2. Mulțimi

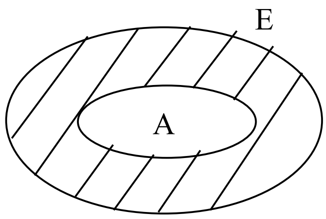
2.1. Operații cu mulțimi

Considerăm cunoscute definițiile reuniunii, intersecției și diferenței a două mulțimi:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$$
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$$

Complementara unei mulțimi. Fie $A \subseteq E$. Se numeşte complementara mulțimii *A* în raport cu *E*, mulțimea notată $C_E A$, unde

$$C_E A = E \setminus A = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin E\}.$$



Proprietăți.

1) $A \cap C_E A = \varnothing$;

2) $A \cup C_E A = E$;

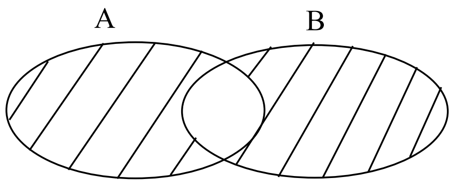
3) $C_E(C_E A) = A$

4) $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$;

5) $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

Diferența simetrică. Se numeşte diferența simetrică a două mulțimi *A* şi *B*, mulțimea elementelor lor necomune. Notăm

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Proprietăți

1) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

2) $A \Delta A = \varnothing$.

Produsul cartezian. Se numeşte produsul cartezian a două mulțimi *A* şi *B*, mulțimea de perechi (a,b), $a \in A$ şi $b \in B$.

Notăm $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$.

Model. Fie $A = \{x \mid x = 2n, n < 5\}$ şi $B = \{y \mid y = 6k, k < 3\}$.

Să se determine $A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B,\ B\setminus A,\ A\Delta B,\ A\times B$.

Soluție. Avem $A=\{0,2,4,6,8\}$ și $B=\{0,6,12\}$. Folosind definițiile operațiilor, se obține $A\cup B=\{0,2,4,6,8,12\}$, $A\cap B=\{0,6\}$, $A\setminus B=\{2,4,8\}$, $B\setminus A=\{12\}$, $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\{2,4,8,12\}$ sau

$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=\{2,4,8,12\}$ și

$A\times B=\{(0,0),(0,6),(0,12),(2,0),(2,6),(2,12),(4,0),(4,6),(4,12),(6,0),(6,6),$ $(6,12),(8,0),(8,6),(8,12)\}$.

Operațiile cu mulțimi au următoarele proprietăți:

- Intersecția, reuniunea, diferența simetrică a mulțimilor este comutativă

$$A\cap B=B\cap A,\quad A\cup B=B\cup A,\quad A\Delta B=B\Delta A$$

- Diferența și produsul cartezian nu sunt comutative:

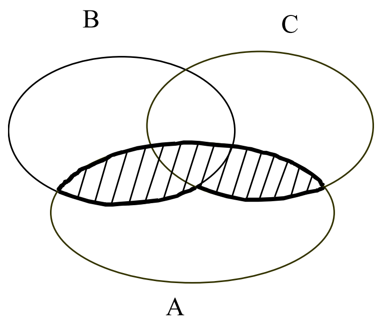
$$A\setminus B\neq B\setminus A \text{ și } A\times B\neq B\times A$$

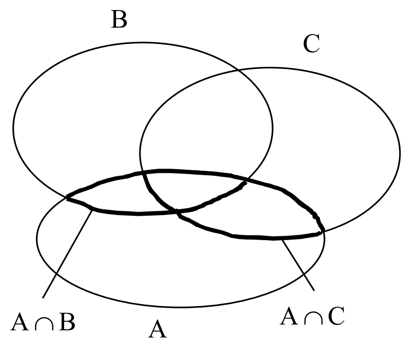
- Intersecția, reuniunea și diferența simetrică sunt asociative:

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),$$
$$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$$

- Intersecția este distributivă față de reuniune:

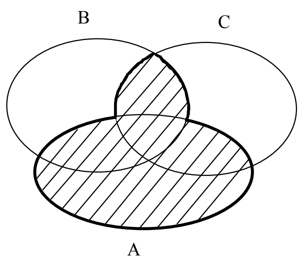
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

