1) Egy szigeten 10 matematikus oroszlán él. A gondozójuk reggel bedob egy szelet húst a szigetre.
- Ha egy oroszlán megeszi a húst, akkor maga is húsdarabbá változik napnyugtáig, így a többiek megehetik.
- Ha egy oroszlán nem eszik húst egy nap, akkor másnapra elpusztul.
- Egy oroszlán inkább éhenpusztul, minthogy megegyék.
Másnap reggel mit tapasztal a gondozó a szigeten?

(n=1 oroszlán esetén, az oroszlán megeszi a húst és életben marad
n=2 oroszlán esetén, egyik oroszlán sem eszi meg a húst, mert mindkettő tudja, hogy ha megeszi, akkor a társa őt eszi meg (n=1 eset áll fenn), és tudjuk, hogy inkább éhenhalnak, mint hogy megegyék őket. Tehát mindketten elpusztulnak.
n=3 oroszlán esetén a leggyorsabb oroszlán megeszi a húst, hiszen tudja, hogy ekkor n=2 eset áll fenn, amire beláttuk, hogy akkor nem eszik meg a húst. Így ekkor egy oroszlán életben marad, a többi elpusztul.
Látszik tehát, hogy ha n páros, akkor mind éhenhalnak, ha n páratlan, akkor egy (a leggyorsabb) életben marad, a többi éhenpusztul. Mivel a 10 páros, ezért mind éhenpusztulnak másnap reggelre.)

2) Egy faluban a férfiak megelégelik asszonyaik hűtlenkedéseit és úgy határoznak, hogy véget vetnek ennek. A következő szabályokat beszélik meg:
1. ha valaki rájön, hogy megcsalja a felesége, azonnal kiteszi a szűrét
2. minden nap egyszer találkoznak és akkor közlik, ha rájöttek, hogy a feleségük megcsalja őket
3. nem szólnak egymásnak, a feleségeik viselt dolgairól
Továbbá minden férfi tudja a többi feleségéről, hogy megcsalja-e a férjét.
A 11. napon minden hűtlen feleséget kirúgnak. Hány asszony volt hűtlen a férjéhez?

(Biztosan van hűtlen asszony! Tegyük fel, hogy csak 1 hűtlen asszony van. Ezesetben a 0. napon tudná az egyetlen felszarvazott férj, hogy az ő felesége hűtlen, hiszen a többi nőről tudná, hogy hű, így csak az ő felesége lehet a hunyó. Ha 2 hűtlen nő lenne, akkor az 1. napon mindketten repülnének, mivel mindkét férfi tudná, hogy nem csak 1 van, hiszen akkor az repült volna rögtön, mivel azonban mindketten csak 1 csalós nőt látnak, tudják, hogy a másik a sajátjuk. így indukcióval látható, hogy a 11. napon 12 asszony fog repülni, hiszen a 12 férj 11-11 hűtlen nőt lát, mivel azonban a 11. napon nem történt semmi, ezért nyilván 12 hűtlen asszony van.)

3) 100 ember fejére egy-egy fekete vagy fehér sapkát adunk. Semmilyen jelzést nem adhatnak egymásnak, de mindenki körülnézhet, tehát a sájátján kívül mindenkiről tudja, hogy milyen színű sapka van a fején. Ezek után sípszóra mindenkinek fel kell emelnie a bal vagy a jobb kezét. El tudják-e érni, hogy az azonos színű sapkát viselő emberek azonos kezüket emeljék fel? (Mielőtt a sapkát kapják összebeszélhetnek!)

(Ha valaki páros számú fehéret lát, akkor emelje fel a jobb kezét, ha páratlant, akkor a balt. Ez azért jó, mert minden fehérsapkás ugyanannyi fehér sapkát lát és minden fekete sapkás pontosan eggyel többet, mint a fehérsapkások. Ezért egyező lesz a paritás az azonos sapkát viselők kötött és eltérő a különböző sapkát viselők között.)

4) A király magához hivatja tudós törpéit és gonosz játékot játszik velük. Mindegyik fejére tesz egy sapkát. Vagy pirosat, vagy zöldet, vagy kéket. Egymás elé állítja őket úgy, hogy mindegyik látja az összes előtte állót és mindegyik hallja, amit a másik mond. Feladatuk a következő: Meg kell mondania minden törpének, hogy rajta milyen színű sapka van. (A tippeket valamilyen sorrendben egymás után kell mondaniuk.) Ha valamelyik elrontja, akkor börtönbe kerül. Milyen stratégiát beszéljenek meg a játék előtt, hogy a lehető legkevesebb törpe senyvedjen utána börtönben?

