

Számelmélet I.

Tantárgy neve	Számelmélet I.
Tantárgy kódja	MTB 1011
Meghirdetés féléve	3. félév
Kreditpont	3
Összóraszám (elm+gyak)	2+0
Számonkérés módja	Kollokvium
Előfeltétel (tantárgyi kód)	MTB 1003
Tantárgyfelelős neve	Mátyás Ferenc
Tantárgyfelelős beosztása	Főiskolai tanár

Tantárgy neve	Számelmélet I.
Tantárgy kódja	MTB 1012
Meghirdetés féléve	3. félév
Kreditpont	2
Összóraszám (elm+gyak)	0+2
Számonkérés módja	Gyakorlati jegy
Előfeltétel (tantárgyi kód)	MTB1011
Tantárgyfelelős neve	Mátyás Ferenc
Tantárgyfelelős beosztása	Főiskolai tanár

1. A tantárgy általános célja és specifikus célkitűzései

A számelmélet a matematika kitüntetett fejezete. Gauss (a matematikusok fejedelme) szerint a matematika a tudományok királynője, és a matematika királynője a számelmélet. A számelmélet népszerű a matematikusok és a laikus érdeklődők között egyaránt, hiszen bővelkedik a könnyen megérthető, ám nehezen megválaszolható kérdésekben.

A tárgy lehetőséget ad annak bemutatására, hogyan épül fel a matematika egy fejezete egy fogalomrendszeren. A matematika módszereinek megismertetése mellett fontos a tárgyi tudás elmélyítése, hiszen már az általános iskolában bőségesen tárgyaljuk a számelméletet.

2. A tantárgy tartalma

A számelmélet alaptétele. Lineáris kongruenciák, kongruenciarendszerek és lineáris diofantikus egyenletek. Euler–Fermat tétel. Klasszikus kongruencia tételek. Számelméleti függvények. Elemi prímszámelmélet, prímek száma, prímek reciprokainak összege. Irracionális és racionális számok kapcsolata, algebrai és transzcendens számok, nevezetes számelméleti problémák.

Alapfogalmak, tételek: osztó, az oszthatóság tulajdonságai, egység, felbonthatatlan szám, összetett szám, prímszám, minden prím felbonthatatlan, legnagyobb közös osztó, relatív prímek, páronként relatív prímek, legkisebb közös többszörös. Oszthatóság az egészek körében. az egészek körében két egység van, maradékos osztás, számrendszerek, legnagyobb közös osztó létezése, euklideszi algoritmus, a legnagyobb közös osztó kifejezése a számok lineáris kombinációiként, lineáris diofantikus egyenletek megoldhatósága. Pitagoraszi számhármak. A nagy Fermat-tétel. A számelmélet alaptétele, kanonikus alakban adott szám pozitív osztói, pozitív osztók száma, legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös kifejezése a kanonikus alakok segítségével, a prímek száma végtelen, létezik tetszőleges hosszú csupa összetett számot tartalmazó intervallum, prímszámtétel, erathosztheneszi szita, Dirichlet-tétel, Goldbach-sejtés, Az ikerprím-sejtés. Fermat- és Mersenne-prímek, kongruencia, a kongruencia tulajdonságai, kongruencia egyszerűsítése és ennek következménye, maradékosztály, teljes maradékrendszer, redukált maradékosztály, redukált maradékrendszer, Euler-féle φ függvény, teljes és redukált maradékrendszer tulajdonságai, Euler–Fermat-tétel és következményei. Műveletek kongruenciákkal, a modulo m maradékosztályok egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak, multiplikatív inverz, redukált maradékosztályok és multiplikatív inverz kapcsolata, a modulo m maradékosztály pontosan akkor test, ha m prím. Lineáris kongruenciák, lineáris kongruencia megoldásszáma, az $ax \equiv b \pmod{m}$ lineáris kongruencia megoldhatósága és megoldásszáma, az $ax \equiv b \pmod{m}$ $(a,m)=1$ kongruencia megoldása. Szimultán kongruenciák, a kínai maradéktétel és következményei. Számelméleti függvények, additív, teljesen additív, multiplikatív és teljesen multiplikatív számelméleti függvények, Möbius-függvény, az Euler-féle φ -függvény multiplikatív.

3. Évközi ellenőrzés módja

Az előadáshoz kapcsolódó gyakorlat követi az előadáson feldolgozott elméleti anyagot. A gyakorlaton 2-3 ZH alapján történik a gyakorlati jegy megszerzése. A vizsgázást írásbeli beugró előzi meg, amely az általános iskolában tanított számelméleti ismereteket kéri számon. Ennek teljesítése feltétele a vizsga megkezdésének.

4. A tárgy előírt külső szakmai gyakorlatai

A tárgyhöz nem kapcsolódik külső szakmai gyakorlat.

