INEGALITĂŢI DE TIP IONESCU-WEITZENBÖCK

D. M. Bătineţu-Giurgiu[1)] şi Neculai Stanciu[2)]

Omagiu lui Ion Ionescu

Abstract. Starting from the fact that one of the founders of *Gazeta Matematică* discovered *Weitzenböck's* inequality 20 years before him, we decided to show some new proofs oh this well-known property.

Keywords: Weitzenböck inequality

MSC : 51M16

I. Introducere

Lucrând la alte demonstraţii şi alte generalizări decât cele publicate ale unei inegalităţi celebre am găsit, cu o mare uimire, în Gazeta Matematică, Vol. III (15 Septembrie 1897 – 15 August 1898), Nr. 2 , Octombrie 1897, la pagina 52, faptul că, *Ion Ionescu* – unul dintre cei patru „stâlpi" ai Gazetei Matematice – a publicat problema:

***273.** *Să se arate că nu există nici un triunghiu pentru care neegalitatea*

$$4S\sqrt{3} > a^2 + b^2 + c^2$$

să fie satisfăcută.

Soluţia problemei 273, apare în Gazeta Matematică, Vol. III (15 Septembrie 1897 – 15 August 1898), Nr. 12 , August 1898, la paginile 281, 282 şi 283.

În anul 1919, *Roland Weitzenböck* a publicat în Mathematische Zeitschrift, Vol. 5, Nr. 1-2, pp. 137-146 articolul *Über eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie*, în care demonstrează că:

[1)] Profesor, Bucureşti

[2)] Profesor, Buzău.

În orice triunghi ABC, cu notaţiile obişnuite, are loc inegalitatea:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S. \tag{W}$$

Observăm că inegalitatea lui *Ion Ionescu* este aceeaşi cu inegalitatea lui *Weitzenböck*, şi de aceea am numit-o inegalitatea *Ionescu-Weitzenböck* (I-W). Un număr de 11 demonstraţii ale inegalităţii (I-W) au fost prezentate de *Arthur Engel* în cartea „Problem solving strategies", Springer Verlag, 1998, tradusă şi în limba română de *M. Bălună* (vezi [1]).

II. 23 de demonstraţii inedite ale inegalităţii I-W

Am găsit pentru inegalitatea I-W un număr de 23 de demonstraţii, altele decât cele publicate, pe care le prezentăm mai jos.

Demonstraţia 1. $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3} = \dfrac{4p^2}{3} = \dfrac{4}{3}\cdot p\cdot p$, şi conform inegalităţii lui *Mitrinović*, adică $p \geq 3\sqrt{3}r$, inegalitatea precedentă devine

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}\cdot p \cdot 3\sqrt{3}r = 4\sqrt{3}pr = 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 2. Conform inegalităţii mediilor avem:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2},$$

iar conform inegalităţii lui *G. Pólya* şi *G. Szegö* avem $(abc)^2 \geq \left(\dfrac{4S}{\sqrt{3}}\right)^3$, iar inegalitatea precedentă devine:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^3} = 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 3. Conform inegalităţii *Cauchy-Buniacovski-Schwarz* avem

$$(a^2 + b^2 + c^2)(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \geq (am_a + bm_b + cm_c)^2\,,$$

de unde reiese $\dfrac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq (am_a + bm_b + cm_c)^2$, deci

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{2}{\sqrt{3}}(am_a + bm_b + cm_c) \geq \frac{2}{\sqrt{3}}(ah_a + bh_b + ch_c) = \frac{2\cdot 6S}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 4. Conform inegalităţii lui *Cebâşev* avem:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3(a + b + c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) \geq 3abc(a + b + c)$$

şi deoarece $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, rezultă că

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) \geq 3abc(a + b + c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 \geq 3abc\cdot 2p = 24pRS,$$

de unde, conform inegalităţii lui *Euler* $R \geq 2r$, deducem că

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq 24pS \cdot 2r = 48Spr = 48S^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{48}S = 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 5. Avem $ab+bc+ca = 2S\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$.