(Hozzárendelnek az egyes sapkákhoz számokat: piros - 0, zöld - 1, kék - 2. Mostantol ezekkel a számokkal hivatkozom a színekre. A leghátsó törpe lesz az egyetlen áldozat, ha nincs szerencséje (van 1/3 esélye megmenekülni), a többiek szabadok. De hogyan is kell tippelniük? A leghátsó látja a többi törpét. Összeadja a számaikat (a színeknek megfeleltetett számokat) elosztja 3-mal és veszi a maradékot (azaz az összeg által reprezentált 3-as kongruencia osztályt). Ezt bemondja. Az előtteálló ebből már tudja a saját sapkáját, hiszen az előtte állókat látja, veszi a 3-mal vett maradékukat és az előző tippnek es az ő összegének bemondja a különbségét. És így tovább... Végül a hátsó kivételével mindenki megmenekül, ha mákja van, az utolsó is.)

5) Adott egy börtön, melyben a cellák hermetikusan elzártak, a cellák közt semmilyen kommunikáció nem lehetséges. Bekerül a börtönbe x db rab. A rabok együtt érkeznek és ismerik a börtön adottságait. A börtönőrök viszik sétálni a rabokat, naponta akár többet is, de teljes véletlenszerűséggel. Egy nap akár egy rabot többsör is levisznek, de lehet olyan rab aki akár egy hónapig, vagy tovább nem sétál. Egyszerre egy rab sétál. Az udvaron van egy kapcsoló, melynek két állása van, A és B (a kapcsoló eredetileg az A állásban van). A rabok ezzel a kapcsolóval kommunikálhatnak: a séta alatt átkapcsolhatják. A börtönőrök nem nyúlnak a kapcsolóhoz. A rabok akkor szabadulnak ki, ha valamelyik rab kijeleni, hogy: "Már minden rab volt legalább

egyszer sétálni!" és a kijelentés IGAZ. Ha a kijelentés nem igaz, soha többé nem szabadulnak ki. Tehát csak egyszer lehet ilyen kijelentést tenni. Hogyan szabadulhatnak ki?

(Ha egy rab még nem nyúlt a kapcsolóhoz, és az A állapotban van, akkor átbillenti B-be. Van egy kitüntetett rab, akinek az a feladata, hogy ahányszor kimegy, ha a kapcsoló B állapotban van, akkor visszaállítja A-ra és növeli a számlálót eggyel. Ha a számláló elérte az (x-1)-et, akkor tudja, hogy a rajta kívül állók mindegyike volt már egyszer kint, ő is volt, tehát megteheti a kijelentést)

6) Rabságban senyvedünk a szultán udvarában. A következő ajánlatot teszi a szultán: választanunk kell két ajtó közül. Az egyik mögött a szabadság, a másik mögött két éhes oroszlán vár. Egyet kérdezhetünk az őröktől az ajtókkal kapcsolatban és utána döntenünk kell. Egy bökkenő azért van. Az egyik őr mindig hazudik, a másik mindig igazat mond, de nem tudjuk, melyik melyik. Mit kérdezzünk az egyik őrtől, hogy lehetőleg ép bőrrel megússzuk?

(Bármelyiktől kérdezhetjük a következőt: "Mit mondana a másik, ha azt kérdezném tőle, hogy melyik ajtó mögött vannak az oroszlánok?" Ekkor az igazmondó nyilván rámutatna a szabadság ajtajára, hiszen a hazudós a hamisat mutatná. A hazudós pedig tudja, hogy az igazmondó az oroszlános ajtóra mutatna, ezért hazugságból a jó ajtóra mutatna. Így a válasz mindenképpen a szabdságba vezető ajtó.
Emögött valójában az a logikai tétel húzódik, miszerint nem(nem(igaz))=igaz, hiszen ha igaznak a jó ajtót nevezem, akkor mindkettejükkel pontosan kétszer tagadtatom az igaz ajtót, amiből biztosan a helyes választ kapom.)