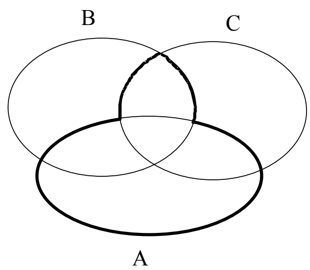




- Reuniunea este distributivă față de intersecție:

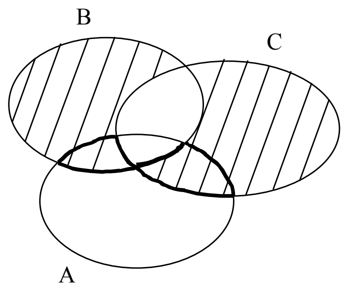
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

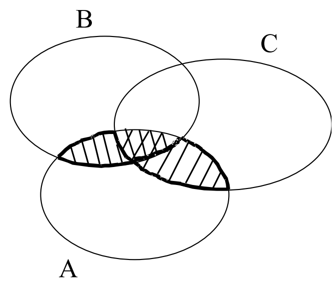




- Intersecția este distributivă față de diferența simetrică

$$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$$





Cardinalul unei mulțimi finite reprezintă numărul elementelor din acea mulțime. Fie dată o mulțime *A*, notăm cardinalul său prin $cardA$.

Proprietăți

1) $card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$

2) $card(A \cup B \cup C) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B) -$
$- card(B \cap C) - card(A \cap C) + card(A \cap B \cap C)$

3) $card(A \setminus B) = cardA - card(A \cap B)$

4) $card(A \times B) = cardA \cdot cardB$

Numărul submulțimilor unei mulțimi cu *n* elemente este 2^n.

Probleme rezolvate

R2.1.1. Fie $E = \{0,1\}$. Determinați toate submulțimile acestei mulțimi și apoi arătați că reuniunea, intersecția și diferența simetrică a oricăror două submulțimi ale lui *E* este tot o submulțime a lui *E*.

Soluție. $cardE = 2$, deci *E* are 2^2=4 submulțimi: $\varnothing$, $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, *E*.

În tabelele următoare este reprezentată reuniunea, intersecția și diferența simetrică a oricăror două submulțimi.

$\cup$	$\varnothing$	A	B	E
$\varnothing$	$\varnothing$	A	B	E
A	A	A	E	E
B	B	E	B	E
E	E	E	E	E

$\cap$	$\varnothing$	A	B	E
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
A	$\varnothing$	A	$\varnothing$	A
B	$\varnothing$	$\varnothing$	B	B
E	$\varnothing$	A	B	E

Δ	$\varnothing$	A	B	E
$\varnothing$	$\varnothing$	A	B	E
A	A	$\varnothing$	E	B
B	B	E	$\varnothing$	A
E	E	B	A	$\varnothing$

Remarcă. Mulțimea submulțimilor unei mulțimi *E* se mai numește și mulțimea părților mulțimii *E* și se notează cu $P(E)$. Dacă *E* are *n* elemente, atunci $P(E)$ are 2^n elemente $(n \in \mathbf{N})$.

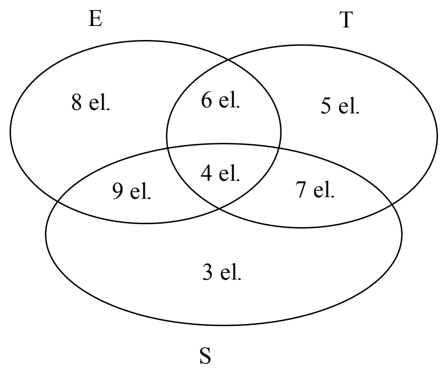
R2.1.2. Dacă $card(A \cup B) = 20$, $cardA = 16$, $cardB = 17$, să se determine $card(A \cap B)$, $card(A \setminus B)$, $card(B \setminus A)$, $card(A \Delta B)$.