Deoarece funcţia $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ este convexă pe $(0,\pi)$ avem, conform inegalităţii lui *Jensen*

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C} \geq 3\cdot\frac{1}{\sin\frac{A+B+C}{3}} = 3\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3},$$

şi atunci obţinem

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab+bc+ca \geq 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 6. Avem:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (2p-b-c)^2+(2p-c-a)^2+(2p-a-b)^2 = \\ &= (p-b+p-c)^2+(p-c+p-a)^2+(p-a+p-b)^2 \geq \\ &\geq 4(p-a)(p-b)+4(p-b)(p-c)+4(p-c)(p-a) = \\ &= 4p(p-a)(p-b)(p-c)\left(\frac{1}{p(p-a)}+\frac{1}{p(p-b)}+\frac{1}{p(p-c)}\right) = \\ &= \frac{4S^2}{p}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right). \end{aligned}$$

Apoi, ţinând cont de binecunoscuta $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq \frac{\sqrt{3}}{r}$, obţinem că

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{4S^2}{p}\cdot\frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{4\sqrt{3}S^2}{S} = 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 7. Avem

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \geq abc(a+b+c) = 2p\cdot 4RS = 8pRS,$$

şi din inegalitatea lui *Euler* $R \geq 2r$, rezultă

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \geq 16S^2.$$

Apoi,

$$(ab+bc+ca)^2 = (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2abc(a+b+c) \geq 16S^2+16pRS,$$

de unde

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 16S^2+16p(2r)S = 16S^2+32S^2 = 48S^2,$$

deci

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \geq 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 8. Avem $a = \dfrac{r_a(r_b + r_c)}{p}$ şi analoagele, de unde deducem că $ab = \dfrac{r_a r_b(r_b + r_c)(r_a + r_c)}{p^2} \geq \dfrac{4r_a r_b r_c\sqrt{r_a r_b}}{p^2}$ şi, deoarece $r_a r_b r_c = rp^2$, rezultă $ab \geq 4r\sqrt{r_a r_b}$.

Deci,

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq 16r^2(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a)$$

şi, deoarece $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$, obţinem

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq 16r^2p^2 = 16S^2$$

şi apoi ca în demonstraţia 7 obţinem

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 9. Considerăm în afara triunghiului ABC punctul D astfel încât triunghiul ACD este echilateral. Fie E şi F mijloacele segmentelor $[BD]$şi $[AC]$. Conform teoremei lui *Euler* în patrulaterul $ABCD$ avem

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = BD^2 + AC^2 + 4EF^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 + a^2 + b^2 + b^2 = BD^2 + b^2 + 4EF^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = BD^2 + 4EF^2.$$

Rezultă din teorema cosinusului în triunghiul ABD:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \sphericalangle BAD = c^2 + b^2 - 2bc\cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\left(\cos A\cos\frac{\pi}{3} - \sin A\sin\frac{\pi}{3}\right) = b^2 + c^2 - bc\cos A + \sqrt{3}bc\sin A =$$

$$= b^2 + c^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + 2\sqrt{3}S = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2}.$$

Deci,

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2} + 4EF^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S = 8EF^2,$$

şi, deoarece $EF^2 \geq 0$, obţinem $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Demonstraţia 10. În inegalitatea *Bottema*:

$$(x + y + z)^2R^2 \geq yza^2 + zxb^2 + xyc^2, \forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*,$$

luăm $x = a^2, y = b^2, z = c^2$ şi obţinem

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 R^2 \geq 3a^2b^2c^2 \Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)R \geq \sqrt{3}abc \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 11. Fie T punctul lui *Fermat-Toricelli* (centrul izogon) al triunghiului ABC. Notăm $TA = x, TB = y, TC = z$ şi avem

$$\mu\left(\sphericalangle ATB\right) = \mu\left(\sphericalangle BTC\right) = \mu\left(\sphericalangle CTA\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Conform teoremei cosinusului în triunghiurile BTC, CTA, ATB avem respectiv:

$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\frac{2\pi}{3} = y^2 + z^2 + yz; b^2 = z^2 + x^2 + zx; c^2 = x^2 + y^2 + xy.$$