7) Egy embernek szülinapja volt és megkérdezték tőle:
- Emlékszik, hogy mit csinált éppen egy évvel ezelőtt?
- Hát erre egészen vétletlenül pontosan emlékszem: Az Északi sarkon voltam éppen és a jégkunyhómból kikandikálva megcsodálhattam a napfelkeltét.
Vajon mikor van az illető szülinapja?

(Az Északi-sarkon egy évben csak egyszer kel fel a nap. Ezen a napon született.)

8) Teljes indukcióval belátjuk, hogy minden kutyának egyforma színű a szeme.
n=1-re igaz: Egy kutyának nyilván önmagával ugyanolyan színű a szeme.
Tegyük fel, hogy n db kutyának egyforma színű a szeme. Lássuk be, hogy ekkor n+1 kutyának is egyforma: Emeljünk ki az n+1 db kutyából egyet, így marad n db kutyánk, amikre tudjuk, hogy az állítás igaz. Most tegyük vissza a kutyát és emeljünk ki egy másikat. A megmaradó n db kutyának egyforma színű a szeme, tehát az először kiemelt kutyának a szeme színe megegyezik a többivel, így mind az n+1 db kutya szeme színe azonos.
A teljes indukció tételét alkalmazva látjuk, hogy minden kutyának azonos a szeme színe.
Hol a hiba a gondolatmenetben?

(Az indukciós művelet n=1-re nem alkalmazható! n=2-t ellenőrizve látjuk, hogy nem igaz az állítás!)

9) Rózsa Gyuri felajánl három ajtót. Egy mögött ajándék lapul, a másik kettő mögött semmi. Megfogjuk az egyik ajtó kilincsét és ekkor Gyuri bácsi megmutat a másik két ajtó közül egy üreset. Ezután választhatunk, hogy maradunk az eredeti választásnál, vagy inkább a másik ajtóhoz térünk át. Melyiket válasszuk? Van-e egyáltalán esélybeli különbség?

(A másik ajtót kell választani!
A magyarázat a következő: vizsgáljuk meg a két taktikát!
1. Maradunk az eredeti választásnál: ezesetben a jó ajtó kiválasztásának valószínűsége 1/3.
2. Ajtót váltunk: ezesetben akkor van esélyünk, ha eredetileg nem a jó ajtót választjuk, aminek a valószínűsége 2/3. Viszont ezután elvesznek egy üres ajtót, ami azt jelenti, hogy már csak a teli marad, tehát, ha eredetileg üreset választottunk, akkor most biztos, hogy a telire térünk át. Ez azt jelenti, hogy 2/3 valoszínűséggel választunk teli ajtót.

A teljes valószínűség tételét alkalmazva:
A:={elsőre jót választunk}
B:={elsőre rosszat választunk}
C:={másodikra jót választunk}
A,B teljes eseményrendszer,
1. stratégia esetén:
$P(C)=P(C|A)P(A)+P(C|B)P(B)=1*1/3+0*2/3=1/3$
2. stratégia esetén:

P(C)=P(C|A)P(A)+P(C|B)P(B)=0*1/3+1*2/3=2/3

Ha valaki nem hinne az első két érvelésnek, akkor sarkítom a feladatot, hátha úgy könnyebb elhinni: Legyen 100 ajtó, egy mögött ajándék és Gyuribá zárjon be ezek közül 98-at a kilincs megfogása után. Ez ugyanaz a probléma több ajtóra. Itt már érezni lehet az esélybeli különbségeket.)

10) Ezt a feladatot Einstein írta. Azt mondta, hogy az emberek 98%-a nem tudja megoldani. Te a 2%-ban vagy?

Tények:
1. 5 ház van, különböző színüek.
2. Minden házban él egy-egy ember, mindegyik más nemzetiségű.
3. Az öt tulajdonos különböző italokat fogyaszt, különféle cigit szív és más-más állatot tart.
4. Nincs két olyan tulajdonos aki ugyanazt az állatot tartaná, ugyanazt a cigit szívná, vagy ugyanazt az italt inná.

