OBIECTIVE DE REFERINȚĂ
ŞI EXEMPLE DE ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

1. Cunoaşterea şi înțelegerea conceptelor, a terminologiei şi a procedurilor de calcul

Obiective de referință ***La sfârşitul clasei a VII-a elevul va fi capabil***	**Exemple de activități de învățare** ***Pe parcursul clasei a VII-a se recomandă următoarele activități*** :
1.1.să utilizeze noțiuni de logică şi teoria mulțimilor	-rezolvarea unor probleme folosind proprietăți comune oricărei partiții -exercițiile de determinare a numărului de elemente al unor mulțimi folosind principiul includerii şi excluderii
1.2.să utilizeze metode şi principii adecvate în rezolvarea problemelor	-rezolvarea unor probleme de maxim şi minim -rezolvări de probleme folosind principiul invariantului -probleme care se rezolvă folosind principiul lui Diriclet -probleme de numărare -probleme folosind principiul parității -probleme de ordonare
1.3.să rezolve ecuații prin diferite metode şi să utilizeze ecuații şi inecuații în rezolvarea problemelor	-rezolvarea ecuațiilor care conțin modul şi parte întreaga -folosirea inegalităților mediilor în rezolvarea unor inegalități sau a unor inecuații -rezolvări de ecuații diofantice (în mulțimea numerelor întregi)
1.4.să utilizeze noțiuni de divizibilitate	-rezolvarea unor probleme folosind noțiuni de divizibilitate, congruente modulo n
1.5.să efectueze calcule cu numere reale	-exerciții de calcul a unor sume folosind diferite metode -compararea, ordonarea şi reprezentarea pe axa a unor numere reale -calcularea valorii unor expresii

1.6.să rezolve problemele puse la alte discipline folosind metode matematice	-rezolvarea problemelor de geometrie plana care îşi au originea în fizica
1.7.să utilizeze metode, axiome, leme, teoreme şi relații geometrice în demonstrarea problemelor	-rezolvarea problemelor de concurenta şi coliniaritate folosind teoreme reprezentative : Menelaos, Van Aubel, Ceva -calculul lungimilor liniilor importante în triunghi -calculul ariilor unor figuri geometrice şi aplicarea metodei areolare în demonstrarea unor probleme -rezolvarea problemelor folosind relații trigonometrice
1.8.să recunoască şi să utilizeze în demonstrații proprietățile unor figuri geometrice sau a unor linii importante în triunghi	-demonstrarea unor inegalități geometrice -construcții de figuri geometrice -determinarea locurilor geometrice remarcabile şi rezolvarea problemelor de loc geometric

***2**.Dezvoltarea capacității de a emite judecăți de valoare pentru rezolvarea problemelor inventiv şi euristic-creative*

Obiective de referință	**Exemple de activități de învățare**
La sfârşitul clasei a VII-a elevul va fi capabil : 2.1.să analizeze, să elaboreze un plan de rezolvare şi să rezolve probleme dificile	*Pe parcursul clasei a VII-a se recomanda următoarele activități :* -analizarea ipotezei, concluziei şi înțelegerea problemei -alegerea metodei de abordare a rezolvării problemei -rezolvarea problemei şi verificarea rezultatului -analiza rezolvarii -verificarea redundantei unor ipoteze şi încercări de eliminare ale unor cerințe (părți) din ipoteza
2.2.să formuleze probleme echivalente cu o problema data modificând părți ale ipotezei şi/ sau ale concluziei	-formulări de probleme prin extragerea unor cazuri particulare sau prin generalizare

2.3.să identifice tehnici de lucru pentru clase de probleme	-identificarea unor tehnici de lucru valabile pentru clase de probleme -analizarea eficienței metodei

3.*Dezvoltarea capacității de a face conexiuni cognitive în cadrul disciplinei şi a ariei curriculare*

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a VII-a elevul va fi capabil :*	**Exemple de activități de învățare** *Pe parcursul clasei a VII-a se recomandă următoarele activități*
3.1.să utilizeze raționamente inductive în rezolvarea problemelor din domeniile studiate 3.2.să-şi formeze o gândire creativă şi divergentă	-folosirea intuiției şi perspicacității în alegerea modului de abordare a unei probleme -combinarea elementelor cunoscute şi crearea altora noi -rezolvarea unor probleme teoretice complexe prin stabilirea unor relații între cunoştințe

4.Dezvoltarea capacității de a comunica utilizând limbajul matematic

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a VII-a elevul va fi capabil :*	**Exemple de activități de învățare** *Pe parcursul clasei a VII-a se recomanda următoarele activități :*
4.1.să folosească terminologia specifica matematicii 4.2.să discute avantajele şi dezavantajele utilizării unei anumite tehnici de abordare a unei probleme	-redactarea matematica a unui text folosind scrierea specifica -citirea unui text scris matematic şi interpretarea lui -discutarea argumentelor folosirii unei anume metode de rezolvare -descrierea etapelor de rezolvare

5. Dezvoltarea interesului şi a motivației pentru studiul şi aplicarea matematicii în contexte variate

Obiective de referință *La sfârşitul clasei a VII-a elevul va fi capabil :*	**Exemple de activități de învățare** *Pe parcursul clasei a VII-a se recomanda următoarele activități*
5.1.să sesizeze importanta noțiunilor de geometrie în rezolvarea unor probleme concrete 5.2.să manifeste ingeniozitate pentru găsirea de soluții noi 5.3.să manifeste interes pentru folosirea tehnologiilor informației în studiul matematicii	-transpunerea unor probleme din limbaj uzual în limbajul geometriei , rezolvarea lor şi interpretarea rezultatelor -abordarea unor probleme la moda în concursurile şcolare -utilizarea unor soft-uri pentru învățarea matematicii; explorarea internetului

CONȚINUTURI

ALGEBRĂ

GEOMETRIE

ALGEBRĂ

1. Mulțimi

1.1. Partițiile unei mulțimi

Definiția 1.1.1. Se numeşte partiție a unei mulțimi A o mulțime de submulțimi nevide ale lui A, disjuncte două câte două, a căror reuniune este mulțimea A.

Probleme rezolvate

R1.1.1. Pentru mulțimea A={1,2,3} există partițiile:

1) {1}, {2}, {3}; 2) {1}, {2,3}; 3) {2}, {1,3}; 4) {3}, {1,2}.

R1.1.2. Fie A={a,b,c,d}. Avem partițiile:

1) {a}, {b}, {c}, {d}; 2) {a}, {b,c,d}; 3) {b}, {a,c,d}; 4) {c}, {a,b,d}, 5) {d}, {a,b,c}; 6) {a,b}, {c}, {d}; 7) {a,c}, {b}, {d}; 8) {a,d}, {b}, {c}, 9) {b,c}, {a}, {d}; 10) {c,d}, {a}, {b}; 11) {b,d}, {a}, {c}, 12) {a,b}, {c,d}; 13) {a,c}, {b,d}; 14) {a,d}, {b,c}.

Mulțimea submulțimilor unei mulțimi nu reprezintă o partiție, deoarece nu toate submulțimile sunt disjuncte.

Mulțimea submulțimilor unei mulțimi A se numeşte mulțimea părților mulțimii A şi se notează *P*(A).

Dacă o mulțime A are n elemente ($n\in\mathbf{N}$) atunci *P*(A) are 2^n elemente.

R1.1.3. Să se determine numărul submulțimilor

$$A=\{a,b,c,d\}\subset\{1,2,...,102\}$$

cu proprietatea că a+b=c+d=102.

Soluție. Presupunem că a<b<c<d. Atunci perechile cu suma 102 sunt: (1,101), (2,100), (3,99),..., (49,53), (50,52). Perechii (1,101) îi corespund 49 de perechi: (2,100), (3,99),..., (50,52). Perechii (2,100) îi corespund 48 de perechi: (3,99), (4,98),..., (50,52). Numărând analog obținem pentru perechea (49,53) perechea (50,52). Numărul cerut este:

$$49+48+47+...+2+1=\frac{49\cdot 50}{2}=49\cdot 25=1225\,.$$

R1.1.4. Fie mulțimea A={1,2,3,...,998,999}.

Care este cel mai mic număr de submulțimi în care poate fi partiționată mulțimea A astfel încât dacă într-o submulțime se află 2^x cu $x\in\mathbf{N}^*$, în acea submulțime să nu se mai afle $(2^x)^y$ cu y natural diferit de zero şi unu.

Soluție. Puterile naturale 2^x cu $x\neq 0$ mai mici ca 999 sunt 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9. Dacă fiecare din aceste elemente sunt în submulțimi disjuncte atunci 2^x nu este în aceeaşi submulțime cu $(2^x)^y$, dar nu este satisfăcută condiția de minim (de exemplu 2^2, 2^3, 2^5, 2^7 pot fi în aceeaşi submulțime – orice putere cu exponent natural diferit de zero şi unu a acestor numere nu are ca rezultat pe unul din ele).

Vom construi un model care să realizeze minimul cerut, având în vedere că submulţimea ce-l conţine pe 2 să nu mai conţină şi altă putere a sa; în submulţimea în care se află 2^2 să nu se mai afle altă putere a lui 2^2, în submulţimea în care se află 2^3 să nu se mai afle o altă putere a lui 2^3, etc. Atunci $A_1=\{1,2,3\}$, fiindcă $4=2^2\notin A_1$.

$A_2=\{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$. A_2 poate conţine elementele 4 şi 8 deoarece $8=2^3\neq(2^2)^y$ dar nu poate să conţină pe 16 deoarece $16=(2^2)^2$.

$A_3=\{16,17,18,...,254,255\}$. A_3 nu-l poate conţine pe $256=(2^4)^2$, dacă îl conţine pe $16=2^4$. Şi în sfârşit $A_4=\{256,257,...,998,999\}$.

Deci numărul minim de submulţimi care satisfac ipoteza este 4, şi am dat un model de realizare. Evident soluţia nu este unică.

R1.1.5. Partiţionaţi mulţimea $A=\{1,2,3,4,...,49\}$ în şapte submulţimi disjuncte, astfel încât suma elementelor fiecărei submulţimi să fie aceeaşi.

Soluţie. Mulţimea A are 49 de elemente. Din fiecare element scădem $\frac{49+1}{2}=25$ pentru a obţine o mulţime ce are suma elementelor 0, adică $A_1^*=\{-24,-23,-22,...,-1,0,1,2,...,22,23,24\}$. Această mulţime se poate partiţiona. Din A_1^* extragem şapte submulţimi disjuncte de câte trei elemente, cu suma elementelor zero. Fie aceste submulţimi B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, cu $B_1=\{24,-7,-17\}$, $B_2=\{-24,7,17\}$, $B_3=\{20,-5,-15\}$, $B_4=\{-20,5,15\}$, $B_5=\{16,-3,-13\}$, $B_5=\{-16,3,13\}$, $B_7=\{-1,0,1\}$.

Elementele rămase sunt şapte cvadruple de numere întregi, egale în valoare absolută două câte două, dar de semne contrare:

$$(-2,-4,2,4),\ (-6,-8,6,8),\ (-9,-10,9,10),\ (-11,-12,11,12),$$
$$(-14,-18,14,18),\ (-19,-21,19,21),\ (-22,-23,22,23).$$

Ataşăm acestea submulţimilor B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7 şi obţinem:

$A_1=\{24,-7,-17,-2,-4,2,4\}$, $A_2=\{-24,7,17,-6,-8,6,8\}$,
$A_3=\{20,-5,-15,-9,-10,9,10\}$, $A_4=\{-20,5,15,-11,-12,11,12\}$
$A_5=\{16,-3,-13,-14,-18,14,18\}$, $A_6=\{-16,3,13,-19,-21,19,21\}$
$A_7=\{-1,0,1-22,-23,22,23\}$

Adunând 25 la fiecare element al mulţimilor A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 obţinem:

$C_1=\{49,18,8,23,21,27,29\}$, $C_2=\{1,32,42,19,17,31,33\}$,
$C_3=\{45,20,10,16,15,34,35\}$, $C_4=\{5,30,40,14,13,36,37\}$,
$C_5=\{9,28,38,6,4,44,46\}$, $C_6=\{24,25,26,3,2,47,48\}$.

Mulţimile C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 sunt disjuncte şi fiecare are suma elementelor 175.

R1.1.6. Să se cerceteze dacă există numere naturale n astfel încât mulţimea $A=\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5\}$ să poată fi împărţită în două submulţimi disjuncte cu proprietatea că produsul tuturor elementelor uneia dintre acestea să fie egal cu produsul tuturor elementelor celeilalte submulţimi.

Soluţie. Pentru n=0 problema nu are soluţie.

Problema nu are soluţie dacă cel puţin un element al mulţimii A se divide cu un număr prim mai mare sau egal cu 7. Fiindcă mulţimea are cele şase elemente numere consecutive, dacă unul din acestea se divide cu un număr prim mai mare sau egal cu 7 nu va mai exista în mulțimea A un alt element divizibil cu un număr prim mai mare sau egal cu 7. Cum A conține șase numere naturale consecutive, cel puțin unul este divizibil cu 5. Dacă există numai un element divizibil cu 5 problema nu are soluție. Trebuie să existe două elemente divizibile cu 5. Acestea pot fi numai n+5 și n. Deci n este multiplu de 5. Elementele n și n+5 trebuie să facă parte din submulțimi diferite. Să observăm că produsul a două dintre elementele mulțimii A este mai mare decât fiecare dintre celelalte elemente ale mulțimii. Este suficient să arătăm că produsul cel mai mic este mai mare decât cel mai mare dintre elementele rămase, adică $n(n+1)>n+5 \Leftrightarrow n^2-5>0$. Această diferență este pozitivă pentru orice $n\geq 5$, $n\in\mathbf{N}$.

Rezultă că produsele care ar putea îndeplini cerința problemei trebuie cu necesitate să conțină câte trei și numai câte trei factori. Avem situațiile:

a) (n+1)(n+2)(n+5) și n(n+3)(n+4)
b) (n+1)(n+3)(n+5) și n(n+2)(n+4)
c) (n+1)(n+4)(n+5) și n(n+2)(n+3)
d) (n+2)(n+4)(n+5) și n(n+1)(n+3)
e) (n+2)(n+3)(n+5) și n(n+1)(n+4)
f) (n+3)(n+4)(n+5) și n(n+1)(n+2).

În situația a) avem:

$$(n+1)(n+2)(n+5)=n(n+3)(n+4) \Leftrightarrow n^3+7n^2+12n=n^3+8n^2+17n+10 \Leftrightarrow n^2+5n+10=0,$$

relație imposibilă pentru $n\geq 5$, $n\in\mathbf{N}$.

Situațiile b), c), d), e), f) nu sunt posibile pentru că fiecare dintre factorii primului produs sunt mai mari decât factorul corespunzător din cel de-al doilea produs. Deci produsul din membrul stâng este mai mare decât cel din membrul drept.

Deci nu există nici un număr natural care să satisfacă enunțul problemei.

1.2. Principiul includerii și excluderii

Fie A o mulțime finită cu n elemente.

Notăm cu CardA cardinalul (numărul de elemente) mulțimii A.

Teorema 1.2.1 (principiul includerii și excluderii). Fie A, B, C mulțimi finite și CardA, CardB, CardC numărul elementelor acestor mulțimi.

Cardinalul mulțimilor $A\cup B$, $A\cup B\cup C$ este dat de relațiile:

$$\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}A+\mathrm{Card}B-\mathrm{Card}(A\cap B) \quad (1)$$

$$\mathrm{Card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{Card}A+\mathrm{Card}B+\mathrm{Card}C-\mathrm{Card}(A\cap B)-$$
$$-\mathrm{Card}(A\cap C)-\mathrm{Card}(B\cap C)+\mathrm{Card}(A\cap B\cap C). \quad (2)$$

Relațiile (1) și (2) sunt cazuri particulare (pentru n=2 și n=3) ale formulei lui Boole-Sylvester, care va fi studiată mai târziu.

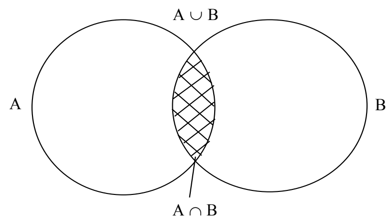
Să arătăm relația (1): Numărul elementelor din reuniunea mulțimilor A și B este egal cu suma numerelor elementelor din A și B, din care se scade numărul elementelor comune mulțimilor A și B, care au fost numărate de două ori.

$A\cup B$ este reuniunea mulțimilor disjuncte A şi $B\setminus(A\cap B)$, iar B este reuniunea mulțimilor disjuncte $B\setminus(A\cap B)$ şi $A\cap B$.

Din $Card(A\cup B)=CardA+Card(B\setminus(A\cap B))$ şi

$$CardB=Card(B\setminus(A\cap B))+Card(A\cap B) \text{ obținem:}$$

$Card(A\cup B)=CardA+CardB-Card(A\cap B)$, adică tocmai relația (1).



Pentru relația (2) folosiți diagrama şi observați că adunând cardinalele $CardA+CardB+CardC$ şi comparând cu $Card(A\cup B\cup C)$, trebuie scăzute cardinalele $Card(A\cap B)$, $Card(B\cap C)$, $Card(A\cap C)$, dar atunci se pierde şi $Card(A\cap B\cap C)$ şi de aceea trebuie adunat $Card(A\cap B\cap C)$.

Vom prezenta în continuare câteva probleme care folosesc în rezolvare acest principiu.

R1.2.1. Elevii unei clase joacă fotbal sau baschet: 19 joacă fotbal, 24 joacă baschet şi 16 practică ambele jocuri. Câți elevi sunt în clasă?

Soluție. Aplicăm principiul includerii şi excluderii. Fie F mulțimea elevilor ce joacă fotbal, B – mulțimea elevilor ce joacă baschet. Atunci $CardF=19$, $CardB=24$, $Card(F\cap B)=16$,

$$Card(F\cup B)=CardF+CardB-Card(A\cap B)=19+24-16=43-16=27.$$

Deci numărul elevilor din clasă este 27.

R1.2.2. Din cei 1000 de elevi ai unei şcoli 506 participă la olimpiada de limba română, 460 participă la olimpiada de fizică şi 442 participă la olimpiada de matematică. Dintre aceştia 160 participă la olimpiadele de limba română şi fizică, 162 participă la olimpiadele de fizică şi matematică şi 131 participă la olimpiadele de limba română şi matematică. Câți dintre elevii şcolii participă la toate cele trei olimpiade.

Soluție. Aplicăm principiul includerii şi excluderii (relația (2)).

Fie R – mulțimea elevilor ce participă la olimpiada de limba română, F – mulțimea elevilor ce participă la olimpiada de fizică, iar M – mulțimea elevilor ce participă la olimpiada de matematică. Atunci $CardR=506$, $CardF=460$, $CardM=442$, $Card(R\cap F)=160$, $Card(F\cap M)=162$, $Card(R\cap M)=131$, $Card(R\cup F\cup M)=1000$.

Folosim relația (2) şi obținem:

$$Card(R\cup F\cup M)=CardR+CardF+CardM-Card(R\cap F)-$$
$$-Card(R\cap M)-Card(F\cap M)+Card(R\cap F\cap M),$$

deci $1000=506+460+442-160-131-162+Card(R\cap F\cap M)$, de unde $Card(R\cap F\cap M)=45$. Deci 45 de elevi din şcoală participă la câte trei olimpiade.

Principiul includerii şi excluderii permite rezolvarea simplă a unor probleme de divizibilitate.

R1.2.3. Aflați numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu 500 care sunt divizibile cu 2, 3 sau 5.

Soluție. Fie A mulțimea numerelor naturale nenule mai mici sau egale cu 500 divizibile cu 2, B – mulțimea numerelor naturale mai mici sau egale cu 500 divizibile cu 3, iar C – mulțimea numerelor naturale mai mici sau egale cu 500 divizibile cu 5. Numerele divizibile cu 2, mai mici sau egale cu 500 sunt: 2, 4, 6, 8,..., 500.

Vom folosi partea întreagă fiindcă la împărțiri ne interesează numai câturile nu şi resturile. Atunci

$$\mathrm{Card}A=\left[\frac{500}{2}\right]=250,\ \mathrm{Card}B=\left[\frac{500}{3}\right]=166,\ \mathrm{Card}C=\left[\frac{500}{5}\right]=100,$$

$$\mathrm{Card}(A\cap B)=\left[\frac{500}{6}\right]=82,\ \mathrm{Card}(B\cap C)=\left[\frac{500}{15}\right]=33,$$

$$\mathrm{Card}(A\cap C)=\left[\frac{500}{10}\right]=50,\ \mathrm{Card}(A\cap B\cap C)=\left[\frac{500}{30}\right]=16$$

Din Card(A∪B∪C)=CardA+CardB+CardC-Card(A∩B)-
-Card(A∩C)-Card(B∩C)+Card(A∩B∩C) obținem Card(A∪B∪C)=367.

Acum putem afla şi numărul numerelor naturale nenule mai mici sau egale cu 500 care nu sunt divizibile cu 2, nici cu 3, nici cu 5. Acestea sunt în număr de 500-267=233.

2. Congruențe în Z. Aplicații la rezolvarea problemelor de divizibilitate

Definiția 2.1. Două numere întregi a şi b se numesc congruente modulo n, n fiind un număr întreg, dacă n divide pe a-b, adică $n|(a-b)$.

Numărul n se numeşte modulul relației de congruență. În loc de a scrie $n|(a-b)$, se scrie $a\equiv b(\text{mod } n)$ şi citim: a este congruent cu b modulo n.

Proprietăți ale relației de congruență în **Z**

2.1.1. Relația de congruență este reflexivă, adică $a\equiv a(\text{mod } n)$, oricare ar fi numărul întreg a, când modulul n este dat. (Orice număr întreg (diferit de zero) este congruent cu el însuşi modulo n).

Avem $n|0$, dar $a-a=0$, deci $n|(a-a)$, adică $a\equiv a(\text{mod } n)$.

2.1.2. Relația de congruență este simetrică, adică dacă $a\equiv b(\text{mod } n)$, atunci $b\equiv a(\text{mod } n)$.

Faptul că $a\equiv b(\text{mod } n)$ înseamnă că $n|(a-b)$.

Folosind proprietățile relației de divizibilitate obținem $n(-1)(a-b)$, deci $n|(b-a)$, adică $b\equiv a(\text{mod } n)$.

2.1.3. Relația de congruență este tranzitivă, adică dacă $a\equiv b(\text{mod } n)$ şi $b\equiv c(\text{mod } n)$, atunci $a\equiv c(\text{mod } n)$.

Faptul că $a\equiv b(\text{mod } n)$ înseamnă că $n|(a-b)$, iar $b\equiv c(\text{mod } n)$ înseamnă că $m|(b-c)$.

Folosind proprietățile relației de divizibilitate obținem $n|[(a-b)+(b-c)]$, deci $n|(a-c)$, de unde $a\equiv c(\text{mod } n)$.

Relația de congruență în raport cu un modul dat n fiind reflexivă, simetrică şi tranzitivă este o relație de echivalență.

2.1.4. i) Două relații de congruență în raport cu un acelaşi modul se adună membru cu membru, adică: dacă $a\equiv b(\text{mod } n)$ şi $c\equiv d(\text{mod } n)$ atunci:

$$a+c\equiv b+d(\text{mod } n).$$

ii) Două relații de congruență în raport cu acelaşi modul se scad membru cu membru, adică dacă $a\equiv b(\text{mod } n)$ şi $c\equiv d(\text{mod } n)$ atunci

$$a-c\equiv b-d(\text{mod } n).$$

iii) Într-o relație de congruență se poate trece un număr întreg dintr-un membru în altul al relației de congruență cu semnul schimbat, adică dacă $a\equiv b+c(\text{mod } n)$, atunci $a-c\equiv b(\text{mod } n)$.

i) Deci $a\equiv b(\text{mod } n)$ înseamnă că $n|(a-b)$, iar $c\equiv d(\text{mod } n)$ înseamnă $n|(c-d)$. Folosind proprietățile relației de divizibilitate obținem $n|[(a-b)+(c-d)]$ sau $n|[(a+c)-(b+d)]$, de unde $a+c\equiv b+d(\text{mod } n)$.

ii) Din $a\equiv b(\text{mod } n)$ şi $c\equiv d(\text{mod } n)$ obținem $n|(a-b)$ şi $n|(c-d)$, de unde $n|[(a-b)-(c-d)]$, sau $n|[(a-c)-(b-d)]$, deci $a-c\equiv b-d(\text{mod } n)$.

iii) Din $a\equiv b+c(\text{mod } n)$ obținem $n|[a-(b+c)]$, deci $n|[(a-c)-b]$, adică $a-c\equiv b(\text{mod } n)$.

2.1.5. i) Două relații de congruență în raport cu acelaşi modul n se pot înmulți membru cu membru, adică dacă $a\equiv b(\text{mod } n)$ şi $c\equiv d(\text{mod } n)$, atunci $a\cdot c\equiv b\cdot d(\text{mod } n)$.

ii) Ambii membri ai unei relații de congruență se pot înmulți cu orice număr întreg diferit de zero, adică:

Dacă $a\equiv b(\text{mod } n)$ atunci $a\cdot c\equiv b\cdot c(\text{mod } n)$, oricare ar fi numărul întreg c nenul.

iii) Ambii membri ai unei relații de congruență se pot înmulți cu orice număr întreg nenul, înmulțind în acelaşi timp şi modulul, adică:
Dacă $a \equiv b \pmod{n}$, atunci $a \cdot c = b \cdot \pmod{n \cdot c}$, oricare ar fi numărul întreg c nenul.

Demonstrație. i) Din $a \equiv b \pmod{n}$ obținem $n|(a-b)$, iar din $c \equiv d \pmod{n}$ obținem că $n|(c-d)$. Folosind proprietățile relației de divizibilitate avem: $n|[c(a-b)+b(c-d)]$, de unde $n|(ac-bd)$ adică $ac \equiv bd \pmod{n}$.

ii) Din $a \equiv b \pmod{n}$ obținem $n|(a-b)$, şi folosind proprietățile relației de divizibilitate, pentru orice număr întreg c avem: $n|(a-b)c$, deci $n|(ac-bc)$, adică $ac \equiv bc \pmod{n}$.

iii) Din $a \equiv b \pmod{n}$ rezultă că $n|(a-b)$. Folosind proprietățile relației de divizibilitate obținem: $nc|(a-b)c$, pentru orice număr întreg c.

Deci $nc|(ac-bc)$, adică $ac \equiv bc \pmod{nc}$.

2.1.6. Orice relație de congruență în raport cu un modul dat este în acelaşi timp o relație de congruență în raport cu orice modul care este un divizor al modulului inițial, adică dacă $a \equiv b \pmod{n}$ şi $k|n$, atunci $a \equiv b \pmod{k}$.

Demonstrație. Din $a \equiv b \pmod{n}$ obținem $n|(a-b)$. Din $k|n$ şi $n|(a-b)$ obținem $k|(a-b)$, deci $a \equiv b \pmod{k}$.

2.1.7. Dacă un membru al relației de congruență între două numere întregi se divide cu modulul, atunci şi celălalt membru al relației de congruență se divide cu modulul, adică
dacă $a \equiv b \pmod{n}$ şi $n|a$, atunci $n|b$ sau
dacă $a \equiv b \pmod{n}$ şi $n|b$, atunci $n|a$.

Demonstrație. Din $a \equiv b \pmod{n}$ obținem $n|(a-b)$.

Dacă $n|a$ atunci $n|[(-1)(a-b)+a]$, deci $n|b$.
Dacă $n|b$ atunci $n|[(a-b)+b]$, deci $n|a$.

2.1.8. Două numere întregi oarecare sunt întotdeauna congruente în raport cu modulul 1 şi (-1), adică $a \equiv b \pmod{1}$ şi $a \equiv b \pmod{(-1)}$ oricare ar fi numerele întregi a şi b nenule.

Demonstrație. Fiindcă $a,b \in \mathbf{Z}$ şi atunci $1|(a-b)$, deci $a \equiv b \pmod{1}$, iar din $-1|(a-b)$ obținem $a \equiv b \pmod{(-1)}$.

Relația de egalitate este un caz particular al relației de congruență în cazul când modulul este zero şi reciproc.

Probleme rezolvate

R2.1. Să se afle restul împărțirii numărului $A=985 \cdot 1275+970$ la 11.

Soluție. Avem: $985 \equiv 6 \pmod{11}$, $1275 \equiv 10 \pmod{11}$, $970 \equiv 2 \pmod{11}$.
Atunci $985 \cdot 1275+970 \equiv (6 \cdot 10+2) \pmod{11} = 62 \equiv 7 \pmod{11}$.

Restul împărțirii numărului A la 11 este 7.

R2.2. Să se afle restul împărțirii numărului $B=4690^7 \cdot 157^8-151^5$ la 13.

Soluție. Avem relațiile:

$$4690 \equiv 10 \pmod{13},\ 157 \equiv 1 \pmod{13},\ 151 \equiv 8 \pmod{13}.$$

Atunci

$$B=4690^7\cdot157^8-151^5\equiv10^7\cdot1^8-8^5(\text{mod }13)=(10^7-8^5)(\text{mod }13).$$

Fiindcă $10^3\equiv-1(\text{mod }13)$, $8^2\equiv-1(\text{mod }13)$

$10^6\equiv1(\text{mod }13)$, $8^4\equiv1(\text{mod }13)$

$10^7\equiv10(\text{mod }13)$, $8^5\equiv8(\text{mod }13)$

obținem $B\equiv=(10^7-8^5)(\text{mod }13)\equiv(10-8)(\text{mod }13)\equiv2(\text{mod }13)$.

Deci restul împărțirii lui B la 13 este 2.

R2.3. Rezolvați în $\mathbf{Z}$ ecuațiile:

a) $4x\equiv3x+2(\text{mod }7)$; b) $5x+6\equiv3x+4(\text{mod }6)$.

Soluție. $4x\equiv3x+2(\text{mod }7)$, rezultă că $4x-3x\equiv2(\text{mod }7)$, rezultă că $x\equiv2(\text{mod }7)$ adică $x=7k+2$, unde $k\in\mathbf{Z}$.

b) $5x+6\equiv3x+4(\text{mod }6)$ rezultă că $2x+6\equiv4(\text{mod }6)$, rezultă că $2x\equiv-2(\text{mod }6)$ deci $x\equiv-1(\text{mod }6)$, adică $x=6k-1$, $k\in\mathbf{Z}$.

R2.4. Să se arate că pentru orice număr natural n, numărul $10^{3n}-1$ se divide cu 37.

Soluție. Fiindcă $1000=37\cdot27+1$, rezultă $1000\equiv1(\text{mod }37)$.

Deci $10^{3n}\equiv1^n(\text{mod }37)\equiv1(\text{mod }37)$, adică $10^{3n}-1$ se divide cu 37.

R2.5. Să se demonstreze că numărul $N=7+7^3+7^5+7^7+...+7^{95}$ se divide cu 336.

Soluție. Avem $336=7\cdot48$ (numere prime între ele). Dăm factor comun pe 7 şi obținem: $N=7\cdot(1+7^2+7^4+7^6+...+7^{94})$, deci $7|N$. Trebuie să mai arătăm că 48 divide pe $1+7^2+7^4+7^6+...+7^{94}$.

Dar $1+7^2+7^4+7^6+...+7^{94}=49^0+49^1+49^2+49^3+...+49^{47}$. Fiindcă $49\equiv1(\text{mod }48)$, obținem:

$$49^0+49^1+49^2+...+49^{47}=\underbrace{1+1+...+1}_{48\text{ de ori}}\equiv0(\text{mod }48)$$

Deci N se divide cu 7 şi 48 (prime între ele) atunci se divide cu $7\cdot48=336$.

R2.6. Să se găsească $n\in\mathbf{N}$, astfel încât numărul $A=n^{n+1}+(n+1)^n$ să fie divizibil prin 3.

Soluție. Un număr împărțit la 3 poate da unul din resturile: 0, 1, 2. Avem situațiile:

i) $n\equiv0(\text{mod }3)$; ii) $n\equiv1(\text{mod }3)$; iii) $n\equiv2(\text{mod }3)$.

i) În primul caz din $n\equiv0(\text{mod }3)$ obținem $n^{n+1}\equiv0(\text{mod }3)$. Din $n\equiv0(\text{mod }3)$ obținem $n+1\equiv1(\text{mod }3)$ şi atunci $(n+1)^n\equiv1^n(\text{mod }3)$, deci $(n+1)^n\equiv1(\text{mod }3)$.

Deci $n^{n+1}+(n+1)^n\equiv1(\text{mod}3)\not\equiv0(\text{mod}3)$.

ii) Din $n\equiv1(\text{mod }3)$, rezultă $n^{n+1}\equiv1^{n+1}(\text{mod }3)$ şi deci $n^{n+1}\equiv1(\text{mod }3)$.

Din $n\equiv1(\text{mod }3)$ obținem $n+1\equiv2(\text{mod }3)$, rezultă că $(n+1)^n\equiv2^n(\text{mod }3)\equiv(-1)^n(\text{mod }3)$. Deci $n^{n+1}+(n+1)^n\equiv[1+(-1)^n](\text{mod }3)$, rezultă că n trebuie să fie impar şi cum $n\equiv1(\text{mod }3)$ rezultă că $n=6k+1$.

ii) Pentru $n\equiv2(\text{mod }3)$ obținem $n^{n+1}\equiv2^{n+1}(\text{mod }3)\equiv(-1)^{n+1}(\text{mod }3)$.

Din $n\equiv2(\text{mod }3)$ rezultă că $n+1\equiv0(\text{mod }3)$ şi deci $(n+1)^n\equiv0(\text{mod }3)$.

Atunci $n^{n+1}+(n+1)^n\equiv(-1)^{n+1}(\text{mod}3)\not\equiv0(\text{mod}3)$.

În concluzie avem $n=6k+1$.

3. Principiul parității

Multe probleme elementare, care de care mai neaşteptate, folosesc noțiunea de paritate.

Principiul parității constă în separarea cazurilor pare şi impare dintr-o situație. Regulile parității:

- suma a două numere pare este un număr par
- suma a două numere impare este un număr par
- suma dintre un număr par şi altul impar este un număr impar
- produsul dintre un număr par şi un număr impar este un număr par
- produsul a două numere pare este un număr par
- produsul a două numere impare este un număr impar.

Probleme rezolvate

R3.1. Fie $n \in \mathbf{N}, n > 2$.

Demonstrați că numărul fracțiilor ireductibile din mulțimea $\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$ este par.

Soluție. Să arătăm că dacă fracția $\frac{k}{n}$ este ireductibilă, atunci şi fracția $\frac{n-k}{n}$ este ireductibilă. Dacă fracția $\frac{k}{n}$ este ireductibilă atunci k şi n sunt prime între ele.

Să demonstrăm că şi n-k şi n sunt prime între ele. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există $p \neq 1$ astfel încât $p|n$ şi $p|(n-k)$, deci $p|[n-(n-k)]$ adică $p|k$. Deci $p \mid n$ şi $p \mid k$, adică n şi k nu sunt prime între ele, fals fiindcă $\frac{k}{n}$ este ireductibilă. Să arătăm că fracțiile $\frac{k}{n}$ şi $\frac{n-k}{n}$ sunt diferite. Dacă am avea $\frac{k}{n} = \frac{n-k}{n}$ am obține $n = 2k$ şi atunci $\frac{k}{n} = \frac{k}{2k}$ nu ar mai fi ireductibilă. Deci $\frac{k}{n} \neq \frac{n-k}{n}$. Atunci numărul fracțiilor ireductibile din mulțimea dată este par.

R3.2. La olimpiada de matematică s-au întâlnit n elevi, dar nu fiecare a dat mâna cu toți ceilalți. Să se arate că numărul elevilor care au dat mâna de un număr impar de ori este par.

Soluție. Fie x_i numărul strângerilor de mână pe care le-a realizat elevul cu numărul de ordin i. Când un elev dă mâna cu un alt elev se realizează două strângeri de mână, deci numărul total al strângerilor de mână este par, adică

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2s \tag{1}$$

Printre cei n elevi sunt k elevi care au realizat fiecare câte un număr par de strângeri de mână şi n-k elevi care au realizat fiecare câte un număr impar de strângeri de mână.

Atunci (1) se mai poate scrie:

$$\underbrace{x_1' + x_2' + \ldots + x_k'}_{\text{k numere pare}} + \underbrace{x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n}_{\text{n-k numere impare}} = 2s$$

Suma alcătuită din *k* numere pare şi (*n-k*) numere impare este un număr par dacă şi numai dacă numărul numerelor impare este par, deci (*n-k*) este număr par.

R3.3. Determinaţi numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ ştiind că

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} + a_{2n+1} = 2n+1 \quad \text{şi} \quad |a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = \ldots = |a_{2n+1} - a_1|$$

Soluţie. Fie $|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = \ldots = |a_{2n+1} - a_1| = k$. Atunci

$$\begin{aligned} &a_1 - a_2 = \pm k \\ &a_2 - a_3 = \pm k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{2n} - a_{2n+1} = \pm k \\ &a_{2n+1} - a_1 = \pm k \end{aligned} \qquad (1)$$

Adunând membru cu membru relaţiile (1) obţinem:

$$0 = \pm k \pm k \pm \ldots \pm k \quad \text{sau} \quad 0 = k(\pm 1 \pm \ldots \pm 1) \qquad (2)$$

Din (2) rezultă *k*=0 sau numărul din paranteză este zero. În paranteză având un număr impar de ± 1 obţinem că numai *k*=0 convine. Atunci obţinem $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n+1} = 1$.

R3.4. Ce condiţie trebuie să îndeplinească numărul natural *n* pentru ca să existe *n* numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egale cu +1 sau –1, cu proprietatea că:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0 \qquad (1)$$

Soluţie. Suma conţinând *n* termeni, pentru a avea loc (1) trebuie ca $\frac{n}{2}$ termeni să fie 1 iar $\frac{n}{2}$ termeni să fie –1. Deci este necesar ca *n* să fie par, adică *n=2k*, $k \in \mathbf{N}^*$. Condiţia nu este suficientă (exp. $k = 1 \Rightarrow n = 2$ şi deci $a_1a_2 + a_2a_1 = 2a_1a_2 \neq 0$).

Vom calcula în două moduri produsul termenilor din (1) şi anume:

$$(a_1a_2)(a_2a_3)\cdot\ldots\cdot(a_{n-1}a_n)(a_na_1) = a_1^2a_2^2\cdot\ldots\cdot a_n^2 = 1 \qquad (2)$$

Ţinând seama că avem *k* termeni din (1) egali cu +1, iar $k\left(\frac{n}{2}\right)$ termeni egali cu –1 obţinem:

$$(a_1a_2)(a_2a_3)\cdot\ldots\cdot(a_{n-1}a_n)(a_na_1) = (+1)^k \cdot (-1)^k \qquad (3)$$

Din (2) şi (3) rezultă că $1 = (+1)^k \cdot (-1)^k$, adică trebuie ca *k* să fie par. Deci *k=2l*, $l \in \mathbf{N}^*$. Atunci $n = 2k = 2\cdot 2l = 4l$.

În concluzie *n* trebuie să fie multiplu de 4.

4. Principiul invariantului

Invariantul este o mărime, o relație, sau o proprietate care rămâne neschimbată în urma aplicării sau intervenției unei transformări.

Deci o situație inițială este supusă în mod repetat unor transformări. De obicei se cere să se demonstreze că în urma acestor transformări nu se poate ajunge la o anumită formă. Aceasta se poate face alegând caracteristica obiectului care a fost supus transformării, adică "invariantul" transformării. Dacă în final obiectul nu posedă "invariantul" atunci el nu poate fi obținut în urma transformărilor descrise.

Probleme rezolvate

R4.1. Într-un sistem cartezian xOy din punctul (x, y) este permisă deplasarea într-unul din cele patru puncte: $(x-1, y-1)$, $(x-1, y+1)$, $(x+1, x-1)$, $(x+1, y+1)$. Demonstrați că din punctul (0,0) nu se poate ajunge prin deplasări succesive în punctul (2003,2004).

Soluție. Observăm că un punct (x, y) având suma coordonatelor $x+y$ un număr par se poate deplasa într-un punct având suma coordonatelor tot pară:

I. $(x-1, y-1)$ are suma coordonatelor $x+y-2$

II. $(x-1, y+1)$ are suma coordonatelor $x+y$

III. $(x+1, x-1)$ are suma coordonatelor $2x$

IV. $(x+1, y+1)$ are suma coordonatelor $2+x+y$.

Punctul (0,0) are suma coordonatelor 0, deci un număr par, el se poate deplasa succesiv în puncte cu aceeași paritate a sumei coordonatelor, deci nu se poate deplasa în punctul (2003,2004) care are suma coordonatelor impară.

R4.2. O cameră are dimensiunile podelei de 7m şi 10m. În cele patru colțuri ale camerei se aşează câte un dulap având baza pătrat cu latura de 1m. Să se arate că ce rămâne din suprafața podelei nu poate fi acoperită cu plăci dreptunghiulare de dimensiuni 3m×1m.

Soluție. Se împarte camera într-o rețea de pătrate cu latura 1m pe care le vopsim în trei culori: roşu, alb, negru ca mai jos:

RANRANRANR
ANRANRANRA
NRANRANRAN
RANRANRANR
ANRANRANRA
NRANRANRAN
RANRANRANR

Obținem 24 de R, 23 de A, 23 de N. Eliminând colțurile rămân 20 de pătrățele roşii, 23 de pătrățele albe, 23 de pătrățele negre. Dar oricum am aşeza o placă de 3×1 ea acoperă un pătrățel roşu, unul alb şi unul negru. Dacă s-ar putea acoperi suprafața cu un număr întreg de plăci ar trebui să existe acelaşi număr de pătrăţele pentru fiecare culoare.

R4.3. Pe o tablă scriem numerele de la 1 la $4n$-1 ($n \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$).
Printr-o operaţie înţelegem că ştergem două numere oarecare de pe tablă şi în locul lor scriem valoarea absolută a diferenţei celor două numere. Să se demonstreze că după $4n$-2 operaţii pe tablă rămâne un singur număr par.

Soluţie. La orice pas i, înainte de ştergerea a două numere x şi y, fie S_{i+1} suma numerelor de pe tablă şi S_i suma numerelor de pe tablă după ştergerea numerelor x şi y. Atunci avem:

$$S_{i+1} - S_i = x + y - |x - y| = \begin{cases} 2x, & \text{daca} \quad x < y \\ 2y, & \text{daca} \quad x \geq y \end{cases}$$

Deci $S_{i+1} - S_i$ este totdeauna un număr par. Suma:

$$1 + 2 + 3 + ... + 4n - 1 = \frac{(4n-1) \cdot 4n}{2} = (4n-1) \cdot 2n$$

este un număr par, rezultă că S_1 este tot un număr par. Dar S_1 este ultimul număr de pe tablă. Deci pe tablă a rămas un număr par.

R4.4. Se consideră numerele $3, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$. După un pas este permisă scrierea a noi trei numere, înlocuind fiecare din numerele date prin semisuma celorlalte două. Se poate efectua de câteva ori această operaţie, să se obţină tripletul $2, 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$?

Soluţie. În acest caz rămâne invariantă suma numerelor. Dacă x, y, z sunt numerele, atunci ele se înlocuiesc cu $\frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}, \frac{x+y}{2}$, ce au suma

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+z}{2} + \frac{y+z}{2} = \frac{2(x+y+z)}{2} = x + y + z$$

Suma numerelor iniţiale este $3 + 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 5$, iar suma numerelor finale este: $2 + 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 6$. Deci plecând de la numerele $3, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$ nu se poate ajunge la numerele $2, 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$.

R4.5. Considerăm numerele: 1, 2, 3,..., 2001. Alegem două numere x şi y din cele de mai sus şi le înlocuim cu $z = \frac{xy}{1+x+y}$. Repetăm procedeul cu alte două numere, ş.a.m.d. Demonstraţi că după 2000 de paşi se obţine întotdeauna acelaşi număr (indiferent de modul în care luăm perechile). Care este acest număr?

Soluţie. Din $z = \frac{xy}{1+x+y}$ obţinem $z + xz + yz = xy$, de unde avem $xyz + z + xz + yz = xyz + xy$, deci $yz(x+1) + z(x+1) = xy(z+1) \Leftrightarrow$

$(x+1)(yz+z)=xy(z+1) \Leftrightarrow z(x+1)(y+1)=xy(z+1)$, care se mai poate scrie $\frac{(x+1)(y+1)}{xy}=\frac{z+1}{z}$, deci $\frac{x+1}{x}\cdot\frac{y+1}{y}=1+\frac{1}{z}$ sau
$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{1}{z}$.

Dacă notăm cu $x_1, x_2, ..., x_n$ numerele existente la un moment dat, atunci expresia

$$E=\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)...\left(1+\frac{1}{x_n}\right)$$

este invariantă. Dacă $x$este ultimul număr, avem:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)...\left(1+\frac{1}{2001}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}...\frac{2002}{2001}=1+\frac{1}{x}$$

Deci $2002=1+\frac{1}{x}$, de unde $x=\frac{1}{2001}$.

R4.6. Pe o tablă sunt scrise numerele: 1, 2, 3,..., 1986, 1987. La fiecare pas se şterg câteva numere şi se scrie restul dat de suma numerelor şterse la împărțirea cu 7. La un moment dat, au rămas pe tablă două numere, unul dintre ele fiind 987. Care este acel număr?

Soluție. În acest caz invariantul este restul dat la împărțirea cu 7 de suma: 1+2+3+...+1986+1987=1987·7·142, adică zero.

Dacă x este numărul cerut, rezultă că x+987 se divide cu 7, de unde x se divide cu 7. Fiindcă 987 nu poate fi restul la împărțirea cu 7, atunci x trebuie să fie acest rest şi deci $x \le 6$. Pentru că x se divide cu 7, rezultă $x=0$.

5. Metoda reducerii la absurd

Metoda reducerii la absurd este o metodă specifică de demonstrație în matematică. La baza acestei metode stă una din legile fundamentale ale logicii clasice: legea terțului exclus, ce are următorul enunț:

Din două propoziții contradictorii una este adevărată, cealaltă falsă, iar a treia posibilitate nu există.

Legea terțului exclus nu ne precizează care din cele două propoziții este adevărată şi care este falsă.

Când la două propoziții contradictorii aplicăm legea terțului exclus este suficient să stabilim că una dintre ele este falsă pentru a deduce că cealaltă este adevărată.

Metoda reducerii la absurd constă în a admite în mod provizoriu, ca adevărată propoziția contradictorie propoziției de demonstrat, apoi pe baza acestei presupuneri se deduc o serie de consecințe care duc la un rezultat absurd, deoarece ele contrazic sau ipoteza problemei date sau un adevăr stabilit mai înainte. Mai departe raționăm astfel: dacă presupunerea ar fi fost adevărată, atunci în urma raționamentelor logic corecte ar fi trebuit să ajungem la o concluzie adevărată, deoarece am ajuns la o concluzie falsă, înseamnă că presupunerea noastră a fost falsă. Aceasta duce la concluzia că presupunerea făcută nu este posibilă şi rămâne ca adevărată concluzia propoziției date.

Metoda reducerii la absurd nu se reduce la propoziția că "a demonstra o propoziție este acelaşi lucru cu a demonstra contrara reciprocei ei", deoarece pot apărea şi situații în care nu se contrazice ipoteza ci o altă propoziție (un rezultat cunoscut, o axiomă, o teoremă). Metoda reducerii la absurd se foloseşte atât în rezolvarea problemelor de calcul (de aflat) cât şi la rezolvarea problemelor de "demonstrat". Metoda este des utilizată în demonstrarea teoremelor reciproce, precum şi în demonstrarea teoremelor de unicitate.

Probleme rezolvate

Vom prezenta câteva exerciții şi probleme rezolvate în care folosim metoda reducerii la absurd.

R5.1. Suma a 12 numere naturale nenule este 77. Arătați că printre ele se află cel puțin două numere egale.

Soluție. Presupunem că există 12 numere naturale nenule distincte ce au suma 77. Dacă le considerăm pe cele mai mici, suma lor este:

$$1+2+3+...+11+12=\frac{12\cdot 13}{2}=6\cdot 13=78$$

Cum suma celor mai mici 12 numere naturale nenule distincte este mai mare decât suma dată, 77, rezultă că presupunerea făcută este falsă. Deci printre numerele considerate există cel puțin două numere egale.

R5.2. Suma a trei numere naturale este 139. Demonstrați că cel puțin unul dintre ele este mai mare sau egal cu 47.

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd, presupunem concluzia falsă, adică nici unul dintre numere nu este mai mare sau egal cu 47. Fie *a,b,c* numerele. Deci *a*<47, *b*<47, *c*<47. Fiindcă *a,b,c* sunt numere naturale rezultă că $a \leq 46$, $b \leq 46$, $c \leq 46$. Ținând seama că $a+b+c=139$ obținem: $a+b+c \leq 138$ sau 139≤138, ceea ce este absurd. Atunci presupunerea făcută este falsă şi deci concluzia este adevărată, adică cel puțin unul dintre numere este mai mare sau egal cu 47.

R5.3. Să se arate că pentru orice număr natural diferit de zero fracția $\frac{2n-1}{2n+1}$ este ireductibilă.

Soluție. Presupunem că fracția dată nu este ireductibilă, atunci există un număr natural d diferit de unu astfel încât $d \mid (2n-1)$ şi $d \mid (2n+1)$, de unde $d \mid [(2n+1)-(2n-1)]$ adică $d \mid 2$. Fiindcă $d \neq 1$, rezultă *d*=2. Atunci rezultă că $2 \mid (2n-1)$ ceea ce este absurd. Deci presupunerea făcută este falsă, şi deci fracția este ireductibilă.