Prin urmare:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx \geq 3(xy + yz + zx) =$$
$$= 3\left(xy\sin\frac{2\pi}{3} + yz\sin\frac{2\pi}{3} + zx\sin\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{3}} =$$
$$= 3\left(2\text{aria}[TAB] + 2\text{aria}[TCB] + 2\text{aria}[TCA]\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} =$$
$$= 4\sqrt{3}\left(\text{aria}[TAB] + \text{aria}[TCB] + \text{aria}[TCA]\right) = 4\sqrt{3}\text{aria}[ABC] = 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 12. Dacă în prima inegalitate a lui *Tsintsifas*:

$$\frac{m}{n+p}a^2 + \frac{n}{m+p}b^2 + \frac{p}{m+n}c^2 \geq 2\sqrt{3}S, \ \forall\, m, n, p \in \mathbb{R}_+^*,$$

luăm $m = n = p = 1$, atunci obţinem:

$$\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq 2\sqrt{3}S \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 13. Dacă în a doua inegalitate a lui *Tsintsifas*, (*dacă* $A_1B_1C_1$ *şi* $A_2B_2C_2$ *sunt două triunghiuri de laturi* a_1, b_1, c_1, *respectiv* a_2, b_2, c_2 *şi arii* S_1 *şi* S_2, *atunci* $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \geq 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{S_1S_2}$) luăm $A_1B_1C_1 \equiv A_2B_2C_2 \equiv ABC$, obţinem $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{S^2} = 4\sqrt{3}S$.

Demonstraţia 14. Teorema *Jakob Steiner* afirmă că dintre toate triunghiurile de acelaşi perimetru, cel de arie maximă este triunghiul echilateral. Fie S_3 aria triunghiului echilateral de perimetru $2p$ şi S aria unui triunghi de perimetru $2p$. Atunci, conform teoremei *Jakob Steiner* avem:

$$S_3 \geq S \Leftrightarrow \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \geq S \Leftrightarrow p^2 \geq 3\sqrt{3}S.$$

Apoi, conform inegalităţii dintre media aritmetică şi media pătratică avem:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{4p^2}{3}.$$

Rezultă că $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}\cdot p^2 \geq \frac{4}{3}\cdot 3\sqrt{3}S = 4\sqrt{3}S$.

Demonstraţia 15. *Murray S. Klamkin* a stabilit că: *dacă* $x, y, z \in \mathbb{R}$, *atunci în orice triunghi* ABC, *are loc*:

$$\left(\frac{ax + by + cz}{4S}\right)^2 \geq \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă:

$$\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)}=\frac{y}{b(c^2+a^2-b^2)}=\frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}.$$

Dacă luăm în inegalitatea lui *Murray S. Klamkin* $x=a, y=b, z=c$, obţinem

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}\right)^2\geq 3\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 16. *A. Oppenheim* a stabilit că: *dacă* $x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$, *atunci în orice triunghi* ABC *are loc inegalitatea*:

$$\left(a^2x+b^2y+c^2z\right)^2\geq 16S^2\left(xy+yz+zx\right).$$

Considerând $x=y=z=1$, deducem

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq 16S^2\cdot 3\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 17. Tot *Murray S. Klamkin* a stabilit şi inegalitatea:

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}\right)^2\geq\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq 3,$$

din care obţinem $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$.

Demonstraţia 18. Conform teoremei cosinusului avem:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geq 2bc-2bc\cos A=2bc(1-\cos A)=$$

$$=4bc\sin^2\frac{A}{2}=4bc\sin A\cdot\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin A}=8S\cdot\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=4S\cdot\mathrm{tg}\frac{A}{2},$$

şi analoagele, de unde deducem că

$$a^2+b^2+c^2\geq 4S\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\right).$$

Concluzia rezultă acum din faptul că funcţia $h:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ este convexă pe $(0,\pi)$, deci

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\geq 3\mathrm{tg}\frac{A+B+C}{6}=3\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}.$$

Demonstraţia 19. Avem:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=\frac{4}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)\geq$$

$$\geq\frac{4}{3}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{3}\cdot\frac{(m_a+m_b+m_c)^2}{3}\geq\frac{4}{27}\left(a+b+c\right)^2\left(h_a+h_b+h_c\right)^2\geq$$

$$\geq\frac{4}{27}\left(3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{h_ah_bh_c}\right)^2=12\left(\sqrt[3]{ah_abh_bch_c}\right)^2=12\left(\sqrt[3]{2^3S^3}\right)^2=48S^2,$$

de unde se deduce uşor că $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$.