Soluție. Avem $card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$, deci $card(A \cap B) = 16 + 17 - 20 = 13$. Din $card(A \setminus B) = cardA - card(A \cap B)$ și

$card(B \setminus A) = cardB \setminus (cardA \cap B)$, se obține $card(A \setminus B) = 3$ şi $card(B \setminus A) = 4$. Atunci $card(A \Delta B) = 3 + 4 = 7$.

R2.1.3. În clasa a V-a sunt în total 53 de elevi. 27 dintre ei au fost în excursie, 22 elevi au fost la teatru, iar 23 au participat la serata de poezie. 11 dintre ei au fost şi la serată şi la teatru, 10 au fost şi la teatru şi în excursie, 13 au participat şi în excursie şi la serată, iar 4 elevi au participat la toate cele trei acțiuni. Câți elevi nu au participat la nici una din activități?

Soluție. Noțiunile învățate permit utilizarea diagramelor Venn-Euler la rezolvarea problemelor. Reprezentăm prin diagrame mulțimea *E* a elevilor care au fost în excursie, respectiv prin *T* şi *S* mulțimea elevilor care au fost la teatru, respectiv la serată. Din enunțul problemei rezultă: $cardE = 27$, $cardT = 22$, $cardS = 23$, $card(E \cap T \cap S) = 4$.



Indicăm în figura numărul elementelor fiecărei mulțimi:

1) 11-4=7 este numărul elevilor care au fost la teatru şi la serată, dar nu au fost în excursie.

2) 13-4=9 este numărul elevilor care au fost în excursie şi la serată, dar nu au fost la teatru.

3) 10-4=6 este numărul elevilor care au fost la teatru şi în excursie, dar nu au fost la serată.

4) 27-(6+4+9)=8 elevi au fost numai în excursie.

5) 22-(6+4+7)=5 elevi au fost numai la teatru.

6) 23-(9+4+7)=3 elevi au fost numai la serată.

7) 53-(8+6+5+7+4+9+3)=11 elevi nu au fost la nici una din activități.

R2.1.4. Într-o sală sunt 80 de persoane. Fiecărei persoane i se distribuie cel mult o revistă şi un ziar. S-au distribuit 50 de ziare şi 47 de reviste.

a) Care este cel mai mic număr de persoane care pot primi în acelaşi timp un ziar şi o revistă?

b) Care este numărul maxim de persoane care pot primi în acelaşi timp un ziar şi o revistă?

Soluție. Reprezentăm mulțimea *Z* a persoanelor care primesc ziare şi mulțimea *R* a persoanelor care primesc reviste.

a) Întrebarea din enunț poate fi interpretată matematic astfel: intersecția mulțimilor *Z* şi *R* trebuie să conțină un număr minim de elemente. Aceasta se întâmplă în cazul în care fiecare din cele 80 persoane va primi un ziar sau o revistă. Deoarece numărul persoanelor este mai mic decât numărul total de ziare şi reviste, urmează că unele persoane vor primi şi câte o revistă şi câte un ziar. Deci, numărul minim de persoane care pot primi atât un ziar cât şi o revistă este 47+50-80=17. $card(Z \cap R) = 17$.

b) Numărul maxim de persoane care pot primi în acelaşi timp un ziar şi o revistă se determină în cazul în care fiecare persoană care primeşte o revistă primeşte şi un ziar. Numărul maxim de elemente al intersecției mulțimilor este 47. $card(Z \cap R) = 47$.

Răspuns: a) 17 persoane; b) 47 persoane.

R2.1.5. Fie *A* o mulțime de numere naturale cu proprietățile:

a) $80 \in A$; b) Dacă $7x + 3 \in A$, atunci $x \in A$;

c) Dacă $x \in A$, atunci $\{7x + 4, 7x + 5\} \subset A$.

Arătați că 4001 şi 4002 sunt elemente ale lui *A*.