R5.4. Să se determine numărul elementelor mulțimii:

$$M=\left\{\frac{n+1}{2n+1}, n=1,2,3,...,2003\right\}$$

Soluție. Mulțimea are atâtea elemente câte valori distincte are fracția $\frac{n+1}{2n+1}$, *n*=1,2,...,2003. Presupunem prin absurd că există n_1 şi n_2, cu $n_1 \neq n_2$ pentru care fracția are aceeaşi valoare, adică:

$$\frac{n_1+1}{2n_1+1}=\frac{n_2+1}{2n_2+1} \Leftrightarrow (n_1+1)(2n_2+1)=(n_2+1)(2n_1+1) \Leftrightarrow$$

$$2n_1n_2+n_1+2n_2+1=2n_1n_2+n_2+2n_1+1 \Leftrightarrow n_1=n_2.$$

Am ajuns la o contradicție pentru că n_1 a fost presupus diferit de n_2. Deci mulțimea *M* are 2003 elemente.

R5.5. Ştiind că *x, y, z* sunt numere reale, să se arate că următoarele inegalități nu pot fi simultan adevărate:

$$x-2z>1$$
$$y-z \leq 1$$
$$2y-x \geq 1$$

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că toate inegalitățile sunt adevărate. Înmulțim a doua inegalitate cu –2 şi adunându-le obținem:

$$x-2z+2z-2y+2y-x>0,$$

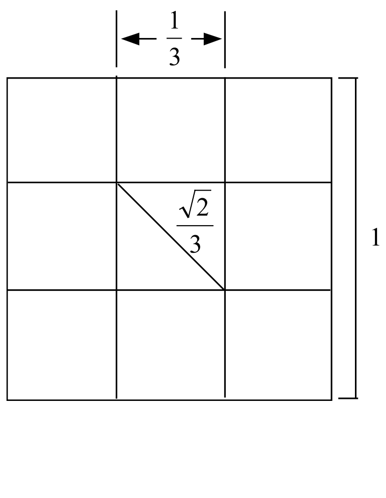
adică 0>0, ceea ce este absurd. Deci presupunerea făcută este falsă. Deci inegalitățile considerate nu pot fi simultan adevărate.

R5.6. Să se arate că numărul $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ este irațional.

Soluție. Aplicăm metoda reducerii la absurd. Presupunem că $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ este rațional; rezultă că există $x\in\mathbf{Q}$ astfel încât $\sqrt{3}+\sqrt{5}=x$, de unde obținem că $3+5+2\sqrt{15}=x^2$ sau $8+2\sqrt{15}=x^2$, de unde $\sqrt{15}=\frac{x^2-8}{2}\in\mathbf{Q}$, fals. Deci presupunerea făcută este falsă şi deci $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ este irațional.

R5.7. Se consideră un pătrat cu latura 1cm şi 10 puncte în interiorul său. Demonstrați că printre cele 10 puncte date există două puncte astfel încât distanța dintre ele să nu depăşească $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm.

Soluție. Cu metoda reducerii la absurd, presupunem că nu există astfel de 2 puncte cu distanța dintre ele să nu depăşească $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm. Împărțim pătratul în 9 pătrate mai mici cu latura $\frac{1}{3}$ cm. Diagonala unui astfel de pătrat va avea lungimea $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm calculată cu teorema lui Pitagora. Cele 10 puncte fiind situate în interiorul pătratului "mare" înseamnă că putem aşeza 2 puncte în două pătrate "mici" alăturate astfel încât distanța dintre ele să fie mai mare decât $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm. Pentru ca problema să fie rezolvată trebuie să existe atâtea pătrate "mici" câte puncte (zece). Am ajuns la o contradicție, rezultă că presupunerea făcută este falsă, rezultă că există 2 puncte la care distanța dintre ele nu depăşeşte $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm.



R5.8. Fie ΔABC şi punctele M, N, P diferite de vârfurile triunghiului cu $M\in BC$, $N\in AC$, $P\in AB$ astfel încât $\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1$, atunci punctele M, N, P sunt coliniare. (Reciproca teoremei lui Menelaus)

Soluţie. Folosim metoda reducerii la absurd, presupunem că punctele M, N, P nu sunt coliniare. Unind M cu P printr-o dreaptă ce taie pe AC într-un punct N' diferit de N şi conform teoremei directe a lui Menelaus avem:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{N'C}{N'A}\cdot\frac{PA}{PB}=1 \qquad (1)$$

Din ipoteză avem:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1 \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem $\frac{N'C}{N'A}=\frac{NC}{NA}$ şi deci $N'\equiv N$. Deci presupunerea că punctele M, N, P nu sunt coliniare este falsă. Deci are loc relaţia din ipoteză.

Reciproca teoremei lui Menelaus constituie una din principalele metode de demonstrare a coliniarităţii multor triplete de puncte.

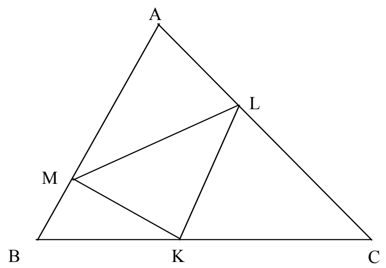
R5.9. Se consideră triunghiul ABC şi punctele K, M, L situate pe laturile (AB), (BC), (AC) şi diferite de vârfurile triunghiului. Să se demonstreze că cel puţin una din ariile triunghiurilor MAL, KBM, LCK nu depăşeşte un sfert din aria triunghiului ABC.

Soluţie. Avem relaţiile:

$$S_{[ABC]}=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2}, \quad S_{[AML]}=\frac{AM\cdot AL\cdot \sin A}{2}$$

Deci

$$\frac{S_{[AML]}}{S_{[ABC]}}=\frac{AM\cdot AL}{AB\cdot AC} \qquad (1)$$



Analog obţinem:

$$\frac{S_{[BMK]}}{S_{[ABC]}}=\frac{BM\cdot BK}{BA\cdot BC} \qquad (2)$$

şi

$$\frac{S_{[CLK]}}{S_{[ABC]}}=\frac{CL\cdot KC}{CA\cdot CB} \tag{3}$$

Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că

$$\frac{S_{[AML]}}{S_{[ABC]}}>\frac{1}{4},\quad \frac{S_{[BMK]}}{S_{[ABC]}}>\frac{1}{4},\quad \frac{S_{[CLK]}}{S_{[ABC]}}>\frac{1}{4}$$

Ținând seama de relațiile (1), (2), (3), obținem

$$\frac{AM\cdot AL}{AB\cdot AC}\cdot\frac{BM\cdot BK}{BA\cdot BC}\cdot\frac{CL\cdot KC}{CA\cdot CB}>\frac{1}{64}$$

sau

$$\frac{AL\cdot CL}{AC\cdot AC}\cdot\frac{BM\cdot AM}{AB\cdot AB}\cdot\frac{BK\cdot CK}{BC\cdot BC}>\frac{1}{64} \tag{4}$$

Cu inegalitatea dintre media aritmetică şi geometrică avem:

$$\sqrt{AL\cdot CL}\le\frac{AL+CL}{2}=\frac{AC}{2},\quad \text{deci}\quad \frac{AL\cdot CL}{AC\cdot AC}\le\frac{1}{4}$$

şi analog $\frac{AM\cdot BM}{AB\cdot AB}\le\frac{1}{4}$, $\frac{BK\cdot CK}{BC\cdot BC}\le\frac{1}{4}$.

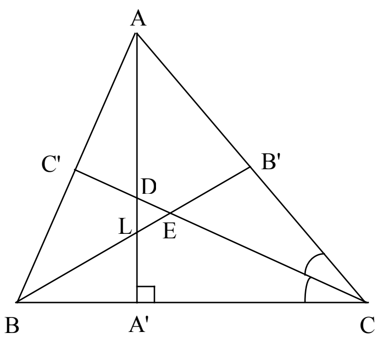
Înmulțind membru cu membru aceste ultime trei inegalități obținem:

$$\frac{AL\cdot CL}{AC\cdot AC}\cdot\frac{AM\cdot BM}{AB\cdot AB}\cdot\frac{BK\cdot CK}{BC\cdot BC}\le\frac{1}{64} \tag{5}$$

Din (4) şi (5) rezultă că presupunerea făcută este falsă, adică găsim un triunghi cu aria ce nu depăşeşte $\frac{S_{[ABC]}}{4}$.

R5.10. Într-un triunghi ascuțitunghic neechilateral, printr-un vârf este dusă înălțimea, prin altul mediana, iar prin cel de-al treilea bisectoarea. Arătați că aceste linii nu pot forma prin intersecție un triunghi echilateral.

Demonstrație. Considerăm triunghiul ABC cu înălțimea AA', mediana BB' şi bisectoarea CC'.



Aplicăm metoda reducerii la absurd. Presupunem că triunghiul DEL este echilateral. Din triunghiul dreptunghic CDA' obținem:

$$m(\angle DCA')=90°-60°=30°$$

Deci $m(\angle C)=60°$ şi atunci $m(\angle B'CE)=30°$. Dar $\angle DEL \equiv \angle B'EC$ (opuse la vârf), atunci $m(\angle B'EC)=60°$. În triunghiul B'EC avem

$$m(\angle EB'C)=180°-(30°+60°)=90°$$

Fiindcă BB' este mediană rezultă că $(BA)\equiv(BC)$. Dar $m(\angle C)=60°$ şi atunci rezultă că triunghiul ABC este echilateral. dar din ipoteză triunghiul ABC nu este echilateral. Atunci presupunerea făcută (că triunghiul DEL este echilateral) este falsă şi deci triunghiul DEL nu este echilateral.

6. Probleme de numărare

Multe probleme din viața cotidiană cer numărarea elementelor unor mulțimi finite, ale părților unei mulțimi, etc. şi de aici importanța aprofundării operației de numărare prin probleme care conduc la numărarea elementelor unor mulțimi diverse. Domeniul matematicii în care se studiază astfel de probleme se numeşte combinatorică. Pentru a aborda diverse probleme de numărare un rol important îl joacă noțiunea de partea întreagă, numărul divizorilor naturali ai unui număr natural, forma canonică a unui număr natural *n* (descompunerea în mod unic în produs de factori primi), etc.

1) Prin partea întreagă a unui număr *x* înțelegem cel mai mare număr întreg care nu îl depăşeşte pe *x* şi se notează [*x*].

Avem $x-1<[x]\le x$.

Folosim partea întreagă, de exemplu când numărăm multiplii unui număr natural *p* cuprins în mulțimea: $\{1,2,3,...,n\}$.

2) Orice număr natural *n*, diferit de zero, se descompune în mod unic într-un produs de factori primi:

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}, \qquad (1)$$

unde $p_1,p_2,...,p_k$ sunt numere prime, iar $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ sunt numere nenule. Relația (1) se numeşte forma canonică a lui *n*.

Numărul divizorilor naturali ai lui *n* este: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$.

Vom prezenta în continuare câteva probleme de aritmetică, teoria numerelor, geometrie, care se încadrează la această problematică.

R6.1. Care este exponentul lui 3 în descompunerea în factori primi a numărului 100! (100!=1·2·3·...·100).

Soluție. Dintre numerele 1,2,3,4,...,100 fiecare al treilea este divizibil cu 3. Fiindcă 100=3·33+1, rezultă că de la 1 la 100 sunt 33 de numere divizibile cu 3. Dintre aceste 33 de numere fiecare al treilea este divizibil cel puțin cu puterea a 2-a a lui 3. Fiindcă 33:3=11, rezultă că sunt 11 numere divizibile cu 3^2. Dintre cele 11 fiecare al 3-lea este divizibil cu 3^3. Fiindcă 11=3·3+1, rezultă că sunt 3 astfel de numere. Dintre aceste 3 numere unul este divizibil cu 3^4. Nu există nici un număr dintre primele 100, divizibil cu 3^5 pentru că $3^5>100$. Atunci exponentul lui 3 din descompunerea în produs de factori primi a numărului 100! este: 33+11+3+1=48.

Fiindcă la împărțirile efectuate am reținut numai câturile, acestea reprezintă de fapt părțile întregi ale numerelor: $\frac{100}{3},\frac{100}{3^2},\frac{100}{3^3},\frac{100}{3^4}$. Deci exponentul lui 3 din descompunerea în factori primi a numărului 100! este:

$$\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{3^2}\right]+\left[\frac{100}{3^3}\right]+\left[\frac{100}{3^4}\right]=33+11+3+1=48.$$

Cu acelaşi raționament se arată că exponentul numărului prim *p* din descompunerea în factori primi a lui $n!$ ($n!=1\cdot2\cdot3...n$) este:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

R6.2. Se consideră într-un plan 5 puncte, oricare trei necoliniare.

a) Câte drepte determină aceste puncte?

b) Câte triunghiuri determină aceste puncte?

c) Dacă avem n puncte (oricare trei necoliniare), câte drepte şi câte triunghiuri determină?

Soluție. a) Fie A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 punctele din ipoteză. Punctul A_1 determină cu celelalte 4 puncte un număr de 4 drepte. Din cele 5 puncte pleacă $4\cdot5=20$ semidrepte. Fiecare dreaptă a fost numărată de două ori (de exemplu A_1A_2 şi A_2A_1). Atunci numărul dreptelor care trec prin cele 5 puncte este 20:2=10.

În general, dacă avem n puncte ($n\geq3$) şi oricare trei sunt necoliniare atunci ele determină $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte.

Fie punctele $A_1,A_2,...,A_n$. Fixând punctul A_i, acesta va determina cu celelalte puncte n-1 drepte. Având n puncte, din ele pleacă $n(n$-1) semidrepte. Fiecare dreaptă este numărată de două ori: A_iA_k şi A_kA_i. Atunci n puncte (oricare trei necoliniare) determină $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte.

b)-c) Pentru numărul de triunghiuri considerăm cazul când avem n puncte (oricare trei necoliniare). Fixăm un vârf A_i de exemplu, fapt ce poate fi realizat în n moduri. Fixăm al doilea vârf A_j, realizabil în n-1 moduri (după prima fixare). Fixăm al 3-lea vârf A_k, realizabil în n-2 moduri. Ținând seama cum au fost alese vârfurile, obținem $n(n-1)(n-2)$ variante. Fiecare triunghi $A_iA_jA_k$ a fost numărat de 6 ori: $A_iA_jA_k$, $A_iA_kA_j$, $A_jA_iA_k$, $A_jA_kA_i$, $A_kA_jA_i$, $A_kA_iA_j$. Atunci numărul de triunghiuri determinat de n puncte (oricare trei necoliniare) este $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

R6.3. Determinați numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi ($n\geq4$).

Soluție. Din fiecare vârf pleacă n-3 diagonale pentru că un vârf şi cu două adiacente nu determină diagonale. Fiind n vârfuri avem $n(n$-3) segmente. Dar fiecare diagonală a fost numărată de două ori, deci numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi este $\frac{n(n-3)}{2}$.

Altfel. Dacă avem n puncte distincte (oricare trei necoliniare), ele determină $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte. Pentru a afla numărul diagonalelor trebuie să scădem numărul laturilor. Obținem:

$$\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n^2-n-2n}{2}=\frac{n^2-3n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}.$$

R6.4. Să se determine numărul minim de monede de 1, 3, 5 euro de care avem nevoie pentru a plăti orice sumă întreagă cuprinsă între 1 şi $5n$ euro.

Soluţie. i) Pentru a plăti orice sumă întreagă cuprinsă între 1 şi $5n$ euro avem nevoie de cel puţin $n+2$ monede: pentru a plăti sumele de 2 euro şi $5n$ euro avem nevoie de două monede de un euro şi încă cel puţin n monede.

ii) Pentru a plăti toate sumele întregi între 1 euro şi $5n$ euro sunt suficiente $n+2$ monede: două monede de 1 euro, o monedă de trei euro şi $n-1$ monede de 5 euro.

Orice număr natural cuprins între 1 şi $5n$ inclusiv are una din formele $5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4, 5k+5$ unde $0 \le k \le n-1$.

Sumele de forma $5k+1$ pot fi plătite cu k din cele $n-1$ monede de 5 euro $(n-1 \ge k)$ şi una dintre monedele de 1 euro. Sumele de forma $5k+2$ pot fi plătite cu k monede 5 euro şi monedele de 1 euro. Sumele de forma $5k+3$ şi $5k+4$ le putem plăti cu orice monede de 5 euro şi moneda de 3 euro respectiv k monede de 5 euro o monedă de 3 euro şi una de 1 euro. Sumele de forma $5k+5$ $(n-1 \ge k)$ pot fi plătite cu k monede de 5 euro şi cu monede de 1 şi 3 euro. Deci numărul minim cerut este $n+2$.

6.2. Principiul cutiei sau principiul lui Dirichlet

Sunt multe probleme de matematică cu enunţuri inedite ce pot fi abordate cu mijloace ale gândirii cotidiene, fără a fi nevoie de metode rafinate. Un exemplu elocvent este principiul cutiei sau principiul lui Dirichlet. Ceea ce caracterizează problemele în care acest principiu se foloseşte este dificultatea de a le aborda pe căi cunoscute. Într-o formulare fără pretenţii acest principiu revine la observaţia că dacă avem două cutii în care trebuie puse trei obiecte, într-una din ele va trebui să aşezăm cel puţin două obiecte. Mai general, dacă repartizăm un număr mai mare de n obiecte în n clase, atunci cel puţin într-o clasă vor fi cel puţin două obiecte. Deci avem

Teorema 6.2.1. Considerăm o mulţime nevidă A şi $A_1, A_2, ..., A_n$ o partiţie a mulţimii A (adică $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = A$ şi $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru $i \ne j$. Dacă avem $n+1$ elemente din A: $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ atunci există o submulţime A_i a partiţiei care să conţină cel puţin două elemente ale mulţimii $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$.

În general principiul cutiei este un principiu de numărare. În ultimul timp acest principiu a căpătat o mare popularitate, fiind pus la baza unui mare număr de probleme, dintre care unele deosebit de dificile. Vom prezenta câteva exemple în care se foloseşte acest principiu în aritmetică, geometrie.

R6.2.1. Considerăm mulţimea $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ cu elementele numere întregi. Să se demonstreze că A are cel puţin o parte nevidă cu proprietatea că suma elementelor sale se divide cu n.

Soluţie. Dacă a este număr întreg şi n număr natural, există numerele q şi r unice astfel încât $a = n \cdot q + r$ cu $q \in \mathbf{Z}$ şi $r \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$. Vom aplica principiul cutiei. Considerăm următoarele *n* submulțimi ale lui *A*: $A_1 = \{a_1\}$, $A_2 = \{a_1, a_2\}$, $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$,..., $A_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Dacă notăm cu S_i cu $i = \overline{1,n}$ suma elementelor fiecărei mulțimi avem: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$,..., $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

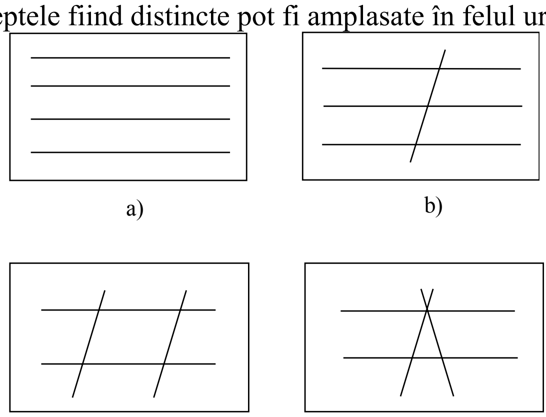
Dacă unul din numerele S_i cu $i = \overline{1,n}$ se divide cu *n* problema este rezolvată. Dacă nu, cele *n* resturi obținute prin împărțirea cu *n* a numerelor S_i aparțin mulțimii {1,2,3,...,*n*-1} ce are *n*-1 elemente diferite. Deci există cu siguranță două numere S_i și S_j care dau același rest la împărțirea cu *n*. Fie $S_i = a_1 + a_2 + ... + a_i$ și $S_j = a_1 + a_2 + ... + a_j$ cele două numere. Fie $i < j$. Fiindcă *n* divide pe $S_j - S_i$ rezultă că submulțimea căutată este $B = \{a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_j\}$.

R6.2.2. Să se arate că oricum am alege cinci numere întregi, există două dintre acestea, care au suma sau diferența divizibile cu 7.

Soluție. La împărțirea cu 7 a unui număr se obține unul din resturile 0,1,2,3,4,5,6. Pătratul său va da la împărțirea cu 7 unul din resturile 0,1,2,4. Deoarece avem cinci numere *a,b,c,d,e,* cele cinci pătrate ale lor nu pot da la împărțirea cu 7 decât unul din cele patru resturi: 0,1,2,4. Conform principiului cutiei cel puțin două din aceste cinci pătrate dau la împărțirea cu 7 același rest. Deci există $x, y \in \{a, b, c, d, e\}$ astfel încât $x^2 - y^2$ se divide cu 7. Deci 7 divide pe $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, dar fiind și prim rezultă că 7 divide pe $x + y$ sau 7 divide pe $x - y$.

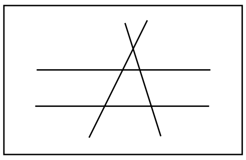
R6.2.3. Patru drepte distincte situate într-un plan, îl împart în mai multe regiuni distincte. Să se arate că oricum s-ar așeza 12 puncte în acest plan astfel încât nici unul să nu aparțină dreptelor date, cel puțin două dintre ele se află în aceeași regiune.

Soluție. Dreptele fiind distincte pot fi amplasate în felul următor:

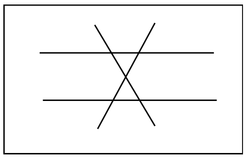


a) b)

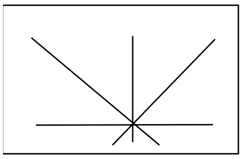
c) d)



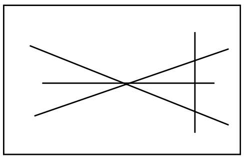
e)



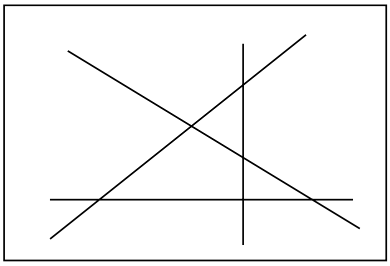
f)



g)



h)



i)

Numărul maxim de regiuni este 11 şi se obține în cazul i). Regiunile în care a fost împărțit planul vor fi "căsuțele" din principiul cutiei. Dacă am aşeza câte un punct în fiecare regiune am avea nevoie de 11 puncte. Având însă 12 puncte, rezultă că în cel puțin o regiune vor fi două puncte.

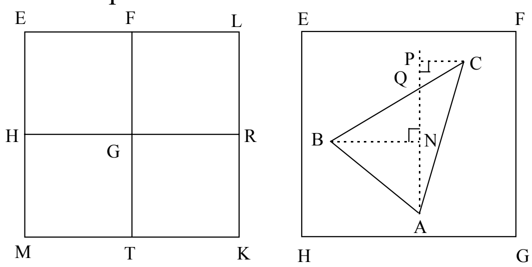
R6.2.4. Considerăm nouă puncte într-un pătrat cu latura de lungime 1. Să se demonstreze că există un triunghi cu vârfurile în trei din cele nouă puncte a cărui arie să fie cel mult egală cu $\frac{1}{8}$.

Soluție. Unind două câte două mijloacele laturilor opuse în pătratul dat, obținem o împărțire a acestuia în patru pătrate de arie $\frac{1}{4}$. Oricum am plasa cele nouă puncte, întotdeauna trei se vor afla în interiorul sau pe laturile aceluiaşi pătrat. Fie A, B, C cele trei puncte situate în pătratul EFGH. Să arătăm că aria triunghiului ABC este mai mică sau egală cu $\frac{1}{8}$. Ducem prin A, B, C paralele la EH. Una dintre acestea se va afla între celelalte două, deci va intersecta latura opusă vârfului prin care trece. Fie AQ această paralelă la EH, $Q\in[BC]$. Ducem $BN\perp AQ$ şi $CP\perp AQ$ ($N,P\in AQ$). Atunci avem:

$$S_{[ABC]} = S_{[ABQ]} + S_{[ACQ]} = \frac{AQ\cdot BN}{2} + \frac{AQ\cdot CP}{2} = \frac{AQ}{2}(BN + CP) \le$$

$$\leq \frac{1}{2} EH \cdot HG = \frac{1}{2} S_{[EHGF]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Deci $S_{[ABC]} \leq \frac{1}{8}$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\mathrm{AQ(BN + CP) = EH \cdot HG}$, deci NQ=HF şi BN+CP=HG. Deci egalitatea se obține când o latură a triunghiului coincide cu o latură a pătratului şi celălalt vârf al triunghiului se află pe latura opusă.



R6.2.5. Considerăm 17 drepte care împart un pătrat în două patrulatere care au raportul ariilor $\frac{1}{6}$. Să se arate că cel puțin 5 dintre aceste drepte trec prin acelaşi punct.

Soluție. Fiecare din cele 17 drepte nu poate tăia două laturi consecutive ale pătratului, deoarece atunci pătratul ar fi împărțit într-un triunghi şi un pentagon. Deci fiecare dreaptă împarte pătratul în două trapeze dreptunghice care au aceeaşi înălțime. Fie a una din aceste drepte care taie laturile AB şi CD în punctele T şi R. Dacă L şi K sunt mijloacele laturilor AD respectiv BC, iar E_1 este punctul de intersecție al dreptelor Q şi TR, avem:

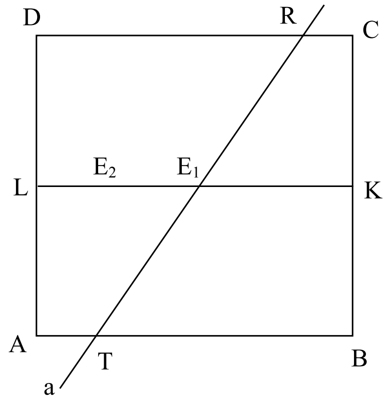
$$\frac{\mathrm{S_{[BTRC]}}}{\mathrm{S_{[ATRD]}}} = \frac{\frac{\mathrm{(TB+RC) \cdot BC}}{2}}{\frac{\mathrm{(AT+DR) \cdot AD}}{2}} = \frac{\mathrm{KE_1}}{\mathrm{E_1L}} = \frac{1}{6}$$

Am ținut seama că trapezele au înălțimile egale şi liniile mijlocii au lungimile: $\mathrm{E_1K} = \frac{\mathrm{TB+RC}}{2}$, $\mathrm{LE_1} = \frac{\mathrm{AT+DR}}{2}$.

Pe dreapta LK există două puncte care împart segmentul LK în raportul $\frac{1}{6}$. Fie al doilea punct E_2. Atunci avem:

$$\frac{\mathrm{KE_1}}{\mathrm{E_1L}} = \frac{\mathrm{E_2K}}{\mathrm{E_2L}} = \frac{1}{6}.$$

Fiindcă într-un pătrat există numai două segmente care unesc mijloacele laturilor opuse rezultă că în interiorul pătratului există exact patru puncte: E_1, E_2, E_3, E_4 care împart liniile mijlocii ale pătratului în raportul $\frac{1}{6}$. deci oricare din cele 17 drepte trece prin unul din punctele E_1,E_2,E_3,E_4. Fiindcă avem 17 drepte care trec prin patru puncte, conform principiului "cutiei" cel puţin 5 drepte trec prin acelaşi punct.

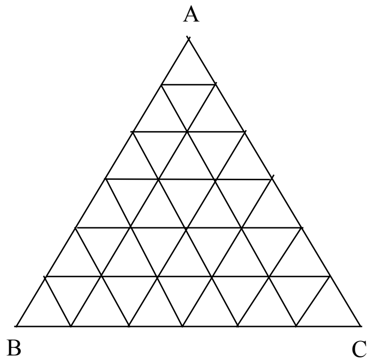


R6.2.6. Să se arate că oricum am aşeza 37 puncte în interiorul unui triunghi echilateral cu latura de lungime 1, există cel puţin două puncte astfel încât distanţa dintre ele să nu depăşească 0,1(6).

Soluţie. Împărţim fiecare latură a triunghiului în 6 segmente cu lungimea $\frac{1}{6}$. Prin punctele de diviziune ducem paralele la laturile triunghiului şi obţinem $1+3+5+7+9+11=36=6^2$ triunghiuri echilaterale cu latura de lungime $\frac{1}{6}$. Considerând 37 puncte în triunghiul iniţial, cel puţin două dintre acestea se vor afla în interiorul (sau pe laturi) unui triunghi cu latura $\frac{1}{6}=0{,}1(6)$, şi deci distanţa dintre acestea va fi cel mult $\frac{1}{6}$.

R6.2.7. Să se arate că, oricum am aşeza n^2+1 puncte în interiorul unui triunghi echilateral cu latura de lungime 1, există cel puţin două puncte astfel încât distanţa dintre ele să nu depăşească $\frac{1}{n}$.

Soluţie. Împărţim fiecare latură a triunghiului în n segmente cu lungimea $\frac{1}{n}$. Ducând paralele la laturile triunghiului prin punctele de diviziune, triunghiul se descompune în $1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$ triunghiuri echilaterale cu latura de lungime $\frac{1}{n}$. Căsuţele din principiul cutiei sunt acum cele n^2 triunghiuri echilaterale. Considerând n^2+1 puncte în interiorul triunghiului iniţial evident cel puţin două dintre acestea se vor afla în interiorul unui triunghi (sau pe laturi) cu latura de lungime $\frac{1}{n}$ şi distanța dintre acestea va fi cel mult $\frac{1}{n}$.



7. Ecuații în Z. Ecuații diofantice

7. 1 Considerații teoretice

Ecuațiile în Z pot fi cu coeficienți în Z, sau cu coeficienți într-o altă mulțime, dar în ambele cazuri se cer soluții în Z. Restricția impusă de soluții în Z conduce la discuția ecuației pe cazuri în funcție de coeficienți. Cea mai cunoscută ecuație în care necunoscutele nu sunt liniare este cea pitagorică, adică: $x^2+y^2=z^2$. Ecuația a fost studiată de Pitagora în legătură cu triunghiurile dreptunghice cu laturi numere naturale. Pentru ecuația dată, dacă tripletul (x_0, y_0, z_0) este soluție a ecuației atunci (kx_0, ky_0, kz_0) cu $k\in Z$ este de asemenea soluție, deci este suficient să determinăm triplete în care elementele componente sunt prime între ele, în acest sens dăm următoarea:

Teorema 7. 1. 1. Orice soluție (x, y, z) a ecuației $x^2+y^2=z^2$ cu componente prime între ele este de forma :$x=m^2-n^2;y=2mn;z=m^2+n^2$, cu (m, n)=1;m>n.

Demonstrație:$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$ deci este soluție.

Să arătăm că(x, y, z)=1. Numerele x, y nu pot fi ambele impare, deoarece dacă sunt impare atunci:$x^2+y^2=4k+2$ iar z par $\Rightarrow$ $z^2=4p$(contradicție), ca atare exact unul din numerele x, y este par. Dacă d=(x, y, z) şi d $\geq 2 \Rightarrow d|(m^2+n^2)+(m^2-n^2) \Rightarrow d|2m^2$ şi $d|2n^2$ şi cum (m, n)=1 $\Rightarrow d|2 \Rightarrow m^2+n^2$ par, dar m, n sunt de parități diferite, deci d=1.

Reciproc, dacă (x, y, z)=1 şi este soluție, $y=2a \Rightarrow$ x, z sunt impare $\Rightarrow$ z+x, z-x sunt pare, atunci:z+x=2b;z-x=2c. Avem (b, c)=1 deoarece (z, x)=1. Mai avem : $4a^2=y^2=z^2-x^2=(z-x)(z+x)=4bc \Rightarrow a^2=bc$ şi $b=m^2$, $c=n^2$ deoarece (b, c)=1.

Obținem:$x=b-c=m^2-n^2$

$z=b+c=m^2+n^2$

$y=2mn$

care este o soluție cu componentele prime între ele.

Definitie 7. 1. 2. O ecuație de forma $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = b$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b sunt întregi fixați se numeşte ecuație diofantică liniară.

În mod obişnuit se cere rezolvarea acestei ecuații în Z. Vom studia această ecuație pentru două necunoscute, şi avem:

Teorema 7. 1. 3. Ecuația ax+by=c are soluții în Z, dacă şi numai dacă (a, b)|c

Demonstrație: Fie $d=(a, b) \Rightarrow a=da_1$; $b=db_1$ cu $(a_1, b_1)=1$ şi avem: $da_1x+db_1y=c \Rightarrow d(a_1x+b_1y)=c \Rightarrow d|c$ (c=dc')

Dacă d=(a, b) atunci $(\exists)$ $x_1, x_2 \in Z$ pentru care : $ax_1 +bx_2 =d$ (algoritmul lui Euclid) şi înmulțind cu c' avem $a(x_1 c')+b(x_2 c')=dc' \Rightarrow aX_1 +bX_2 =c$, deci are soluție.

Obs. 1. 1. Dacă (x_0 , y_0) este o soluție particulară atunci toate soluțiile sunt date de :

$x_1 = x_0 +a_2 t = x_0 + bt$

$x_2 = y_0 -a_1t = y_0 - at$

Probleme rezolvate

R7. 2. 1. Rezolvați în Z×Z×Z ecuația : 3x+4y+5z=6.

Soluție : 3x+4y=5k+1, are soluția de forma :

$x = -1+3k$
$y = 1-k$
deoarece : $3x+4y= -3+9k+4-4k=5k+1$. Din aceasta avem : $5z=6-(5k+1)=5-5k \Rightarrow z=1-k$
Aceasta este o soluție particulară. Avem însă:
$x = -1+3k+4t$
$y = 1-k-3t$ şi $z = 1-k$, unde $k, t \in Z$.

R7. 2. 2. Rezolvați în numere naturale ecuația:
$1/x+1/y+1/z=2/3$.
Soluție: Din simetrie putem presupune : $2 \le x \le y \le z \Rightarrow 1/x+1/y+1/z \le 3/x \Rightarrow$
$3/x \ge 2/3 \Rightarrow 2x \le 9 \Rightarrow x \le 4$ deci $x \in \{ 2, 3, 4 \}$
Pentru $x=4 \Rightarrow 1/y+1/z = 2/3 - 1/4 \Rightarrow 1/y+1/z=5/12 \Rightarrow 1/y+1/z \le 2/y \Rightarrow 5/12 \le 2/y$ deci $5y \le 24 \Rightarrow y \le 4$
Dacă $y=4 \Rightarrow 1/z=5/12 - ¼=2/12=1/6 \Rightarrow z=6$, şi tripletul (4, 4, 6) este soluție.
Dacă $y=3 \Rightarrow 1/3+1/z = 5/12 \Rightarrow 1/z = 5/12-1/3=1/12 \Rightarrow z=12$ şi tripletul (4, 3, 12) este soluție.
Dacă $y=2 \Rightarrow ½+1/z=5/12 \Rightarrow 1/z = -1/12$ (fals).
Pentru $x=3 \Rightarrow 1/y+1/z = 2/3-1/3=1/3 \Rightarrow 1/3 \le 2/y \Rightarrow y \le 6$.
Dacă $y=6 \Rightarrow z=6$, tripletul (3, 6, 6) este soluție.
Dacă $y=5 \Rightarrow 1/z= 1/3-1/5=2/15 \Rightarrow z \notin Z$.
Dacă $y=4 \Rightarrow 1/z= 1/3-1/4=1/12 \Rightarrow z=12$ şi tripletul (3, 4, 12) este soluție
Dacă $y=3 \Rightarrow 1/z= 1/3-1/3=0$ (imposibil) şi de asemenea pentru $y=2$ nu avem soluție.
Pentru $x=2 \Rightarrow 1/y+1/z=2/3-1/2 = 1/6$, din care putem avea :
$y=z=12$ şi tripletul (2, 12, 12) soluție
$y=10, z=15$ şi tripletul (2, 10, 15) soluție
$y=9, z=18$ şi tripletul (2, 9, 18) soluție
$y=8, z=24$ şi tripletul (2, 8, 24) soluție
$y=7, z=42$ şi tripletul (2, 7, 42) soluție.
Pentru $y \le 6$ nu avem soluție. Avem în total 9 triplete în soluție.

R7. 2. 3. Determinați numerele prime p, q pentru care :
$5p^2 - 2q^2 =6q-9p$.

Soluție: Relația dată conduce la : $5p^2 +9p = 6q + 2q^2 \Leftrightarrow p(5p+9) = q(2q+6) \Rightarrow p=q$ sau $q|5p+9$. Pentru $p=q$ avem : $3p^2 = -3p \Rightarrow p= -1$ (imposibil), rămâne că : $5p+9=qn \Rightarrow pqn=q(2q+6) \Rightarrow 2q+6 = np$ şi $q= (np-6)/2 \Rightarrow 5p+9 = (np-6)n/2 \Rightarrow (n^2 -10)p = 6n+18 \Rightarrow 6n+18 \ge n^2 -10$ $(p\ge2) \Rightarrow n (n-3) \le 19 \Rightarrow n \le 6$ şi $(6n+18)/(n^2 -10) \in N \Rightarrow n=4$ şi $p=7$ de unde $q=11$, care este soluția.

8. Modulul unui număr real. Ecuații cu module

Pentru definirea noțiunii de modul a unui număr real (sau valoarea absolută a unui număr real) vom da o exprimare algebrică. Modulul folosindu-se adesea în stabilirea distanței dintre două puncte situate pe o dreaptă, vom da o exprimare geometrică a noțiunii de modul.

8.1. Definiția modulului unui număr real

Definiția 1. Modulul unui număr pozitiv este egal cu acel număr.
Definiția 2. Modulul unui număr negativ este egal cu opusul lui.
Definiția 3. Modulul lui zero este egal cu zero.

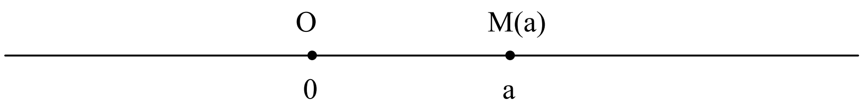
Putem scrie:

$$(\forall)\ x\in R,\ |x| = \begin{cases} x, \text{dacă } x > 0 \\ 0, \text{dacă } x = 0 \\ -x, \text{dacă } x < 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x| = \begin{cases} x, \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Dacă notăm cu E(x) o expresie algebrică care conține pe x (şi ne propunem să o studiem în raport cu variabila x) atunci:

$$|E(x)| = \begin{cases} E(x), \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}$$

Considerăm punctele M(a), punctul M de abscisă a, situat pe axa numerelor reale:



Definiția 4. Distanța, măsurată pe axa numerelor reale, de la origine la punctul M(a) se numeşte modulul numărului real a.

Deci: $d(O,M) = OM = |a|$, $a\in R$

Considerăm punctele $A(x_1)$ şi $B(x_2)$ pe axa numerelor reale:

Distanța dintre aceste două puncte se exprimă astfel:

$d(A,B) = AB = |x_1 - x_2|$

8.2. Proprietățile modulului unui număr real

1. $(\forall)\ x\in R,\ |x| \geq 0.$
2. $(\forall)\ x,y \in R,\ |x\cdot y| = |x|\cdot|y|.$
   Această proprietate o putem generaliza:
   $(\forall)\ x_1, x_2, \dots, x_n\in R,\ |x_1, x_2, \dots, x_n| = |x_1|\cdot|x_2|\cdot\dots\cdot|x_n|$
   Consecințe:
   $(\forall)\ x\in R,\ |-x| = |x|,$
   $(\forall)\ x\in R,\ |x|^2 = x^2.$
3. $(\forall)\ x,y\in R,\ y\neq 0,\ \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
4. $(\forall)\ x,y\in R,\ |x+y| \leq |x| + |y|$
   Această proprietate o putem generaliza:
   $(\forall)\ x_1,x_2,\dots,x_n\in R:\ |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$
5. Dacă $x\in R$ și $a>0$: $|x| = a \Leftrightarrow x = -a$ sau $x = a$
6. Dacă $x\in R$, $a>0$: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
7. Dacă $x\in R$, $a>0$: $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ sau $x > a$

Probleme rezolvate

R8.1.1. Să se calculeze:

a) $$\frac{\left|2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^{100} - 4^{2526}\right| - 16^{1263} + 2^{5049}}{2^{5049}}$$

b) $$\left\{\left|2^{2997} - 3^{1998}\right| - \left|3^{1998} - 5^{1332}\right| - \left(-5^{111}\right)^{12}\right\} : \left(-2^{599}\right)^5$$

[C.M.2001]

Soluție.

a) $\frac{\left|2^{5050}-2^{5052}\right|-2^{5052}+2^{5049}}{2^{5049}}=\frac{2^{5052}-2^{5050}-2^{5052}+2^{5049}}{2^{5049}}=$

$=\frac{2^{5049}(-2+1)}{2^{5049}}=-1$

b) $\left|2^{1997}-3^{1998}\right|=\left|8^{999}-9^{999}\right|=9^{999}-8^{999}=3^{1998}-2^{2997}$,

$\left|3^{1998}-5^{1332}\right|=\left|729^{333}-625^{333}\right|=729^{333}-625^{333}=3^{1998}-5^{1332}$

Înlocuind în expresia dată, obținem:

$\left(3^{1998}-2^{1997}-3^{1998}+5^{1332}-5^{1332}\right):\left(-2^{2995}\right)=\left(-2^{2997}\right):\left(-2^{2995}\right)=4$

R8.1.2. Să se determine numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_{1997}$ astfel încât $x_1+x_2+\ldots+x_{1997}=1997$ şi

$\left|x_1-x_2\right|=\left|x_2-x_3\right|=\ldots=\left|x_{1996}-x_{1997}\right|=\left|x_{1997}-x_1\right|$

[C.M 1997]

Soluție.

Notăm $\left|x_1-x_2\right|=k$, atunci

$x_1-x_2=k,\ x_2-x_3=k,\ \ldots,\ x_{1996}-x_{1997}=k,\ x_{1997}-x_1=k$;

sau

$x_1-x_2=-k,\ x_2-x_3=-k,\ \ldots,\ x_{1996}-x_{1997}=-k,\ x_{1997}-x_1=-k$.

Adunăm egalitățile şi obținem: $0=k$ sau $0=-k$, deci

$\left|x_1-x_2\right|=\left|x_2-x_3\right|=\ldots=\left|x_{1996}-x_{1997}\right|=0\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow x1=x2=\ldots=x1997\\ \text{dar } x_1+x_2+\ldots+x_{1997}=x_{1997}\end{array}\right\}\Rightarrow x_1=x_2=..=x_{1997}=1$$

R8.1.3. Fie $x,y,z\in R$, $x+y+z=4$. Arătați că:

a) $|x-1|+|y-2|+|z-3|\geq 2$,

b) $|x-1|+\frac{|y|+|y-2|}{2}\geq 1$

[C.M 2001]

Soluție.

a) Vom folosi inegalitatea $|a+b+c|\leq|a|+|b|+|c|,\ (\forall)a,b,c\in R$

$$|x-1|+|y-2|+|z-3| \geq |x-1+y-2+z-3| = |x+y+z-6| =$$
$$= |4-6| = 2 \Rightarrow |x-1|+|y-2|+|z-3| \geq 2$$

b) $|x-1|+\dfrac{|y|+|y-2|}{2} \geq 1 \Leftrightarrow 2|x+1|+|y|+|y-2| \geq 2$

Demonstrăm că această inegalitate este adevărată folosindu-ne de punctul a).

$$2|x+1|+|y|+|y-2| = |x-1|+|y-2|+|x-1|+|y| \geq |x-1|+|y-2|+|x+y-1| =$$
$$= |x-1|+|y-2|+|z-3| \geq 2$$

R8.1.4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\sqrt{x^2-2\left(\sqrt{2}x-1\right)}+\left|x^2-2\right| = 0,$

b) $\left|\dfrac{2x-3}{x+1}\right|-|2x-3| = 0,$

c) $\left||3x-1|+2\right| = 4.$

Soluție.

a) Amintim egalitatea $\sqrt{a^2} = |a|$, $(\forall)a \in R$

Atunci $\sqrt{x^2-2\left(\sqrt{2}x-1\right)} = \sqrt{x^2-2\sqrt{2}x+2} = \sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2} = |x-2|$

Ecuația devine

$$\left|x-\sqrt{2}\right|+\left|x^2-2\right| = 0 \Leftrightarrow \left|x-\sqrt{2}\right|+\left|\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\right| = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|x-\sqrt{2}\right|+\left|x-\sqrt{2}\right|\cdot\left|x+\sqrt{2}\right| = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|x-\sqrt{2}\right|\left(1+\left|x+\sqrt{2}\right|\right) = 0 \Rightarrow \left|x-\sqrt{2}\right| = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2},\ S = \left\{\sqrt{2}\right\}$$

b) $\dfrac{|2x-3|}{|x+1|}-|2x-3| = 0 \Leftrightarrow |2x-3|\left(\dfrac{1}{|x+1|}-1\right) = 0 \Leftrightarrow |2x-3| = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Facem observația că $\dfrac{1}{|x+1|}-1 < 0\ (\forall)x \in R \setminus \{-1\}$.

c) $\left||3x+1|+2\right| = 4 \Leftrightarrow |3x+1|+2 = 4 \text{ sau } |3x+1|+2 = -4$

Rezolvăm ecuația

$$|3x+1|+2 = 4 \Leftrightarrow |3x+2| = 2 \Leftrightarrow 3x+2 = 2 \text{ sau } 3x+2 = -2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ sau } x = -\frac{4}{3}$$

Rezolvăm a doua ecuație

$|3x+1|+2=-4 \Leftrightarrow |3x+1|=-2,$ ecuație imposibilă

Soluția finală este $S=\left\{0, -\frac{4}{3}\right\}$

R8.1.5. Să se afle numerele $x_1, x_2, ..., x_n$ care verifică egalitatea:
$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2-2(|x_1|+|x_2|+...+|x_n|)+n=0$, $n\in N^*$.
Soluție.
$x_1^2-2|x_1|+1+x_2^2-2|x_2|+1+...+x_n^2-2|x_n|+1=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (|x_1|-1)^2+(|x_2|-1)^2+...+(|x_n|-1)^2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x_1|-1=|x_2|-1=...=|x_n|-1=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x_1|=|x_2|=...=|x_n|=1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1, x_2, ..., x_n \in \{-1, 1\}$.

R8.1.6. Determinați valorile naturale ale lui a pentru care ecuația
$\big|\, a+|x-a|\,\big|=3$ are două rădăcini întregi. Rezolvați în acest caz ecuația.
Soluție.
$\big|\, a+|x-a|\,\big|=3 \Leftrightarrow |x-a|+a=3$ sau $|x-a|+a=-3$.
Ecuația $|x-a|+a=-3$ este imposibilă dacă $a\in N$.
Atunci: $|x-a|+a=3 \Leftrightarrow |x-a|=3-a$, are două rădăcini întregi dacă $3-a>0 \Rightarrow$ $a<3$ și $a\in N \Rightarrow a\in\{0, 1, 2\}$.
Dacă $a = 0$, $||x||=3 \Leftrightarrow |x|=3 \Leftrightarrow x\in\{-3,3\}$.
Dacă $a = 1$, $|1+|x-1||=3 \Leftrightarrow |x-1|=2$ sau $|x-1|=-4$ ecuație imposibilă
$\Rightarrow |x-1|=2 \Leftrightarrow x\in\{-1,3\}$.
Dacă $a = 2$, $|2+|x-2||=3 \Leftrightarrow |x-2|=1$ sau $|x-2|=-5$ ecuație imposibilă
$\Rightarrow |x-2|=1 \Leftrightarrow x\in\{1,3\}$.

R8.1.7. Să se arate că ecuația
$|x-a|+|x-b|+|x+a|+|x+b|=|a+b|$, $a, b\in R_+$
nu are rădăcini reale.
Soluție.
Folosim inegalitatea: $|a+b|\le|a|+|b|$, $(\forall)a, b\in R$
și egalitatea $|a|=|-a|$, $(\forall)a\in R$.
$|x-a|+|x+a|=|x-a|+|-x-a|\ge|x-a-x-a|=|-2a|=2|a|$
Analog $|x-b|+|x+b|\ge 2|b|$.
Adunând inegalitățile, obținem:
$|x-a|+|x+a|+|x-b|+|x+b|\ge 2|a|+2|b|=2(|a|+|b|)\ge 2|a+b|>|a+b|$,
deci nu poate avea loc egalitate pentru orice $x\in R$.

9. Partea întreagă a unui număr real. Partea fracționară a unui număr real. Ecuații cu parte întreagă

9.1 Definiții și notații

Considerăm un număr real x care are scrierea zecimală $x = x_0,x_1x_2...$ unde $x_0 \in Z$ și $x_1, x_2 \in \{0, 1, 2, ...,9\}$.

Partea întreagă a unui număr real x este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x. Notăm: [x] partea întreagă a lui x și o definim astfel:

$$[x] = \begin{cases} x_0 \text{ dacă } x \geq 0 \text{ sau } x \in Z \\ x_0 - 1 \text{ dacă } x < 0 \text{ sau } x \notin Z \end{cases}$$

Dacă se ține seama de reprezentarea pe axă a numerelor reale, atunci partea întreagă a unui număr real o putem considera primul număr întreg din stânga lui x.

Partea întreagă a unui număr real mai poate fi reprezentată și astfel:

$$[x] = \begin{cases} n & \text{dacă } n \leq x < n+1 \\ -n-1 & \text{dacă } -n-1 \leq x < -n,\ n \in N \end{cases}$$

Exemple: [3,25] = 3; [3,91] = 3; [–5,37] = –6; [–5,95] = –6; [$\sqrt{2}$] = 1; [–π] = –4;

Partea fracționară a unui număr real o notăm prin {x} și o definim prin egalitatea {x} = x – [x].

Exemple: {2,35} = 0,35; {–3,51} = 0,49

Observație: Oricare ar fi $x \in R$, x = [x] + {x}, $x \in [0,1)$.

