  $\lambda^2 = \left| \frac{a+b}{a-b} \right|$ , atunci  $F(t) = \frac{2}{a-b} \int \frac{dt}{t^2 \pm \lambda^2}$ , deci

$$F(t) = \frac{2}{(a-b)\lambda} \operatorname{arctg} \frac{t}{\lambda} + C \quad \text{sau} \quad F(t) = \frac{1}{(a-b)\lambda} \ln \frac{t-\lambda}{t+\lambda} + C.$$

Calculul primitivelor de tipul 2.3.1 se simplifică atunci când funcția  $R$  are proprietăți suplimentare:

**2.3.2.** Calculul primitivelor de forma  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , unde  $R$  este o

funcție rațională de două variabile  $u$  și  $v$  care satisface una din proprietățile:

(1)  $R(-u, v) = -R(u, v)$ . Atunci se face substituția  $t = \cos x$ .

(2)  $R(u, -v) = -R(u, v)$ . Atunci se face substituția  $t = \sin x$ .

(3)  $R(-u, -v) = R(u, v)$ . Atunci se face substituția  $t = \operatorname{tg} x$ .

(4)  $R(-u, v) = R(u, v)$ . În acest caz  $R(\sin x, \cos x) = R_2(\cos x)$  și se face substituția  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

(5)  $R(u, -v) = R(u, v)$ . În acest caz  $R(\sin x, \cos x) = R_2(\sin x)$  și se face substituția  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

În primele trei cazuri calculul primitivei date se reduce la calculul primitivelor unei funcții raționale. În cazurile (4) și (5) calculul primitivei date se reduce la calculul unei primitive mai simple, care se poate calcula făcând substituția  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

Într-adevăr:

(1) dacă  $R(-u, v) = -R(u, v)$ , funcția  $R$  este impară în  $u$ , atunci  $\frac{R(u, v)}{u}$  este pară în  $u$ , deci  $\frac{R(u, v)}{u} = R_1(u^2, v)$ , prin urmare  $R(u, v) = uR_1(u^2, v)$ .

Pentru cazul studiat avem:

$$R(\sin x, \cos x) = \sin x \cdot R_1(\sin^2 x, \cos x) = -R_1(1 - \cos^2 x, \cos x)(\cos x)'$$

Făcând substituția  $t = \cos x$ , integrala devine

$$-\int R_1(1 - t^2, t) dt = \int R_2(t) dt$$

unde  $R_2$  este o funcție rațională.

(2) dacă  $R(u, -v) = -R(u, v)$ , funcția  $R$  este impară în  $v$ , atunci ca mai sus

$$R(\sin x, \cos x) = \cos x \cdot R_1(\sin x, \cos^2 x) = R_1(\sin x, 1 - \sin^2 x)(\sin x)'$$

Făcând substituția  $t = \sin x$ , integrala devine

$$\int R_1(t, 1 - t^2) dt = \int R_2(t) dt.$$

(3) dacă  $R(-u, -v) = R(u, v)$ , funcția  $R$  este pară în raport cu  $u$  și  $v$  și deci se poate exprima astfel:

$$R(u, v) = R\left(v \cdot \frac{u}{v}, v\right) = R_1\left(v^2, \frac{u}{v}\right).$$

$$\text{Avem } \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_1(\cos^2 x, \operatorname{tg} x) dx =$$

$$= \int R_1\left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \operatorname{tg} x\right) dx = \int R_2(\operatorname{tg} x) dx$$

care se calculează făcând substituția  $t = \operatorname{tg} x$  (vezi 2.3.1).

(4) dacă  $R(-u, v) = R(u, v)$ , funcția  $R$  este pară în raport cu  $u$  și atunci

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_1(\sin^2 x, \cos x) dx =$$

$$\int R_1(1 - \cos^2 x, \cos x) dx = \int R_2(\cos x) dx$$

(5) analog cu (4).

R2.3.2. Calculați:

$$\text{a) } \int \frac{\sin x}{1+2\cos x+\sin^2 x} dx, \quad \text{b) } \int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x} dx;$$

$$\text{c) } \int \frac{\cos x}{\cos^3 x+\sin^3 x} dx.$$

**Soluție.** a) Fie  $R(u, v) = \frac{u}{1+2v+u^2}$ . Avem  $R(-u, v) = -R(u, v)$ , deci suntem în cazul (1). Facem substituția  $t = \cos x$ ,  $\sin^2 x = 1-t^2$ ,  $dt = -\sin x dx$ . Avem

$$F(t) = \int \frac{dt}{t^2-2t-2} = \int \frac{dt}{(t-1)^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{3}}{t-1+\sqrt{3}} \right| + C,$$

de unde  $\int \frac{\sin x}{1+2\cos x+\sin^2 x} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\cos x-1-\sqrt{3}}{\cos x-1+\sqrt{3}} \right| + C.$

b) Fie  $R(u, v) = \frac{2uv}{u^4+v^4}$ . Avem  $R(u, -v) = -R(u, v)$ , deci suntem în cazul (2). Facem substituția  $t = \sin x$ ,  $dt = \cos x dx$ . Avem

$$F(t) = \int \frac{2tdt}{t^4+(1-t^2)^2} = \int \frac{tdt}{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)' dt}{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \text{arctg} \frac{t^2-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + C = \text{arctg}(2t^2-1) + C.$$

Deci  $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x} dx = \text{arctg}(2\sin^2 x-1) + C.$

c) Fie  $R(u, v) = \frac{v}{u^3+v^3}$ . Avem  $R(-u, -v) = R(u, v)$ , deci suntem în cazul

(3). Facem substituția  $t = \text{tg} x$ .  $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$ ,

$$\frac{\cos x}{\cos^3 x+\sin^3 x} = \frac{1}{\cos^2 x+\text{tg} x \cdot \sin^2 x} = \frac{t^2+1}{t^3+1}$$

$$F(t) = \int \frac{dt}{t^3+1} = \frac{1}{3} \ln|t+1| - \frac{1}{3} \int \frac{t-2}{t^2-t+1} dt = \frac{1}{3} \ln|t+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2t-1-3}{t^2-t+1} dt =$$

$$= \frac{1}{3} \ln |t+1| - \frac{1}{6} \ln(t^2 - t + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C.$$

De aici  $\int \frac{\cos x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx = \frac{1}{6} \ln \frac{(1 + \operatorname{tg} x)^2}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2 \operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3}} + C.$

**2.3.3.** Calculul primitivelor de forma:

(1)  $\int R(\operatorname{th} x) dx$ ; (2)  $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$ ; (3)  $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x) dx$  și

(4)  $\int R(\operatorname{sh} n x, \operatorname{ch} n x, \operatorname{th} n x) dx, n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$

unde  $R$  este o funcție rațională.

**Reamintim:**  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$

Funcțiile hiperbolice au proprietăți asemănătoare cu a funcțiilor trigonometrice. Mai precis:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1 \\ \operatorname{sh}^2 x &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1), \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1) \\ \operatorname{sh} x &= \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{th} x = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Există două metode de calcul a acestor primitive:

**Metoda I.** Facem substituția  $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1-t^2}$  pentru (1) și  $t = \operatorname{th} x$  pentru (2) și (3) și astfel calculul primitivelor (1), (2) și (3) se reduce la calculul primitivelor unor funcții raționale. Pentru a calcula (4) vom exprima  $\operatorname{sh} n x, \operatorname{ch} n x$  și  $\operatorname{th} n x$  ca funcție de  $\operatorname{sh} x$  și  $\operatorname{ch} x$ .

**Metoda a II-a.** Facem substituția  $e^x = t$ , atunci:

$$\operatorname{sh} x = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{t^2 + 1}{2t}, \quad \operatorname{th} x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{1}{t} dt$$

deci primitivele se reduc la calculul primitivelor unor funcții raționale.

**R2.3.3.** Calculați:

a)  $\int \operatorname{sh}^2 x dx$ ; b)  $\int \operatorname{th}^2 x dx$ .

**Soluție.** a) Facem substituția  $e^x = t, x = \ln t, dx = \frac{1}{t} dt$ .

$$F(t) = \int \left( \frac{t^2 - 1}{2t} \right)^2 \frac{1}{t} dt = \int \frac{(t^2 - 1)^2}{4t^3} dt = \frac{1}{4} \int \left( t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{t^3}{3} - 2t - \frac{1}{t} \right) + C$$

de unde  $\int \operatorname{sh}^2 x dx = \frac{1}{12} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{4e^x} + C$ .

b) Facem substituția  $\operatorname{th} x = t$ ,  $dx = \frac{1}{1-t^2} dt$ . Avem

$$F(t) = \int \frac{t^2}{1-t^2} dt = -t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C,$$

de unde  $\int \operatorname{th}^2 x dx = -\operatorname{th} x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x} \right| + C$ .

### 2.3.4. Calculul primitivelor de forma $\int \sin^m x \cos^n x dx$ , $m, n \in \mathbf{Z}$ .

**Metoda I.** Prin recurență. Vom nota  $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx$ .

Distingem următoarele cazuri:

(1) Dacă  $m, n \in \mathbf{Z}$ ,  $m \neq -1$ ,  $m+n \neq 0$  utilizând formula de integrare prin părți obținem:

$$I_{m,n} = \int \cos^{n-1} x \left( \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \right)' dx =$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} - \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+1} x \cos^{n-2} x (-\sin x) dx =$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx =$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} (I_{m,n-2} - I_{m,n})$$

de unde

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

(2) Dacă  $m, n \in \mathbf{Z}$ ,  $n \neq -1$ ,  $m+n \neq 0$  se obține în mod analog relația:

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$$

(3) Dacă  $m, n \in \mathbf{Z}$ ,  $m+n=0$  atunci primitiva de calculat este:

$$\int \operatorname{tg}^n x dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx$$

sau  $\int \operatorname{ctg}^n x dx = \frac{-1}{n-1} \operatorname{ctg}^{n-1} x - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x dx$

Într-adevăr:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^n x dx &= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^{n-2} x (\operatorname{tg} x)' dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx \\ \int \operatorname{ctg}^n x dx &= \int \operatorname{ctg}^{n-2} x \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \\ &= \int \operatorname{ctg}^{n-2} x (-\operatorname{ctg} x)' dx - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x dx = \frac{-1}{n-1} \operatorname{ctg}^{n-1} x - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x dx \end{aligned}$$

(4) Dacă  $m = n = -1$  obținem primitiva cunoscută  $\int \frac{dx}{\sin 2x}$ .

**Observație.** (i) Pentru  $n=0$  obținem din (2)

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

(ii) Pentru  $m=0$  obținem din (1):

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

(iii) Luând în (2):  $m := -n + 2$  și  $n := 0$  obținem

$$\int \frac{1}{\sin^{n-2} x} dx = \frac{\cos x}{(n-2)\sin^{n-1} x} + \frac{n-1}{n-2} \int \frac{1}{\sin^n x} dx$$

de unde  $\int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{-\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$

(iv) Luând în (1):  $m := 0$  și  $n := -n + 2$  obținem

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

**Metoda II.** Distingem următoarele cazuri:

(1) Dacă  $m + n$  impar, atunci  $m$  sau  $n$  este impar.

- dacă  $m$  este impar,  $m = 2k + 1$  atunci:

$$\sin^m x \cos^n x = \sin^{2k} x \cos^n x (-\cos x)' = (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x (-\cos x)'$$

și se face substituția  $\cos x = t$  care conduce la calculul primitivelor unei funcții raționale

- dacă  $n$  este impar se face substituția  $\sin x = t$



(2) Dacă  $m + n$  par, atunci:

- dacă  $m$  și  $n$  sunt impare procedăm ca mai sus

- dacă  $m$  și  $n$  sunt pare, se trece la arcul dublu sau se face substituția  $t = \operatorname{tg} x$ .

R2.3.4. Calculați:

a)  $\int \sin^{10} x \cos^3 x dx$ ; b)  $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$ ;

c)  $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ ; d)  $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ .

**Soluție.** a)  $\int \sin^{10} x \cos^3 x dx = \int \sin^{10} x (1 - \sin^2 x) (\sin x)' dx =$   
 $= \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13} + C$

b)  $\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \left( \frac{\sin 2x}{2} \right)^2 \frac{\cos 2x - 1}{2} dx =$   
 $= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cos 2x dx - \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx =$   
 $= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (\sin 2x)' dx - \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \frac{\sin^3 2x}{3} - \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C$

c)  $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{(\operatorname{tg} x)' dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) (\operatorname{tg} x)' dx = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$

d)  $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin x}{(1 - \cos^2 x)} dx$

Facem substituția  $\cos x = t$ ,  $\sin x dx = -dt$ . Avem

$$F(t) = - \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2} = - \int \frac{1 - t^2 + t^2}{(t^2 - 1)^2} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \int \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{2} \int t \left( \frac{-1}{t^2 - 1} \right)' dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{t}{2(t^2 - 1)} + C$$

Deci  $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + C$ .

**2.3.5.** Calculul primitivelor de forma

$$\int \sin \lambda x \sin \mu x dx; \quad \int \cos \lambda x \cos \mu x dx; \quad \int \sin \lambda x \cos \mu x dx; \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

Se vor utiliza relațiile trigonometrice cunoscute:

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

pentru  $a = \lambda x$  și  $b = \mu x$ . Primitivele date se reduc la primitive de forma  $\int \sin \alpha x dx$ ,  $\int \cos \beta x dx$ .

R2.3.5. Calculați:  $\int \sin 9x \sin x dx$ .

**Soluție.**

$$\int \sin 9x \sin x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 8x - \cos 10x) dx = \frac{\sin 8x}{16} - \frac{\sin 10x}{20} + C.$$

## Bibliografie

- [1] G. M. Fihtenholț, *Curs de calcul diferențial și integral*, Ed. Tehnică, 1964.
- [2] Gh. Sirețchi, *Calcul diferențial și integral*, vol. I și II, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1985.
- [3] V. Arsinte, *Probleme elementare de calcul integral*, Ed. Univers, București, 1985.
- [4] A. Magdaș, G. Lobonț, S. Ursu, I. Diaconu, *Matematică*, Manual pentru cls. a XII-a, Ed. Studium, 2002.
- [5] B. Demidovici și colab., *Culegere de probleme de analiză matematică*, Moscova, 1977.

### 3. Criterii de integrabilitate

#### 3.1. Funcții integrabile

Amintim câteva rezultate teoretice referitoare la funcțiile integrabile.

Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ , cu  $a < b$ , iar  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție dată.

**3.1.1 Definiție** : Se numește diviziune a intervalului  $[a, b]$ , orice sistem ordonat  $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  de  $n+1$  puncte cu proprietatea că  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Dacă  $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  este o diviziune a intervalului  $[a, b]$ , atunci numărul  $\|\Delta\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$  se numește norma diviziunii  $\Delta$ . Notăm cu  $\mathcal{D}[a, b]$  mulțimea tuturor diviziunilor intervalului  $[a, b]$ .

**3.1.2. Definiție** : Fie  $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathcal{D}[a, b]$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  un sistem de puncte intermediare, unde  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, i = \overline{1, n}$ . Numărul real  $\sigma(f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$  se numește suma Riemann asociată funcției  $f$ , diviziunii  $\Delta$  și punctelor intermediare  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ .

**3.1.3. Definiție** : Funcția  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se numește integrabilă Riemann pe intervalul  $[a, b]$ , dacă pentru orice șir de diviziuni  $\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{n-1}^n, x_n^n), n \in \mathbb{N}^*$ , ale intervalului  $[a, b]$ , cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$  și pentru orice alegere a punctelor intermediare  $\xi_i^n, x_{i-1}^n \leq \xi_i^n \leq x_i^n, 1 \leq i \leq k_n$ , șirul sumelor Riemann  $(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n))_{n \geq 1}$  este convergent la același număr  $I_f$ .

Numărul real  $I_f$  se numește integrala definită a funcției  $f$  pe intervalul  $[a, b]$  și se notează  $\int_a^b f(x)dx$ .

**3.1.4. Teoremă** : Dacă funcția  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann pe  $[a, b]$ , atunci funcția  $f$  este mărginită.

**3.1.5. Observație** : Deci o funcție care nu este mărginită pe  $[a, b]$ , nu este integrabilă pe  $[a, b]$ .

**3.1.6. Exemplu** : Dacă  $\alpha > 0$ , funcția  $f_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x^\alpha}, & x \in (0, 1] \end{cases}$  nu este integrabilă pe  $[0, 1]$ , deoarece este nemărginită.

Există funcții mărginite neintegrabile.

**3.1.7 Exemplu :** Funcția lui Dirichlet  $f : [0,1] \rightarrow R$ ,  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q \\ 1, & x \in R \setminus Q \end{cases}$

nu este integrabilă pe  $[0, 1]$ .

Fie  $\Delta = (0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1)$ . Dacă  $\xi_i, i = \overline{1, n}$  sunt raționale, atunci  $\sigma_{\Delta}(f, \xi_i) = 1$ , deci  $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sigma(f, \xi_i) = 1$ . Dacă  $\xi_i, i = \overline{1, n}$  sunt iraționale, atunci  $\sigma_{\Delta}(f, \xi_i) = 0$ , deci  $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sigma(f, \xi_i) = 0$ . Cum  $1 \neq 0$ , rezultă că funcția  $f$  nu este integrabilă Riemann pe  $[0, 1]$ .

**3.1.8. Teoremă :** (Leibniz-Newton). Fie  $f : [a, b] \rightarrow R$  o funcție integrabilă care admite primitive pe  $[a, b]$ . Atunci, pentru orice primitivă  $F$  a funcției  $f$  are loc egalitatea:  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ .

### 3.2 Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann

Fie  $a < b$ , iar  $f : [a, b] \rightarrow R$  o funcție mărginită. Notăm cu  $m = \inf\{f(x) | x \in [a, b]\}$ ,  $M = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$ . Fie  $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathcal{D}[a, b]$ . Pentru fiecare  $k=1, 2, \dots, n$ , notăm:  $m_k = \inf\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ ,  $M_k = \sup\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ . Suma  $s(f, \Delta) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$  se numește suma Darboux inferioară, asociată funcției  $f$  și diviziunii  $\Delta$ . Suma  $S(f, \Delta) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$  se numește suma Darboux superioară asociată funcției  $f$  și diviziunii  $\Delta$ .

Funcția  $f$  fiind mărginită, avem:  $m(b-a) \leq s(f, \Delta) \leq \sigma(f, \xi_k) \leq S(f, \Delta) \leq M(b-a)$ , pentru orice alegere a punctelor intermediare  $\xi_k, k = \overline{1, n}$ . Se arată că:

a) Pentru orice  $\Delta', \Delta'' \in \mathcal{D}[a, b]$  avem:  $s(f, \Delta') \leq S(f, \Delta'')$

b) Există  $\sup\{s(f, \Delta) | \Delta \in \mathcal{D}[a, b]\} \stackrel{not}{=} \int_a^b f(x)dx$  (integrala Darboux inferioară a lui  $f$ ).

c) Există  $\inf \{ S(f, \Delta) \mid \Delta \in \mathcal{D} [a, b] \} = \overline{\int_a^b f(x) dx}$  (integrala Darboux superioară a lui  $f$ ).

**3.2.1. Teoremă** : (criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann)

Fie  $f : [a, b] \rightarrow R$  o funcție mărginită. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1)  $f$  este integrabilă Riemann
- 2) Pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta > 0$  cu proprietatea că pentru orice  $\Delta \in \mathcal{D} [a, b]$  cu  $\|\Delta\| < \delta$  avem  $S(f, \Delta) - s(f, \Delta) < \varepsilon$
- 3)  $\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx}$ .

Cu ajutorul Criteriului lui Darboux se demonstrează integrabilitatea funcțiilor monotone, respectiv a funcțiilor continue pe un compact.

**3.2.2. Teoremă** : Dacă  $f : [a, b] \rightarrow R$  este o funcție monotonă pe  $[a, b]$ , atunci funcția  $f$  este integrabilă Riemann pe  $[a, b]$ .

**3.2.3. Teoremă** : Dacă  $f : [a, b] \rightarrow R$  este o funcție continuă pe  $[a, b]$ , atunci funcția  $f$  este integrabilă Riemann pe  $[a, b]$ .

**3.2.4 Teoremă** : Dacă funcția  $f : [a, b] \rightarrow R$  este integrabilă Riemann pe  $[a, b]$ , atunci pentru orice  $c$  din  $[a, b]$ , restricțiile funcției  $f$  la  $[a, c]$ , respectiv  $[c, b]$  sunt funcții integrabile Riemann și  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

**Demonstratie** : Notăm cu  $f_1$ , respectiv  $f_2$  restricțiile funcției  $f$  la intervalele  $[a, c]$ , respectiv  $[c, b]$ . Funcția  $f$  fiind integrabilă, există  $\delta > 0$  :  $S(f, \Delta) - s(f, \Delta) < \varepsilon$  (1) pentru orice  $\Delta \in \mathcal{D} [a, b]$  cu  $\|\Delta\| < \delta$ . Fie  $\Delta_0 \in \mathcal{D} [a, c]$  cu  $\|\Delta_0\| < \delta$ . Evident există  $\Delta \in \mathcal{D} [a, b]$  cu  $\Delta \cap [a, c] = \Delta_0$  și  $\|\Delta\| < \delta$ . Atunci:  $S(f_1, \Delta_0) - s(f_1, \Delta_0) \leq S(f, \Delta) - s(f, \Delta)$  (2). Din (1) și (2) rezultă  $S(f_1, \Delta_0) - s(f_1, \Delta_0) \leq \varepsilon$ . Prin urmare, din T 3.2.1  $f_1$  este integrabilă. Analog se arată că  $f_2$  este integrabilă.

**3.2.5.** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow R$  este integrabilă Riemann pe  $[a, b]$ , atunci pentru orice interval  $[c, d] \subseteq [a, b]$ , restricția funcției  $f$  la  $[c, d]$  este integrabilă Riemann.

**Demonstratie** : Din T 3.2.4 rezultă că  $g = f|_{[a,d]}$  este integrabilă. Pentru  $c$  din  $[a,d]$ , din T 3.2.4 aplicată funcției  $g$  rezultă că  $g|_{[c,d]}$  este integrabilă.

**3.2.6. Observatie** : Dacă pentru funcția  $f : [a,b] \rightarrow R$ , există un interval  $[c,d] \subset [a,b]$  astfel încât  $f|_{[c,d]}$  să nu fie integrabilă Riemann, atunci funcția  $f$  nu este integrabilă Riemann pe  $[a, b]$ .

**3.2.7. Aplicatie** : Funcția lui Dirichlet,  $f : [0,1] \rightarrow R$ ,  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q \\ 1, & x \in R \setminus Q \end{cases}$  nu este integrabilă pe  $[0, 1]$ .

**Demonstratie** : Pentru orice diviziune  $\Delta \in D [0, 1]$ , avem  $s(f, \Delta) = 0$  și  $S(f, \Delta) = 1$ . Deci  $\int_a^b f(x)dx = 0 \neq 1 = \int_a^b f(x)dx$  și neintegrabilitatea lui  $f$  rezultă din T 3.2.1

**3.2.8. Aplicatie** : Funcția lui Riemann:

$$f : [0,1] \rightarrow R, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \setminus Q \text{ sau } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, q \geq 1; p, q \in Z; (p, q) = 1 \end{cases} \quad \text{este}$$

integrabilă pe  $[0,1]$  și  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ .

**Demonstratie** : Observăm că funcția  $f$  este mărginită pe  $[0, 1]$ . Pentru orice  $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in D [0, 1]$  avem  $m_i = \inf \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0, i = \overline{1, n}$ , deoarece fiecare interval  $[x_{i-1}, x_i]$  conține numere iraționale. Deci  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ . Fie  $\varepsilon > 0$ . Alegem un  $k$  natural, astfel încât  $k^{-3}(2k^2 - k + 2) < \varepsilon$ . Pentru  $n = k^3$  considerăm diviziunea  $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  a lui  $[0, 1]$ , unde  $x_i = \frac{i}{n}, i = \overline{1, n}$ . Mulțimea

$$P = \left\{ \frac{p}{q} \in [0,1] \mid p, q \in Z, (p, q) = 1, 1 \leq q \leq k \right\} \quad \text{are cel mult}$$

$$2 + 1 + 2 + \dots + (k-1) = 2 + \frac{k}{2}(k-1) \quad \text{elemente, de aceea mulțimea}$$

$$I = \left\{ i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid P \cap [x_{i-1}, x_i] \neq \emptyset \right\} \quad \text{conține cel mult}$$

$$2 + \frac{k}{2}(k-1) + \frac{k}{2}(k-1) = k^2 - k + 2 \quad \text{elemente.} \quad \text{Notăm}$$

$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0$ . Avem  $M_i \leq 1$  când  $i \in I$  și  $M_i \leq \frac{1}{k}$  când  $i \notin I$ .

