A parciális integrálás tétele és következményei

0.1. Tétel (A parciális integrálás tétele — speciális eset). *Ha $F, G \in C[a,b]$, $F|_{(a,b)}$ és $G|_{(a,b)}$ differenciálhatók és a deriváltjuk integrálható, akkor*

$$\int_a^b F'G = FG|_a^b - \int_a^b FG'.$$

Bizonyítás. $FG \in C[a,b]$ az (a,b) intervallum pontjaiban differenciálható, és a derivált, az $F'G + FG'$ függvény integrálható (két-két integrálható függvény szorzatának összege), ezért az $F'G + FG'$ függvényre (illetve e függvény $[a,b]$-re való tetszőleges kiterjesztésére) alkalmazható a Newton–Leibniz-tétel:

$$\int_a^b F'G + \int_a^b FG' = \int_a^b (F'G + FG') = FG|_a^b,$$

végül vonjuk ki mindkét oldalból FG' integrálját. □

1. Taylor-formula integrál-maradéktaggal

1.1. Tétel. *Legyen n nemnegatív egész, $I \subset \boldsymbol{R}$ nemelfajuló intervallum, $f \in C(I)$ $n+1$-szer differenciálható az I belső pontjaiban, $u \in \operatorname{int}(I)$ és $v \in I$. Ekkor*

$$f(v) - T^f_{u,n}(v) = \frac{1}{n!} \int_u^v (v-x)^n f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás. Az $u = v$ eset triviális, az $u \neq v$ estben n szerinti teljes indukcióval bizonyítunk: ha $n = 0$, akkor alkalmazható a Newton–Leibniz-tétel az $F := f|_{[u,v]}$, illetve $F := f|_{[v,u]}$ függvény deriváltjára és persze F-re mint primitív függvényre, s ez éppen a bizonyítandó formulát adja. Az indukciós lépésben a parciális integrálás imént bizonyított formuláját alkalmazzuk (megjegyzendő, hogy ebben a formulában a és b szerepe felcserélhető, tudniilik ez az újabb változat úgy kapható a fenti formulából, hogy annak mindkét oldalát beszorozzuk (-1)-gyel):

$$\frac{1}{n!} \int_u^v (v-x)^n f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{f^{(n)}(u)}{n!}(v-u)^n + \frac{1}{(n-1)!} \int_u^v (v-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{f^{(n)}(u)}{n!}(v-u)^n + f(v) - T^f_{u,n-1}(v) = f(v) - T^f_{u,n}(v).$$

□

2. A π szám irracionális voltának bizonyítása

Indirekt bizonyítást adunk: $\pi > 0$ miatt az indirekt feltevés úgy fogalmazható, hogy vannak olyan M, N pozitív egészek, amelyekre $\pi = M/N$. Az indirekt feltevésből a következő képtelenség fog adódni: bevezetve miden pozitív egész n esetén az

$$\boldsymbol{R} \ni x \mapsto p_n(x) := \frac{1}{n!}\left[x(M - Nx)\right]^n$$

polinomfüggvényt, ki fog derülni, hogy ha n elég nagy, akkor az $x_n := \int_0^\pi \sin \cdot p_n$ integrál értéke 1-nél kisebb pozitív egész, amihez persze elég azt igazolni, hogy az (x_n) sorozat olyan nullsorozat, amelynek minden tagja pozitív egész.

I) (x_n) nullsorozat. Valóban, abból, hogy a negatív főegyütthatójú másodfokú p_1 polinomfüggvény gyökei 0 és π, következik egyrészt az, hogy a $(0, \pi)$ intervallumon pozitív értékeket vesz fel, másrészt az, hogy legnagyobb értékét a $\pi/2 = M/2N$ helyen veszi fel, tehát ugyanez állítható mind a $p_n|_{[0,\pi]} = (1/n!)p_1^n|_{[0,\pi]}$, mind a $\sin \cdot p_n|_{[0,\pi]}$ függvényről is, továbbá az utóbbi függvény legnagyobb értéke $m^n/n!$, ahol $m := p_1(\pi/2)$, következésképp az integrálja felülről becsülhető a $\pi \cdot m^n/n!$ számmal, ami egy nullsorozat n-edik tagja.