Exemple: 2,57 = [2,57] + {2,57} = 2 + 0,57

–3,72 = [–3,72] + {–3,72} = –4 + 0,28

Prezentăm, în cele ce urmează, proprietăți ale părții întregi care se deduc direct din definiție:

Proprietatea 1. $(\forall)\ x \in [k, k+1), k \in Z$ avem egalitatea [x] = k

Proprietatea 2. Dacă $x,y \in R$, și $x,z \in [k, k+1), k \in Z$ atunci are loc egalitatea: [x] = [y]

Proprietatea 3. Dacă $x \in R$, x < 0, atunci [x] < 0

Dacă $x \in R$, $x \geq 0$, atunci $[x] \geq 0$

Proprietatea 4. $(\forall)\ x \in R$ există egalitatea [[x]] = [x]

Proprietatea 5. $(\forall)\ x \in R$ sunt adevărate inegalitățile:

1) $[x] \leq x < [x+1]$ și 2) $x - 1 < [x] \leq x$

Folosind definiția părții întregi și aceste proprietăți vom afla partea întreagă a unor expresii algebrice și vom rezolva ecuații în care necunoscuta este exprimată prin partea întreagă.

Probleme rezolvate

R9.2.1.Aflați partea întreagă a expresiei

$$A = \frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}}$$

Soluție.

$$A = -\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{5}\right) = -\left[5+2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right] \approx$$

$$\approx -\left[5+2\left(1{,}41+1{,}73\right)+2{,}23\right] = -13{,}51$$

$[A] = -14$

R9.2.2.Să se calculeze partea întreagă a numărului: $a = \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2$, $n \in N$, $n \geq 3$.

L. Pârşan

Soluție.

După ridicarea la pătrat obținem $a = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$.

Folosim în continuare inegalitatea:

$$2n+1 < 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+2, \quad (\forall) n \geq 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 4n+2 < 2n+1+2\sqrt{n(n+1)} < 4n+3 \quad \Leftrightarrow \quad 4n+2 < a < 4n+3,$$

deci $[a] = 4n + 1$, $(\forall)$ $n \in N$, $n \geq 3$

R9.2.3.Să se rezolve ecuația: $\left[\dfrac{x+1}{2}\right] = \dfrac{3x-1}{4}$.

Soluție.

Știind că $[a]$ este un număr întreg $(\forall)$ $a \in R$ vom face substituția: $\dfrac{3x-1}{4} = k$, $k \in Z$

$$\frac{3x-1}{4} = k \Leftrightarrow 3x-1 = 4k \Leftrightarrow 3x = 4k+1 \Leftrightarrow x = \frac{4k+1}{3}$$

Ecuația devine:

$$\left[\frac{\frac{4k+1}{3}+1}{2}\right] = k \Leftrightarrow \left[\frac{4k+4}{6}\right] = k \Leftrightarrow \left[\frac{2k+2}{3}\right] = k.$$

Folosind proprietatea 5 suntem conduşi la rezolvarea inecuației:

$$\frac{2k+2}{2} - 1 < k \leq \frac{2k+2}{3} \Leftrightarrow 2k+2-3 < 3k \leq 2k+2 \Leftrightarrow -1 < k \leq 2, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

Deci $x \in \left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}, 3\right\}$.

R9.2.4Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{3x-7}{4}\right]+\left[\frac{3x-5}{4}\right]=\frac{5x+3}{7}.$$

Soluție.

Notăm $\frac{5x+3}{7}=k$, $k\in Z \Leftrightarrow 5x=7k-3 \Leftarrow x=\frac{7k-3}{5}$

Utilizăm proprietatea 5 pentru cele două părți întregi ale ecuației.

$$\frac{3x-7}{4}-1\le\left[\frac{3x-7}{4}\right]<\frac{3x-7}{4}$$

$$\frac{3x-5}{4}-1\le\left[\frac{3x-5}{4}\right]<\frac{3x-5}{4}$$

Prin adunarea inegalităților se obține:

$$\frac{6x-12}{4}-2\le\left[\frac{3x-7}{4}\right]+\left[\frac{3x-5}{4}\right]<\frac{6x-12}{4}$$

şi apoi folosind substituția avem:

$$\frac{\frac{21k-9}{5}-6}{2}-2\le k<\frac{\frac{21k-9}{5}-6}{2}\Leftrightarrow\frac{21k-59}{10}\le k<\frac{21k-39}{10}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21k-59\le 10k<21k-39\Leftrightarrow -59\le -11k<-39\Leftrightarrow 39\le 11k\le 59\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{39}{11}\le k<\frac{59}{11},\quad \text{deci } k\in\{4,5\},\quad x\in\left\{5,\frac{32}{5}\right\}.$$

R9.2.5.Să se demonstreze că ecuația:

$\left[\frac{3x+1}{2}\right]+\left[\frac{3x+2}{2}\right]=6$ nu are soluții întregi.

[G.M. 2/1988]

Soluție.

Presupunem că $x = a\in Z$ este o soluție a ecuației

I. $a = 2k$, $k\in Z$.

$$\left[\frac{6k+1}{2}\right]+\left[\frac{6k+2}{2}\right]=6\Leftrightarrow\left[3k+\frac{1}{2}\right]+[3k+1]=6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3k+3k+1=6\Leftrightarrow 6k+1=6\Rightarrow k=\frac{5}{6}\notin Z$$

II. $a = 2k + 1$, $k\in Z$

$$\left[\frac{6k+4}{2}\right]+\left[\frac{6k+5}{2}\right]=6 \Leftrightarrow [3k+2]+\left[3k+\frac{5}{2}\right]=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3k+2+3k+2=6 \Leftrightarrow 6k=2 \Leftrightarrow k=\frac{1}{3}\notin Z.$$

Rezultă că ecuația nu are nici o soluție întreagă.

Bibliografie

Gh. Andrei, I. Cucurezeanu, C. Caragea "Probleme de algebră, gimnaziu, liceu", Ed. GIL, Zalău, 1996.
Gh. Schneider "Probleme de algebră" volumul 2, Ed. Apollo, Craiova, 1990.
C. Năstăsescu, C. Niță, M. Brandiburu, D. Joiță, Ed. Rotech Pro, 1997.
L. Pârşan, C.G. Lazeanu "Probleme de algebră şi trigonometrie", Ed. Facla, Timişoara, 1983.

10. Inegalitățile algebrice

Prezentăm în cele ce urmează câteva proprietăți elementare ale inegalităților precum şi câteva inegalități remarcabile. Acestea vor constitui baza raționamentului în soluționarea problemelor care implică inegalitățile.

10.1. Proprietățile inegalităților

10.1.1. $(\forall)\ x\in R,\ x\le x$ (reflexivitatea)
10.1.2. Dacă $x,y,z\in R$ astfel încât $x\le y$ şi $y\le z$ atunci $x\le z$ (tranzitivitatea)
10.1.3. Dacă $x,y\in R$ astfel încât $x\le y$ şi $y\le x$ atunci $x=z$ (antisimetria)
10.1.4. $(\forall)\ x,y,z\in R$ dacă $x\le y$ atunci $x+z\le y+z$.
10.1.5. $(\forall)\ x,y,z\in R$ dacă $x\le y$ atunci 1. $xz\le yz$, pentru $z\ge 0$.
2. $xz\ge yz$, pentru $z\le 0$.
10.1.6. $(\forall)\ x,y,\in R$ dacă $x>0$ $x\le y$ atunci $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{y}$.
10.1.7. $(\forall)\ x,y,a,b\in R$ dacă $x\le y$ atunci $x+a\le y+a$.
10.1.8. Dacă $x,y,a,b\in R$ astfel încât $0\le a\le b$ şi $0\le x\le y$, atunci $ax\le by$.
10.1.9. $(\forall)\ x,y,\in R$ dacă $x\le y$ atunci $x^{2n+1}\le y^{2n+1}$, $(\forall)\ n\in N$.
10.1.10. $(\forall)\ x,y,\in R$, dacă $0\le x\le y$ atunci $x^n\le y^n$, $(\forall)\ n\in N$.

10.2 Inegalități remarcabile

10.2.1 $(\forall)\ x\in R,\ x^2\ge 0$
Generalizare $(\forall)\ x\in R,\ x^{2n}\ge 0,\ (\forall)\ n\in Z$
Observații referitoare la proprietățile 1.9. şi 1.10
1. dacă $-3<2$ atunci $(-3)^3<2^3 \Leftrightarrow -27<8$ adevărat
2. dacă $-3<2$ atunci $(-3)^4<2^4 \Leftrightarrow 81<16$ fals

10.2.2. $(\forall)\ x_1,x_2,...,x_n\in R,\ x_1^2,x_2^2,...x_n^2\ge 0$
Se obține egalitatea pentru $x_1=x_2=...=x_n=0$
10.2.3. $(\forall)\ x,y,\in R,\ x^2+z^2\ge 2xy$
10.2.4. $(\forall)\ x,y,\in R,\ x>0,\ y>0$ există inegalitatea:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$$

10.2.5. $(\forall)\ x,y,\in R;\ x,y>0$ $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}\ge\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ (inegalitatea mediilor)

Observație. Se poate da o generalizare pentru inegalitatea ce există între media aritmetică şi media armonică a numerelor reale pozitive:

$(\forall)\ x_1,x_2,\ldots,x_n\in R_+$: $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}}$

10.2.6. $(\forall)\ x,y,z\in R$: $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$

Probleme rezolvate

R10.3.1. Să se arate că oricare ar fi $x,y,z\in R$ există inegalitatea $x^2+y^2+z^2+6x-4y+2z+14\geq0$

Soluție.

Căutăm să formăm o sumă de pătrat folosind formulele de calcul prescurtat:

$x^2+6x+9+y^2+4y+4+z^2+2z+1\geq0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2\geq0$, inegalitate adevărată.

R10.3.2. Să se arate că oricare ar fi numerele reale strict pozitive are loc relația: $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2-2(a_1+a_2\sqrt{2}+\ldots+a_n\sqrt{n})+\dfrac{n(n+1)}{2}\geq0$

Soluție.

Observăm că ultimul termen al expresiei reprezintă suma primelor n numere naturale:

$1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Aplicând proprietățile adunării şi înmulțirii formăm pătrate perfecte cu intenția de a ajunge la o inegalitate adevărată

$a_1^2-2a_1+1+a_2^2-2a_2\sqrt{2}+2+\ldots+a_n^2-2a_n\sqrt{n}+n=(a_1-1)^2+(a_2-\sqrt{2})^2+\ldots+(a_n-\sqrt{n})^2\geq0$

Egalitate se obține pentru $a_1=1$, $a_2=\sqrt{2}$,..., $a_n=\sqrt{n}$

R10.3.3. Să se arate că dacă a,b şi c sunt numere strict pozitive, atunci

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c$$

Soluție.

Dăm două metode pentru justificarea acestei inegalități. Prima se va referi la reducerea inegalității date la o inegalitate cunoscută (remarcabilă), iar în a doua metodă vom justifica inegalitatea dată pornind de la o inegalitate cunoscută.

Metoda I

$\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\geq a+b+c \Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq a^2bc+ab^2c+abc^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2\geq2a^2bc-2ab^2c+2abc^2\geq0 \Leftrightarrow a^2(b-c)^2+b^2(a-c)^2+c^2(a+b)^2\geq0,$

inegalitate adevărată.

Metoda a II-a

Numerele reale $\frac{bc}{a}$ şi $\frac{ac}{b}$ sunt strict pozitive şi verific inegalitatea:

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq 2\sqrt{\frac{bc}{a}\cdot\frac{ac}{b}} \Leftrightarrow \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq 2c$$

Analog se obțin inegalitățile $\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\geq 2b$ şi $\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq 2a$.

Adunând ultimele trei inegalități se obține inegalitatea cerută:

$$2\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)\geq 2(a+b+c) \Leftrightarrow \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 2(a+b+c)$$

R10.3.4. Să se arate că oricare ar fi numerele strict pozitive a,b,c există inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$$

Soluție.

Pentru demonstrarea inegalității vom folosi inegalitatea mediilor pentru $\frac{b}{c+a}$ şi 1, deci

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}\cdot 1}\leq\frac{\frac{b}{c+a}+1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{b}{c+a}}\leq\frac{a+b+c}{2a}$$

Analog: $\sqrt{\frac{a+c}{b}}\leq\frac{a+b+c}{2b}$ şi $\sqrt{\frac{a+b}{c}}\leq\frac{a+b+c}{2c}$.

Folosind proprietatea 1.6. , obținem inegalitățile:

$\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq\frac{2a}{a+b+c}$, $\sqrt{\frac{b}{a+c}}\geq\frac{2b}{a+b+c}$, $\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2c}{a+b+c}$, iar prin însumare se obține inegalitatea cerută

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$$

Inegalitatea este strictă pentru că a+b+c>0 şi egalitatea b+c=a, a+c=b şi a+b=c nu pot avea loc simultan.

Cu rezultat bun putem folosi în demonstrarea acestei inegalități şi inegalitatea dintre mediile geometrice şi şi media Armonică a două numere strict pozitive.

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2\frac{a}{b+c}}{\frac{a}{b+c}+1} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$$

Analog: $\sqrt{\frac{b}{a+c}} \geq \frac{2b}{a+b+c}$, $\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$

R10.3.5. Să se arate că oricare ar fi x, y,z, numere reale pozitive, există inegalitatea

$$\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+y)} + \sqrt{z(x+y)} \leq \frac{3}{2}(x+y+z)$$

Arătați că se poate găsi în acest caz o inegalitate mai bună (fină), adică

$$\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+y)} + \sqrt{z(x+y)} \leq \sqrt{2}(x+y+z)$$

Soluție.

Folosim inegalitatea dintre media geometrică şi cea aritmetică.

$$\sqrt{x(y+z)} \leq \frac{x+y+z}{2}\ ;\ \sqrt{y(x+y)} \leq \frac{x+y+z}{2}\ ;\ \sqrt{z(x+y)} \leq \frac{x+y+z}{2}$$

Adunând inegalitățile, obținem inegalitatea cerută:

$$\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+y)} + \sqrt{z(x+y)} \leq \frac{3}{2}(x+y+z)$$

Facem un raționament asemănător pentru a obține o îmbunătățire a inegalităților date

$$\sqrt{2x(y+z)} + \sqrt{2y(x+y)} + \sqrt{2z(x+y)} \leq \frac{2x+y+z}{2} + \frac{2y+x+z}{2} + \frac{2z+x+y}{2} =$$

$$= \frac{4(x+y+z)}{2} = 2(x+y+z)$$ deci

$$\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+y)} + \sqrt{z(x+y)} \leq \sqrt{2}(x+y+z)$$

R10.3.6. Să se arate că:

$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$ [M.A.D.]

Soluție.

$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (ab)^2+(bc)^2+(ac)^2 \geq ab \cdot bc + bc \cdot ca + ab \cdot ca = abc(a+b+c)$

Probleme propuse

P10.4.1. Să se arate că $(\forall)$ $x,y,z \in R$, are loc inegalitatea

$x^2+19y^2+6z^2-8xy-4xz+12yz>0$

P10.4.2. Să se arate că oricare ar fi numerele reale strict pozitive a,b,c există inegalitatea:

$$\left(a+\frac{b}{ac}\right)\left(b+\frac{c}{ab}\right)\left(c+\frac{a}{bc}\right)\geq 8$$

P10.4.3. Demonstrați că $(\forall)t\in R$ şi $n\in N$, are loc inegalitatea: $(1+t)^n+(1+t^{-1})\geq 2^{n+1}$

P10.4.4. Se dau numerele reale pozitive a,b,c, astfel încât a+b+c=1. Arătați că

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$;

b) $\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(a+c)}+\sqrt{c(a+b)}\leq\frac{3}{2}$. Generalizare

c) $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$. Generalizare

P10.4.5. Să se arate că dacă $a_1,a_2,...,a_n$ sunt numere reale pozitive cu proprietatea $a_1a_2...a_n=1$, atunci au loc inegalitățile:

a) $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\geq 2^n$.

b) $\left(1+a_1+a_1{}^2\right)\left(1+a_2+a_2{}^2\right)...\left(1+a_n+a_n{}^2\right)\geq 3^n$.

P10.4.6. Să se arate că dacă $n\in N^*$ şi a>0, atunci

a) $\frac{\sqrt{a}}{a+1}+\frac{\sqrt{a+1}}{a+2}+...+\frac{\sqrt{a+n-1}}{a+n}\leq\frac{n}{2}$;

b) $\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{a+2}{\sqrt{a+1}}+...+\frac{a+n}{\sqrt{a+n-1}}\geq 2n$

Bibliografie

1. *Panaitopol L; Bănolilă V, Lascu M. Inegalități Ed. GIL Zalău 1996.*
2. *Foaie matematice nr. 6/1996.*
3. *Revista matematică a elevilor din Timişoara nr. 1/1997*

11. Probleme de ordonare

Dacă notăm cu $\max(a,b)$ cel mai mare dintre numerele *a* şi *b*, iar prin $\min(a,b)$ cel mai mic dintre numerele *a* şi *b* atunci avem:

$$\min(a,b)=\begin{cases} a & \text{daca} \quad a<b \\ a \text{ sau } b & \text{daca} \quad a=b \\ b & \text{daca} \quad a<b \end{cases}$$

iar

$$\max(a,b)=\begin{cases} a & \text{daca} \quad a>b \\ a \text{ sau } b & \text{daca} \quad a=b \\ b & \text{daca} \quad a<b \end{cases}$$

sau

$$\min(a,b)=\frac{a+b-|a-b|}{2}, \quad \text{iar} \quad \max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2}.$$

Problemele de ordonare îmbracă forme variate. Unele situaţii necesită metode ingenioase pentru rezolvare. Există cazuri când operaţia de ordonare ajută la dovedirea egalităţii a două numere *a* şi *b*, prin stabilirea simultană a inegalităţilor $a \le b$ şi $a \ge b$.

Numerele iraţionale ridică în unele situaţii probleme dificile de ordonare. De aceea se impun metode adaptate fiecărui caz în parte.

Probleme rezolvate

VII_algR11.1. Comparaţi numerele: $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ şi $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

Soluţie. Fie $x=\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ şi $y=\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$, atunci avem:

$$x^2=\left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\right)^2=\sqrt{2}^{2\sqrt{3}}=2^{\sqrt{3}}, \quad \text{iar} \quad y^2=\left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^2=\sqrt{3}^{2\sqrt{2}}=3^{\sqrt{2}}$$

Atunci

$$(x^2)^{\sqrt{2}}=\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}=2^{\sqrt{6}}<2^3=8 \quad \text{şi} \quad (y^2)^{\sqrt{2}}=\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=3^2=9.$$

Deci $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}<\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

R11.2. Demonstraţi că numerele reale *a,b,c,d* care verifică relaţiile de mai jos sunt egale

$$\begin{gathered} a-3b+2c\ge 0 \\ b-3c+2d\ge 0 \\ c-3d+2a\ge 0 \\ d-3a+2c\ge 0 \end{gathered}$$

Soluţie. Adunând membru cu membru relaţiile date obţinem 0≥0. rezultă că toate relaţiile devin egalităţi (nici una din inegalităţi nu este strictă). Deci obţinem:

$$a-3b+2c=0, \quad b-3c+2d=0, \quad c-3d+2a=0, \quad d-3a+2c=0,$$

care se mai scriu:

$$a-b=2b-2c,\quad b-c=2c-2d,\quad c-d=2d-2a,\quad d-a=2a-2c$$

sau

$$a-b=2(b-c),\quad b-c=2(c-d),\quad c-d=2(d-a),\quad d-a=2(a-c).$$

Atunci

$$a-b=2(b-c)=2^2(c-d)=2^3(d-a)=2^4(a-b)$$

de unde $a-b=2^4(a-b)$ rezultă $(a-b)(2^4-1)=0$. Atunci obținem $a=b$. Analog $b=c, c=d$, deci $a=b=c=d$.

R11.3. Să se decidă dacă numărul $\dfrac{2003^{2003}+2004^{2004}}{2003^{2004}+2004^{2003}}$ este supraunitar, echiunitar sau subunitar.

Soluție. Scoatem factor comun pe 2004^{2003}:

$$\frac{2004^{2003}\left[\left(\frac{2003}{2004}\right)^{2003}+2004\right]}{2004^{2003}\left[\left(\frac{2003}{2004}\right)^{2003}\cdot 2003+1\right]}=\frac{\left(\frac{2003}{2004}\right)^{2003}+2003+1}{\left(\frac{2003}{2004}\right)^{2003}\cdot 2003+1}$$

$\dfrac{2003}{2004}<1$, rezultă că $\left(\dfrac{2003}{2004}\right)^{2003}<1$ (orice putere naturală a unui număr subunitar este un număr subunitar. Fiindcă $\left(\dfrac{2003}{2004}\right)^{2003}<1$ rezultă că $\left(\dfrac{2003}{2004}\right)^{2003}\cdot 2003<2003$. (Produsul dintre un număr subunitar pozitiv *a* şi un număr pozitiv *b*este mai mic ca *b*). Atunci

$$\left(\frac{2003}{2004}\right)^{2003}\cdot 2003+1<2003+1<\left(\frac{2003}{2004}\right)^{2003}+2004$$

şi obținem că

$$\left(\frac{2003}{2004}\right)^{2003}\cdot 2003+1<\left(\frac{2003}{2004}\right)^{2003}+2004$$

Deci numitorul este mai mic decât numărătorul şi atunci fracția este supraunitară.

R11.4. Scrieți în ordine crescătoare numerele: $a, a^2, a^3, \dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a^2}, \dfrac{1}{a^3}$, unde $a\notin\{-1,0,1\}$.

Soluție. 1) Dacă $-1<a<0$ avem:

$$\frac{1}{a^3} < \frac{1}{a} < a < a^3 < a^2 < \frac{1}{a^2}$$

2) Dacă $0<a<1$ avem:

$$a^3 < a^2 < a < \frac{1}{a} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a^3}$$

3) Dacă $a>1$ avem:

$$\frac{1}{a^3} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a} < a < a^2 < a^3 .$$

R11.5. Fie

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$S_2 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n}$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_4 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + ... + \frac{1}{1+2+...+n}\right)$$

Scrieți în ordine crescătoare expresiile S_1, S_2, S_3, S_4.

Soluție. $S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}\right) =$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$

Deci $S_1 = S_2$.

$$S_3 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Atunci $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+1}$

Deci $S_2 < S_3$.

Fiindcă $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$S_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + ... + \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

Deci $S_1 = S_2 < S_3 = S_4$.

12. Rezolvarea ecuaţiilor şi inecuaţiilor cu ajutorul inegalităţii mediilor

12.1.Consideratii teoretice si exemple

Definiţie 12.1.1. Numim ecuaţie o propoziţie cu una sau mai multe necunoscute,şi care este adevărată pentru anumite valori ale variabilelor,propoziţia conţinând semnul de egalitate.

Observaţie 12.1.2. Dacă propoziţia este adevărată pentru toate valorile variabilelor (necunoscutelor)spunem că avem o identitate.

Exemple : 1.a.$3x+4y=5$ $x,y \in N$ este o ecuaţie

1.b.$3x+4y=3(x-4)+4(y+3);x,y \in R$ este o identitate

Mulţimea valorilor variabilelor pentru care propoziţia de acest fel este adevărată,se numeşte soluţia ecuaţiei şi se notează de obicei cu S.

În exemplele precedente avem $S_a=\varnothing;S_b=R$.

Observaţie 12.1.3. Mulţimea din care este soluţia trebuie precizată,altfel enunţul este incomplet.

Ecuaţia : $3x+4y=5$ are în $Z\times Z$ o infinitate de soluţii,ele sunt date de :

$x_n=4n+3;y_n= -3n - 2$ deoarece $3x_n+4y_n=12n+9-12n-4=5$.

Observaţie 12.1.4. Soluţia unei ecuaţii poate fi formată dintr-un număr sau o pereche,sau un triplet,după numărul de necunoscute.Sunt probleme care conduc la ecuaţii,sau sisteme de ecuaţii.

Definiţie 12.1.5. Numim o inecuaţie ,o propoziţie care are una sau mai multe necunoscute,şi care este adevărată pentru anumite valori ale variabilelor ,propoziţia conţinând unul din semnele : $<$; $\leq$; $>$; $\geq$

Exemplu 2.a. $3x+2y\leq5$ $(x,y) \in N\times N$

2.b. $3x+4y\geq9$ $(x,y) \in R\times R$

Observaţie 12.1.6. Mulţimea valorilor variabilelor pentru care o inegalitate este adevărată se numeşte soluţie a inecuaţiei.Şi la inecuaţie soluţia conţine perechi ,triplete,sau mulţimi formate din numere,după cum ea conţine mai multe variabile sau una.

$3x+2y\leq5$ $(x,y) \in N\times N$; $S_a=\{ (0,0);(0,1);(0,2);(1,0);(1,1) \}$ iar

$3x+4y\geq9$ $(x,y) \in R\times R$; $S_b=\{ (3-4y/3+a,z);y\in R;a\geq0\}$

Cele două mulţimi sunt una finită şi una infinită.

Dacă $a,b \in R_+$; atunci următoarele numere ,cunoscute sub numele de medii:

$M_{aritmetică} = M.A.= (a+b)/2 = m_a$

$M_{geometrică} = M.G. = \sqrt{ab} = m_g$

$M_{armonică} = M.H. = 2/(1/a+1/b) = m_h$

$M_{pătratică} = M.P. = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} =m_p$; verifică inegalităţile din :

Teorema 12.1.7 a) $m_h \leq m_g \leq m_a$

b) $m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p$

Demonstrație:

$m_{h} \leq m_g \Leftrightarrow 2ab/(a+b) \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ (cu egalitate $\Leftrightarrow$ a=b).

$m_g \leq m_a \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq (a+b)/2 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ (evident).

$m_a \leq m_p \Leftrightarrow (a+b)/2 \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$

Dovedirea acestor inegalități este mult mai interesantă dacă se poate face pe cale geometrică.Dăm în continuare câteva astfel de demonstrații:

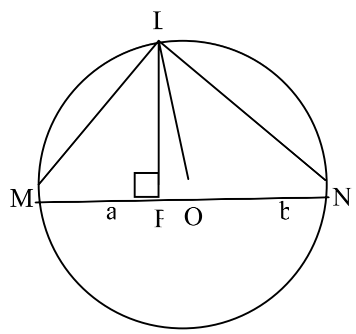
(a) Considerăm semicercul de diametru MN.

Ip: MP=a;

PN=b;

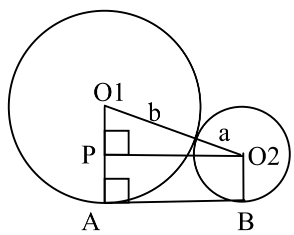
MO≡ON;

C: LP ≤ LO.



LO=(a+b)/2; $LP^2=ab \Rightarrow LP=\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq (a+b)/2$.

(b) Considerăm două cercuri tangente de raze b şi a.(exterior) şi coarda lor comună AB.



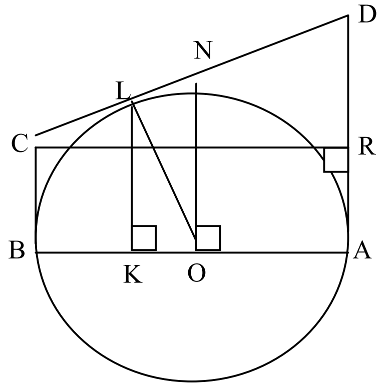
Fie $O_2P \perp O_1A$

$O_2P=\sqrt{(b+a)^2-(b-a)^2}=\sqrt{4ab}=2\sqrt{ab} \leq O_1O_2 = a+b \Rightarrow \sqrt{ab} \leq (a+b)/2$

Este evident că $O_2P \equiv O_1O_2$,adică $AB || O_1O_2$,adică O_1ABO_2-dreptunghi deci

$O_1A \equiv O_2B \Rightarrow a=b$.

(c) Considerăm un trapez dreptunghic şi un semicerc înscris în el tangent laturii neparalele,diametrul fiind înălțimea trapezului,vom obține o nouă interpretare geometrică pentru $m_h \le m_g \le m_a$.



ON-linie mijlocie ; BC=b ; AD=a ; CR = $2\sqrt{ab}$; 2LO = AB.
Din unghiurile cu laturi perpendiculare $\angle$KLO şi $\angle$ RCD avem :
ΔRCD~Δ KLO (U.U) $\Rightarrow$ CD/LO=RD/KO=CR/LK $\Rightarrow$ KL=(LD$*$CR)/CD=2/(1/a+1/b).
Avem inegalitățile evidente :
LK $\le$ LO $\le$ ON $\Rightarrow$ $m_h \le m_g \le m_a$.

Probleme rezolvate

R12.2.1. Să se determine numerele reale $x\in[1,\infty)$, $y \in(0,1]$ pentru care avem :
$(\sqrt{x}+1/\sqrt{x})(\sqrt{y}+1/\sqrt{y}) \ge 2(\sqrt{x/y}+\sqrt{y/x})$.
Soluție: Inegalitatea este echivalentă cu :
$[(y+1)/\sqrt{y}]*[(x+1)/\sqrt{x}] \ge 2[(x+y)/\sqrt{xy}] \Leftrightarrow (x+1)(y+1) \ge 2(x+y) \Leftrightarrow$
$xy+1 \ge x+y \Leftrightarrow x(y-1)+1-y \ge 0 \Leftrightarrow (y-1)(x-1) \ge 0$.Din condiții însă $y-1 \le 0$ şi $x-1 \ge 0$,ca atare obținem soluția : $\{ y=1;x \in[1,\infty) \} \cup \{ x=1;y\in(0,1] \}$.
În rezolvarea acestei inecuații nu este neaparat să folosim inegalități cunoscute,deci nu forțăm utilizarea lor.
R12.2.2. Determinați $x,y \in R$ ştiind că :
$1/(x^2 - 4x + 5) + 1/(y^2 +4y +5) + x^2 + y^2 = 4(x-y) - 6$.
Soluție: Egalitatea dată este echivalentă cu :
$1/(x^2 - 4x + 5) + (x^2 - 4x + 5) + 1/(y^2 +4y +5) + (y^2 +4y +5) = 4$
Din $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0 \Rightarrow 1/(x^2 - 4x + 5) + (x^2 - 4x + 5) \ge 2$ şi analog $1/(y^2 +4y +5) + (y^2 +4y +5) \ge 2$ (inegalitatea $m_a \ge m_g$).Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $(x^2 - 4x + 5)^2=1$, $(y^2 +4y +5)^2=1$,de unde $[x^2 - 4x + 5 \in\{ -1,1 \}$; $x^2 -$

$4x + 5>0] \Rightarrow x^2 - 4x + 5=1$ şi analog $y^2 +4y +5=1 \Rightarrow x=2,y= -2$ care este şi soluţia ecuaţiei.

R12.2.3. Determinaţi numerele reale $a_1,a_2,\ldots,a_n \in (0,\infty)$; $n \in N$; $n\geq 2$ pentru care avem : $(a_1a_2)/(a_1+a_2) + (a_2a_3)/(a_2+a_3) + \ldots + (a_na_1)/(a_n+a_1) - n/3 \geq (a_1^3+a_2^3+\ldots+ a_n^3)/6$

Soluţie : Din $m_h \leq m_a$, $(xy)/(x+y) \leq (x+y)/4 \Rightarrow (a_1a_2)/(a_1+a_2) \leq (a_1+a_2)/4$ şi analoagele,care adunate dau:

$(a_1a_2)/(a_1+a_2) + (a_2a_3)/(a_2+a_3) + \ldots + (a_na_1)/(a_n+a_1) \leq ½(a_1+a_2+\ldots+a_n)$,dar pe de altă parte avem: $½(a_1+a_2+\ldots+a_n) - n/3 \leq (a_1^3+a_2^3+\ldots+ a_n^3)/6 \Leftrightarrow$

$(a_1-1)^2(a_1+2) + (a_2-1)^2(a_2+2) + \ldots + (a_n-1)^2(a_n+2) \geq 0$(evidentă).Numerele cerute sunt deci cele pentru care avem egalitatea,adică $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$.

R12.2.4. Demonstraţi că există $x,y \in R$ astfel încât : $(x^2+x+1)(3y^2+2y+3)=2$.

Soluţie: $x^2+x+1 \geq ¾ \Leftrightarrow x^2+x+1/4\geq 0 \Leftrightarrow (x+1/2)^2\geq 0$.

$3y^2+2y+3 \geq 8/3$,deoarece $3y^2+2y+3=3(y+1/3)^2+8/3$ deci luând $x=-1/2$ şi $y= -1/3$ avem egalitate.

13. Probleme de maxim şi minim

Importanţa practică a problemelor de maxim şi minim este de necontestat. La gimnaziu se studiază foarte puţin asemenea probleme, deoarece ele solicită procedeee mai deosebite pentru rezolvare.

Problemele de maxim şi minim nu sunt uşor de abordat fără a stăpâni anumite tehnici de rezolvare. Iată câteva dintre acestea:

a) Folosim două teoreme care ne ajută la determinarea maximului şi minimului.

Teorema 13.1. Dacă suma mai multor variabile pozitive este constantă, maximul produsului are loc când variabilele sunt egale.

Deci dacă $P = x_1 x_2 ... x_n$ cu $x_1 + x_2 + ... + x_n =$ constant, P este maxim când $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Dacă $P = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$ cu $\alpha_i \ (i = \overline{1,n}) \in \mathbf{N}$ maximul lui P are loc când $\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = ... = \frac{x_n}{\alpha_n}$.

Pentru două variabile x_1 şi x_2, $P = x_1 x_2$ cu $x_1 + x_2 =$ constant, P este maxim când $x_1 = x_2$ deoarece

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, \quad (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

atunci $x_1 x_2 = \frac{1}{4}[(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2]$, deci $x_1 x_2$ este maxim când $(x_1 - x_2)^2 = 0$ adică $x_1 = x_2$.

Teorema 13.2. Dacă produsul mai multor variabile pozitive este constant, atunci suma lor este minimă când variabilele sunt egale.

Pentru două variabile x_1 şi x_2 pozitive cu $P = x_1 x_2$ (constant) $S = x_1 + x_2$ este minimă dacă şi numai dacă $x_1 = x_2$, deoarece

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2$$

cu $x_1 x_2$ constant şi atunci cea mai mică valoare a sumei se obţine când $(x_1 - x_2)^2 = 0$, deci $x_1 = x_2$.

b) Metoda reflexiei

Metoda constă în completarea figurii iniţiale asociată problemei (sau a unei părţi din ea) cu simetrica ei în raport cu o dreaptă (adică cu imaginea "reflectată" într-o oglindă).

c) Metoda liniei frânte

Dacă problema ne cere să determinăm minimul sumei lungimilor unor segmente atunci folosind această metodă trebuie să efectuăm o construcţie care să conducă la o linie frântă formată cu segmente dintre segmentele date şi cu segmente congruente cu cele care intervin în suma al cărei minim se cere. Această linie frântă va avea ca extremităţi puncte fixe A şi B. Deoarece drumul cel mai scurt între două puncte este segmentul de dreaptă determinat de ele este posibil ca AB să fie realmente minimul căutat.

d) Metoda curbei de nivel

Se foloseşte pentru problemele în care minimul sau maximul respectiv este condiţionat de poziţia unui punct M, poziţie ce trebuie precizată pe o dreaptă sau pe un cerc. Se presupune că expresia din concluzia problemei are valoarea constantă k şi se determină curba loc geometric C_k, a punctului M în acest caz. Pentru a determina poziţia cerută a punctului M se alege din familia de curbe de nivel C_k acea curbă care este tangentă dreptei sau cercului pe care am căutat punctul M, poziţia care realizează extremul va fi chiar punctul de tangenţă.

Probleme rezolvate

R13.1. Să se afle maximul expresiilor:

$$E_1(x) = x^4(4a^2 - x^2), \quad E_2 = x(a^2 - x^2), \quad E_3(x) = \frac{x-2a}{x^3}$$

unde $a \in \mathbf{R}_+$ şi $x \in \mathbf{R}_+^*$.

Soluţie. $E_1(x)$ se mai scrie: $E_1(x) = (x^2)^2(4a^2 - x^2)$. Cei doi factori au suma constantă: $x^2 + 4a^2 - x^2 = 4a^2$ (const.) Maximul are loc când $\frac{x^2}{2} = \frac{4a^2 - x^2}{1}$, de unde obţinem: $3x^2 = 8a^2$, deci $x = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$ şi atunci produsul maxim este $\left(\frac{8a^2}{3}\right)^2\left(4a^2 - \frac{8a^2}{3}\right) = \frac{64a^4}{9} \cdot \frac{4a^2}{3} = \frac{256a^6}{27}$. Pentru expresia E_2, maximul produsului $x(a^2 - x^2)$ are loc în acelaşi timp cu al pătratului său $x^2(a^2 - x^2)^2$. Suma factorilor x^2 şi $a^2 - x^2$ este a^2 (constant), maximul are loc când $\frac{x^2}{1} = \frac{a^2 - x^2}{2}$, de unde

$$3x^2 = a^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$E_{2\max} = \frac{a\sqrt{3}}{3}\left(a^2 - \frac{a^2}{3}\right) = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$$

Expresia $E_3(x)$ se mai poate scrie:

$$E_3(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x-2a}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{x} - \frac{2a}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{2a}{x}\right)$$

Condiția de maxim nu se schimbă dacă multiplicăm expresia cu $4a^2$. Obținem:

$$4a^2 E_3(x) = 4a^2 \cdot \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{2a}{x}\right) = \left(\frac{2a}{x}\right)^2\left(1-\frac{2a}{x}\right)$$

Suma factorilor este $\frac{2a}{x}+1-\frac{2a}{x}=1$ (constant). Atunci maximul are loc când $\frac{\frac{2a}{x}}{2}=\frac{1-\frac{2a}{x}}{1}$, de unde obținem $\frac{2a}{x}+\frac{4a}{x}=2$, deci $\frac{6a}{x}=2$, de unde $x=\frac{6a}{2}$. Deci $x=3a$.

$$E(x)_{\max}=\frac{3a-2a}{27a^3}=\frac{a}{27a^3}=\frac{1}{27a^2}$$

R13.2. Să se afle minimul expresiei $E_1(x)=\frac{x^3}{(x-b)^2}$, $x\in \mathbf{R}_+^*$, iar $b>0$.

Soluție. Minimul expresiei corespunde maximului expresiei inverse: $\frac{(x-b)^2}{x^3}$, care se scrie:

$$E_2=\frac{1}{x}\cdot\frac{(x-b)^2}{x^2}=\frac{1}{x}\left(\frac{x-b}{x}\right)^2=\frac{1}{x}\left(1-\frac{b}{x}\right)^2.$$

Înmulțind cu *b* obținem $b\cdot E_2=\frac{b}{x}\left(1-\frac{b}{x}\right)^2$. Cei doi factori au suma constantă $\frac{b}{x}+1-\frac{b}{x}=1$. Deci $\frac{\frac{b}{x}}{1}=\frac{1-\frac{b}{x}}{2}$, de unde $x=3b$. Deci

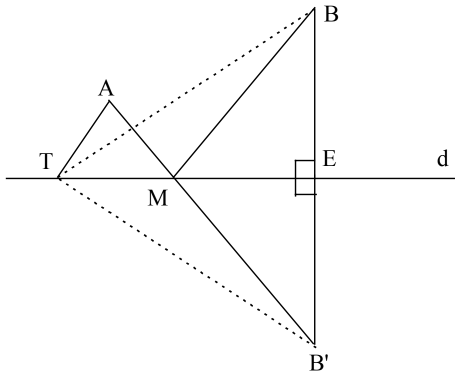
$$E_{\min}=\frac{(3b)^3}{(3b-b)^2}=\frac{27b^3}{4b^2}=\frac{27b}{4}.$$

R13.3. Să se afle minimul expresiei $E=\frac{a^4+x^4}{x^2}$ unde $x\neq 0$, *a* și *x* sunt numere reale pozitive.

Soluție. $E=\frac{a^4}{x^2}+x^2$. Produsul termenilor este $\frac{a^4}{x^2}\cdot x^2=a^4$ (constant). Minimul are loc când $\frac{a^4}{x^2}=x^2$, de unde $x=a$. Minimul expresiei este $E_{\min}=\frac{a^4+a^4}{a^2}=2a^2$ (*a*>0).

R13.3. Se consideră o dreaptă d şi două puncte A şi B situate de aceeaşi parte a ei. Să se determine poziția unui punct M de pe dreapta d astfel încât suma MA+MB să fie minimă.

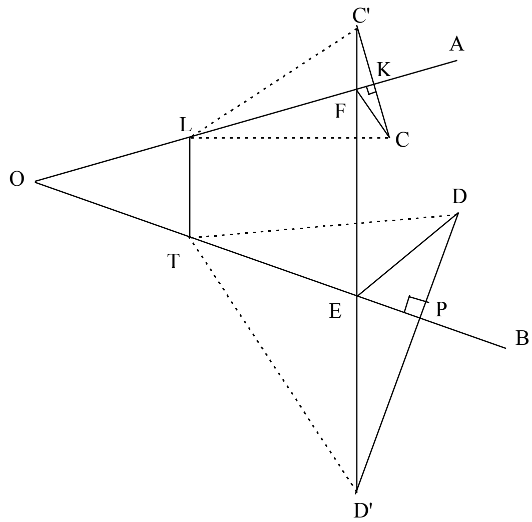
Demonstrație. Fie T un punct oarecare pe dreapta d. Construim simetricul B' al punctului B față de dreapta d.



Fie {E}=d∩BB'. Din congruența triunghiurilor dreptunghice TBE şi TB'E obținem că (TB)≡(TB'). Atunci AT+TB=AT+TB'≥AB' (inegalitatea triunghiului în ATB'). Fiindcă A şi B' sunt fixe, poziția lui M astfel ca suma să fie minimă se obține la intersecția dreptei d cu AB'. (Problema se mai numeşte teorema reflexiei sau teorema biliardului).

R13.4. În interiorul unghiului AOB se consideră punctele C şi D. Să se găsească pe latura OA a unghiului dat un punct F şi pe latura OB un punct E astfel ca linia frântă DEFC să fie cea mai scurtă posibilă.

Demonstrație. Construim simetricul C' al punctului C față de OA şi D' simetricul lui D față de OB.



În loc de punctele C şi D acum punctele C' şi D' îndeplinesc condițiile cerute de problemă. Deci trebuie să găsim drumul cel mai scurt posibil între C' şi D' care să întâlnească laturile OA şi OB ale unghiului AOB. Drumul cel mai scurt între două puncte este segmentul de dreaptă ce le uneşte. Segmentul [C'D'] intersectează laturile unghiului AOB în F respectiv E. Acestea sunt punctele căutate.

Din triunghiurile dreptunghice congruente KC'F şi KCF obținem că

$$(C'F)\equiv(CF) \tag{1}$$

Din triunghiurile dreptunghice congruente EDP şi ED'P obținem că

$$(ED)\equiv(ED') \tag{2}$$

Atunci CF+FE+ED=C'F+FE+ED'=C'D'. Linia frântă CEFD este cea mai scurtă. Oricare alte două puncte luate pe laturile OB şi OA, în afară de E şi F găsite mai sus ne vor da o linie frântă mai lungă decât CEFD.

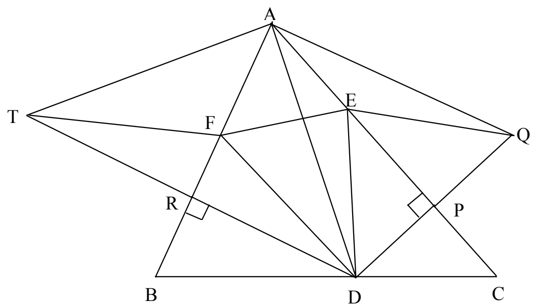
Fie L şi T două puncte oarecare situate respectiv pe laturile OA respectiv OB, vrem să arătăm că CF+EF+FD<CL+LT+TD. Datorită simetriei putem scrie:

CF+EF+ED=C'F+EF+ED'=C'D' şi CL+LT+TD=C'L+LT+TD'

În patrulaterul C'D'TL, C'D' este mai scurt decât linia frântă C'LTD'.

R13.5. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC. Să se determine triunghiul DEF cu $D\in(BC)$, $E\in(CA)$, $F\in(AB)$ care are perimetrul minim

Demonstrație. Fie Q simetricul punctului D față de AC şi T simetricul lui D față de AB. Atunci triunghiurile dreptunghice DEP şi EPQ sunt congruente (P fiind la intersecția dreptelor DQ şi AC).



Din congruența acestor două triunghiuri obținem că

$$(DE)\equiv(EQ) \tag{1}$$

şi triunghiurile dreptunghice DFR şi TRF sunt congruente (R este intersecția dreptelor AB şi DT). Din congruența acestor două triunghiuri obținem că

$$(FD)\equiv(FT) \tag{2}$$

Folosind relațiile (1) şi (2) obținem: Perimetrul triunghiului DEF este:

$$EF+DF+ED=EF+TF+EQ \tag{3}$$

Din congruența triunghiurilor dreptunghice ART şi ARD obținem că

$$m(\angle RAD)=m(RAT) \tag{4}$$

Din congruența triunghiurilor dreptunghice APD şi APQ obținem că

$$m(\angle DAP)=m(\angle PAQ) \tag{5}$$

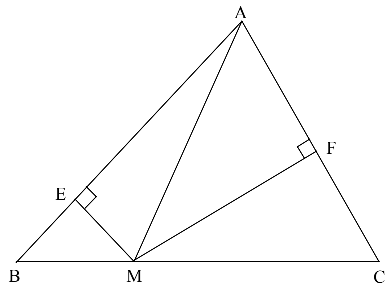
Din relațiile (4) şi (5) obținem că $m(\angle TAQ)=2m(\angle BAC)$, deci $m(\angle TAQ)$ este constantă.

Perimetrul triunghiului DEF nu poate fi mai mic decât (TQ) iar acesta este minim când AT=AQ=AD, este minim deci când AD este minim, adică D este piciorul perpendicularei din D pe BC. Punctele E şi F se obțin ca intersecții ale dreptei TQ cu

AC respectiv AB. Am obținut astfel că triunghiul de perimetru minim DEF este triunghiul ortic al triunghiului ABC.

R13.6. Se consideră un triunghi ABC şi M∈(BC). Fie E şi F proiecțiile ortogonale ale lui M pe AB respectiv AC. Să se determine poziția lui M pe (BC) astfel încât aria triunghiului MEF să fie maximă.

Demonstrație. Patrulaterul AEMF este inscriptibil având unghiurile opuse din E şi F suplementare.



Rezultă că m(∠BAC)+m(∠EMF)=180°.
Deci m(∠EMF)=180°-m(∠BAC). Atunci

$$S_{[MEF]} = \frac{ME \cdot MF \cdot \sin(\angle EMF)}{2} \qquad (1)$$

Dar $\sin(\angle EMF) = \sin[180° - \sin(\angle BAC)] = \sin(\angle BAC)$. Deci

$$S_{[MEF]} = \frac{ME \cdot MF \cdot \sin(\angle BAC)}{2} \qquad (2)$$

Dar $S_{[ABC]} = S_{[ABM]} + S_{[ACM]}$ sau $S_{[ABC]} = \frac{AB \cdot ME}{2} + \frac{AC \cdot MF}{2}$, de unde $AB \cdot ME + AC \cdot MF = 2 \cdot S_{[ABC]}$ sau

$$c \cdot ME + b \cdot MF = 2S_{[ABC]} \qquad (3)$$

Din (2) avem că maximul ariei triunghiului MEF se atinge când ME·MF este maxim. Dar maximul produsului ME·MF se atinge odată cu maximul lui (c·ME)·(b·MF) adică dacă c·ME=b·MF, ceea ce implică egalitatea ariilor triunghiurilor ABM şi AMC, deci M este mijlocul lui (BC).

R13.7. Dintre toate dreptunghiurile de aceeaşi arie să se determine cel de perimetru minim.

Soluție. Perimetrul drepunghiului este $2(x+y)$, iar aria $S = x \cdot y$ (unde *x* şi *y* sunt dimensiunile dreptunghiului). Fiindcă $x \cdot y =$ constant, suma lor este minimă când $x = y$. Deci perimetrul dreptunghiului este $2(x+y) = 4x$.

Dintre toate dreptunghiurile de aceeaşi arie, pătratul are perimetru minim.

R13.8. Dintre toate dreptunghiurile cu acelaşi perimetru care este cel de arie maximă?

Soluție. Dacă x şi y sunt dimensiunile dreptunghiului, atunci perimetrul este $2(x+y)=P$, rezultă $x+y=\frac{P}{2}$, $S=x\cdot y$. Suma factorilor x şi y este constantă şi atunci produsul este maxim când $x=y$ (pătrat). Deci $S_{\max}=x^2$.

Dintre toate dreptunghiurile cu acelaşi perimetru pătratul are arie maximă.

R13.9. Dintre toate triunghiurile dreptunghice cu aceeaşi ipotenuză aflați pe cel de arie maximă.

Soluție. $S=\frac{b\cdot c}{2}$ unde b şi c sunt lungimile catetelor. Din teorema lui Pitagora avem că $b^2+c^2=a^2$ (constant). Suma factorilor b^2 şi c^2 fiind constantă, produsul este maxim când $b^2=c^2$, adică $b=c$. Deci triunghiul este dreptunghic isoscel. Atunci cu teorema lui Pitagora obținem: $a^2=b^2+b^2$, deci $a^2=b^2\cdot 2$, de unde $b=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Deci

$$S_{\max}=\frac{b\cdot c}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}.$$

R13.10. Dintre toate triunghiurile cu acelaşi perimetru, aria maximă o are triunghiul echilateral.