Rezultă: 
$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq S(f, \Delta) = \sum_{i \in I} M_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \notin I} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq 1(k^2 - k + 2) \frac{1}{n} + \frac{1}{k} n \frac{1}{n} = k^{-3}(2k^2 - k + 2) < \varepsilon$$
. Așadar și  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ .<sup>(2)</sup> Din (1) și (2), pe baza teoremei T 3.2.1 deducem că funcția  $f$  este integrabilă și că  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ .

**3.2.9. Aplicatie** : Funcția  $g: [0,1] \rightarrow \{0,1\}$ ,  $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0,1] \end{cases}$  este integrabilă.

**Demonstratie** : Funcția  $g$  este monotonă, deci integrabilă.

**3.2.10. Aplicatie** : Fie  $f: [1, 2] \rightarrow R$ , o funcție cu proprietatea că pentru orice  $a, b$  din  $[1, 2]$ , cu  $a < b$ , există  $\xi, \eta \in (a, b)$  astfel încât  $f(\xi) = \xi$  și  $f(\eta) = 2\eta$ . Să se arate că funcția  $f$  nu este integrabilă.

**Demonstratie** : Fie  $\Delta_n$  o diviziune a lui  $[1,2]$  definită de punctele  $x_k = 1 + \frac{k}{n}$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Avem  $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Din ipoteză există  $\xi_k, \eta_k \in (x_{k-1}, x_k)$  cu  $f(\xi_k) = \xi_k$  și  $f(\eta_k) = 2\eta_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Atunci:

$$\sigma_f(\Delta_n, \xi_k) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sigma_\varphi(\Delta_n, \xi_k), \quad \text{unde } \varphi: [1,2] \rightarrow R, \varphi(x) = x$$

este o funcție continuă, deci integrabilă. Atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\Delta_n, \xi_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_\varphi(\Delta_n, \xi_k) = \int_1^2 x dx = \frac{3}{2}. \quad \text{Analog considerăm}$$

$$\tau: [1,2] \rightarrow R, \tau(x) = 2x, \quad \text{avem: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_f(\Delta_n, \xi_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_\tau(\Delta_n, \xi_k) = \int_1^2 2x dx = 3.$$

Așadar, șirurile de sume Riemann  $(\sigma(\Delta_n, \xi_k))_{n \geq 1}$  și  $(\sigma(\Delta_n, \eta_k))_{n \geq 1}$  au limite diferite, prin urmare funcția  $f$  nu este integrabilă.

**3.2.11. Aplicatie** : Funcția  $f: [0,3] \rightarrow R$ ,  $f(x) = \begin{cases} 5x - 2, & x \in [0,3] \cap Q \\ 2x + 3, & x \in [0,3] \setminus Q \end{cases}$  nu este integrabilă pe Riemann pe  $[0, 3]$ .

**Demonstratie** : Considerăm șirul de diviziuni  $\Delta_n = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $x_k = \frac{3k}{n}$ ,  $k = \overline{0, n}$ , căruia îi atașăm două șiruri de sume integrale:  $\sigma_f(\Delta_n, \xi_k)$  cu  $\xi_k \in [0, 3] \cap Q$ , respectiv  $\sigma_f(\Delta_n, \eta_k)$ , cu  $\eta_k \in [0, 3] \setminus Q$ . Folosind integrabilitatea funcțiilor continue  $g: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 5x - 2$ , respectiv  $h: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = 2x + 3$ , obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_f(\Delta_n, \xi_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_g(\Delta_n, \xi_k) = \int_0^3 (5x - 2) dx = \frac{33}{2} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_f(\Delta_n, \eta_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_h(\Delta_n, \eta_k) = \int_0^3 (2x + 3) dx = 18. \text{ Deci funcția } f \text{ nu este integrabilă.}$$

**3.2.12. Aplicație** : Funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \cap Q \\ 1 - x, & x \in [0, 1] \setminus Q \end{cases}$  nu este integrabilă.

**Demonstratie** : Aplicând raționamentul de la aplicația 3.2.10, pentru funcțiile continue  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x$ , respectiv  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = 1 - x$ , obținem:

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 h(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Deci nu putem trage nici o concluzie. Dar aplicând}$$

același raționament pentru restricțiile funcțiilor  $g$ , respectiv  $h$  la intervalul  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ , obținem:  $\int_0^{1/2} g(x) dx = \frac{1}{8}$  și  $\int_0^{1/2} h(x) dx = \frac{3}{8}$ . Folosind observația de la consecința 3.2.6, deducem că funcția  $f$  nu este integrabilă pe  $[0, 1]$ .

### 3.3. Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann

**Definiția** : O mulțime  $A \subset \mathbb{R}$  se numește mulțime neglijabilă (sau de măsură Lebesgue nulă) dacă: pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există un șir  $(I_n)_n$  de intervale mărginite, de numere reale astfel încât:  $\sum_{n=0}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon$  și  $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ , unde  $l(I_n)$  reprezintă lungimea obișnuită a intervalului  $I_n$ .

Se poate arăta că mulțimile neglijabile au proprietățile:

- i) Dacă  $A \subset \mathbb{R}$  este finită (în particular  $A = \emptyset$ ) atunci  $A$  este neglijabilă.
- ii) Dacă  $B$  este neglijabilă și  $A \subset B$ , atunci  $A$  este neglijabilă.



iii) Dacă  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir de mulțimi neglijabile, atunci  $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$  este neglijabilă. De exemplu, orice mulțime cel mult numărabilă este neglijabilă (în particular  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  sunt mulțimi neglijabile)

**3.3.1 Teoremă** : (Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann)

Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1) funcția  $f$  este integrabilă Riemann
- 2) funcția  $f$  este mărginită și mulțimea  $D_f$  a punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă.

**3.3.2. Observație** foarte utilă în aplicații: Deducem din T 3.3.1 că dacă funcția  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este mărginită pe compactul  $[a, b]$  și are un număr finit de puncte de discontinuitate, atunci funcția  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

**3.3.3. Consecință** : Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă pe  $[a, b]$ , atunci  $f$  este integrabilă.

**Demonstratie** : Evident funcția  $f$  este mărginită (teorema lui Weierstrass) și mulțimea punctelor de discontinuitate este vidă, deci neglijabilă.

**3.3.4 Consecință** : Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă, atunci și funcția  $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$  (\*)

**Demonstratie** : Deoarece funcția  $f$  este integrabilă, rezultă că  $f$  este mărginită, deci și  $|f|$  este mărginită. Avem  $D_{|f|} \subset D_f$ , iar  $D_f$  este neglijabilă, deci și  $D_{|f|}$  este neglijabilă. Relația (\*) se găsește în toate manualele de matematică, de aceea vom omite demonstrația.

**3.3.5 Observație** : Reciproca nu este adevărată. Funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  nu este integrabilă, dar  $|f| = 1, \forall x \in [0, 1]$  este integrabilă.

**3.3.6. Consecință** : Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă, iar  $[c, d] \subset [a, b]$ , atunci  $g = f|_{[c, d]}$  este funcție integrabilă.

**Demonstratie** : Din  $f$  mărginită, rezultă  $g$  mărginită. Avem  $D_g \subset D_f$ , iar  $D_f$  este neglijabilă; deci  $D_g$  este neglijabilă. Atunci  $g$  este integrabilă.

**3.3.7. Consecință :** Dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow R$  sunt integrabile pe  $[a, b]$ , atunci funcția  $h : [a, b] \rightarrow R$ ,  $h = \alpha f + \beta g$  este integrabilă pe  $[a, b]$ , pentru orice  $\alpha, \beta \in R$ .

**Demonstratie :** Dacă  $f, g$  sunt integrabile pe  $[a, b]$ , atunci sunt mărginite pe  $[a, b]$  și deci funcția  $h$  este mărginită. Cum funcțiile  $f$  și  $g$  sunt integrabile, rezultă că mulțimile  $D_f$ , respectiv  $D_g$  sunt neglijabile și prin urmare  $D_{\alpha f} \cup D_{\beta g}$  este neglijabilă. Cum

$D_h \subset D_{\alpha f} \cup D_{\beta g}$ , rezultă că  $D_h$  este neglijabilă.

**3.3.8. Observatie :** Reciproca nu este adevărată. Fie  $f : [a, b] \rightarrow R$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap Q \\ -1, & x \in [a, b] \setminus Q \end{cases} \quad \text{și} \quad g : [a, b] \rightarrow R,$$

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \in [a, b] \cap Q \\ 1, & x \in [a, b] \setminus Q \end{cases} . \quad \text{Constatăm} \quad \text{că}$$

$f + g : [a, b] \rightarrow R$ ,  $(f + g)_{(x)} = 0, \forall x \in [a, b]$  este integrabilă, dar  $f$  este neintegrabilă.

**3.3.9. Consecință :** Dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow R$  sunt integrabile pe  $[a, b]$ , atunci  $f \cdot g$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

**3.3.10. Observatie :** Reciproca nu este adevărată. Funcția  $f : [a, b] \rightarrow R$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap Q \\ -1, & x \in [a, b] \setminus Q \end{cases} \quad \text{nu este integrabilă pe } [a, b], \text{ dar}$$

$f_2 : [a, b] \rightarrow R$ ,  $f^2(x) = 1, \forall x \in [a, b]$  este integrabilă.

**3.3.11. Consecință :** Dacă  $f, g$  sunt integrabile pe  $[a, b]$  și dacă  $f^g$  este definită pe  $[a, b]$ , atunci  $f^g$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

**3.3.12. Consecință :** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ ,  $f(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in [a, b]$  și dacă  $\frac{1}{f}$  este mărginită, atunci  $\frac{1}{f}$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

**3.3.13. Observatie :** Prin compunerea a două funcții integrabile nu se obține întotdeauna o funcție integrabilă. Considerăm funcția lui Riemann,

$$f : [0,1] \rightarrow R, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \setminus Q \text{ sau } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, q \in N^* \end{cases} .s$$

Dacă  $g : [0,1] \rightarrow \{0,1\}$ ,  $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0,1] \end{cases}$  am arătat în **3.2.7** și respectiv în **3.2.9** că cele două funcții sunt integrabile pe  $[0, 1]$ . Fie  $h : [0,1] \rightarrow R$ ,  $h = g \circ f$ . Avem:  $h(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \setminus Q \text{ sau } x = 0 \\ 1, & x \in [0,1] \cap Q \end{cases}$ , funcție care nu este integrabilă.

**3.3.14. Observatie :** Compunerea  $h = g \circ f$  dintre o funcție integrabilă  $f$  și o funcție continuă  $g$  este o funcție integrabilă. ([4]).

## Bibliografie

1. Aramă L., Moroza T., Culegere de probleme de calcul diferențial și integral, Editura Tehnică, București, 1967
2. Andrica D., Berinde V., Concursul interjudețean de matematică, “Grigore Moisil”, Editura Cub Press, Baia Mare
3. Becheanu M. și colaboratori, Olimpiade de matematică, 1990-1996, Editura Gil, Zalău, 1997
4. Burtea M., Burtea G., Matematică, clasa a XII-a, Editura Carminis, Pitești, 2001
5. Crăciun C., Asupra unor operații cu funcții integrabile, G.M. 2/1988
6. Ganga M., Teme și probleme de matematică, Editura Tehnică, București, 1981
7. Konerth O., În legătură cu integrabilitatea funcțiilor de “tip Dirichlett”, G.M. 3/1985
8. Mortici C., 600 de probleme, Editura Gil, 2001
9. Nicolescu M., Dinculeanu N., Marcus S., Analiză matematică, E.D.P., București, 1962
10. Muntean I., Asupra primitivității și integrabilității funcțiilor continue, G.M.A. 4/1981
11. Sirețchi Gh., Calcul diferențial și integral, Vol I, II, E.D.P., București, 1985

### Probleme rezolvate

- R3.4.1 a) Să se arate că există funcții integrabile care nu admit primitive.  
b) Să se arate că există funcții care au primitive, dar care nu sunt integrabile.

Soluție :

$$\text{a) Funcția } f : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \text{ are un singur punct}$$

de discontinuitate,  $x = 0$ . Din observația 3.3.2 deducem că  $f$  este integrabilă. Cum  $f([-1,1]) = \{-1,0,1\}$ , deci imaginea nu este interval, deducem că funcția  $f$  nu are proprietatea lui Darboux. Prin urmare, nu are primitive.

- b) Considerăm funcțiile

$$g : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ și}$$

$$G : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} . \text{ Se verifică că } G \text{ este derivabilă pe}$$

$[-1,1]$  și  $G'(x) = g(x), \forall x \in [-1,1]$ , deci  $G$  este primitivă pentru  $g$ .

Avem:  $g\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = -2\sqrt{2n\pi}$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = -\infty$ . Deci  $g$  nu este nemărginită pe  $[-1,1]$ . Prin urmare,  $g$  nu este integrabilă.

R3.4.2 Dacă funcția  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă pe  $[a,b]$ , atunci funcția  $\sin f$  este integrabilă pe  $[a,b]$ .

Soluție :

Funcția  $\sin f$  este mărginită, iar mulțimea discontinuităților este aceeași cu a discontinuităților lui  $f$ , deci neglijabilă.

R3.4.3 Fie  $f, g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  două funcții integrabile pe  $[a,b]$ , iar  $h : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b] \cap Q \\ g(x), & x \in [a,b] \setminus Q \end{cases}$ . Atunci  $h$  integrabilă  
 $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$ , în toate punctele de continuitate ale lui  $f$  și ale lui  $g$ .

Soluție :

Fie  $A, B$  mulțimea discontinuităților lui  $f$ , respectiv  $g$ . din teorema T 3.3.1 rezultă că  $A$  și  $B$  sunt mulțimi neglijabile și că  $f$  și  $g$  sunt funcții mărginite.  
" $\Rightarrow$ " Fie  $x_0 \in [a,b] \setminus A \cup B$  și să presupunem că  $f(x_0) \neq g(x_0)$ , spre exemplu  $f(x_0) > g(x_0)$ . Atunci există  $\delta > 0$  astfel încât  $f(x) > g(x)$ , pentru

orice  $x \in [a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]^{not} = J$ . Deducem că  $h$  este discontinuă pe intervalul  $J$ . Contradicție cu  $h$  este integrabilă pe  $[a, b]$ , deci și pe  $J$ . Atunci  $f(x) = g(x)$ , oricare ar fi  $x \in [a, b] \setminus A \cup B$ .

" $\Leftarrow$ " Fie  $x_0 \in [a, b] \setminus A \cup B$ . Arătăm că dacă  $f(x_0) = g(x_0)$ , atunci  $h$  este continuă în  $x_0$ . Vom folosi definiția cu vecinătăți a continuității unei funcții într-un punct, adică vom arăta că:  $\forall V$  o vecinătate a lui  $h(x_0)$ ,  $\exists U$  vecinătate a lui  $x_0$ , astfel încât pentru orice  $x \in U \cap [a, b]$  avem  $h(x) \in V$ . Fie  $V$  o vecinătate a lui  $h(x_0) = f(x_0) = g(x_0)$ . Cum  $f$  este continuă în  $x_0$ ,  $\exists U_1$  vecinătate a lui  $x_0$ , astfel încât  $\forall x \in U_1 \cap [a, b]$ , avem  $f(x) \in V$ ; analog  $\exists U_2$  vecinătate a lui  $x_0$ , astfel încât  $\forall x \in U_2 \cap [a, b]$  avem  $g(x) \in V$ . Luând  $U = U_1 \cap U_2$ , care este vecinătate a lui  $x_0$ , observăm  $h(x) \in V$ , pentru orice  $x \in U \cap [a, b]$ . Într-adevăr: dacă  $x \in (Q \cap U) \cap [a, b] \Rightarrow h(x) = f(x) \in V$ , iar dacă  $x \in (R \setminus Q) \cap U \cap [a, b]$ , atunci  $h(x) = g(x) \in V$ .

Observație: Deducem că:

Dacă funcțiile  $f, g : [a, b] \rightarrow R$  sunt continue pe  $[a, b]$  și  $f \neq g$ , atunci funcția  $h : [a, b] \rightarrow R$ ,  $h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b] \cap Q \\ g(x), & x \in [a, b] \setminus Q \end{cases}$  nu este integrabilă pe intervalul  $[a, b]$ .

R3.4.4 Fie  $f : [a, b] \rightarrow R$  o funcție integrabilă. Dacă  $f$  este egală cu o constantă  $\lambda$  pe o mulțime  $A$  densă în  $[a, b]$ , atunci  $\int_a^b f(x) dx = \lambda(b - a)$ .

Soluție:

Fie  $\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$  o diviziune oarecare a intervalului  $[a, b]$  cu  $\|\Delta\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Cum  $A$  este densă în  $[a, b]$ ,  $\exists \xi_i \in A \cap [x_{i-1}, x_i], \forall i = \overline{1, n}$ .

Atunci:  $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \lambda(x_i - x_{i-1}) = \lambda(b - a)$ .

Atunci:  $\lambda(b - a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i) = \int_a^b f(x) dx$ .

R3.4.5 Fie  $f : [0, 1] \rightarrow R$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & x = \frac{1}{n}, n \in N^* \\ 0, & x \neq \frac{1}{n}, n \in N^* \end{cases}$ . Să se arate că  $f$

este integrabilă pe  $[0, 1]$  și să se calculeze  $\int_0^1 f(t) dt$ .

Soluție :

Mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției  $f$  este neglijabilă, deci funcția este integrabilă. Aplicând concluzia problemei R3.4.4, obținem că  $\int_0^1 f(t)dt = 0$ .

R3.4.6 Fie  $a < b$  numere reale, iar  $f, g: [a, b]$  două funcții cu proprietățile:

- Funcția  $f$  admite primitive și este mărginită superior
- Pentru orice  $x, y \in [a, b]$ ,  $x < y$  avem  $g(y) - g(x) \geq (y - x) \sup_{t \in (x, y)} f(t)$ .

Să se arate că  $g$  este integrabilă.

Soluție :

Considerăm  $F: [a, b] \rightarrow R$ , primitivă pentru  $f$  și  $x, y \in [a, b]$ , cu  $x < y$ .

Rezultă că există  $c \in (x, y)$ :

$$F(y) - F(x) = (y - x)f(c) \leq (y - x) \sup_{t \in [x, y]} f(t) \leq g(y) - g(x), \text{ adică:}$$

$F(y) - g(y) \leq F(x) - g(x)$ . Prin urmare, funcția  $h: [a, b] \rightarrow R$ ,  $h = F - g$  este descrescătoare, deci integrabilă.

Funcția  $F$  fiind derivabilă, este integrabilă. Cum  $F$  este integrabilă și  $h$  este integrabilă, rezultă că  $g = F - h$  este integrabilă.

R3.4.7 Să se arate că funcția  $f: [0, 1] \rightarrow R$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

este integrabilă pe  $[0, 1]$ .

Soluție :

Legea funcției  $f$  este:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{x} - n, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} - 2, & \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} - 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Fie  $\Delta = (0 = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = 1)$  o diviziune oarecare a intervalului  $[0, 1]$ . Arătăm că  $S_{(f, \Delta)} - s_{(f, \Delta)} < \varepsilon$ , unde  $\varepsilon > 0$ , este arbitrar. Pot apărea două situații:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1}{n+1} < x_k < \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n+1} < x_{k+1} < \frac{1}{n} \\ \text{b)} \quad & \frac{1}{n+1} < x_k < \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n} < x_{k+1} < \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

În cazul a)

$$M_k - m_k = f(x_k) - f(x_{k+1}) = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1} \cdot x_k} < \frac{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)(n+1)^2}{1} = \frac{n+1}{n}.$$

$$\begin{aligned} \text{Atunci: } S_{(f,\Delta)} - s_{(f,\Delta)} &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) < \\ &< \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ c\u00e2nd } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

În cazul b)  $M_k - m_k = 1$ , iar  $x_{k+1} - x_k < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{(n-1)(n+1)}$ . Ob\u0162inem:

$$S_{(f,\Delta)} - s_{(f,\Delta)} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \frac{2n}{(n-1)(n+1)} \rightarrow 0, \text{ c\u00e2nd } n \rightarrow \infty.$$

Din a) \u015fi b), pe baza criteriului de integrabilitate Darboux, deducem c\u00e2 func\u022bia  $f$  este integrabil\u0103.

**R3.4.8** Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ , cu  $a < b$ , iar  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o func\u022bie integrabil\u0103 cu  $\int_a^b f(x) dx \neq 0$ . Ar\u0103ta\u022bi c\u00e2 exist\u0103 o diviziune  $\Delta = (a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$  a lui  $[a, b]$  astfel \u00eenc\u00e2t:  $\int_a^{x_1} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \dots = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$ .

Vom demonstra mai \u00eent\u0103i urm\u0103toarea:

**Lem\u0103**: Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabil\u0103, atunci func\u022bia  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  este continu\u0103.

\u00c2ntr-adev\u0103r:  $f$  integrabil\u0103  $\Rightarrow f$  m\u0103rginit\u0103:  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ .

Atunci:  $m(x - x_0) \leq F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt \leq M(x - x_0)$ .

Ob\u0162inem c\u00e2  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$ , deci  $F$  continu\u0103.

**Solu\u022bia problemei**:

Fie  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Este suficient s\u0103 ar\u0103t\u0103m c\u00e2 exist\u0103  $x_k \in (a, b)$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  astfel \u00eenc\u00e2t:  $\int_a^{x_k} f(x) dx = \frac{k}{n} \int_a^b f(x) dx$ . Consider\u0103m func\u022bia

$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \int_a^x f(t)dt - \frac{k}{n-k} \int_x^b f(t)dt$ . Rezultă pe baza lemei că  $g$  este continuă. Dar  $g(a) \cdot g(b) = \frac{-k}{n-k} I^2 < 0$ , unde  $I = \int_a^b f(x)dx$ . Atunci există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $g(c) = 0$ . Fie  $x_k = c$ . Deci:  $\int_a^{x_k} f(t)dt = \frac{k}{n-k} \left( I - \int_a^{x_k} f(t)dt \right)$ , de unde obținem:  $\int_a^{x_k} f(t)dt = \frac{k}{n} \int_a^b f(t)dt$ .

R3.4.9 Fie  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilă Riemann, astfel încât  $f(x) = \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ . Demonstrați că  $f$  este constantă.

Soluție :

$$\text{Avem: } f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{x}{4}\right) + f\left(\frac{x+2}{4}\right) \right]$$

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{x+1}{4}\right) + f\left(\frac{x+3}{4}\right) \right].$$

Prin inducție obținem că:

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \left[ f\left(\frac{x}{2^n}\right) + f\left(\frac{x+1}{2^n}\right) + \dots + f\left(\frac{x+2^n-1}{2^n}\right) \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Considerăm

diviziunea  $\Delta_n = \left( 0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1 \right)$ , cu  $\|\Delta_n\| = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  și punctele

intermediare  $\xi_i = \frac{x+2^i-1}{2^n}$ . Trecând la limită, obținem:

$$f(x) = \int_0^1 f(t)dt = \text{constant}.$$

R3.4.10 Să se calculeze:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos \frac{i}{n} \cdot \cos \frac{j}{n}$ .

Soluție :

Avem egalitatea:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos \frac{i}{n} \cdot \cos \frac{j}{n} = \frac{1}{2n^2} \left[ \left( \sum_{k=1}^n \cos \frac{k}{n} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \cos^2 \frac{k}{n} \right].$$

Dar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left( \sum_{k=1}^n \cos \frac{k}{n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k}{n} \right)^2 = \left( \int_0^1 \cos x dx \right)^2 = \sin^2 1.$$



Pe de altă parte,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \cos^2 \frac{k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \cos^2 x \, dx = 0$ .

$$\text{Deci: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos \frac{i}{n} \cdot \cos \frac{j}{n} = \frac{\sin^2 1}{2}.$$

R3.4.11 Fie  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă cu derivata integrabilă pe  $[0, 1]$ . Să se arate că:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \int_0^1 f(x) \, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = \frac{f(0) - f(1)}{2}$ .

