3. Divizibilitatea în mulţimea numerelor naturale

3.1. Criteriile de divizibilitate cu 10, 2, 5, 100, 4, 25, 9, 3, 8, 7, 11, 13, 27, 37

3.1.1. Criteriul general de divizibilitate a numerelor naturale

Prin criteriu de divizibilitate a unui număr natural *m* printr-un număr natural *d* se înţelege o condiţie necesară şi suficientă pentru ca numărul *m* să se împartă exact prin numărul *d* (notaţie: $m = M(d)$).

În sistemul zecimal, numărul $m = \overline{a_n a_{n-1} ... a_{k+1} a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}$ se poate scrie în mod unic sub forma:

$m = a_n .10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_{k+1}.10^{k+1} + a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$

unde a_n , $a_{n-1}, ..., a_0 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$cu $a_n \neq 0$, iar numărul $d<m$ se poate scrie (scrierea nu este unică) sub forma de $d=10^k+q$, unde $k \le n$ este număr natural, iar q este număr natural .

3.1.2.Criteriul general de divizibilitate a unui număr natural *m* prin numărul natural *d*

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca numărul natural *m* să fie divizibil prin numărul natural d este ca suma:

$S = \overline{a_{k-1}a_{k-2}...a_1.a_0} - q \overline{a_{2k-1}.a_{2k-2}.....a_{k+1}a_k} + q^2 \overline{a_{3k-1}a_{3k-2}...a_{2k+1}a_{2k}} -$
$- q^3 \overline{a_{4k-1}a_{4k-2}...a_{3k+1}a_{3k}}$

Să fie multiplu de *d*, unde $d = 10^k+q$, $k \le n$ este un număr natural iar q este un număr natural .

Demonstraţie:

Numărul m se poate scrie astfel:

$m = a_n .10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_{k+1}.10^{k+1} + a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0 = = a_{k-1}.10^{k-1} + a_{k-2}.10^{k-2} + ... + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0) + 10^k . (a_{2k-1}.10^{k-1} + a_{2k-2}.10^{k-2} + +... + a_{k+2}.10^{k+2} + +a_{k+1}.10 + a_k) + 10^{2k}(a_{3k-1}.10^{k-1} + a_{3k-2}.10^{k-2} + ... + a_{2k+2}.10^2 + a_{2k+1}.10 + a_{2k}) + ... = \overline{a_{k-1}a_{k-2}...a_1 a_0} + 10^k . \overline{a_{2k-1}.a_{2k-2}.....a_{k+1}a_k} + 10^{2k} \overline{a_{3k-1}a_{3k-2}...a_{2k+1}a_{2k}} + ...$
$= \overline{a_{k-1}a_{k-2}...a_1 a_0} + [(10^k+q)-q] . \overline{a_{2k-1}a_{2k-2}...a_{k+1}a_k} + +[(10^{2k}-q^2) + q^2] \overline{a_{3k-1}a_{3k-2}...a_{2k+1}a_{2k}} + [(10^{3k}+p^3) -p^3] \overline{a_{4k-1}a_{4k-2}...a_{3k+1}a_{3k}} + ... =$
$= M(10^k+q)+s = M(d)+s$ ceea ce trebuia demonstrat. În demonstraţie s-au folosit proprietăţile: $10^{2lk}-q^{2l}=M(10^k+q)$ şi $10^{(2l+1)k}+q^{2l+1}=M(10^k+q)$, $\forall$ $1 \in \mathbf{N}$.

3.1.3. Aplicaţii ale criteriului general de divizibilitate

3.1.3.1. Criteriul de divizibilitate prin 10, respectiv prin 2 sau 5

Dacă se alege q=0 şi k=1 în criteriul general de divizibilitate rezultă:

Pentru ca un număr natural m să fie divizibil prin 10*, respectiv prin* 2 *sau* 5 *este necesar şi suficient ca ultima cifră a lui să fie* 0*, respectiv ca ultima cifră a lui n să fie divizibilă* *prin* 2 *sau* 5. Prin urmare numerele naturale divizibile cu 10 sunt de forma m=$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 0}$, numerele naturale divizibile cu 2 au ultima cifră 0, 2, 4, 6, 8 iar numerele naturale divizibile cu 5 au ultima cifră 0 sau 5.

3.1.3.2. Criteriul de divizibilitate prin 100, respective prin 4 sau 25

Dacă se alege q=0 şi k=2 în criteriul general de divizibilitate rezultă:

Pentru ca un număr natural m să fie divizibil prin 100, *respectiv* 4 *sau* 25 *este necesar şi suficient ca ultimele două cifre ale lui m să fie* 0, *respectiv ca numărul format din ultimele două cifre ale lui m să fie divizibile prin* 4 *sau* 25.

Numerele naturale divizibile cu 100 au forma:

$m=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_3 a_2 00}$ iar numerele naturale divizibile cu 25 au una dintre formele $m_1=\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 00}$, $m_2=\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 25}$, $m_3=\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 50}$, sau $m_4=\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 75}$.

3.1.3.3. Criteriul de divizibilitate prin 9, respectiv 3

Dacă se alege q=-1 şi k=1 în criteriul general de divizibilitate rezultă:

Pentru ca un număr natural m=$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 0}$ *să fie divizibil prin* 9 *respectiv prin divizorul său* 3 *este necesar şi suficient ca suma* $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ *să fie divizibilă prin* 9 *respectiv* 3.

Exemplu: 139977=*M*9 deoarece:

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$=7+7+9+9+3+1=36=*M*9

3.1.3.4. Criteriul de divizibilitate prin 11

Dacă se alege q =1 şi k =1 în criteriul general de divizibilitate rezultă:

Pentru ca numărul natural m=$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 0}$ *să fie divizibil prin* 11 *este necesar şi suficient ca s=*$a_0 - a_1 + .a_2 - a_3 + a_4 - \ldots$ *să fie divizibilă prin* 11.

Exemplu: 563618=*M*11 deoarece $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = (a_0+a_2+a_4) - (a_1+a_3+a_5)$ = (8+6+6) – (1+3+5)=20-9=11=M11

3.1.3.5. Criteriul de divizibilitate prin 8

Dacă se alege q=-2 şi k=1 în criteriul de divizibilitate rezultă:

Pentru ca numărul natural m=$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ *să fie divizibil prin* 8 *este necesar şi suficient ca* $a_0 + 2a_1 + 4a_2$ *să fie divizibilă prin* 8 .