Soluție. Fie a,b,c lungimile laturilor triunghiului şi 2p perimetrul triunghiului. Folosim formula lui Heron pentru aria triunghiului:

$$\mathrm{S}=\sqrt{\mathrm{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Suma factorilor variabili este p-a+p-b+p-c=3p-2p=p deci este constantă. Produsul celor trei factori este maxim când p-a=p-b=p-c, adică a=b=c. Deci triunghiul de arie maximă este cel echilateral (cu perimetru constant).

$$S_{\max}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

R13.11. Dintre toate patrulaterele cu acelaşi perimetru înscrise într-un cerc, aria maximă o are pătratul.

Soluție. Dacă notăm cu a,b,c,d lungimile laturilor şi cu 2p perimetrul, aria patrulaterului înscris se calculează cu relația:

$$\mathrm{S}=\sqrt{\mathrm{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$$

Suma factorilor variabili este p-a+p-b+p-c=3p-2p=p (constantă). Atunci S este maxim când p-a=p-b=p-c=p-d $\Rightarrow$ a=b=c=d.

$$\mathrm{S}_{\max}=\mathrm{a}^2.$$

R13.12. Dintre toate dreptunghiurile înscrise într-un cerc de rază dată R, care este cel de arie maximă?

Soluție. Dacă una din laturi are lungimea x, cealaltă va avea lungimea $\sqrt{4R^2-x^2}$ (calculată cu teorema lui Pitagora din triunghiul dreptunghic).

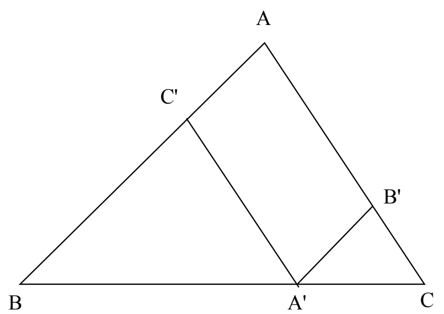
Atunci aria este: $S = x\cdot\sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{x^2(4R^2 - x^2)}$. Suma factorilor variabili x^2 şi $4R^2 - x^2$ este $4R^2$ (constantă). $S_{\max}$ se obține când factorii sunt egali adică $x^2 = 4R^2 - x^2$, rezultă $x = R\sqrt{2}$. Cealaltă latură a dreptunghiului are lungimea $\sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$. Deci dreptunghiul de arie maximă este pătratul înscris.

R13.13. Se consideră un punct A' pe latura (BC) a unui triunghi ABC. Paralela prin A' la latura AC întâlneşte latura AB în punctul C' şi paralela prin A' la latura AB întâlneşte latura AC în punctul B'.

a) Să se exprime aria paralelogramului A'B'AC' în funcție de aria triunghiului BA'C' şi de aria triunghiului CA'B'.

b) Pentru ce poziție a punctului A' aria acestui paraloegram este maximă?

Demonstrație. Poziția punctului A' pe latura [BC] este dată de raportul $\frac{\mathrm{BA'}}{\mathrm{A'C}} = \mathrm{k}\ \ (\mathrm{k} > 0)$.



Atunci obținem $\frac{\mathrm{BA'}}{\mathrm{A'C}+\mathrm{BA'}} = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{k}+1}$, de unde $\frac{\mathrm{BA'}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{k}+1}$. Din $\frac{\mathrm{BA'}}{\mathrm{A'C}} = \mathrm{k}$ mai obținem $\frac{\mathrm{A'C}}{\mathrm{BA'}} = \frac{1}{\mathrm{k}}$, de unde $\frac{\mathrm{A'C}}{\mathrm{BA'+A'C}} = \frac{1}{\mathrm{k}+1}$, deci $\frac{\mathrm{A'C}}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{\mathrm{k}+1}$. Avem:

$$\mathrm{S[A'B'AC']=S[ABC]-S[BA'C']-S[CA'B']} \qquad (*)$$

Fiindcă A'C'||AC, triunghiurile A'BC' şi ABC sunt asemenea. Şi A'B'||AB, atunci triunghiurile A'B'C şi ABC sunt asemenea. Fiindcă raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare putem scrie relațiile:

$$\frac{\mathrm{S[ABC]}}{\mathrm{S[BA'C']}} = \left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA'}}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{k}+1}{\mathrm{k}}\right)^2 \qquad (1)$$

iar

$$\frac{\mathrm{S[ABC]}}{\mathrm{S[CA'B']}} = \left(\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CA'}}\right)^2 = (\mathrm{k}+1)^2 \qquad (2)$$

Din relațiile (1) şi (2) obținem:

$$\frac{S[ABC]}{S[BA'C']} : \frac{S[ABC]}{S[CA'B']} = \frac{(k+1)^2}{k^2} \cdot \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{k^2},$$

deci

$$\frac{S[A'B'C]}{S[BA'C']} = \frac{1}{k^2} \tag{3}$$

Cu relațiile (1), (2), (3), relația (*) devine:

$$S[A'B'AC'] = \frac{(k+1)^2}{k^2} S[BA'C'] - S[BA'C'] - \frac{1}{k^2} S[BA'C'] =$$

$$= S[BA'C']\left(\frac{k^2+2k+1-k^2-1}{k^2}\right) = \frac{2}{k} S[BA'C']$$

Deci

$$S[A'B'AC'] = \frac{2}{k} S[BA'C'] \tag{4}$$

Cu (3), relația (4) devine:

$$S[A'B'AC'] = \frac{2}{k} k^2 S[A'B'C] = 2kS[A'B'C]$$

Deci

$$S[A'B'AC'] = 2kS[A'B'C] \tag{5}$$

Din (4) şi (5) obținem: $S^2[A'B'AC'] = 4S[BA'C']S[A'B'C]$.

b) Din relația (2) rezultă că

$$S[CA'B'] = \frac{1}{(k+1)^2} S[ABC] \tag{6}$$

Din relațiile (5) şi (6) obținem:

$$S[A'B'AC'] = \frac{2k}{(k+1)^2} S[ABC] \tag{7}$$

Maximul ariei S[A'B'AC'] are loc atunci când $\frac{2k}{(k+1)^2}$ este maxim (S[ABC] – constantă). Dar $\frac{2k}{(k+1)^2} = \frac{2}{\frac{k^2+2k+1}{k}} = \frac{2}{k+\frac{1}{k}+2}$, care este maximă când $k+\frac{1}{k}$ este minim. Termenii pozitivi variabili k, $\frac{1}{k}$ au produsul $k \cdot \frac{1}{k} = 1$ (constant) suma $k+\frac{1}{k}$ este minimă când $k = \frac{1}{k}$, de unde $k^2 = 1$ $(k > 0)$ rezultă k=1. Deci A' este mijlocul lui (BC). Atunci din (7) obținem:

$$\text{Maximul ariei } S[A'B'AC'] = \frac{1}{2} S[ABC]$$

R13.14. Determinați cel mai mare număr natural *n* pentru care numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2002 \cdot 2003$ se divide cu 29^{n+11}.

Soluție. Numărul 29 este prim şi divide pe fiecare al 29-lea număr natural. Există 69 (2003:29=69 rest 2) numere mai mici sau egale cu 2003 divizibile cu 29. Există 2 numere mai mici sau egale cu 2003 divizibile cu 29^2 ($2003:29^2=2$ rest 321), iar cu 29^3 nu există numere mai mici sau egale cu 2003, divizibile. Deci numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2002 \cdot 2003$ se divide cu $29^{69+2}=29^{71}$. Atunci $71=n+11 \Rightarrow n=60$. Numărul căutat este 60.

14. Puncte laticiale

Definiţia 14.1. Orice punct care are ambele coordonate exprimate prin numere întregi se numeşte punct laticial.

Probleme rezolvate

R14.1. Să se demonstreze că nu există două puncte laticiale $A(a,b)$ şi $B(c,d)$ $(A \neq B)$ care să aibă aceeaşi distanţă la punctul de coordonate $C\left(\sqrt{3}, \frac{5}{7}\right)$ $(a,b,c,d \in \mathbf{Z})$.

Soluţie. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există astfel de puncte. Distanţa dintre punctele $P(x_1, y_1)$ şi $Q(x_2, y_2)$ este dată de relaţia: $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Atunci fie *A, B* punctele laticiale pentru care *CA*=*CB*. Obţinem:

$$(a-\sqrt{3})^2 + \left(b - \frac{5}{7}\right)^2 = (c-\sqrt{3})^2 + \left(d - \frac{5}{7}\right)^2,$$

care se mai scrie:

$$2(c-a)\cdot\sqrt{3} = c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2\cdot\frac{5}{7}(b-d) \qquad (1)$$

Când $c \neq a$, în membrul stâng este un număr iraţional, iar în membrul drept este un număr raţional, rezultă cu necesitate că $c - a = 0$ şi

$$c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + \frac{10}{7}(b-d) = 0 \qquad (2)$$

Din (2) pentru $c = a$ obţinem: $d^2 - b^2 + \frac{10}{7}(b-d) = 0$, care se mai scrie:

$$(d-b)(d+b) - \frac{10}{7}(d-b) = 0 \Leftrightarrow (d-b)\left(d + b - \frac{10}{7}\right) = 0$$

Fiindcă $b, d \in \mathbf{Z}$ rezultă că $d + b \neq \frac{10}{7}$ şi atunci obţinem că $d = b$. Fiindcă $a = c$ şi $b = d$ rezultă că punctele *A* şi *B* coincid. Deci nu există două puncte laticiale care să aibă aceeaşi distanţă la punctul $C\left(\sqrt{3}, \frac{5}{7}\right)$.

R14.2. Să se arate că nu există în planul raportat la două axe ortogonale, nici un triunghi echilateral, având toate cele trei vârfuri în puncte laticiale.

Soluţie. Presupunem că există un triunghi având vârfurile în puncte laticiale. Putem de asemenea presupune că unul din vârfuri este în originea *O*, iar celelalte două sunt $A(a,b)$, $B(c,d)$. Atunci $OA^2 = a^2 + b^2$, $OB^2 = c^2 + d^2$, iar $BA^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2$.

Triunghiul *OAB* fiind echilateral avem:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2 = x \qquad (1)$$

Fiindcă *a,b,c,d* sunt întregi rezultă că $x \in \mathbf{Z}$. Din (1) obținem:

$$a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - 2(ac+bd) = x$$

Fiindcă $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = x$, rezultă că $x + x - 2(ac+bd) = x$, de unde

$$ax + bd = \frac{x}{2} \qquad (2)$$

Avem relația

$$(ad-bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2 \qquad (3)$$

Ținând seama de (1) și (2), relația (3) devine:

$$(ad-bc)^2 = x \cdot x - \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

de unde obținem: $(ad-bc)^2 = \frac{3x^2}{4}$, rezultă $3 = \left[\frac{2(ad-bc)}{x}\right]^2$ și deci $2\left(\frac{ad+bc}{x}\right) = \pm\sqrt{3}$ relație imposibilă fiindcă în stânga avem un număr rațional iar în dreapta un număr irațional. Deci nu există un triunghi care să satisfacă ipoteza.

R14.3. Să se demonstreze că dacă pentru orice număr natural *n* există în plan un cerc de centru $O(a,b)$, care conține în interiorul său exact *n* puncte laticiale, atunci *a* și *b* nu pot fi simultan numere raționale.

Demonstrație. Fie $x = \frac{c}{d}$ și $y = \frac{e}{d}$ cu $c,e,d \in \mathbf{Z}$ și $d \neq 0$. Punctele laticiale $A(e,-c)$ și $B(-e,c)$ au aceeași distanță până la punctul de coordonate $M(x,y)$ deoarece

$$\left(e - \frac{c}{d}\right)^2 + \left(-c - \frac{e}{d}\right)^2 = \left(-e - \frac{c}{d}\right)^2 + \left(c - \frac{e}{d}\right)^2$$

Deci pentru orice punct de coordonate raționale există două puncte laticiale distincte egal depărtate de acel punct. Dacă $a \in \mathbf{Q}$ și $b \in \mathbf{Q}$ atunci există două puncte laticiale distincte care sunt egal depărtate de punctul de coordonate (a,b). Dacă cercul cu centrul $O(a,b)$ care trece prin aceste două puncte conține în interiorul său *n* puncte laticiale, atunci orice cerc concentric cu el și de rază mai mare va conține în interiorul său cel puțin $n+2$ puncte laticiale. În nici un caz nu există un cerc cu centrul în $O(a,b)$ care să conțină exact $n+1$ puncte. Deci sau $a \notin \mathbf{Q}$ sau $b \notin \mathbf{Q}$.

GEOMETRIE

1. Relații metrice în triunghiul oarecare

1.1. Teoreme ale bisectoarelor

Teorema 1.1.1. (Teorema bisectoarei interioare)

Fie triunghiul ABC, (AD bisectoarea interioară a unghiului A şi D∈(BC), atunci:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$

Demonstrație. Ducem prin B o paralelă la AD care întâlneşte pe CA în M. Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul CBM şi obținem:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AM}{AC} \tag{1}$$

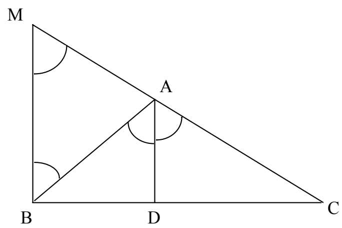
(AD fiind bisectoarea interioară a unghiului A, avem că $\angle CAD \equiv \angle BAD$, dar $\angle BAD \equiv \angle ABM$ (alterne interne) şi $\angle BMA \equiv \angle DAC$ (corespondente). Deci $\angle BMA \equiv \angle ABM$. Obținem astfel că triunghiul ABM este isoscel cu

$$AM=AB \tag{2}$$

Din relațiile (1) şi (2) obținem că $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$, şi astfel teorema este demonstrată.

Din $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$ obținem $\frac{DB+DC}{DC}=\frac{AB+AC}{AC}$ sau $\frac{BC}{DC}=\frac{AB+AC}{AC}$, de unde $DC=\frac{BC\cdot AC}{AB+AC}$, care se mai scrie

$$DC=\frac{ab}{b+c} \tag{3}$$



Atunci $BD=BC-DC=a-\frac{ab}{b+c}=\frac{ac}{b+c}$, deci

$$DB=\frac{ac}{b+c} \tag{4}$$

Observație. Pentru un plus de precizie se poate numi aceasta "prima teoremă a bisectoarei interioare".

Teorema 1.1.2. (Teorema reciprocă a teoremei bisectoarei interioare)

Fie triunghiul ABC, $D\in(BC)$ astfel încât $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$, atunci (AD este bisectoarea interioară a unghiului $\angle A$.

Demonstrație. Facem aceeași construcție ca la teorema directă, adică ducem prin B o paralelă la AD care întâlnește pe CA în M. Din ipoteză avem că

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC} \tag{1}$$

Fiindcă AD||MB obținem

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AM}{AC} \tag{2}$$

Din (1) și (2) obținem AB=AM, deci triunghiul AMB este isoscel cu

$$\angle ABM\equiv\angle BMA \tag{3}$$

Din paralelism avem:

$$\angle MBA\equiv\angle BAD \text{ (alterne interne)} \tag{4}$$

și

$$\angle BMA\equiv\angle DAC \text{ (corespondente)} \tag{5}$$

Din relațiile (3), (4), (5) obținem că $\angle BAD\equiv\angle DAC$, adică (AD este bisectoarea interioară a unghiului A.

Teorema 1.1.3. (Teorema bisectoarei exterioare)

Fie triunghiul ABC cu $AB\neq AC$. Dacă (AE este bisectoarea exterioară a unghiului $\angle A$, $E\in BC$, atunci $\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{AC}$.

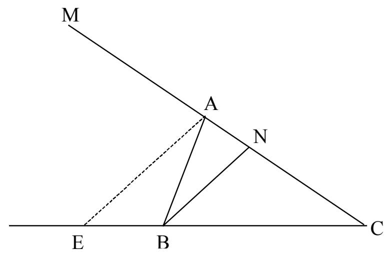
Demonstrație. Ducem prin punctul B o paralelă la AE care întâlnește pe AC în N. Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul CAE:

$$\frac{EB}{EC}=\frac{AN}{AC} \tag{1}$$

Din paralelism obținem $\angle ANB\equiv\angle MAE$ (corespondente), $\angle ABN\equiv\angle EAB$ (alterne interne). Din ipoteză avem că $\angle MAE\equiv\angle EAB$, deci $\angle ANB\equiv\angle ABN$, adică triunghiul ABN este isoscel cu

$$(AB)\equiv(AN) \tag{2}$$

Din (1) și (2) obținem: $\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{AC}$ și teorema este demonstrată.



Din $\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{EC}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$ obținem (în ipoteza AC>AB)

$$\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{EC}-\mathrm{EB}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}-\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}-\mathrm{AB}}$$

de unde $\mathrm{EB}=\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}-\mathrm{AB}}$, care se mai scrie $\mathrm{EB}=\frac{a\cdot c}{b-c}$. Atunci

$$\mathrm{EC}=\mathrm{EB}+\mathrm{BC}=\frac{ac}{b-c}+a=\frac{ac+ab-ac}{b-c}=\frac{ab}{b-c}$$

Deci $\mathrm{EC}=\frac{ab}{b-c}$.

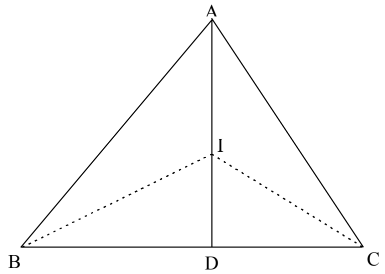
Observații. 1) Condiția AB≠AC din teorema bisectoarei exterioare este esențială deoarece dacă AB=AC atunci bisectoarea exterioară a unghiului A este paralelă cu BC, deci nu mai există E.

2) Teorema bisectoarei exterioare a fost demonstrată de Pappus.

3) Un plus de precizie cere să numim această teoremă drept "prima a bisectoarei exterioare".

Aplicație. Dacă I este centrul cercului înscris în ΔABC şi $\{D\}=AI\cap BC$ are loc relația: $\frac{\mathrm{ID}}{\mathrm{IA}}=\frac{a}{b+c}$.

Demonstrație. Cu teorema bisectoarei în ΔABD obținem: $\frac{\mathrm{ID}}{\mathrm{IA}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BA}}$, dar $\mathrm{BD}=\frac{ac}{b+c}$, atunci $\frac{\mathrm{ID}}{\mathrm{IA}}=\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{1}{c}$, deci $\frac{\mathrm{ID}}{\mathrm{IA}}=\frac{a}{b+c}$.



Teorema 1.1.4. (Teorema reciprocă a teoremei bisectoarei exterioare)
Fie triunghiul ABC şi $E \in BC \setminus [BC]$ astfel încât

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}, \tag{1}$$

atunci (AE este bisectoarea exterioară a unghiului $\angle A$.
Demonstrație. Trebuie ca $AB \neq AC$, deoarece dacă $AB=AC$, din (1) ar rezulta $EB=EC$, relație imposibilă din cauza poziției lui E pe BC. Facem aceeaşi construcție ca la teorema bisectoarei exterioare, adică ducem prin B o paralelă la AE care întâlneşte pe CA în N. Cu teorema lui Thales în triunghiul CAE obținem: $\frac{EB}{EC} = \frac{AN}{AC}$, iar din ipoteză $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$, deci $AN=AB$, adică ΔABN este isoscel cu $\angle ABN \equiv \angle ANB$. Dar $\angle ABN \equiv \angle EAB$ şi $\angle ANB \equiv \angle MAE$, deci $\angle EAB \equiv \angle MAE$, relație ce asigură că (AE este bisectoarea exterioară a unghiului $\angle A$.

1.2. Teorema lui Pitagora generalizată

Teorema lui Pitagora din triunghiul dreptunghic admite o generalizare pentru triunghiul oarecare.

Teorema 1.2.1. Într-un triunghi oarecare pătratul lungimii unei laturi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi din care se scade sau se adună dublul produsului lungimii uneia dintre aceste laturi cu lungimea proiecției celeilalte pe ea

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CB \cdot CD \tag{1}$$

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 + 2 \cdot CB \cdot CD \tag{2}$$

Demonstrație. Fie ABC un triunghi şi D proiecția lui A pe BC. Din triunghiurile ABD şi ACD dreptunghice în D obținem:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2, \quad AC^2 = AD^2 + DC^2$$

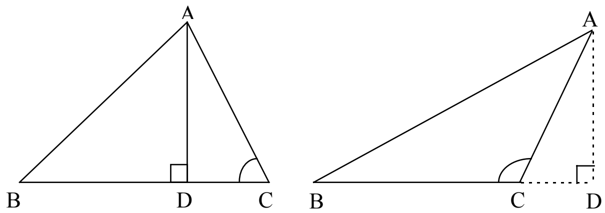
1) Dacă $m(\angle C) < 90°$ atunci trebuie să arătăm că:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CB \cdot CD \tag{1}$$

Avem BD=|BC-CD|. Într-adevăr dacă m(∠B)<90° atunci D∈[BC] şi BD=BC-CD. Dacă m(∠B)=90° D coincide cu B şi avem BD=0=BC-BC. Dacă m(∠B)>90°, B∈(CD) şi BD=DC-BC=|BC-DC|. Avem deci

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + (BC - CD)^2 =$$

$$= (AD^2 + DC^2) + BC^2 - 2BC \cdot CD = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CB \cdot CD$$



2) Dacă m(∠C)>90° trebuie să demonstrăm că:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 + 2 \cdot CB \cdot CD$$

În acest caz avem BD=BC+CD şi obţinem:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + (BC + CD)^2 =$$

$$= (AD^2 + DC^2) + BC^2 + 2BC \cdot CD = CA^2 + CB^2 + 2CB \cdot CD$$

Observaţii. 1) Semnul din faţa dublului produs este influenţat numai de unghiul opus laturii pe care o calculăm.

2) Enunţul teoremei lui Pitagora generalizată nu prevede drept caz special alternativa m(∠C)=90° în care funcţionează teorema lui Pitagora propriu zisă: $AB^2 = CA^2 + CB^2$. Acest caz poate fi inclus, relaţiile (1) sau (2) conservându-şi valabilitatea.

3) Teorema lui Pitagora generalizată ne ajută să facem o demonstraţie rapidă a reciprocei teoremei lui Pitagora.

4) Teorema lui Pitagora generalizată şi reciproca teoremei lui Pitagora ne permit să precizăm (după măsura unghiurilor) felul triunghiului: obtuzunghic, ascuţitunghic, dreptunghic.

1.3. Teorema lui Stewart

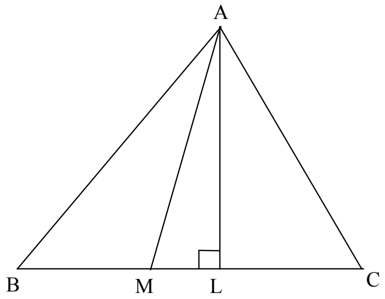
Teorema 1.3.1. Fie M un punct pe latura [BC] a unui triunghi ABC. Are loc relaţia:

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - BC \cdot BM \cdot CM \qquad (1)$$

Demonstraţie. Fie L proiecţia punctului A pe BC. Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile ACM şi AMB. Obţinem:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \cdot ML \mid \cdot BM$$

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \cdot ML \mid \cdot MC$$



Dacă înmulțim cele două egalități, prima cu BM, iar a doua cu MC şi le adunăm membru cu membru se va reduce termenul 2MC·BM·ML şi obținem:

$$AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC = AM^2 \cdot BM + MC^2 \cdot BM + AM^2 \cdot MC + MB^2 \cdot MC \Leftrightarrow$$

$$AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC = AM^2(BM + MC) + MC^2 \cdot BM + MB^2 \cdot MC \Leftrightarrow$$

$$AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC = AM^2 \cdot BC + MC \cdot BM(MC + MB) \Leftrightarrow$$

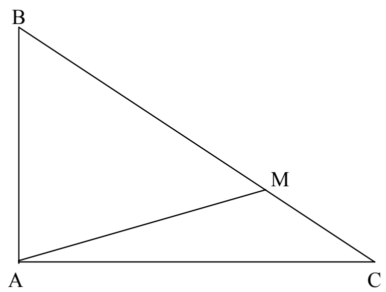
$$AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC = AM^2 \cdot BC + MC \cdot BM \cdot BC \Leftrightarrow$$

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BC \cdot BM \cdot MC$$

adică obținem relația de demonstrat.

1.4. Teorema lui Van Aubel în triunghiul dreptunghic

Teorema 1.4.1. Dacă M este un punct oarecare pe ipotenuza [BC] a unui triunghi dreptunghic ABC, are loc relația:



$$MC^2 \cdot AB^2 + MB^2 \cdot AC^2 = AM^2 \cdot BC^2 \quad (1^*)$$

Demonstrație. Aplicăm teorema lui Stewart:

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BC \cdot BM \cdot MC \quad (1)$$

Înmulțim relația (1) cu MC şi obținem:

$$AM^2 \cdot BC \cdot MC = AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot BM \cdot MC - BC \cdot BM \cdot MC^2 \quad (2)$$

Înmulțim relația (1) cu MB şi obținem:

$$AM^2 \cdot BC \cdot MB = AB^2 \cdot MC \cdot MB + AC^2 \cdot BM^2 - BC \cdot BM^2 \cdot MC \quad (3)$$

Adunăm membru cu membru relațiile (2) şi (3) şi grupând, obținem:

$$AM^2 \cdot BC \cdot (MC + MB) = AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot BM^2 +$$
$$+ AB^2 \cdot MC \cdot MB + AC^2 \cdot MB \cdot MC - BC \cdot BM \cdot MC(MC + MB)$$

sau

$$AM^2 \cdot BC^2 = AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot BM^2 + MC \cdot MB(AB^2 + AC^2) -$$
$$- BC^2 \cdot BM \cdot MC \qquad (4)$$

Dar $AB^2 + AC^2 = BC^2$ şi atunci (4) devine

$$AM^2 \cdot BC^2 = AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot BM^2 + MC \cdot MB \cdot BC^2 - BC^2 \cdot BM \cdot MC$$

deci $AM^2 \cdot BC^2 = AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot BM^2$.

Corolar 1.4.1. Pătratul lungimii bisectoarei este medie armonică între pătratele lungimilor segmentelor determinate de ea pe ipotenuză.

Dacă AM este bisectoare atunci

$$AM^2 = \frac{2MB^2 \cdot MC^2}{MB^2 + MC^2}.$$

Cu teorema bisectoarei obținem $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC}$, de unde $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{MB^2}{MC^2}$ sau

$$AB^2 \cdot MC^2 = AC^2 \cdot MB^2 \qquad (5)$$

Cu (5) relația lui Van Aubel (1*) se mai scrie

$$2AB^2 \cdot MC^2 = BC^2 \cdot MA^2 \Leftrightarrow 2AB^2 \cdot MC^2 = (AB^2 + AC^2) \cdot MA^2$$

sau

$$\frac{2}{MA^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot MC^2} \Leftrightarrow \frac{2}{AM^2} = \frac{AB^2}{AB^2 \cdot MC^2} + \frac{AC^2}{AB^2 \cdot MC^2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{2}{AM^2} = \frac{1}{MC^2} + \frac{AC^2}{AC^2 \cdot MB^2} \Leftrightarrow \frac{2}{AM^2} = \frac{1}{MC^2} + \frac{1}{MB^2}$$

deci $AM^2 = \frac{2MB^2 \cdot MC^2}{MC^2 + MB^2}$.

Corolar 1.4.2. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, avem:

$$MA^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{2}$$

Dacă AB=AC relația (1*) devine:

$$AB^2(MC^2 + MB^2) = AM^2 \cdot 2AB^2 \quad (AB^2 + AB^2 = BC^2)$$

sau $AM^2 = \frac{MC^2 + MB^2}{2}$.

1.5. Calculul lungimii bisectoarelor interioare

Teorema 1.5.1. Fie ABC un triunghi şi [AD bisectoarea interioară a unghiului $\angle$BAC, cu D$\in$(BC). Atunci $\mathrm{AD}^2 = \dfrac{4bc}{(b+c)^2} \cdot p(p-a)$ sau $\mathrm{AD} = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$ (unde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$) sau $l_a = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

Demonstrație. Din teorema bisectoarei avem că $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$, care se mai scrie $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$, de unde obținem: $\dfrac{c+b}{b} = \dfrac{\mathrm{BD}+\mathrm{DC}}{\mathrm{DC}} \Leftrightarrow \dfrac{c+b}{b} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DC}}$, de unde $\mathrm{DC} = \dfrac{ab}{b+c}$. Atunci $\mathrm{BD} = \mathrm{BC} - \mathrm{DC} = a - \dfrac{ab}{b+c} = \dfrac{ac}{b+c}$. Deci $\mathrm{BD} = \dfrac{ac}{b+c}$. Vom scrie relația lui Stewart pentru cazul când M este în D. Obținem:

$$\mathrm{DA}^2 \cdot \mathrm{BC} = \mathrm{AB}^2 \cdot \mathrm{DC} + \mathrm{AC}^2 \cdot \mathrm{BD} - \mathrm{BC} \cdot \mathrm{BD} \cdot \mathrm{DC}$$

Înlocuind pe BC cu a, AB cu c, AC cu b şi DC cu $\dfrac{ab}{b+c}$, iar BD cu $\dfrac{ac}{b+c}$ obținem:

$$\mathrm{AD}^2 \cdot a = c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} + b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} - a \cdot \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c},$$

de unde

$$\mathrm{AD}^2 = c^2 \frac{b}{b+c} + b^2 \frac{c}{b+c} - a^2 \frac{bc}{(b+c)^2},$$

care se mai scrie:

$$\mathrm{AD}^2 = \frac{bc}{b+c}\left(c+b-\frac{a^2}{b+c}\right) = \frac{bc}{b+c}\left[\frac{(b+c)^2-a^2}{b+c}\right] =$$

$$= \frac{bc}{b+c} \cdot \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{b+c} = \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot 2p(2p-2a)$$

(Am ținut seama că $2p = a+b+c$ şi atunci $2p-2a = b+c-a$).

Deci $\mathrm{AD}^2 = \dfrac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$, adică relația de demonstrat.

1.6. Calculul lungimii înălțimilor unui triunghi

Teorema 1.6.1. Dacă ABC este un triunghi oarecare avem

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

unde h_a este înălțimea corespunzătoare laturii a, iar $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Demonstrație. În triunghiul ABC, ducem înălțimea AA' (h_a). Dintre cele două unghiuri B şi C cel puțin unul este ascuțit. Să presupunem că acesta este B. Cu teorema lui Pitagora generalizată obținem:

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\cdot \mathrm{BC}\cdot \mathrm{A'C},$$

de unde obținem:

$$2\cdot \mathrm{BC}\cdot \mathrm{A'C} = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{AB}^2 \Leftrightarrow \mathrm{A'C} = \frac{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{BC}},$$

care se mai scrie $\mathrm{A'C} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$.

Din triunghiul dreptunghic AA'C (m(∠A')=90°) cu teorema lui Pitagora obținem:

$$AA'^2 = AC^2 - A'C^2 = b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2 =$$

$$= \left(b - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\left(b + \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right) =$$

$$= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}\cdot\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a} =$$

$$= \frac{[c^2 - (a^2+b^2-2ab)]}{2a}\cdot\left[\frac{(a+b)^2 - c^2}{2a}\right] =$$

$$= \frac{c^2 - (a-b)^2}{2a}\cdot\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2a} =$$

$$= \frac{(c+a-b)(c-a+b)(a+b-c)(a+b+c)}{4a^2} =$$

$$= \frac{(2p-2b)(2p-2a)(2p-2c)2p}{4a^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$$

$$(2p-2a = b+c-a,\quad 2p-2b = a-b+c,\quad 2p-2c = a+b-c)$$

Deci $\mathrm{AA'}^2 = \dfrac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$, de unde

$$\mathrm{AA'} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

adică tocmai relația de demonstrat.

1.7. Teorema medianei

Teorema 1.7.1. Într-un triunghi ABC avem relația:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}, \tag{1}$$

unde a=BC, b=CA, c=AB, m_a=AA', A' este mijlocul lui [BC].

Demonstrație. Scriem relația lui Stewart în cazul când M este mijlocul A' al segmentului [BC]. Obținem:

$$\mathrm{A'A}^2 \cdot \mathrm{BC} = \mathrm{AB}^2 \cdot \mathrm{A'C} + \mathrm{AC}^2 \cdot \mathrm{A'B} - \mathrm{BC} \cdot \mathrm{BA'} \cdot \mathrm{CA'} \Leftrightarrow$$

$$m_a^2 \cdot a = c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} - a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \Leftrightarrow$$

$$m_a^2 = \frac{2(c^2+b^2)-a^2}{4},$$

adică relația de demonstrat.

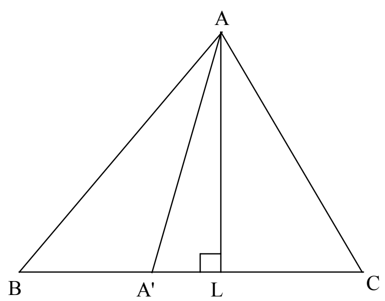


Fig. 1.

Probleme rezolvate

R1.7.1. În orice triunghi suma pătratelor lungimilor medianelor este trei pătrimi din suma pătratelor lungimilor laturilor, adică:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) \tag{2}$$

Demonstrație. Din relația (1) şi analoagele obținem:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}, \quad m_b^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}.$$

Atunci

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} + \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} + \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} =$$

$$= \frac{2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2}{4} = \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}.$$

R1.7.2. Dacă G este punctul de concurență a medianelor AA', BB', CC' al triunghiului ABC, să se demonstreze relația:

$$(\mathrm{GA}-\mathrm{GA'})\cdot \mathrm{AA'}+(\mathrm{GB}-\mathrm{GB'})\cdot \mathrm{BB'}+(\mathrm{GC}-\mathrm{GC'})\cdot \mathrm{CC'}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}$$

Soluție. Ținem seama că centrul de greutate al unui triunghi se găseşte la $\frac{2}{3}$ de vârf şi la $\frac{1}{3}$ de bază, adică $\mathrm{GA}=\frac{2}{3}m_a$, $\mathrm{GA'}=\frac{1}{3}m_a$, $\mathrm{GB}=\frac{2}{3}m_b$, $\mathrm{GB'}=\frac{1}{2}m_b$, $\mathrm{GC}=\frac{2}{3}m_c$, $\mathrm{GC'}=\frac{1}{3}m_c$, relația de demonstrat devine:

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)m_a^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)m_b^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)m_c^2=\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{3}=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}.$$

Am ținut seama că $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

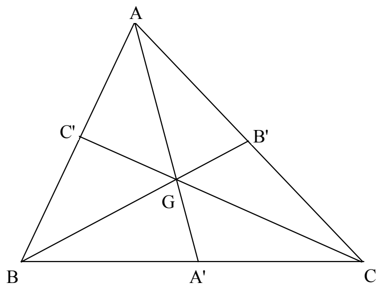


Fig. 2.

R1.7.3. Într-un triunghi dreptunghic cu lungimile catetelor *b* şi *c* şi lungimea ipotenuzei *a* avem relația

$$m_b^2+m_c^2=\frac{5a^2}{4} \tag{4}$$

Demonstrație. Într-un triunghi dreptunghic mediana m_a corespunzătoare ipotenuzei *a*are lungimea $\frac{a}{2}$. Atunci folosind relația

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

şi ținând seama că $b^2+c^2=a^2$ (teorema lui Pitagora), obținem:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + a^2),$$

de unde

$$m_b^2 + m_c^2 = \frac{5a^2}{4}, \tag{5}$$

iar dacă triunghiul este dreptunghic isoscel relația (4) devine $2m_b^2 = \frac{5a^2}{4}$, de unde $m_b^2 = \frac{5a^2}{8}$.

R1.7.4. Triunghiul cu două mediane congruente este isoscel.

Soluție. Din $m_a = m_b \Rightarrow m_a^2 = m_b^2$ sau

$$\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4},$$

care se mai scrie $2b^2 + 2c^2 - a^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$, de unde $3a^2 = 3b^2$, deci $a = b$.

R1.7.5. Diferența pătratelor lungimilor a două laturi ale unui triunghi este egală cu dublul produs dintre lungimea laturii a treia şi lungimea proiecției medianei corespunzătoare pe acea latură.

Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile ABA' şi ACA' obținem (Fig. 1):

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{A'A}^2 + \mathrm{A'B}^2 + 2\mathrm{A'B} \cdot \mathrm{A'L}$$

şi

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{A'A}^2 + \mathrm{A'C}^2 - 2\mathrm{A'C} \cdot \mathrm{A'L},$$

de unde prin scădere membru cu membru obținem:

$$\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AC}^2 = 2\mathrm{CB} \cdot \mathrm{A'L}$$

(am ținut seama că A'B=A'C) relație care se mai scrie (fără a restrânge generalitatea considerăm AB>AC)

$$c^2 - b^2 = 2a \cdot \mathrm{A'L} \tag{6}$$

adică:

R1.7.6. Se consideră triunghiul ABC cu mediana AD şi înălțimea AE. Să se demonstreze relația:

$$\mathrm{AB}^2 - \left(\mathrm{AD}^2 + \frac{\mathrm{BC}^2}{4}\right) = \mathrm{BC} \cdot \mathrm{DE}$$

Soluție. În triunghiul ABD cu m(∠ADB)<90°, aplicăm teorema lui Pitagora generalizată:

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BD}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\mathrm{BD} \cdot \mathrm{DE} \tag{*}$$

Aplicăm aceeaşi teoremă în triunghiul ADC cu m(∠ADC)>90° şi obținem:

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{CD}^2 + 2\mathrm{CD} \cdot \mathrm{DE} \tag{**}$$

Adunăm membru cu membru relațiile (*) şi (**) şi obținem:

$$AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2 \qquad (***)$$

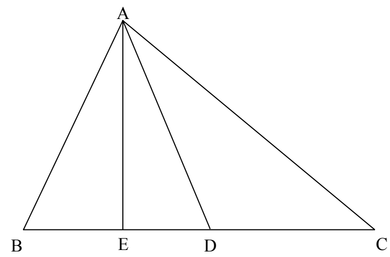


Fig. 3.

Din relația (6) avem:

$$AB^2 - AC^2 = 2BC \cdot ED$$

Adunând membru cu membru ultimele două relații obținem:

$$2AB^2 = 2BD^2 + 2AD^2 + 2BC \cdot ED$$

sau

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + BC \cdot ED,$$

care se mai scrie:

$$AB^2 - AD^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = BC \cdot ED,$$

relație care trebuia demonstrată.

1.8. Teorema lui Leibniz

Teorema 1.8.1. Dacă M este un punct arbitrar în planul triunghiului ABC, iar G este centrul de greutate al triunghiului, are loc relația:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \qquad (1^*)$$

Demonstrație. Fie A' mijlocul lui [BC]. Scriem relația lui Stewart pentru triunghiul MAA' și punctul $G \in (AA')$ și obținem:

$$MG^2 \cdot AA' = MA^2 \cdot A'G + MA'^2 \cdot AG - AA' \cdot AG \cdot GA'$$

Atunci obținem:

$$MG^2 = \frac{1}{3} \cdot MA^2 + \frac{2}{3} \cdot MA'^2 - \frac{2}{9} AA'^2 \qquad (1)$$

Fiindcă MA' este mediană în triunghiul MBC, avem

$$MA'^2 = \frac{2(MB^2 + MC^2) - BC^2}{4} \qquad (2)$$

Cu (2), relația (1) devine:

$$MG^2 = \frac{1}{3} MA^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2(MB^2 + MC^2) - BC^2}{4} - \frac{2}{9} AA'^2,$$

care se mai scrie (prin înmulțirea cu 3)

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{BC^2}{2} - \frac{2}{3}AA'^2 \qquad (3)$$

Fiindcă GA' este mediană în triunghiul GBC obținem:

$$GA'^2 = \frac{2(GB^2 + GC^2) - BC^2}{4},$$

de unde

$$BC^2 = 2(GB^2 + GC^2) - 4GA'^2 \qquad (4)$$

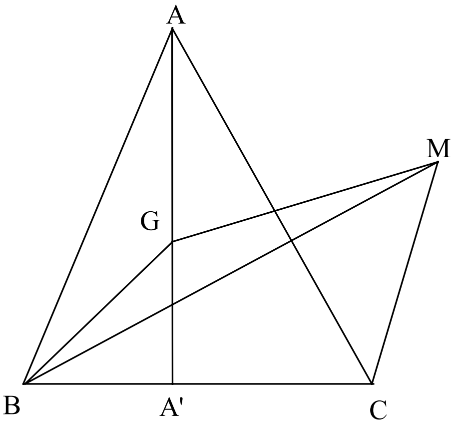


Fig. 4.

Cu (4), relația (3) devine:

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - GB^2 - GC^2 + 2GA'^2 - \frac{2}{3}AA'^2 \qquad (5)$$

Folosind egalitățile $GA' = \frac{1}{2}GA$ și $AA' = \frac{3}{2}GA$, relația (5) devine:

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - GB^2 - GC^2 + 2 \cdot \frac{GA^2}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}GA^2,$$

care se mai scrie

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2,$$

relație ce trebuia demonstrată.

Consecința 1.8.1. Suma pătratelor distanțelor de la M la vârfurile triunghiului este minimă când M coincide cu G.

Fiindcă $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ și $GA = \frac{2}{3}m_a$, $GB = \frac{2}{3}m_b$, $GC = \frac{2}{3}m_c$ atunci (1*) devine:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (6)$$

iar când MG=0 obținem $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2+\mathrm{MC}^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

Consecința 1.8.2. Dacă M coincide cu centrul cercului circumscris O, atunci

$$\mathrm{OG}^2=\frac{1}{9}[9R^2-(a^2+b^2+c^2)] \qquad (7)$$

Când M coincide cu O avem OA=OB=OC=R, iar (6) devine:

$$\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2=3\mathrm{OG}^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

adică $3R^2=3\mathrm{OG}^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$, de unde obținem:

$\mathrm{OG}^2=\frac{9R^2-(a^2+b^2+c^2)}{9}$, adică relația (7).

Din $\mathrm{OG}^2\geq 0$ rezultă $9R^2-(a^2+b^2+c^2)\geq 0$, de unde $R^2\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

Consecința 1.8.3.

$$\mathrm{OH}^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$$

$$\mathrm{GH}^2=\frac{4}{9}[9R^2-(a^2+b^2+c^2)]$$

Se folosesc relațiile OH=3·OG şi GH=2·OG. Pentru $\mathrm{OG}=\frac{\mathrm{OH}}{3}$, relația (7) devine

$$\frac{\mathrm{OH}^2}{9}=\frac{1}{9}[9R^2-(a^2+b^2+c^2)],$$

de unde

$$\mathrm{OH}^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2) \qquad (8)$$

Cu GH=2·OG, adică $\mathrm{OG}=\frac{\mathrm{GH}}{2}$, relația (7) devine

$$\frac{\mathrm{GH}^2}{4}=\frac{1}{9}[9R^2-(a^2+b^2+c^2)],$$

de unde

$$\mathrm{GH}^2=\frac{4}{9}[9R^2-(a^2+b^2+c^2)]$$

Consecința 1.8.4. Dacă O_9 este centrul cercului lui Euler avem

$$O_9G^2 = \frac{1}{36}[9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]$$

Avem relația $GO_9 = \frac{OH}{6}$, de unde $OH^2 = 36 \cdot GO_9^2$ iar din (8) obținem:

$$36GO_9^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

de unde

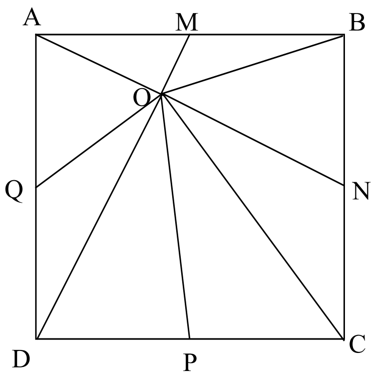
$$GO_9^2 = \frac{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{36}.$$

1.9. Aplicații

1.9.1. Fie A, B, C, D vârfurile unui pătrat şi M, N, P, Q mijloacele laturilor lui. Să se demonstreze că, dacă O este un punct oarecare din planul pătratului, atunci expresia:

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 - (OM^2 + ON^2 + OP^2 + OQ^2)$$

are ca valoare aria pătratului.



Demonstrație. Aplicăm teorema medianei în triunghiurile: AOB, BOC, COD, DOA şi obținem:

$$OM^2 = \frac{2(OA^2 + OB^2) - AB^2}{4}, \quad ON^2 = \frac{2(OB^2 + OC^2) - BC^2}{4}$$

$$OP^2 = \frac{2(OC^2 + OD^2) - CD^2}{4}, \quad OQ^2 = \frac{2(OD^2 + OA^2) - AD^2}{4}$$

Adunând membru cu membru cele patru relații de mai sus obținem:

$$4(OM^2 + ON^2 + OP^2 + OQ^2) = 4(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2) - 4AB^2$$

(am ținut seama că AB=BC=CD=DA), de unde obținem

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 - OM^2 + ON^2 + OP^2 + OQ^2 = AB^2,$$

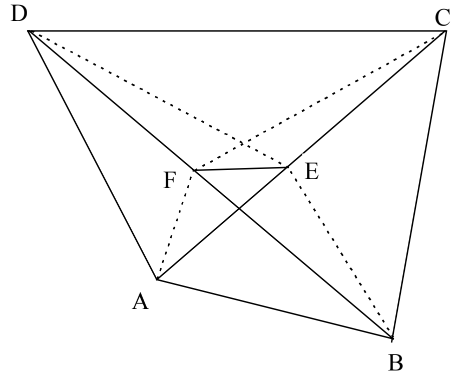
adică relația cerută.

Teorema 1.9.2. (Teorema lui Euler pentru patrulater)

În orice patrulater ABCD suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor plus de patru ori pătratul segmentului care uneşte mijloacele diagonalelor, adică

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BC^2 + 4EF^2 \qquad (1^*)$$

unde [AC] şi [BD] sunt diagonalele patrulaterului ABCD, iar E este mijlocul lui [AC], F este mijlocul lui [BD].



Demonstrație. Cu teorema medianei în triunghiul ABC obținem:

$$BE^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - AC^2}{4}$$

Din triunghiul ADC cu aceeaşi teoremă obținem:

$$DE^2 = \frac{2(AD^2 + DC^2) - AC^2}{4}$$

Din triunghiurile ABD şi CBD, pentru medianele [AF] şi [CF] avem relațiile:

$$AF^2 = \frac{2(AD^2 + AB^2) - BD^2}{4}, \quad CF^2 = \frac{2(CD^2 + CB^2) - DB^2}{4}$$

Adunând membru cu membru cele patru relații de mai sus obținem:

$$BE^2 + DE^2 + AF^2 + CF^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - \frac{AC^2}{2} - \frac{BD^2}{2} \qquad (1)$$

Aplicăm teorema medianei în triunghiurile BED şi AFC şi obținem

$$EF^2 = \frac{2(BE^2 + DE^2) - BD^2}{4}, \quad EF^2 = \frac{2(AF^2 + CF^2) - AC^2}{4}$$

de unde

$$BE^2 + DE^2 = 2EF^2 + \frac{BD^2}{2} \qquad (2)$$

şi

$$AF^2 + CF^2 = 2EF^2 + \frac{AC^2}{2} \qquad (3)$$

Folosind relațiile (2) şi (3), relația (1) devine:

$$2EF^2 + \frac{BD^2}{2} + 2EF^2 + \frac{AC^2}{2} = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - \frac{AC^2}{2} - \frac{BD^2}{2},$$

relație echivalentă cu

$$4EF^2 + AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2,$$

adică tocmai relația de demonstrat.

Cazuri particulare

1) ABCD – paralelogram (mijloacele diagonalelor coincid). Deci EF=0. Atunci (1*) devine

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2,$$

relație care se mai scrie $2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$ deci:

În orice paralelogram suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor.

2) ABCD – trapez cu bazele AB şi CD (AB>CD). Atunci $EF = \frac{AB - DC}{2}$ şi (1*) devine

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4\left(\frac{AB - DC}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2AB \cdot DC,$$

deci

Într-un trapez suma pătratelor lungimilor diagonalelor este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor neparalele plus de două ori produsul lungimilor bazelor.

3) ABCD este dreptunghi.

Atunci relația (1*) devine

$$2(AB^2 + BC^2) = 2AC^2 \quad \text{sau} \quad AB^2 + BC^2 = AC^2$$

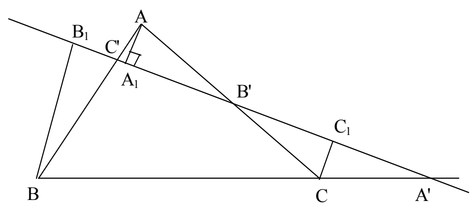
adică obținem teorema lui Pitagora.

1.10. Teorema lui Menelaus

Teorema 1.10.1. Fie ABC un triunghi A', B', C' trei puncte astfel încât A'∈BC, B'∈CA, C'∈AB. Dacă punctele A', B', C' sunt coliniare, atunci are loc relația:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

Demonstrație. 1) Transversala C'A' intersectează două laturi şi prelungirea celeilalte laturi a triunghiului.



Proiectăm vârfurile triunghiului ABC pe dreapta A'C', şi obţinem punctele A_1, B_1, C_1.

Fiindcă $CC_1 \| BB_1$ rezultă că $\Delta A'BB_1 \sim \Delta A'CC_1$. Atunci obţinem:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{BB_1}{CC_1} \quad (1)$$

Triunghiurile CC_1B' şi AA_1B' sunt asemenea ($CC_1 \| AA_1$) şi atunci

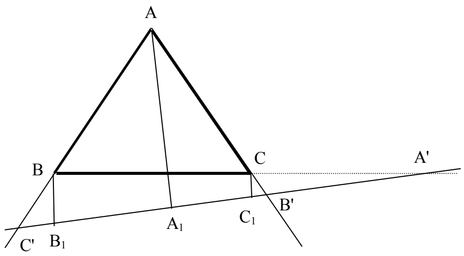
$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{CC_1}{AA_1} \quad (2)$$

Şi triunghiurile $AC'A_1$ şi $BC'B_1$ sunt asemenea ($AA_1 \| BB_1$) şi avem:

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{AA_1}{BB_1} \quad (3)$$

Înmulţind relaţiile (1), (2) şi (3) membru cu membru şi simplificând, obţinem: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.