Soluție :

Fie  $\Delta = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$  o diviziune a intervalului  $[0, 1]$ . Notăm

$$M_k = \sup \left\{ f'(x) \mid x \in \left[ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] \right\}, \quad m_k = \inf \left\{ f'(x) \mid x \in \left[ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] \right\}, \quad k=1, 2, \dots,$$

n.

Atunci:  $E_n =$

$$n \left[ \int_0^1 f(x) \, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = n \sum_{k=1}^n \left[ \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) \, dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right] =$$

$$= n \sum_{k=1}^n \left[ \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \right]. \quad \text{Aplicând teorema lui Lagrange funcției } f \text{ pe}$$

intervalul  $\left[ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$ , există  $c_k(x) \in \left( \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right)$  astfel încât

$$f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \left( x - \frac{k}{n} \right) f'(c_k(x)).$$

Atunci:

$$E_n = n \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left( x - \frac{k}{n} \right) f'(c_k(x)) \, dx. \quad \text{Dar } m_k \leq f'(c_k(x)) \leq M_k \text{ deci}$$

$$-\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n M_k \leq E_n \leq -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n m_k. \quad \text{Trecând la limită, obținem:}$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) \, dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) \, dx. \quad \text{Așadar } \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \frac{f(0) - f(1)}{2}.$$

## 4. Metode de calcul a integralelor definite

Pentru început vom reaminti câteva teoreme utile în calculul integralelor definite.

### 4.1. Metode de integrare a funcțiilor

#### 4.1.1. Teoremă (Formula de integrare prin părți)

Dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sunt două funcții derivabile, cu derivate continue, atunci

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

#### 4.1.2. Teoremă (Formula de schimbare de variabilă)

Fie  $[a, b] \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$  ( $J$  interval din  $\mathbf{R}$ ) două funcții cu proprietățile:

- 1)  $f$  este continuă pe  $J$
- 2)  $\varphi$  este derivabilă, cu derivata continuă pe  $[a, b]$ .

Atunci

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \quad (4.1.1)$$

**4.1.3. Observație.** a) Dacă  $[a, b] \xrightarrow{\varphi} [c, d] \xrightarrow{f} \mathbf{R}$  sunt două funcții cu proprietățile:

- 1')  $f$  este continuă pe  $[c, d]$
- 2')  $\varphi$  este bijectivă,  $\varphi$  și  $\varphi^{-1}$  derivabile cu derivate continue,

atunci

$$\int_a^b f(\varphi(t))dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)(\varphi^{-1})'(x)dx$$

Această egalitate se mai numește și a doua formulă de schimbare de variabilă.

b) Datorită formulei Leibniz-Newton toate schimbările de variabilă prezentate la primitive se pot aplica și la calculul integralei definite.

**4.1.4. Propoziție.** Fie  $\alpha \in (0, \infty]$  și  $f : (-\alpha, \alpha) \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă.

Atunci avem:

$$(i) \int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx, (\forall) a, b \in (-\alpha, \alpha)$$

$$\text{În particular: } \int_0^a f(-x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx, (\forall) a \in (-\alpha, \alpha)$$

$$(ii) \text{ Dacă } f \text{ pară atunci } \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

(iii) Dacă  $f$  impară atunci  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ .

Demonstrație. (i) Se face substituția  $t = -x$ .

(ii) din (i)  $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx = \int_0^a f(x)dx$ , de unde

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

(iii) din (i)  $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx = -\int_0^a f(x)dx$ , de unde

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

**4.1.5. Corolar.** Fie  $\alpha \in (0, \infty]$  și  $f : (-\alpha, \alpha) \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă.

Atunci

(i) Dacă  $f$  pară  $\Rightarrow \int_{-a}^a xf(x)dx = 0, (\forall)a \in (-\alpha, \alpha)$

(ii) Dacă  $f$  impară  $\Rightarrow \int_{-a}^a xf(x)dx = 2\int_0^a xf(x)dx, (\forall)a \in (-\alpha, \alpha)$

(iii) Dacă  $f$  arbitrară  $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x^2)dx = 2\int_0^a f(x^2)dx$  și

$$\int_{-a}^a xf(x^2)dx = 0, (\forall)a \in (-\alpha, \alpha)$$

Demonstrație. (i) Dacă  $f$  este pară rezultă că funcția  $xf$  este impară, deci conform Propoziției 4.1.4  $\int_{-a}^a xf(x)dx = 0$ .

(ii) Se procedează ca la (i).

(iii) Rezultă din (i) și (ii) ținând seama că funcția  $f(x^2)$  (respectiv  $xf(x^2)$ ) este pară (respectiv impară).

**4.1.6. Exemplu.**  $(\forall)a \in \mathbf{R}$  avem:

$$\int_{-a}^a \cos x dx = 2\int_0^a \cos x dx, \quad \int_{-a}^a \sin x dx = 0, \quad \int_{-a}^a x^{2n+1} \cos x dx = 0.$$

**4.1.7. Propoziție.** Fie  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă. Atunci avem:

(i)  $f$  periodică de perioadă  $T \Leftrightarrow \int_x^{x+T} f(t)dt = c$  (constantă),  $(\forall)x \in \mathbf{R}$ .

(ii) Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) Orice primitivă a lui  $f$  este periodică de perioadă  $T$ .

b)  $f$  este periodică de perioadă  $T$ .

c)  $\int_x^{x+T} f(t)dt = 0, (\forall)x \in \mathbf{R}$

Demonstrație. (i)  $(\Rightarrow)$  din ipoteză  $f(x+T) = f(x), (\forall)x \in \mathbf{R}$ . Evident avem:

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_x^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{x+T} f(t)dt, (\forall)x \in \mathbf{R} \quad (4.1.2)$$

Cu schimbarea de variabilă  $t = \theta + T$ ,  $\theta \in [0, T]$ , ultima integrală devine:

$$\int_T^{x+T} f(t)dt = \int_0^x f(\theta + T)d\theta = \int_0^x f(\theta)d\theta, (\forall)x \in \mathbf{R} \quad (4.1.3)$$

Din (4.1.2) și (4.1.3) rezultă

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_x^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \int_0^T f(t)dt, (\forall)x \in \mathbf{R}$$

( $\Leftrightarrow$ ) Presupunem că  $\int_x^{x+T} f(t)dt = c, (\forall)x \in \mathbf{R}$  și fie  $F$  o primitivă a lui  $f$ .

Atunci din formula Leibniz-Newton  $c = F(x+T) - F(x), (\forall)x \in \mathbf{R}$ , deci prin derivare obținem:

$$f(x+T) - f(x) = F'(x+T) - F'(x) = 0, (\forall)x \in \mathbf{R},$$

prin urmare  $f$  este periodică de perioadă  $T$ .

(ii) Să observăm că orice primitivă a lui  $f$  este periodică de perioadă  $T$   
 $\Leftrightarrow (\exists)g$  o primitivă a lui  $f$ , periodică de perioadă  $T \Leftrightarrow$  funcția

$F(x) = \int_0^x f(t)dt, x \in \mathbf{R}$  este periodică de perioadă  $T$ .

a)  $\Rightarrow$  c) Dacă a) este adevărat, atunci  $F$  este periodică de perioadă  $T$ , deci conform formulei Leibniz-Newton avem:

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = F(x+T) - F(x) = 0, (\forall)x \in \mathbf{R}$$

c)  $\Rightarrow$  b) rezultă din (i).

b)  $\Rightarrow$  a) Dacă  $f$  este periodică de perioadă  $T$  avem:

$$(F(x+T) - F(x))' = f(x+T) - f(x) = 0, (\forall)x \in \mathbf{R}$$

deci  $(\exists)c \in \mathbf{R}$  astfel încât  $F(x+T) - F(x) = c, (\forall)x \in \mathbf{R}$ . Atunci

$$c = F(0+T) - F(0) = \int_0^T f(t)dt = 0, \text{ deci } F(x+T) = F(x), (\forall)x \in \mathbf{R},$$

deci  $F$  este periodică de perioadă  $T$ .

**4.1.8. Propoziție.** Fie  $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă și periodică de perioadă  $T$ . Atunci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x)dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx$$

Demonstrație.  $(\forall)t \in \mathbf{R}_+, (\exists)n = n(t) \in \mathbf{N}$  și  $a = a(t) \in [0, T]$  astfel încât  $t = nT + a$ , deci  $\int_0^t f(x)dx = \int_0^{nT} f(x)dx + \int_{nT}^t f(x)dx$ . Evident avem

$$\int_0^{nT} f(x)dx = \sum_{k=0}^n \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)dx,$$

deci cu schimbarea de variabilă  $x = \theta + kT$ ,  $\theta \in [0, T]$  deducem:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(x)dx = \int_0^T f(\theta + kT)d\theta = \int_0^T f(\theta)d\theta,$$

deci  $\int_0^{nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx$ . În fine, cu schimbarea de variabilă  $x = \theta + nT$ ,  $\theta \in [0, T]$  deducem

$$\int_{nT}^t f(x)dx = \int_0^{t-nT} f(\theta + nT)d\theta = \int_0^a f(\theta)d\theta,$$

deci

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(x)dx = \frac{n(t)}{t} \int_0^T f(x)dx + \frac{1}{t} \int_0^{a(t)} f(x)dx \quad (4.1.4)$$

Cum avem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T + \frac{a(t)}{n(t)}} = \frac{1}{T} \quad (4.1.5)$$

și

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^{a(t)} f \right| \leq \frac{1}{t} \int_0^{a(t)} |f| \leq \frac{1}{t} \int_0^T |f|, (\forall) t \in \mathbf{R}_+^*,$$

rezultă

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{a(t)} f(x)dx = 0. \quad (4.1.6)$$

Din (4.1.4), (4.1.5) și (4.1.6) rezultă că  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x)dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx$ .

**4.1.9. Corolar.** Fie  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă și periodică de perioadă  $T$ . Atunci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(xt)dx = \frac{b-a}{T} \int_a^T f(x)dx, (\forall) a, b \in \mathbf{R}.$$

Demonstrație. Punem  $xt = y$  și obținem:

$$\int_a^b f(xt)dx = \frac{1}{t} \int_{at}^{bt} f(y)dy = b \left( \frac{1}{tb} \int_0^{tb} f(y)dy \right) - a \left( \frac{1}{ta} \int_0^{ta} f(y)dy \right).$$

Trecem mai departe la limită  $t \rightarrow \infty$  ținând cont de Propoziția 4.1.8.

**4.1.10. Propoziție.** Fie  $I \subseteq \mathbf{R}$  un interval și  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă. Atunci  $(\forall) J \subseteq \mathbf{R}$  un interval și  $\varphi, \psi: J \rightarrow I$  două funcții derivabile, rezultă că funcția  $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$ ,  $x \in J$  este derivabilă și avem relația:

$$F'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x), (\forall) x \in J$$

Demonstrație. Fie  $g(y) := \int_a^y f(t)dt$ ,  $y \in I$  unde  $a$  este fixat în  $I$ . Atunci  $g$  este derivabilă și avem  $g'(y) = f(y)$ ,  $(\forall) y \in I$ . Evident putem scrie:

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^a f(t)dt + \int_a^{\psi(x)} f(t)dt = -g(\varphi(x)) + g(\psi(x)), (\forall)x \in J,$$

deci

$$\begin{aligned} F'(x) &= -g'(\varphi(x))\varphi'(x) + g'(\psi(x))\psi'(x) = \\ &= -f(\varphi(x))\varphi'(x) + f(\psi(x))\psi'(x), (\forall)x \in J \end{aligned}$$

**4.1.11. Corolar.** Fie  $I \subseteq \mathbf{R}$  un interval și  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă.

Atunci  $(\forall)J \subseteq \mathbf{R}$  un interval și  $\varphi : J \rightarrow I$  o funcție derivabilă, rezultă că

funcția  $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt, x \in J$  este derivabilă și avem

$$F'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x), (\forall)x \in J.$$

## Bibliografie

- [1] Gh. Sirețchi, *Calcul diferențial și integral*, vol. I și II, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1985.
- [2] V. Arsinte, *Probleme elementare de calcul integral*, Ed. Univ. București, 1995.
- [3] D. Bușneag, I. Maftai, *Teme pentru cercurile și concursurile de matematică ale elevilor*, Ed. Scrisul Românesc, 1983.
- [4] Gh. Schneider, *Culegere de probleme de analiză matematică pentru clasele XI-XII*, Ed. Hyperion, 1997.

**Probleme rezolvate**

**(i) Calculul integralei definite folosind relații de recurență**

R4.2.1. Fie  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, n \in \mathbf{N}$ . Să se demonstreze că:

(i)  $I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}, (\forall) k \geq 2, k \in \mathbf{N}$

(ii)  $I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}; I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$  unde

$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1), (2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k), k \in \mathbf{N}^*$

(iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n} = 0$

(iv)  $I_{n+1} \leq I_n, (\forall) n \geq 1$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$

(v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} C_{2n}^n \sqrt{n\pi} = 1$  (formula lui Wallis)

Soluție. (i) prin părți  $I_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k x dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^{k-1} x (\cos x)' dx =$   
 $= -\sin^{k-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (k-1) \sin^{k-2} x \cos^2 x dx =$   
 $= \int_0^{\pi/2} (k-1) \sin^{k-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (k-1) I_{k-2} - (k-1) I_k, \text{ de unde}$   
 $I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}.$

(ii) Dând valorile pare pentru  $k$  de la 2 la  $2n$  în egalitatea de la (i) vom obține relațiile:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2$$

.....

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$$

Înmulțind membru cu membru obținem

$$I_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$$

Analog dând valorile impare pentru  $k$  de la 1 la  $2n+1$  obținem cealaltă egalitate.

(iii) Fie șirul  $a_n = I_{2n} \frac{2}{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} > 0$  și cum  $2k-1 < 2k, k = \overline{1, n}$

rezultă că  $a_n < 1$ , deci șirul  $(a_n)_n$  este mărginit. Cum  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$  rezultă că șirul este descrescător, prin urmare convergent.

Fie  $b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot 1 > \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} = a_n$  rezultă că

$a_n^2 < a_n \cdot b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n} = \frac{3}{8n}$ , rezultă că  $0 < a_n < \sqrt{\frac{3}{8n}}$  și conform criteriului cleștelui rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , adică  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n} = 0$ .

(iv)  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  rezultă că  $0 \leq \sin x \leq 1$ , deci

$0 \leq \sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x \leq 1$ , de unde  $I_{2k+1} \leq I_{2k} \leq I_{2k-1}$ ,  $(\forall) k \geq 1$ . Rezultă că  $I_{n+1} \leq I_n$ ,  $(\forall) n \geq 1$ . Avem  $1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} (2n+1)$  și  $I_{2n} \leq I_{2n-1}$  adică

$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2} \leq \frac{1}{2n} \cdot (2n+1)$  rezultă că

$1 \leq \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2} \cdot \frac{\pi}{2} (2n+1) \leq \frac{2n+1}{2n}$ . Trecând la limită și aplicând criteriul cleștelui

avem:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$ .

(v)  $\frac{1}{4^n} C_{2n}^n \sqrt{n\pi} = \frac{1}{(2^n)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sqrt{n\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \sqrt{n\pi} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sqrt{n\pi} =$

$= \sqrt{\frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2} \cdot n\pi} = \sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n-1}}}$  și conform (iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} C_{2n}^n \sqrt{n\pi} = 1$ .

R4.2.2. Să se stabilească o relație de recurență pentru integrala

$$I_n = \int_0^1 x^{2n} \sqrt{1-x^2} dx, (\forall) n \in \mathbf{N}$$

și să se calculeze valoarea sa.

Soluție.  $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ . Facem substituția  $x = \sin t$ ,  $dx = \cos t dt$ ,

$x = 0 \Rightarrow t = 0$  și  $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ . Așadar

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}$$

Aplicând formula de integrare prin părți avem:

$$I_n = \int_0^1 x^{2n-1} (x\sqrt{1-x^2}) dx = -\frac{1}{3} x^{2n-1} (1-x^2)^{3/2} \Big|_0^1 + \frac{2n-1}{3} \int_0^1 x^{2n-2} (1-x^2)^{3/2} dx =$$



$$= \frac{2n-1}{3} \left( \int_0^1 x^{2n-2} \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 x^{2n} \sqrt{1-x^2} dx \right) = \frac{2n-1}{3} (I_{n-1} - I_n)$$

de aici  $I_n = \frac{2n-1}{2n+2} I_{n-1}$ . Dând valori lui  $n$  obținem succesiv:

$$I_1 = \frac{1}{4} I_0, I_2 = \frac{3}{6} I_1, I_3 = \frac{5}{8} I_2, \dots, I_n = \frac{2n-1}{2n+2} I_{n-1}.$$

Înmulțind relațiile între ele membru cu membru obținem:

$$I_n = \frac{\pi \cdot (2n-1)!!}{2 \cdot (2n+2)!!}$$

### (ii) Identități deduse prin integrare

R4.2.3. a) Să se calculeze în două moduri integrala

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx, \quad m, n \in \mathbf{N}$$

și de aici, să se deducă identitatea:

$$\frac{1}{m+1} C_n^0 - \frac{1}{m+2} C_n^1 + \frac{1}{m+3} C_n^2 - \dots + (-1)^n \frac{1}{m+n+1} C_n^n = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

b) Să se arate că  $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$  și apoi să se calculeze

suma  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(n-k)!(p+1)\dots(p+k+1)}$ .

c) Să se arate că  $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}{(2n+1)!}$  și apoi să se stabilească

identitatea:

$$C_n^0 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \dots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Soluție. a) Calculăm mai întâi prin părți:

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx = \\ &= -\frac{1}{n+1} (x-a)^m (b-x)^{n+1} \Big|_a^b + \frac{m}{n+1} \int_a^b (x-a)^{m-1} (b-x)^{n+1} dx \end{aligned}$$

adică  $I_{m,n} = \frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}$ ,  $(\forall) m, n \in \mathbf{N}$  de unde

$$I_{m,n} = \frac{m}{n+1} \cdot \frac{m-1}{n+2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n+m} I_{0,m+n} = \frac{m!n!}{(m+n)!} I_{0,m+n}$$

Dar  $I_{0,m+n} = \int_0^b (b-x)^n dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{m+n+1}$  de unde

$$I_{m,n} = \frac{m!n!(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \quad (4.2.1)$$

Făcând schimbarea de variabilă  $x-a=t$  și dezvoltând după binomul lui Newton, calculăm în al doilea mod integrala  $I_{m,n}$ . Deci:

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx = \int_0^{b-a} t^m (b-a-t)^n dt = \\ &= \int_0^d t^m (C_n^0 d^n - C_n^1 d^{n-1} t + \dots + (-1)^n C_n^n t^n) dt = \\ &= d^{m+n+1} \left( \frac{1}{m+1} C_n^0 - \frac{1}{m+2} C_n^1 + \frac{1}{m+3} C_n^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{m+n+1} C_n^n \right) \end{aligned}$$

Egalând rezultatele obținute în cele două moduri obținem identitatea cerută.

b) Aplicăm a) pentru  $a=0, b=1$  și obținem

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^m (1-x)^n dx &= \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(n-k)!(p+1)\dots(p+k+1)} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k p!}{(n-k)!(p+k+1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(n-k)!k!} \frac{p!k!}{(p+k+1)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \left[ (-1)^k C_n^k \int_0^1 x^p (1-x)^k dx \right] = \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^p (1-x)^k \right) dx = \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^1 x^p [1-(1-x)]^n dx = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^{n+p} dx = \frac{1}{(n+p+1)n!} \end{aligned}$$

c) Folosind a) pentru  $a=-1, b=1$  și  $m=n$  conform (4.2.1)

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ de unde}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Pe de altă parte dezvoltând  $(1-x^2)^n$  după binomul lui Newton avem:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \int_{-1}^1 \left( \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k x^{2k} \right) dx = C_n^0 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} + \dots + (-1)^n \frac{C_n^n}{2n+1}$$

și egalând rezultatele obținem identitatea cerută.

**(iii) Calculul integralei definite utilizând proprietățile funcției de integrate (paritate, periodicitate, etc.)**

R4.2.4. Fie  $f : [x_0 - r, x_0 + r] \rightarrow \mathbf{R}$  continuă, cu proprietatea că:

$$af(x_0 + x) + bf(x_0 - x) = c, (\forall)x, \quad |x| \leq r, \quad a, b \in \mathbf{R}^*, \quad c \in \mathbf{R}$$

Atunci: a)  $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \frac{2cr}{a+b}, \quad a+b \neq 0$

b)  $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \frac{c}{a}r + \frac{a-b}{a} \int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx$

Soluție. Fie  $\varphi, \psi : [-r, r] \rightarrow [x_0 - r, x_0 + r]$ ,  $\varphi(t) = x_0 + t$ ,  $\psi(t) = x_0 - t$ .

Cum  $f : [x_0 - r, x_0 + r] \rightarrow \mathbf{R}$  e continuă, putem aplica schimbarea de variabilă

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx &= \int_{\varphi(-r)}^{\varphi(r)} f(x)dx = \int_{-r}^r f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{-r}^r f(x_0 + t)dt = \\ &= \int_{-r}^r \left( \frac{c}{a} - \frac{b}{a} f(x_0 - t) \right) dt = \frac{2cr}{a} - \frac{b}{a} \int_{-r}^r f(x_0 - t)dt = \frac{2cr}{a} + \frac{b}{a} \int_{-r}^r f(\psi(t))\psi'(t)dt = \\ &= \frac{2cr}{a} + \frac{b}{a} \int_{\psi(-r)}^{\psi(r)} f(x)dx = \frac{2cr}{a} - \frac{b}{a} \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx, \text{ de unde } \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \frac{2cr}{a+b}. \end{aligned}$$

b)  $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \int_{x_0-r}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx$ . Dar

$$\begin{aligned} \int_{x_0-r}^{x_0} f(x)dx &= \int_{\varphi(-r)}^{\varphi(0)} f(x)dx = \int_{-r}^0 f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{-r}^0 f(x_0 + t)dt = \\ &= \int_{-r}^0 \left[ \frac{c}{a} - \frac{b}{a} f(x_0 - t) \right] dt = \frac{c}{a}r - \frac{b}{a} \int_{-r}^0 f(x_0 - t)dt = \frac{c}{a}r + \frac{b}{a} \int_{-r}^0 f(\psi(t))\psi'(t)dt = \\ &= \frac{c}{a}r + \frac{b}{a} \int_{\psi(-r)}^{\psi(0)} f(x)dx = \frac{c}{a}r + \frac{b}{a} \int_{x_0+r}^{x_0} f(x)dx. \end{aligned}$$

De aici

$$\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \frac{c}{a}r + \frac{b}{a} \int_{x_0+r}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx = \frac{c}{a}r + \frac{a-b}{a} \int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx$$

R4.2.5. Funcția  $f : [a - r, a + r] \rightarrow \mathbf{R}$  se numește  $a$ -pară dacă

$$f(a + x) = f(a - x), (\forall)x \text{ cu } |x| \leq r. \quad (4.2.2)$$

respectiv  $a$ -impară dacă

$$f(a + x) = -f(a - x), (\forall)x \text{ cu } |x| \leq r \quad (4.2.3)$$

a) Dacă  $f$  este continuă să se arate că:

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)dx = \begin{cases} 2 \int_a^{a+r} f(x)dx, & \text{daca } f \text{ este } a\text{-para} \\ 0, & \text{daca } f \text{ este } a\text{-impara} \end{cases}$$

b) În plus, produsul (câtul) a două funcții de  $a$ -parități diferite este o funcție  $a$ -impară, respectiv produsul (câtul) a două funcții de aceeași  $a$ -paritate este o funcție  $a$ -pară.

Soluție. a) Dacă  $f$  este  $a$ -pară, atunci aplicând rezultatul de la R4.2.4 pentru  $x_0 := a$ ,  $a := 1$ ,  $b := -1$ ,  $c = 0$  obținem rezultatul dorit.