Soluție. Dacă $80 \in A$ şi 80=7·11+3, rezultă conform condiției b) că $11 \in A$. Dacă $11 \in A$, atunci $\{7 \cdot 11 + 4, 7 \cdot 11 + 5\} \subset A$, conform condiției b). Avem $\{81, 82\} \subset A$. Dacă $81 \in A$ atunci, conform condiției b), $\{7 \cdot 81 + 4, 7 \cdot 81 + 5\} \subset A$, adică $\{571, 572\} \subset A$. Dacă $571 \in A$, atunci conform condiției b), $\{7 \cdot 571 + 4, 7 \cdot 571 + 5\} \subset A$, adică $\{4001, 4002\} \subset A$.

R2.1.6. Fie mulțimea $X = \{1, 3, 5, 7, ..., 2n + 1, ...\}$. Construim $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3, 5\}$, $A_3 = \{7, 9, 11\}$,...

a) Scrieți A_4 şi A_5.

b) Calculați suma elementelor mulțimii A_{20}.

Soluție. a) Avem $A_4 = \{13, 15, 17, 19\}$ şi $A_5 = \{21, 23, 25, 27, 29\}$.

b) Pentru scrierea elementelor mulțimilor $A_1, A_2, ..., A_{19}$ s-au folosit 1+2+3+...+19 numere impare, adică 19·20:2=190 numere impare. Mulțimea A_{20} are 20 elemente şi primul element este al 191-lea număr impar, adică 2·190+1=381. Ultimul element al 20-lea din mulțimea A_{20} este 2·209+1=419. Avem: $A_{20} = \{381, 383, ..., 419\}$. Suma elementelor mulțimii A_{20} este (381+419)·20:2, adică 8000.

R2.1.7. Ce concluzie se poate trage din afirmațiile următoare?

a) Toți rățoii marcați cu *B* sunt ai doamnei Bond.

b) Rățoii nu au niciodată guler pe gât, decât dacă sunt marcați cu *B*.

c) Doamna Bond nu are rățoi cenuşii.

(Lewis Carroll)

Soluție. Să notăm cu *M* mulțimea tuturor rățoilor existenți la un moment dat, *B*={rățoii marcați cu *B*}, *G*={rățoii cu guler} şi *C*={rățoii cenuşii}.

În limbajul teoriei mulțimilor, vom putea identifica mulțimea *B*, ținând seama de condiția a), cu mulțimea rățoilor aparținând doamnei Bond.

Condiția b) se poate scrie $C_M B \subset C_M G$, fiindcă cei care nu sunt în *B* nu au în mod sigur guler, dar şi în *B* pot exista rățoi fără guler. Deducem $G \subset B$, deci mulțimea celor cu guler este inclusă în cea a celor marcați cu *B*.

Dar, din condiția c) deducem $B \cap C = \varnothing$, deci *B* şi *C* sunt disjuncte. În consecință, $G \cap C = \varnothing$, deci *G* şi *C* sunt disjuncte şi astfel concluzia este: "nici un rățoi cenuşiu nu are guler".

Comentariu. Problema pare a fi un nonsens, privită prin prisma limbajului curent. Ce concluzie se poate trage din faptul că doamna Bond nu are rățoi cenuşii şi rățoii nu poartă guler decât dacă sunt marcați cu *B*; deci dacă sunt ai acestei doamne?

Totuşi, analizând mai bine avertismentul că doamna Bond nu are rățoi cenuşii şi că rățoii care au guler sunt dintre rățoii acesteia, rezultă că rățoii cenuşii nu pot avea guler.

Această analiză verbală este modelată prin relația de incluziune, pe de o parte şi prin cea de disjuncție, pe de altă parte.

Problema pare o glumă paradoxală, dar constituie un exemplu frapant de logică a unor propoziții paradoxale.