2) Transversala C'A' intersectează prelungirile laturilor triunghiului ABC.



Proiectăm vârfurile triunghiului ABC pe dreapta A'C' şi obţinem respectiv punctele A_1, B_1, C_1.

Fiindcă $CC_1 \| BB_1$, triunghiurile $A'BB_1$ şi $A'CC_1$ sunt asemenea. Atunci are loc relaţia:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{BB_1}{CC_1} \quad (1)$$

Din asemănarea triunghiurilor $B'CC_1$ şi $B'AA_1$ ($CC_1 \| AA_1$) obţinem:

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{CC_1}{AA_1} \quad (2)$$

Acum din asemănarea triunghiurilor $C'AA_1$ şi $C'BB_1$ ($AA_1 \| BB_1$) rezultă că:

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{AA_1}{BB_1} \quad (3)$$

Prin înmulţirea relaţiilor (1), (2) şi (3) membru cu membru şi după simplificări, obţinem: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, adică relaţia ce trebuia demonstrată.

Teorema 1.10.2. (Reciproca teoremei lui Menelaus)

Considerăm un triunghi ABC şi punctele A'∈BC, B'∈AC, C'∈AB. Dacă două dintre punctele A', B', C' sunt situate pe două laturi ale triunghiului, iar al treilea punct este situat pe prelungirea celei de-a treia laturi sau că toate punctele A', B', C' sunt pe prelungirile laturilor triunghiului şi are loc relaţia:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1 \tag{1}$$

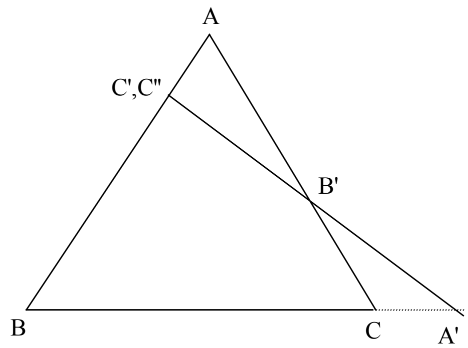
atunci punctele A', B', C' sunt coliniare.

Demonstraţie. Considerăm cazul când două puncte sunt pe laturi şi celălalt pe prelungirea celei de-a treia laturi. Presupunem că dreapta A'B' intersectează latura [AB] în punctul C"≠C'. Aplicăm teorema lui Menelaus pentru punctele A', B', C". Obţinem:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C''A}{C''B}=1 \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem:

$$\frac{C'A}{C'B}=\frac{C''A}{C''B}$$

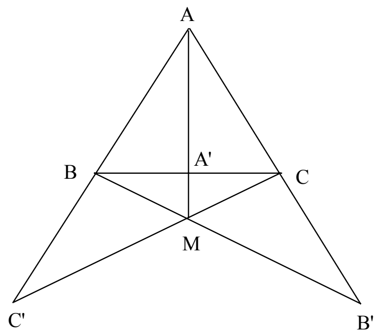


Fiindcă există un singur punct interior unui segment care împarte segmentul într-un raport dat, rezultă că punctul C" coincide cu C', adică punctele A', B', C' sunt coliniare.

1.11. Teorema lui Van Aubel

Teorema 1.11.1. Fie ABC un triunghi şi punctele A'∈(BC), B'∈CA, C'∈AB. Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente într-un punct M atunci are loc relaţia:

$$\frac{B'A}{B'C}+\frac{C'A}{C'B}=\frac{MA}{MA'}$$



Demonstrație. Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul AA'C şi transversala BB'. Obținem:

$$\frac{BA'}{BC}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{MA}{MA'}=1 \qquad (1)$$

Din relația (1) obținem:

$$\frac{B'A}{B'C}=\frac{BA'}{BC}\cdot\frac{MA}{MA'} \qquad (2)$$

Aplicăm acum teorema lui Menelaus pentru triunghiul AA'B şi transversala CC'. Obținem:

$$\frac{CB}{CA'}\cdot\frac{MA'}{MA}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1,$$

de unde rezultă că

$$\frac{C'A}{C'B}=\frac{CA'}{CB}\cdot\frac{MA}{MA'} \qquad (3)$$

Adunând relațiile (2) şi (3) membru cu membru obținem:

$$\frac{B'A}{B'C}+\frac{C'A}{C'B}=\frac{MA}{MA'}\left(\frac{BA'+CA'}{BC}\right),$$

de unde

$$\frac{B'A}{B'C}+\frac{C'A}{C'B}=\frac{MA}{MA'}.$$

1.12. Teorema lui Ceva

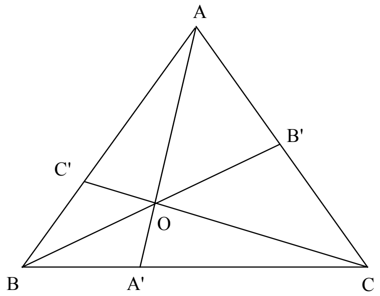
Teorema 1.12.1. (Teorema lui Ceva)

Se consideră triunghiul ABC şi punctele $A'\in BC$, $B'\in CA$, $C'\in AB$. Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente, atunci

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$$

Demonstrație. 1) Considerăm punctul O de intersecție al dreptelor AA', BB', CC' ca fiind situat în interiorul triunghiului. Considerăm triunghiul BCC' şi transversala AA'. Cu teorema lui Menelaus obținem:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{OC}{OC'}\cdot\frac{AC'}{AB}=1 \qquad (1)$$



Aplicăm acum teorema lui Menelaus pentru triunghiul AC'C şi transversala BB'. Obţinem:

$$\frac{OC'}{OC}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{BA}{BC'}=1 \qquad (2)$$

Înmulţind membru cu membru relaţiile (1) şi (2) şi simplificând obţinem: $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$, adică relaţia ce trebuia demonstrată.

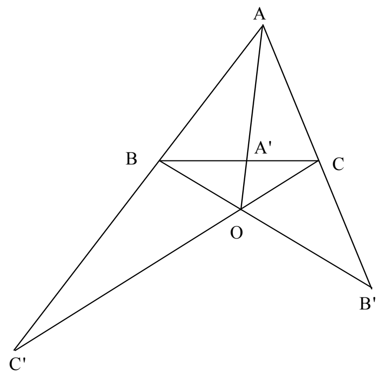
2) Considerăm punctul de intersecţie al dreptelor AA', BB', CC' ca fiind O şi care este situat în exteriorul triunghiului ABC.

Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul AA'B şi transversala COC'. Obţinem:

$$\frac{CB}{CA'}\cdot\frac{OA'}{OA}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1 \qquad (1)$$

Aplicăm acum teorema lui Menelaus pentru triunghiul AA'C şi transversala BOB'. Obţinem:

$$\frac{BA'}{BC}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{OA}{OA'}=1 \qquad (2)$$



Înmulţim membru cu membru relaţiile (1) şi (2) şi obţinem după simplificări

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$$

Teorema 1.12.2. (Reciproca teoremei lui Ceva)

Dacă pe laturile unui triunghi ABC considerăm punctele A', B', C' (A'∈BC, B'∈CA, C'∈AB) toate pe laturi sau unul pe laturi şi celelalte două pe prelungiri, astfel încât să avem relaţia:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$$

atunci dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

Demonstraţie. Presupunem că dreptele AA', BB', CC' nu sunt concurente. Fie AA'∩BB'={O} şi CO∩AB={C''}, C'≠C''. Din teorema lui Ceva obţinem

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C''A}{C''B}=1 \qquad (1)$$

Din ipoteză avem

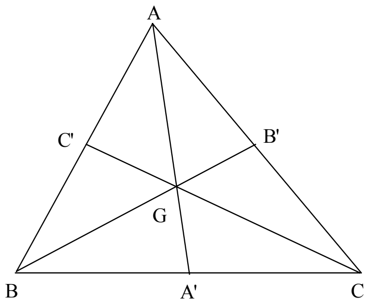
$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1 \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă C' este identic cu C''.

1.13. Concurenţa liniilor importante în triunghi

1.13.1. Medianele unui triunghi sunt concurente în punctul G (centrul de greutate al triunghiului).

Demonstraţie. Fie AA', BB', CC' medianele triunghiului ABC. Atunci A', B', C' sunt mijloacele laturilor [BC], [CA] şi respectiv [AB].



Aplicăm reciproca teoremei lui Ceva şi obţinem:

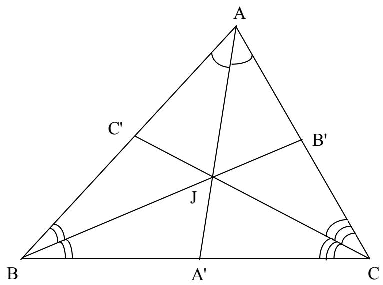
$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1,$$

adică medianele sunt concurente.

1.13.2. Bisectoarele interioare ale unghiurilor unui triunghi sunt concurente în I (centrul cercului înscris).

Demonstraţie. Cu teorema bisectoarei interioare obţinem:

$$\frac{A'B}{A'C}=\frac{AB}{AC},\quad \frac{B'C}{B'A}=\frac{BC}{BA}\quad \text{şi}\quad \frac{C'A}{C'B}=\frac{CA}{CB}.$$



Prin înmulțirea relațiilor de mai sus membru cu membru obținem:

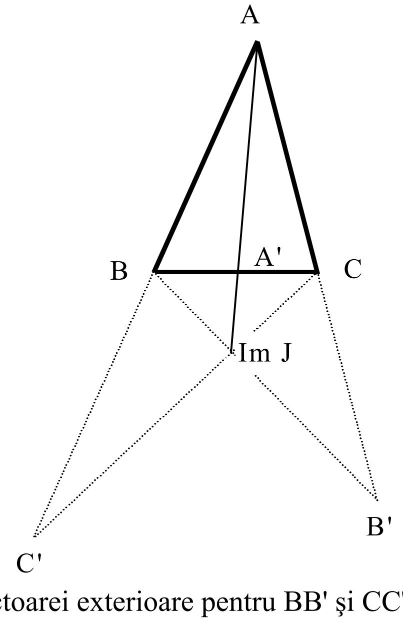
$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{BA}\cdot\frac{CA}{CB}=1,$$

de unde conform reciprocei teoremei lui Ceva obținem că bisectoarele interioare ale unghiurilor unui triunghi sunt concurente.

1.13.3. Bisectoarele exterioare a două unghiuri a unui triunghi sunt concurente cu bisectoarea interioară a celui de-al treilea unghi într-un punct I_a (centrul cercului exînscris).

Demonstrație. Cu teorema bisectoarei interioare pentru AA' obținem:

$$\frac{A'B}{A'C}=\frac{AB}{AC}$$



Cu teorema bisectoarei exterioare pentru BB' şi CC' obținem:

$$\frac{B'C}{B'A}=\frac{BC}{BA}\quad \text{şi}\quad \frac{C'A}{C'B}=\frac{CA}{CB}$$

Înmulțind membru cu membru cele trei relații de mai sus obținem:

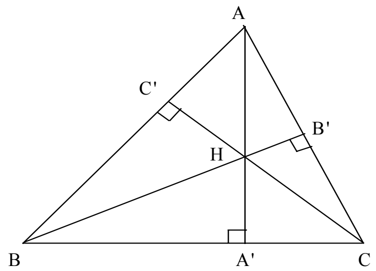
$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{BA}\cdot\frac{CA}{CB}=1$$

de unde conform reciprocei teoremei lui Ceva rezultă că cele două bisectoare exterioare şi bisectoarea interioară sunt concurente în I_a.

1.13.4. Înălţimile unui triunghi sunt concurente în punctul H (ortocentrul triunghiului).

Demonstraţie. Fie AA', BB', CC' înălţimile triunghiului ABC. Din asemănarea triunghiurilor A'AB şi C'CB obţinem:

$$\frac{A'B}{C'B}=\frac{AB}{BC} \qquad (1)$$



Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice BB'C şi AA'C obţinem:

$$\frac{B'C}{A'C}=\frac{BC}{AC} \qquad (2)$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice C'CA şi B'BA obţinem:

$$\frac{C'A}{B'A}=\frac{AC}{AB} \qquad (3)$$

Din relaţiile (1), (2) şi (3) prin înmulţire membru cu membru obţinem:

$$\frac{A'B}{C'B}\cdot\frac{B'C}{A'C}\cdot\frac{C'A}{B'A}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}=1,$$

care se mai scrie:

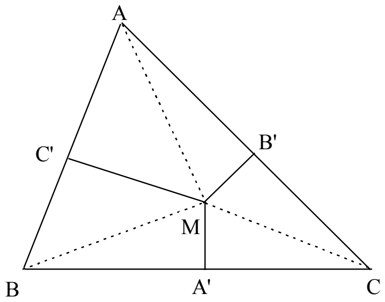
$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$$

şi conform reciprocei teoremei lui Ceva, înălţimile AA', BB', CC' sunt concurente.

1.14. Lema lui Carnot şi aplicaţii

Teorema 1.14.1 (Lema lui Carnot). Fie triunghiul ABC şi punctele $A'\in BC$, $B'\in CA$, $C'\in AB$. Perpendicularele în A', B', C' pe BC, CA, respectiv AB sunt concurente dacă şi numai dacă

$$A'B^2-A'C^2+B'C^2-B'A^2+C'A^2-C'B^2=0 \qquad (*)$$



Demonstrație. Presupunem că cele trei perpendiculare sunt concurente într-un punct M. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghice MBA', MCA', MCB', AB'M, AMC', BMC' şi obținem relațiile:

$$A'B^2 = BM^2 - MA'^2, \quad A'C^2 = CM^2 - MA'^2$$
$$B'C^2 = CM^2 - MB'^2, \quad B'A^2 = AM^2 - MB'^2$$
$$C'A^2 = AM^2 - MC'^2, \quad C'B^2 = BM^2 - MC'^2$$

Scăzând a doua relație din prima obținem:

$$A'B^2 - A'C^2 = BM^2 - CM^2 \qquad (1)$$

Scăzând a patra relație din a treia obținem

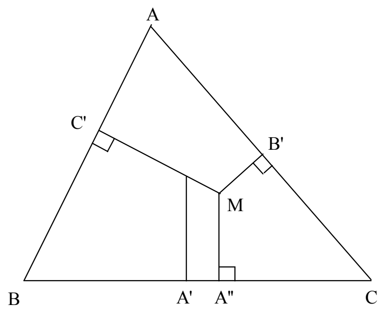
$$B'C^2 - B'A^2 = CM^2 - AM^2 \qquad (2)$$

Scăzând a şasea relație din a cincea obținem

$$C'A^2 - C'B^2 = AM^2 - BM^2 \qquad (3)$$

Adunând membru cu membru relațiile (1), (2), (3) obținem relația (*).

Reciproc, presupunem că are loc relația din enunț şi prin reducere la absurd presupunem că cele trei perpendiculare nu sunt concurente. Fie M punctul de intersecție al perpendicularelor din B' şi C' pe laturile corespunzătoare şi A'' piciorul perpendicularei din M pe BC.



Din ipoteză avem:

$$A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0$$

Cu teorema directă avem

$$A''B^2 - A''C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0$$

Scăzând relațiile de mai sus obținem:

$$A'B^2 - A''B^2 - A'C^2 + A''C^2 = 0 \Leftrightarrow A'B^2 - A'C^2 = A''B^2 - A''C^2 \Leftrightarrow$$

$$(A'B - A'C)(A'B + A'C) = (A''B - A''C)(A''B + A''C) \Leftrightarrow$$
$$(A'B - A'C) \cdot BC = (A''B - A''C) \cdot BC \Leftrightarrow$$
$$A'B - A''B = A'C - A''C \Leftrightarrow -A'A'' = A'A'' \Leftrightarrow$$
$$A'A'' = 0 \Leftrightarrow A' = A''.$$

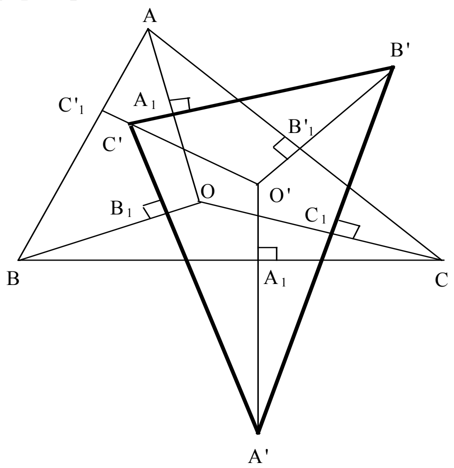
Observație. Relația (*) poate fi utilizată în rezolvarea unor probleme care cer demonstrarea concurenței unor drepte.

Corolar 1.14.1. Pentru cazul când MA', MB', MC' sunt mediatoarele laturilor concurența este evidentă şi are loc relația (*).

1.15. Teorema triunghiurilor ortologice

Teorema 1.15.1. Fie ABC şi A'B'C' două triunghiuri situate în acelaşi plan. Să se demonstreze că dacă perpendicularele din A, B, C pe laturile [B'C'], [C'A'], [A'B'] sunt concurente atunci şi perpendicularele din A', B', C' pe laturile [BC], [CA], [AB] sunt concurente. (Cele două triunghiuri se numesc ortologice.)

Demonstrație. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele perpendicularelor coborâte din A, B, C pe laturile [B'C'], [C'A'], [A'B'] şi $A_1^{'}, B_1^{'}, C_1^{'}$ picioarele perpendicularelor coborâte din A', B', C' pe [BC], [CA], [AB].



Cu lema lui Carnot avem:

$$A_1B'^2 - A_1C'^2 + B_1C'^2 - B_1A'^2 + C_1A'^2 - C_1B'^2 = 0 \qquad (1^*)$$

Cu teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice $AB'A_1$ şi $AC'A_1$ obținem

$$A_1B'^2 = AB'^2 - AA_1^2 \quad \text{şi} \quad A_1C'^2 = AC'^2 - AA_1^2$$

de unde prin scădere membru cu membru devine

$$A_1B'^2 - A_1C'^2 = AB'^2 - AC'^2 \qquad (1)$$

În triunghiurile dreptunghice BB_1C' şi BB_1A', cu teorema lui Pitagora obținem:

$$B_1C'^2 = BC'^2 - BB_1^2 \quad \text{şi} \quad B_1A'^2 = BA'^2 - BB_1^2$$

de unde prin scădere obținem:

$$B_1C'^2 - B_1A'^2 = BC'^2 - BA'^2 \qquad (2)$$

Din triunghiurile $A'CC_1$ şi $B'CC_1$ obținem:

$$C_1A'^2 = CA'^2 - CC_1^2 \quad \text{şi} \quad C_1B'^2 = B'C^2 - CC_1^2$$

de unde prin scădere rezultă că

$$C_1A'^2 - C_1B'^2 = CA'^2 - CB'^2 \qquad (3)$$

Din relațiile (1*), (1), (2), (3) obținem prin adunare

$$AB'^2 - AC'^2 + BC'^2 - BA'^2 + CA'^2 - CB'^2 = 0 \qquad (4)$$

Însă

$$A_1^{'}B^2 - A_1^{'}C^2 = A'B^2 - A'C^2 \qquad (5)$$

$$B_1^{'}C^2 - B_1^{'}A^2 = B'C^2 - B'A^2, \quad C_1^{'}A^2 - C_1^{'}B^2 = C'A^2 - C'B^2$$

Din relațiile (4) şi (5) rezultă că

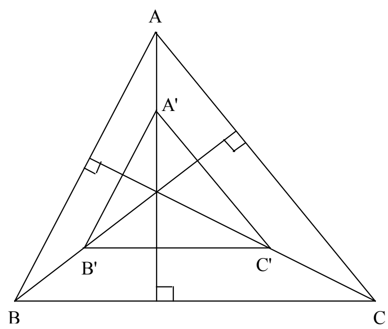
$$A_1^{'}B^2 - A_1^{'}C^2 + B_1^{'}C^2 - B_1A^2 + C_1^{'}A^2 - C_1^{'}B^2 = 0$$

deci perpendicularele din A', B', C' pe [BC], [CA], [AB] sunt concurente.

Aplicație. Fie ABC un triunghi cu ortocentrul H şi punctele A', B', C' situate respectiv pe dreptele AH, BH, CH. Să se arate că perpendicularele din A, B, C pe B'C', C'A respectiv A'B' sunt concurente.

(Vasile Pop, 1998, Olimpiada jud. Cluj)

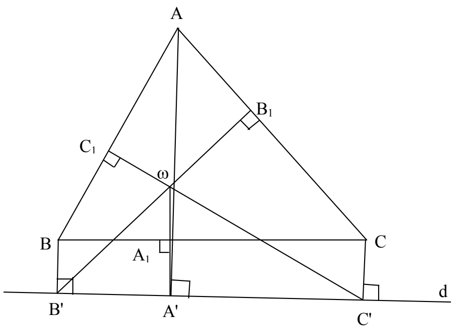
Demonstrație. Fiindcă perpendicularele din A', B', C' pe BC, CA, AB sunt concurente în H, cu teorema triunghiurilor ortologice obținem că şi perpendicularele din A, B, C pe B'C', C'A', A'B' sunt concurente.



1.16. Teorema ortopolului

Teorema 1.16.1. Fie ABC un triunghi şi *d* o dreaptă oarecare. Proiectăm vârfurile A, B, C pe *d* în punctele A', B', C'. Perpendicularele coborâte din A', B', C' pe laturile [BC], [CA], [AB] sunt concurente, iar punctul lor de intersecție ω poartă numele de ortopolul dreptei *d* față de triunghiul ABC.

Demonstrație. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele perpendicularelor coborâte din A', B', C' pe laturile triunghiului.



Cu teorema lui Pitagora în triunghiurile $A'A_1B$ şi $A'A_1C$ obţinem:

$$A_1B^2 = A'B^2 - A'A_1^2, \quad A_1C^2 = A'C^2 - A'A_1^2$$

Din aceste două relaţii, prin scădere obţinem:

$$A_1B^2 - A_1C^2 = A'B^2 - A'C^2$$

care se mai scrie:

$$A_1B^2 - A_1C^2 = A'B'^2 + B'B^2 - A'C'^2 - C'C^2 \tag{1}$$

Analog obţinem:

$$B_1C^2 - B_1A^2 = B'C^2 - B'A^2 = B'C'^2 + CC'^2 - B'A'^2 - AA'^2 \tag{2}$$

$$C_1A^2 - C_1B^2 = C'A^2 - C'B^2 = C'A'^2 + AA'^2 - C'B'^2 - BB'^2 \tag{3}$$

Din (1), (2) şi (3) prin adunare obţinem:

$$A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0 \Leftrightarrow$$

perpendicularele în A_1, B_1, C_1 pe [BC], [CA], [AB] sunt concurente.

1.17. Teorema sinusurilor

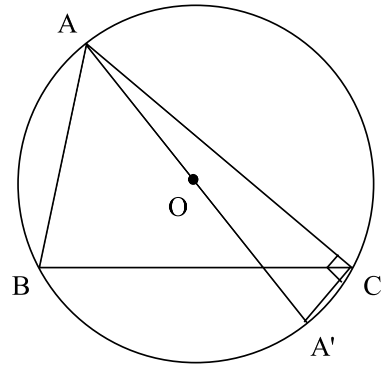
Teorema 1.17.1. (Teorema sinusurilor) Într-un triunghi, raportul dintre o latură şi sinusul unghiului opus este egal cu diametrul cercului circumscris triunghiului sau

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \tag{*}$$

unde *a, b, c* sunt lungimile laturilor triunghiului ABC iar *R* raza cercului circumscris triunghiului.

Demonstraţie. i) Considerăm cazul triunghiului ascuţitunghic.

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului şi A' punctul diametral opus lui A.



În triunghiul dreptunghic ACA' (m(∠ACA')=90°) avem:

$$\sin A' = \frac{AC}{AA'} = \frac{b}{2R},$$

dar ∠AA'C≡∠ABC (subîntind acelaşi arc).

Atunci obținem:

$$\sin B = \frac{b}{2R},$$

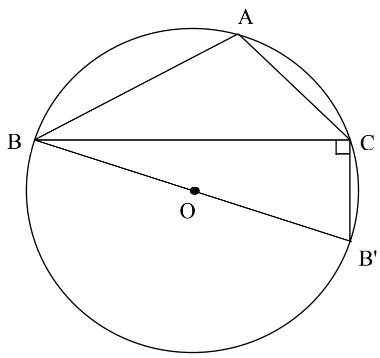
de unde $\frac{b}{\sin B} = 2R$.

Analog obținem: $\frac{a}{\sin A} = 2R$, $\frac{c}{\sin C} = 2R$.

Deci $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

ii) Considerăm cazul triunghiului obtuzunghic. (m(∠A)>90°).

În acest caz punctul O, centrul cercului circumscris este situat în exteriorul triunghiului.



Ducem diametrul BB', atunci m(∠BCB')=90°. În triunghiul BCB' avem

$$\sin B' = \frac{BC}{BB'} = \frac{a}{2R} \qquad (1)$$

Patrulaterul ACB'B fiind inscriptibil rezultă că

$$m(\angle BAC) + m(\angle BB'C) = 180°,$$

de unde m(∠BB'C)=180°-m(∠BAC). Atunci obținem:

$$\sin(\angle BB'C)=\sin(180°-A)=\sin A \qquad (2)$$

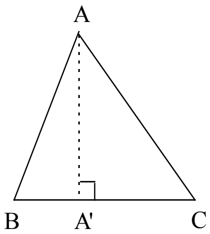
Deci cu (1) şi (2) obținem $\sin A = \frac{a}{2R}$, rezultă că $\frac{a}{\sin A} = 2R$. Celelalte relații se demonstrează ca în cazul precedent. Rezultă că şi în acest caz sunt satisfăcute relațiile (*).

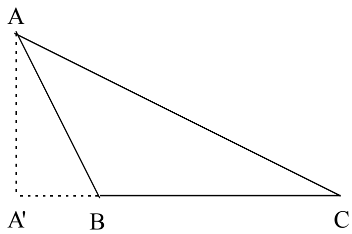
1.18. Teorema cosinusului

Teorema 1.18.1. Considerăm un triunghi oarecare ABC. Vom demonstra mai întâi că între elementele triunghiului avem relația:

$$a = b\cos C + c\cos B \qquad (1)$$

Mai întâi presupunem că unghiurile B şi C sunt ascuțite şi deci piciorul A' al înălțimii coborâte din A este situat între punctele B şi C.





Din triunghiurile dreptunghice AA'B şi AA'C obținem:

$\cos B = \frac{BA'}{AB}$, de unde BA'=$c$cosB

$\cos C = \frac{A'C}{AC}$, de unde A'C=$b$cosC.

Dar BA'+A'C=a, deci $c$cosB+$b$cosC=a, adică tocmai relația (1).

Dacă unghiul B este obtuz, piciorul A' al înălțimii din A este situat în exteriorul segmentului [BC].

Din triunghiurile dreptunghice AA'B şi AA'C obținem:

$$\cos ABA' = \frac{A'B}{AB},$$

de unde A'B=ABcos(180°-B), sau A'B=$c$cos(180°-B), iar $\cos C = \frac{A'C}{AC}$, de unde A'C=$b$cosC.

Dar cos(180°-B)=-cosB şi a=A'C-A'B. Atunci a=$b$cosC+$c$cosB, adică relația (1).

Analog se demonstrează că

$$b = c\cos A + a\cos C \qquad (2)$$

$$c = a\cos B + b\cos A \qquad (3)$$

Înmulțind relația (2) cu b și (3) cu c, adunând membru cu membru obținem:

$$b^2 + c^2 = a(b\cos C + c\cos B) + 2bc\cos A \qquad (4)$$

Ținând seama de (1), relația (4) devine:

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$$

adică

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad (5)$$

relație care poartă numele de teorema cosinusului:

Pătratul lungimii unei laturi a unui triunghi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi minus de două ori produsul lungimilor lor înmulțit cu cosinusul unghiului dintre ele.

Analog cu (5) avem

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad (6)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad (7)$$

Din (5), (6), (7) obținem:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad (8)$$

Relațiile (8) constituie o modalitate pentru determinarea naturii unui triunghi (ascuțitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic).

2. Inegalități geometrice

La concursurile de matematică, în revistele de matematică apar probleme de inegalități geometrice. În manualele şcolare sunt foarte puține probleme de acest tip. În această temă, vom face o ordonare a tipurilor de inegalități geometrice, la nivel gimnazial.

2.1. Unghi exterior. Relații între laturile şi unghiurile unui triunghi

Între un unghi exterior unui triunghi şi unghiurile interioare neadiacente lui, există o relație de inegalitate dată de teorema următoare.

Teorema 2.1.1. Măsura unui unghi exterior unui triunghi este mai mare decât măsura oricărui unghi interior triunghiului, neadiacent lui.

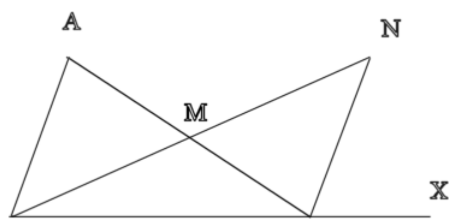


Fig.1.

Demonstrație . Fie M mijlocul lui AC şi $N \in BM$ astfel încât $BM \equiv MN$ (fig.1). Deoarece $\Delta ABM \equiv \Delta CNM \quad (L.U.L.)$, rezultă că $M\hat{A}B = M\hat{C}N$. Dar $m(A\hat{C}X) = m(M\hat{C}N) + m(N\hat{C}X)$, deci $m(A\hat{C}X) > m(M\hat{A}B)$. Analog se arată că $m(A\hat{C}X) > m(A\hat{B}C)$.

Consecința 2.1.1. Suma măsurilor oricăror două unghiuri ale unui triunghi este mai mică decât 180°.

Demonstrație. Ținând seama de teorema 3.1.1., avem
$m(B\hat{A}C) + m(A\hat{C}B) < m(A\hat{C}X) + m(A\hat{C}B) = 180^\circ$.

Consecința 2.1.2. Un triunghi poate avea cel mult un unghi drept sau cel mult un unghi obtuz.

Demonstrație . În caz contrar , suma măsurilor unghiurilor triunghiului este strict mai mare decât 180°.

Teorema 2.1.2. Într-un triunghi, laturii mai mari i se opune unghiul mai mare şi reciproc.

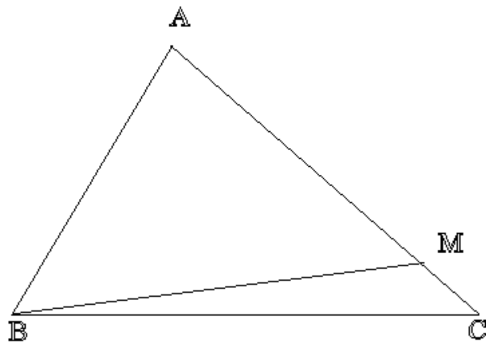


Fig.2.

Demonstrație . Fie triunghiul ABC, $AB < AC$ şi $M \in [AC]$ astfel încât $AB \equiv AD$ (fig.2). Atunci triunghiul ABM este isoscel, deci $m(A\hat{B}M) = m(A\hat{M}B)$. Ținând seama de teorema 2.1.1., rezultă că $m(A\hat{M}B) > m(A\hat{C}B)$, deci $m(A\hat{B}M) > m(A\hat{C}B)$ şi cum $m(A\hat{B}C) > m(A\hat{B}M)$, în final obținem că $m(A\hat{B}C) > m(A\hat{C}B)$.

Reciproc, presupunem că $m(A\hat{B}C) > m(A\hat{C}B)$ şi arătăm că $AC > AB$. Demonstrăm prin reducere la absurd, adică presupunem că $AC < AB$ sau $AC \equiv AB$. Dacă $AC < AB$, conform teoremei directe ar rezulta că $m(A\hat{B}C) < m(A\hat{C}B)$, ceea ce este o contradicție. Dacă $AC \equiv AB$, rezultă că triunghiul ABC este isoscel, deci $m(A\hat{B}C) = m(A\hat{C}B)$, ceea ce este o contradicție. În concluzie, rezultă că $AC > AB$.

Consecința 2.1.3. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este mai mare decât lungimea oricărei catete.
Demonstrație . Rezultă din teorema 2.1.2 şi consecința 2.1.2.

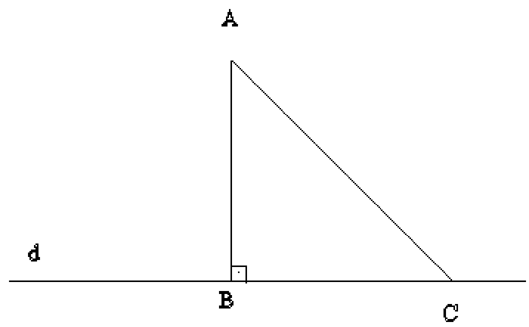


Fig.3.

Fiind dată o dreaptă d, un punct $A \notin d$, $AB \perp d$, $B \in d$, $C \in d$, $B \neq C$ (fig.3), punctul B se numeşte piciorul perpendicularei din A pe dreapta d, AC se numeşte oblică, iar C se numeşte piciorul oblicei AC.

Consecința 2.1.4. Fie o dreaptă d şi un punct A, $A \notin d$. Dintre două oblice cu picioarele pe d, inegal depărtate de piciorul perpendicularei din A pe d, oblica cu piciorul mai îndepărtat de piciorul perpendicularei din A pe d are lungimea mai mare.

Demonstrație . Fie $AB \perp d$, $B \in d$, $C, D \in d$ distincte și diferite de B, $BC < BD$ (fig.4). Din triunghiul dreptunghic ABC rezultă că unghiul $A\hat{C}B$ este ascuțit, deci unghiul $A\hat{C}D$ este obtuz. Atunci $m(A\hat{C}D) > m(A\hat{D}C)$, de unde, conform teoremei 2.1.2 rezultă că $AD > AC$. Cazul oblicelor situate de o parte și de alta a perpendicularei din A se reduce la cazul de mai sus, construind simetrica unei oblice față de perpendiculara din A.

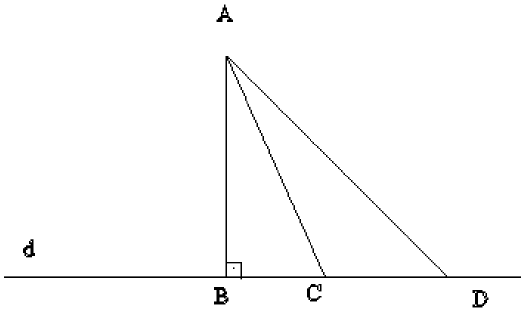


Fig.4.

2.2. Relații de inegalitate între laturile unui triunghi

În acest paragraf vom da condiția necesară și suficientă ca trei segmente să poată forma un triunghi.

Teorema 2.2.1. Într-un triunghi, lungimea oricărei laturi este strict mai mică decât suma lungimilor celorlalte două laturi.

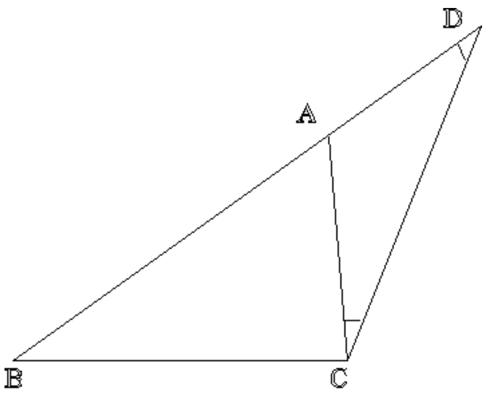


Fig.5

Demonstrație . Fie triunghiul ABC. Pe prelungirea laturii AB, construim $AD \equiv AC$ (fig.5).
În triunghiul isoscel ADC, avem că $A\hat{D}C \equiv A\hat{C}D$, deci $m(A\hat{D}C) < m(B\hat{C}D)$.
Conform teoremei 2.1.2 , rezultă că $BC < BD$. Dar $BD = BA + AD$ și cum $AD \equiv AC$, obținem că $BC < BA + AC$. Analog se arată că $CA < CB + BA$ și $AB < AC + CB$.

Teorema 2.2.2. Trei numere strict pozitive pot fi lungimile laturilor unui triunghi dacă oricare dintre ele este strict mai mic decât suma celorlalte două.

Demonstrație . Rezultă din construcția triunghiului când se dau lungimile laturilor lui.

Consecința 2.2.1. Trei numere strict pozitive pot fi lungimile laturilor unui triunghi dacă și numai dacă oricare dintre ele este strict mai mic decât suma celorlalte două.

Demonstrație . Rezultă din teorema 2.2.1. și teorema 2.2.2.

Teorema 2.2.3. Trei numere strict pozitive pot fi lungimile laturilor unui triunghi dacă şi numai dacă oricare dintre ele este strict mai mare decât modulul diferenţei celorlalte două.

Demonstraţie . Notăm cu a,b,c lungimile celor trei segmente. Conform consecinţei 2.2.1 avem că $\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \end{cases}$, de unde $\begin{cases} a>c-b \\ a>b-c \end{cases}$, sau $a>|b-c|$. Analog se arată şi celelalte inegalităţi. Reciproc, din $a>|b-c|$ se obţine $\begin{cases} a>c-b \\ a>b-c \end{cases}$,sau $\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \end{cases}$. Folosind şi celelalte inegalităţi, în final obţinem că orice număr este strict mai mic decât suma celorlalte două.

Observaţia 2.2.1. Dacă trei puncte A,B,C sunt coliniare, spunem că triunghiul ABC este degenerat. Într-un triunghi degenerat, exact una din cele trei inegalităţi devine egalitate.

2.3. Triunghiuri care au două laturi respectiv congruente şi unghiurile cuprinse între ele necongruente

Dacă două triunghiuri au două laturi respectiv congruente şi unghiurile dintre laturile respectiv congruente sunt congruente, atunci triunghiurile sunt congruente (cazul L.U.L.). Dacă unghiurile dintre laturile respectiv congruente sunt necongruente, atunci cele două triunghiuri sunt necongruente.

Teorema 2.3.1. Fie triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ astfel încât $AB \equiv A'B'$ şi $AC \equiv A'C'$. Atunci $m(B\hat{A}C) > m(B'\hat{A}'C') \Leftrightarrow BC > B'C'$.

Demonstraţie . Considerăm că $m(B\hat{A}C) > m(B'\hat{A}'C')$. Construim punctul D astfel încât C şi D să fie de aceeaşi parte a lui AB şi $\Delta ABD \equiv \Delta A'B'C'$ (fig.6). Fie AM bisectoarea unghiului DAC, $M \in BC$ .Deoarece $\Delta AMD \equiv \Delta AMC$ (cazul L.U.L.), rezultă că $MD \equiv MC$. În triunghiul BDM avem că $BM + MD > BD$, sau $BM + MC > B'C'$, adică $BC > B'C'$.

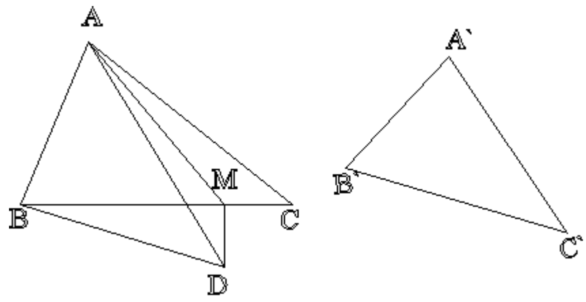


Fig.6.

Reciproc, considerăm că $BC > B'C'$ şi vom arăta că

$m(B\hat{A}C) > m(B'\hat{A}'C')$. Vom demonstra această afirmație prin metoda reducerii la absurd. Negând concluzia, avem că $m(B\hat{A}C) > m(B'\hat{A}'C')$ ceea ce implică, conform teoremei directe, că $BC < B'C'$, contradicție cu ipoteza, sau $m(B\hat{A}C) = m(B'\hat{A}'C')$. În această situație, conform cazului L.U.L. avem că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, de unde $BC \equiv B'C'$, ceea ce este în contradicție cu ipoteza. În concluzie, avem că $m(B\hat{A}C) > m(B'\hat{A}'C')$.

2.4. Probleme

2.4.1. Inegalități generale

Probleme rezolvate

R2.4.1.1. Să se arate că pentru orice punct M din interiorul triunghiului ABC, au loc inegalitățile

a) $MB + MC < AB + AC$;

b) $p < MA + MB + MC < 2p$.

Soluție . Fie $BM \cap AC = \{B'\}$ (fig.7). În triunghiurile ABB' și $MB'C$ avem

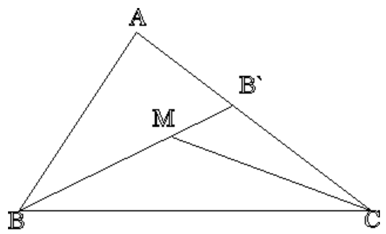


fig.7

$BB' < AB + AB'$ sau $MB + MB' < AB + AB'$, respectiv $MC < MB' + B'C$. Adunând cele două inegalități se obține inegalitatea de la a). În triunghiurile MBC, MCA și MAB avem $BC < MB + MC$, $CA < MC + MA$, respectiv $AB < MA + MB$. Prin adunare se obține $p < MA + MB + MC$. Ținând seama de a) avem $MB + MC < AB + AC$, $MC + MA < BC + BA$ și $MA + MB < CA + CB$, de unde rezultă că $MA + MB + MC < 2p$.

R2.4.1.2. Fie triunghiul ABC și D mijlocul laturii BC. Să se arate că $m(B\hat{A}D) > m(C\hat{A}D)$ dacă și numai dacă $AC > AB$.

Soluție . Fie E simetricul lui A față de D (fig.8) și atunci $ABEC$ este paralelogram.

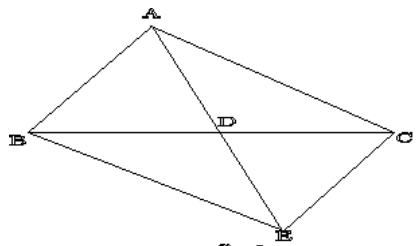


fig.8

Deoarece $m(B\hat{A}D) > m(C\hat{A}D)$ și cum $m(B\hat{A}D) = m(C\hat{E}D)$, rezultă că $m(C\hat{E}D) > m(C\hat{A}D)$. Atunci, în triunghiul AEC avem că $AC > EC$ și cum $EC \equiv AB$, rezultă că $AC > AB$. Reciproc, dacă

$AC > AB$ şi cum $AB \equiv CE$, rezultă că $AC > CE$.
Atunci, în triunghiul ACE avem că $m(A\hat{E}C) > m(C\hat{A}D)$. Dar $m(A\hat{E}C) = m(B\hat{A}D)$, deci $m(B\hat{A}D) > m(C\hat{A}D)$.

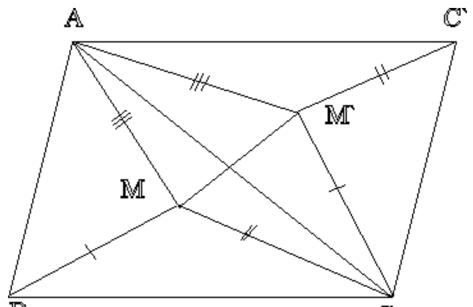


fig.9

R2.4.1.3. Fie M un punct arbitrar în interiorul triunghiului echilateral ABC. Să se arate că distanțele MA, MB, MC pot fi lungimile laturilor unui triunghi (teorema lui Pompeiu).

Soluție . Facem o rotație de centru A a triunghiului ABC şi obținem triunghiul ACC', iar punctul M se transformă în punctul M' (fig.9).
Avem că $AM \equiv AM'$, $BM \equiv CM'$, $CM \equiv C'M'$ şi deoarece $m(M\hat{A}M') = 60^\circ$, rezultă că triunghiul AMM' este echilateral. Prin această rotație, se obține triunghiul CMM', în care $MM' \equiv AM$ şi $CM' \equiv BM$, deci distanțele MA, MB, MC pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

2.4.2. Inegalități între laturile unui triunghi

Probleme rezolvate

R2.4.2.1. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Să se arate că $3(ab + bc + ca) \le 4p^2 < 4(ab + bc + ca)$, unde p este semiperimetrul triunghiului.

F.E.Wood

Soluție . Prima inegalitate $3(ab + bc + ca) \le (a + b + c)^2$ are loc $\forall a, b, c > 0$, iar egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c$. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci $|b - c| < a$, $|c - a| < b$ şi $|a - b| < c$. Prin ridicare la pătrat $(b - c)^2 < a^2$, $(c - a)^2 < b^2$ şi $(a - b)^2 < c^2$, de unde, prin adunare se obține a doua inegalitate.

R2.4.2.2. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \ge \frac{9}{p}.$$

Soluție . Deoarece a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi, rezultă că $p-a=\frac{b+c-a}{2}>0$ şi analog $p-b>0$, $p-c>0$. Notăm $p-a=x$, $p-b=y$, $p-c=z$, unde $x,y,z>0$. Atunci $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ şi inegalitatea din enunț devine $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}$, care este o inegalitate adevărată. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x=y=z$, echivalent cu $a=b=c$, adică triunghiul este echilateral.

R2.4.2.3. Să se arate că dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci cu segmentele de lungime $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ se poate construi un triunghi.

Soluție. Pentru ca să existe un triunghi cu lungimile laturilor $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ este necesar şi suficient ca $\sqrt{\mathrm{a}}<\sqrt{\mathrm{b}}+\sqrt{\mathrm{c}}$, $\sqrt{\mathrm{b}}<\sqrt{\mathrm{c}}+\sqrt{\mathrm{a}}$ şi $\sqrt{\mathrm{c}}<\sqrt{\mathrm{a}}+\sqrt{\mathrm{b}}$. Arătăm că $\sqrt{\mathrm{a}}<\sqrt{\mathrm{b}}+\sqrt{\mathrm{c}}$. Avem $a<b+c<b+c+2\sqrt{\mathrm{bc}}=\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2$, de unde $\sqrt{\mathrm{a}}<\sqrt{\mathrm{b}}+\sqrt{\mathrm{c}}$. Analog se demonstrează celelalte inegalități.

2.4.3 Inegalități între elementele unui triunghi

În cele ce urmează vom folosi notațiile consacrate în triunghi.

Probleme rezolvate

R2.4.3.1. Fie triunghiul ABC, $D\in(BC)$, $\frac{DB}{DC}=k$. Atunci $AD<\frac{k}{k+1}\cdot AC+\frac{1}{k+1}\cdot AB$.

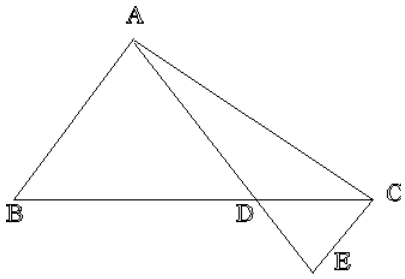


fig.10

Soluție . Construim $CE\parallel AB$, $E\in AD$ (fig.10). Din asemănarea triunghiurilor ABD şi ECD avem că $\frac{AB}{EC}=\frac{BD}{CD}=\frac{AD}{ED}$, de unde $EC=\frac{1}{k}AB$ şi $ED=\frac{1}{k}AD$. În triunghiul ACE avem $AE<AC+CE$, sau

$AD + DE < AC + CE$. Înlocuind cu relațiile de mai sus, obținem $AD + \frac{1}{k} AD < AC + \frac{1}{k} AB$, de unde rezultă inegalitatea din enunț.

R2.4.3.2. În triunghiul ABC să se arate că are loc inegalitatea

$$60^\circ \leq \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a + b + c} < 90^\circ$$

Soluție . Presupunem că $a \geq b \geq c$ şi atunci $A \geq B \geq C$. Avem că $(a-b)(A-B) \geq 0$, $(b-c)(B-C) \geq 0$ şi $(c-a)(C-A) \geq 0$. Adunând cele trei inegalități avem $2(aA + bB + cC) \geq$
$\geq (b+c) \cdot A + (c+a) \cdot B + (a+b) \cdot C$ şi adunând în ambii membri $aA + bB + cC$, se obține $3(aA + bB + cC) \geq (a+b+c)(A+B+C)$, de unde rezultă prima inegalitate.Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral. Din inegalitatea triunghiului avem că $a+b+c > 2a$, $a+b+c > 2b$ şi $a+b+c > 2c$. Înmulțind cu A, B respectiv C şi adunând obținem $(a+b+c)(A+B+C) > 2(aA + bB + cC)$, de unde rezultă a doua inegalitate din enunț.

R2.4.3.3. Într-un triunghi are loc $R \geq 2r$ (inegalitatea lui Euler).

Soluție . Notăm $b+c-a = x > 0$, $c+a-b = y > 0$, $a+b-c = z > 0$ şi atunci $a = \frac{y+z}{2}$, $b = \frac{z+x}{2}$ şi $c = \frac{x+y}{2}$. Cu aceste notații avem $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z) \cdot xyz}$, $r = \frac{S}{P} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$ şi $R = \frac{abc}{4S} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8\sqrt{(x+y+z) \cdot xyz}}$. Atunci $\frac{R}{2r} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz}$ şi cum $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, $y+z \geq 2\sqrt{yz}$, $z+x \geq 2\sqrt{zx}$, rezultă inegalitatea din enunț. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z$, echivalent cu $a = b = c$, adică triunghiul ABC este echilateral.

3. Locuri geometrice

3.1. Locuri geometrice uzuale

Noțiunea de “loc geometric în plan” care se găseşte şi în “ELEMENTELE LUI EUCLID” se pare că a fost folosită încă de PLATON (427-347) şi ARISTOTEL(383-322). Locurile geometrice reprezintă unul din cele mai frumoase capitole ale geometriei.