Dacă  $f$  este  $a$ -impară, atunci aplicând R4.2.4 pentru  $x_0 := a$ ,  $a := 1$ ,  $b := 1$ ,  $c = 0$  obținem rezultatul dorit.

b) Fie  $f, g$   $a$ -pare, adică  $f(a+x) = f(a-x)$ ,  $g(a+x) = g(a-x)$ . rezultă  $(f \cdot g)(a+x) = f(a+x)g(a+x) = f(a-x)g(a-x) = (f \cdot g)(a-x)$ , deci  $f \cdot g$  este  $a$ -pară. Analog se arată și celelalte cazuri.

R4.2.6. Calculați  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x - \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .

Soluție. Fie  $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sin^n x - \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}$ .

Avem  $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f(x)$ , de unde notând  $t = \frac{\pi}{4} - x$  obținem

$f\left(\frac{\pi}{4} - t\right) + f\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = 0$ ,  $|t| < \frac{\pi}{4}$  și deci  $f$  este  $\frac{\pi}{4}$ -impară, deci conform R4.2.5

avem  $\int_0^{\pi/2} f(x) dx = 0$ .

R4.2.7. Fie  $f, g, h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \arcsin(\sin x)$  și

$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ . Să se arate că  $(\forall) n \in \mathbf{N}$ :  $\int_0^{2n\pi} h(x) dx = \frac{n(\pi^2 - 8)}{4}$ .

Soluție. Cum  $g(x + 2k\pi) = \arcsin(\sin(x + 2k\pi)) = \arcsin(\sin x) = g(x)$  și  $f(x + 2k\pi) = f(x)$  rezultă că și  $h$  este periodică de perioadă principală  $2\pi$ . Explicitând pe  $g$  și  $h$  pe intervalul  $[0, 2\pi]$  avem:

$$g(x) = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \pi - x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \\ x - 2\pi, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \pi - x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \sin x, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Rezultă că } \int_0^{2n\pi} h(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} h(x) dx = n \int_0^{2\pi} h(x) dx = \\ &= n \left( \int_0^{\pi/2} x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right) = \\ &= n \left( \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{(\pi - x)^2}{2} \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = \frac{n(\pi^2 - 8)}{4} \end{aligned}$$

(iv) Alte tehnici particulare de schimbare de variabilă

R4.2.8. Calculați  $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg}x) dx$ .

Soluție. Facem schimbarea de variabilă  $t = \frac{\pi}{4} - x$ ,  $dx = -dt$ .

Dacă  $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$ , de unde

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg}x) dx &= -\int_{\pi/4}^0 \ln\left(\frac{2}{1 + \operatorname{tg}x}\right) dx = \int_0^{\pi/4} [\ln 2 - \ln(\operatorname{tg}x + 1)] dx = \\ &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg}x) dx \end{aligned}$$

Așadar  $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg}x) dx = \frac{\pi}{8} \ln 2$ .

R4.2.9. a) Fie  $a > 1$ ,  $f: \left[\frac{1}{a}, a\right] \rightarrow \mathbf{R}$  continuă, astfel încât

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = k, (\forall) x \in \left[\frac{1}{a}, a\right]$$

Să se calculeze  $\int_{1/a}^a \frac{(x+1)f(x)}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ .

b) Calculați  $\int_{1/2}^1 \frac{(x+1)\operatorname{arctg}x}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ .

Soluție. a) Facem schimbarea de variabilă  $t = \frac{1}{x}$ ,  $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ , dacă

$x = \frac{1}{a} \Rightarrow t = a$ ,  $x = a \Rightarrow t = \frac{1}{a}$ . Deci

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/a}^a \frac{(x+1)f(x)}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \int_a^{1/a} \frac{\left(\frac{1}{t}+1\right)f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} \cdot \frac{-1}{t^2} dt = \int_{1/a}^a \frac{(t+1)f\left(\frac{1}{t}\right)}{t\sqrt{t^2+1}} dt = \\ &= \int_{1/a}^a \frac{(t+1)(k-f(t))}{t\sqrt{t^2+1}} dt = k \int_{1/a}^a \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + k \int_{1/a}^a \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}} - I \end{aligned}$$

De aici

$$I = \frac{k}{2} \left( \int_{1/a}^a \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + \int_{1/a}^a \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}} \right) = k \left( \ln(a + \sqrt{1+a^2}) - \ln \frac{1 + \sqrt{1+a^2}}{a} \right)$$

b) Se observă că  $\arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$  pentru  $x > 0$ , rezultă că pentru  $a = 2$  avem:

$$\int_{1/2}^1 \frac{(x+1)\arctg x}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

R4.2.10. Calculați  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x dx}{e^x + 1}$ .

Soluție. Facem schimbarea de variabilă  $t = -x$ ,  $dx = -dt$ , dacă

$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}. \text{ Avem așadar}$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{e^x + 1} dx = -\int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\cos^3(-t)}{e^{-t} + 1} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^t \cos^3 t}{e^t + 1} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t dt - I$$

Rezultă că

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)(\sin x)' dx = \frac{1}{2} \left( \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

R4.2.11. Calculați  $\int_0^{\pi} \frac{(x+1)\sin x}{2 - \sin^2 x} dx$ .

Soluție.  $I = \int_0^{\pi} \frac{(x+1)\sin x}{2 - \sin^2 x} dx = I_1 + I_2$ , unde  $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{2 - \sin^2 x} dx$  și

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} dx. \text{ Avem}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{2 - \sin^2 x} dx = -\int_0^{\pi} (\pi - x - \pi) \frac{\sin(\pi - x)}{2 - \sin^2(\pi - x)} dx = \\ &= -\int_0^{\pi} (\pi - x) \frac{\sin(\pi - x)}{2 - \sin^2(\pi - x)} dx + \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin(\pi - x)}{2 - \sin^2(\pi - x)} dx = \\ &= -\int_0^{\pi} t \frac{\sin t dt}{2 - \sin^2 t} + \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{2 - \sin^2 x} = -I_1 + \pi I_2 \end{aligned}$$

deci  $I_1 = \frac{\pi}{2} I_2$ , dar

$$I_2 = -\int_0^{\pi} \frac{(\cos x)' dx}{1 + \cos^2 x} = -\arctg(\cos x) \Big|_0^{\pi} = -\arctg(-1) + \arctg 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Deci } I = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}.$$

## 5. Șiruri și Integrala Riemann

Studiul convergenței șirurilor început în clasa a XI-a necesită o revenire la studiul convergenței acelor șiruri în care intervine integrala definită. Chiar dacă modul de abordare și teoremele utilizate au fost studiate în cls. A XI-a, în noul context putem identifica noi clase de șiruri convergente.

Pe de altă parte, acest tip de probleme au fost propuse în ultimii ani la concursurile și olimpiadele școlare.

### 5.1. Calculul limitelor unor șiruri utilizând integrala definită

În acest paragraf ne propunem să calculăm limitele unor șiruri al căror termen general este definit printr-o sumă Riemann sau printr-o generalizare a acesteia. Pentru rezolvarea acestei probleme reamintim criteriul de integrabilitate cu șiruri:

#### 5.1.1. Teoremă

Fie  $f : [a, b] \rightarrow R$  o funcție.  $f$  este integrabilă dacă și numai dacă

$\forall (\Delta_n)_{n \geq 1} \subset D[a, b]$ , cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$  și  $\forall (\xi^n)_{n \geq 1}$  un șir de sisteme de puncte intermediare, cu  $\xi^n$  asociat lui  $\Delta_n, n \geq 1$ , șirul sumelor Riemann  $(\sigma(f; \Delta_n, \xi^n))_{n \geq 1}$  este convergent.

În aceste condiții echivalente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f; \Delta_n, \xi^n) = \int_a^b f(x) dx$ .

#### 5.1.2. Consecință

Fie  $f : [a, b] \rightarrow R$  o funcție integrabilă. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

În particular, dacă  $a = 0$  și  $b = 1$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$

*Demonstrație*

Pentru orice  $n \geq 1$ , fie  $\Delta_n$  diviziunea echidistantă definită de punctele

$$x_k^n = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k = \overline{0, n}.$$

$$x_k^n - x_{k-1}^n = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \|\Delta_n\| = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0, \quad \text{când } n \rightarrow \infty.$$

În fiecare interval  $[x_{k-1}^n, x_k^n]$  alegem punctul intermediar la una din extremități :

$$\xi_k^n = x_k^n.$$

Suma Riemann corespunzătoare este :

$$\sigma(f; \Delta_n, \xi^n) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Din faptul că  $f$  este integrabilă rezultă, conform Teoremei 5.1.1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f; \Delta_n, \xi^n) = \int_a^b f(x) dx.$$

În continuare vom prezenta un rezultat care permite calculul limitelor unor șiruri de o formă mai generală.

### 5.1.3. Teoremă

Fie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile Riemann,  $\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n)$ ,  $\Delta_n \in D[a, b]$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$  când  $n \rightarrow \infty$ . Pentru orice  $\alpha_i^n \in [m_i^n(f), M_i^n(f)]$  și pentru orice  $\beta_i^n \in [m_i^n(g), M_i^n(g)]$ ,  $i = \overline{1, k_n}$  (unde  $m_i^n(f) = \min_{x \in [x_{i-1}^n, x_i^n]} f(x)$ ,

$M_i^n(f) = \max_{x \in [x_{i-1}^n, x_i^n]} f(x)$ ), șirul  $a_n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n \beta_i^n (x_i^n - x_{i-1}^n)$  converge spre

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

*Demonstrație*

Fie  $I = \int_a^b f(x)g(x)dx$ .

$$|I - a_n| \leq \left| I - \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^n)g(x_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) \right| + \left| \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^n)[g(x_i^n) - \beta_i^n](x_i^n - x_{i-1}^n) \right| +$$

$$\left| \sum_{i=1}^{k_n} \beta_i^n [f(x_i^n) - \alpha_i^n](x_i^n - x_{i-1}^n) \right|$$

$fg$  integrabilă Riemann  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\forall n \geq N_1$ ,

$$\left| I - \sum_{i=1}^{k_n} (fg)(x_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$$

Pentru  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N_2 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\forall n \geq N_2$ .



$$\left| \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^n) [g(x_i^n) - \beta_i^n] (x_i^n - x_{i-1}^n) \right| \leq \max_{x \in [a,b]} f(x) \cdot [S(g, \Delta_n) - s(g, \Delta_n)] < \max_{x \in [a,b]} f(x) \cdot \frac{\varepsilon}{3 \cdot \max_{x \in [a,b]} f(x)} = \frac{\varepsilon}{3} \quad (2)$$

Analog, pentru  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N_3 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\forall n \geq N_3$ ,

$$\left| \sum_{i=1}^{k_n} \beta_i^n [f(x_i^n) - \alpha_i^n] (x_i^n - x_{i-1}^n) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3)$$

Din (1), (2), (3)  $\Rightarrow |a_n - I| < \varepsilon$ ,  $\forall n \geq N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$

#### 5.1.4. Consecință

Fie  $f, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  integrabilă Riemann,  $h$  derivabilă cu derivata integrabilă,  $\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n) \in D[a, b]$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$ .

Pentru orice  $\alpha_i^n \in [m_i^n(f), M_i^n(f)]$ , șirul  $a_n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n [h(x_i^n) - h(x_{i-1}^n)]$

converge către  $\int_a^b f(x) \cdot h'(x) dx$ .

*Demonstrație*

Aplicăm Teorema lui Lagrange funcției  $h$  pe  $[x_{i-1}^n, x_i^n]$ :

$$\exists c_i^n \in (x_{i-1}^n, x_i^n) \text{ astfel încât } h(x_i^n) - h(x_{i-1}^n) = h'(c_i^n) \cdot (x_i^n - x_{i-1}^n).$$

În Teorema 5.1.3 luăm  $g := h'$ ,  $\beta_i^n = h'(c_i^n)$

Următorul rezultat dă o condiție suficientă ca un șir de diviziuni să aibă norma tinzând la zero.

#### 5.1.5. Propoziție

Fie  $\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b]$  o funcție strict crescătoare și surjectivă,

$$\Delta_n = \left( a, \varphi\left(a + \frac{b-a}{n}\right), \dots, \varphi\left(a + k \frac{b-a}{n}\right), \dots, b \right) \in D[a, b], n \in \mathbb{N}^*. \text{ Atunci}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0.$$

*Demonstrație*

$\varphi$  este uniform continuă pe  $[a, b]$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$  cu  $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$   
 $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon. \exists N_0 \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\forall n \geq N_0, \frac{b-a}{n} < \delta_\varepsilon \Rightarrow$   
 $|\varphi(x_i^n) - \varphi(x_{i-1}^n)| < \varepsilon \Rightarrow \|\Delta_n\| < \varepsilon$   
 Deci  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\forall n \geq N_0, \|\Delta_n\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$ .

### 5.1.6. Exemple

1) Dacă  $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1], \varphi = \frac{x}{2-x}$ , atunci  $\varphi'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$ , deci  $\varphi$  este  
 strict crescătoare și se verifică ușor că  $\varphi$  este surjectivă. Conform Propoziției  
 5.1.6,  $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{k}{2n-k}, \dots, \frac{n}{2n-n}\right)$ ,  $n > 0$ , este un șir de diviziuni  
 neechidistante cu  $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$

2) Funcția  $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1], \varphi(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$  este strict crescătoare și surjectivă,  
 deci  $\Delta_n = \left(0, \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}, \dots, \operatorname{tg} \frac{k\pi}{4n}, \dots, \operatorname{tg} \frac{n\pi}{4n}\right)$  este un șir de diviziuni cu  $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$

## 5.2. Șiruri ai căror termeni generali conțin integrala definită

### 5.2.1. Propoziție

Dacă funcția  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  este monotonă și mărginită, atunci șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu  
 termenul general  $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - \int_1^n f(x) dx$  este convergent.

*Demonstrație*

În cazul în care  $f$  este descrescătoare avem

$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx = \int_n^{n+1} [f(n+1) - f(x)] dx \leq 0$ . Deci  $(a_n)_{n \geq 1}$  este  
 descrescător.

Demonstrăm că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este mărginit inferior:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[ f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] + f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} [f(k) - f(x)] dx + f(n).$$

Ținând seama de monotonia lui  $f$  și de faptul că  $f$  este mărginită inferior rezultă  
 că  $(a_n)_{n \geq 1}$  este mărginit inferior.

Analog pentru  $f$  crescătoare.

### 5.2.2. Observații

În condițiile propoziției 5.2.1 avem:

1) Șirul  $\left(\sum_{k=1}^n f(k)\right)_{n \geq 1}$  este convergent dacă și numai dacă șirul  $\left(\int_1^n f(x)dx\right)_{n \geq 1}$  este convergent.

2) Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x)dx = +\infty$  atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{\int_1^n f(x)dx} = 1$

### 5.2.3. Exemple:

1) Șirul  $(c_n)_{n \geq 1}$ ,  $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ , este convergent

2) Fie  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$  este convergent dacă și numai dacă  $\alpha > 1$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}$ , unde  $\alpha \in (0, 1)$

### 5.2.4. Propoziție

Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă, cu derivata integrabilă. Dacă considerăm șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu termenul general

$$a_n = \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + (k-\lambda)\frac{b-a}{n}\right), \text{ unde } \lambda \in [0, 1], \text{ atunci } (na_n)_{n \geq 1}$$

este convergent și  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(b-a)[f(b) - f(a)]$ .

*Demonstrație*

Fie  $\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n) \in D[a, b]$ ,  $x_k^n = a + \frac{k}{n}(b-a)$  și  $y_k^n = a + (k-\lambda)\frac{b-a}{n}$ ,

$$\overline{k=1, n}. \text{ Atunci } a_n = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}^n}^{x_k^n} f(t)dt - \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(y_k^n) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}^n}^{x_k^n} (f(t) - f(y_k^n))dt$$

Aplicând Teorema lui Lagrange pe fiecare interval de capete  $t$  și  $y_k^n$ , rezultă că există  $c_k^n$  între  $t$  și  $y_k^n$  și deci în  $(x_{k-1}^n, x_k^n)$  cu

$$a_n = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}^n}^{x_k^n} (t - y_k^n) f'(c_k^n) dt = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}^n}^{y_k^n} (t - y_k^n) f'(c_k^n) dt + \sum_{k=1}^n \int_{y_k^n}^{x_k^n} (t - y_k^n) f'(c_k^n) dt. (1)$$

Cum  $f'$  este integrabilă, rezultă că  $f'$  este mărginită, deci există

$$m_k^n = \inf_{t \in [x_{k-1}^n, x_k^n]} f'(t); M_k^n = \sup_{t \in [x_{k-1}^n, x_k^n]} f'(t) \in R, \quad k = \overline{0, n}.$$

Pe  $[x_{k-1}^n, y_k^n]$ , cum  $t - y_k^n \leq 0$ , rezultă că:

$$M_k^n (t - y_k^n) \leq f'(c_k^n) (t - y_k^n) \leq m_k^n (t - y_k^n) \quad (2)$$

iar pe  $[y_k^n, x_k^n]$ , cum  $t - y_k^n \geq 0$ , avem:

$$m_k^n (t - y_k^n) \leq f'(c_k^n) (t - y_k^n) \leq M_k^n (t - y_k^n) \quad (3)$$

Din (1), (2) și (3) rezultă că:

$$\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}^n}^{y_k^n} (t - y_k^n) M_k^n dt + \sum_{k=1}^n \int_{y_k^n}^{x_k^n} (t - y_k^n) m_k^n dt \leq a_n \leq$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}^n}^{y_k^n} (t - y_k^n) m_k^n dt + \sum_{k=1}^n \int_{y_k^n}^{x_k^n} (t - y_k^n) M_k^n dt \quad \text{și efectuând calculele obținem:}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{y_k^n}^{x_k^n} (x_k^n - y_k^n)^2 m_k^n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_{k-1}^n - y_k^n)^2 M_k^n \leq a_n \leq$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k^n - y_k^n)^2 M_k^n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_{k-1}^n - y_k^n)^2 m_k^n, \quad \text{și cum } y_k^n - x_{k-1}^n = \frac{(b-a)(1-\lambda)}{n} \quad \text{și}$$

$$x_k^n - y_k^n = \frac{\lambda(b-a)}{n}, \quad k = \overline{1, n} \quad \text{rezultă că:}$$

$$\frac{(b-a)\lambda^2}{2} \left( \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n m_k^n \right) - \frac{(b-a)(1-\lambda)^2}{2} \left( \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n M_k^n \right) \leq na_n \leq$$

$$\frac{(b-a)\lambda^2}{2} \left( \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n M_k^n \right) - \frac{(b-a)(1-\lambda)^2}{2} \left( \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n m_k^n \right) \quad (4)$$

$$\text{Dar } s_n(f') = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n m_k^n \rightarrow \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a), \quad \text{când } n \rightarrow \infty$$

$$\text{Și } S_n(f') = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n M_k^n \rightarrow \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a), \quad \text{când } n \rightarrow \infty$$

Trecând la limită în (4) și ținând cont de șirurile care majorează și minorează, rezultă că șirul  $(na_n)_{n \geq 1}$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) (b-a) [f(b) - f(a)].$$

Alegând  $\lambda = \frac{1}{2}$  în propoziția 5.2.4. se obține  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ . În aceste condiții se pune problema convergenței șirului  $(n^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Are loc următorul rezultat:

### 5.2.5. Propoziție [2, pg. 177]

Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de două ori derivabilă, cu derivata a doua integrabilă. Dacă considerăm șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu termenul general

$$a_n = \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right), \text{ atunci } (n^2 a_n)_{n \geq 1} \text{ este convergent}$$

$$\text{și } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \frac{1}{24} (b-a)^2 [f'(b) - f'(a)]$$

### 5.2.6. Exemple:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \right) = \frac{3}{4}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{4n}{4n^2 + (2k-1)^2} \right) = \frac{1}{32}$$

Soluție: Se consideră funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  și se aplică propozițiile 5.2.4. și 5.2.5.

## Bibliografie

- [1] Gh. Sirețchi, „Calcul diferențial și integral”, vol. I și II, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1985
- [2] V. Arsinte: „Probleme elementare de calcul integral”, Ed. Univ. București, 1995
- [3] C. Mortici: „600 de probleme”, Edi. GIL Zalău, 2001
- [4] A. Magdaș, I. Magdaș: „Calculul limitelor unor șiruri utilizând integrala definită”, Didactica Matematicii, vol. 12, pg. 87-92
- [5] V. Pop: „Evaluarea prin șiruri a unor serii”, Argument, Revista de matematică a Colegiului Național Gh. Șincai, Baia-Mare, 5/2003

**Probleme rezolvate**

1) Să se calculeze limitele următoarelor șiruri:

a)  $x_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}, n \geq 2$

b)  $x_n = \frac{1}{n^2} \left( 3e^{\frac{\sqrt{1.2}}{n}} + 5e^{\frac{\sqrt{2.3}}{n}} + \dots + (2n-1)e^{\frac{\sqrt{(n-1)n}}{n}} \right)$

*Soluție*

a)  $x_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n^n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$ .

$\ln x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ . Folosind consecința 5.1.2 avem:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx =$

$\ln 2 - (x - \ln(1+x)) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1 = \ln \frac{4}{e} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{4}{e}$

b) Considerăm  $f, g : [0,1] \rightarrow R$ ,  $f(x) = x, g(x) = e^x$ .

Alegem  $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$ ,  $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ ;  $x_i^n = \frac{i}{n}$

$\alpha_i^n = f\left(\frac{x_{i-1}^n + x_i^n}{2}\right)$ ,  $\beta_i^n = g\left(\sqrt{x_{i-1}^n \cdot x_i^n}\right)$ ,  $i = \overline{1, n}$

$x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} e^{\frac{\sqrt{i(i-1)}}{n}} - \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i-1}^n + x_i^n}{2} \cdot e^{\sqrt{x_{i-1}^n x_i^n}} - \frac{1}{n^2} =$

$2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^n \beta_i^n (x_i^n - x_{i-1}^n) - \frac{1}{n^2}$ .

Folosind Teorema 5.1.3, obținem:

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \int_0^1 x e^x dx = 2(xe^x - e^x) \Big|_0^1 = 2$

2) Să se arate că  $\forall n \in N^*$ , ecuația  $\frac{1}{\sqrt{nx+1}} + \frac{1}{\sqrt{nx+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{nx+n}} = \sqrt{n}$  are o soluție unică  $x = x_n$ . Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  (L. Panaitopol, Naț., 1994)

*Soluție*

Pentru orice  $n \in N^*$ , definim  $f_n : [0, \infty) \rightarrow R$ ,  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{x + \frac{k}{n}}}$ . Ecuația din

enunț se scrie  $f_n(x) = n$ . Pentru  $n$  fixat avem

$f_n(x) - n > 1 + 1 + \dots + 1 - n = n - n = 0$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - n = -n < 0$  deci

$\exists x_n \in (0, \infty)$  astfel încât  $f_n(0) = n$  (proprietatea lui Darboux). Soluția  $x_n$  este unică deoarece  $f_n$  este strict descrescătoare. Vom arăta că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{9}{16}$ .

Obținerea limitei este sugerată de forma ecuației  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_n + \frac{k}{n}}} = 1$  care conduce

la ecuația în  $l$  următoare:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{l+t}} dt = 1 \text{ cu soluție unică } l = \frac{9}{16}.$$

Fie  $\mu > 0$ . Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  notăm:  $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16} + \mu + \frac{k}{n}}}$  și

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16} - \mu + \frac{k}{n}}} \text{ (se ia și } \mu < \frac{9}{16} \text{)}. \text{ Atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s < 1 \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = t > 1$$

$$s = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16} + \mu + t}} dt = 2 \left( \sqrt{\frac{25}{16} + \mu} - \sqrt{\frac{9}{16} + \mu} \right) \text{ și}$$

$$t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16} - \mu + t}} dt = 2 \left( \sqrt{\frac{25}{16} - \mu} - \sqrt{\frac{9}{16} - \mu} \right).$$

$\exists n(\mu) \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\forall n \geq n(\mu)$  să avem  $a_n < 1 < b_n$ , adică

$$\frac{1}{n} f_n \left( \frac{9}{16} + \mu \right) < \frac{1}{n} f_n(x_n) < \frac{1}{n} f_n \left( \frac{9}{16} - \mu \right), \text{ deci } \frac{9}{16} - \mu < x_n < \frac{9}{16} + \mu.$$

Cum  $\mu$  este arbitrar (de mic), obținem  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{9}{16}$ .