Observaţie: $a_0 + 2a_1 + 4a_2 = a_0 + 2(a_1 + 2a_2) = a_0 + 2(a_1 + 10a_2 - 8a_2) =$

$= a_0 + 2(a_1 + 10a_2) - 2 \cdot 8 a_2 = \{[a_0 + 2\overline{a_2 a_1}] - 2 \cdot 8 a_2\} \vdots 8$

şi prin urmare un număr natural este divizibil prin 8 dacă şi numai dacă suma dintre dublul numărului de două cifre, format din cifra sutelor şi cifra zecilor, plus numai numărul reprezentat de cifra unităţilor este un număr divizibil prin 8.

Exemplu: $453864 \vdots 8$?

Soluţie:

a) $a_0=4$, $a_1=6$, $a_2=8$.

$a_0+2a_1+4a_2=48 \vdots 8 \Rightarrow 453864 \vdots 8$

b) Avem:

$2 \cdot 86+4=172+4=176$

$2 \cdot 17+6=40 \vdots 8$ rezultă că $453864 \vdots 8$.

3.1.4. Criterii de divizibilitate cu 7,11,13,27 şi 37

3.1.4.1. Criteriul de divizibilitate cu 7,11 sau 13

Numărul natural m=$\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0}$ se divide cu 7,11 sau 13 dacă şi numai dacă $\overline{a_n a_{n-1} ... a_4 a_3}$ - $\overline{a_2 a_1 a_0}$ se divide cu 7,11, respectiv 13.

Demonstraţie :

Avem

$$m= a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 10^2 + 10^3 \cdot \left(a_3 + a_4 \cdot 10 + \cdots + a_n \cdot 10^{n-3}\right) =$$
$$= \overline{a_2 a_1 a_0} + (1001-1) \cdot \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_4 a_3} =$$
$$= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \cdot \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_4 a_3} - (\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_4 a_3} - \overline{a_2 a_1 a_0})$$

şi deci pentru $d \in \{ 7, 11, 13 \}$ avem $m \vdots d \Leftrightarrow (\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_4 a_3} - \overline{a_2 a_1 a_0}) \vdots d$.

3.1.4.2. Criteriul de divizibilitate cu 27 sau 37

Numărul natural m=$\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0}$ se divide cu 27sau 37 dacă şi numai dacă $\overline{a_n a_{n-1} ... a_4 a_3}$ + $\overline{a_2 a_1 a_0}$ se divide cu 27 respectiv 13.

Exemplu: Să se decidă dacă numărul 1 236 133 este sau nu divizibil cu 37.

Soluţie: Avem: 1+ 236 + 133 = 370. Cum $370 \vdots 37$, numărul dat este divizibil cu 37.

3.1.5. Teoreme de divizibilitate

Teorema 1: Dacă fiecare termen al unei sume/diferenţe este divizibil prin acelaşi număr, atunci şi suma/diferenţa se divide prin acel număr.

Teorema 2: Într-o sumă/diferenţă de doi termeni, dacă suma/diferenţa şi unul din termeni se divid prin acelaşi număr, atunci şi celălalt termen se divide prin numărul dat.

Teorema 3: Pentru ca un produs să fie divizibil printr-un număr este suficient ca unul din factorii produsului să fie divizibil cu acel număr.
Teorema 4: Într-o împărțire cu rest, dacă deîmpărțitul şi împărțitorul se divid printr-un număr dat, atunci şi restul se divide prin acel număr.

3.1.6. Proprietăți:
(**r**) Relația de divizibilitate este reflexivă: *Orice număr se divide cu el însuşi.*
(**a**) Relația de divizibilitate este antisimetrică: *Dacă a divide pe b şi b divide pe a atunci a = b.*
(**t**) Relația de divizibilitate este tranzitivă: *Dacă a divide pe b şi b divide pe c, atunci a divide pe c.*

3.1.7. Observație (*Criteriul de divizibilitate cu* 19)
Un număr este divizibil cu 19 dacă şi numai dacă numărul zecilor numărului adunat cu de două ori numărul reprezentat de cifra unităților este un număr divizibil cu 19.
Exemplu: Să se decidă dacă numărul 47 063 este sau nu divizibil cu 19.
Soluție: Avem: $4\,706 + 3\cdot 2 = 4\,712$
$471 + 2 \cdot 2 = 475$
$47 + 5 \cdot 2 = 57$
$5 + 7 \cdot 2 = 19.$
Cum $19 \vdots 19$, numărul dat este divizibil cu 19.

3.2. Numărul şi suma divizorilor unui număr natural. număr perfect

3.2.1. Notație: Pentru un număr natural *n* vom nota cu $\tau(n)$ *numărul divizorilor săi naturali.*

3.2.2. Teoremă:
Pentru $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ avem relația $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_k + 1)$.

3.2.3. Exemple:
(1) Determinați numărul divizorilor numărului 360. Scrieți prin enumerarea elementelor, mulțimea D_{360} .

Soluție:
Din numărul divizorilor lui 360 este (3+1)·(2+1)·(1+1) rezultă că 360 are 24 de divizori.

(2) Câți divizori, în mulțimea numerelor naturale, are numărul $2^{10}\cdot 5^9 + 2^9\cdot 5^8$?

Soluție:

Numărul se scrie $2^9 \cdot 5^8 \cdot 11$ şi numărul are 180 de divizori.

(3) Determinați toate numerele naturale de forma $a = 2^m \cdot 3^n$, unde m şi n sunt numere naturale, care au exact 8 divizori.

Soluție:

Din $(m+1)\cdot(n+1) = 8$, găsim: 3^7, 54, 24, 2^7.

(4) Determinați toate numerele naturale divizibile cu 10 şi care au 4 divizori.

(G.M. 2-3/1993)

Soluție:

Din $A = a^m \cdot b^n \cdot 2^x \cdot 5^y$ şi $(m+1)(n+1)(x+1)(y+1) = 4$ şi $x + 1 \geq 2$, $y + 1 \geq 2$, obținem: $m = 0$, $n = 0$, $x = 1$, $y = 1 \Rightarrow A = 10$.

3.2.4. Notație: Pentru un număr natural *n* vom nota cu $\sigma(n)$ *suma divizorilor săi naturali.*

3.2.5. Teoremă:

Pentru $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ avem relația

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

3.2.6. Exemplu: Să se determine suma divizorilor naturali ai numărului natural 28.

Soluție: Suma divizorilor naturali ai numărului natural este: 1+2+4+7+14+28=56.