II) Minden n-re $x_n > 0$. Valóban, az $f_n := p_n \cdot \sin|_{[0,\pi]}$ függvény folytonos a $\pi/2$ helyen, ezért az ottani értékének a felét ε-nal jelölve, választható olyan $\delta > 0$, melyre minden $x \in [\pi/2 - \delta, \pi/2 + \delta]$ pontban $\sin x p_n(x) > \varepsilon$, és minthogy a többi pontokban f_n értéke nemnegatív, az integrál intervallum szerinti additivitásából és integrandus szerinti monotonitásából ezt kapjuk:

$$\int\limits_0^\pi p_n(x)\sin x\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta} p_n(x)\sin x\,\mathrm{d}x \geq 2\delta\varepsilon > 0.$$

III) Minden n-re x_n egész szám. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy minden pozitív egész m számra, az (x_n) sorozatnak az m-nél nem nagyobb indexű tagjai egészek. Ez az állítás $m = 1$-re igaz, mert egyrészt a Newton–Leibniz-formula szerint $x_0 = 2$, másrészt a parciális integrálás tételét kétszer alkalmazva, mindkét alkalommal az első tényezőt deriválva s a második tényezőnek véve primitív függvényét,

$$x_1 = \int_0^\pi x(M - Nx)\sin x\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^\pi (M - 2Nx)\cos x\,\mathrm{d}x \;=\; 2N\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x \;=\; 4N\,.$$

Tegyük fel, hogy $x_0, x_1, \ldots x_m$ egészek, megmutatjuk, hogy x_{m+1} is egész. Bevezetve a $p := p_1$ jelölést, felhasználva az elemi számolással igazolható $[p'(x)]^2 = -4Np(x) + M^2$, $p"(x) = -2N$ azonosságokat és az összetett függvény deriválási szabályából adódó $p_n' = p_{n-1}p'$ egyenlőséget $((\mathrm{id}^n/n!)' = \mathrm{id}^{n-1}/(n-1)!)$, újabb két parciális integrálással ezt kapjuk:

$$x_{m+1} = \int_0^\pi p_{m+1}\sin = \int_0^\pi p_m p'\cos = -\int_0^\pi [p_m p" + p_{m-1}p'^2]\sin =$$

$$= \int_0^\pi [2Np_m + 4Npp_{m-1} - M^2 p_{m-1}]\sin = \int_0^\pi [2Np_m + 4Nmp_m - M^2 p_{m-1}]\sin =$$

$$= 2N(1 + 2m)x_m - M^2 x_{m-1};$$

márpedig az utóbbi szám egész, hiszen egészek szorzata és egészek különbsége egész. □

3. A Wallis-formula és két következménye

Emlékeztetünk a szemifaktoriálisok értelmezésére: pozitív egész n esetén $(2n-1)!!$ az első n páratlan pozitív egész szorzata, $(2n)!!$ pedig az első n páros pozitív egészé, továbbá $0!! := (-1)!! := 1$.

3.1. Lemma. *Minden nemnegatív egész n szám esetén*

$$a_{2n} := \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, \mathrm{d}x = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad a_{2n+1} := \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, \mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Bizonyítás. Teljes indukció: evidens, hogy $a_0 = \pi/2$, a Newton–Leibniz-tétel szerint pedig $a_1 = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$, vagyis $n = 0$ esetén mindkét állítás igaz. Bármely pozitív egész k-ra

$$a_{k+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{k+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{k-1} \cdot (1 - \cos^2) = a_{k-1} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} (k \sin^{k-1} \cos) \cdot (-\cos) =$$