3) Fie  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție periodică, de perioadă 1, integrabilă pe  $[0, 1]$ .

Pentru un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $x_0 = 0$ , strict crescător și nemărginit cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ ,

notăm  $r(n) = \max \{k \mid x_n \leq k\}$ .

a) Să se arate că:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r(n)} (x_k - x_{k-1}) f(x_k) = \int_0^1 f(x) dx$

b) Utilizând eventual rezultatul de la punctul a), demonstrați că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{f(\ln k)}{k} = \int_0^1 f(x) dx \text{ (Etapa finală, 2001)}$$

*Soluție*

$$\text{a) Avem } a_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \left( \sum_{p-1 < x_k \leq p} (x_{k+1} - x_k) f(x_k) \right) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n s_p.$$

Cu Cesaro-Stolz avem:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

$$s_n = \sum_{n-1 < x_k \leq n} (x_{k+1} - x_k) f(x_k) = \sum_{0 < x_k - (n-1) \leq 1} (y_{k+1} - y_k) f(y_k), \text{ cu } y_k = x_k - (n-1),$$

reprezintă suma Riemann asociată funcției  $f$  și diviziunii  $(y_k)_{r(n-1) < k \leq r(n)}$  a intervalului  $[0, 1]$ , a cărei normă tinde la 0.

Prin urmare,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_0^1 f(x) dx$

$$\text{b) Pentru } x_n = \ln n, \text{ rezultă că } z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor e^n \rfloor} \ln \frac{k+1}{k} f(\ln k) \rightarrow I = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} s_{\lfloor \ln n \rfloor} = I, \text{ deci } \frac{1}{\lfloor \ln n \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor e^{\lfloor \ln n \rfloor} \rfloor} \ln \frac{k+1}{k} f(\ln k) \rightarrow I \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{\lfloor e^{\lfloor \ln n \rfloor} \rfloor} \ln \frac{k+1}{k} f(\ln k) \rightarrow I$$

Apoi

$$\frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} f(\ln k) = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{\lfloor e^{\lfloor \ln n \rfloor} \rfloor} \ln \frac{k+1}{k} f(\ln k) + \frac{1}{\ln n} \sum_{k=\lfloor e^{\lfloor \ln n \rfloor} \rfloor + 1}^n \ln \frac{k+1}{k} f(\ln k)$$

$$\text{și arătăm că } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=\lfloor e^{\lfloor \ln n \rfloor} \rfloor + 1}^n \ln \frac{k+1}{k} f(\ln k) = 0$$

Cu  $M = \sup |f(x)|$ , avem:

$$\left| \sum_{k=\lfloor e^{\lfloor \ln n \rfloor} \rfloor + 1}^n \ln \frac{k+1}{k} f(\ln k) \right| \leq M \sum_{k=\lfloor e^{\lfloor \ln n \rfloor} \rfloor + 1}^n \ln \frac{k+1}{k} = M \ln \frac{n}{\lfloor e^{\lfloor \ln n \rfloor} \rfloor + 1} \rightarrow 0$$

Deci

$$\left| \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right) f(\ln k) \right| \leq M \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right) = M \frac{1 + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)}{\ln n} \rightarrow 0$$



## 6. Teoreme de medie. Inegalități integrale

La această temă ne propunem să familiarizăm cititorii cu teoremele de medie ale calculului integral, care spre deosebire de cele ale calculului diferențial sunt mai puțin cunoscute.

### 6.1. Teoreme de medie ale calculului integral

**6.1.1. Teoremă (Prima formulă de medie).** Fie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții integrabile cu  $g(x) \geq 0, (\forall)x \in [a, b]$ . Atunci există  $\lambda \in [m, M]$ , unde  $m := \inf f([a, b])$  și  $M := \sup f([a, b])$  astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lambda \int_a^b g(x)dx \quad (6.1.1)$$

În particular, dacă  $g(x) = 1$  avem

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda(b-a) \quad (6.1.1')$$

Demonstrație. Evident avem  $m \leq f \leq M$  deci  $mg \leq fg \leq Mg$  și deci

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

(i) Dacă  $\int_a^b g(x)dx = 0$ , atunci  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$  deci putem lua  $\lambda$  orice număr din  $[m, M]$ .

(ii) Dacă  $\int_a^b g(x)dx > 0$ , atunci  $\lambda := \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \in [m, M]$  și avem

(6.1.1).

**6.1.2. Corolar.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă și  $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție integrabilă nenegativă. Atunci există  $c \in [a, b]$  astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx \quad (6.1.2)$$

În particular, dacă  $g(x) = 1$  avem

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c) \quad (6.1.2')$$

Demonstrație. Din teorema 6.1.1 există  $\lambda \in [m, M]$  astfel încât să avem (6.1.1). Întrucât  $f$  este continuă, există  $x_0, x_1 \in [a, b]$  astfel încât  $f([a, b]) = [f(x_0), f(x_1)] = [m, M]$ , deci  $\lambda \in f([a, b])$  și deci există  $c \in [a, b]$  astfel încât  $f(c) = \lambda$ .

**6.1.3. Observație.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție integrabilă. Atunci numărul  $\lambda := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  se numește valoarea medie a lui  $f$  pe  $[a, b]$ .

**6.1.4. Teoremă. (A doua formulă de medie).** Fie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții integrabile cu  $g$  monotonă. Atunci există  $c \in [a, b]$  astfel încât:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^c f(x)dx + g(b) \int_c^b f(x)dx$$

Demonstrație. Presupunem  $g \geq 0$ ,  $g$  monoton descrescătoare și fie  $n \in \mathbf{N}$  și  $\Delta_n := (a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$  cu  $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ . Notăm

$$\alpha_i := \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx, \quad i = \overline{1, n} \quad (6.1.3)$$

Din prima formulă de medie avem  $m_i(f) \leq \alpha_i \leq M_i(f)$  și deci conform teoremei 5.1.3.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

Fie  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ,  $x \in [a, b]$ . Atunci avem:

$$\begin{aligned} \alpha_i(x_i - x_{i-1}) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt = \int_a^{x_i} f(t)dt - \int_a^{x_{i-1}} f(t)dt = F(x_i) - F(x_{i-1}) \\ L_n &= \sum_{i=1}^n \alpha_i g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) = \\ &= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})F(x_i) - \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})F(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)F(x_i) = \\ &= g(x_{n-1})F(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i))F(x_i) \end{aligned}$$

Notând  $M := \sup F([a, b])$ ,  $m := \inf F([a, b])$  și ținând seama că  $g(x_{n-1}) \geq 0$  și  $g(x_{i-1}) - g(x_i) \geq 0, (\forall) i = \overline{1, n}$  rezultă

$$L_n \leq g(x_{n-1})M + \sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i))M = Mg(a)$$

și analog  $L_n \geq mg(a)$ , deci

$$m \leq \frac{1}{g(a)} L_n \leq M \quad (6.1.4)$$

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \int_a^b f(x)g(x)dx$  din (6.1.4) rezultă că

$$m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M .$$

Funcția  $F$  fiind continuă, avem  $F([a,b])=[m,M]$ , deci există  $c \in [a,b]$

astfel încât  $F(c) = \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x)dx$  și deci

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^c f(x)dx .$$

Revenind la cazul general, presupunem  $g$  monoton descrescătoare arbitrară și fie  $h = g - g(b)$ . Atunci  $h \geq 0$  și  $h$  monoton descrescătoare, deci din raționamentul făcut rezultă că există  $c \in [a,b]$  astfel încât

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = h(a) \int_a^c f(x)dx$$

și deci

$$\int_a^b (f(x)g(x) - f(x)g(b))dx = (g(a) - g(b)) \int_a^c f(x)dx$$

de unde

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^c f(x)dx + g(b) \int_c^b f(x)dx .$$

**6.1.5. Corolar.** Fie  $f, g : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții integrabile astfel încât  $g$  este monoton descrescătoare și nenegativă. Atunci există  $c \in [a,b]$  astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^c f(x)dx \quad (6.1.5)$$

**6.1.6. Observații.** A doua formulă de medie se mai numește teorema Bonnet-Weierstrass.

**6.1.7. Problemă rezolvată.** Fie  $f_0 : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă și  $f_{n+1}$  primitiva lui  $f_n$  pe intervalul  $[0,1]$ , care se anulează în origine,  $n \in \mathbf{N}$ . Dacă  $f_{1982}(1) = \frac{1}{1983!}$ , să se demonstreze că există  $x_0 \in [0,1]$  astfel încât  $f_0(x_0) = x_0$ .

(T. Andreescu, et. finală 1983)

Soluție. Din enunț avem că

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

Din  $f_{1982}(1) = \frac{1}{1983!}$  rezultă  $\int_0^1 f_{1981}(t)dt = \int_0^1 \frac{t^{1982}}{1982!}dt$  sau

$$\int_0^1 \left( f_{1981}(t) - \frac{t^{1982}}{1982!} \right) dt = 0 . \text{ Conform primei formule de medie există } x_{1981} \in [0,1]$$

astfel ca  $f_{1981}(x_{1981}) - \frac{(x_{1981})^{1982}}{1982!} = 0$ . De aici rezultă că  $\int_0^x \left( f_{1980}(t) - \frac{t^{1981}}{1981!} \right) dt = 0$

și aplicând încă o dată formula de medie obținem că există  $x_{1980} \in [0, x_{1981}]$

astfel ca  $f_{1980}(x_{1980}) - \frac{(x_{1980})^{1981}}{1981!} = 0$ . Se repetă raționamentul și se deduce că

există  $x_0 \in [0, x_1]$  astfel ca  $f_0(x_0) = \frac{x_0}{1!}$ .

**6.1.8. Problemă rezolvată.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție integrabilă. Să se arate că:

1) pentru fiecare  $\alpha \in (0, 1)$  există cel puțin un element  $c \in (a, b)$  astfel ca

$$\alpha \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

2) dacă  $f$  este continuă pe  $(a, b)$  și  $\int_a^b f(x) dx \neq 0$  atunci pentru fiecare  $n \in \mathbf{N}^*$  există  $n$  puncte distincte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  din intervalul  $(a, b)$  astfel ca:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{n(b-a)}{1/f(x_1) + 1/f(x_2) + \dots + 1/f(x_n)}$$

(T. Precupanu, et. finală, 1989)

Soluție. 1) Fie  $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $F(t) = \int_a^t f(x) dx - \alpha \int_a^b f(x) dx$ . Deoarece  $f$  este integrabilă, rezultă că  $F$  este continuă pe  $[a, b]$ . Cum  $F(a) = -\alpha \int_a^b f(x) dx$ ,  $F(b) = (1 - \alpha) \int_a^b f(x) dx$  se deduce că

$$F(a)F(b) = \alpha(\alpha - 1) \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2.$$

Se disting două cazuri:

a) Dacă  $\int_a^b f(x) dx \neq 0$  atunci din  $\alpha \in (0, 1)$  rezultă  $F(a)F(b) < 0$ .

Funcția  $F$  fiind continuă există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $F(c) = 0$  sau

$$\alpha \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

b) Dacă  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , atunci luând  $c = b \in (a, b)$  se obține

$$\alpha \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

2) Pentru fiecare  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , numerele  $\alpha_k = k/n \in (0, 1)$  și conform cu 1), există  $c_k \in (a, b)$  astfel încât

$$(k/n) \int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_k} f(x) dx \quad (*)$$

Se obține astfel un șir  $(c_k)_{1 \leq k \leq n-1}$  de numere reale distincte din intervalul  $(a, b)$  pentru că  $\int_a^b f(x) dx \neq 0$ .

Numerele  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  sunt distincte deoarece dacă pentru un  $k = 1, 2, \dots, n-1$  s-ar obține  $c_k = c_{k+1}$ , atunci din (\*) rezultă

$$\frac{k}{n} \int_a^b f(x) dx = \frac{k+1}{n} \int_a^b f(x) dx \quad \text{sau} \quad \int_a^b f(x) dx = 0,$$

contrar cu ipoteza.

Să presupunem că  $c_k < c_{k+1}$  pentru orice  $k = 1, 2, \dots, n-2$ . Atunci

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x) dx = \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x) dx - \int_a^{c_k} f(x) dx = \frac{1}{n} \int_a^b f(x) dx \quad (**)$$

Notând  $c_0 = a$ ,  $c_n = b$  conform teoremei de medie pentru orice  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , există  $x_{k+1} \in (c_k, c_{k+1})$  astfel ca

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x) dx = (c_{k+1} - c_k) f(x_{k+1})$$

și ținând seama de (\*\*) rezultă

$$(c_{k+1} - c_k) f(x_{k+1}) = \frac{1}{n} \int_a^b f(x) dx,$$

de unde

$$c_{k+1} - c_k = \frac{1}{nf(x_{k+1})} \int_a^b f(x) dx \quad (***)$$

deoarece  $f(x_k) \neq 0$ , având  $\int_a^b f(x) dx \neq 0$ .

Adunând relațiile (\*\*\*) pentru  $k = 0, 1, \dots, n-1$  se deduce

$$b - a = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{nf(x_{k+1})} \int_a^b f(x) dx$$

iar de aici se obține imediat relația dorită.

**6.1.9. Problemă rezolvată.** Fie  $f: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$  o funcție continuă și periodică de perioadă 1. Să se arate că:

a)  $\int_a^{a+1} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$ , pentru orice  $a \in \mathbf{R}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) f(nx) dx = \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2$

(C. Mortici, Et. județeană, 2002)

Soluție. a)  $\int_a^{a+1} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^{a+1} f(x)dx =$   
 $= \int_{a+1}^1 f(t-1)dt + \int_0^{a+1} f(x)dx = \int_{a+1}^1 f(x)dx + \int_0^{a+1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$

b) Fie  $I_n = \int_0^1 f(x)f(nx)dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)f(nx)dx$ . Cum  $f(x) \geq 0, x \in \mathbf{R}$ , aplicând teorema de medie pentru fiecare integrală din sumă, obținem existența unui  $c_k \in \left[ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$ , astfel încât

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)f(nx)dx = f(c_k) \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{n} f(c_k) \int_{k-1}^k f(x)dx = \frac{1}{n} f(c_k) \int_0^1 f(x)dx.$$

Atunci  $I_n = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(c_k) \right) \int_0^1 f(x)dx$  și cum  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(c_k)$  este suma

Riemann a lui  $f$  asociată diviziunii  $\Delta_n = \left( 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right)$  cu punctele intermediare  $(c_k)_{k=1, n}$  rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2$ .

## 6.2. Inegalități integrale remarcabile

**6.2.1. Propoziție (Inegalitatea lui Cebâșev).** Fie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții monotone și de sens contrar. Atunci

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx \quad (6.2.1)$$

Demonstrație. Înlocuind eventual  $f$  și  $g$  cu  $-f$  și  $-g$  respectiv, putem presupune  $f$  monoton crescătoare și  $g$  monoton descrescătoare. Punem  $\alpha := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ . Avem  $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$  conform primei teoreme de medie.

Fie  $c = \{\sup x \in [a, b]; f(x) \leq \alpha\}$ . Atunci  $(\forall)x \in [a, c]$  avem  $\alpha \geq f(x)$  și  $g(x) \geq g(c)$ , deci

$$(\alpha - f(x))g(x) \geq (\alpha - f(x))g(c) \quad (6.2.2)$$

Analog  $(\forall)x \in [c, b]$  avem  $\alpha \leq f(x)$  și  $g(x) \leq g(c)$ , deci are loc și în acest caz inegalitatea (6.2.2).

Așadar

$$\int_a^b (\alpha - f(x))g(x)dx = \int_a^c (\alpha - f(x))g(x)dx + \int_c^b (\alpha - f(x))g(x)dx \geq \\ \geq \int_a^c (\alpha - f(x))g(c)dx + \int_c^b (\alpha - f(x))g(c)dx = g(c) \left[ \alpha(a-b) - \int_a^b f(x)dx \right] = 0.$$

De aici  $\int_a^b (\alpha - f(x))g(x)dx \geq 0$  care conduce la inegalitatea (6.2.1).

**Observații.** (i) Egalitatea în relația (6.2.1) se obține atunci când una din funcțiile  $f$  sau  $g$  este constantă, cu excepția, eventual, a unei mulțimi numărabile de puncte.

(ii) Inegalitatea lui Cebâșev poate fi dată mai general astfel:

$$\left( \int_a^b p(x)dx \right) \left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right) \geq \left( \int_a^b p(x)f(x)dx \right) \left( \int_a^b p(x)g(x)dx \right), \quad (6.2.3)$$

unde  $f, g : [a, b] \in \mathbf{R}$  sunt două funcții de aceeași monotonie, iar  $p : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  este o funcție integrabilă.

**6.2.3. Propoziție (Inegalitatea lui Young).** Fie  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  o funcție continuă, strict crescătoare astfel încât  $f(0) = 0$ . Atunci  $(\forall) a \geq 0$  și  $b \in \text{Im } f$  avem inegalitatea:

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \quad (6.2.4)$$

Demonstrație. Vom da o justificare geometrică a inegalității din enunț. Fie  $G_f$  graficul funcției  $f$  și  $S_1$  (respectiv  $S_2$ ) regiunile din plan cuprinse între  $G_f$ , axa  $Ox$  și dreapta  $x = a$  (respectiv  $G_f$ , axa  $Oy$  și dreapta  $y = b$ ) (fig. 6.1).

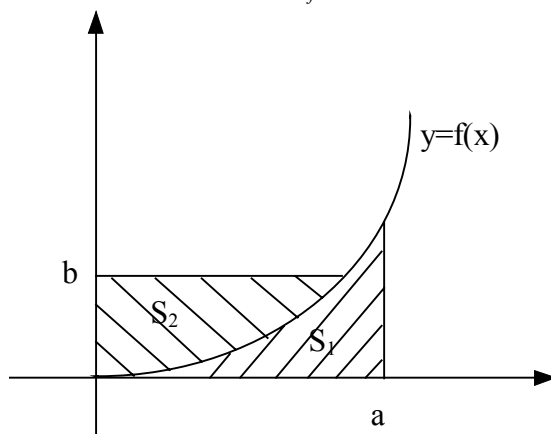


Fig. 6.1

Evident avem:  $ab \leq \text{aria}S_1 + \text{aria}S_2$  și cum  $\text{aria}S_1 = \int_0^a f(x)dy$  și  $\text{aria}S_2 = \int_0^b f^{-1}(y)dy$ , inegalitatea (6.2.4) este adevărată. Egalitatea se obține pentru  $b = f(a)$ .

**6.2.4. Corolar.** Fie  $a, b \in \mathbf{R}$  și  $p, q > 0$  astfel încât  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Atunci avem:

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} \quad (6.2.5)$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă  $|a|^p = |b|^q$ .

Demonstrație. În inegalitatea (6.2.4) înlocuim  $a := |a|$ ,  $b := |b|$ ,  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f(x) = x^{p-1}$  și se obține inegalitatea (6.2.5). Egalitatea are loc dacă și numai dacă  $f(|a|) = |b|$  ceea ce este echivalent cu  $|a|^p = |b|^q$ .

**6.2.5. Propoziție (Inegalitatea lui Hölder).** Fie  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții integrabile și  $p, q > 0$  cu  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Atunci avem inegalitatea:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \cdot \left( \int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \quad (6.2.6)$$

Demonstrație. Dacă  $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0$  sau  $\int_a^b |g(x)|^q dx = 0$  atunci  $|f|$  sau  $|g|$  este nulă aproape peste tot și deci  $\int_a^b |f(x)g(x)| dx = 0$ , prin urmare inegalitatea (6.2.6) devine egalitate.

Presupunem  $\int_a^b |f(x)|^p dx > 0$  și  $\int_a^b |g(x)|^q dx > 0$  și fie

$$\alpha := \frac{|f(x)|}{\left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}} \quad \text{și} \quad \beta := \frac{|g(x)|}{\left( \int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}}.$$

Utilizând inegalitatea (6.2.5) obținem:

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q},$$

de unde prin înlocuire și apoi prin integrare se obține (6.2.6).

**6.2.6. Corolar (Inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz).**

Fie  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$  două funcții integrabile. Atunci avem:

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right) \left( \int_a^b g^2(x) dx \right) \quad (6.2.7)$$



Demonstrație. În (6.2.6) luăm  $p = q = 2$ .

**6.2.7. Observație.** În inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem egalitate doar dacă  $f$  sau  $g$  sunt nule aproape peste tot sau există  $k \in \mathbf{R}$  astfel încât  $f = kg$ .

Deci dacă

$$\left(\int_a^b f^2(x) dx\right) \left(\int_a^b g^2(x) dx\right) = \left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2$$

atunci  $f$  sau  $g$  sunt nule aproape peste tot sau există  $k \in \mathbf{R}$  astfel încât  $f = kg$ .

Într-adevăr, presupunând contrariul, ar rezulta că pentru orice  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $f + \lambda g$  nu este nulă aproape peste tot, deci

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 dx > 0, (\forall) \lambda \in \mathbf{R}$$

De aici deducem că

$$\lambda^2 \int_a^b g^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b f^2(x) dx > 0, (\forall) \lambda \in \mathbf{R}$$

Ca urmare trinomialul de gradul doi în  $\lambda$  trebuie să ia valori pozitive pe  $\mathbf{R}$ , deci  $\Delta < 0$ , ceea ce implică

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 < \left(\int_a^b f^2(x) dx\right) \left(\int_a^b g^2(x) dx\right)$$

contradicție cu ipoteza.

**6.2.8. Corolar.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție integrabilă și  $p, q > 0$  cu  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Atunci avem:

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a)^{1/q} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Demonstrație. În (6.2.6) luăm  $g(x) = 1$ .

**6.2.9. Notă istorică.** Inegalitatea (6.2.7) a fost stabilită pentru prima dată în 1859 de către V. I. Buniakowski. H. Schwarz o utilizează în lucrările sale din 1884. Numele lui A. Cauchy apare datorită faptului că forma algebrică a inegalității se găsește pentru prima dată în lucrările acestuia, iar între cele două inegalități distanța nu este prea mare.

**6.2.10. Propoziție (Inegalitatea lui Minkowski).**

Fie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții integrabile și  $p \geq 1$ . Atunci avem inegalitatea:

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{1/p} \quad (6.2.8)$$

Demonstrație. Dacă  $p=1$  sau  $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx = 0$  inegalitatea (6.2.8) este evidentă. Presupunem deci  $p > 1$  și  $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx > 0$ .

Evident avem:

$$|f(x)+g(x)|^p \leq |f(x)| \cdot |f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)| \cdot |f(x)+g(x)|^{p-1}$$

Din inegalitatea lui Holder (Propoziția 6.2.5) rezultă:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx &\leq \int_a^b |f(x)| \cdot |f(x)+g(x)|^{p-1} dx + \\ &\quad + \int_a^b |g(x)| \cdot |f(x)+g(x)|^{p-1} dx \leq \\ &\leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} + \\ &\quad + \left( \int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} = \\ &= \left[ \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \right] \left( \int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

unde  $(p-1)q = p$ . Prin împărțire cu  $\left( \int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{1/q}$  obținem inegalitatea (6.2.8).

**6.2.11. Corolar.** Fie  $f, g: [a, b] \in \mathbf{R}_+$  două funcții integrabile. Atunci avem:

$$\left( \int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} + \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2} \quad (6.2.9)$$

Demonstrație. În inegalitatea (6.2.8) luăm  $p=2$ .