3.2.7. Definiție: Un număr natural se numeşte *perfect* dacă $\sigma(n) = 2 \cdot n$.

3.2.8. Observație: Numerele perfecte au fost studiate încă din antichitate când erau cunoscute numerele perfecte mai mici decât 10 000 şi anume: 6, 28, 496, 8 128.

3.3. Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.)

Fie numerele 12 şi 18. Există numere naturale, divizori comuni ai celor două numere ?

Avem: $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

Divizorii comuni sunt dați de $D_{12;\,18} = D_{12} \cap D_{18}$.

Avem: $D_{12} \cap D_{18} = \{1, 2, 3, 6\}$.

3.3.1. Definiție: Cel mai mare dintre divizorii comuni ai mai multor numere date se numeşte *cel mai mare divizor comun*.

Notăm: c.m.m.d.c. (12;18) = 6 sau, mai simplu: (12;18) = 6
citim: *cel mai mare divizor comun al numerelor* 12 şi 18 este 6.

Cel mai mare divizor comun a două sau mai multe numere naturale date reprezintă cel mai mare număr natural care divide fiecare din numerele date.

3.3.2.Exerciții:

1. Să se scrie prin enumerarea elementelor: $D_{6;\,10}$; $D_{3;\,21}$; $D_{15;\,20}$; $D_{12;\,25}$; $D_{4;\,27}$.

2. Să se determine cel mai mare divizor comun al numerelor: a) 9 şi 21; b) 20 şi 16; c) 12 şi 39; d) 15; 25 şi 30; e) 18; 9 şi 27; f) 14 şi 45; g) 8; 12 şi 33.

3. Să se determine cel mai mare divizor comun al numerelor: a) 4 şi 12; b) 27 şi 9; c) 20; 10 şi 40; d) 12; 6 şi 24; e) 15 şi 45; f) 81 şi 27; g) 42; 2 şi 30; h) 33; 66 şi 11.

Analizând exercițiul 3 reținem:

Dacă un număr din cele date este divizor al fiecăruia din celelalte numere, atunci acesta este cel mai mare divizor comun al numerelor date.

4. Folosind observația desprinsă din exercițiul 3, să se determine valoarea logică a propozițiilor următoare:

p_1: (45; 9) = 9 ,
p_2: (25; 125) = 125 ,
p_3: (64; 32; 16) = 16 ,
p_4: (119; 17; 34) = 17 .

3.3.3.Determinarea celui mai mare divizor comun folosind descompunerea numerelor în produse de factori primi

Prin procedeul expus mai sus, dacă numerele sunt mici, determinarea celui mai mare divizor comun este relativ simplă.
Dăm, în continuare, un alt procedeu pentru aflarea celui mai mare divizor comun, fără a scrie mulțimea divizorilor fiecărui număr.

Fie numerele 180 şi 630.
Pentru a determina cel mai mare divizor comun al numerelor date: descompunem numerele în produse de factori numere prime: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $630 = 2{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}7$, divizorii comuni trebuie să conțină cel puțin unul din factorii primi comuni cu exponentul cel mai mic. Dacă ei ar conține, de exemplu, şi factorul 7, ar fi divizori ai numărului 630, dar nu şi ai numărului 180, dacă ar conține factorul 2^2 ei ar fi divizori pentru 180 dar nu şi pentru 630. Aşadar, cel mai mare divizor comun, fiind cel mai mare număr care divide fiecare din numerele date, va conține factorii primi comuni cu exponentul cel mai mic.

3.3.4.Concluzie: *Pentru a determina c.m.m.d.c. al mai multor numere date descompunem numerele în produse de factori numere prime, apoi efectuăm produsul factorilor primi comuni, considerați o singură dată, cu exponentul cel mai mic.*

Exemple:

(1) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$\underline{630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$

$(180; 630) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

(2) $a = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

$\underline{b = 2^2 \cdot 3 \cdot 11}$

$(a; b) = 2^2 \cdot 3 = 12$

(3) $a = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$\underline{b = 7 \cdot 11}$

$(a; b) = 1$

Numerele a şi b din exemplul (3) au un singur divizor comun, pe 1.

3.3.5. Definiție: Numerele pentru care cel mai mare divizor comun al lor este 1 se numesc *numere prime între ele.*

3.4. Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c)

Fie numerele 3 şi 7. Există numere naturale multiplii comuni ai numerelor 3 şi 7?

Avem: $M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \ldots, 3n, \ldots\}$,

$M_7 = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, \ldots, 7n, \ldots\}$

Multiplii comuni sunt dați de $M_{3;\,7} = M_3 \cap M_7$,

$M_{3;\,7} = M_3 \cap M_7 = \{0, 21, 42, \ldots, 21n, \ldots\}$.

3.4.1.Definiție: Cel mai mic dintre multiplii comuni, diferit de zero, al mai multor numere naturale date, se numeşte *cel mai mic multiplu comun*.

Notăm: c.m.m.m.c. [3; 7] = 21 ,sau, simplu: [3; 7] = 21 ,
citim: cel mai mic multiplu comun al numerelor 3 şi 7 este 21.

Numărul 21 este cel mai mic număr natural care se divide prin fiecare din numerele date.

3.4.2. Exerciții:

1. Să se determine primii 6 multipli comuni ai numerelor 5 şi 8.
2. Să se determine primii 5 multiplii comuni, diferiți de 0, ai numerelor 9 şi 15.
3. Să se scrie enumerând elementele: $M_{3;\,4}$; $M_{4;\,6}$; $M_{8;\,10}$; $M_{5;\,6}$, specificând de fiecare dată cine este c.m.m.d.c. al numerelor date.

3.4.3.Determinarea celui mai mic multiplu comun folosind descompunerea numerelor în produse de factori primi

Fie numerele 180 şi 630.

Pentru a determina cel mai mic multiplu comun al numerelor date:

- descompunem numerele în produse de factori numere prime: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$,
- multipli comuni trebuie să conţină factori primi comuni şi necomuni cu exponentul cel mai mare. Cel mai mic multiplu comun, fiind cel mai mic număr care se divide cu fiecare din numerele date, va conţine factorii primi comuni şi necomuni, o singură dată, cu exponentul cel mai mare.

3.4.5.Concluzie: *Pentru a determina c.m.m.m.c. al mai multor numere date: descompunem numerele în produse de factori numere prime, apoi efectuăm produsul factorilor primi comuni şi necomuni, consideraţi o singură dată, cu exponentul cel mai mare.*

Exemple:

(1) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$\underline{630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$

$[180; 630] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1\ 260$

(2) $a = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

$\underline{b = 2^2 \cdot 3 \cdot 11}$

$[a; b] = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 = 13\ 200$

(3) $a = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$\underline{b = 7 \cdot 11}$

$[a; b] = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 34\ 650$

Numerele a şi b din exemplul (3) nu au factori primi comuni, c.m.m.m.c. este egal cu produsul numerelor.