Definiția locului geometric poate fi găsită în mai multe formulări:

a) **loc geometric** este totalitatea punctelor dintr-un spațiu definite printr-o proprietate (Dicționarul explicativ al limbii române);

b) **loc geometric** este mulțimea punctelor din plan sau spațiu care au o anumită proprietate (Micul dicționar enciclopedic);

c) **loc geometric** este figura **plană** sau în spațiu ale cărei puncte se definesc toate prin aceeaşi proprietate (Dicționar de neologisme).

Toate aceste formulări au acelaşi sens: un loc geometric este o mulțime de puncte DEFINITE. În esență, problemele de loc geometric sunt probleme de găsire a unor proprietăți echivalente celor prin care este dată o anumită mulțime sau altfel spus, probleme de egalitate a două mulțimi.

În continuare dăm o listă care conține locuri geometrice uzuale, care pot oferi idei şi soluții în rezolvarea altor probleme de loc geometric:

3.1.1 – Locul geometric al punctelor egal depărtate de extremitățile unui segment este mediatoarea acelui segment.

3.1.2 – Locul geometric al punctelor din plan interioare unui unghi egal depărtate de laturile sale este bisectoarea.

3.1.3 – Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de două drepte concurente sunt bisectoarele unghiurilor formate de cele două drepte

(bisectoarele sunt perpendiculare în punctul de intersecție al celor două drepte).

3.1.4 – Locul geometric al punctelor din plan situate la o distanță dată față de o dreaptă este reprezentat de două drepte paralele cu o dreaptă dată, situate de o parte şi de alta a ei.

3.1.5 – Locul geometric al punctelor din plan situate la o distanță dată față de un punct fix este un cerc.

3.1.6 – Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de trei puncte distincte, necoliniare este reprezentat de centrul cercului circumscris triunghiului determinat de cele trei puncte.

3.1.7 – Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de două drepte paralele date este o dreaptă paralelă cu dreptele date şi situată la jumătatea distanței dintre ele.

3.1.8 – Locul geometric al punctelor din plan pentru care diferența pătratelor la două puncte fixe este constantă, este o dreaptă perpendiculară pe dreapta determinată de cele două puncte fixe.

3.1.9 – Locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanțelor la două drepte paralele este constant, este reprezentat de două drepte paralele cu dreptele date sau o dreaptă (dacă raportul este 1).

3.1.10 – Locul geometric al punctelor din plan pentru care suma pătratelor distanțelor la două puncte date este constantă, este un cerc cu centrul în mijlocul segmentului determinat de două puncte.

3.1.11 – Locul geometric al punctelor din plan din care un segment se vede sub un unghi drept este cercul care are ca diametru segmentul respectiv.

3.1.12 – Locul geometric al punctelor din plan, mijloace ale segmentelor paralele cu o direcție dată şi cuprinse între două drepte paralele fixe, este dreapta paralelă cu dreptele date şi egal depărtate de ele.

3.1.13 – Locul geometric al punctelor din plan din care un segment se vede sub un unghi dat este reprezentat de două arce de cerc care au aceleaşi extremități ca şi segmentul şi sunt simetrice față de dreapta pe care este situat segmentul.

3.1.14 – Locul geometric al punctelor din plan care împart într-un raport constant segmentele determinate de un punct fix A şi punctul M ce descrie o dreaptă dată (d) este o dreaptă paralelă cu (d) şi care împarte distanța de la A la (d) în acelaşi raport.

3.1.15 – Locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe este constant ($k \neq 1$) este un cerc (pentru raportul distanțelor k=1 se obține o dreaptă).

3.1.16 – Locul geometric al punctelor N din plan, situate pe segmentele care unesc un punct fix A cu un punct M ce descrie o dreaptă (d) dată, astfel încât AN x AM=K este un cerc care trece prin A şi are centrul pe perpendiculara dusă din A pe (d).

3.1.17 – Locul geometric al punctelor din plan care au puteri egale față de două cercuri date este o dreaptă (numită axa radicală a celor două cercuri) perpendiculară pe linia centrelor cercurilor.

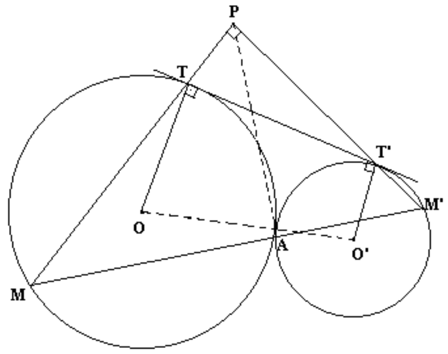
3.1.18 – Locul geometric al punctelor din plan de putere constantă față de un cerc dat, este un cerc concentric cu cercul dat, un punct sau mulțimea vidă.

Probleme rezolvate

R3.2.1 Două cercuri ζ şi ζ' sunt tangente exterioare într-un punct *A*. Fie *TT'* una din tangentele comune exterioare şi *M, M'* intersecțiile celor două cercuri cu o dreaptă variabilă ce trece prin *A*.

Să se afle locul geometric al punctelor *P* de intersecție a lui *MT* cu *MT'*.

Fig. 3.1.



Soluție. 1) Din $\left.\begin{matrix} OT \perp TT' \\ OT' \perp TT' \end{matrix}\right\} \Rightarrow OO'T'T$ trapez dreptunghic $\Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle TOA) + m(\angle T'O'A) = 180^0 \ \Rightarrow m(TA) + m(T'A) = 180^0$

Dar $m(\angle TMA) + m(\angle T'M'A) = \frac{1}{2}(m(TA) + m(T'A)) = \frac{1}{2}180^0 = 90^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle MPM') = 90^0$, deci $\Delta PTT'$ este un triunghi dreptunghic cu ipotenuza constantă *TT'*.
Rezultă că locul geometric este cercul de diametrul *TT'*.

R3.2.2 O proprietate simplă a punctelor mediane *AA'* a ΔABC este următoarea: $M \in (AA') \Rightarrow S_{(ABM)} = S_{(ACM)}$

Se pune problema dacă singurele puncte *M* din plan cu proprietatea $S_{(ABM)} = S_{(ACM)}$ sunt punctele medianei din *A* ?

Pentru aceasta ajungem la următoarea problemă de loc geometric:

Să se determine locul geometric al punctelor *M* din planul ΔABC pentru care $S_{(ABM)} = S_{(ACM)}$.

Soluție. 1. Din proprietatea specificată anterior rezultă că *AA'* aparține locului geometric.

2. Arătăm că în interiorul $\angle CAB$ nu există alte puncte ale locului geometric.

- presupunem că ar exista $M \in \Omega$, $M \notin AA'$

$$\left.\begin{aligned} S_{(MAB)} &= \frac{AB*MM'}{2} \\ S_{(MAC)} &= \frac{AC*MM''}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB*MM' = AC*MM''$$

din $M_1 \in \Omega$ avem $S_{(ABM_1)} = S_{(ACM_1)} \Rightarrow AB*M_1M' = AC*M_1M_1''$;
dar $MM' > M_1M'$ şi $MM' < M_1M''$. Deci
$AB*M_1M' < AB*MM' = AC*MM'' < AC*M_1M_1'' \Rightarrow S_{(ABM_1)} = S_{(ACM_1)}$

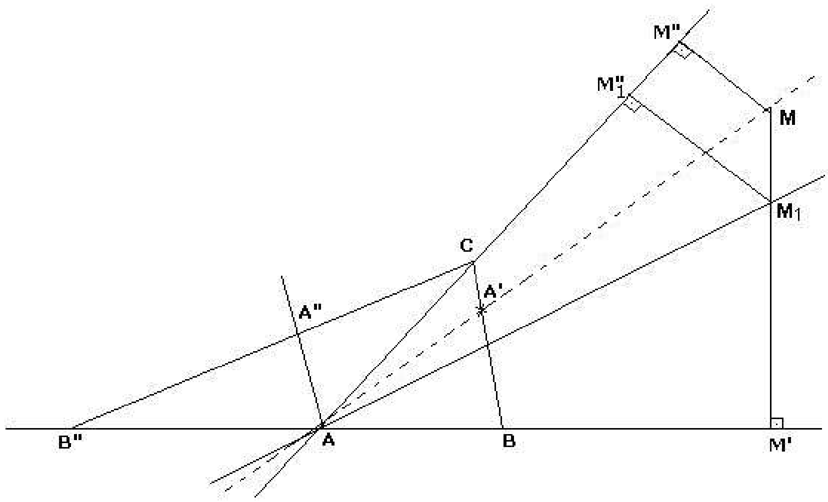
Rămâne să căutăm puncte ale locului în exteriorul acestui unghi.

Fie *B*' simetricul față de *A*.

Din $AB = AB' \Rightarrow S_{(ABM)} = S_{(AB'M)}$, deci relația ce o verifică punctele locului este: $S_{(AB'M)} = S_{(ACM)}$, care din nou conform proprietății medianei în $\Delta B'AC$ este mediana *AA"* paralelă cu *BC*.

Deci locul geometric este mediana din *A* şi paralela prin *A* la *BC*.

Fig. 3.2.



R3.2.3. Să se determine locul geometric al punctelor *M* din planul dreptelor d_1 şi d_2 pentru care raportul:

$$\frac{d(M, d_1)}{d(M, d_2)} = k \text{ , } k>0.$$

Soluție. Rezolvăm problema în cazurile:

$$d_1 \cap d_2 = \{O\} \neq \emptyset \text{ şi } d_1 \cap d_2 = 0, d_1 \parallel d_2$$

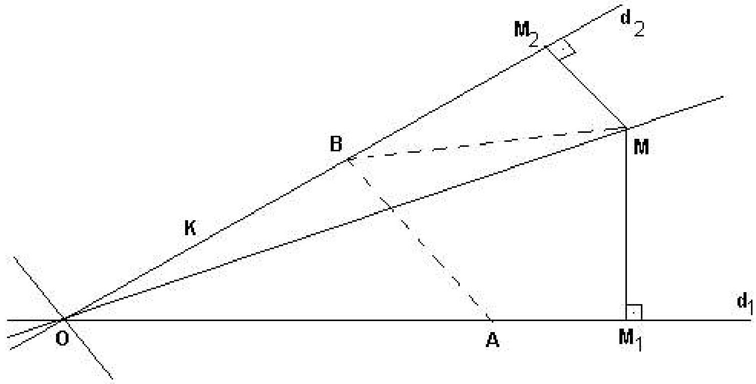


Fig. 3.3.

Fie $M \in \Omega$ situat în unul din cele patru unghiuri format de dreptele d_1 şi d_2.

Pe laturile acestui unghi luăm $A \in d_1$ astfel ca $OA = 1$ şi $B \in d_2$ astfel ca $OB = k$, relaţia $d(M, d_1) * 1 = d(M, d_2) * k \Leftrightarrow OA * MM_1 = OB * MM_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow S_{(OAM)} = S_{(OBM)}$.

Deci am ajuns la problema determinării locului geometric al punctelor din planul triunghiului *OAB* cu $S_{(OAM)} = S_{(OBM)}$ care este format din două drepte: mediana din *O* şi paralela prin *O* la *AB*.

În cazul $d_1 \parallel d_2$ diferenţiem cazul k=1 şi cazul $k \neq 1$.

Dacă k=1, pe fiecare dreaptă perpendiculară pe d_1 şi d_2 avem un singur punct în loc (mijlocul segmentului determinat de intersecţia ei cu cele două drepte).

Deci locul va fi o dreaptă paralelă la d_1 şi d_2 egal depărtată de cele două drepte.

Dacă $k \neq 1$ pe fiecare dreaptă perpendiculară pe d_1 şi d_2 se obţin câte două puncte, unul între punctele de intersecţie şi unul în afară, situat la distanţă determinată.

Deci locul geometric în acest caz va fi format din două drepte paralele la d_1 şi d_2.

R3.2.4 Două puncte mobile *M* şi *N* se mişcă rectiliniu şi uniform. Să se determine locul geometric al punctelor $P \in [MN]$ astfel ca $\frac{MP}{NP} = k$ (constant).

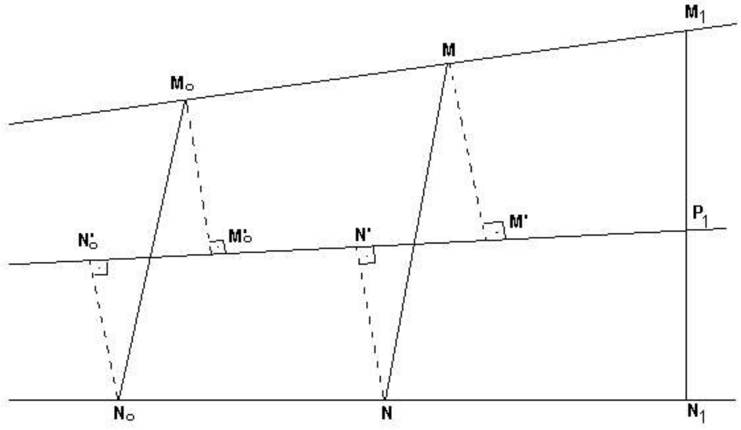


Fig. 3.4.

Soluție. Vom arăta că locul geometric este o dreaptă. Pentru aceasta este suficient să arătăm că dacă P_0 şi P_1 sunt două poziții ale lui P , orice altă poziție este coliniară cu P_0 şi P_1.

Rapoartele $\dfrac{N_0N}{NN_1}$ şi $\dfrac{M_0M}{MM_1}$ nu depind de vitezele v_M şi v_N, ci doar de intervalul de timp, deci

$$\frac{N_0N}{NN_1}=\frac{M_0M}{MM_1}=x*\left(\frac{v_1t_1}{v_1t_2}=\frac{v_2t_1}{v_2t_2}=\frac{t_1}{t_2}\right);$$

Dacă $\{P\}=P_0P_1\cap MN$, pentru a arăta că $P=P'$ este suficient să arătăm că $\dfrac{MP'}{P'N}=k$.

Fie $N_0^{'}$, $M_0^{'}$, $N^{'}$, $M^{'}$, $N_1^{'}$, $M_1^{'}$, formând proiecțiile pe dreapta P_0P_1 ale punctelor N_0 , M_0 , $N, M,$ N_1 , M_1 , avem : $\dfrac{MP'}{P'N}=\dfrac{MN'}{NN'}$.

Din trapezul $N_0N_1N_1^{'}N_0^{'}$ $\Rightarrow$

$$NN'=\frac{x*N_1N_1^{'}+N_0N_0^{'}}{1+x},\quad \text{analog } MM'=\frac{x*M_1M_1^{'}+M_0M_0^{'}}{1+x}$$

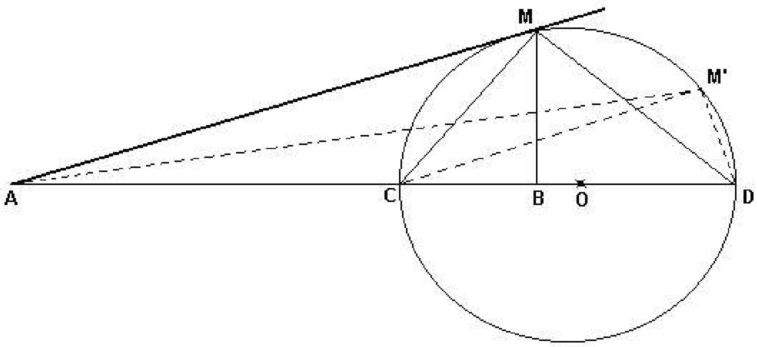
Deci $\dfrac{M_0M_o^{'}}{N_0N_0^{'}}=\dfrac{M_0P_0}{N_0P_0}=k\Rightarrow\begin{cases}M_0M_0^{'}=k*N_0N_0^{'}\\M_1M_1^{'}=k*N_1N_1^{'}\end{cases}$. Deci $\dfrac{MP'}{P'N}=k.$

R3.2.5 Să se găsească locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe este constant.

Soluție. Fie A și B două puncte fixe distincte. Căutăm locul geometric al punctelor M pentru care $\frac{MA}{MB}=k$, unde k este o constantă pozitivă.

În plan pentru k=1, orice punct M pentru care $\frac{MA}{MB}=1$, aparține mediatoarei segmentului $[AB]$ și reciproc. De aceea în acest caz locul geometric este mediatoarea segmentului AB.

Fig. 3.5.



Fie $k \neq 1$ și M un punct care nu se află pe dreapta AB, astfel încât $\frac{MA}{MB}=k$. Bisectoarea interioară a unghiului $\angle AMB$ taie pe AB în C.

Deoarece $k \neq 1$ implică $MA \neq MB, \Delta AMB$ nu este isoscel. De aceea și bisectoarea exterioară unghiului $\angle AMB$ taie pe AB în D.

În proprietatea bisectoarei avem: $\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MB}=\frac{DA}{DB}=k$. Astfel C și D sunt puncte fixe pe AB, care împart segmentul $[AB]$ în raportul k. Deoarece $m(\angle CMD)=90^0$ rezultă M aparține cercului de diametru CD.

Reciproc: fie M' un punct al cercului de diametru CD, unde C și D sunt fixe pe AB , care împarte $[AB]$ în raportul k.

Deoarece $M'C \perp M'D$ rezultă că $M'C$ și $M'D$ sunt bisectoarele unghiului M', adică $\frac{M'A}{M'B}=\frac{CA}{CB}=k.$

Punctele C și D convin prin definiție. De aceea locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe A și B este un număr pozitiv $k \neq 1$, este cercul de diametru CD, punctele C, D împărțind pe $[AB]$ în raportul dat.

4. Patrulaterul inscriptibil şi circumscriptibil

PATRULATERUL INSCRIPTIBIL

În acest paragraf se vor studia proprietățile patrulaterului inscriptibil.

4.1. Arc capabil de un unghi dat

În acest paragraf vom rezolva următoarea problemă: Se dau două puncte fixe diferite, A şi B şi un număr $\alpha^0 \in (0,180^0)$. Să se determine locul geometric al punctelor M astfel încât $m(A\hat{M}B) = \alpha^0$.

Soluție. Dreapta AB împarte planul în două semiplane S şi S′. Vom determina locul geometric al punctelor M cu proprietatea din enunț situate în semiplanul S. Fie semidreapta (AX în semiplanul S′ astfel încât $m(X\hat{A}B) = \alpha^0$. Notăm cu O punctul de intersecție dintre perpendiculara în A pe AX şi mediatoarea segmentului AB. Considerăm cercul C de centru O şi rază OA (fig.1).

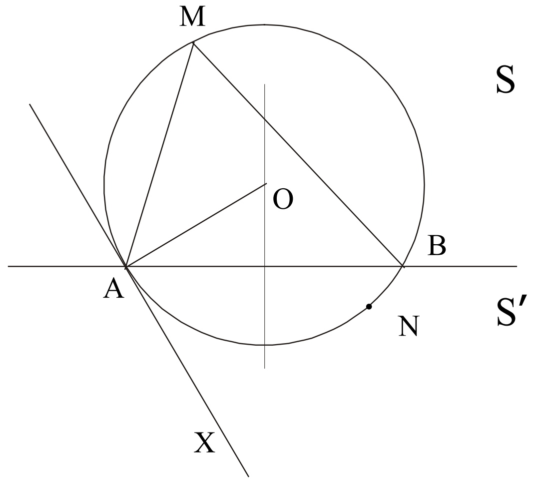


Fig. 1.

Fie M un punct arbitrar al arcului $\widehat{AB}$ situat în semiplanul S şi N un punct al arcului $\widehat{AB}$ situat în semiplanul S′. Deoarece AX este tangentă cercului C avem că $m(X\hat{A}B) = \frac{m(A\widehat{N}B)}{2}$. Dar $m(A\hat{M}B) = \frac{m(A\widehat{N}B)}{2}$, deci $m(A\hat{M}B) = m(X\hat{A}B) = \alpha^0$.

Dacă P∈Int C ∩S, atunci $m(A\hat{P}B) > \frac{m(A\widehat{N}B)}{2} = \alpha^0$ deoarece unghiul $A\hat{P}B$ este un unghi cu vârful în interiorul cercului C. Dacă P∈ExtC∩S, atunci

$m(A\hat{P}B) < \dfrac{m(A\widehat{N}B)}{2}$. Arcul $\widehat{AB}$ din semiplanul S, fără punctele A şi B este locul geometric al punctelor M din semiplanul S pentru care $m(A\hat{M}B) = \alpha^0$ şi se numeşte arc capabil de unghiul α^0. Locul geometric din plan este format din două arce capabile de unghiul α^0, unul situat în semiplanul S şi celălalt în semiplanul S′.
Observaţia 5.1.1. Arcul deschis $\widehat{AB}$ situat în semiplanul S′ este un arc capabil de unghiul $180^0 - \alpha^0$.

4.2 Patrulaterul inscriptibil

În acest paragraf vom defini şi vom caracteriza patrulaterul inscriptibil.
Definiţia 4.2.1. Un patrulater se numeşte înscris într-un cerc sau inscriptibil, dacă vârfurile patrulaterului aparţin cercului.
Teorema 4.2.1. Un patrulater convex este inscriptibil dacă şi numai dacă mediatoarele laturilor sale sunt concurente.
Demonstraţie. Fie patrulaterul convex ABCD (fig.2), cu proprietatea că mediatoarele laturilor sale sunt concurente în O.

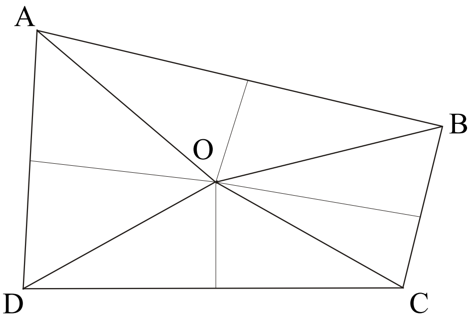


Fig. 2.

Atunci, pe baza proprietăţii pe care o au punctele de pe mediatoare, avem că OA ≡ OB, OB ≡ OC, OC ≡ OD şi OD ≡ OA, de unde OA ≡ OB ≡ OC ≡ OD. Deci vârfurile patrulaterului se găsesc pe un cerc de centru O şi rază R=OA, deci patrulaterul ABCD este inscriptibil. Reciproc, dacă ABCD este inscriptibil şi O este centrul cercului circumscris, atunci OA ≡ OB ≡ OC ≡ OD = R, deci O se află pe toate mediatoarele laturilor patrulaterului ABCD, rezultă că mediatoarele sunt concurente.

Teorema 4.2.2. Un patrulater convex este inscriptibil dacă şi numai dacă un unghi determinat de o latură şi de o diagonală este congruent cu unghiul format de latura opusă primei laturi şi cealaltă diagonală.

Demonstraţie. Fie patrulaterul inscriptibil ABCD şi C (O,R) cercul circumscris (fig.3).

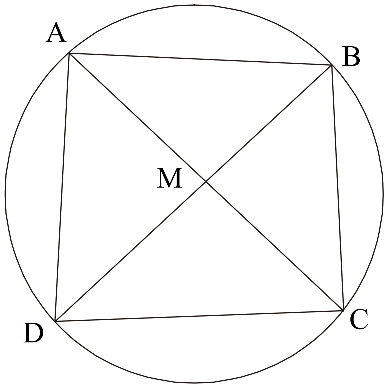


Fig. 3.

Atunci avem că $m(D\hat{A}C) = m(D\hat{B}C) = \dfrac{m(\overset{\frown}{DC})}{2}$ şi analog pentru celelalte perechi de unghiuri. Reciproc, dacă patrulaterul este convex şi dacă $D\hat{A}C \equiv D\hat{B}C$, atunci ținând seama de proprietatea arcului capabil de unghi dat şi de faptul că A şi B se află în acelaşi semiplan limitat de dreapta DC, rezultă că punctele B şi C aparțin unui cerc în care DC este coardă. Deci patrulaterul ABCD este inscriptibil.

Teorema 4.2.3. Un patrulater convex este inscriptibil dacă şi numai dacă suma a două unghiuri opuse ale patrulaterului este de 180^0.

Demonstrație. Dacă patrulaterul ABCD este inscriptibil şi C este cercul circumscris (fig.3), atunci $m(A\hat{B}C) + m(A\hat{D}C) = \dfrac{m(\overset{\frown}{ADC})}{2} + \dfrac{m(\overset{\frown}{ABC})}{2} = 180^0$. Reciproc, se ține seama de observația 4.1.1.

Teorema 4.2.4. (Inegalitatea lui Ptolemeu) În patrulaterul convex ABCD are loc inegalitatea $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă patrulaterul este inscriptibil.

Demonstrație. Construim triunghiul ADE asemenea cu triunghiul ABC, $\angle ABC \equiv \angle ADE$ şi $\angle BAC \equiv \angle DAE$ (fig. 4)

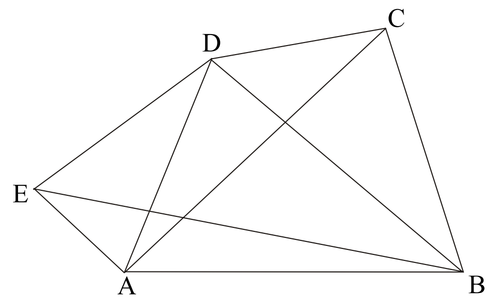


Fig. 4.

Din această asemănare avem că $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$, de unde $DE=\frac{BC\cdot AD}{AB}$ şi $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$. Ţinând seama de ultima relaţie şi de faptul că $\angle EAC \equiv \angle DAB$, rezultă că triunghiurile EAC şi DAB sunt asemenea, deci $\frac{AC}{AB}=\frac{EC}{DB}$, de unde $EC=\frac{AC\cdot DB}{AB}$. În triunghiul EDC, care poate fi şi degenerat, avem că $EC \leq ED + DC$ şi înlocuind pe *DE* şi *EC* rezultă inegalitatea cerută. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă punctele E, D şi C sunt coliniare, adică $m(\angle DAE)+m(\angle ADC)=180^0$, dacă şi numai dacă patrulaterul ABCD este inscriptibil.

Consecinţa 4.2.1. (Teorema lui Pompeiu) Fie triunghiul echilateral ABC şi M un punct în planul triunghiului ce nu aparţine cercului circumscris triunghiului. Atunci distanţele *MA*, *MB*, *MC* pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

Demonstraţie. În patrulaterul ABMC, aplicând inegalitatea lui Ptolemeu, avem că $AM\cdot BC<CM\cdot AB+BM\cdot AC$. Dar triunghiul ABC fiind echilateral avem că $AM<CM+BM$. Analog obţinem că $BM<AM+CM$ şi $CM<AM+BM$, deci *AM*, *BM*, *CM* pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

Teorema 4.2.5. (Prima teoremă a lui Ptolemeu) Fie un patrulater convex ABCD. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) Patrulaterul ABCD este inscriptibil;
(ii) $AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$.

Demonstraţie. Rezultă din teorema 5.2.4.

Teorema 4.2.6. (A doua teoremă a lui Ptolemeu) În patrulaterul inscriptibil ABCD are loc relaţia:

$$\frac{AC}{BD}=\frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}$$

Demonstrație. Notăm AC$\cap$BD= {M}(fig. 3). Din asemănarea triunghiurilor ABM şi DCM avem $\frac{MB}{MC}=\frac{MA}{MD}=\frac{AB}{DC}$, de unde $\frac{MA}{AB\cdot AD}=\frac{MD}{DA\cdot DC}$ şi $\frac{MB}{BA\cdot BC}=\frac{MC}{CD\cdot CB}$. Analog, din asemănarea triunghiurilor ADM şi BCM avem $\frac{MA}{AD\cdot AB}=\frac{MB}{BC\cdot BA}$.
Deci $\frac{MA}{AB\cdot AD}=\frac{MB}{BA\cdot BC}=\frac{MC}{CD\cdot CB}=\frac{MD}{DA\cdot DC}$, sau
$\frac{MA+MC}{AB\cdot AD+CD\cdot CB}=\frac{MB+MD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}$, de unde rezultă egalitatea ce trebuia demonstrată.

Observația 4.2.1. Se poate arăta că dacă într-un patrulater convex are loc relația din teorema 4.2.6, atunci patrulaterul este inscriptibil.

Teorema 4.2.7. (Schooten) Dacă M este un punct situat pe arcul $\overset{\frown}{BC}$ (arcul care nu-l conține pe A) al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC, atunci *AM=BM+CM.*

Demonstrație. Aplicând prima teoremă a lui Ptolemeu în patrulaterul inscriptibil ABMC (fig. 5), avem $AM\cdot BC=BM\cdot AC+CM\cdot AB$. Ținând seama că triunghiul ABC este echilateral, se obține identitatea cerută.

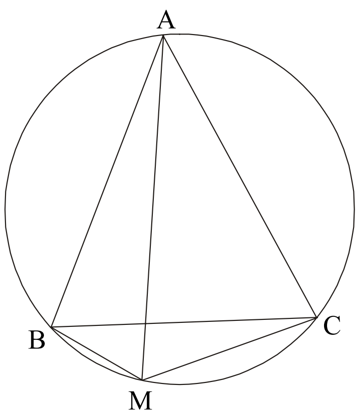


Fig. 5.

Lema 4.2.1. (Brahmagupta) Fie triunghiul ABC, R raza cercului circumscris triunghiului. Dacă AA′ este înălțimea din A, A′$\in$BC, atunci $AB\cdot AC=2R\cdot AA'$.

Demonstrație. În cercul circumscris triunghiului ABC, fie A_1 punctul diametral opus lui A (fig. 6). Din asemănarea triunghiurilor ABA′ şi AA_1C avem $\frac{AB}{AA_1}=\frac{AA'}{AC}$, de unde, ținând seama că $AA_1=2R$, obținem identitatea din enunț.

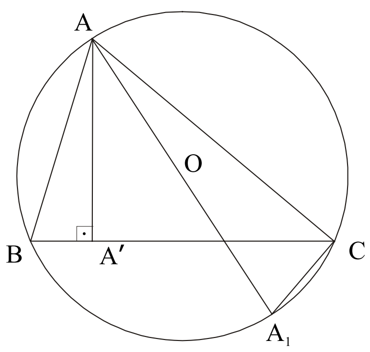


Fig. 6.

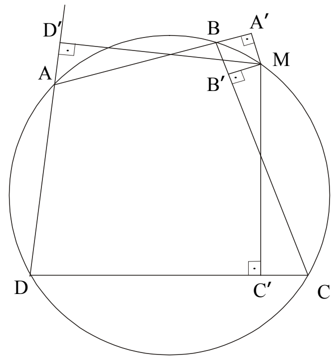


Fig. 7.

Teorema 4.2.8. (Pappus) Într-un patrulater inscriptibil, produsul distanțelor unui punct al cercului circumscris patrulaterului la două laturi opuse este egal cu produsul distanțelor la celelalte două laturi opuse.

Demonstrație. Fie patrulaterul inscriptibil ABCD, M un punct al cercului circumscris, A′,B′,C′,D′ proiecțiile lui M pe laturile AB, BC, CD, respectiv DA (fig.7). Conform lemei 4.2.1 avem $MA\cdot MB=2R\cdot MA'$, $MB\cdot MC=2R\cdot MB'$, $MC\cdot MD=2R\cdot MC'$ şi $MD\cdot MA=2R\cdot MD'$, de unde rezultă că $MA'\cdot MC=MB'\cdot MD'$.

Definiția 4.2.2. Într-un patrulater, bimedianele sunt segmente determinatele de mijloacele laturilor opuse sau mijloacele diagonalelor.

Lema 4.2.2. Într-un patrulater convex, bimedianele sunt concurente.

Demonstrație. Fie A′, B′, C′, D′, E′, F′ mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA, respectiv a diagonalelor AC şi BD (fig.8).

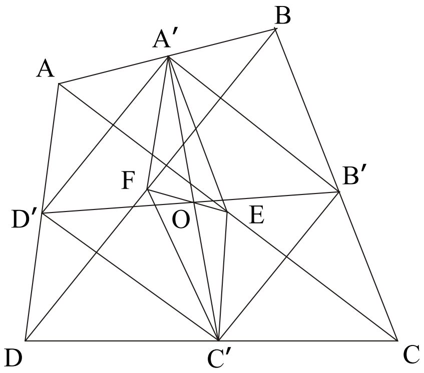


Fig. 8.

Deoarece A′B′ şi C′D′ sunt linii mijlocii în triunghiurile ABC şi ADC, avem că A′B′||AC, $A'B' = \frac{AC}{2}$ şi C′D′||AC, $C'D' = \frac{AC}{2}$. Rezultă că A′B′||C′D′ şi A′B′≡C′D′, deci patrulaterul A′B′C′D′ este paralelogram. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor A′C′ şi B′D′, deci O este mijlocul acestor segmente. Deoarece A′F şi C′E sunt linii mijlocii în triunghiurile ABD şi ACD, avem că A′FC′E este paralelogram cu diagonalele A′C′ şi EF, de unde rezultă că diagonala EF trece prin mijlocul diagonalei A′C′, adică prin O. Analog, se arată şi pentru celelalte bimediane că trec prin punctul O.

Teorema 4.2.9. (Mathot) Într-un patrulater inscriptibil, perpendicularele duse din mijloacele laturilor pe laturile opuse sunt concurente.

Demonstrație. Fie O centrul cercului circumscris patrulaterului inscriptibil ABCD şi A′,B′,C′, D′ mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv DA (fig. 9). Deoarece O se află pe mediatoarele laturilor patrulaterului, rezultă că OA′⊥AB, OB′⊥BC, OC′⊥CD şi OD′⊥DA. Conform lemei 4.2.2, bimedianele patrulaterului sunt concurente şi fie E punctul de concurență. Notăm cu M simetricul lui O față de E. Patrulaterul MA′OC′ este paralelogram deoarece diagonalele lui se înjumătățesc. Rezultă că MA′||OC′. Dar OC′⊥CD, deci MA′⊥CD. Analog MB′⊥DA, MC′⊥AB şi MD′⊥BC, deci punctul de concurență este M, simetricul lui O față de E.

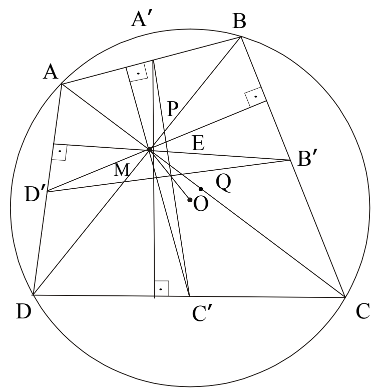


Fig. 9.

Observația 4.2.2. Punctul M de concurență din teorema 4.2.9 se numeşte punctul lui Mathot.

Consecința 4.2.2. Într-un patrulater inscriptibil, perpendiculara din mijlocul unei diagonale pe cealaltă diagonală conține punctul Mathot al patrulaterului.

Demonstrație. Folosim notațiile din teorema 4.2.9. şi fie P, Q mijloacele diagonalelor BD, respectiv AC. Din demonstrațiile lemei 4.2.2 şi a teoremei 4.2.9, rezultă că patrulaterul OPMQ este paralelogram deoarece diagonalele lui se înjumătățesc, deci MP||OQ. Dar Q fiind mijlocul coardei AC, rezultă că OQ⊥AC, deci MP⊥AC. Analog QM⊥BD.

Lema 4.2.3. Un trapez este incriptibil dacă şi numai dacă este isoscel.

Demonstrație. Dacă trapezul ABCD, AB||CD este inscriptibil atunci m(∠A)+ m(∠C) =180°. Dar m(∠A)+ m(∠D) =180°, deci ∠C ≡ ∠D, adică trapezul este isoscel. Reciproc, dacă trapezul este isoscel atunci ∠C≡∠D şi cum m(∠A)+ m(∠D) =180°, rezultă că m(∠A)+m(∠C) =180°, adică patrulaterul este inscriptibil.

Teorema 4.2.10.(Euler) Mijloacele laturilor unui triunghi, picioarele înălțimilor şi mijloacele segmentelor ce unesc vârfurile triunghiului cu ortocentrul lui, sunt situate pe un acelaşi cerc, numit cercul lui Euler.

Demonstrație. Fie triunghiul ABC, A′, B′, C′ mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB, $AA_1 \perp BC$, $A_1 \in BC$, $BB_1 \perp CA$, $B_1 \in CA$, $AA_1 \cap BB_1 = \{H\}$, $A_1^{'}$ mijlocul segmentului AH (fig. 10).

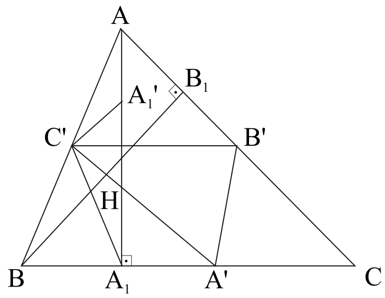


Fig. 10.

În triunghiul dreptunghic AA_1B, A_1C' este mediană, deci $A_1C' = \frac{AB}{2}$. În triunghiul ABC, $A'B'$ este linie mijlocie, deci $A'B' = \frac{AB}{2}$. Rezultă că $A_1C' \equiv A'B'$ şi deoarece $B'C'$ este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $B'C' \| BC$, în final obținem că patrulaterul $B'C'A_1A'$ este trapez isoscel. Cum orice trapez isoscel este inscriptibil, rezultă că A_1 se găseşte pe cercul C determinat de punctele A', B', C'. Analog, celelalte picioare ale înălțimilor sunt pe cercul C. În triunghiul ABC, $A'C'$ este linie mijlocie, deci $A'C' \| AC$. În triunghiul ABH, $A_1'C'$ este linie mijlocie, deci $A_1'C' \| BH$. Dar $BH \perp AC$, deci $A_1'C' \perp A'C'$ sau $m(\angle A_1'C'A') = 90°$. Analog, $m(\angle A_1'B'A') = 90°$, deci patrulaterul $A_1'C'A'B'$ este inscriptibil, rezultă că A_1' se găseşte pe cercul C. Analog, pentru celelalte mijloace de segmente determinate de vârfuri şi ortocentru.

Consecința 4.2.3. Fie triunghiul ABC, A',B',C' mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB, A_1', B_1', C_1' mijloacele segmentelor AH, BH, respectiv CH. Atunci dreptele $A_1'A'$, $B_1'B'$, $C_1'C'$, sunt concurente, iar punctul de concurență este centrul cercului lui Euler.

Demonstrație. Din demonstrația teoremei 4.2.10 rezultă că $A_1'A'$, $B_1'B'$, $C_1'C'$ sunt diametre în cercul lui Euler.

Consecința 4.2.4. Într-un triunghi ABC, ortocentrul, centrul de greutate, centrul cercului circumscris triunghiului şi centrul cercului lui Euler sunt situate pe o aceeaşi dreaptă, numită dreapta lui Euler.

Demonstrație. În triunghiul ABC, fie A' mijlocul segmentului BC, A'' punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului ABC, O centrul acestui cerc, A_1' mijlocul segmentului AH (fig.11).

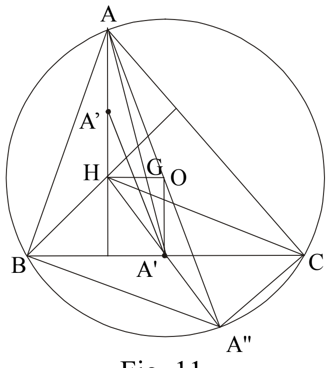


Fig. 11.

Deoarece BH⊥AC şi A″C⊥AC, rezultă că BH||CA″. Analog, CH||BA″, deci BHCA″ este paralelogram, rezultă că A′ este mijlocul lui HA″. În triunghiul AHA″, OA′ este linie mijlocie, deci $OA'=\frac{1}{2}AH$. Dacă AA′∩HO={G},atunci ΔAHG~ΔA′OG, raportul de asemănare este 2, deci $AG=2\cdot A'G$, adică G este centrul de greutate al triunghiului ABC. Înseamnă că G∈ [HO] şi HG=2·GO. Mai avem că $OA'\equiv HA_1'$ şi $OA'||HA_1'$, deci patrulaterul $A_1'HA'O$ este paralelogram şi atunci diagonalele acestui paralelogram se înjumătăţesc. Fie $A_1'A'\cap HO=\{O_9\}$. Deoarece $A_1'A'$ este diametru în cercul lui Euler, rezultă că O_9 este centrul cercului lui Euler şi se găseşte la mijlocul lui HO.

Teorema 4.2.11. (Simson) Proiecţiile unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi pe laturile acestuia, sunt trei puncte coliniare.

Demonstraţie. Fie triunghiul ABC, M un punct pe cercul circumscris triunghiului şi A′, B′, C′ proiecţiile lui M pe laturile BC, CA şi respectiv AB (fig. 12).

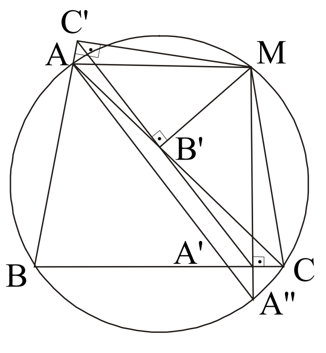


Fig. 12.

Unim B′ cu C′ şi B′ cu A′. Deoarece patrulaterele AB′MC′, CA′B′M şi ABCM sunt inscriptibile, avem m(∠A′B′C)=m(∠A′MC)=90^0-m(∠A′CM)=

$=90^0$- m($\angle$MAC′)=m($\angle$C′MA)=m($\angle$AB′C′), ceea ce înseamnă că punctele A′, B′, C′ sunt coliniare.

Observaţia 4.2.3. Dreapta pe care se află punctele A′, B′, C′ se numeşte dreapta lui Simson.

Consecinţa 4.2.5. În condițiile teoremei 4.2.11, dacă MA′ mai intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în A″, atunci AA″ este paralelă cu dreapta lui Simson.

Demonstrație. Avem că m($\angle$AA″M)=m($\angle$ACM)=$\frac{m(\widehat{AM})}{2}$ şi $\angle$B′A′M≡$\angle$B′CM din patrulaterul inscriptibil B′A′CM (fig. 12). Rezultă că $\angle$AA′M≡$\angle$B′A′M , deci AA||BA.

Teorema 4.2.12. (reciproca teoremei lui Simson) Fie M un punct exterior triunghiului ABC şi A′, B′, C′ proiecțiile pe M pe laturile BC, CA, respectiv BC. Dacă A′, B′, C′ sunt coliniare, atunci M se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Demonstrație. Deoarece punctele A′, B′, C′ sunt coliniare, rezultă că $\angle$AB′C′≡$\angle$A′B′C (fig. 13).

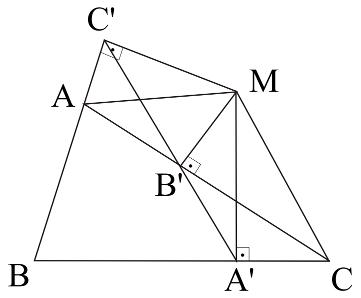


Fig. 13.

Din patrulaterele inscriptibile AB′MC′ şi CA′B′M rezultă că m($\angle$AB′C′)=m($\angle$AMC′)=90^0-m($\angle$MAC′),
m($\angle$A′B′C)=m($\angle$A′MC)=90^0-m($\angle$MCA′) şi ţinând seama de relaţiile de mai sus, obţinem că $\angle$MAC′≡$\angle$MCA′, adică patrulaterul ABCM este inscriptibil. În concluzie, M este pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Teorema 4.2.13. (Salmon) Fie triunghiul ABC, M este un punct arbitrar pe cercul circumscris triunghiului. Cercurile de diametre MA, MB şi MC se intersectează două câte două în trei puncte coliniare.

Demonstrație. Fie C′ al doilea punct de intersecție a cercurilor de diametre MA şi MB. Deoarece m(∠AC′M)=m(∠BC′M)=90°, rezultă că MC′⊥AB, C′∈AB. Ținând seama de teorema lui Simson, rezultă că cele trei puncte sunt coliniare.

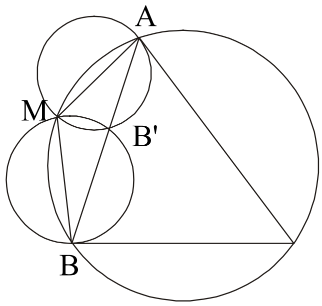


Fig.14.

Teorema 4.2.14. (Naghel) Fie triunghiul ABC, C(O) cercul circumscris triunghiului, B′, C′ proiecțiile vârfurilor B, C pe laturile opuse. Atunci, perpendiculara din A pe B′C′ trece prin O.

Demonstrație. Perpendiculara din A pe B′C′ intersectează a doua oară cercul în A′ şi intersectează pe B′C′ în D (fig. 15). Patrulaterele ABA′C şi BCB′C′ sunt inscriptibile, deci ∠ABC≡∠AA′C şi ∠AB′C′≡∠ABC. Rezultă că ∠AA′C≡∠AB′C′. Dar triunghiurile AA′C şi AB′D au unghiul ∠B′AD comun şi ∠AA′C≡∠AB′C′, deci ∠ACA′≡∠ADB′. Ținând seama că m(∠ADB′)=90^0, rezultă că m(∠ACA′)=90^0, deci AA′ este diametru în cercul C(O).

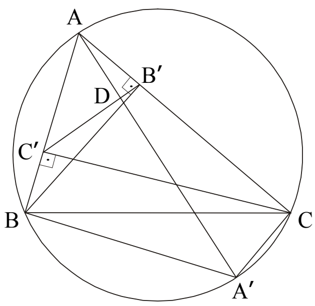


Fig.15.

4.3. Patrulaterul circumscriptibil

În acest paragraf vom studia proprietățile patrulaterului circumscriptibil.

Definiția 4.3.1. Un patrulater se numeşte circumscris unui cerc sau circumscriptibil, dacă laturile sale sunt tangente la un cerc.

Teorema 4.3.1. Un patrulater convex este circumscriptibil dacă şi numai dacă bisectoarele unghiurilor sale sunt concurente.

Demonstrație. Arătăm că dacă patrulaterul ABCD este circumscriptibil, atunci bisectoarele unghiurilor sale sunt concurente (fig. 1). Fie I centrul cercului înscris patrulaterului ABCD. Atunci d(I,AB)=d(I,BC)=d(I,CD)=d(I,DA)= r şi ținând seama de proprietatea bisectoarei unui unghi, rezultă că I se află pe bisectoarele unghiurilor patrulaterului ABCD. Deci avem proprietatea de concurență. Reciproc, dacă I este punctul de concurență al bisectoarelor unghiurilor patrulaterului ABCD, atunci d(I,AB)=d(I,BC) =d(I,CD)=d(I,DA). Cercul de centru I şi rază r = d (I, AB) este tangent fiecărei laturi a patrulaterului ABCD, deci patrulaterul ABCD este circumscriptibil.

Teorema 4.3.2. (Pithot) Dacă patrulaterul ABCD este circumscriptibil, atunci *AB+CD= AD+BC*.

Demonstrație. Fie M,N,P,Q punctele de contact ale cercului înscris cu laturile AB, BC, CD , respectiv DA (fig. 2).

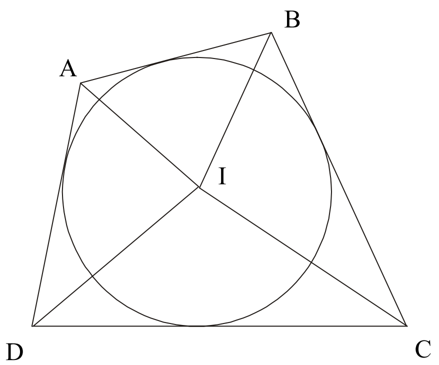


Fig.1.

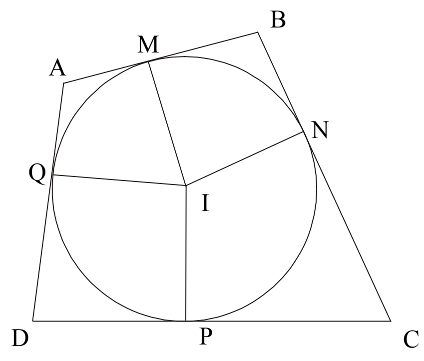


Fig.2.

Au loc următoarele egalități de tangente la cerc AM≡AQ, BM≡BN, CN≡CP şi DP≡DQ, de unde
AB+CD=(AM + BM)+(CP+DP)=(AQ+DQ)+(BN+CN)=BC+AD, adică identitatea din enunț.

Teorema 4.3.3. Dacă un patrulater convex ABCD are proprietatea că AB+CD=AD+BC, atunci patrulaterul ABCD este circumscriptibil.

Demonstrație. Considerăm un cerc C, tangent la AB, BC şi CD, apoi o dreaptă AD′ tangentă acestui cerc D′∈CD.

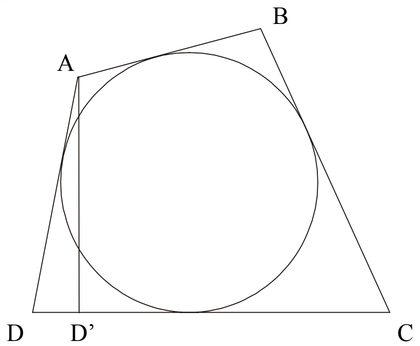


fig. 3

În patrulaterul ABCD′ care este circumscris cercului C, conform teoremei lui Pithot, avem că $AB+CD'=AD'+BC$. Dar din ipoteză $AB+CD=AD+BC$, de unde, prin scăderea celor două relații, obținem că $DD'=|AD' - AD|$. Această relație are loc dacă şi numai dacă triunghiul ADD′ este degenerat, adică D coincide cu D′. Rezultă că patrulaterul ABCD este circumscriptibil.

Consecința 4.3.1. Patrulaterul convex ABCD este circumscriptibil dacă şi numai dacă $AB+CD=AD+BC$.

Demonstrație. Rezultă din teoremele 4.3.2 şi 4.3.3.