**6.2.12. Propoziție (Inegalitatea lui Jensen).** Fie  $f: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  o funcție integrabilă și  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție convexă continuă. Atunci:

$$\varphi \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (\varphi \circ f)(x) dx. \quad (6.2.10)$$

Demonstrație. Funcția  $f$  fiind integrabilă și  $\varphi$  continuă, rezultă că  $\varphi \circ f$  este integrabilă. Atunci conform consecinței 5.1.2 avem:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left( a + \frac{k}{n}(b-a) \right) \rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (6.2.11)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\varphi \circ f) \left( a + \frac{k}{n}(b-a) \right) \rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b (\varphi \circ f)(x) dx \quad (6.2.12)$$

Pe de altă parte  $\varphi$  fiind convexă, avem:

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(\varphi\circ f)\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right),(\forall)n\geq 1$$

de unde, trecând la limită și ținând cont de (6.2.11) și (6.2.12) se obține inegalitatea dorită.

**6.2.13. Corolar.** Fie  $I, J \subseteq \mathbf{R}$  două intervale,  $f: I \rightarrow J$  o funcție local integrabilă, în particular  $f$  continuă și  $\varphi: J \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție convexă continuă. Atunci  $(\forall)a, b \in I, a < b$ , avem

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b(\varphi\circ f)(x)dx.$$

**6.2.14. Corolar.** Fie  $I, J \subseteq \mathbf{R}$  două intervale,  $f: I \rightarrow J$  o funcție local integrabilă, în particular  $f$  continuă și  $\varphi: J \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție de două ori derivabilă cu  $\varphi'' \geq 0$  (respectiv  $\varphi'' \leq 0$ ). Atunci  $(\forall)a, b \in I, a < b$  avem:

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\leq(\text{respectiv } \geq)\frac{1}{b-a}\int_a^b(\varphi\circ f)(x)dx$$

Demonstrație. Dacă  $\varphi'' \geq 0$  (respectiv  $\varphi'' \leq 0$ ) atunci  $\varphi$  este convexă (respectiv  $\varphi$  este concavă). Aplicăm mai departe Corolarul 6.2.13.

**6.2.15. Corolar.** Fie  $I \subseteq \mathbf{R}$  un interval și  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție local integrabilă strict pozitivă. Atunci  $(\forall)a, b \in I, a < b$  avem

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx \leq \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \quad (6.2.13)$$

și

$$\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2 \left(\int_a^b f(x)dx\right)^{-1} \quad (6.2.14)$$

Demonstrație. Aplicăm Corolarul 6.2.14 pentru  $f$  și funcția concavă (respectiv convexă)  $\varphi(x) = \ln x, x > 0$  (respectiv  $\varphi(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ ).

**6.2.16. Corolar.** Fie  $I \subseteq \mathbf{R}$  un interval și  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție local integrabilă nenegativă. Atunci  $(\forall)a, b \in I, a < b$  și  $1 < p < +\infty$  (respectiv  $0 < p < 1$ ) avem:

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^p \leq(\text{respectiv } \geq)\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(x)dx \quad (6.2.15)$$

Demonstrație. Aplicăm Corolarul 6.2.14 pentru  $f$  și funcția concavă (respectiv convexă)  $\varphi(x) = x^p, x > 0$ , unde  $1 < p < \infty$  (respectiv  $0 < p < 1$ ).

**6.2.17. Problemă rezolvată.** Să se arate că pentru orice funcție continuă  $f : [-1,1] \rightarrow \mathbf{R}$  are loc inegalitatea:

$$\int_{-1}^1 f^2(x)dx \geq \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^1 f(x)dx \right)^2 + \frac{3}{2} \left( \int_{-1}^1 xf(x)dx \right)^2 .$$

Precizați funcțiile  $f$  pentru care inegalitatea de mai sus devine egalitate.  
(Dorian Popa, et. finală, 1997)

Soluție. Dacă  $f$  este pară, atunci  $\int_{-1}^1 xf(x)dx = 0$  și inegalitatea din enunț devine

$$\int_0^1 f^2(x)dx \geq \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2 \quad (1)$$

iar dacă  $f$  este impară, ea devine

$$\int_0^1 f^2(x)dx \geq 3 \left( \int_0^1 xf(x)dx \right)^2 \quad (2)$$

Inegalitățile (1) și (2) se deduc imediat din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz (6.2.7) considerând  $g(x)=1$  pentru inegalitatea (1) și  $g(x)=x$  pentru inegalitatea (2).

Fie  $f : [-1,1] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă și  $f_1, f_2 : [-1,1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Evident  $f_1$  este pară,  $f_2$  este impară și  $f = f_1 + f_2$ . Cum funcția  $f_1 f_2$  este impară, atunci:

$$\int_{-1}^1 f^2(x)dx = \int_{-1}^1 f_1^2(x)dx + \int_{-1}^1 f_2^2(x)dx = 2 \left( \int_0^1 f_1^2(x)dx + \int_0^1 f_2^2(x)dx \right) \quad (3)$$

și

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^1 f(x)dx \right)^2 + \frac{3}{2} \left( \int_{-1}^1 xf(x)dx \right)^2 &= \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^1 f_1(x)dx \right)^2 + \frac{3}{2} \left( \int_{-1}^1 xf_2(x)dx \right)^2 = \\ &= 2 \left[ \left( \int_0^1 f_1(x)dx \right)^2 + 3 \left( \int_0^1 xf_2(x)dx \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Din (3) și (4) inegalitatea din enunț devine:

$$\int_0^1 f_1^2(x)dx + \int_0^1 f_2^2(x)dx \geq \left( \int_0^1 f_1(x)dx \right)^2 + 3 \left( \int_0^1 xf_2(x)dx \right)^2 ,$$

evident adevărată din (1) și (2).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă  $f = \lambda g$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$  de unde obținem  $f_1(x) = a$ ,  $f_2(x) = bx$  cu  $a, b \in \mathbf{R}$ , deci  $f(x) = a + bx$ ,  $x \in [-1,1]$ .

**6.2.18. Problemă rezolvată.** Fie  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow (0, \infty)$  două funcții continue și crescătoare. Atunci există  $c_1, c_2 \in [a, b]$ ,  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$  astfel încât

$$f(c_1)g(c_2) \leq \frac{\int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx}{2(b-a)}$$

(M. Ganga)

Soluție. Deoarece  $f$  și  $g$  au aceeași monotonie, atunci conform inegalității lui Cebâșev avem:

$$\left( \int_a^b f(x)dx \right) \left( \int_a^b g(x)dx \right) \leq (b-a) \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (1)$$

iar de aici prin inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \sqrt{\left( \int_a^b f^2(x)dx \right) \left( \int_a^b g^2(x)dx \right)} \leq \left( \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \right) \quad (2)$$

Prima formulă de medie ne asigură că există  $c_1, c_2 \in [a, b]$  astfel ca:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c_1)(b-a) \quad \text{și} \quad \int_a^b g(x)dx = f(c_2)(b-a) \quad (3)$$

Din (1), (2) și (3) obținem inegalitatea dorită.

## Bibliografie

- [1] Gh. Sirețchi, *Calcul diferențial și integral*, vol. I și II, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1985.
- [2] M. Ganga, *Teme și probleme de matematică*, Ed. Tehnică, București, 1991.
- [3] I. C. Miu, *Câteva probleme de matematică*, Craiova, 1994.
- [4] V. Săseanu, S. Bârsan, *Teoremele de medie din analiza matematică*, Ed. Radical, 1997.
- [5] V. Arsinte, *Probleme elementare de calcul integral*, Ed. Universității, București, 1995.
- [6] C. Mortici, *600 de probleme*, Ed. Gil, Zalău, 2001.

## 7. Aplicații ale calculului integral

### 7.1. Calculul ariilor

În acest paragraf vom reaminti formula de calcul a ariei subgraficului unei funcții continue și pozitive pe care o vom folosi apoi la calculul de arii cuprinse între două curbe. O aplicație extrem de interesantă o constituie formula lui Stirling pe care o vom prezenta la finalul acestui paragraf.

**7.1.1. Teoremă.** [1] Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă și pozitivă.

Atunci  $\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  numit subgraficul lui  $f$  are arie și

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx \quad (7.1.1)$$

**7.1.2. Consecință.** Fie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții continue astfel încât  $f(x) \leq g(x), (\forall) x \in [a, b]$ . Atunci mulțimea

$$\Gamma_{f,g} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\} \quad (\text{fig. 7.1})$$

are arie și

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \quad (7.1.2)$$

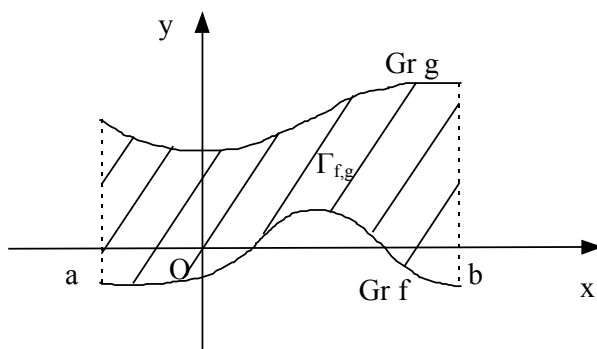


Fig. 7.1

**7.1.3. Observații.** (i) În general, dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sunt funcții continue, iar  $\Gamma_{f,g}$  este mulțimea cuprinsă între graficele celor două funcții, atunci  $\Gamma_{f,g}$  are arie și

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (7.1.3)$$

(ii) Dacă suprafața plană este mărginită de curbe în care  $x$  apare ca funcție de  $y$ , formula (7.1.2) se păstrează cu singura diferență că vom integra în raport cu  $y$ , în loc de  $x$  (fig. 7.2).

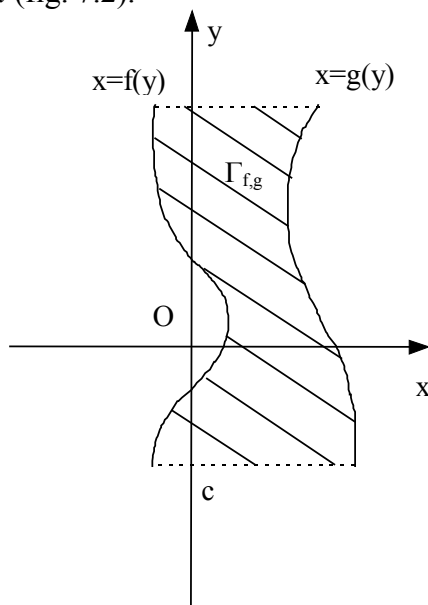


Fig. 7.2

Deci

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_c^d (g(y) - f(y)) dy \quad (7.1.4)$$

#### 7.1.4. Exerciții rezolvate

a) Să se calculeze aria cuprinsă între graficele funcțiilor  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3 - x$  și  $g(x) = 2x^2 - 2$ .

b) Să se determine aria mulțimii cuprinsă între parabola de ecuație  $y^2 = x$  și dreapta de ecuație  $x - y - 1 = 0$ .

c) Fie  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{(x)}{x}$ , unde  $(x)$  este distanța de la  $x$  la cel mai apropiat întreg. Să se calculeze aria subgraficului cuprins între  $n$  și  $n+1$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

Soluție. a)  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1, 2\}$ .

De aici  $\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx$ .

Întrucât  $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \cup [2, \infty)$  rezultă că:

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx + \int_1^2 (g(x) - f(x)) dx =$$

$$= \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx + \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx = \frac{37}{12}$$

b) Pentru a determina punctele în care parabola intersectează dreapta, se rezolvă sistemul  $\begin{cases} y^2 = x \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$  și se obțin soluțiile  $x_1 = (3 - \sqrt{5})/2$ ,  $y_1 = (1 - \sqrt{5})/2$  și  $x_2 = (3 + \sqrt{5})/2$ ,  $y_2 = (1 + \sqrt{5})/2$  (fig. 7.3).

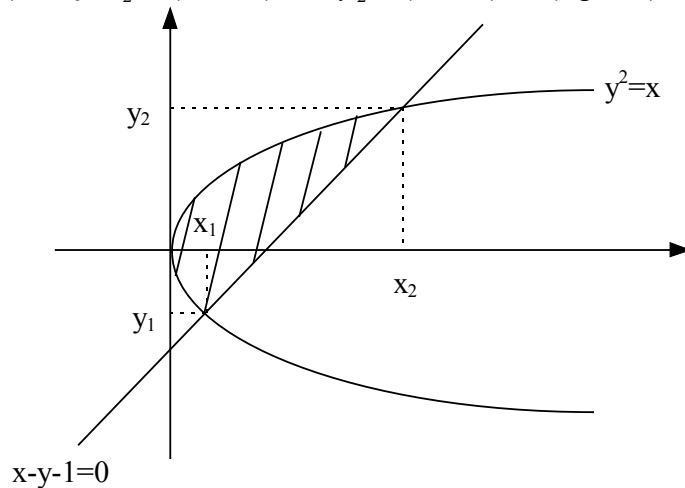


Fig. 7.3

Pentru a calcula mai ușor aria hașurată, vom exprima pe  $x$  ca funcție de  $y$  și se obțin două funcții  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(y) = y^2$  și  $g(y) = y + 1$ . Avem

$$aria(\Gamma_{f,g}) = \int_{y_1}^{y_2} (g(y) - f(y)) dy = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

**Observație.** Aria se poate calcula și în raport cu  $x$  astfel:

$$A = 2 \int_0^{x_1} \sqrt{x} dx + \int_{x_1}^{x_2} (\sqrt{x} - x + 1) dx = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{x-n}{x}, & x \in \left[ n, n + \frac{1}{2} \right) \\ \frac{n+1-x}{x}, & x \in \left[ n + \frac{1}{2}, n+1 \right] \end{cases}$$

Avem așadar

$$S_n = aria(\Gamma_{f/[n,n+1]}) = \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{x-n}{x} dx + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{n+1-x}{x} dx = \ln \frac{n^n (n+1)^{n+1}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{2n+1}}$$



### 7.1.4. Formula lui Stirling

Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!e^n} \sqrt{2n\pi} = 1$ .

Soluție. Fie  $a_n = \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{2n\pi}}$ ,  $n \geq 1$ . Evident avem:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

Funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$  fiind convexă ( $f''(x) > 0, (\forall)x > 0$ ) rezultă (fig. 7.4)

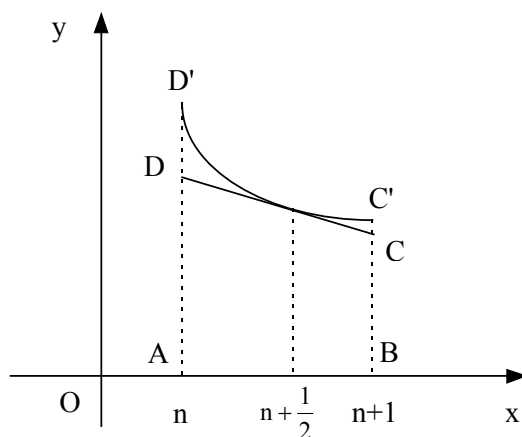


Fig. 7.4

deci întrucât

$$A(n, 0); B(n+1, 0); C\left(n+1, \frac{4n}{(2n+1)^2}\right);$$

$$D\left(n, \frac{4n+4}{(2n+1)^2}\right); C'\left(n+1, \frac{1}{n+1}\right); D'\left(n, \frac{1}{n}\right)$$

avem:

$$\frac{1}{n + \frac{1}{2}} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \quad (7.1.4)$$

Înmulțind (7.1.4) cu  $n + \frac{1}{2}$  și scăzând 1, obținem:

$$0 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

deci

$$0 < \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{4} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

de unde

$$0 < \ln \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k}} \right) < \frac{1}{4} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \right)$$

de unde rezultă imediat:

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+k}} < e^{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)}, (\forall) n, k \geq 1 \quad (7.1.5)$$

Din (7.1.5) rezultă că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este strict descrescător, și întrucât este minorat de zero, este convergent. Fie  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0$ . Fixăm în (7.1.5)  $n \geq 1$  și trecem la limită după  $k$ ,  $k \rightarrow \infty$ , obținem:

$$1 \leq \frac{a_n}{a} \leq e^{\frac{1}{4n}} < e, (\forall) n \geq 1 \quad (7.1.6)$$

Din (7.1.5) rezultă că  $a > 0$ . Atunci avem:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^2} \cdot \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4n\pi}}{(2n)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}} \cdot \frac{e^{-2n}}{e^{-2n}} \cdot \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{C_{2n}^n \sqrt{n\pi}} = 1 \end{aligned}$$

(am ținut seama de formula lui Wallis R4.2.1).

## 7.2. Calculul volumelor

În acest paragraf vom reaminti formula de calcul a volumelor corpurilor de rotație și vom da o formulă de calcul a volumului cu ajutorul secțiunilor transversale.

**7.2.1. Teoremă.** [1] Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă și pozitivă. Atunci corpul  $C_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x), x \in [a, b]\}$  obținut prin rotirea graficului funcției  $f$  în jurul axei  $Ox$  are volum și:

$$\text{vol}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (7.2.1)$$

**7.2.2. Corolar.** Fie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții continue și pozitive,  $f(x) \leq g(x), (\forall)x \in [a, b]$ . Atunci corpul obținut prin rotirea suprafeței plane limitate de curbele  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  și dreptele  $x = a$  și  $x = b$  în jurul axei  $Ox$  are volum și

$$\text{vol}(C_{f,g}) = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) dx. \quad (7.2.2)$$

**7.2.3. Observație.** Pentru a calcula volumul corpului generat de suprafața plană limitată de curbele  $x = f(y)$ ,  $x = g(y)$  ( $0 \leq f(y) \leq g(y)$ ,  $(\forall)y \in [c, d]$ ) și dreptele  $y = c$  și  $y = d$  în jurul axei  $Oy$  vom folosi formula (7.2.2) cu singura diferență că vom integra în raport cu  $y$  în loc de  $x$ . Deci

$$\text{vol}(C_{f,g}) = \pi \int_c^d (g^2(y) - f^2(y)) dy \quad (7.2.3)$$

**7.2.4. Exemflu.** Se consideră regiunea determinată de parabola  $y^2 = 2px$  și dreptele  $x = 0$  și  $x = a$ . Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea acestei regiuni plane în jurul axelor  $Ox$  și  $Oy$ .

Soluție. (fig. 7.5)  $\text{vol}(C_{Ox}) = \pi \int_0^a 2px dx = \pi a^2 p$

$$\text{vol}(C_{Oy}) = \pi \int_0^{\sqrt{2pa}} \left( \frac{y^2}{2p} \right)^2 dy = \frac{\pi a^2 \sqrt{2pa}}{5}$$

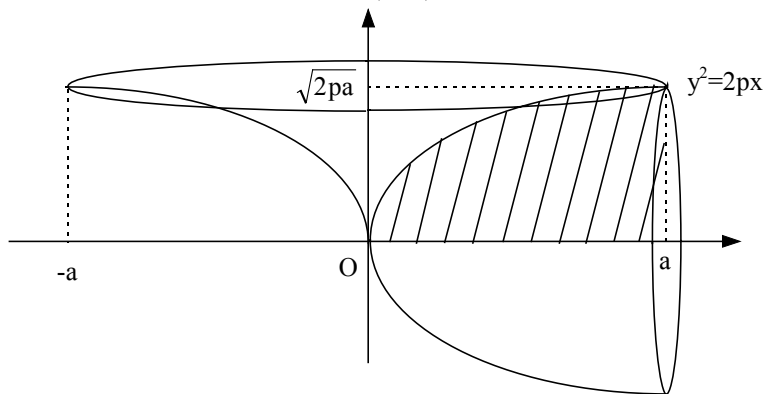


Fig. 7.5

Pentru a putea aplica formula (7.2.3) este necesar să exprimăm pe  $x$  ca funcții de  $y$ . De multe ori acest lucru este dificil de făcut. Formula următoare dă posibilitatea calculării volumului unui corp obținut prin rotirea în jurul unei axe, integrând de-a lungul unui interval al celeilalte axe.

**7.2.5. Teoremă.** [2] Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$  continuă;  $a, b \geq 0$ . Atunci volumul corpului obținut prin rotirea suprafeței plane limitate de graficul funcției  $f$ , dreptele  $x = a$  și  $x = b$  în jurul axei  $Oy$  are volum și

$$\text{vol}(C_{f,Oy}) = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \quad (7.2.4)$$

Demonstrație. Fie  $\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{p_n}^n = b)$ ,  $n \in \mathbf{N}$  un șir de diviziuni ale intervalului  $[a, b]$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$  și  $c_k^n = \frac{x_{k-1}^n + x_k^n}{2}$  mijlocul intervalului  $[x_{k-1}^n, x_k^n]$  (fig. 7.6).

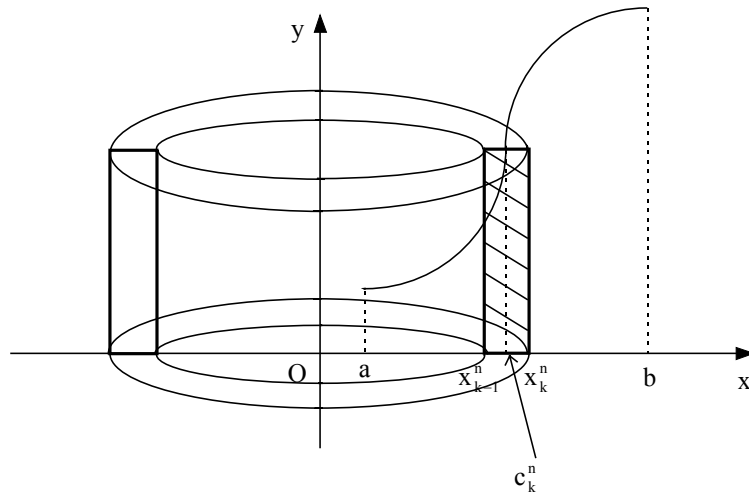


Fig. 7.6

Volumul corpului obținut prin rotirea dreptunghiului  $[x_{k-1}^n, x_k^n] \times [0, f(c_k^n)]$  este

$$\text{vol}(D_k^n) = \pi[(x_k^n)^2 - (x_{k-1}^n)^2] f(c_k^n) = 2\pi c_k^n f(c_k^n) (x_k^n - x_{k-1}^n) \text{ și}$$

$$\sum_{k=1}^{p_n} \text{vol}(D_k^n) = 2\pi \sum_{k=1}^{p_n} c_k^n f(c_k^n) (x_k^n - x_{k-1}^n) \int_a^b 2\pi x f(x) dx. \text{ Întrucât}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{p_n} \text{vol}(D_k^n) = \text{vol}(C_{f,Oy}) \text{ obținem } \text{vol}(C_{f,Oy}) = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

**7.2.6. Observație.** Volumul corpului obținut prin rotirea suprafeței plane limitate de curba  $x = f(y)$ , dreptele  $y = c$  și  $y = d$ ,  $0 \leq c \leq d$  în jurul axei  $Ox$  este:

$$\text{vol}(C_{f,Ox}) = \int_c^d 2\pi y f(y) dy \quad (7.2.5)$$

**7.2.7. Problemă rezolvată.** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea suprafeței plane limitate de curba  $y = 2x - x^2$ , dreptele  $x = 0$  și  $x = 1$ .

- în jurul axei  $Oy$
- și curba  $y = x$  în jurul axei  $Oy$

c) și curba  $y = x$  în jurul dreptei  $x = 1$ .

Soluție. a)  $vol(C_{O_y}) = \int_0^1 2\pi x(2x - x^2) dx = \frac{5\pi}{6}$  (fig. 7.7a)

Se observă că formula (7.2.3) nu se poate aplica în acest caz întrucât din  $y = 2x - x^2$  nu putem exprima pe  $x$  ca funcție de  $y$ .