3.4.6. Exerciţii:

Să se calculeze c.m.m.m.c. al numerelor:

a) $a = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ şi $b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$,

b) $a = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 13$ şi $b = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$,

c) $a = 3 \cdot 11 \cdot 19$ şi $b = 2^3 \cdot 5 \cdot 31$,

d) 420 şi 588 ,

e) 360 şi 504 ,

f) 900 şi 450 ,

g) 144; 36 şi 72 ,

h) 625 şi 750 ,

i) 216 şi 160 ,

j) 200 şi 441 ,

k) 297 şi 260 ,

l) 315; 405 şi 675 ,

m) 540; 558 şi 576 ,

n) 348; 612 şi 984 ,
o) 27; 121 şi 260 ,
p) 10 875 şi 1 500 ,
r) 9 656; 14 484 şi 24 140 ,
s) 1 638; 663 şi 897 .

Observaţie: Date fiind două numere naturale ***a*** şi ***b***, avem: (***a***; ***b***) · [***a***; ***b***] = ***a*** · ***b***. Verificaţi proprietatea folosind, din exerciţiul de mai sus: d), e), f) h), i), j) şi k).

3.5. Divizibilitatea unei expresii cu un număr

3.5.1. Algoritm: 1. Se pune în evidenţă numărul – factor al expresiei date
2. Se descompune numărul în produse de factori numere prime între ele şi se verifică divizibilitatea expresiei prin fiecare factor.

3.5.2. Exemple:

(1) Stabiliţi dacă numărul E = $\overline{abcd}+\overline{dcba}$ se divide cu 11.

Soluţie: E = 1001·(a + d) + 110·(b + c), număr divizibil cu 11.

(2) Demonstraţi că numărul
S = (2001 + 2000 – 1999 – 1998) + (1997 + 1996 – 1995 – 1994) + … + (5 + 4 – 3 – 2) + 1 este divizibil cu 2001.

(GM 9-10/2001, p. 370)

Soluţie: În fiecare paranteză rezultatul este 4. Avem (2001 - 1): 4 = 500 (paranteze). Avem S = 500 · 4 + 1 = 2001.

(12288) Fie $S=\overline{ab4}+\overline{aba}+\overline{a1b}$. Dacă termenii sumei sunt numere scrise în baza 10, stabiliţi dacă suma este sau nu un număr divizibil cu 7.

Soluţie: Suma este echivalentă cu: 7·(43a+3b+2), număr divizibil cu 7.

3.6. Determinarea a două numere naturale când se cunosc c.m.m.d.c./c.m.m.m.c. şi respectiv suma/produsul lor

3.6.1. Algoritm: Se exprimă numerele ca produse dintre c.m.m.d.c. şi două numere prime între ele .

3.6.2. Exemplu:

Suma a două numere naturale este 1 089 iar c.m.m.d.c. al lor este 121. Să se afle numerele.

Soluție: Fie x şi y cele două numere. Avem x = 121a şi y = 121b, cu (a,b) = 1, 121(a+b) = 1089, de unde a+b = 9. Avem posibilitățile: a = 1, b = 8; a = 2, b = 7; a = 3, b = 6; a = 4, b = 5, de unde, numerele căutate sunt: 121 şi 968; 242 şi 847; 484 şi 605

3.7. Exerciții şi probleme propuse

1. Decideți dacă numărul $A = 2907^{100} + 2908^{101} + 2909^{102} + 2900^{103}$ este sau nu divizibil cu 10.

2. Numerele de forma $\overline{ab00}$ divizibile cu 9 sunt: ………………………

3. Dacă numărul $\overline{1a2a3a4a5a6a7a8a9}$ este divizibil cu 9, atunci a = …
.

4.Numărul $5^{101} \cdot 2^{100} + \boldsymbol{a}$ este divizibil cu 9 dacă şi numai dacă ***a*** este:
a) 4; b) 5; c) 3; d) 9 .

5.Valoarea de adevăr a propoziției:
p: „Orice număr natural care se divide prin 8 şi 6, se divide prin 48" este ….

6. Câte numere naturale de forma $\overline{7x2y}$, scrise în baza 10, există ? Câte dintre ele se divid cu 2 ? Câte se divid cu 4 ? Câte se divid cu 5 ? Câte se divid cu 10 ? Câte se divid cu 9 ?

7. Numărul numerelor naturale formate din trei cifre, divizibile cu 9 şi care au cifra unităților 9 este egal cu ….

8. Să se determine cel mai mare număr de forma $\overline{7x2y}$ multiplu al lui 9.

9. Determinați toate numerele n = $\overline{a2345b}$ divizibile cu 9. Câte dintre ele sunt divizibile cu 72 ?

10. Câte numere de forma $\overline{abc2}$ sunt divizibile cu 4 şi au proprietatea că $\overline{ab}$ este un pătrat perfect.

11. Stabiliți care din numerele date sunt divizibile cu 8: 392; 984; 1 220; 2 464; 337; 3 968; 9 768; 7 680; 34 416; 28 728; 17 776; 16 208; 5 992; 2 648.

12. Determinați toate numerele de forma: a) $\overline{25x2}$; b) $\overline{x408}$; c) $\overline{12x32}$ divizibile cu 8.

13. Numărul numerelor naturale de forma $\overline{3xyz136}_{10}$ divizibile cu 8 este egal cu….

14. Considerăm numerele: 517; 1 001; 222; 4 697; 6 105; 3 839; 4 444; 803; 661; 961 796; 7 967 036; 411. Organizați numerele în trei coloane:

(1) numere divizibile cu 11,
(2) numere divizibile cu 11 şi 2,
(3) numere care nu se divid cu 11.

15. Determinați toate numerele de forma $\overline{23x511}$ divizibile cu 11.

16. Stabiliți dacă numărul E = $\overline{abcd}+\overline{dcba}$ se divide cu 11.

17. Stabiliți care din numerele care urmează sunt divizibile cu 7: 371; 146; 329; 273; 644; 555; 798; 252; 616; 917; 1 792; 1 200; 413; 2 156; 511; 488; 16 408.