5. A kötelező ill. ajánlott irodalom

1. Freud Róbert, Gyarmati Edit: Számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004
2. Erdős Pál, Surányi János: Válogatott fejezetek a számelméletből, Polygon, Szeged, 1996
3. Megyesi László: Bevezetés a számelméletbe, Polygon, Szeged, 1997:
4. Kiss Péter–Mátyás Ferenc: A számelmélet elemei, EKTF Líceum Kiadó, Eger, 1997
5. Szalay Mihály: Számelmélet, a speciális matematikai osztályok számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991
6. Sárközy András: Számelmélet, példatár, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976
7. Niven–Zuckerman: Bevezetés a számelméletbe, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978

6. A tantárgy tárgyi szükségletei és ellátása

A tárgy oktatása nem igényel különösebb tárgyi felszerelést. Elegendő a tábla, kréta, projektor.

„Beugró a vizsgára” (minta)

Válaszait indokolja!

1. A nulla páros vagy páratlan?
2. A nulla racionális szám vagy irracionális?
3. Hány olyan szám van, amely megegyezik a reciprokával?
4. Sorolja fel a 10-nél kisebb prímszámokat!
5. Igaz-e, hogy végtelen sok összetett szám van?
6. Lehet-e két prímszám összege prímszám?
7. Van-e két olyan egész szám, amelyek összege is, szorzata is prímszám?
8. Van-e két olyan prímszám, amelyek összege 101?
9. Melyik az a legkisebb természetes szám, amely maradék nélkül osztható az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok mindegyikével?
10. Igaz-e, a következő állítás? Ha egy szám osztható 4-gyel és 5-tel, akkor osztható 20-szal is.
11. Igaz-e, a következő állítás? Ha egy szám osztható 4-gyel és 6-tal, akkor osztható 24-gyel is.
12. Hány olyan szám van 1 és 100 között, amely osztható 4-gyel és 6-tal?
13. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek valamilyen sorrendjével felírtunk egy 6-jegyű számot. Igazolja, hogy ez a szám mindig osztható 3-mal.
14. Ismertesse a 11-gyel való oszthatóság szabályát.
15. Miért nincs megoldása az egész számok körében az $12x+21y=5$ egyenletnek?

ZH-feladatsor

1. Melyek az oszthatósági reláció tulajdonságai?
2. Az euklideszi algoritmus segítségével határozza meg 3223 és 143 legnagyobb közös osztóját.
3. 6-os alapú számrendszerben melyek a 2-vel, 3-mal, 5-tel és 7-tel való oszthatóság szabályai?
4. Mit mond ki Csebisev tétele?
5. Adjon meg olyan törtszámokat, melynek tizedestört alakja véges, tiszta szakaszos, ill. vegyes szakaszos.
6. Hány olyan szám van 1000-ig, amely számok osztóinak száma páratlan?
7. Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek három osztója van?
8. Bizonyítsa be, hogy a prímek száma végtelen.
9. Adjon meg 100 egymást követő összetett számot.
10. Oldja meg a $143x+3223y=33$ lineáris diofantoszi egyenletet.
11. Oldja meg a $39x \equiv 7 \pmod{37}$ kongruenciát.
12. Milyen számokat nevezünk tökéletes számnak, barátságos számnak?
13. Melyek a páros tökéletes számok?

Egy lehetséges tételsor

1. Az euklideszi osztás tétele.
2. A számelmélet alaptétele.
3. Egy szám pozitív osztóinak száma.
4. Oszthatósági szabályok tízes számrendszerben.
5. Racionális számok tizedestört alakja.
6. Oszthatóság fogalma, tulajdonságai.
7. A legnagyobb közös osztó fogalma, tulajdonságai.
8. A legkisebb közös többszörös fogalma, tulajdonságai.
9. Az euklideszi algoritmus.
10. Elsőfokú kétismeretlenes diofantoszi egyenlet.
11. Kongruencia fogalma, tulajdonságai.
12. Maradékosztályok gyűrűje.
13. Szimultán kongruenciák, a kínai maradéktétel és következményei
14. Az Euler–féle függvény.
15. Euler–Fermat tétel.
16. Elsőfokú egyismeretlenes kongruencia megoldása.
17. Egy szám pozitív osztóinak összege.
18. Additív és multiplikatív számelméleti függvények.
19. Összegezési és megfordítási függvény.
20. Pitagoraszi számhármások.
21. Irracionális és racionális számok kapcsolata.
22. Algebrai és transzcendens számok
23. Elemi prímszámelmélet, prímek száma, prímek reciprokainak összege.
24. A nagy prímszámtétel. Dirichlet-tétel. Csebisev tétele. Fermat– és Mersenne–féle prímek.
25. Nevezetes számelméleti problémák.