—a parciális integrálás tételét alkalmazva—

$$= a_{k-1} - \frac{1}{k} \sin^k(\pi/2) \cos(\pi/2) + \frac{1}{k} \sin^k 0 \cos 0 - \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \sin^k \cdot \sin = a_{k-1} - \frac{1}{k} a_{k+1},$$

ahonnan $a_{k+1} = [k/(k+1)] a_{k-1}$, tehát

$$a_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} a_{2n} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \text{és} \qquad a_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} a_{2n+1} = \frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}.$$

□

3.2. Tétel (Wallis-formula).

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Bizonyítás. Minden $x \in [0, \pi/2]$ szám szinusza a $[0,1]$intervallumban van, ezért az $n \mapsto \sin^n x$ sorozat monoton fogyó. Ebből az integrandus szerinti monotonitás tétele alapján minden pozitív egész n-re (a lemmát és annak jelölését is használva)

$$a_{n+2} \le a_{n+1} \le a_n\,, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

adódik. Szorozzuk be az utóbbi egyenlőtlenség-pár oldalait a $(2n)!!/(2n-1)!!$ számmal:

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{[(2n)!!]^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} \le \frac{\pi}{2},$$

vagyis a tétel a közrefogási elvből következik. □

3.3. Tétel (Stirling-formula). *Az* $(n!)$ *sorozat „aszimptotikusan egyenlő” az* $n \mapsto (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$ *sorozattal, ami azt jelenti, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1, \qquad \textit{azaz} \qquad S_n := \frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}} \to \sqrt{2\pi}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás nehezebbik része, nevezetesen annak a bizonyítása, hogy az (S_n) sorozat konvergál valamilyen *pozitív* A számhoz, elhangzik az előadáson, ezért itt csak azt igazoljuk, hogy $A = \sqrt{2\pi}$. (W_n)-nel jelölve az előző tételben szereplő $\pi/2$-höz tartó (Wallis-féle) sorozatot,

$$A = \frac{A^2}{A} = \frac{\lim(S_n^2)}{\lim(S_{2n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n^2}{S_{2n}}$$

miatt elég azt igazolni, hogy az $n \mapsto S_n^2/S_{2n}$ sorozat előáll a $\sqrt{\pi/2}$-höz tartó $(\sqrt{W_n})$ sorozatnak és egy 2-höz tartó sorozatnak a szorzataként: $S_n^2/S_{2n} =$

$$= \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}(n!)^2}{n^{2n+1}(2n)!} = \frac{\sqrt{2}(2^n n!)(2^n n!)}{\sqrt{n}(2n-1)!!(2n)!!} = \frac{\sqrt{2}(2n)!!}{\sqrt{n}(2n-1)!!} = \sqrt{W_n}\frac{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{W_n}\sqrt{4+\frac{2}{n}}.$$

□

3.4. Tétel.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Bizonyítás. Először azt igazoljuk, hogy minden nemnegatív egész n-re a $[0,+\infty) \ni x \mapsto x^n e^{-x^2}$ függvény improprius értelemben integrálható. Valóban, abból, hogy $\lim_{t\to+\infty} t^{n+1}e^{-t} = 0$ és $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, a kompozíció határértékéről szóló második tételünk alapján következik, hogy $\lim_{x\to+\infty} x^{2n+2}e^{-x^2} = 0$, ezért van olyan $b \geq 1$, amelynél nagyobb x számok mindegyikére

$$\frac{x^{2n+2}}{e^{x^2}} < 1, \quad \text{s így} \quad \frac{x^n}{e^{x^2}} < \frac{1}{x^2}.$$

Állításunk tehát a majoráns kritériumból, s abból a tényből következik, hogy az

$$[1,+\infty) \ni x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

függvény improprius értelemben integrálható. Bevezetve az

$$I_n := \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad I := I_0$$

jelöléseket, jegyezzük meg, hogy $I_1 = 1/2$, hiszen $n = 1$ esetén egy primitív függvény az $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ függvény, melynek határértke a $+\infty$-ben 0, a 0 helyen $-1/2$.