Demonstraţia 20. Pentru orice punct $M \in \mathrm{Int}ABC$ notăm $d_a(M)$, $d_b(M)$, $d_c(M)$ distanţele de la punctul M respectiv la dreptele BC, CA, AB şi $s_a(M) = A[MBC], s_b(M) = A[MCA], s_c(M) = A[MAB]$. Vom arăta că:

$$\frac{a}{d_a(M)} + \frac{b}{d_b(M)} + \frac{c}{d_c(M)} \geq 6\sqrt{3}.$$

Într-adevăr, avem:

$$T = \frac{a}{d_a(M)} + \frac{b}{d_b(M)} + \frac{c}{d_c(M)} = \frac{a^2}{2s_a(M)} + \frac{b^2}{2s_b(M)} + \frac{c^2}{2s_c(M)},$$

unde aplicăm inegalitatea lui *Bergström* şi obţinem

$$T \geq \frac{(a+b+c)^2}{2\left(s_a(M) + s_b(M) + s_c(M)\right)} = \frac{4p^2}{2S} = \frac{2p^2}{pr} = \frac{2p}{r}.$$

Apoi, conform inegalităţii lui *Mitrinović* $p \geq 3\sqrt{3}r$, deducem că

$$T \geq \frac{2p}{r} \geq \frac{2 \cdot 3r\sqrt{3}}{r} = 6\sqrt{3}.$$

Dacă luăm $M = G$, atunci :

$$s_a(G) = s_b(G) = s_c(G) = \frac{1}{3}S,$$

şi rezultă că:

$$T = \frac{a^2}{2s_a(G)} + \frac{b^2}{2s_b(G)} + \frac{c^2}{2s_c(G)} \geq 6\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{2}{3}S \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 21. Inegalitatea *Neuberg – Pedoe* afirmă că:

Dacă $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ *sunt două triunghiuri de laturi* a_1, b_1, c_1 *şi* a_2, b_2, c_2 *şi de arii* S_1, *respectiv* S_2, *atunci are loc inegalitatea*:

$$a_1^2\left(-a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right) + b_1^2\left(a_2^2 - b_2^2 + c_2^2\right) + c_1^2\left(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2\right) \geq 16S_1S_2.$$

Dacă luăm triunghiul $A_2B_2C_2$ echilateral de laturi $a_2 = b_2 = c_2 = 1$ avem $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ şi atunci rezultă că $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \geq 16S_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}S_1$. Deci, într-un triunghi ABC are loc inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Demonstraţia 22. Conform unei inegalităţi a lui *A. Oppenheim*:

Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, *atunci în orice triunghi* ABC, *cu notaţiile obişnuite, are loc inegalitatea*:

$$(x+y+z)^2 \geq 2\sqrt{3}(yz\sin A + zx\sin B + xy\sin C),$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x = y = z$ *şi triunghiul* ABC *este echilateral.*

Dacă luăm $x = a, y = b, z = c$, atunci obţinem

$$(a+b+c)^2 \geq 2\sqrt{3}(bc\sin A + ca\sin B + ab\sin C) = 2\sqrt{3} \cdot 6S = 12\sqrt{3}S.$$

Deoarece $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$, rezultă că

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq \frac{12\sqrt{3}S}{3} = 4\sqrt{3}S.$$

Observaţie. Procedând ca mai sus,

$$(a+b+c)^2 \geq 12\sqrt{3}S \Leftrightarrow 4p^2 \geq 12\sqrt{3}S = 12\sqrt{3}pr \Leftrightarrow p \geq 3\sqrt{3}r,$$

deci am obţinut o nouă demonstraţie pentru inegalitatea lui *Mitrinović*.