1. A brit a piros házban lakik.
2. A svéd kutyát tart.
3. A dán teát iszik.
4. A zöld ház a fehér ház bal oldalán van.
5. A zöld ház tulajdonosa kávét iszik.
6. Az a személy aki Pall Mall-t szív madarat tart.
7. A sárga ház tulajdonosa Dunhill-t szív.
8. Az az ember aki a középső házban lakik tejet iszik.
9. A norvég az első házban lakik.
10. Az ember aki Blend cigit szív amellett lakik aki macskát tart.
11. Az az ember aki lovat tart amellett lakik aki Dunhill cigit szív.
12. A tulaj aki Blue Mastert szív, sört iszik.
13. A német Prince-t szív.
14. A norvég a kék ház mellett lakik.
15. Az ember aki Blend-et szív, a vizet ivó ember szomszédja.

A kérdés: Melyik tart halat?

(1. Rögzítsük le a házakat (1., 2., 3., 4., 5.)
2. A harmadikban tejet isznak (8)
3. Az elsőben a Norvég lakik (9)
4. A norvégnak csak egy szomszédja van a 2-es, így az kék (14)
5. Mive a zöld és fehér házak egymás mellett vannak, ilyen sorrendben (4), ezért csak a 3., 4., 5. helyekre férnek be.
6. Mivel a zöld háznál kávét isznak (5) a 3-asban viszont tejet, ezért az 5. megállapításom miatt a zöld (vele együtt a kávé) és fehér házak a 4., illetve 5. helyen vannak.
7. A piros és a sárga igy az 1., illetve 3. helyekre kerül, de melyik sorrendben? A brit háza piros (1), a norvég viszont az 1-esben lakik, tehát az 1-es a sárga, a 3-as pedig piros és abban lakik a Brit.
8. A sárga házban Dunhill-t szívnak (7), tehát 1-Dunhill.
9. Mivel a Dunhill cigi mellet ló van (11), és a norvégnak csak egy szomszédja van, ezért a 2-esben lovat tartanak.
10.
- A sör-Blue Master páros (12) a 2-es vagy 5-ös háznál van, mivel a többiben más pia, vagy cigi van.
- A tea-dán páros (3) hasonló okokból szintén a 2-es illetve 5-ös helyek valamelyikén van.
- A német-Prince páros (13) a nemzetiségek miatt a 2., 4., 5. helyek valamelyikére kerül.
- Az első két gondolat miatt a 2., 5. helyek egyikén dán van, a másikán Blue Master, amik ütik a német-Prince párost, így a harmadik gondolat miatt a németnek (és a ciginek) marad a 4. hely.
11. A svéd-kutya páros (2) az 1., 3., 4. helyeken a nemzetiség miatt nem lehet, a 2. helyen pedig a ló miatt, ezért nekik az 5. hely jutott.
12. Mivel a nemzetiségeket egy kivételével besoroltuk, ezért a dánnak (és a víznek) a 2. hely maradt.
13. A sör-Blue Master páros (12) a 2., 3., 4. helyekre a sör miatt, az 1. helyre pedig a cigi miatt nem kerülhet, így maradt az 5. hely.
14. Az italok közül a víz maradt ki, az ő helye az 1. ház.
15. A vizes ház mellett Blendet szívnak (15), de az 1. háznak csak egy szomszédja van, így a Blendet a 2. háznál szívnak.
16. A cigik közül már csak a Pall Mall maradt ki, így azt a 3. helyre soroljuk.
17. Mivel a Pall Mall-madár páros (6) együtt jár, ezért a madarat a 3. helyre tesszük.
18. A Blend mellett macskát tartanak (10), de a két szomszéd közül az egyikben már van állat (3-asban madár), így a macska az 1-esbe kerül.
19. Minden állatot beosztottunk, csak a halat nem, így az a Némethez került!

A megoldás tehát az, hogy a NÉMET tart halat!)

11) Van egy folyó, amin át kellene kelnünk. Adott egy csónak is, amiben egyszerre csak egy dolgot vihetünk magunkkal a túlpartra. A feladat az, hogy átvigyük a kecskét, a káposztát, no meg a farkast. A probléma ott van, hogy ha magára hagyom a kecskét a káposztával, akkor a káposztának annyi. Hasonlóan a farkas is megeszi a kecskét, ha nem vagyunk ott. Hogyan vigyük át őket, hogy mind megmaradjanak (egyben)?