Minden pozitív egész n-re, alkalmazva a parciális integrálás tételét, az alábbi egyszerű összefüggés nyerhető I_{n-1} és I_{n+1} között:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (-x^n)e^{-x^2}(-2x)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}I_{n-1},$$

tehát minden nemnegatív egész k-ra

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2} I_{2k-2} = \ldots = \frac{(2k-1)!!}{2^k} I \qquad \text{és} \qquad I_{2k+1} = kI_{2k-1} = \ldots = k! I_1 = \frac{k!}{2}.$$

Most a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség felhasználásával, ismét minden pozitív egész n-re, az $I_n^2 \leq I_{n-1} I_{n+1}$ egyenlőtlenséget igazoljuk:

$$I_n^2 = \left[\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) t^{\frac{n+1}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \right]^2 \leq$$

$$\leq \lim_{x \to +\infty} \left[\int_0^x t^{n-1} \exp(-t^2) \,\mathrm{d}t \int_0^x t^{n+1} \exp(-t^2) \,\mathrm{d}t \right] = I_{n-1} I_{n+1}.$$

Kombináljuk össze a most igazolt egyenlőtlenséget az előtte bizonyított rekurziós formulával: $I_n^2 \leq \frac{n}{2} I_{n-1}^2$, majd írjuk fel ezt is külön a páros, és külön a páratlan n-ekre:

$$I_{2k+1}^2 \leq \frac{2k+1}{2} I_{2k}^2, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{(k!)^2}{4} \leq \frac{(2k+1)[((2k-1)!!]^2}{2^{2k+1}} I^2,$$

$$I_{2k+2}^2 \leq (k+1) I_{2k+1}^2, \qquad \text{azaz} \qquad \left[\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\right]^2 I^2 \leq \frac{(k+1)!\,k!}{4},$$

ezek átrendezésével

$$W_k = \frac{1}{2k+1} \left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2 \leq 2I^2 \leq W_k \frac{2k+2}{2k+1}$$

adódik, így határértékekre áttérve a Wallis-formula alapján kapjuk, hogy $2I^2 = \pi/2$. □

4. A parciális integrálás általános tétele

4.1. Tétel. *Ha F és G az $f \in R[a,b]$, illetve $g \in R[a,b]$ függvény egy-egy integrálfüggvénye, akkor*

$$\int_a^b Gf = FG|_a^b - \int_a^b Fg.$$

Bizonyítás. Az integrálfüggvények folytonosak, tehát integrálhatók, integrálható függvények szorzata és összege integrálható, továbbá az összeg integrálja egyenlő az integrálok összegével, így elég azt igazolni, hogy

$$FG|_a^b = \int_a^b (Fg + Gf) \,,$$

az utóbbihoz pedig azt, hogy FG integrálfüggvénye az $Fg + Gf =: \varphi$ függvénynek. FG Lipschitz-függvény, hiszen ha K és L az F, illetve a G függvény egy-egy Lipschitz-konstansa,

A és B pedig az $|f|$, illetve a $|g|$ függvény értékkészletének felső határa, akkor bármely $a \leq x < y \leq b$ esetén

$$\left|\frac{f(y)g(y) - f(x)g(x)}{y - x}\right| = \left|\frac{f(y)g(y) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(x)g(x)}{y - x}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| |g(y)| + |f(x)| \left|\frac{g(y) - g(x)}{y - x}\right| \leq KB + AL\,.$$

Továbbá az FG függvény a Lebesgue-nullmértékű $\mathrm{dis}(f) \cup \mathrm{dis}(g)$ halmaz pontjain kívül minden $x \in (a, b)$ pontban differenciálható és $(FG)'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x) = \varphi(x)$, tehát az integrálható függvény integrálfüggvényeinek jellemzéséről szóló tételünk szerint FG valóban integrálfüggvénye φ-nek. $\square$