18. Determinați numerele de forma: a) $\overline{x6\,543}$; b) $\overline{x7302}$; c) $\overline{4\,23x}$; d) $\overline{14250x}$; e) $\overline{124x4}$; f) $\overline{5x102}$ divizibile cu 7.

19. Determinați D = $\overline{1212x6}-\overline{9x67}$, ştiind că fiecare termen este divizibil cu 7.

20. Fie $S=\overline{ab4}+\overline{aba}+\overline{a1b}$. Dacă termenii sumei sunt numere scrise în baza 10, stabiliți dacă suma este sau nu un număr divizibil cu 7.

21. Fie E = $\overline{1a5b}+\overline{15ab}+\overline{1b5a}+\overline{1ab6}-a$. Dacă toți termenii sunt numere scrise în baza 10, stabiliți dacă E este sau nu un număr divizibil cu 7.

22. Să se determine toate numerele de forma $\overline{2yz}$ divizibile cu 6 şi care nu se divid cu 9.

23. Considerăm toate numerele naturale formate din două cifre.
a) câte din aceste numere sunt multipli ai lui 6 ?
b) câte din numerele considerate sunt divizibile cu 2 dar nu se divid cu 3?
c) determinați suma numerelor multipli ai lui 3 dar care nu sunt multipli ai lui 2.

24. Determinați numărul numerelor naturale nenule cel mult egale cu 1000:

a) care se divid şi cu 3 şi cu 5.
b) care nu se divid nici prin 3, nici prin 5.
c) care nu se divid nici cu 2 şi nici cu 5.

25. Numerele de forma $\overline{xy15}$ divizibile cu 15 sunt ………………………

26. Determinați cifrele *a* şi *b* ştiind că numărul $\overline{3a7b}$ este divizibil cu 15.

27. Dacă $\overline{4xy}\ \vdots\ 45$, atunci $x = \ldots$, $y = \ldots$; $x = \ldots$, $y = \ldots$; $x = \ldots$, $y = \ldots$.

28. Să se determine x şi y astfel ca numărul $\overline{4x5y}$ să fie divizibil cu 18.

29. Să se determine numerele de forma $\overline{abab}$ care sunt divizibile cu 12.

30. Determinați cifrele a, b şi c ştiind că $\overline{1a3bc}$ este divizibil cu 75.

31. Determinați cifrele x şi y astfel încât $\overline{x1999y}$ să se dividă cu 55.

32. Determinați numerele de forma $\overline{1099abc}$ divizibile cu 280.

33. Câte numere de forma $\overline{abbac}$ sunt divizibile cu 440 ?

34. Găsiți toate numerele de forma $\overline{2001xyz}$, scrise în baza zece, care se divid cu 120.

35. Aflați toate numerele de forma $\overline{2551xyz}$, scrise în baza zece, care se divid cu 125.

36. Determinați un număr scris cu zece cifre distincte, multiplu de 125. Câte astfel de numere există ?

37. Demonstrați că numărul $\overline{abab} - \overline{baba}$ se divide cu 909.

38. Numărul $\overline{abc}$ are cifrele distincte şi strict mai mici decât 6. Dacă $\overline{abc}$ se divide cu $(a + b + c)$, să se arate că $\overline{(b+c)(c+a)(a+b)}$ se divide cu $(a + b + c)$.

(GM 11/1999, p. 454)

39. În sistemul de numerație zecimal, aflați cifrele nenule a şi b astfel încât $(\overline{ab} + \overline{ba})\ \vdots$ 187

40. Fie x, y şi z cifre consecutive în sistemul de numerație zecimal astfel încât $\overline{xy} = z + 19$. Să se arate că numărul $\overline{xyz}$ este divizibil cu 19.

41. Să se demonstreze că:

a) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, numerele de forma $A = 10^n + 62$ se divid cu 18.
b) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, numerele de forma $N = 10^{3n} - 385$ se divid cu 15.
c) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, numerele de forma $5^{n+2}+5^{n+1}+5^n$ se divid cu 31.
d) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, numărul $A = 6^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 2^n \cdot 3^{n+2}$ se divide cu 13.
e) Numerele de forma $a = 72^n + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+1} + 8^{n+1} \cdot 9^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, se divid cu 15.
f) Numerele de forma $A = 3^{2n+1} \cdot 5^{3n+2} - 9^{n+1} \cdot 5^{3n+1}$ se divid cu 90, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
g) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, numerele de forma

$A = 5^{2n} \cdot 7^{2n+1} \cdot 11^{2n} + 25^n \cdot 7^{2n} \cdot 11^{2n+1} - 5^{2n+1} \cdot 49^n \cdot 121^n$ se divid cu 5 005.

h) $\forall$ n $\in$ ***N****, numerele $A = 3^{4n+4} \cdot 11^{2n} \cdot 125^n + 4 \cdot 5^{3n+2} \cdot 81^n \cdot 121^n$ se divid cu 1991 ?

42. Dacă n $\in$ ***N***, demonstrați că:

$A = 7^n \cdot 3^{n+1} + 3^n \cdot 7^{n+1} + 7 \cdot 21^n$ este divizibil cu 17.

$B = 5^n \cdot 7^{n+1} + 7^n \cdot 5^{n+1} + 17 \cdot 35^n$ este divizibil cu 29.

43. Dacă n $\in$ ***N***, demonstrați că:

$a = 5^{n+1} \cdot 7^{n+1} + 5^{n+2} \cdot 7^{n+2} + 25 \cdot 35^n$ este divizibil cu 257.

$b = 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 27 \cdot 15^n$ este divizibil cu 39.

44. Dacă $E = 2^{n+1} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 6^{n+1}$, unde n $\in$ ***N****

a) să se decidă dacă E este sau nu un număr divizibil cu 33;
b) să se calculeze E pentru n = 1.

45. Să se arate că numerele de forma

$A = \overline{abc2} + \overline{abc2}^2 + \overline{abc2}^3 + ... + \overline{abc2}^{1000}$ se divid cu 10.

46. Fie $a = 2 \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+5} + 5^{n-3} \cdot 5^4$.

a) Să se scrie numărul ***a*** ca produs de factori diferiți de 1.
b) Să se arate că ***a*** este multiplu de 313.

(G.M. 1/1992)

47. Dacă $S = 5^{n+1} \cdot 3^n \cdot 2^n + 5^n \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{n+2}$, n $\in$ ***N***. Să se determine numerele naturale pentru care $1271 \mid S$.

48. Considerăm numerele $a = 2 \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+5} + 5^{n-3} \cdot 5^4$, cu n $\in$ ***N***. Este numărul a divizibil prin 313 ? dar prin 1 565 ?