2.2. Determinarea elementelor unei mulțimi în condiții date

Model. Să se determine mulțimile *A* şi *B*, ştiind că îndeplinesc, în acelaşi timp, condițiile:

a) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

b) $A \cap B = \{3,5,7\}$

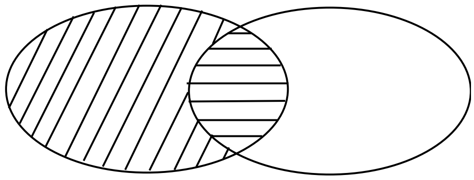
c) $A \setminus B = \{1,2,6\}$

Soluție. Din condiția b) rezultă conform definiției intersecției a două mulțimi că elementele 3, 5, 7 sunt comune, deci $\{3,5,7\} \subset A$ şi $\{3,5,7\} \subset B$. Din condiția c) rezultă, conform definiției diferenței $A \setminus B$, că elementele $1,2,6 \in A$ şi $1,2,6 \notin B$. În reuniunea celor două mulțimi este şi elementul 4; folosind b) şi c) rezultă că 4 nu este element comun, nu aparține mulțimii $A \setminus B$, deci 4 este element al lui *B* şi nu este element al lui *A*. Rezultă că:

$$A = \{1,2,3,5,6,7\} \text{ şi } B = \{3,4,5,7\}.$$

Verificare: $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A \cap B = \{3,5,7\}$ şi $A \setminus B = \{1,2,6\}$.

Remarcă. O altă soluție poate fi dată plecând de la următoarea proprietate: oricare ar fi mulțimile *X* şi *Y*, avem $X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y)$. Se verifică uşor printr-o diagramă:



Atunci $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)=\{1,2,6\}\cup\{3,5,7\}=\{1,2,3,5,6,7\}$ şi $B=\{3,4,5,7\}$ (deoarece $B\setminus A=\{4\}$).

Probleme rezolvate

R2.2.1. Să se determine mulţimile *A* şi *B*, ştiind că îndeplinesc în acelaşi timp condiţiile:

a) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

b) $A\cap B=\{3,4,5,6\}$

c) $A\cap\{6,7,8,9\}=\{6,7\}$

d) $B\cap\{1,2\}\neq\varnothing$

Soluţie. Din condiţia b) rezultă că elementele 3, 4, 5, 6 sunt comune, deci $\{3,4,5,6\}\subset A$ şi $\{3,4,5,6\}\subset B$.

Din condiţia c) rezultă că elementele $6,7\in A$.

Din condiţia d), care se poate transcrie: $B\cap\{1,2\}=\{1\}$ sau $B\cap\{1,2\}=\{2\}$ sau $B\cap\{1,2\}=\{1,2\}$, se deduce că $1\in B$ sau $2\in B$ sau $\{1,2\}\subset B$.

Problema are 3 soluţii:

I. $A=\{2,3,4,5,6,7\}$ şi $B=\{1,3,4,5,6\}$

II. $A=\{1,3,4,5,6,7\}$ şi $B=\{2,3,4,5,6\}$

III. $A=\{3,4,5,6,7\}$ şi $B=\{1,2,3,4,5,6\}$

R2.2.2. Să se determine mulţimile *A* şi *B*, ştiind că îndeplinesc simultan condiţiile:

a) $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$

b) $A\cap B=\{1,2\}$

c) $A\setminus B$ are un element

d) Suma elementelor din *B* este număr par.

Soluţie. Din condiţia b) rezultă că elementele 1 şi 2 sunt comune, deci $\{1,2\}\subset A$ şi $\{1,2\}\subset B$. Din condiţia a) şi c) rezultă că dintre elementele 3, 4, 5 un element aparţine lui *A* şi celelalte două aparţin lui *B*. Din condiţia d) şi având 1+2+3+4=10, 1+2+4+5=12, dar 1+2+3+5=11, rezultă că $\{3,4\}\subset B$ sau $\{4,5\}\subset B$. Deci, problema are două soluţii:

I. $A=\{1,2,5\}, B=\{1,2,3,4\}$

II. $A=\{1,2,3\}, B=\{1,2,4,5\}$

R2.2.3. Să se determine mulțimile *A* şi *B*, ştiind că îndeplinesc simultan condițiile:

a) $A\cup B=\{0,1,2,3,4,5\}$

b) $C\cup D=\{6,7,8,9,10,11\}$

c) $(A\cap B)\times(C\cap D)=\{(2,8),(2,9),(3,8),(3,9)\}$

d) $(A\setminus B)\times(C\setminus D)=\{(0,6),(0,7),(1,6),(1,7)\}$

Soluție. Din condițiile c) şi d) şi ținând cont de definiția produsului cartezian a două mulțimi, rezultă că:

$$A\cap B=\{2,3\},\ C\cap D=\{8,9\},\ A\setminus B=\{0,1\} \text{ şi } C\setminus D=\{6,7\}.$$