Demonstraţia 23. *În orice triunghi are loc inegalitatea:*

$$c \geq (a+b)\sin\frac{C}{2}.$$

Într-adevăr

$$(a+b)\sin\frac{C}{2} = 2R(\sin A+\sin B)\sin\frac{C}{2} = 4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} =$$

$$= 4R\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} = 2R\sin C\cos\frac{A-B}{2} = c\cos\frac{A-B}{2} \leq c,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a=b$.

Deci,

$$a^2+b^2+c^2 \geq (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2} + (b+c)^2\sin^2\frac{A}{2} + (c+a)^2\sin^2\frac{B}{2} \geq$$

$$\geq 4ab\sin^2\frac{C}{2} + 4bc\sin^2\frac{A}{2} + 4ca\sin^2\frac{B}{2} = 8S\left(\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\sin C} + \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin A} + \frac{\sin^2\frac{B}{2}}{\sin B}\right) =$$

$$= 4S\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right),$$

de unde, deoarece funcţia $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ este convexă pe$(0,\pi)$, rezultă că

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\cdot 3\operatorname{tg}\frac{A+B+C}{6} = 12S\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3}S.$$

În legătură cu inegalitatea lui *Ionescu-Weitzenböck*, există în literatura matematică alte două inegalităţi celebre, echivalente cu aceasta:

• inegalitatea *Hadwiger-Finsler*:

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2, \qquad (HF)$$

cu egalitate dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral;

• inegalitatea *Neuberg-Pedoe*: pentru un al doilea triunghi de arie T şi laturile de lungimi x, y, z avem

$$a^2(y^2+z^2-x^2) + b^2(z^2+x^2-y^2) + c^2(x^2+y^2-z^2) \geq 16ST, \qquad (NP)$$

cu egalitate dacă şi numai dacă triunghiurile sunt asemenea.

III. Trei rezultate suplimentare

Propoziţia 1. *Dacă $A_1A_2\dots A_6$ este un hexagon convex cu aria S, atunci*

$$A_1A_2^2+A_2A_3^2+A_3A_4^2+A_4A_5^2+A_5A_6^2+A_6A_1^2+2(A_1A_3^2+A_3A_5^2+A_5A_1^2)\geq 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţie. În triunghiurile $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_5$, $A_5A_6A_1$ şi $A_1A_3A_5$ aplicăm inegalitatea I-W şi obţinem

$$A_1A_2^2+A_2A_3^2+A_3A_1^2\geq 4\sqrt{3}\,\text{aria}[A_1A_2A_3]$$
$$A_3A_4^2+A_4A_5^2+A_5A_3^2\geq 4\sqrt{3}\,\text{aria}[A_3A_4A_5]$$
$$A_5A_6^2+A_6A_1^2+A_1A_5^2\geq 4\sqrt{3}\,\text{aria}[A_5A_6A_1]$$
$$A_1A_3^2+A_3A_5^2+A_5A_1^2\geq 4\sqrt{3}\,\text{aria}[A_1A_3A_5],$$

care, adunate membru cu membru, conduc la relaţia de demonstrat.

Propoziţia 2. *Dacă $A_1A_2\dots A_6$ este un hexagon convex cu aria S, atunci*

$$A_1A_2^2+A_2A_3^2+A_3A_4^2+A_4A_5^2+A_5A_6^2+A_6A_1^2+A_1A_3^2+$$
$$+A_3A_5^2+A_5A_1^2+A_2A_4^2+A_4A_6^2+A_6A_2^2\geq 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţie. Aplicând în triunghiurile $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_5$, $A_5A_6A_1$, $A_2A_3A_4$, $A_4A_5A_6$, $A_6A_1A_2$, $A_1A_3A_5$ şi $A_2A_4A_6$ inegalitatea I-W deducem