Observația 4.3.1. Condiția de convexitate intervine în demonstrație destul de subtil. Figura 4 este un exemplu de patrulater ABCD cu AB≡AD şi BC≡CD, deci are loc $AB+CD=AD+BC$, fără a fi însă patrulater circumscriptibil.

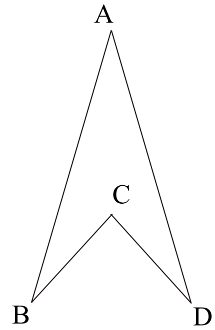


Fig.4.

Propoziția 4.3.1. Dacă un trapez isoscel este circumscriptibil, atunci diametrul cercului înscris este medie geometrică între bazele trapezului.

Demonstrație. Fie trapezul ABCD, AD||BC, C(I,r) cercul înscris şi T punctul de contact al cercului cu AB (fig.5).

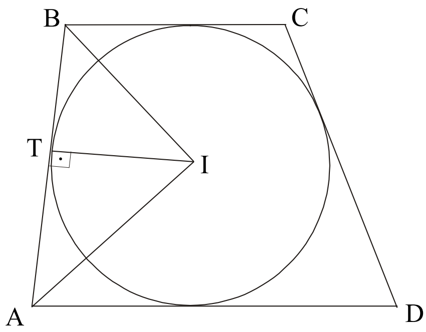


fig. 5

Deoarece m($\angle$AIB)=90°, aplicând teorema înălțimii în triunghiul AIB, avem că $IT^2=AT\cdot BT$. Dar ținând seama că IT = r, $AT=\frac{1}{2}AD$ şi $BT=\frac{1}{2}BC$, rezultă identitatea din enunț.

4.4. Relații metrice

În cele ce urmează, pentru un patrulater ABCD, vom folosi următoarele notații: $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $BD=e$, $AC=f$ şi $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Teorema 4.4.1. (Arhimede) Aria S a unui patrulater convex ABCD este dată de formula $S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cdot\cos^2\dfrac{B+D}{2}$.

Demonstrație. Ținând seama că A[ABCD]=A[ABC]+A[ADC], rezultă că $2S$=ab·sinB+cd·sinD, de unde prin ridicare la pătrat avem $4S^2=a^2b^2\sin^2 B+c^2d^2\sin^2 D+2abcd\sin B\sin D$. Pe de altă parte din teorema cosinusului în triunghiurile ABC şi ADC avem $AB^2=a^2+b^2-2ab\cos B$ şi $AB^2=c^2+d^2-2cd\cos D$, de unde $a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D$, sau $a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cos B-2cd\cos D$ şi prin ridicare la pătrat obținem $(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4a^2b^2\cos^2 B+4c^2d^2\cos^2 D-8abcd\cos B\cos D$.
Se înmulțeşte relația care-l dă pe 4 S^2 cu 4 şi se adună cu ultima relație obținută şi avem $16S^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\cos(B+D)$,

sau

$$16S^2 = (2ab+2cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2) - 8abcd[1+\cos(B+D)] =$$

$$= (2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2) - 16abcd\cos^2\frac{B+D}{2} =$$

$$= [(c+d)^2-(a-b)^2][(a+b)^2-(c-d)^2] - 16abcd\cos^2\frac{B+D}{2} =$$

$$= (c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d) - 16abcd\cos^2\frac{B+D}{2}.$$

Ținând seama că $2p= a+b+c+d$ şi înlocuind mai sus, obținem formula lui Arhimede.

Propoziția 4.4.1. Fie patrulaterul inscriptibil ABCD. Să se arate că $e^2 = \dfrac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$ şi $f^2 = \dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$.

Demonstrație. În triunghiurile ABC, respectiv ACD avem $\cos B = \dfrac{a^2+b^2-f^2}{2ab}$ şi $\cos D = \dfrac{c^2+d^2-f^2}{2cd}$. Patrulaterul ABCD fiind inscriptibil avem că B+D=180°, deci cosB= -cosD, de unde $\dfrac{a^2+b^2-f^2}{2ab} = -\dfrac{c^2+d^2-f^2}{2cd}$, iar după calcule obținem identitățile din enunț.

Observația 4.4.1. Folosind relațiile demonstrate, cu ajutorul lor se pot demonstra cele două teoreme ale lui Ptolemeu.

Teorema 4.4.2. (Arhimede) Aria patrulaterului inscriptibil ABCD este dată de formula $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

Demonstrație. Rezultă din teorema 5.4.1.

Teorema 4.4.3 Dintre toate patrulaterele convexe de laturi date, patrulaterul inscriptibil are aria maximă.

Demonstrație. Deoarece *a, b, c, d* sunt date, avem

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{B+D}{2} \le (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) = const.$$

Atunci S^2 este maxim dacă şi numai dacă $\cos\dfrac{B+D}{2} = 0$, adică B+D=180^0, deci patrulaterul ABCD este inscriptibil.

Teorema 4.4.4. Aria patrulaterului circumscriptibil este dată de formula $S = \sqrt{abcd}\sin\frac{B+D}{2}$.

Demonstrație. Într-un patrulater circumscriptibil avem a+c=b+d, deci $p - a = \frac{-a+b+c+d}{2} = c$ şi analoagele. Atunci $S^2 = abcd - abcd\cos^2\frac{B+D}{2} = abcd(1-\cos^2\frac{B+D}{2}) = abcd\sin^2\frac{B+D}{2}$, de unde rezultă formula din enunț.

Consecința 4.4.1. Aria unui patrulater ABCD inscriptibil şi circumscriptibil este dată de formula $S = \sqrt{abcd}$.

Demonstrație. Rezultă din teorema 4.4.4.

5. Construcții geometrice

Prin probleme de construcție vom înțelege acele probleme de geometrie în care se cere construirea unor figuri geometrice ce satisfac anumite proprietăți, folosind numai rigla şi compasul.

Înainte de a considera probleme de construcție cu rigla şi compasul, Edwin Moise în lucrarea "Geometrie elementară" face câteva precizări:

i) Când vorbim de riglă şi compas, înțelegem o "riglă ideală" şi un "compas ideal", care trasează liniile drepte şi cercurile exact.

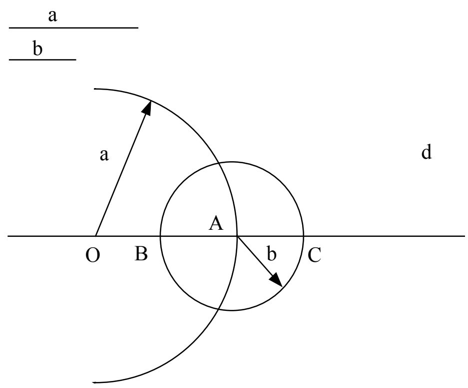
ii) Rigla nu are un marcaj pe ea. O putem utiliza pentru a desena drepte între două puncte date, dar aceasta este tot ceea ce putem face cu ea. Nu o putem utiliza pentru a măsura distanțele dintre puncte sau pentru a vedea dacă două segmente sunt congruente.

iii) Compasul se poate utiliza astfel. Fie un punct P şi un punct Q în plan. Putem desena atunci cercul cu centrul în P şi care trece prin Q. Aceasta este tot ce putem face cu el. Altfel spus, dându-se un al treilea punct P' nu este permis să mutăm vârful compasului în P' şi apoi să desenăm un cerc cu centrul în P' şi de rază PQ. Din acest motiv compasul este numit nerigid; nu i se poate muta vârful deoarece "când ridici vârful de pe hârtie, compasul se închide".

5.1. Construcția unor expresii algebrice

5.1.1. Construcția expresiilor $a+b$ şi $a-b$ $(a>b)$

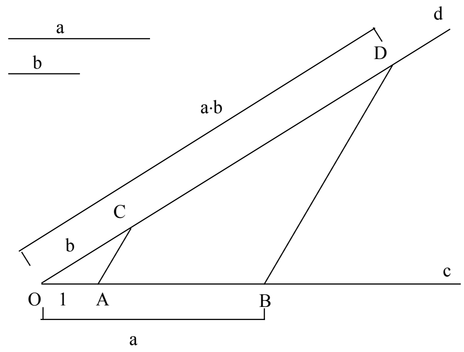
Considerăm numerele pozitive *a* şi *b* cu $a>b$. Pe o dreaptă *d* considerăm un punct O şi trasăm un arc de cerc de rază *a*, până când întâlneşte dreapta *d* în punctul A. Cu centrul În A trasăm cercul de rază *b* care va intersecta dreapta *d* în punctele B şi C (B între O şi A). Lungimea segmentului OC reprezintă expresia $a+b$, iar lungimea segmentului OB reprezintă expresia $a-b$.



5.1.2. Construcția expresiilor $a \cdot b$ şi $\frac{a}{b}$ $(a > b)$

i) Construcția expresiei $a \cdot b$

Trasăm două semidrepte *c* şi *d* cu originea comună O. Pe *c* trasăm segmentul unitate OA şi segmentul OB se lungime *a*. Pe semideapta *d* cu originea în O trasăm segmentul OC de lungime *b*. Paralela prin B la AC întâlneşte pe *d* în D. Cu teorema lui Thales în ΔOBD obținem: $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OD}}$, de unde $\mathrm{OD} = \frac{\mathrm{OB} \cdot \mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = a \cdot b$.



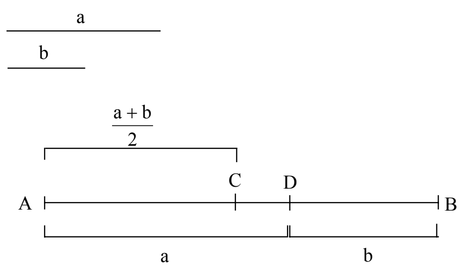
ii) Construcția expresiei $\frac{a}{b}$

Trasăm două semidrepte *c* şi *d* cu originea comună în O. Pe semidreapta *c* luăm segmentul unitate OA şi segmentul OB de lungime *b*. Pe semidreapta *d* luăm segmentul OC de lungime *a*. Prin A ducem paralela la BC care întâlneşte pe *c* în D. În ΔOBC cu teorema lui Thales obținem: $\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OC}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$, de unde $\mathrm{OD} = \frac{\mathrm{OC} \cdot \mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{a}{b}$.

5.1.3. Construcția mediei aritmetice, geometrice

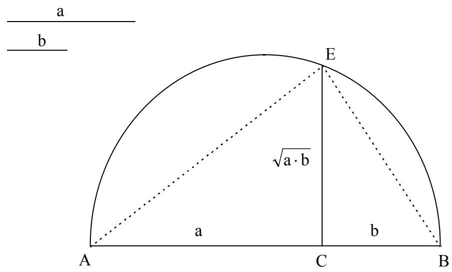
i) Construcția mediei aritmetice

Considerăm două segmente de lungimi *a* şi *b* $(a > b)$. Construim segmentului AB care reprezintă suma $a + b$. Construim mediatoarea segmentului AB. Mediatoarea determină pe segmentul AB două segmente congruente care reprezintă numărul $\frac{a+b}{2}$.



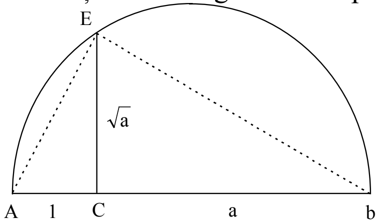
ii) Construcția mediei geometrice

Considerăm două segmente ce au lungimile aşi b $(a > b)$. Construim segmentul AB care reprezintă suma $a + b$. Construim un semicerc de diametru AB. Fie C punctul de pe [AB] cu AC=a. Ridicăm în C o perpendiculară pe AB care întâlneşte semicercul în E. Cu teorema înălțimii în triunghiul dreptunghic AEB (m($\angle$E)=90°) obținem: EC^2=AC·CB sau EC^2=$a \cdot b$, de unde $EC = \sqrt{a \cdot b}$.



Aplicație. Construcția expresiei $\sqrt{a}$ cu a>0.

Este o aplicație a construcției mediei geometrice pentru numerele 1 şi a (a>0).



5.1.4. Determinarea a două numere când se cunosc suma lor şi media geometrică

Fie aşi b numere pozitive cu suma $x = a + b$ şi media geometrică $y = \sqrt{ab}$.

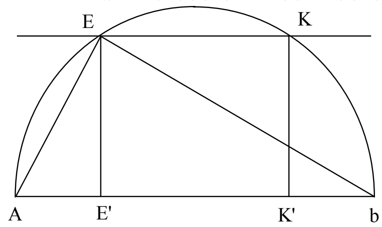
Problema se reduce la construcția triunghiului dreptunghic cu ipotenuza x şi înălțimea y.

Trasăm diametrul AB reprezentând numărul x. Construim semicercul de diametru AB. Trebuie să găsim intersecțiile acestui semicerc cu o paralelă d dusă la el de aceeaşi parte cu semicercul față de AB situată la distanța y.

1) Dacă paralela d la AB intersectează semicercul în două puncte distincte E şi K, considerăm proiecțiile acestor puncte pe AB, adică E' şi K', obținem perechile de segmente AE' şi E'B respectiv AK' şi K'B, care sunt numerele căutate.

2) Dacă paralela d la AB este tangentă semicercului avem soluție unică, numerele sunt egale.

3) Dacă paralela d la AB nu intersectează semicercul nu avem soluție.



6. Figuri echivalente

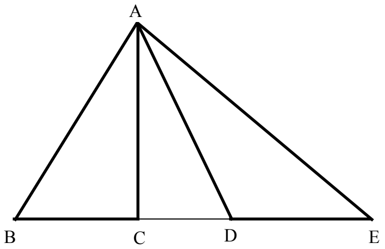
Figurile echivalente sunt figurile geometrice plane care au aceeaşi arie fără a fi neapărat congruente.

6.1. Triunghiuri echivalente

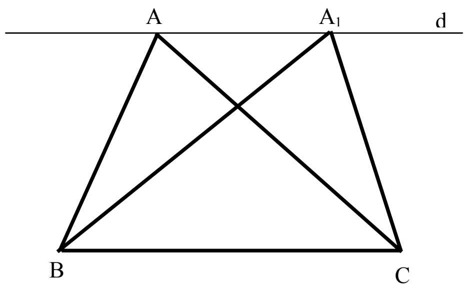
Din relația ariei $S = \frac{baza \cdot inaltimea}{2}$ rezultă că ariile a două triunghiuri sunt egale dacă bazele celor două triunghiuri au lungimi egale şi înălțimile de asemenea sunt de lungimi egale.

Exemple. i) Două triunghiuri care au un vârf fixat, iar bazele de lungimi egale se află pe aceeaşi dreaptă au aceeaşi arie (BC=DE).

Deci $S_{[ABC]}=S_{[ADE]}$.



ii) Două triunghiuri cu aceeaşi bază şi vârfurile situate pe o paralelă la bază, au aceeaşi arie. Deci $S_{[ABC]} = S_{[A_1BC]}$ (d||BC).



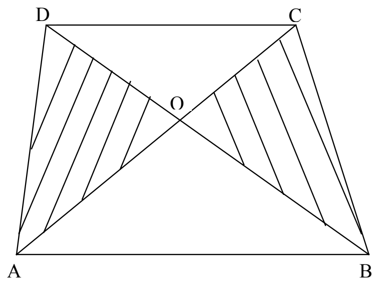
iii) În figura de mai jos avem

$$S_{[AOD]}=S_{[BOC]} \quad (*)$$
$$S_{[AOD]}=S_{[ADB]}-S_{[AOB]} \quad (1)$$
$$S_{[BOC]}=S_{[ACB]}-S_{[AOB]} \quad (2)$$

Dar

$$S_{[ADB]} = S_{[ACB]} \Leftrightarrow \frac{AB \cdot d(D,AB)}{2} = \frac{AB \cdot d(C,AB)}{2} \quad (3)$$

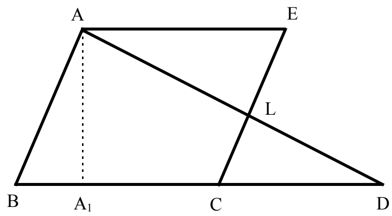
Din (1), (2) şi (3) $\Rightarrow$ relația (*).



6.2. Triunghi echivalent cu un paralelogram dat

Aria unui paralelogram este egală cu dublul ariei unui triunghi.

i) $S_{[ABCE]}=S_{[ADB]}$, unde C este mijlocul lui [BD].



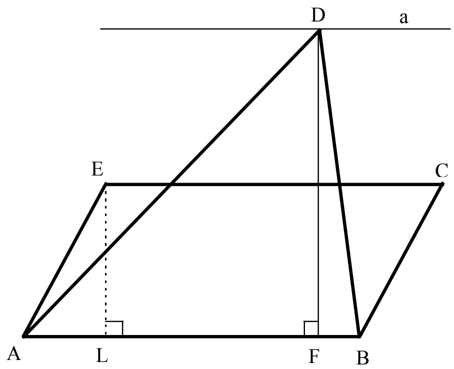
$$S_{[ABCE]}=BC\cdot d(A,BC)=BC\cdot AA_1$$

$$S_{[ADB]}=\frac{BD\cdot AA_1}{2}=2\cdot\frac{BC\cdot AA_1}{2}=BC\cdot AA_1$$

ii) $S_{[ABCE]}=S_{[ABD]}$, unde DF=2EL, a||AB

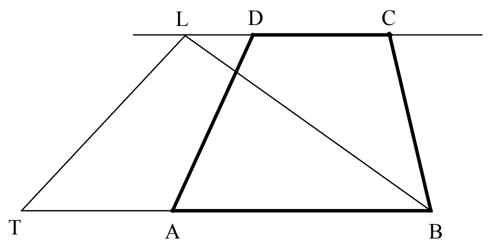
$$S_{[ABCE]}=AB\cdot d(E,AB)=AB\cdot EL$$

$$S_{[ABD]}=\frac{AB\cdot DF}{2}=\frac{AB\cdot 2EL}{2}=AB\cdot EL$$



6.3. Triunghi echivalent cu un trapez dat

$S_{[ABCD]}=S_{[LBT]}$, unde $[DC]\equiv[AT]$



$$S_{[ABCD]}=\frac{(AB+DC)d(D,AB)}{2}=\frac{TB\cdot d(D,AB)}{2}=\frac{TB\cdot d(L,AB)}{2}=S_{[LBT]}$$

6.4. Triunghi echivalent cu un patrulater

$$S_{[ABCD]}=S_{[LCK]} \qquad (**)$$

Fie ABCD un patrulater oarecare. Ducem printr-un vârf oarecare (de exemplu A) o dreaptă d. Prin vârfurile D şi B ale patrulaterului ABCD ducem paralele la AC, care întâlnesc pe d în L respectiv K. Obținem trapezele ACDL şi ACBK. Avem $S_{[LCK]}=S_{[ACL]}+S_{[ACK]}$. Atunci

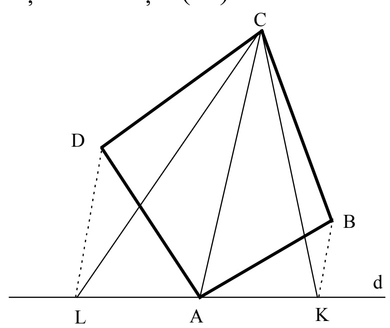
$$S_{[ABCD]}=S_{[ADC]}+S_{[ABC]} \qquad (1)$$

Dar

$$S_{[ADC]}=\frac{AC\cdot d(D,AC)}{2}=\frac{AC\cdot d(L,AC)}{2}=S_{[LAC]} \qquad (2)$$

$$S_{[ABC]}=\frac{AC\cdot d(B,AC)}{2}=\frac{AC\cdot d(K,AC)}{2}=S_{[AKC]} \qquad (3)$$

Din (1), (2) şi (3) obținem relația (**).



6.5. Triunghi echivalent cu un pentagon

$$S_{[ABCDE]}=S_{[DLM]}$$

Considerăm pentagonul ABCDE. Trasăm diagonalele [DA] şi [DB]. Ducem prin E o paralelă la DA care întâlneşte pe AB în L, iar prin C o paralelă la DB care întâlneşte pe AB în M.

Triunghiurile ADL şi AED sunt echivalente deoarece:

$$S_{[ADL]}=\frac{AD\cdot d(L,AD)}{2}=\frac{AD\cdot d(E,AD)}{2}=S_{[AED]} \qquad (1)$$

Şi triunghiurile BMD şi DBC sunt echivalente deoarece:

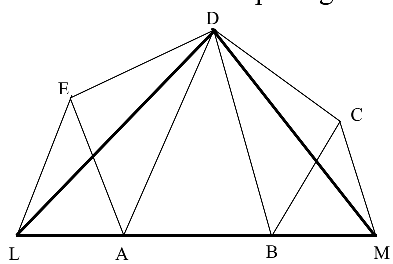
$$S_{[BMD]} = \frac{DB \cdot d(M,DB)}{2} = \frac{DB \cdot d(C,DB)}{2} = S_{[DBC]} \qquad (2)$$

$$S_{[ABCDE]} = S_{[BCD]} + S_{[BDA]} + S_{[ADE]} \qquad (3)$$

Din relațiile (1), (2) şi (3) obținem:

$$S_{[ABCDE]} = S_{[BMD]} + S_{[BDA]} + S_{[ADL]} = S_{[LDM]}$$

Deci triunghiul LDM este echivalent cu pentagonul ABCDE.



6.6. Împărțirea unui triunghi în părți echivalente

i) Împărțirea unui triunghi în n părți echivalente prin împărțirea unei laturi a triunghiului, considerată ca bază, în n segmente congruente.

Considerăm triunghiul ABC cu baza [BC], pe care o împărțim în n părți egale. Obținem triunghiurile echivalente BAD_1, D_1AD_2,...,$D_{n-1}AC$. (Triunghiurile au aceeaşi înălțime d(A,BC)).

ii) Împărțirea unui triunghi în n părți echivalente prin drepte paralele cu una din laturi.

Vom studia cazul n=3. Deci triunghiul ABC trebuie împărțit în trei părți echivalente prin paralele duse la baza [BC].

Fie (LT)||(BC) şi (PQ)||(BC) cu L∈(AP), P∈(LB), T∈(AQ), Q∈(TC).

Deci $S_{[ABC]} = 3S_{[ALT]}$ şi

$$S_{[APQ]} = \frac{2}{3} S_{[ABC]} \qquad (1)$$

Ținem seama că:

Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

Cu (1) obținem:

$$\left(\frac{AT}{AC}\right)^2 = \frac{1}{3} \quad \text{şi} \quad \left(\frac{AQ}{AC}\right)^2 = \frac{2}{3} \qquad (2)$$

Din (2) obținem:

$$AT^2 = AC \cdot \left(\frac{AC}{3}\right) \quad \text{şi} \quad AQ^2 = AC \cdot \left(\frac{2}{3} AC\right) \qquad (3)$$

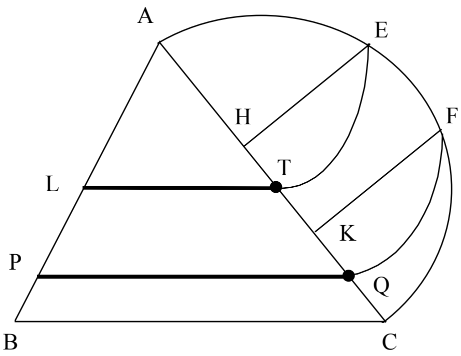
Din (3) rezultă că AT şi AQ sunt medii geometrice a lungimilor segmentelor AC, $\frac{AC}{3}$ şi respectiv AC, $\frac{2}{3} AC$.

Acum efectuăm construcția.

Construim pe latura AC ca diametru un semicerc în afara triunghiului ABC. Împărțim latura AC în trei segmente congruente prin punctele H şi K. Perpendicularele în H şi K pe AC întâlnesc semicercul în E respectiv F.

Conform teoremei catetei în triunghiul dreptunghic AEC avem: $AE = \sqrt{AC \cdot AH} = \sqrt{AC \cdot \frac{AC}{3}}$, iar în triunghiul dreptunghic AFC avem: $AQ = \sqrt{AC \cdot \frac{2AC}{3}}$.

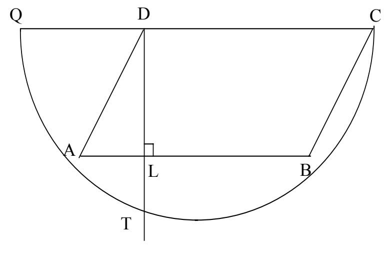
Arcele de cerc cu centrul în A şi raze AE, respectiv AF determină pe AC punctele T şi Q care sunt punctele căutate. Ducem prin T şi Q paralele la BC şi obținem împărțirea ΔABC în trei părți echivalente.



6.7. Pătrat echivalent cu un paralelogram ABCD

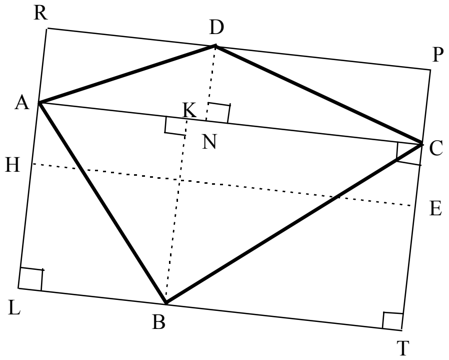
$S_{[ABCD]} = S_{pătrat}$.

Considerăm paralelogramul ABCD. Construim înălțimea DL cu L∈[AB]. Luăm pe prelungirea laturii [CD] un segment (DL)≡(DQ). Construim media geometrică a lungimii segmentelor CD şi DQ, determinând punctul de intersecție T al semicercului de diametru CQ cu dreapta DL. Atunci DT este latura pătratului echivalent cu paralelogramul ABCD.



6.8. Dreptunghi echivalent cu un patrulater dat

$S_{[ABCD]} = \frac{1}{2} S_{[LTPR]} = S_{[HLTE]} = S_{[HRPE]}$, unde H şi E sunt mijloacele segmentelor LR respectiv PT. Fie ABCD un patrulater oarecare. Prin vârfurile B şi D ducem paralele la AC. Prin vârfurile A şi C ducem perpendiculare pe AC. Obținem dreptunghiul LTPR. Ducem din B respectiv D perpendiculare pe AC care au picioarele în K şi respectiv N.



Avem relațiile:

$$S_{[ABCD]} = S_{[ABK]} + S_{[BCK]} + S_{[ARD]} + S_{[DPC]} \qquad (*)$$

$$S_{[ALB]} = S_{[ABK]} \qquad (1)$$

$$S_{[BTC]} = S_{[BKC]} \qquad (2)$$

$$S_{[ARD]} = S_{[DNA]} \qquad (3)$$

$$S_{[DPC]} = S_{[DNC]} \qquad (4)$$

$$S_{[RPTL]} = S_{[ABCD]} + S_{[ABK]} + S_{[BCK]} + S_{[ARD]} + S_{[DPC]} \qquad (5)$$

Din relațiile (*) şi (5) obținem: $S_{[RPTL]} = 2S_{[ABCD]}$, rezultă

$$S_{[ABCD]} = \frac{1}{2} S_{[RPTL]} \qquad (6)$$

Fiindcă H şi E sunt mijloacele laturilor [RL] respectiv [PT] avem

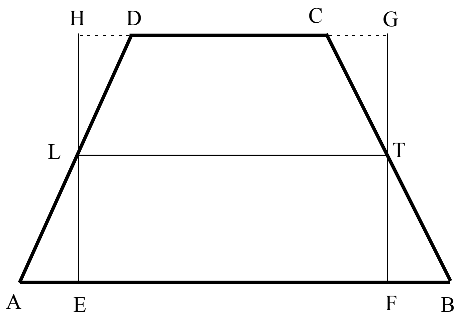
$$S_{[RPTL]} = 2S_{[RPEH]} = 2S_{[HLTE]} \qquad (7)$$

Din (6) şi (7) rezultă $S_{[ABCD]} = S_{[RPEH]} = S_{[HLTE]}$.

6.9. Dreptunghi echivalent cu un trapez dat

$S_{[ABCD]} = S_{[EFGH]}$, unde ABCD este trapez, iar EFGH dreptunghi.

Fie ABCD un trapez cu AB||CD dat, cu mijloacele laturilor neparalele L şi T ($L \in (AD)$, $T \in (BC)$). Prin L şi T ducem perpendiculare pe baze, care întâlnesc baza mare în E, respectiv F, iar prelungirea bazei mici în H respectiv G.



Din triunghiurile congruente HDL şi EAL rezultă că (HD)≡(AE), iar din triunghiurile congruente GCT şi FBT, obținem că (CG)≡(FB). Atunci

$$S_{[ABCD]}=\frac{(AB+DC)}{2}\cdot d(D,AB)=\frac{(EF+AE+FB+DC)}{2}\cdot d(D,AB)=$$

$$=\frac{2EF\cdot d(D,AB)}{2}=EF\cdot d(D,AB)=S_{[HEFG]}.$$

6.10. Construcția unei drepte care să împartă un patrulater convex în două părți având aceeaşi arie

Considerăm patrulaterul convex ABCD, a cărui diagonale se intersectează în O. Analizăm situațiile:

i) (OD)≡(OB) (1)

Avem $S_{[AOB]}=\frac{OB\cdot d(A,BD)}{2}=\frac{OD\cdot d(A,BD)}{2}=D_{[AOD]}$

Deci

$$S_{[AOB]}=S_{[AOD]} \quad (2)$$

$$S_{[COB]}=\frac{OB\cdot d(C,OB)}{2}=\frac{OD\cdot d(C,OB)}{2}=S_{[DOC]}$$

Deci

$$S_{[COB]}=S_{[DOC]} \quad (3)$$

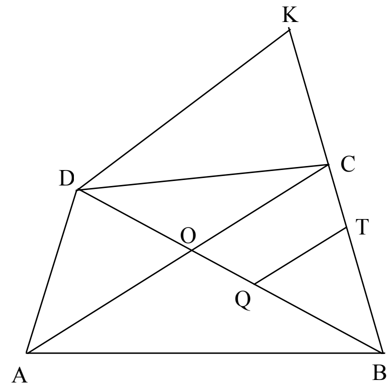
Din (2) şi (3) obținem: $S_{[AOB]}+S_{[COB]}=S_{[AOD]}+S_{[DOC]}$ adică $S_{[ABC]}=S_{[ADC]}$, adică AC este dreapta căutată.

ii) (OD)≠(OB). Presupunem că OB>OD.

Ducem prin D o paralelă la AC care întâlneşte pe BC în K. Se obține triunghiul AKB echivalent cu patrulaterul ABCD. (Un triunghi echivalent cu un patrulater). Deci $S_{[AKB]}=S_{[ABCD]}$. Fie T mijlocul lui [KB], atunci $S_{[ABT]}=S_{[KTA]}$ fiindcă $S_{[ABT]}=\frac{BT\cdot d(A,BK)}{2}=\frac{KT\cdot d(A,TK)}{2}=S_{[KTA]}$. Atunci $S_{[ABT]}=\frac{S_{[ABK]}}{2}$ şi deci $S_{[ABT]}=\frac{S_{[ABCD]}}{2}$.

Pentru a arăta că dreapta AT este soluția problemei trebuie să arătăm că triunghiul ABT este parte a patrulaterului ABCD, ceea ce înseamnă că $T\in(BC)$. Fie Q mijlocul lui (BD). Fiindcă (OB)>(OD) rezultă $Q\in(OB)$.

În triunghiul ABK, [TQ] este linie mijlocie deci QT||DK. Fiindcă OC||DK obținem că OC||TQ și cum $Q\in(OB)$ rezultă că $T\in(BC)$.



Construcția unei drepte care să împartă un patrulater convex în două părți având aceeaşi arie

6.11. Împărțirea unui patrulater printr-o dreaptă care trece printr-un vârf, în părți, având ariile într-un raport dat (Fig. 1)

Fie patrulaterul ABCD și $\frac{a}{b}$ raportul în care trebuie să împărțim aria patrulaterului printr-o dreaptă care să treacă prin D. Transformăm patrulaterul ABCD într-un triunghi echivalent cu el, care să aibă o latură pe dreapta AB. Prin C ducem o paralelă la BD care întâlneşte dreapta AB în L. Obținem triunghiul ADL care este echivalent cu patrulaterul ABCD deoarece

$$S_{[BDC]}=S_{[BDL]}\quad\left(\frac{BD\cdot d(C,BD)}{2}=\frac{BD\cdot d(L,BD)}{2}\right)$$

și atunci $S_{[ABCD]}=S_{[ADB]}+S_{[BCD]}=S_{[ADB]}+S_{[BDL]}=S_{[ADL]}$.

Împărțim aria triunghiului ADL în raportul $\frac{a}{b}$. Pentru aceasta este suficient să împărțim latura AL în raportul $\frac{a}{b}$. Fie K punctul pentru care avem $\frac{AK}{KL}=\frac{a}{b}$. Atunci

$\dfrac{\frac{AK\cdot d(D,AK)}{2}}{\frac{KL\cdot d(D,KL)}{2}}=\frac{a}{b}$, adică

$$\frac{S_{[ADK]}}{S_{[DKL]}}=\frac{a}{b}\qquad(1)$$

Ducem prin K o paralelă la BD care întâlneşte pe BC în Q. Unim D cu Q. Obţinem:

$$\frac{S_{[ABQD]}}{S_{[DQC]}} = \frac{a}{b} \tag{2}$$

fiindcă $S_{[DBK]} = S_{[DBQ]} \quad \left(\frac{BD \cdot d(K,BD)}{2} = \frac{BD \cdot d(Q,BD)}{2} \right)$, iar

$S_{[DKL]} = S_{[DBL]} - S_{[DBK]}$ sau $S_{[DKL]} = S_{[DBC]} - S_{[BDQ]} = S_{[DQC]}$.

Triunghiul ADK este echivalent cu patrulaterul ADQB pentru că triunghiurile BDQ şi BDK sunt echivalente. Deci $S_{[ADK]} = S_{[ADQB]}$.

În relaţia (1) înlocuim pe $S_{[ADK]}$ cu $S_{[ADQB]}$ şi $S_{[DKL]}$ cu $S_{[DQC]}$ şi obţinem relaţia (2).

Din construcţia de mai sus rezultă că în loc să construim triunghiul ADL echivalent cu patrulaterul ABCD putem să împărţim diagonala AC în raportul $\frac{a}{b}$. Fie T punctul de pe AC pentru care avem $\frac{AT}{TC} = \frac{a}{b}$. Prin T ducem o paralelă la BD care întâlneşte pe BC în Q. Dreapta DQ împarte aria patrulaterului în raportul $\frac{a}{b}$.

6.12. Împărţirea unui patrulater prin drepte duse printr-un vârf în mai multe părţi echivalente

De exemplu, pentru a împărţi un patrulater ABCD în trei părţi echivalente prin două drepte duse prin D procedăm astfel:

Se împarte diagonala AC în trei părţi egale prin punctele R şi V. Prin aceste puncte ducem paralele la diagonala BD, care întâlnesc laturile (AB) respectiv (BC) în punctele J şi S. Dreptele DJ şi DS împart patrulaterul în trei părţi echivalente.

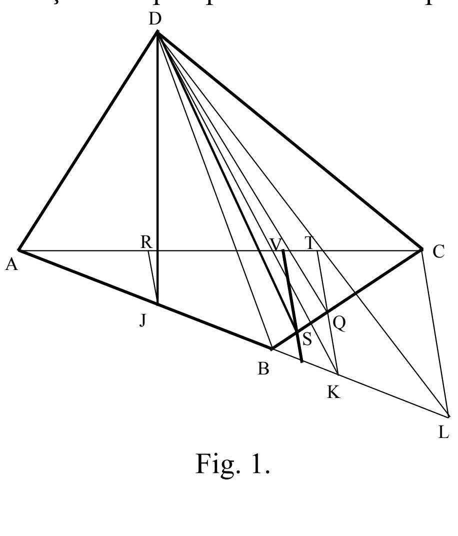


Fig. 1.

6.13. Împărțirea unui poligon convex în părți echivalente, prin drepte duse printr-un vârf

Considerăm pentagonul EFGHT pe care dorim să-l împărțim în părți echivalente prin drepte duse prin vârful G.

Vom arăta mai întâi că putem împărți aria poligonului în raportul $\frac{a}{b}$ printr-o dreaptă ce trece prin G. Vom construi un patrulater echivalent cu pentagonul considerat. Ducem prin F o paralelă la diagonala GE care întâlneşte pe ET în L. Patrulaterul LGHT este echivalent cu pentagonul EFGHT. Arătăm în continuare acest lucru. Avem

$$S_{[GFE]} = S_{[GLE]} \tag{1}$$

deoarece $\frac{GE \cdot d(F,GE)}{2} = \frac{GE \cdot d(L,GE)}{2}$. Deci

$$S_{[EFGHT]} = S_{[EFG]} + S_{[EGHT]} = S_{[LGE]} + S_{[EGHT]} = S_{[LGHT]}$$

Am redus problema la una pe care am studiat-o.

Vom împărți diagonala HL în raportul $\frac{a}{b}$. Fie K punctul pe HL pentru care avem $\frac{LK}{KH} = \frac{a}{b}$. Prin K ducem paralela KQ la GT care întâlneşte pe [HT] în R, $Q \in ET$. Dreapta GR împarte aria patrulaterului LGHT în raportul $\frac{a}{b}$. Dacă prin H ducem paralela HV la GT, $V \in ET$ patrulaterul GLTH este echivalent cu triunghiul LGV deoarece

$$S_{[GHT]} = S_{[GTV]} \quad \left(\frac{GT \cdot d(H,GT)}{2} = \frac{GT \cdot d(V,GT)}{2} \right)$$

şi atunci

$$S_{[GLTH]} = S_{[GHT]} + S_{[GLT]} = S_{[GTV]} + S_{[GLT]} = S_{[GLV]}$$

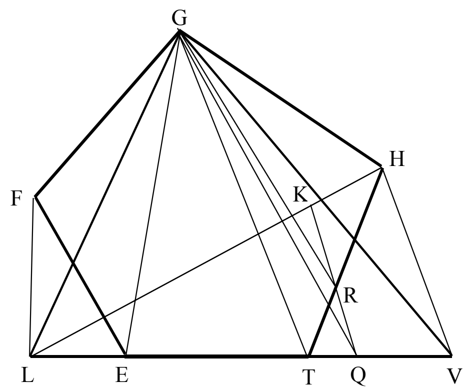
Fiindcă KQ||GT, iar HV||GT obținem că KQ||HV. Cu teorema lui Thales în ΔLHV avem: $\frac{LQ}{QV} = \frac{LK}{KH} = \frac{a}{b}$, de unde obținem că

$$\frac{\frac{LQ \cdot d(G,LQ)}{2}}{\frac{QV \cdot d(G,QV)}{2}} = \frac{a}{b},$$

care se mai scrie

$$\frac{S_{[LGQ]}}{S_{[QGV]}} = \frac{a}{b} \tag{2}$$

Dar $S_{[GTQ]} = S_{[GTR]}$ deoarece $\frac{GT \cdot d(Q,GT)}{2} = \frac{GT \cdot d(R,GT)}{2}$



Atunci $S_{[QGV]} = S_{[GTV]} - S_{[GTQ]}$, care se mai poate scrie:

$$S_{[QGV]} = S_{[GTH]} - S_{[GTR]},$$

deci

$$S_{[QGV]} = S_{[GHR]} \tag{3}$$

Atunci relația (2) se mai poate scrie:

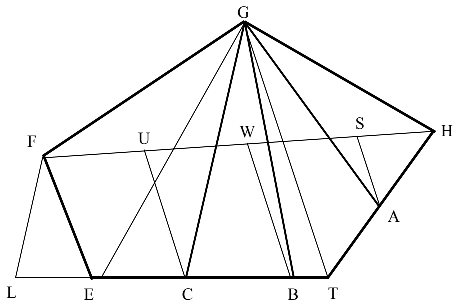
$$\frac{S_{[LGT]} + S_{[GTQ]}}{S_{[GHR]}} = \frac{a}{b} \quad \text{sau} \quad \frac{S_{[LGT]} + S_{[GTR]}}{S_{[GHR]}} = \frac{a}{b} \quad \text{sau}$$

$$\frac{S_{[LGRT]}}{S_{[GHR]}} = \frac{a}{b} \tag{4}$$

Ținând seama de (1), relația (4) se mai scrie $\frac{S_{[GFETR]}}{S_{[GHR]}} = \frac{a}{b}$, deci putem împărți aria unui poligon convex (în cazul nostru pentagon) într-un raport dat, printr-o dreaptă ce trece printr-un vârf al său (în cazul nostru G). Acest rezultat ne dă posibilitatea să împărțim un poligon convex oarecare în părți echivalente, prin drepte duse prin unul din vârfurile sale.

În cazul problemei noastre, se construieşte patrulaterul echivalent cu poligonul dat. Dacă cerința era să împărțim pentagonul în patru părți echivalente, atunci împărțeam diagonala [LH] în patru părți egale prin punctele S, W, U, iar prin aceste puncte ducem paralele la diagonala (CT) care întâlnesc laturile ET şi TH în punctele C, B, A. Unind punctele C, B, A cu G obținem dreptele GC, GB, GA care împart pentagonul dat în patru părți echivalente:

$$S_{[GFET]} = S_{[CRB]} = S_{[GBTA]} = S_{[GAH]}.$$



6.14. Împărțirea unui poligon dat în părți cu arii proporționale cu mai multe numere date, prin drepte duse printr-un punct interior poligonului

Considerăm patrulaterul ABCD pe care să-l împărțim în trei părți cu ariile proporționale cu numerele a, b, c, prin drepte duse prin punctul M din interiorul patrulaterului. Prin M ducem dreapta ML, $L \in (DC)$.

i) Unim punctul M cu D, iar prin L ducem o dreaptă paralelă cu MD care întâlneşte pe AD în P. Atunci $S_{[MDP]} = S_{[MDL]}$ deoarece $\frac{MD \cdot d(P, MD)}{2} = \frac{MD \cdot d(L, MD)}{2}$. Atunci

$$S_{[ADLM]} = S_{[ADM]} + S_{[MDL]} = S_{[ADM]} + S_{[MDP]} = S_{[AMP]}$$

Deci

$$S_{[ADLM]} = S_{[AMP]} \quad (1)$$

Ducem prin P paralela la AM care întâlneşte pe BA în R. Atunci avem:

$$S_{[AMP]} = S_{[AMR]} \quad (2)$$

deoarece $\frac{AM \cdot d(P, AM)}{2} = \frac{AM \cdot d(R, AM)}{2}$.

$$S_{[RMB]} = S_{[AMR]} + S_{[ABM]} \quad (3)$$

Din (2) şi (3) obținem:

$$S_{[RMB]} = S_{[AMP]} + S_{[ABM]} \quad (4)$$

Cu (1), relația (4) se mai poate scrie

$$S_{[RMB]} = S_{[MLDAB]} \quad (5)$$

Acum ducem prin R o paralelă la BM care întâlneşte pe CB în T. Atunci $S_{[RMB]} = S_{[MBT]}$, deoarece $\frac{MB \cdot d(R, MB)}{2} = \frac{MB \cdot d(T, MB)}{2}$.

$$S_{[MCT]} = S_{[MCB]} + S_{[TMB]} \quad (6)$$

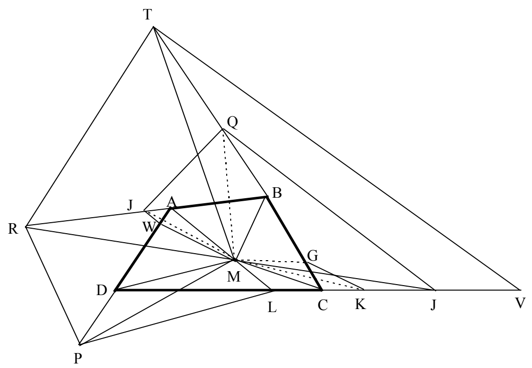
Folosind relația (5), obținem: $S_{[MCT]} = S_{[CMB]} + S_{[MLDAB]}$ sau

$$S_{[MCT]} = S_{[MLDABC]} \quad (6^*)$$

Ducem prin T o paralelă la MC care întâlneşte pe DC în V, atunci avem:

$$S_{[MCT]} = S_{[MCV]} \tag{7}$$

deoarece $\frac{MC \cdot d(T,MC)}{2} = \frac{MC \cdot d(V,MC)}{2}$. Din relațiile (6*) şi (7) obținem: $S_{[MCT]} + S_{[MLC]} = S_{[MLDABC]} + S_{[MLC]}$, care se mai scrie: $S_{[MCV]} + S_{[MLC]} = S_{[ABCD]}$ sau $S_{[MLV]} = S_{[ABCD]}$.



ii) Împărțim latura LV a triunghiului MLV în trei părți proporționale cu numerele a, b, c prin punctele J şi K, adică $\frac{LK}{a} = \frac{KJ}{b} = \frac{JV}{c}$, relație care se mai poate scrie:

$$\frac{\frac{LK \cdot d(M,LK)}{2}}{a} = \frac{\frac{KJ \cdot d(M,KJ)}{2}}{b} = \frac{\frac{JV \cdot d(M,JV)}{2}}{c} \tag{8}$$

deoarece d(M,LK)=d(M,KJ)=d(M,JV). Relația (8) se mai scrie:

$$\frac{S_{[MLK]}}{a} = \frac{S_{[MKJ]}}{b} = \frac{S_{[MJV]}}{c} \tag{8*}$$

Ducem prin K o paralelă la CM care întâlneşte latura BC în G. Patrulaterul LMGC este echivalent cu triunghiul MLK deoarece $S_{[LMGC]} = S_{[MLC]} + S_{[MCG]}$ sau $S_{[LMGC]} = S_{[MLC]} + S_{[CMK]}$ deoarece d(G,MC)=d(K,MC). Deci $S_{[LMGC]} = S_{[MLK]}$.

iii) Prin punctul J ducem o paralelă la CM care întâlneşte dreapta CB în Q, iar din Q ducem o paralelă la MB care întâlneşte pe BA în I, iar din I ducem o paralelă la AM care întâlneşte pe AD în W. Pentagonul GBAWM face parte din patrulaterul ABCD şi avem:

$$S_{[GBAWM]} = S_{[MKJ]} \tag{9}$$

Vom demonstra în continuare relația (9).

$$S_{[MKJ]} = S_{[MCJ]} - S_{[CMK]}$$

sau

$$S_{[MKJ]} = S_{[MCJ]} - S_{[CMG]} \tag{9*}$$

dar

$$S_{[MCJ]} = S_{[CMQ]} \tag{10}$$

deoarece $\frac{MC \cdot d(J, MC)}{2} = \frac{MC \cdot d(Q, MC)}{2}$. Scăzând din ambii membri ai relației (10) pe $S_{[CMG]}$ obținem:

$$S_{[MCJ]} - S_{[CMG]} = S_{[CMQ]} - S_{[CMG]} \tag{11}$$

Ținând seama de relația (9*), (11) se scrie: $S_{[MKJ]} = S_{[QMG]}$. Dar $S_{[MGQ]} = S_{[MGB]} + S_{[MBQ]}$ şi $S_{[MBQ]} = S_{[MBI]}$ fiindcă

$$\frac{MB \cdot d(Q, MB)}{2} = \frac{MB \cdot d(I, MB)}{2}$$

$$S_{[IMB]} = S_{[MBA]} + S_{[MAI]} = S_{[MBA]} + S_{[MAW]}$$

deoarece $S_{[MAI]} = S_{[MAW]}$ (MA·d(I,MA)=MA·d(W,AM)). Atunci avem:

$$S_{[MKJ]} = S_{[MGB]} + S_{[MBA]} + S_{[MAW]},$$

care se mai scrie $S_{[MKJ]} = S_{[MGBAW]}$. Analog găsim $S_{[MJV]} = S_{[MLDW]}$. Deci

$$S_{[MLCG]} = S_{[MLK]}, \quad S_{[MGBAW]} = S_{[MKJ]} \quad \text{şi} \quad S_{[MLDW]} = S_{[MJV]} \tag{11}$$

Din (8*) şi (11) obținem

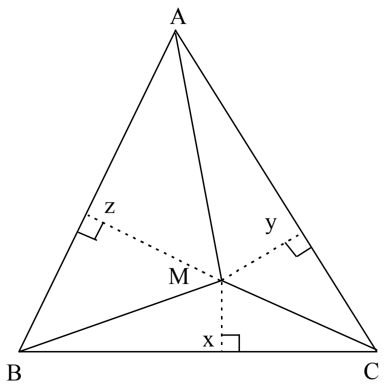
$$\frac{S_{[MLCG]}}{a} = \frac{S_{[MGBAW]}}{b} = \frac{S_{[MLDW]}}{c}.$$

7. Metoda areolară

Vom demonstra unele relații metrice prin considerații areolare.

Teorema 7.1. Dacă x, y, z sunt distanțele unui punct M interior triunghiului ABC, la BC, AC. AB şi $S_{[ABC]}$ este aria triunghiului, avem relația:

$$ax + by + cz = 2S_{[ABC]}$$



Demonstrație. Avem relațiile:

$$S_{[MBC]} = \frac{BC \cdot x}{2} \tag{1}$$

$$S_{[AMC]} = \frac{AC \cdot y}{2} \tag{2}$$

$$S_{[BMA]} = \frac{AB \cdot z}{2} \tag{3}$$

Atunci

$$S_{[ABC]} = S_{[MBC]} + S_{[AMC]} + S_{[BMA]} = \frac{BC \cdot x}{2} + \frac{AC \cdot y}{2} + \frac{AB \cdot z}{2},$$

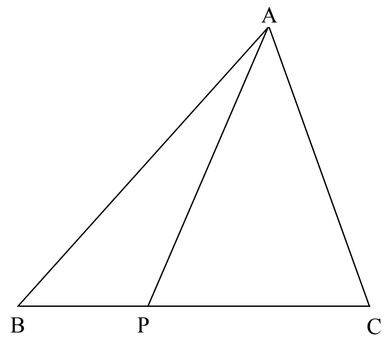
care se mai scrie $2S_{[ABC]} = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$, adică tocmai relația de demonstrat.