În continuare se pune problema determinării mulțimilor *A* şi *B* care îndeplinesc simultan condițiile:

$$A\cup B=\{0,1,2,3,4,5\},\ A\cap B=\{2,3\} \text{ şi } A\setminus B=\{0,1\},$$

şi a mulțimilor *C* şi *D*, care îndeplinesc simultan condițiile:

$$C\cup D=\{6,7,8,9,10\},\ C\cap D=\{8,9\} \text{ şi } C\setminus D=\{6,7\}.$$

Folosind $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$, obținem $A=\{0,1,2,3\}$ şi atunci $B=\{2,3,4,5\}$. În mod analog, $C=\{6,7,8,9\}$ şi $D=\{8,9,10\}$.

R2.2.4. Să se determine mulțimile *A, B, C*, dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A\cup B\cup C=\{2,4,6,8,10,12\}$

b) $A\cap B=\{2,4\}$

c) $B\cap C=\{2,6,8\}$

d) $A\cap C=\{2,10\}$

Soluție. Folosind definiția intersecției a două mulțimi, din condițiile b), c), d) rezultă că $\{2,4,10\}\subset A$, $\{2,4,6,8\}\subset B$ şi $\{2,6,8,10\}\subset C$.

Din condiția a) rezultă că elementul 12 trebuie să aparțină unei mulțimi, dar folosind b), c), d) rezultă că 12 nu poate fi element comun a două mulțimi, deci problema are 3 soluții.

I. $A=\{2,4,10,12\}, B=\{2,4,6,8\}, C=\{2,6,8,10\}$

II. $A=\{2,4,10\}, B=\{2,4,6,8,12\}, C=\{2,6,8,10\}$

III. $A=\{2,4,10\}, B=\{2,4,6,8\}, C=\{2,6,8,10,12\}$.

R2.2.5. Să se determine mulțimile *A, B, C*, dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$

b) $A\cap B\cap C=\{5\}$

c) $A\setminus B=\{1,3,6\}$

d) $A\setminus C=\{1,2,4\}$.

Soluție. Din condiția b) rezultă că 5 este element comun al celor trei mulțimi, deci $3 \in A, 3 \in B, 3 \in C$.

Folosind definiția diferenței a două mulțimi din condițiile b) şi c) rezultă că $\{1,3,6\} \subset A, \{1,3,6\} \not\subset B, \{1,2,4\} \subset A, \{1,2,4\} \not\subset C$.

Din condiția c) rezultă că elementele 2 şi 4 sunt comune mulțimilor *A* şi *B* (ele aparțin mulțimii *A* din condiția d), dar nu aparțin mulțimii $A \setminus B$).

Din condiția d) rezultă că elementele 3 şi 6 sunt comune mulțimilor *A* şi *C* (ele aparțin mulțimii *A* din condiția c), dar nu aparțin mulțimii $A \setminus C$). Se obține:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\},\ B = \{2,4,5\},\ C = \{3,5,6\}.$$

R2.2.6. Să se determine *n* număr natural, ştiind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $n \in A$

b) $A \cap B = \{3,4\}$

c) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,n\}$

d) $cardA = cardB$

e) suma elementelor necomune ale celor două mulțimi este aceeaşi.

Soluție. Din condiția b) rezultă că elementele 3 şi 4 sunt comune celor două mulțimi, $\{3,4\} \subset A$ şi $\{3,4\} \subset B$. Se ştie că $n \in A$, iar celelalte elemente 1, 2, 5 trebuie să îndeplinească: $n+1=2+5$ sau $n+2=1+5$ sau $n+5=1+2$, deci $n=6$ sau $n=4$, imposibil deoarece deja $4 \in A$ şi ultima variantă este imposibilă. Deci, $n=6$ şi $A=\{3,4,6,1\}$, $B=\{3,4,2,5\}$.