(1. átviszem a kecskét
2. visszamegyek és átviszem a farkast (vihetném a káposztát is, a sorrend mindegy)
3. visszahozom a kecskét
4. átviszem a káposztát
5. visszamegyek a kecskéért és átviszem azt is)

12) Besötétedett és csak egy lámpa van a túrázóknál. Egy függőhídhoz érkeztek, amin egyszerre max. két ember mehet át. Négyen vannak és rendre 1, 2, 5 ill. 10 percre van szükségük, hogy átmenjenek a hídon. Milyen sorrendben menjenek át, ha a lehető leggyorsabban szeretnék leküzdeni az akadályt és minden átkeléshez lámpára van szükségük?

(1. 2 perc alatt átmegy 1,2
2. 1 perc alatt vissza 1
3. 10 perc alatt átmegy 5,10
4. 2 perc alatt vissza 2
5. 2 perc alatt átmegy 1,2
Tehát összesen 17 percre van szükségük.)

13) Egy anyuka most 21 évvel idősebb a gyerekénél. 6 év múlva az anyuka pontosan 5-ször annyi idős lesz, mint a gyereke. Kérdés: Hol van most az apuka?

(A gyerek most legyen X éves, az anyuka mostani életkorát jelölje Y.
Az első feltétel szerint most: $X+21 = Y$
A második feltétel szerint 6 év múlva (mikor a gyerek X+6, az anyuka pedig Y+6 éves lesz):
$(X+6)\times 5 = (Y+6)$
Két egyenlet, két ismeretlen:
A második egyenletbe behelyettesítve az elsőt: $Y = X+21$ -et:
$(X+6)\times 5 = ((X+21)+6)$
$5X+30 = X+27$
$4X = -3$
$X = -3/4$
Vagyis a gyerek most -3/4 éves, azaz mínusz kilenc hónapos, tehát a gyerek csak kilenc hónap múlva fog megszületni.
Tehát apuka most éppen anyukában van!)

14) A 9 látszólag egyforma érme közül az egyik hamis: nehezebb a többinél. Hány méréssel lehet a hamis érmét egy kétkarú mérleg segítségével megtalálni? És n érme esetén?

(Osszuk 3db 3 elemű csoportba az érméket. Két csoportot hasonlítsunk össze. Ha az egyik csoport nehezebb a másiknál, akkor abban van a hamis érme, ha egyenlőek, akkor a harmadikban. Ezek után 3 elem közül kell kiválasztani a hamisat, amit az előző esethez hasonló módon teszünk: Kettőt összemérünk, ha az egyik nehezebb, akkor az a hamis, ha egyenlőek, akkor a harmadik. Így tehát 2 mérés elegendő a hamis érme meghatározásához.
n érme esetén tegyük fel, hogy n=3^k alakú. Ezesetben első mérésnél 3db 3^(k-1) elemű csoportot alakítunk ki, (és teljesen hasonlóan járunk el, mint 9 érme esetén) majd 3db 3^(k-2) elemű csoportokat és így tovább... Tehát ezesetben log3(n) lépésre van szükség.
Ha n nem 3^k alakú, hanem 3^(k-1) < n < 3^k, akkor 2db 3^(k-1) elemű csoportot alakítunk ki, a maradék kerül a 3. csoportba. Rossz esetben (ha nem a kis csoportban van a hamis) ugyanannyi mérés kell, mint n=3^k esetben. Tehát általánosan FelsőEgészrész(log3(n)) lépésre van szükség!)

15) Van egy csap, amiből folyamatosan folyik a víz, van egy 5 literes és egy 3 listeres edényünk. A cél, hogy az 5 literes edényben a végén pontosan 4 liter víz legyen. Megengedett műveletek: edény teletöltése; áttöltés másik egyénbe annyit, amennyi az edénybe fér, vagy annyit, amennyi a forrásedényben van; edény ürítése.

(Két lehetséges megoldás: 1. 5l-est feltöltjük - 3l-esbe 3l-t áttöltünk (5l-esben marad 2l) - 3l-est ürítjük - 5l-esből a 2l-t áttöltjük a 3l-esbe - 5l-est feltöltjük - 3l-es teletöltése az 5l-esből => így 5-1=4l marad az 5l-esben.

2. 3l-est feltöltjük - átöntjük az 5l-esbe - 3l-est ismét feltöltjük - átöntünk 2l-t az 5l-esbe (marad 1l a 3l-esben) - az 5l-est ürítjük - átöntjük az 1l-t az 5l-esbe - feltöltjük a 3l-est - a 3l-t átöntjük az 5l-esbe => így az 5l-esben 1+3=4l víz lesz.)