Corolar 7.1. Dacă M coincide cu I, centrul cercului înscris atunci relația $ax + by + cz = 2S_{[ABC]}$ devine $r(a + b + c) = 2S_{[ABC]}$ sau $r \cdot p = S_{[ABC]}$ unde r este raza cercului înscris în triunghi.

Corolar 7.2. Dacă triunghiul este echilateral relația $ax + by + cz = 2S_{[ABC]}$ devine $x + y + z = \frac{2S_{[ABC]}}{a}$ care se mai scrie $x + y + z = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (am ținut seama că $S_{[ABC]} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$) sau:

Suma distanțelor unui punct interior la laturile unui triunghi echilateral este constantă.

Lema 7.1. Dacă P este un punct arbitrar pe latura BC a unui triunghi oarecare ABC atunci PB şi PC sunt proporţionale cu ariile triunghiurilor APB respectiv APC, adică $\frac{PB}{PC} = \frac{S_{[ABP]}}{S_{[APC]}}$.



Demonstraţie. Avem $S_{[ABP]} = \frac{BP \cdot d(A, BP)}{2}$, de unde

$$d(A, BP) = \frac{2S_{[ABP]}}{BP} \tag{1}$$

$$S_{[APC]} = \frac{PC \cdot d(A, PC)}{2}$$

de unde obţinem:

$$d(A, PC) = \frac{2S_{[APC]}}{PC} \tag{2}$$

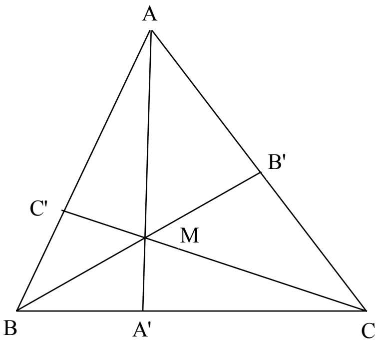
Dar

$$d(A,BP)=d(A,PC) \tag{3}$$

Din (1), (2) şi (3) obţinem: $\frac{2S_{[ABP]}}{BP} = \frac{2S_{[APC]}}{PC}$, care se mai scrie $\frac{PB}{PC} = \frac{S_{[ABP]}}{S_{[APC]}}$ şi cu aceasta lema este demonstrată.

Teorema 7.2. (Teorema lui Ceva) Se consideră un triunghi ABC şi punctele A'∈BC, B'∈CA, C'∈AB. Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente, atunci

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$



Demonstrație. Folosind lema obținem:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{S_{[ABA']}}{S_{[ACA']}} = \frac{S_{[BMA']}}{S_{[MCA']}} = \frac{S_{[ABA']} - S_{[BMA']}}{S_{[ACA']} - S_{[MCA']}} = \frac{S_{[AMB]}}{S_{[AMC]}},$$

deci $\frac{BA'}{A'C} = \frac{S_{[AMB]}}{S_{[AMC]}}$

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{S_{[BB'C]}}{S_{[ABB']}} = \frac{S_{[B'MC]}}{S_{[B'MA]}} = \frac{S_{[BB'C]} - S_{[B'MC]}}{S_{[ABB']} - S_{[B'MA]}} = \frac{S_{[BMC]}}{S_{[AMB]}}$$

deci $\frac{B'C}{B'A} = \frac{S_{[BMC]}}{S_{[AMB]}}$

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{S_{[ACC']}}{S_{[BCC']}} = \frac{S_{[AMC']}}{S_{[BMC']}} = \frac{S_{[ACC']} - S_{[AMC']}}{S_{[BCC']} - S_{[BMC']}} = \frac{S_{[AMC]}}{S_{[BMC]}},$$

deci $\frac{C'A}{C'B} = \frac{S_{[AMC]}}{S_{[BMC]}}$. Atunci

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{S_{[AMB]}}{S_{[AMC]}} \cdot \frac{S_{[BMC]}}{S_{[AMB]}} \cdot \frac{S_{[AMC]}}{S_{[BMC]}} = 1$$

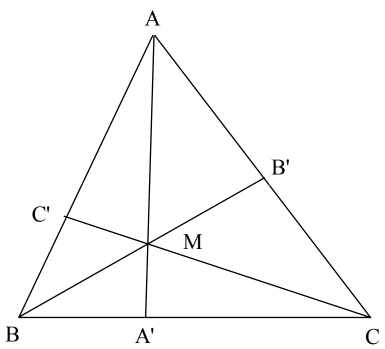
În demonstrațiile unor relații vom folosi următorul rezultat:

Teorema 7.3. (Teorema lui Van Aubel) Dacă AA', BB', CC' sunt cevienele unui punct M din planul triunghiului ABC avem relația:

$$\frac{AM}{MA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}$$

Acum să trecem la demonstrația teoremei.

1) Punctul M este în interiorul triunghiul ABC.



Folosim lema 7.1 demonstrată mai sus. Avem:

$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{S_{[BAB']}}{S_{[BCB']}}=\frac{S_{[AMB']}}{S_{[B'MC]}}=\frac{S_{[BAB']}-S_{[AMB']}}{S_{[BCB']}-S_{[B'MC]}}=\frac{S_{[AMB]}}{S_{[BMC]}}$$

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{S_{[CAC']}}{S_{[CBC']}}=\frac{S_{[AMC']}}{S_{[BMC']}}=\frac{S_{[CAC']}-S_{[AMC']}}{S_{[CBC']}-S_{[BMC']}}=\frac{S_{[AMC]}}{S_{[BMC]}}$$

Atunci

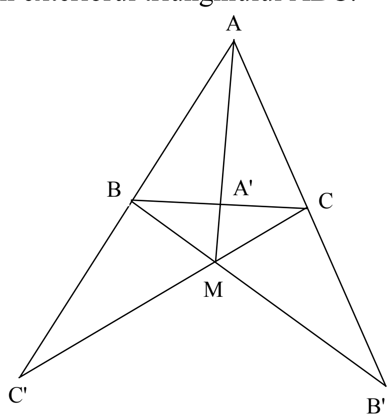
$$\frac{AB'}{B'C}+\frac{AC'}{C'B}=\frac{S_{[AMB]}}{S_{[BMC]}}+\frac{S_{[AMC]}}{S_{[BMC]}}=\frac{S_{[AMB]}+S_{[AMC]}}{S_{[BMC]}} \tag{4}$$

Dar

$$\frac{AM}{MA'}=\frac{S_{[ABM]}}{S_{[BMA']}}=\frac{S_{[ACM]}}{S_{[CMA']}}=\frac{S_{[ABM]}+S_{[ACM]}}{S_{[BMA']}+S_{[CMA']}}=\frac{S_{[AMB]}+S_{[AMC]}}{S_{[BMC]}} \tag{5}$$

Din (4) şi (5) obţinem: $\frac{AB'}{B'C}+\frac{AC'}{C'B}=\frac{AM}{MA'}$.

2) Punctul M este în exteriorul triunghiului ABC.



$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{S_{[B'AB]}}{S_{[B'CB]}}=\frac{S_{[B'MA]}}{S_{[B'MC]}}=\frac{S_{[B'AB]}-S_{[B'MA]}}{S_{[B'CB]}-S_{[B'MC]}}=\frac{S_{[ABM]}}{S_{[BMC]}}$$

Deci $\frac{AB'}{B'C}=\frac{S_{[ABM]}}{S_{[BMC]}}$

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{S_{[C'AC]}}{S_{[C'BC]}}=\frac{S_{[C'AM]}}{S_{[C'BM]}}=\frac{S_{[C'AC]}-S_{[C'AM]}}{S_{[C'BC]}-S_{[C'BM]}}=\frac{S_{[MAC]}}{S_{[BCM]}}$$

Deci $\frac{AC'}{C'B}=\frac{S_{[MAC]}}{S_{[BMC]}}$. Atunci

$$\frac{MA}{MA'}=\frac{S_{[MAB]}}{S_{[MA'B]}}=\frac{S_{[MAC]}}{S_{[MA'C]}}=\frac{S_{[MAB]}+S_{[MAC]}}{S_{[MA'B]}+S_{[MA'C]}}=$$

$$=\frac{S_{[MAB]}+S_{[MAC]}}{S_{[BCM]}}=\frac{S_{[MAB]}}{S_{[BCM]}}+\frac{S_{[MAC]}}{S_{[BCM]}}=\frac{AB'}{B'C}+\frac{AC'}{C'B},$$

adică $\frac{MA}{MA'}=\frac{AB'}{B'C}+\frac{AC'}{C'B}$.

Corolar 7.3. Dacă M esre punctul de intersecție al medianelor triunghiului ABC, relația lui Van Aubel devine $\frac{AM}{MA'}=1+1$ sau $\frac{AM}{MA'}=2$. Deci M coincide cu G centrul de greutate. Avem atunci $\frac{AG}{GA'}=2$, de unde AG=2·GA'.

Corolar 7.4. Dacă M este centrul cercului înscris I, atunci $\frac{AB'}{B'C}=\frac{c}{a}$ şi $\frac{AC'}{C'B}=\frac{b}{a}$, iar relația lui Van Aubel devine: $\frac{AI}{IA'}=\frac{c}{a}+\frac{b}{a}=\frac{b+c}{a}>1$ deci punctul I este mai aproape de A' decât de A (AI>IA').

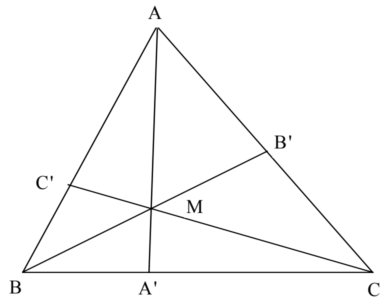
Corolar 7.5. Dacă M este centrul cercului înscris I avem $\frac{IA'}{AA'}=\frac{r}{h_1}$ (r – raza cercului înscris în triunghi) şi analoagele $\frac{IB'}{BB'}=\frac{r}{h_2}$ şi $\frac{IC'}{CC'}=\frac{r}{h_3}$, atunci $\frac{IA'}{AA'}+\frac{IB'}{BB'}+\frac{IC'}{CC'}=\frac{r}{h_1}+\frac{r}{h_2}+\frac{r}{h_3}$ (h_1, h_2, h_3 sunt înălțimile triunghiului ABC).

Cu relația lui Gergonne (când M≡I) $\frac{MA'}{AA'}+\frac{MB'}{BB'}+\frac{MC'}{CC'}=1$ obținem: $r\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)=1$, de unde $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$.

Teorema 7.4. (Gergonne) Pe laturile [BC], [AC], [AB] ale triunghiului ABC se consideră punctele A', B', C' astfel încât dreptele AA', BB', CC' să fie concurente în M. Atunci are loc relația

$$\frac{MA'}{AA'}+\frac{MB'}{BB'}+\frac{MC'}{CC'}=1$$

Folosim în continuare lema 7.1.



$$\frac{MA}{MA'}=\frac{S_{[MAB]}}{S_{[MBA']}}=\frac{S_{[MAC]}}{S_{[MA'C]}}=\frac{S_{[MAB]}+S_{[MAC]}}{S_{[MBA']}+S_{[MA'C]}}=\frac{S_{[MAB]}+S_{[MAC]}}{S_{[MBC]}}$$

Deci $\frac{MA}{MA'}=\frac{S_{[MAB]}+S_{[MAC]}}{S_{[MBC]}}$, de unde obținem:

$$\frac{MA+MA'}{MA'}=\frac{S_{[MAB]}+S_{[MAC]}+S_{[MBC]}}{S_{[MBC]}} \quad \text{sau} \quad \frac{AA'}{MA'}=\frac{S_{[ABC]}}{S_{[MBC]}}$$

de unde $\frac{MA'}{AA'}=\frac{S_{[MBC]}}{S_{[ABC]}}$.

Analog obținem $\frac{MB'}{BB'}=\frac{S_{[AMC]}}{S_{[ABC]}}$, $\frac{MC'}{CC'}=\frac{S_{[AMB]}}{S_{[ABC]}}$.

Adunând membru cu membru relațiile de mai sus obținem relația lui Gergonne:

$$\frac{MA'}{AA'}+\frac{MB'}{BB'}+\frac{MC'}{CC'}=1$$

Când M=I relația lui Gergonne devine:

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$$

Din relația $\frac{MA}{MA'}=\frac{S_{[MAB]}+S_{[MAC]}}{S_{[MBC]}}$ obținem

$$\frac{MA}{MA'+MA}=\frac{S_{[MAB]}+S_{[MAC]}}{S_{[MBC]}+S_{[MAB]}+S_{[MAC]}} \quad \text{sau} \quad \frac{MA}{AA'}=\frac{S_{[MAB]}+S_{[MAC]}}{S_{[ABC]}}$$

Analog obținem $\frac{MB}{BB'} = \frac{S_{[MAB]} + S_{[MBC]}}{S_{[ABC]}}$ şi $\frac{MC}{CC'} = \frac{S_{[MAC]} + S_{[MBC]}}{S_{[ABC]}}$.

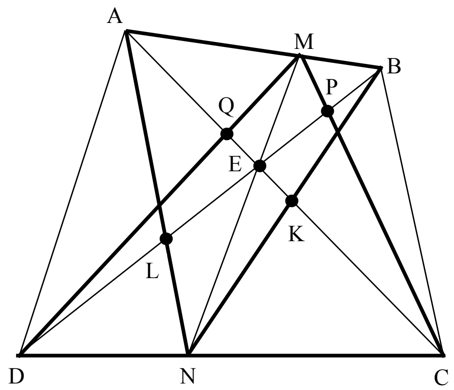
Atunci prin adunare obținem:

$$\frac{MA}{AA'} + \frac{MB}{BB'} + \frac{MC}{CC'} = 2.$$

În continuare considerăm o aplicație a relației lui Gergonne.

Aplicație. Se consideră un patrulater convex ABCD ale cărui diagonale se intersectează în E. Prin E se duce o dreaptă arbitrară care intersectează laturile AB şi CD în M respectiv N. Dreptele NA, NB. MC, MD intersectează diagonalele BD şi AC în punctele L, K, P, Q. Să se demonstreze relația:

$$\frac{EL}{BL} + \frac{EK}{AK} + \frac{EP}{DP} + \frac{EQ}{CQ} = 1.$$



Demonstrație. Scriem relația lui Gergonne pentru triunghiurile MCD şi NAB. Obținem:

$$\frac{EP}{DP} + \frac{EQ}{CQ} + \frac{EN}{MN} = 1 \quad \text{şi} \quad \frac{EL}{BL} + \frac{EK}{AK} + \frac{EM}{NM} = 1$$

Adunând membru cu membru obținem

$$\frac{EP}{DP} + \frac{EQ}{CQ} + \frac{EL}{BL} + \frac{EK}{AK} + \left(\frac{EN}{MN} + \frac{EM}{MN}\right) = 2,$$

care se mai scrie:

$$\frac{EL}{BL} + \frac{EK}{AK} + \frac{EP}{DP} + \frac{EQ}{CQ} = 1$$

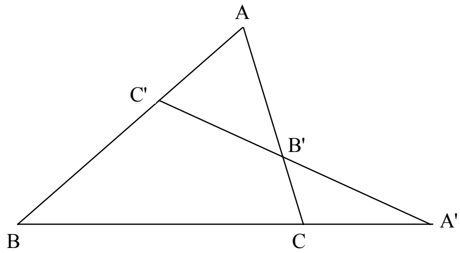
fiindcă EN+EM=MN.

Cercetați dacă $\frac{BE}{BL} + \frac{AE}{AK} + \frac{DE}{DP} + \frac{CE}{CQ} = 3$.

Teorema 7.6. (Teorema lui Menelaus)

Fie ABC un triunghi şi A', B', C' trei puncte astfel încât $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Dacă punctele A', B', C' sunt coliniare, atunci are loc egalitatea:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$$



Demonstrație. Pentru demonstrație vom folosi următorul rezultat:

Lema 7.2. Raportul ariilor a două triunghiuri despre care se cunoaşte că un unghi al unuia este congruent sau suplementar cu un unghi al celuilalt triunghi, este egal cu raportul dintre produsele laturilor care formează acele unghiuri.

Conform lemei avem:

$$\frac{S_{[AC'B']}}{S_{[BC'A']}}=\frac{AC'\cdot C'B'}{C'B\cdot C'A'},\quad \frac{S_{[BC'A']}}{S_{[CA'B']}}=\frac{BA'\cdot A'C'}{A'C\cdot A'B'},\quad \frac{S_{[CA'B']}}{S_{[AB'C']}}=\frac{CB'\cdot A'B'}{B'A\cdot B'C'}$$

Înmulțind membru cu membru cele trei relații de mai sus obținem:

$$1=\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\quad \text{şi deci}\quad \frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1.$$

8. Triunghiuri speciale

8.1. Triunghiul ortic

Definiția 8.1.1. Triunghiul determinat de picioarele înălțimilor unui triunghi nedreptunghic se numeşte triunghi ortic.

Triunghiul dreptunghic nu are triunghi ortic, fiindcă două din picioarele înălțimilor coincid cu vârful unghiului drept.

Vom studia triunghiul ortic corespunzător unui triunghi ascuțitunghic.

Considerăm triunghiul ABC ascuțitunghic cu ortocentrul în H şi triunghiul ortic corespunzător $A_1B_1C_1$.

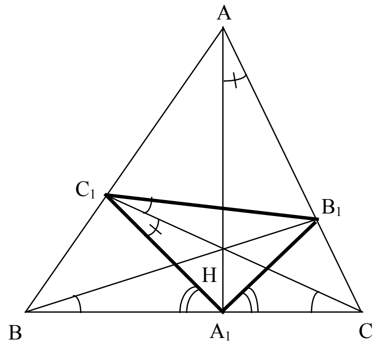


Fig. 1

1) Măsurile unghiurilor triunghiului ortic $A_1B_1C_1$

Din patrulaterele inscriptibile A_1BC_1H şi B_1HA_1C (au unghiurile din A_1 şi C_1 suplementare, respectiv unghiurile din B_1 şi H_1 suplementare) obținem:

$$m(\angle C_1A_1B)=m(\angle C_1HB)=m(\angle B_1HC)=m(\angle B_1A_1C)$$

Deci $m(\angle C_1A_1B)=m(B_1A_1C)$. Atunci

$$m(\angle C_1A_1B)=180°-2m(\angle C_1A_1B) \qquad (1)$$

În patrulaterul inscriptibil AC_1HB_1 (unghiurile din C_1 şi B_1 sunt suplementare) avem

$$m(\angle C_1AB_1)+m(\angle C_1HB_1)=180°,$$

dar

$$m(\angle BHC_1)+m(\angle C_1HB_1)=180°,$$

deci

$$m(\angle C_1AB_1)=m(\angle BHC_1)=m(\angle C_1A_1B) \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) obținem:

$$m(\angle C_1A_1B_1)=180°-2m(\angle CAB)$$

Analog obținem:

$$m(\angle A_1C_1B_1)=180°-2m(\angle ACB)$$
$$m(\angle C_1B_1A_1)=180°-2m(\angle ABC)$$

2) Lungimile laturilor triunghiului ortic

Triunghiurile ABC şi AB_1C_1 sunt asemenea având un unghi comun A şi $\angle ABC \equiv \angle AB_1C_1$ (patrulaterul C_1B_1CB este inscriptibil).

Din proporționalitatea laturilor obținem:

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{AB_1} \tag{3}$$

Din triunghiul dreptunghic ABB_1 avem

$$\frac{AB_1}{AB} = \cos A \tag{4}$$

Din relațiile (3) şi (4) obținem: $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{1}{\cos A}$, de unde B_1C_1=BCcosA, care se mai scrie $B_1C_1 = a\cos A$.

Analog obținem: $A_1B_1 = c\cos C$ şi $A_1C_1 = b\cos B$.

Mai folosim notația $a_0 = a\cos A$, $b_0 = b\cos B$, $c_0 = c\cos C$.

3) Perimetrul triunghiul ortic

Notăm cu P_0 perimetrul triunghiul ortic. Atunci

$$P_0 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 = c\cos C + a\cos A + b\cos B$$

Deci $P_0 = a\cos A + b\cos B + c\cos C$.

Se pot da pentru P_0 multe exprimări în funcție de necesități. De exemplu, din teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, obținem:

$$a = 2R\sin A, \quad b = 2R\sin B, \quad c = 2R\sin C.$$

Atunci $P_0 = R(2\sin A\cos A + 2\sin B\cos B + 2\sin C\cos C)$ sau

$$P_0 = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

(am ținut seama că $2\sin x\cos x = \sin 2x$).

Dar $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$ şi atunci

$$P_0 = 4R\sin A\sin B\sin C = 4R\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R} = \frac{abc}{2R^2} \tag{4*}$$

Dar $\frac{abc}{4R} = S$, de unde $abc = 4RS$.

Atunci putem scrie $P_0 = \frac{4RS}{2R^2} = \frac{2S}{R}$. Deci

$$P_0 = \frac{2S}{R} \tag{5}$$

Corolar 8.1. maximul perimetrului triunghiului ortic este semiperimetrul triunghiului de referință.

Din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$ obținem: $\frac{2}{R} \leq \frac{1}{r}$, de unde $\frac{2S}{R} \leq \frac{S}{r}$ sau $P_0 \leq \frac{S}{r}$, care se mai scrie $P_0 \leq p$ (am ținut seama că $S = p \cdot r$).

Corolar 8.2. Dintre toate triunghiurile înscrise într-un triunghi ascuțitunghic, triunghiul ortic are perimetrul minim.

Dacă sunt date punctele B_1, C_1 pe laturile AC, AB, punctul A_1 de pe latura BC pentru care suma $B_1A_1+A_1C_1$ este minimă este determinat de proprietatea că dreptele B_1A_1, A_1C_1 formează același unghi cu BC.

4) Semiperimetrul triunghiul ortic (p_0)

$p_0 = \frac{P_0}{2} = \frac{S}{R}$ (am folosit relația (5))

Deci $p_0 = \frac{S}{R}$.

Din relația de mai sus rezultă $S = p_0 \cdot R$ (relația lui Țițeica).

Avem relația:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{2p}{2p_0} = \frac{2p}{2\frac{S}{R}} = \frac{R \cdot p}{S} = \frac{R \cdot p}{p \cdot r} = \frac{R}{r}$$

Deci:

Raporul dintre perimetrul unui triunghi şi perimetrul triunghiului său ortic este $\frac{R}{r}$.

i) Segmentele ce unesc proiecțiile picioarelor înălțimilor pe laturile adiacente sunt egale cu semiperimetrul triunghiului ortic.

Fie B_2 şi C_2 proiecțiile piciorului A_1 al înălțimii AA_1 pe laturile AC şi AB. În cercul de diametru AA_1, B_2C_2 este o coardă opusă unghiului A, din teorema sinusurilor avem: $\frac{B_2C_2}{\sin A} = AA_1$ $\left(\frac{a}{\sin A} = 2R\right)$ de unde obținem:

$$B_2C_2 = AA_1 \cdot \sin A$$

În triunghiul ABA_1, $\sin B = \frac{AA_1}{AB}$, de unde $AA_1 = AB\sin B$.

Cu teorema sinusurilor în triunghiul ABC avem $\frac{AB}{\sin C} = 2R$. Atunci

$$B_2C_2 = AA_1\sin A = AB\sin B\sin A = 2R\sin A\sin B\sin C \qquad (6)$$

Din (4*) şi (6) obținem $B_2C_2 = \frac{P_0}{2} = p_0$.

ii) În triunghiul ascuțitunghic ABC cercurile construite pe AB şi AC ca diametru determină pe B_1C_1 un segment de lungime egală cu perimetrul triunghiului ortic.

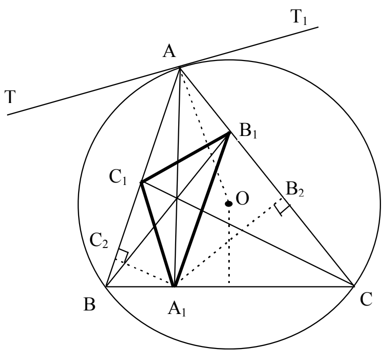


Fig. 2.

5) Aria triunghiului ortic (S_0)

$$S_0 = \frac{A_1B_1 \cdot A_1C_1 \sin A_1}{2} = \frac{c \cdot \cos C \cdot b \cdot \cos B \cdot \sin(180° - 2A)}{2}$$

$$= \frac{b \cdot c}{2} \cos C \cos B \sin 2A \quad (\sin(180° - 2A) = \sin 2A)$$

$$= \frac{b \cdot c}{2} \cos C \cos B \cdot 2 \sin A \cos A \quad (\sin 2A = 2 \sin A \cos A)$$

$$= 2\left(\frac{bc}{2} \sin A\right) \cos A \cos B \cos C = 2S \cos A \cos B \cos C$$

Deci S_0=2ScosAcosBcosC.

Atunci $\frac{S_0}{2S} = \cos A \cos B \cos C$.

Fiindcă $\cos A \cos B \cos C \le \frac{1}{8}$, atunci $\frac{S_0}{2S} \le \frac{1}{8}$, de unde $S_0 \le \frac{S}{4}$.

Deci maximul ariei triunghiului ortic este $\frac{S}{4}$ şi se obţine când triunghiul ABC este echilateral.

6) Raza cercului înscris în triunghiul ortic (r_0)

$$r_0 = \frac{S_0}{p_0} = \frac{2S \cos A \cos B \cos C}{\frac{S}{R}} = 2R \cos A \cos B \cos C$$

Deci r_0=2RcosAcosBcosC.

7) Raza cercului circumscris triunghiului ortic (R_0) este jumătate din raza cercului circumscris triunghiului considerat (R_0).

$$R_0 = \frac{a_0 b_0 c_0}{4S_0} = \frac{abc \cos A \cos B \cos C}{4 \cdot 2S \cos A \cos B \cos C} = \frac{abc}{4S} \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$$

(am folosit relaţia abc=4RS).

8) Laturile triunghiului ortic sunt antiparalele cu laturile triunghiului de referință, pe care sunt egal înclinate.

Patrulaterul BCB_1C_1 este inscriptibil şi atunci $\angle AC_1B_1 \equiv \angle ACB$, de unde rezultă că $C_1B_1 || BC$.

9) Laturile triunghiului ortic sunt paralele cu tangentele în A, B, C la cercul circumscris triunghiului ABC.

De exemplu B_1C_1 este paralelă cu AT_1, deoarece $m(\angle T_1AC)$ este jumătate din măsura arcului AC, iar $m(\angle AB_1C_1) = m(\angle ABC)$ (jumătate din măsura arcului AC).

10) Înălțimile triunghiului ascuțitunghic ABC sunt bisectoarele triunghiului ortic $A_1B_1C_1$.

i) Triunghiul ABC este ascuțitunghic. În figura 1 patrulaterul BCB_1C_1 fiind inscriptibil rezultă că

$$\angle B_1BC \equiv \angle CC_1B_1 \quad (7)$$

Din patrulaterul inscriptibil AC_1A_1C rezultă că

$$\angle A_1C_1C \equiv \angle A_1AC \quad (8)$$

Unghiurile $\angle A_1BB_1$ şi $\angle A_1AC$ sunt congruente având acelaşi complement $(90°\text{-}m(\angle C))$ (8*).

Din patrulaterul inscriptibil BA_1HC_1 avem că

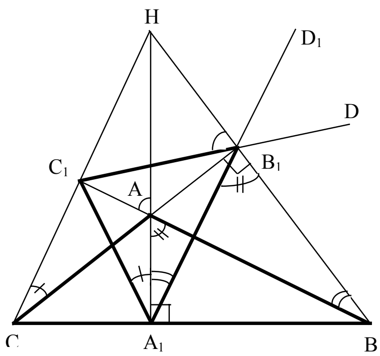
$$\angle A_1BH \equiv \angle A_1C_1H \quad (9)$$

Din relațiile (7), (8), (9), (8*) obținem că $[CC_1$ este bisectoarea $\angle A_1C_1B_1$.

Analog se demonstrează că şi $[A_1A$ este bisectoarea $\angle C_1A_1B_1$, iar $[B_1B$ este bisectoarea $\angle C_1B_1A_1$.

ii) În triunghiul obtuzunghic înălțimea dusă din vârful unghiului obtuz este bisectoarea unghiului interior al triunghiului ortic, al cărui vârf este piciorul înălțimii respective, iar înălțimile duse din vârfurile celor două unghiuri ascuțite sunt bisectoare pentru unghiurile exterioare corespunzătoare, ale triunghiului ortic.

Triunghiul ABC fiind obtuzunghic să arătăm că $[A_1A$ este bisectoarea interioară a unghiului $\angle C_1A_1B_1$, iar $[B_1B$ este bisectoarea exterioară a unghiului $C_1B_1A_1$.



Din patrulaterul inscriptibil B_1AA_1B (unghiurile opuse din A_1 şi B_1 sunt suplementare) obținem:

$$\angle AA_1B_1 \equiv \angle ABB_1 \quad (10)$$

Din patrulaterul inscriptibil C_1CA_1A (unghiurile opuse din C_1 şi A_1 sunt suplementare) obținem:

$$\angle AA_1C_1 \equiv \angle ACC_1 \quad (11)$$

Dar

$$\angle C_1BH \equiv \angle B_1CH \quad (12)$$

având acelaşi complement (90°-m($\angle H$)). Atunci obținem din relațiile (10), (11), (12) că $\angle C_1A_1A \equiv \angle B_1A_1A$, adică $[A_1A$ este bisectoarea unghiului $\angle C_1A_1B_1$.

Din patrulaterul inscriptibil A_1AB_1B obținem

$$\angle BB_1A_1 \equiv \angle A_1AB \quad (13)$$

Dar

$$\angle A_1AB \equiv \angle C_1AH \text{ (opuse la vârf)} \quad (14)$$

Din patrulaterul inscriptibil HC_1AB_1 obținem

$$\angle C_1AH \equiv \angle C_1B_1H \equiv \angle DB_1B \quad (15)$$

Din relațiile (13), (14), (15) rezultă că $\angle A_1B_1B \equiv \angle BB_1D$, deci $[B_1B$ este bisectoarea $\angle A_1B_1D$.

8.2. Triunghiul tangențial

Definiție 8.2.1. Triunghiul tangențial este triunghiul format de cele trei tangente duse prin vârfurile unui triunghi nedreptunghic la cercul său circumscris.

În cazul triunghiului dreptunghic două tangente devin paralele şi deci nu există triunghi tangențial.

1) Măsurile unghiurilor

i) Triunghiul ABC este ascuțitunghic.

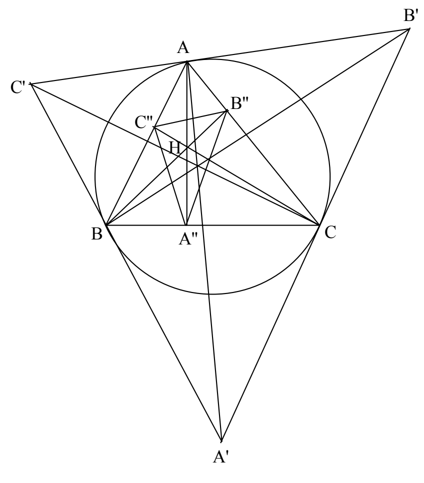


Fig. 1.

Triunghiul A'B'C' este triunghiul tangențial.

Tangentele din A' la cerc sunt congruente şi deci triunghiul BA'C este isoscel.

Avem că măsura $\angle BAC$ este jumătate din măsura arcului BC, iar măsura unghiului CBA' este jumătate din măsura arcului BC, deci unghiurile $\angle BAC$ şi $\angle CBA'$ sunt congruente.

În triunghiul A'BC avem

$$m(\angle BA'C)+m(\angle A'BC)+m(\angle A'CB)=180°,$$

care se mai scrie $m(\angle BA'C)+2m(\angle BAC)=180°$ de unde

$$m(\angle BA'C)=180°-2m(\angle BAC)$$

sau $m(\angle A')=180°-2m(\angle A)$.

Analog obţinem $m(\angle B')=180°-2m(\angle B)$, $m(\angle C')=180°-2m(\angle C)$.

ii) Triunghiul ABC este obtuzunghic cu unghiul obtuz în A. Tangentele dintr-un punct exterior la cerc fiind congruente, rezultă că triunghiurile B'AC şi C'AB sunt isoscele şi unghiurile $\angle A'B'C'$ respectiv $\angle A'C'B'$ sunt exterioare acestor două triunghiuri. Atunci $m(\angle A'C'B')=2m(\angle C'BA)$ (măsura arcului AB) $=2m(\angle BAC)$.

Deci $m(\angle C')=2m(\angle C)$.

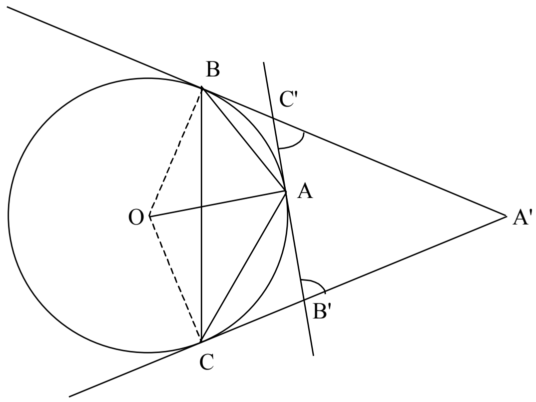


Fig. 2.

Analog obţinem $m(\angle B')=2m(\angle B)$.

Atunci

$$m(\angle A')=180°-(m(\angle B')+m(\angle C'))=180°-2(m(\angle B)+m(\angle C))=$$
$$=180°-2(180°-m(\angle A))=2m(\angle A)-180°$$

Deci $m(\angle A')=2m(\angle A)-180°$.

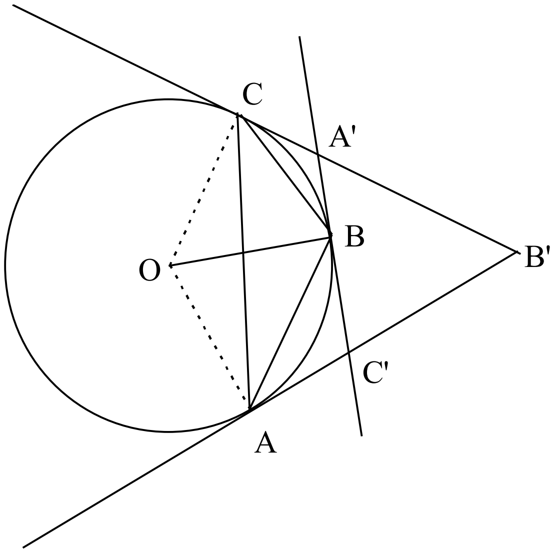


Fig. 3

2) Lungimile laturilor triunghiului tangențial

Fie ABC triunghi ascuțitunghic cu A'B'C' triunghiul tangențial (Fig.1).

Triunghiul A'BC este isoscel cu (A'B)≡(A'C). Cu teorema sinusurilor în triunghiul AB'C obținem: $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{sinB'}}=\frac{\mathrm{AB'}}{\mathrm{sinB}}$ care se mai scrie:

$$\frac{b}{\sin(180°-2\mathrm{B})}=\frac{\mathrm{AB'}}{\mathrm{sinB}}, \text{ de unde } \mathrm{AB'}=\frac{b\sin\mathrm{B}}{\sin(180°-2\mathrm{B})}.$$

Dar sin(180°-2B)=sin2B=2sinBcosB.

Atunci $\mathrm{AB'}=\frac{b\sin\mathrm{B}}{2\sin\mathrm{B}\cos\mathrm{B}}=\frac{b}{2\cos\mathrm{B}}$, deci $\mathrm{AB'}=\frac{b}{2\cos\mathrm{B}}$ și $\mathrm{B'C}=\frac{b}{2\cos\mathrm{B}}$.

Cu teorema sinusurilor în triunghiul isoscel C'AB obținem:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{sinC'}}=\frac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{sinC}},$$

de unde

$$\mathrm{AC'}=\frac{c\sin\mathrm{C}}{\sin\mathrm{C'}}=\frac{c\sin\mathrm{C}}{\sin(180°-2\mathrm{C})}=\frac{c\sin\mathrm{C}}{\sin 2\mathrm{C}}=\frac{c\sin\mathrm{C}}{2\sin\mathrm{C}\cos\mathrm{C}}=\frac{c}{2\cos\mathrm{C}}$$

Deci

$$\mathrm{AC'}=\frac{c}{2\cos\mathrm{C}} \qquad (1)$$

Atunci $\mathrm{B'C'}=\mathrm{B'A}+\mathrm{AC'}=\frac{b}{2\cos\mathrm{B}}+\frac{c}{2\cos\mathrm{C}}$.

Din teorema cosinusului avem:

$$\cos \mathrm{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{şi} \quad \cos \mathrm{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Atunci

$$\mathrm{B'C'} = \frac{b}{2\cos \mathrm{B}} + \frac{c}{2\cos \mathrm{C}} = \frac{b}{2\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)} + \frac{c}{2\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)} =$$

$$= \frac{abc}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{abc}{a^2 + b^2 - c^2} = abc\left(\frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}\right) =$$

$$= abc\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2}{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}\right) = \frac{abc \cdot 2a^2}{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)} =$$

$$= \frac{2a^3bc}{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot 4a^2bc} = \frac{a}{2\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C}}.$$

Deci $\mathrm{B'C'} = \frac{a}{2\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C}}$.

Analog obținem $\mathrm{A'C'} = \frac{b}{2\cos \mathrm{A}\cos \mathrm{C}}$, $\mathrm{A'B'} = \frac{c}{2\cos \mathrm{A}\cos \mathrm{B}}$.

Dăm şi alte exprimări pentru lungimile laturilor triunghiului tangențial. Folosim teorema sinusului.

Din $\frac{b}{\sin \mathrm{B}} = 2R$ obținem: $b = 2R\sin \mathrm{B}$.

Atunci $\mathrm{B'C} = \frac{b}{2\cos \mathrm{B}} = \frac{2R\sin \mathrm{B}}{2\cos \mathrm{B}} = R\mathrm{tgB}$.

Analog obținem $\mathrm{AC'} = \frac{c}{2\cos \mathrm{C}} = \frac{2R\sin \mathrm{C}}{2\cos \mathrm{C}} = R\mathrm{tgC}$.

Atunci B'C'=B'A+C'A=RtgB+RtgC adică B'C'=R(tgB+tgC).

Analog obținem: A'C'=R(tgA+tgC) şi A'B'=R(tgA+tgB).

3) Perimetrul triunghiului tangențial (P')

$$P' = \mathrm{A'B'} + \mathrm{B'C'} + \mathrm{A'C'} = 2R(\mathrm{tgA} + \mathrm{tgB} + \mathrm{tgC})$$

Dar tgA+tgB+tgC=tgA·tgB·tgC, atunci P'=2RtgA·tgB·tgC, relație care se mai scrie $\mathrm{P'} = 2\mathrm{R}\frac{\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}}{\cos \mathrm{A}\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C}}$ şi cu teorema sinusurilor ($\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = 2R$, $\frac{b}{\sin \mathrm{B}} = 2R$, $\frac{c}{\sin \mathrm{C}} = 2R$) obținem:

$$P' = 2R \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \cdot \frac{1}{\cos \mathrm{A}\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C}} = \frac{abc}{4R^2 \cos \mathrm{A}\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C}}.$$

Dar abc=4RS şi atunci $P' = \dfrac{4RS}{4R^2\text{cosAcosBcosC}} = \dfrac{S}{R\text{cosAcosBcosC}}$.

Deci $P' = \dfrac{S}{R\text{cosAcosBcosC}}$, atunci semiperimetrul $p' = \dfrac{S}{2R\text{cosAcosBcosC}}$ sau p'=RtgA·tgB·tgC.

4) Raza cercului înscris în triunghiul tangențial (r')

Laturile triunghiului tangențial sunt tangente în A, B, C la cercul circumscris triunghiului ABC, deci raza cercului înscris în triunghiul tangențial este

$$r' = R.$$

5) Aria triunghiului tangențial S'

Fiindcă $S' = p' \cdot r'$ obținem $S' = R^2 \text{tgA} \cdot \text{tgB} \cdot \text{tgC}$.

6) Raza cercului circumscris triunghiului tangențial (R')

Cu teorema sinusurilor în triunghiul tangențial obținem:

$$\frac{a'}{\sin \text{A}'} = 2R' \quad \text{sau} \quad \frac{\text{B}'\text{C}'}{\sin(180° - 2\text{A})} = 2R',$$

de unde

$$R' = \frac{\text{B}'\text{C}'}{2\sin(180° - 2\text{A})} = \frac{a}{4\text{cosBcosCsin2A}} =$$

$$= \frac{2R\sin \text{A}}{8\text{cosBcosCsinAcosA}} = \frac{R}{4\text{cosAcosBcosC}}$$

(Am ținut seama că $\dfrac{a}{\sin \text{A}} = 2R$ şi sin2A=2sinAcosA).

Deci $R' = \dfrac{R}{4\text{cosAcosBcosC}}$.

7) Înălțimile triunghiului tangențial ($h'_{a'}, h'_{b'}, h'_{c'}$)

Din $S' = \dfrac{a' \cdot h'_{a'}}{2}$ obținem

$$h'_{a'} = \frac{2S'}{a'} = \frac{2R^2\text{tgA} \cdot \text{tgB} \cdot \text{tgC}}{\dfrac{a}{2\text{cosBcosC}}} = 4R^2 \frac{\sin \text{A}}{\cos \text{A}} \cdot \frac{\sin \text{B}}{\cos \text{B}} \cdot \frac{\sin \text{C}}{\cos \text{C}} \cdot \frac{\text{cosBcosC}}{a} =$$

$$= 4R^2 \frac{\sin \text{A}}{\cos \text{A}} \cdot \frac{\text{sinBsinC}}{a} = \frac{4R^2 \sin \text{A}}{\cos \text{A}} \cdot \frac{\text{sinBsinC}}{2R\sin \text{A}}$$

Deci $h'_{a'} = \dfrac{2R\text{sinBsinC}}{\cos \text{A}}$.

Analog obținem $h'_{b'} = \dfrac{2R\text{sinAsinC}}{\cos \text{B}}$ şi $h'_{c'} = \dfrac{2R\text{sinAsinB}}{\cos \text{C}}$.

8) Distanțele de la centrul cercului circumscris triunghiului ABC la vârfurile triunghiului tangențial A'B'C'

În patrulaterul inscriptibil AOBC', cu prima teoremă a lui Ptolemeu obținem: C'O·AB=AC'·BO+AO·C'B (O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC).

Dar AB=c, BO=AO=R şi AC'=C'B, deci C'O·c=2AC'·R, din (1) avem $\mathrm{AC'}=\dfrac{c}{2\cos\mathrm{C}}$ şi atunci $\mathrm{C'O}\cdot c=\dfrac{2\cdot c\cdot R}{2\cos\mathrm{C}}$, de unde $\mathrm{C'O}=\dfrac{R}{\cos\mathrm{C}}$.

Analog obținem: $\mathrm{A'O}=\dfrac{R}{\cos\mathrm{A}}$, $\mathrm{B'O}=\dfrac{R}{\cos\mathrm{B}}$.

9) Distanțele între vârfurile triunghiului considerat şi vârfurile corespunzătoare ale triunghiului tangențial: AA', BB', CC'.

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul ABA'

$$\mathrm{AA'}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{A'B}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A'B}\cos(\angle\mathrm{ABA'})$$

În triunghiul A'BC cu teorema sinusului obținem:

$$\frac{\mathrm{A'B}}{\sin(\angle\mathrm{BCA'})}=\frac{\mathrm{BC}}{\sin\mathrm{A'}}\quad\text{sau}\quad\frac{\mathrm{A'B}}{\sin\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{BC}}{\sin(180-2\mathrm{A})}$$

care se mai scrie:

$$\frac{\mathrm{A'B}}{\sin\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{BC}}{\sin2\mathrm{A}}\quad\text{sau}\quad\frac{\mathrm{A'B}}{\sin\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{BC}}{2\mathrm{sincosA}},$$

de unde $\mathrm{A'B}=\dfrac{a}{2\cos\mathrm{A}}$. Atunci

$$\mathrm{AA'}^2=c^2+\left(\frac{a}{2\cos\mathrm{A}}\right)^2-\frac{2ca}{2\cos\mathrm{A}}\cos(\angle\mathrm{ABA'})$$

Obținem $\mathrm{AA'}^2=\dfrac{m_a^2}{\cos^2\mathrm{A}}$, de unde

$$AA'^2\cos^2\mathrm{A}=m_a^2$$

Atunci avem şi $BB'^2\cos^2\mathrm{B}=m_b^2$, $CC'^2\cos^2\mathrm{C}=m_c^2$.

Adunând relațiile de mai sus şi ținând seama că

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

obținem

$$\mathrm{AA'}^2\cos^2\mathrm{A}+\mathrm{BB'}^2\cos^2\mathrm{B}+\mathrm{CC'}^2\cos^2\mathrm{C}=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

10) Aria unui triunghi nedreptunghic este medie proporțională între aria triunghiului său tangențial şi aria triunghiului său ortic, adică $S^2=S'\cdot S''$, unde S' şi S'' sunt ariile triunghiurilor tangențial şi respectiv ortic.

$$S'=R^2\cdot\mathrm{tgA}\cdot\mathrm{tgB}\cdot\mathrm{tgC}\quad\text{iar}\quad S''=2S\mathrm{cosAcosBcosC},$$

relație demonstrată la triunghiul ortic. Atunci

$$S' \cdot S'' = R^2 \cdot \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B} \cdot \frac{\sin C}{\cos C} \cdot 2S \cos A \cos B \cos C$$

de unde obținem:

$$S' \cdot S'' = 2SR^2 \sin A \sin B \sin C$$

Din teorema sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

avem:

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

Atunci $S' \cdot S'' = 2SR^2 \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{2R \cdot 2R \cdot 2R}$, de unde $S' \cdot S'' = \frac{S \cdot abc}{4R}$, iar cu $abc = 4SR$ obținem $S' \cdot S'' = \frac{S \cdot 4SR}{4R} = S^2$, adică $S' \cdot S'' = S^2$.

11) Produsul distanțelor unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi la laturile triunghiului său tangențial este egal cu produsul distanțelor aceluiaşi punct la laturile triunghiului considerat.

Pentru demonstrație folosim o propoziție ajutătoare.

Lema 8.2. Distanța unui punct oarecare de pe un cerc la o coardă este medie proporțională între distanțele aceluiaşi punct la tangentele duse prin extremitățile coardei.

Demonstrație. Considerăm un punct P pe cerc şi PD, PE distanțele lui P la tangentele duse prin extremitățile coardei AB.

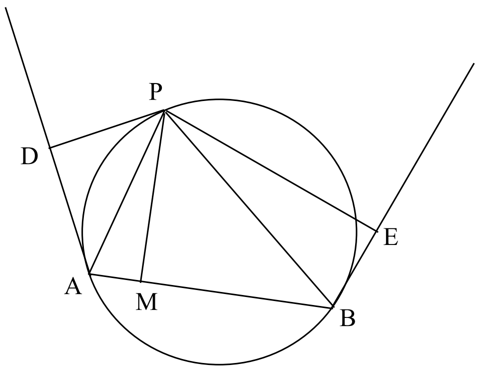


Fig. 4.

Triunghiurile dreptunghice PBE şi PAM sunt asemenea fiindcă unghiurile PAM şi PBE au ca măsură jumătate din măsura arcului PB.

Din proporționalitatea laturilor obținem:

$$\frac{PE}{PM} = \frac{PB}{PA}$$

Şi triunghiurile dreptunghice PBM şi PAD sunt asemenea având unghiurile PBA şi PAD congruente.

Scriem proporționalitatea laturilor

$$\frac{PB}{PA} = \frac{PM}{PD}$$

Atunci obținem: $\frac{PE}{PM} = \frac{PM}{PD}$ de unde $PM^2=PD \cdot PE$. şi lema este demonstrată.

În figura 5 se consideră punctul P pe cercul circumscris triunghiului ABC şi PR, PM, PN distanțele lui P la laturile triunghiului ABC, iar PD, PE, PF distanțele lui P la laturile triunghiului tangențial. Cu lema considerată obținem:

$$PM^2=PF \cdot PD, \quad PR^2=PF \cdot PE, \quad PN^2=PE \cdot PD$$

Înmulțind membru cu membru relațiile de mai sus obținem:

$$PM \cdot PR \cdot PN=PF \cdot PD \cdot PE.$$

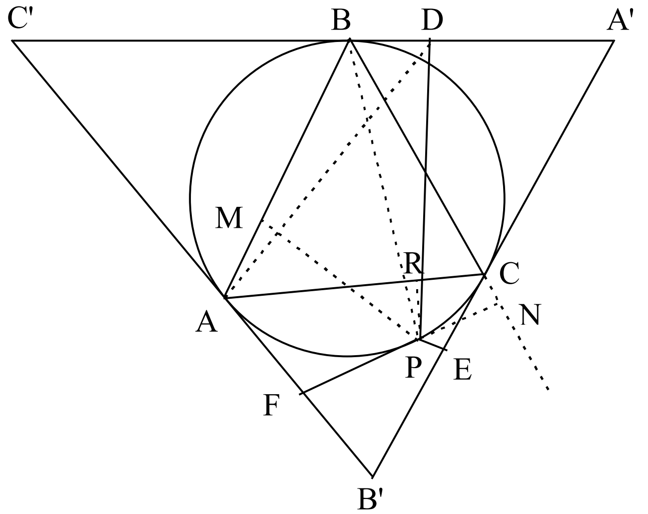


Fig. 5

Tiparul executat prin comanda nr. 549, 2003, la
CARTPRINT Baia Mare, cod 4800
cartier Săsar, str. Victoriei nr. 146
tel./fax: 0262/218923
România