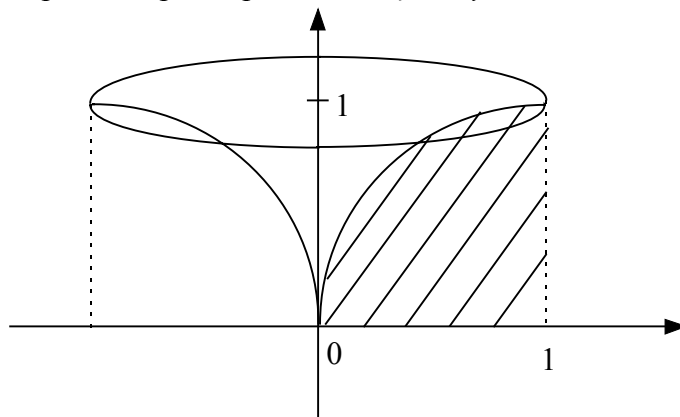


Fig. 7.7.a)

b)  $vol(C) = \int_0^1 2\pi x(f(x) - g(x)) dx$ , unde  $f(x) = 2x - x^2$  și  $g(x) = x$  (fig. 7.6b)

$$vol(C) = \int_0^1 2\pi x(x - x^2) dx = \frac{\pi}{6}$$

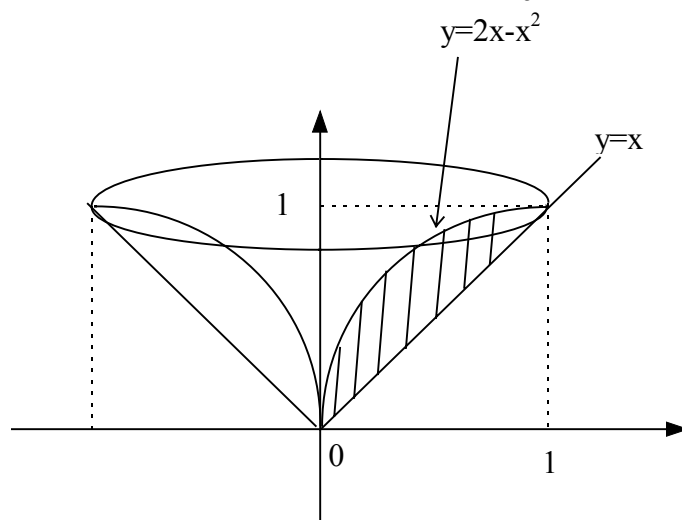


Fig. 7.7.b)

c) Volumul corpului de calculat este același cu volumul corpului obținut prin rotirea suprafeței plane limitate de curbele  $y = f(1-x)$  și  $y = g(1-x)$  în jurul axei  $Oy$ . Deci

$$\text{vol}(C_{x=1}) = \int_0^1 2\pi x(f(1-x) - g(1-x))dx = \frac{\pi}{6}$$

În continuare vom da o formulă de calcul a volumelor după secțiuni transversale, formulă care se poate utiliza și la calculul volumelor corpurilor care nu sunt de rotație.

**7.2.8. Teoremă.** [3] Fie  $C$  un corp geometric care raportat la un sistem de axe de coordonate se găsește între planele  $x = a$  și  $x = b$  (fig. 7.8). Dacă toate planele perpendiculare pe axa  $Ox$  intersectează corpul  $C$  după o suprafață de secțiune a cărei arie  $S(x)$  este o funcție continuă de variabilă  $x$ , atunci volumul corpului  $C$  este:

$$\text{vol}(C) = \int_a^b S(x)dx \quad (7.2.6)$$

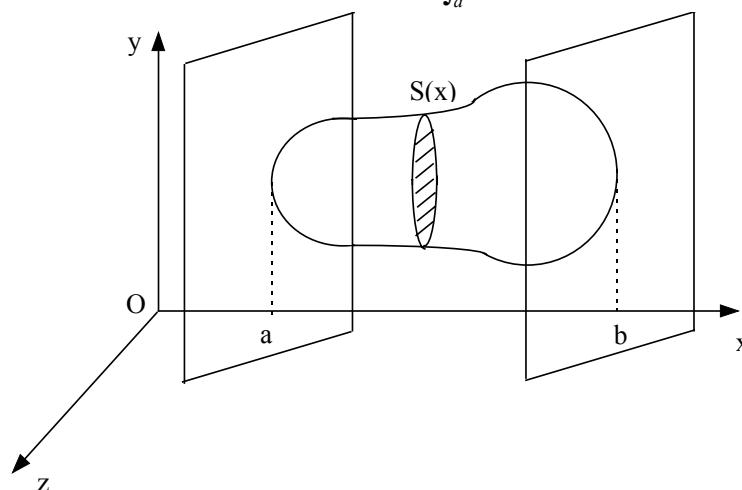


Fig. 7.8

Demonstrație. Fie  $\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{p_n}^n = b)$ ,  $n \in \mathbf{N}$  un șir de diviziuni ale intervalului  $[a, b]$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$  și

$$v_n = \sum_{k=1}^{p_n} s_k^n (x_k^n - x_{k-1}^n), \text{ unde } s_k^n = \inf_{x \in [x_{k-1}^n, x_k^n]} S(x) \text{ și}$$

$$V_n = \sum_{k=1}^{p_n} S_k^n (x_k^n - x_{k-1}^n), \text{ unde } S_k^n = \sup_{x \in [x_{k-1}^n, x_k^n]} S(x)$$

De aici avem  $v_n \leq \text{vol}(V) \leq V_n$  și făcând  $n \rightarrow \infty$ , obținem

$$\text{vol}(C) = \int_a^b S(x)dx .$$

**7.2.9. Observație.** Aplicând formula (7.2.6) corpurilor de rotație obținute prin rotirea graficului funcției  $f$  în jurul axei  $Ox$  (fig. 7.9), regăsim formula (7.2.1), întrucât  $S(x) = \pi f^2(x)$ .

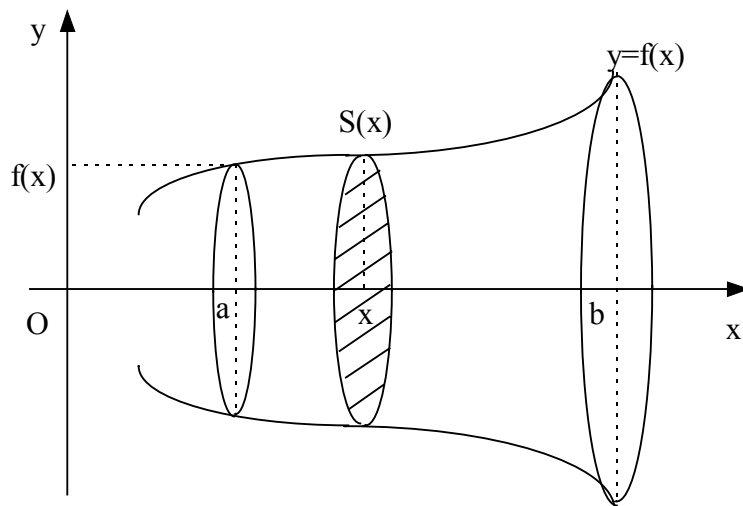


Fig. 7.9

**7.2.10. Notă istorică.** În secolul XVII au fost pentru prima dată sistematizate metodele geometrice care au permis calcularea de arii și volume. Bonaventura Cavalieri (1598-1647), elev al lui Galilei, a descoperit că dacă două regiuni plane au aceeași lățime și aceeași secțiune transversală în fiecare punct (fig. 7.10) atunci regiunile au aceeași arie. Principiul lui Cavalieri "Corpurile cu aceleași secțiuni transversale și aceeași înălțime au același volum" rezultă imediat din Teorema 7.2.8 pentru că aria secțiunilor transversale este aceeași în acest caz. Acest principiu, pe care Cavalieri nu l-a demonstrat niciodată, a fost numit astfel de matematicienii care i-au urmat.

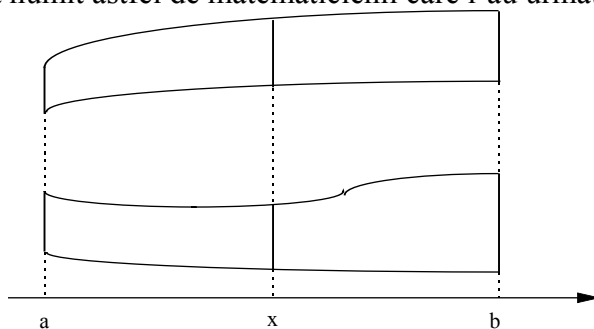


Fig. 7.10

## **Bibliografie**

- [1] Gh. Sirețchi, *Calcul diferențial și integral*, vol. I și II, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1985.
- [2] Finney, Thomas, Demana, Waits, *Calculus – Graphical, Numerical, Algebraic*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [3] \* \* \* *Mică enciclopedie matematică*, traducere, Ed. Tehnică, București, 1980.
- [4] V. Arsinte, *Probleme elementare de calcul integral*, Ed. Univ. București, 1995.
- [5] A. Magdaș, S. Ursu, G. Lobonț, I. Diaconu, *Matematică, manual pentru clasa a XII-a*, Ed. Studium, 2002.



### Probleme rezolvate

1) Un cilindru de rază 3 este secționat de un plan care trece prin centrul bazei și formează cu aceasta un unghi de  $45^\circ$ . Să se găsească volumul corpului obținut.

2) (O nouă formulă de calcul a volumului tetraedrului). Dacă  $ABCD$  este un tetraedru cu  $AB = a$ ,  $CD = b$ ,  $m\angle(AB, CD) = \alpha$  și  $d$  este distanța dintre dreptele  $AB$  și  $CD$ , atunci:

$$V_{[ABCD]} = \frac{1}{6}abd \sin \alpha \quad (7.2.7)$$

Soluție. 1) Secționând corpul cu un plan perpendicular pe axa  $Ox$  se obține un dreptunghi de arie  $S(x) = 2x\sqrt{9-x^2}$ ,  $x \in [0,3]$  (fig. 7.11).

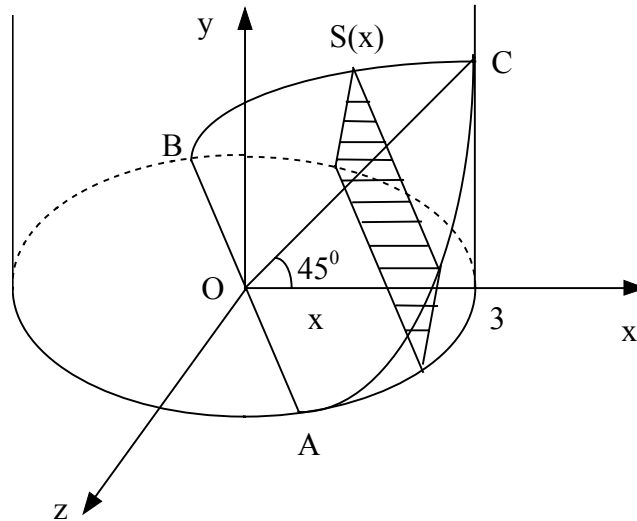


Fig. 7.11

$S(x)$  este o funcție continuă de  $x$ , deci

$$V = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2} dx = -\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2} \Big|_0^3 = 18.$$

2) Vom considera un plan  $\alpha_x$ ,  $x \in (0, d)$  paralel cu  $AB$  și  $CD$ . Atunci planul de secțiune va fi un paralelogram  $[MNPQ]$  cu  $MQ \parallel AB$ ,  $NP \parallel AB$ ,  $QP \parallel CD$  și  $MN \parallel CD$  (fig. 7.12).

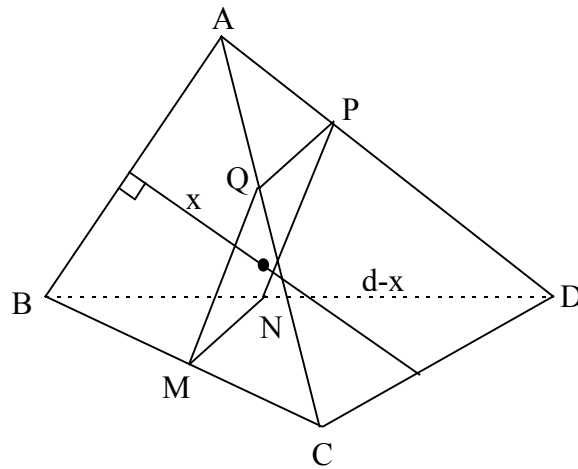


Fig. 7.12

Avem  $V_{[ABCD]} = \int_0^d S_{[MNPQ]} dx = \int_0^d MN \cdot MQ \sin \alpha dx$ . Întrucât

$$\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = \frac{x}{d} \quad \text{și} \quad \frac{MQ}{AB} = \frac{MC}{BC} = \frac{d-x}{d}$$

obținem că

$$V_{[ABCD]} = \int_0^d \frac{xb}{d} \cdot \frac{(d-x)a}{d} \sin \alpha dx = \frac{ab \sin \alpha}{d^2} \int_0^d x(d-x) dx = \frac{abd \sin \alpha}{6}.$$

**Observații.** a) Dacă  $AB \perp CD$ , formula (7.2.7) devine:  $V = \frac{1}{6} abd$ .

b) Formula (7.2.7) este utilă și pentru calculul distanței dintre două drepte, încadrând cele două drepte ca muchii opuse într-un tetraedru.

## 8. Ecuații diferențiale și integrale

Teoria ecuațiilor diferențiale a apărut în secolul al XVII-lea odată cu lucrările matematicienilor G.W. Leibniz (1646-1716) și Isaac Newton (1647-1722) legate de dezvoltarea calculului integral și diferențial.

Dezvoltarea teoriei ecuațiilor diferențiale a fost impulsionată de numeroasele sale aplicații în domenii cum ar fi: matematica, fizica, chimia, geofizica, biofizica, biologie, metrologie etc.

### 8.1. Ecuații diferențiale de ordin întâi și doi

**8.1.1. Definiție.** O ecuație de forma

$$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

se numește **ecuație diferențială de ordinul  $n$** . Prin soluție a ecuației diferențiale (1) înțelegem orice funcție  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval din  $\mathbb{R}$ , funcție ce are derivate până la ordinul  $n$  și care satisface relația (1) pentru orice  $x \in I$ .

**8.1.2. Definiție.** O ecuație diferențială de tipul

$$y^{(n)}(x)F(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = 0 \quad (2)$$

se numește **ecuație diferențială sub formă normală**.

**8.1.3. Definiție.** O ecuație diferențială de forma

$$y' = p(x) \cdot y + q(x), \quad (3)$$

unde  $p, q: I \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcții continue pe intervalul  $I$ , se numește **ecuație diferențială de ordinul I**.

**8.1.4. Definiție.** O funcție  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  este o soluție a ecuației (3) dacă  $\varphi$  este derivabilă pe intervalul  $I$  și  $\varphi'(x) = p(x) \cdot \varphi(x) + q(x)$ ,  $(\forall) x \in I$ .

**8.1.5. Teoremă.** Orice soluție a ecuației diferențiale (3) este de forma

$$y(x) = e^{P(x)} \cdot \left[ y_0 + \int_{x_0}^x q(s) \cdot e^{-P(s)} ds \right], \quad (4)$$

unde  $x_0 \in I$  este arbitrar,  $y_0 = y(x_0)$  iar  $P$  este o primitivă pentru  $p$ , primitivă ce se anulează în punctul  $x_0$ .

**Demonstrație.** Fie  $x_0 \in I$  un număr fixat și  $P$  o primitivă pentru funcția  $p$ , primitivă ce se anulează în  $x_0$ , adică  $P(x) = \int_{x_0}^x p(u) du$ . Înmulțind

ambii membri ai ecuației (3) cu  $e^{-P(x)} > 0$  obținem:

$$y'(x) \cdot e^{-P(x)} - p(x) \cdot e^{-P(x)} = q(x) \cdot e^{-P(x)}, \quad (\forall) x \in I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(y(x) \cdot e^{-P(x)}) = q(x) \cdot e^{-P(x)}, \quad (\forall) x \in I.$$

Rezultă prin integrare

$$y(x) \cdot e^{-P(x)} = y_0 + \int_{x_0}^x q(s) \cdot e^{-P(s)} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-P(x)} \cdot \left( y_0 + \int_{x_0}^x q(s) \cdot e^{-P(s)} ds \right),$$

adică are loc concluzia din teoremă.

Reciproc, prin calcul direct, se arată că orice funcție ce verifică relația (4) este soluție pentru ecuația diferențială (3).

**8.1.6. Observație.** În probleme concrete, pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale de tipul (3), este indicat să urmăm calea de demonstrație din Teorema 8.1.5. Să mai observăm că formula (4) exprimă soluția ecuației diferențiale (3) care satisface condiția inițială  $y(x_0) = y_0$ .

**8.1.7. Observații.** a) Dacă  $p(x) = 0$ , atunci ecuația diferențială (3) devine  $y' = q(x)$ ,  $(\forall) x \in I$ . Soluția acestei ecuații este

$$y(x) = \int_{x_0}^x q(s) dx + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ arbitrar.} \quad (5)$$

b) Dacă  $q(x) = 0$  și  $p(x) = a = \text{const.}$ , atunci ecuația diferențială (3) devine  $y' = a \cdot y$ , numită și **ecuație diferențială de ordinul I liniară, omogenă și cu coeficienți constanți**. Din Teorema 8.1.5 deducem că soluția acestei ecuații este:

$$y(x) = c \cdot e^{ax}, \quad (6)$$

unde  $c \in \mathbb{R}$  este o constantă arbitrară.

c) Dacă  $p(x) = a \in \mathbb{R}^*$  și  $q(x) = b \in \mathbb{R}^*$ , atunci ecuația diferențială (3) devine

$$y' = a \cdot y + b,$$

numită și **ecuație diferențială de ordinul I liniară, neomogenă și cu coeficienți constanți**. Soluția acestei ecuații (vezi Teorema 8.1.5) este:

$$y(x) = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{ax}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**8.1.8. Exemplu.** Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale:

$$y'(x) = 2^{x+2} + 3 \cdot 6^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Soluție.** Soluția ecuației date este, conform relației (5):

$$y(x) = c + \int_{x_0}^x (2^{s+2} + 3 \cdot 6^s) ds = c + \left( \frac{2^{s+2}}{\ln 2} + 3 \cdot \frac{6^s}{\ln 6} \right) \Big|_{x_0}^x = \frac{2^{x+2}}{\ln 2} + \frac{3 \cdot 6^x}{\ln 6} + \alpha, (\forall) x \in \square$$

unde  $\alpha \in \square$  este o constantă arbitrară.

**8.1.9. Exemplu.** Să se determine soluția ecuației diferențiale

$$y' = -3 \cdot y(x), (\forall) x \in \square .$$

**Soluție.** În conformitate cu relația (6) avem

$$y(x) = c \cdot e^{-3x}, (\forall) x \in \square ,$$

unde  $c \in \square$  arbitrar.

**8.1.10. Exemplu.** Să se determine mulțimea soluțiilor ecuației diferențiale

$$y' = -\frac{2}{x} \cdot y + x^3, (\forall) x \in I \text{ unde } I \subset (-\infty, 0) \text{ sau } I \subset (0, \infty) \text{ este interval.}$$

**Soluție.** Ecuația dată este ecuație diferențială de ordinul I având

$$p(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{și} \quad q(x) = x^3, x \in I. \quad \text{Fie}$$

$$P(x) = \int_{x_0}^x -\frac{2}{x} dx = -2 \ln|x| \Big|_{x_0}^x = -2(\ln|x| - \ln|x_0|) = -\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)^2$$

$x_0, x \in I$ , o primitivă pentru  $p$ , primitivă ce se anulează în punctul  $x_0$ . Din Teorema 8.1.5 obținem:

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-2} \left[ y(x_0) + \int_{x_0}^x s^3 \cdot \frac{s^2}{x_0^2} ds \right] = \frac{x_0^2}{x^2} \left[ y(x_0) + \frac{1}{x_0^2} \cdot \frac{s^6}{6} \right] \Big|_{x_0}^x = \\ &= \frac{x_0^2 \cdot y(x_0)}{x^2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x_0^4}{6x^2} = \frac{x^4}{6} + \frac{1}{x^2} \cdot c, (\forall) x \in I, \end{aligned}$$

unde  $c \in \square$  este o constantă arbitrară.

**8.1.11. Definiție.** O ecuație diferențială de forma

$$y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = f(x), (\forall) x \in I \quad (7)$$

unde  $I \subset \square$  este interval iar  $f, a, b: I \rightarrow \square$  sunt funcții continue pe  $I$ , se numește **ecuație diferențială liniară de ordinul II**. Dacă funcția  $f$  este identic nulă, atunci ecuația se numește **omogenă**, iar în caz contrar, ecuația se numește **neomogenă**. Funcțiile  $a$  și  $b$  se numesc coeficienții ecuației,

**8.1.12. Propoziție.** Dacă  $y_1, y_2, \dots, y_p$  ( $p \in \square^*$ ) sunt soluții ale ecuației diferențiale liniare omogene de ordinul II atunci, funcția

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \dots + c_p \cdot y_p,$$

unde  $c_i \in \square$ ,  $i = \overline{1, p}$  sunt numere arbitrare, este soluție a aceleiași ecuații.

**Demonstrație.** Într-adevăr, funcția  $y$  este de două ori derivabilă pe  $I$  și

$$y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = \left( \sum_{i=1}^p c_i \cdot y_i \right)'' + a(x) \cdot \left( \sum_{i=1}^p c_i \cdot y_i \right)' + b(x) \cdot \sum_{i=1}^p c_i \cdot y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^p c_i \cdot (y_i'' + a(x)y_i' + b(x)y_i) = 0,$$

deoarece fiecare termen din sumă este egal cu zero.

**8.1.13. Definiție.** Funcțiile  $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  interval, sunt **liniar independente** dacă din  $\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0$ ,  $(\forall) x \in I$ , rezultă  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Dacă există  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^*$  astfel încât  $\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0$ ,  $(\forall) x \in I$ , atunci funcțiile  $y_1$  și  $y_2$  se numesc **liniar dependente**.

Facem precizarea că această definiție se poate extinde pentru un număr finit de funcții.

**8.1.14. Definiție.** Dacă funcțiile  $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  sunt derivabile pe intervalul  $I$ , atunci determinantul

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

se numește **determinantul Wronski**<sup>1</sup> sau **wronskianul** funcțiilor  $y_1, y_2$ .

**8.1.15. Propoziție.** Dacă funcțiile derivabile  $y_1, y_2$  sunt liniar dependente pe  $I$ , atunci  $W(y_1, y_2) = 0$ .

**Demonstrație.** Din ipoteză rezultă că  $(\exists) \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^*$  astfel încât  $\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0$ ,  $(\forall) x \in I$ . Derivând această relație obținem sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0 \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' = 0. \end{cases}$$

Cum acest sistem liniar omogen are soluția  $(\alpha_1, \alpha_2)$  nebanală, rezultă că

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0, \text{ adică } W(y_1, y_2) = 0.$$

**8.1.16. Propoziție.** Dacă  $y_1, y_2$  sunt soluții liniar independente pe  $I$  ale ecuației liniare omogene de ordinul II, atunci

$$W(y_1, y_2) \neq 0,$$

pentru orice  $x \in I$ .

<sup>1</sup> Josef Wronski (1778-1853) matematician polonez care a introdus pentru prima dată acest determinant

**8.1.17. Teoremă.** Dacă  $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  interval, sunt soluții ale ecuației liniare omogene de ordinul II și dacă  $W(y_1, y_2) \neq 0$  pe  $I$ , atunci soluția generală a acestei ecuații este

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2,$$

unde  $c_1, c_2$  sunt constante reale arbitrare.

**8.1.18. Observație.** Dacă  $y_0$  este o soluție a ecuației liniare neomogene de ordinul II cu transformarea  $z = y - y_0$ , reducem ecuația la ecuația omogenă

$$z'' + a(x) \cdot z' + b(x) \cdot z = 0.$$

**Demonstrație.** Într-adevăr, dacă  $y_0$  este soluție rezultă  $z + y_0$  soluție  $\Leftrightarrow \Leftrightarrow (z + y_0)'' + a(x) \cdot (z + y_0)' + b(x) \cdot (z + y_0) = 0 \Leftrightarrow z'' + a(x) \cdot z' + b(x) \cdot z = 0$ , ceea ce trebuie demonstrat.

**8.1.19. Definiție.** O ecuație diferențială de forma

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = c, \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

se numește **ecuație diferențială de ordinul II cu coeficienți constanți**.

**8.1.20. Observație.** Pentru rezolvarea ecuației (8) se consideră ecuația omogenă

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0. \quad (9)$$

Se scrie ecuația caracteristică, atașată

$$r^2 + a \cdot r + b = 0$$

și se determină rădăcinile  $r_1, r_2$  ale acestei ecuații.