$$A_1A_2^2+A_2A_3^2+A_3A_1^2\geq 4\sqrt{3}\,\text{aria}[A_1A_2A_3]$$
$$A_3A_4^2+A_4A_5^2+A_5A_3^2\geq 4\sqrt{3}\,\text{aria}[A_3A_4A_5]$$
$$A_5A_6^2+A_6A_1^2+A_1A_5^2\geq 4\sqrt{3}\,\text{aria}[A_5A_6A_1]$$
$$A_2A_3^2+A_3A_4^2+A_4A_2^2\geq 4\sqrt{3}\,\text{aria}[A_2A_3A_4]$$
$$A_4A_5^2+A_5A_6^2+A_6A_4^2\geq 4\sqrt{3}\,\text{aria}[A_4A_5A_6]$$
$$A_6A_1^2+A_1A_2^2+A_2A_6^2\geq 4\sqrt{3}\,\text{aria}[A_6A_1A_2]$$
$$A_1A_3^2+A_3A_5^2+A_5A_1^2\geq 4\sqrt{3}\,\text{aria}[A_1A_3A_5]$$
$$A_2A_4^2+A_4A_6^2+A_6A_2^2\geq 4\sqrt{3}\,\text{aria}[A_2A_4A_6],$$

care, adunate membru cu membru, dau inegalitatea de demonstrat.

Propoziţia 3. *Dacă $A_1A_2...A_{2n}$, $n\geq 3$, este un poligon convex de arie S în care notăm a_k lungimea laturii $[A_kA_{k+1}]$, $k=\overline{1,2n}$, $A_{2n+1}\equiv A_1$, atunci*

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}a_k^2\right)\text{tg}\frac{\pi}{n}+\left(\sqrt{3}+\text{tg}\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}A_{2k-1}A_{2k+1}^2\geq 4\sqrt{3}S\cdot\text{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Demonstraţie. În triunghiurile$A_{2k-1}A_{2k}A_{2k+1}$, $k=\overline{1,n}$, aplicăm inegalitatea I-W şi obţinem

$$a_{2k-1}^2+a_{2k}^2+A_{2k-1}A_{2k+1}^2\geq 4\sqrt{3}\,\text{aria}[A_{2k-1}A_{2k}A_{2k+1}], k=\overline{1,n},$$

de unde rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{2k-1}^2+a_{2k}^2+A_{2k-1}A_{2k+1}^2\right)\geq 4\sqrt{3}\sum_{k=1}^{n}\text{aria}[A_{2k-1}A_{2k}A_{2k+1}]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{2n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}A_{2k-1}A_{2k+1}^2\geq 4\sqrt{3}\sum_{k=1}^{n}\text{aria}[A_{2k-1}A_{2k}A_{2k+1}]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{2n}a_k^2\text{tg}\frac{\pi}{n}+\sum_{k=1}^{n}A_{2k-1}A_{2k+1}^2\text{tg}\frac{\pi}{n}\geq 4\sqrt{3}\sum_{k=1}^{n}\text{aria}[A_{2k-1}A_{2k}A_{2k+1}]\text{tg}\frac{\pi}{n}. \quad (1)$$

Conform inegalităţii din [4], în poligonul convex $A_1A_3\ldots A_{2n-1}$ avem

$$\sum_{k=1}^{n}A_{2k-1}A_{2k+1}^2\geq 4\,\text{aria}[A_1A_3...A_{2n-1}]\text{tg}\frac{\pi}{n}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3}\sum_{k=1}^{n}A_{2k-1}A_{2k+1}^2\geq 4\sqrt{3}\,\text{aria}[A_1A_3\ldots A_{2n-1}]\text{tg}\frac{\pi}{n}. \quad (2)$$

Adunând membru cu membru inegalităţile (1) şi (2) obţinem ceea ce era de demonstrat.

Bibliografie

[1] A. Engel, *Probleme de matematică – strategii de rezolvare* (traducere de Mihail Bălună), Editura Gil, 2006.

[2] C. Lupu, R. Marinescu, S. Monea, *Rezolvarea geometrică a unor inegalităţi*, G.M.-B vol. 116 (2011), nr. 12.

[3] Ion Ionescu, *Problema 273*, Gazeta Matematică vol. 3 (1897), nr. 2.

[4] E. Just, N. Schaumberger, *Problem E 1634*, The American Mathematical Monthly, vol. 70 (1963), nr. 9.