49. Știind că $\overline{abcde}$ este un număr divizibil cu 41, să se arate că și numărul $\overline{bcdea}$ este un număr divizibil cu 41.

50. Arătați că numărul $a = (3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2})^2$ se divide cu 169, oricare ar fi numărul natural n.

51. Determinați numerele prime a, b și c, știind că a + b = 108 și a – b – c = 32.

(GM 5-6/2000, p. 242)

52. Determinați numerele prime a, b și c, știind că 4a + 5b + 15c = 75.

53. Determinați numerele prime a, b și c astfel încât a + 10b + 12 c = 92.

54. Determinați numerele prime $\overline{ab}$, $\overline{ba}$ şi x ştiind că $5 \cdot \overline{ab} - 7 \cdot x = \overline{ba}$.

55. Determinați numerele naturale ***n*** pentru care fiecare din numerele: n+1, n+3, n+13, n+19, n+25 este număr prim.

56. Determinați numerele naturale prime pentru care numerele $n+1$, n^2+3, n^3+5, n^4+7 şi n^5+9 sunt simultan numere prime.

(GM 4/1993)

57. Fie a un număr prim şi $n \in$ ***N****. Să se determine a şi n dacă este verificată relația $a^{2n} - 4 = 3 \cdot (4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{1991})$.

(GM 1/1993)

58. Să se găsească toate perechile de numere naturale a căror sumă este 87, ştiind că diferența numerelor este un divizor al lui 87.

59. Numerele 2 435, 342 şi 4 527, împărțite la acelaşi număr natural, dau respectiv resturile 35, 42 şi 27. Să se afle numărul la care au fost împărțite.

60. Numerele 9 551, 898 şi 1 959, împărțite la acelaşi număr dau, respectiv, resturile: 31, 82, 55. Să se determine cel mai mic împărțitor.

61. Patru autobuze pleacă, din acelaşi loc şi în acelaşi timp, în patru direcții diferite. Plecările au loc pentru fiecare traseu la următoarele intervale de timp: 5 minute, 8 minute, 12 minute şi 18 minute. O plecare simultană are loc la ora 7 dimineața. Care sunt orele zilei la care au loc celelalte plecări simultane ?

62. Suma a două numere naturale este 1 089 iar c.m.m.d.c. al lor este 121. Să se afle numerele.

63. Să se găsească numerele naturale a şi b în fiecare din următoarele situații:

(1) (a,b) = 18 şi a + b = 180.

(2) (a,b) = 8 şi $a \cdot b = 1344$, unde (a,b) reprezintă c.m.m.d.c. al numerelor a şi b.

64. Determinați numerele naturale a şi b astfel încât $a^2 + b^2 = 832$ şi (a,b) = 18.

65. Determinați numerele naturale a şi b, care satisfac simultan:
(a, b) = 28 şi [a, b] = 784.

66. Determinați toate numerele naturale a, b şi c, ştiind că au loc simultan:
(a, b) = 4, (a, c) = 6, (b, c) = 10, unde (a, b) reprezintă c.m.m.d.c. al numerelor a şi b.

67. Să se determine numerele naturale a şi b ştiind că 3a + 5b = 180 şi (a,b) = 10.

68. Fie x, y şi z numere naturale nenule şi a = 3x+4y+5z, b = 2x+5b+8c.
a) Calculați a + 2b şi 3a – b.
b) Dacă a se divide cu 7, este adevărat că şi b este divizibil cu 7? Justificați.
c) Dacă b se divide cu 7, este adevărat că şi a este divizibil cu 7? Justificați.

69. Determinați numerele prime a, b şi c astfel încât 3a + 6b + 2c = 27.

70. Determinați numerele prime a, b şi c, ştiind că sunt îndeplinite simultan condițiile: a + b + c = 86 şi a + c = 55.

71 .Să se determine numărul natural A de forma $A = 2^a \cdot 3^b$, ştiind că numărul 2A are cu trei divizori mai mulți decât A, iar 3A are cu patru divizori mai mulți decât A.

72. Să se găsească cel mai mic număr natural cu 16 divizori pozitivi, care are în descompunerea sa doar factorii 2, 3 şi 83.

73. Să se afle produsul minim a patru numere prime distincte a căror sumă este 34.

74. Să se determine p număr prim, astfel încât $3^p + p^3$ să fie număr prim.

75. Să se determine n, p $\in$ $\boldsymbol{N}^*$ astfel încât numerele: n , $n + 2^p$, $n + 2^{p+1}$, $n + 2^{p+2}$ să fie simultan numere prime.

(G.M. 7-8/1993)

SOLUȚII:
1. Cifra unităților numărului este 0. **2.** Din a + b = 9, a ≠ 0, găsim: 1800, 2700, 3600, 4500, 5400, 6300, 7200, 8100, 9000. Din a + b = 18, a ≠ 0, găsim: 9900. **3.** Din (45+8a) ⋮ 9 ⇒ a = 0 sau a = 9. **4.** a). **5.** F. Exemplu: numărul 24 îndeplineşte condițiile, dar 24 nu este divizibil prin 48. **6.** 100, 50, 30, 20, 100. **7.** Cum cifra sutelor este nenulă, suma cifrelor necunoscute poate fi 9 sau 18. Obținem 10 numere. **8.** 7929. **9.** Numerele căutate sunt: 123453, 223452, 323451, 423450, 423459, 523458, 623467, 723456, 823455, 923454. Se divide cu 72 numărul 723456. **10.** Pătratele perfecte care interesează în problemă sunt: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Numărul format din ultimele două cifre poate fi: 12, 32, 52, 72, sau 92. Se obțin 30 de numere. **11.** 392, 2454, 3968, 9768, 7680, 34416, 28728, 17776, 16208, 5992, 2648. **12.** a) 2512, 2552, 2592; b) 1408, 2408, 3408, 4408, 5408, 6408, 7408, 8408, 9408; c) 12232, 12432, 12632, 12832. **13.** Numerele de forma dată sunt divizibile cu 125 oricare ar fi cifrele x, z şi z. Obținem 3000 de numere. **14. (1)** 517, 1001, 4697, 6105, 3839, 4444, 803, 961796, 7967036; **(2)** 4444, 961796, 7967036; **(3)** 222, 661, 411. **15.** 236511. **16.** E = 1001·(a + d) + 110·(b + c), număr divizibil cu 11. **17.** 371, 329, 273, 644, 798, 252, 616, 917, 1792, 413, 2156, 511, 16408. **18.** a) **4**6543, b) **5**7302, c) 423**5**, d) 142506, e) 124**7**4, f) 5**3**102. **19.** Găsim două soluții: 111559 sau 111629. **20.** Suma