Se cunoaște următorul rezultat dat de propoziția:

**8.1.21. Propoziție.** Dacă  $r_1, r_2$  sunt rădăcinile ecuației caracteristice, atunci avem

- (i)  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2 \Rightarrow$  soluția generală a ecuației (9) este  $y_0(x) = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x}$  cu  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $r_1 = r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$  soluția generală a ecuației (9) este  $y_0(x) = (c_1 \cdot x + c_2) \cdot e^{r_1 x}$ , cu  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .
- (iii)  $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0 \Rightarrow$  soluția generală a ecuației (9) este  $y_0(x) = e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$ , unde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**8.1.22. Teoremă.** Fie ecuația diferențială de ordinul II cu coeficienți constanți și omogenă:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = f(x), \quad x \in I, \quad (I \text{ interval din } \mathbb{R}), \quad (10)$$

$a, b \in \mathbb{R}$  iar  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă. Atunci rezultă că soluția generală a ecuației (1) este

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x), \quad (\forall) x \in I,$$

unde  $y_0$  este soluția generală a ecuației omogene iar  $y_p$  este o soluție particulară a ecuației (10).

**Demonstrație.** Demonstrăm că  $y = y_0 + y_p$  este soluție  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (y_0 + y_p)'' + a(y_0 + y_p)' + b(y_0 + y_p) = f(x), (\forall) x \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y_0'' + ay_0' + by_0) + y_p'' + ay_p' + by_p = f(x), (\forall) x \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_p'' + ay_p' + by_p = f(x), (\forall) x \in I, ,$$

ceea ce este adevărat.

Reciproc, dacă  $z$  este soluție pentru ecuația (10), rezultă  $z'' + az' + bz = f(x)$ ,  $(\forall) x \in I$  și cum  $y_p'' + ay_p' + by_p = f(x)$ ,  $(\forall) x \in I$ , scăzând ultimele egalități, avem  $(z - y_p)'' + a(z - y_p)' + b(z - y_p) = 0$ , adică  $z - y_p$  este soluție a ecuației omogene. Deducem că  $z - y_p = y_0$  și aceasta este echivalentă cu  $z = y_0 + y_p$ . Cu aceasta demonstrația este încheiată.

**8.1.23. Observație.** Găsirea unei soluții particulare pentru ecuația (10) nu este întotdeauna simplă. Totuși, aceasta poate fi găsită prin așa zisa metodă a coeficienților nedeterminați, în următoarele cazuri:

a) Dacă  $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , unde  $P_n$  este o funcție polinomială de grad  $n$  și dacă  $\alpha$  nu este rădăcină a ecuației caracteristice  $r^2 + a \cdot r + b = 0$ , atunci căutăm o soluție particulară  $y_p = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ , unde  $Q_n(x)$  este o funcție polinomială de grad  $n$ , ai cărui coeficienți trebuie determinați. Dacă  $\alpha$  este rădăcină a ecuației caracteristice  $r^2 + a \cdot r + b = 0$ , atunci se caută soluții de forma  $y_p(x) = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , unde  $r$  este ordinul de multiplicitate al rădăcinii  $\alpha$ .

b) Dacă  $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$  și dacă  $\alpha \pm i\beta$  nu sunt rădăcini ale ecuației caracteristice, atunci căutăm soluții  $y_p$  de forma:  $y_p(x) = e^{\alpha x} [R_q(x) \cos \beta x + S_q(x) \sin \beta x]$ , unde  $R_q(x)$  și  $S_q(x)$  sunt polinoame de grad  $q = \max\{n, m\}$  ai căror coeficienți trebuie determinați. Dacă  $\alpha \pm i\beta$  sunt rădăcini ale ecuației caracteristice, atunci luăm

$$y_p(x) = x \cdot e^{\alpha x} [R_q(x) \cos \beta x + S_q(x) \sin \beta x].$$

c) Pentru alte cazuri se poate utiliza așa zisa metodă a variației constantelor (metoda lui Lagrange). Această metodă va fi exemplificată în exemplul următor.

**8.1.24. Exemplu.** Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale

$$y'' + \omega^2 y = f(x),$$

$x \in I \subset \mathbb{R}$  interval,  $f$  continuă pe  $I$  și  $\omega = \text{constant}$ ,  $\omega \neq 0$ .



**Soluție.** Ecuația omogenă  $y'' + \omega^2 y = 0$  are ecuația caracteristică  $r^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow r_1 = \omega \cdot i, r_2 = -\omega \cdot i$ . Rezultă că  $y_1 = \cos \omega x$  și  $y_2 = \sin \omega x$  sunt soluțiile pentru aceasta și  $y_0 = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  constante arbitrare. Căutăm o soluție particulară  $y_p$  pentru ecuația dată, de forma

$$y_p = c_1(x) \cdot \cos \omega x + c_2(x) \cdot \sin \omega x.$$

Avem:

$$y_p' = c_1'(x) \cos \omega x + c_2'(x) \sin \omega x - c_1(x) \cdot \omega \cdot \sin \omega x + c_2(x) \cdot \omega \cdot \cos \omega x.$$

Punem condiția  $c_1'(x) \cos \omega x + c_2'(x) \sin \omega x = 0$ . Din aceasta se deduce

$$y_p'' = -c_1'(x) \cdot \omega \sin \omega x + c_2'(x) \omega \cos \omega x - \omega^2 \cdot c_1(x) \cos \omega x - \omega^2 \cdot c_2(x) \cdot \sin \omega x.$$

Cum  $y_p$  verifică ecuația dată, rezultă  $-c_1'(x) \cdot \omega \sin \omega x + c_2'(x) \omega \cos \omega x = f(x)$ . În acest mod se obține sistemul

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos \omega x + c_2'(x) \sin \omega x = 0 \\ -c_1'(x) \sin \omega x + c_2'(x) \cos \omega x = \frac{f(x)}{\omega} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -\frac{1}{\omega} f(x) \cdot \sin \omega x \\ c_2'(x) = \frac{1}{\omega} f(x) \cdot \cos \omega x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1(x) = k_1 - \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(s) \sin(\omega s) ds \\ c_2(x) = k_2 + \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(s) \cos(\omega s) dx, \quad x_0 \in I, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ca urmare, soluția generală a ecuației date este

$$\begin{aligned} y = y_0 + y_p &= c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x + k_1 \cos \omega x - \frac{1}{\omega} \cos \omega x \cdot \int_{x_0}^x f(s) \sin(\omega s) dx + \\ &+ k_2 \cdot \sin \omega x + \frac{1}{\omega} \sin \omega x \cdot \int_{x_0}^x f(s) \cos(\omega s) ds = \\ &= \alpha_1 \sin \omega x + \alpha_2 \cos \omega x - \frac{1}{\omega} \cos \omega x \cdot \int_{x_0}^x f(s) \sin(\omega s) ds + \frac{1}{\omega} \sin \omega x \cdot \int_{x_0}^x f(s) \cos(\omega s) ds \end{aligned}$$

## 8.2. Ecuații diferențiale cu variabile separabile

**8.2.1. Definiție.** O ecuație diferențială de forma

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad (1)$$

unde  $f: I \rightarrow \mathbb{R}, I$  interval,  $g: J \rightarrow \mathbb{R}, J$  interval, sunt funcții continue se numește **ecuație diferențială cu variabile separabile**.

**8.2.2. Observație.** Ecuația diferențială (1) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \text{ pentru valori ale lui } y \text{ pentru care } g(y) \neq 0,$$

adică  $\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$ . Integrând ambii membri ai acestei egalități se obține

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + c, \quad (c \in \mathbb{R}),$$

care este o familie de curbe ce depinde de constanta  $c$ , familie care poartă numele de **soluția generală** a ecuației (1).

**Cazuri particulare ale ecuației diferențiale (1):**

i) Ecuații diferențiale de ordinul I liniare omogene:  $y' = f(x) \cdot y$ .

Soluția:  $y(x) = c \cdot e^{\int f(t) dt}$ ,  $c$  – constanta arbitrară.

ii) Ecuații diferențiale de ordinul I liniare, omogene, cu coeficienți constanți:  $y' = a \cdot y$ ,  $a$  – constantă reală arbitrară.

Soluția:  $y(x) = c \cdot e^{ax}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $c$  – constantă reală arbitrară

Punem în evidență în continuare anumite **clase de ecuații diferențiale**:

**A. Ecuații diferențiale de forma:**  $y' = f(x)$ ,  $x \in I$ .

**Soluția.**  $y(x) = c + \int_{x_0}^x f(t) dt$ ,  $c$  – constantă reală arbitrară

**B. Ecuații diferențiale de ordinul I neomogene, cu coeficienți constanți:**

Forma generală:  $y' = a \cdot y + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$

Soluția:  $y(x) = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{ax}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $c$  – constantă reală arbitrară

**C. Ecuații omogene în sensul lui Euler:**

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0, \quad f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuă}$$

Cu substituția  $\frac{y}{x} = u$ , adică  $y = x \cdot u$ , ecuația dată se transformă în  $u + x \cdot u' = f(u)$ , care este o ecuație cu variabile separabile.

**D. Ecuația lui Bernoulli**

Forma generală:  $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $P, Q: I \rightarrow \mathbb{R}$  funcții continue.

Cazurile  $\alpha = 0$  sau  $\alpha = 1$  au fost puse în evidență. Pentru  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ , cu substituția  $u = y^{1-\alpha}$ , ecuația lui Bernoulli se transformă în

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot u' + P(x) \cdot u = Q(x)$$

care reprezintă o ecuație diferențială liniară neomogenă.

### C. Ecuația lui Riccati

Forma generală:  $y' + P(x) \cdot y + Q(x) \cdot y^2 = R(x)$ , unde  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  sunt funcții continue pe intervalul  $I$ .

### Bibliografie

1. **Marius Burtea, Georgeta Burtea**, *Elemente de analiză matematică. Algebră superioară*, Editura Carminis, Pitești
2. **Gheorghe Micula, Paraschiva Pavel**, *Ecuații diferențiale și integrale prin probleme și exerciții*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1989
3. **G. Moroșanu**, *Ecuații diferențiale. Aplicații*, Editura Academiei, vol. III, București, 1989
4. **M. Roșculeț, G. Toma și alții**, *Probleme de analiză matematică*, Editura Tehnică, București, 1993

### Probleme rezolvate

R8.3.1. Să se determine soluțiile mărginite pe axa reală a ecuației

$$y' = 2x(y + \pi).$$

Soluție. Se observă că  $y = -\pi$  este soluție mărginită. Presupunem în continuare că  $y \neq -\pi$ . Ecuația dată fiind cu variabile separabile, se poate transforma în felul următor

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot (y + \pi) \Rightarrow \frac{dy}{y + \pi} = 2x dx \Rightarrow \ln|y + \pi| = x^2 + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + \pi = \pm e^{x^2 + c_1}, \quad c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = -\pi + e^{x^2 + c_1} \text{ sau } y = -\pi - e^{x^2 + c_1}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Acestea nu convin deoarece nu sunt mărginite pe  $\mathbb{R}$ . Unica soluție este  $y = -\pi$ .

R8.3.2. Determinați soluția ecuației diferențiale  $y' = \frac{x}{y}$  dacă  $y(0) = 4$ .

Soluție. Ecuația dată este cu variabile separabile. Avem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y dy = x dx \Rightarrow \int y dy = \int x dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - x^2 = c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ (ecuația unei hiperbole echilaterale).}$$

Deoarece  $y(0) = 4$ , obținem  $c = 16$ , deci  $y^2 - x^2 = 16 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x^2 + 16}$ . Cum  $y(0) = 4$ , deducem că  $y = \sqrt{x^2 + 16}$ .

R8.3.3. Să se rezolve ecuația  $x^3 \cdot y' \cdot \sin y = 2$  știind că  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \frac{\pi}{2}$ .

Soluție. Din relația dată rezultă  $x \neq 0$ ,  $\sin y \neq 0$ . Fiind o ecuație cu variabile separabile, avem

$$x^3 \cdot \frac{dy}{dx} \sin y = 2 \Rightarrow \sin y dy = \frac{2}{x^3} dx \Rightarrow \int \sin y dy = \int \frac{2}{x^3} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cos y = -\frac{1}{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{x^2} - c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Folosind ultima relație și  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \frac{\pi}{2}$ , obținem  $c = 0$ , deci

$$\cos y = \frac{1}{x^2} \tag{1}$$

Deoarece  $\cos y \in [-1, 1]$ , avem  $\frac{1}{x^2} \in [-1, 1] \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ , de unde obținem că  $x \in (-\infty, -1]$  sau  $x \in [1, \infty)$  deoarece  $x \in I$  și  $I$  este interval din  $\mathbb{R}$ .

Cazul  $x \in (-\infty, -1]$  se exclude ( $y$  este definită spre  $+\infty$ ). Din (1) avem  $y = \pm \arccos \frac{1}{x^2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  și, utilizând ipoteza  $\left( \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \frac{\pi}{2} \right)$ , deducem  $k = 0$ , adică  $y = \pm \arccos \frac{1}{x^2}$ .

$y = -\arccos \frac{1}{x^2}$  nu este soluție pentru că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \arccos \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{\pi}{2}$ ,

contradicție cu ipoteza. Așadar  $y = \arccos \frac{1}{x^2}$ ,  $(\forall) x \in (1, \infty)$  este unica soluție a ecuației propuse spre rezolvare ( $x=1$  a fost exclus pentru ca funcția  $y$  să fie derivabilă pe  $I$ ).

R8.3.4. Determinați mulțimea soluțiilor ecuației

$$x \cdot y' - y = (x + y) \ln \left( \frac{x + y}{x} \right).$$

Soluție. Este necesar ca  $x \neq 0$  și  $\frac{x + y}{x} > 0$ . Ecuația se poate scrie sub forma

$$y' = \frac{y}{x} + \left( 1 + \frac{y}{x} \right) \ln \left( 1 + \frac{y}{x} \right).$$

Cu substituția  $\frac{y}{x} = z$ ,  $y' = z + x \cdot z'$ , aceasta devine

$$z' \cdot x + z = z + (1 + z) \ln(1 + z) \Leftrightarrow z' \cdot x = (1 + z) \ln(1 + z) \quad (1)$$

Se observă că  $z = 0$  este soluție. Pentru  $z \neq 0$ ,  $z > -1$  obținem

$$\frac{dz}{dx} \cdot x = (1 + z) \ln(1 + z) \Rightarrow \frac{dz}{(1 + z) \ln(1 + z)} = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{dz}{(1 + z) \ln(1 + z)} = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln |\ln(1 + z)| = \ln |x| + \ln \alpha, \alpha > 0 \Rightarrow |\ln(1 + z)| = \alpha \cdot |x|, \alpha > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(1 + z) = \pm \alpha x, \alpha > 0 \Rightarrow \ln(1 + z) = c \cdot x, c \in \mathbb{R}^* \Rightarrow 1 + z = e^{c \cdot x}, c \in \mathbb{R}^*$$

$$\Rightarrow z = -1 + e^{c \cdot x}, c \in \mathbb{R}^* \text{ care verifică relația (1). Cum } z = 0 \text{ este soluție,}$$

deducem că  $z = -1 + e^{c \cdot x}$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^*$  sau  $x \in \mathbb{R}_-^*$  și  $c \in \mathbb{R}$  arbitrar, sunt soluțiile ecuației (1).

Așadar, soluțiile ecuației date sunt:  $y = x(-1 + e^{c \cdot x})$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  sau  $x \in (0, +\infty)$  și  $c \in \mathbb{R}$ .

R8.3.5. Rezolvați ecuația diferențială  $y^{(4)} + y^{(3)} = 0$ .

Soluție. Fie  $y^{(3)}(x) = z(x)$ ,  $x \in I$ . Ecuația devine

$$z' + z = 0 \Leftrightarrow z(x) = c_1 \cdot e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c_1 \in \mathbb{R} \text{ parametru arbitrar.}$$

Deci

$$\begin{aligned} y'''(x) = c_1 e^{-x} &\Rightarrow y''(x) = -c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \Rightarrow y'(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x + c_3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y(x) = -c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_3 \cdot x + c_4, \quad x \in \mathbb{R} \text{ și } c_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, 4} \end{aligned}$$

reprezintă soluțiile ecuației date.

R8.3.6. Fie ecuația  $y' = y^2 + f(x)$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuă,  $f$  periodică de perioadă  $T$ ,  $T > 0$ . Să se arate că dacă  $y_1, y_2$  sunt două soluții diferite, periodice de perioadă  $T$ , pentru ecuația Riccati considerată, atunci

$$\int_0^T (y_1(t) + y_2(t)) dt = 0.$$

Soluție. Din  $y_1, y_2$  soluții, rezultă că  $y_1$  și  $y_2$  sunt funcții derivabile și  $y_1' = y_1^2 + f(x)$ ,  $y_2' = y_2^2 + f(x)$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ . De aici rezultă

$$y_1' - y_2' = y_1^2 - y_2^2 \Leftrightarrow (y_1 - y_2)' = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) \Rightarrow \frac{(y_1 - y_2)'}{y_1 - y_2} = y_1 + y_2.$$

Integrăm și obținem:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{(y_1(t) - y_2(t))'}{y_1(t) - y_2(t)} dt &= \int_0^T (y_1(t) + y_2(t)) dt \Rightarrow \ln|y_1(t) - y_2(t)| \Big|_0^T = \int_0^T (y_1(t) + y_2(t)) dt \Rightarrow \\ \ln|y_1(T) - y_2(T)| - \ln|y_1(0) - y_2(0)| &= \int_0^T (y_1(t) + y_2(t)) dt. \end{aligned}$$

De aici, deoarece  $y_1(T) = y_1(0)$  și  $y_2(T) = y_2(0)$ , obținem

$$\int_0^T (y_1(t) + y_2(t)) dt = 0.$$

R8.3.7. Să se determine soluțiile ecuației integrale

$$y(x) = \int_0^x y(t) dt + e^x,$$

știind că  $y$  este o funcție continuă pe  $\mathbb{R}$ .

Soluție. Din relația dată și ipoteză, deducem că  $y$  este o funcție derivabilă pe  $\mathbb{R}$ . Prin derivare obținem  $y'(x) = y(x) + e^x$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ . Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul I. Utilizând Teorema 8.1.5 obținem

$$y(x) = e^x \left( y_0 + \int_0^x e^{-s} \cdot e^{-s} ds \right) = e^x (y_0 + x), \quad y_0 \in \mathbb{R} \text{ constanță arbitrară.}$$

Înlocuind în ecuația integrală dată, găsim  $y_0 = 1$ , deci  $y(x) = e^x(1+x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  este unica funcție convenabilă.

R8.3.8. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale

$$y' = \sqrt{1 - \sin x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$  fiind continuă pe  $\mathbb{R}$ , admite primitive. Ea este periodică cu perioada principală  $T_0 = 2\pi$ . Pentru  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ ,

$$f(x) = \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2} = \left|\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right| = \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}$$

și  $F_0(x) = -2 \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2}$  este o primitivă a restricției  $f|_{\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]}$ . Va rezulta că funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$F(x) = F_0(x - 2k\pi) + k \left( F_0\left(\frac{5\pi}{2}\right) - F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

pentru orice  $x \in \left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , este o primitivă a lui  $f$ .

Deoarece  $F_0\left(\frac{5\pi}{2}\right) - F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sqrt{2}$  și  $\cos k\pi = (-1)^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , obținem că

$$F(x) = 2 \cdot (-1)^{k+1} \left( \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) + 4k\sqrt{2},$$

pentru orice  $x \in \left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , este o primitivă a lui  $f$ .

Așadar,

$$y(x) = c + 2 \cdot (-1)^{k+1} \left( \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) + 4k\sqrt{2},$$

$x \in \left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , unde  $c \in \mathbb{R}$  este arbitrar.

R8.3.9. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y'' + y' - 6y = 2 \cos 2x - 10 \sin 2x.$$

Soluție. Pentru ecuația omogenă  $y'' + y' - 6y = 0$ , ecuația caracteristică  $r^2 + r - 6 = 0$  are rădăcinile  $r_1 = -3$  și  $r_2 = 2$ . Soluția generală a ecuației

omogene este  $y_0 = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-3x}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Căutăm o soluție particulară  $y_p$  pentru ecuația neomogenă, sub forma  $y_p = A \sin 2x + B \cos 2x$ . Avem:

$$y_p' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x, \quad y_p'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x.$$

Atunci

$$y_p'' + y_p' - 6y_p = (-10A - 2B) \sin 2x + (-10B + 2A) \cos 2x \stackrel{\text{ip.}}{=} 2 \cos 2x - 10 \sin 2x,$$

( $\forall$ )  $x \in \mathbb{R}$ . Din sistemul  $\begin{cases} -10A - 2B = -10 \\ 2A - 10B = 2 \end{cases}$ , obținem  $A = 1, B = 0$ . Așadar,

soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-3x} + \sin 2x,$$

( $\forall$ )  $x \in \mathbb{R}$  și  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  constante arbitrare.

R8.3.10. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y' \cdot \cos x + y \cdot \sin x = \cos^2 x.$$

Soluție. Observăm că  $y = 0$  nu este soluție. Ecuația dată este de ordinul I și cu coeficienți variabili. Fie ecuația omogenă

$$y' \cos x + y \sin x = 0 \Rightarrow y' \cos x = -y \sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx} \cos x = -y \sin x \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\tan x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln |y| = \ln |\cos x| + \ln |c| \Rightarrow |y| = |c| \cdot |\cos x| \Rightarrow y_0 = c \cdot \cos x, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Aceasta verifică ecuația omogenă pentru ( $\forall$ )  $x \in \mathbb{R}$  și orice constantă reală  $c$ . Utilizăm metoda variației constantelor pentru a găsi o soluție particulară a ecuației date.

Fie  $y_p = c(x) \cdot \cos x$ . Rezultă  $y_p'(x) = c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x$ . Punând condiția ca aceasta să verifice ecuația dată, obținem

$$c'(x) \cdot \cos^2 x - C(x) \cdot \sin x \cdot \cos x + c(x) \cos x \cdot \sin x = \cos^2 x,$$

$$\text{adică } c'(x) \cdot \cos^2 x = \cos^2 x.$$

Convine  $c'(x) = 1$ , de unde  $c(x) = x + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  parametru.

Așadar,  $y = (x + \alpha) \cdot \cos x$ , ( $\forall$ )  $x \in \mathbb{R}$  și  $\alpha \in \mathbb{R}$ , reprezintă soluția generală a ecuației date.

R8.3.11. Fie funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{D}^1(0, \infty)$ . Să se arate că dacă există limita finită  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + f'(x)) = A$ , atunci există limitele  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ .

Soluție. Notăm  $z(x) = f(x) - A$ . Atunci  $\lim_{x \rightarrow \infty} (z'(x) + z(x)) = 0$ , adică  $z'(x) + z(x) = \alpha(x)$  cu



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0. \quad (1)$$

Deoarece  $(e^x \cdot z(x))' = e^x \cdot \alpha(x)$ , atunci

$$e^x \cdot z(x) = \int_1^x e^t \cdot \alpha(t) dt + c.$$

Pentru  $x = 1$ , obținem  $c = e \cdot z(1)$  și din relația anterioară, găsim

$$z(x) = e^{1-x} \cdot z(1) + \int_1^x e^{t-x} \cdot \alpha(t) dt.$$

Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Există  $N = N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  astfel încât  $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $(\forall) t \leq N$ .

Atunci, pentru  $x > N$  avem

$$\begin{aligned} |z(x)| &\leq e^{1-x} \cdot |z(1)| + \int_1^N e^{t-x} dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_N^x e^{t-x} dt \leq \\ &\leq e^{-x} \cdot (e \cdot |z(1)| + M \cdot e^N) + \frac{\varepsilon}{2} \leq e^{-x} \cdot c_0 + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (\forall) x \geq N, \end{aligned}$$

unde  $M = \sup_{t \geq 1} |\alpha(t)|$ .

Există  $N_1 \geq N$  astfel încât  $e^{-x} \cdot c_0 < \frac{\varepsilon}{2}$  pentru  $x \geq N_1$ . Prin urmare,  $|z(x)| < \varepsilon$

pentru  $x \geq N_1$ . Rezultă că  $\lim_{x \rightarrow \infty} z(x) = 0$ , de unde obținem  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  și

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0.$$