este echivalentă cu: $7\cdot(43a+3b+2)$, număr divizibil cu 7. **21.** Valoarea expresiei este egală cu: $7\cdot(658+30a+17b)$. **22.** Dacă $z = 0$, găsim: 210, 240; dacă $z = 2$, obținem: 222, 282; dacă $z = 6$, avem: 246, 276; dacă $z = 8$, numerele sunt: 228, 258. **23.** a) Numărul numerelor divizibile cu 6 se obține din: $6\cdot2$, $6\cdot3$,…, $6\cdot16$; sunt $16-1=15$ astfel de numere. b) Sunt 45 de numere divizibile sau cu 2 sau cu 3. Deoarece 15 numere se divid cu 6, acestea fiind scoase, obținem 30 de numere. c) Numerele divizibile cu 3 şi sare nu se divid cu 2 sunt: $3\cdot5$, $3\cdot7$, …, $3\cdot33$ şi obținem suma $3\cdot(5+7+\ldots+33) =3\cdot19\cdot13 = 741$. **24.** a) 66 de numere, b) 934 de numere, c) 100 de numere. **25.** Din $x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0$, imposibil; din $x + y = 3$, obținem: 1215, 2115; din $x + y = 6$, găsim: 1515, 2415, 3315, 4215, 5115, 6015; din $x + y = 9$, obținem: 1815, 2715, 3615, 4515, 5415, 6315, 7215, 8115, 9015; dacă $x + z = 12$, obținem: 9315, 8415, 7515, 6615, 5715, 4815, 3915; dacă $x + y = 18$, găsim: 9915. **26.** Dacă $b = 0 \Rightarrow a \in \{2, 5, 8\}$, dacă $b = 5 \Rightarrow a \in\{0,3,6,9\}$. **27.** $y = 0 \Rightarrow x = 5$, $y = 5 \Rightarrow x = 0$ sau $x = 9$. **28.** $y = 2 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $y = 2 \Rightarrow x = 7$; $y = 4 \Rightarrow x = 5$; $y = 6 \Rightarrow x = 3$; $y = 8 \Rightarrow x = 1$. **29.** Dacă $b = 0$ atunci $(2a+0) \vdots 3$, de unde $a \in\{3,6,9\}$; dacă $b = 2 \Rightarrow (2a+4)\vdots3$, de unde $a\in\{1,4,7\}$; dacă $b = 4 \Rightarrow (2a+8)\vdots3$, de unde $a\in\{2,5,8\}$; dacă $b = 6 \Rightarrow (2a+12)\vdots3$, de unde $a\in\{3,6,9\}$; dacă $b = 8 \Rightarrow (2a+16)\vdots3$, de unde $a\in\{1,4,7\}$. **30.** Dacă $\overline{bc} = 00$, atunci $a\in\{2,5,8\}$; dacă $\overline{bc} = 25$, atunci $a\in\{1,4,7\}$; dacă $\overline{bc} = 50$, atunci $a\in\{0,3,6,9\}$; Dacă $\overline{bc} = 75$, atunci $a\in\{2,5,8\}$. **31.** Dacă $y = 0 \Rightarrow x = 3$; dacă $y = 5 \Rightarrow x = 8$. **32.** Avem $c = 0$. Din $\overline{1099ab} \vdots 28$ găsim condițiile: $(3a+b)\vdots7$ şi $(2a+b)\vdots4$, de unde obținem: $a = 2$ şi $b = 8$; $a = 5$ şi $b = 6$; $a = 8$ şi $b = 4$. **33.** Avem $c = 0$ şi $\overline{abba} \vdots 11$ oricare ar fi cifrele a şi b, $a \neq 0$. Din $\overline{abba} \vdots 4$, folosind condiția $(2b+a)\vdots4$, obținem: dacă $a = 2\Rightarrow b\in\{1,3,5,7,9\}$; dacă $a = 4\Rightarrow b\in\{0,2,4,6,8\}$; dacă $a = 6 \Rightarrow b \in\{1,3,5,7,9\}$; dacă $a = 8 \Rightarrow b \in\{0,2,4,6,8\}$. **34.** $z = 0$. Dacă $y = 0$, x este 1, 4 sau 7; dacă $y = 0$, x este 2, 5 sau 8; dacă $y = 4$, x este 0, 3, 6 sau 9; dacă $y = 6$, x este 1, 4 sau 7; dacă $y = 8$, x este 2, 5 sau 8. **35.** Ultimele trei cifre sunt: 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875. **36.** Prima cifră este diferită de 0. Se găsesc $9\cdot10^6\cdot8$ numere. **37.** Obținem $909(a-b)$. **38.** Rezultă din: $\overline{abc} + \overline{(b+c)(c+a)(a+b)} = 111\cdot (a + b + c)$. **39.** Din $11\cdot(a + b)$ multiplu al lui 187, obținem $(a + b)$ un număr diferit de 0 divizibil cu 17, deci: $a = 8$, $b = 9$ sau $a = 9$, $b = 8$. **40.** $z = 0$. Obținem numărul: 190. **41.** **a)** Suma cifrelor numărului este 9. **b)** Dacă $n = 1$, avem $615 \vdots 15$; dacă $n > 1$, diferența este un număr de forma $\overline{99...9615}$, număr divizibil cu 15. **c)** $5^n \cdot 31$. **d)** $6^n \cdot 13$. **e)** $72^n \cdot 15$. **f)** $9^n \cdot 5^{3n} \cdot 30$. **g)** $5^{2n} \cdot 7^{2n} \cdot 11^{2n} \cdot 13$. **h)** $81^n \cdot 121^n \cdot 125^n \cdot 181$; $1991 = 11 \cdot 181$. **42.** $A = 17\cdot21^n$, $B = 29\cdot35^n$. **43.** $a = 1285\cdot35^n$, $b = 1117\cdot15^n$. **44.** **a)** $E = 6^n \cdot 11$; **b)** $E = 66$. **45.** Grupăm termenii câte patru. **46.** Avem: $a = 5^{n+1} \cdot (2 + 3 \cdot 625 + 1) = 5^{n+1} \cdot2\cdot3\cdot313$. **47.** Avem $41\cdot15^n$ şi $1271 = 41\cdot51$. **48.** $a = 5^{n+1} \cdot 1878$. Avem $1878 \vdots 313$ şi 1878 nu este divizibil la 1565. **49.** Fie $A = \overline{abcde}$, $B = \overline{bcdea}$. Avem: $B = 10A + a - 10000000a = 10A - 99999 \cdot a$. Cum $A \vdots 41$, prin ipoteză şi $99999 \vdots 41 \Rightarrow B \vdots 41$. **50.** $a = 3^{3n} \cdot 169$. **51.** Din $a + b = 108 \Rightarrow$ a şi b sunt prime impare, deci $a - b$ este număr par. Din $a - b - c = 32 \Rightarrow$ c este număr prim par, deci: $c = 2$. Din $a + b = 108$ şi $a - b = 34$, găsim: $a = 71$, $b = 37$. **52.** Din $4a = 5(15 - b - 3c)$, a prim şi a divizibil prin $5 \Rightarrow a = 5$.

În continuare avem: $b + 3c = 11$, $c < 5$, deci $c \in \{2, 3\}$. Dacă $c = 2$, atunci $b = 5$. Dacă $c = 3$, atunci $b = 2$. **53.** Din $10b$, $12c$ şi 92 numere pare $\Rightarrow$ a este număr par prim. Cum a este număr prim par $\Rightarrow a = 2$. Avem apoi: $5b + 6c = 45$. Cum $5b$ şi 45 sunt divizibile cu $5 \Rightarrow 6c \vdots 5$, deci $c \vdots 5$, de unde $c = 5$, apoi $b = 3$. **54.** Avem: $5\cdot(10\cdot a + b) - 7\cdot x = 10\cdot b + a$, de unde $7\cdot(7\cdot a - x) = 5\cdot b$. Cum $5\cdot b$ se divide cu 7 şi b este număr prim $\Rightarrow b = 7$. În continuare: $7\cdot a - x = 5$, a fiind cifră şi $\overline{7a}$ este număr prim $\Rightarrow$ a este cifră impară. Cum $7a$ şi 5 sunt impare $\Rightarrow$ x este număr par prim $\Rightarrow x = 2$, apoi: $a = 1$. Aşadar, $x = 2$, $\overline{ab} = 17$ şi $\overline{ba} = 71$. **55.** Pentru $n = 4$. **56.** Pentru $n = 1 \Rightarrow n^2+3 = 4$ care nu este număr prim. Pentru $n = 3$, găsim numerele prime: 3, 7, 13, 23, 41. Pentru $n \geq 3$, dacă $n = 3k$, $k \in \boldsymbol{N}$, $n^2 + 3$ nu este prim; dacă $n = 3k+1$, $k \in \boldsymbol{N}$, $n^3 + 5 = M_3 + 1 + 3 = M_3$ nu este prim, dacă $n = 3k + 2$, $k \in \boldsymbol{N}$, numărul $n + 1$ nu este prim. Aşadar, singura soluţie este $n = 2$. **57.** Din $3\cdot(4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{1991})$ număr par $\Rightarrow a^{2n} - 4$ trebuie să fie număr par, de unde a trebuie să fie număr par şi prim, deci: $a = 2$. Avem: $2^{2n} - 4 = 4^n - 4$. Fie $x = 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{1991}$, de unde: $x = 4 + 4 \cdot (4 + 4^2 + \ldots + 4^{1990})$, $x = 4 + 4 \cdot (x - 4^{1991})$ şi $x = (4^{1992} - 4): 3$, $4^n = 4 + 4^{1992} - 4 \Rightarrow n = 1992$. **58.** Din $a+b = 87$ şi $87 \vdots (a-b)$, $a > b$, deducem: $a-b = 1$, $a-b = 3$, $a-b = 29$, $a-b = 87$. Obţinem perechile: $a = 44$, $b = 43$; $a = 45$, $b = 42$; $a = 58$, $b = 29$; $a = 87$, $b = 0$. **59.** Din $2435 = nq_1+35$, $342 = nq_2 + 42$ şi $4527 = nq_3 + 27$, deducem: $2400 = nq_1$, $300 = nq_2$ şi $4500 = nq_3$. Cmmdc al numerelor 2400, 300 şi 4500 este 300, deci: $n = 300$. Numărul găsit nu este unic; oricare alt număr mai mare decât 35, 42 şi 27 şi este divizor al lui 300 satisface cerinţele problemei. Aşadar: $n \in \{50,60,75,100,150,300\}$. **60.** 272. **61.** $[5,8,12,18] = 360$ (minute). La orele: 7, 13, 19, 01. **62.** Fie x şi y cele două numere. Avem $x = 121a$ şi $y = 121b$, cu $(a,b) = 1$, $121(a+b) = 1089$, de unde $a+b = 9$. Avem posibilităţile: $a = 1$, $b = 8$; $a = 2$, $b = 7$; $a = 3$, $b = 6$; $a = 4$, $b = 5$, de unde, numerele căutate sunt: 121 şi 968; 242 şi 847; 484 şi 605. **63. a)** Din $a = 18m$, $b = 18n$, $(m,n) = 1$ şi $a+b = 180 \Rightarrow m+n = 10$, de unde, perechile de numere sunt: 18 şi 162; 54 şi 126. b) Găsim perechile de numere: 8 şi 168; 24 şi 56. **64.** Fie $a = 8m$, $b = 8n$, cu $(m,n) = 1$. Găsim: $m^2 + n^2 = 13$, de unde $m^2 = 13 - n^2$, $n^2 < 13 \Rightarrow n \in \{1,2,3\}$. Obţinem numerele: 16 şi 24 **65.** Folosim $ab = (a,b) \cdot [a,b]$, apoi urmăm calea exerciţiului 70. Găsim perechile de numere: 28 şi 784; 56 şi 392; 112 şi 196. **66.** a este multiplu de 4 şi 6, deci $a = 12m$, b este multiplu de 4 şi 10, deci $b = 20n$, c este multiplu de 6 şi 10, deci $c = 30p$, unde m, n şi p sunt numere naturale nenule. **67.** Din $a = 6m$, $b = 10n$, $(m,n) = 1$, deducem: $3m+5n = 18$. Cum $3m = 18-5n \Rightarrow$ n poate fi: 1, 2 sau 3. Singura soluţie este: $a = 10$, $b = 30$. **68.** a) $a+2b = 7(x+2y+3z)$, $3a+b = 6x+8y+10z$. b) Din $7 \mid a$ şi $7 \mid (a+2b)$, $(a,b) = 1 \Rightarrow 7 \mid b$. c) Din $7 \mid (a+2b)$, $7 \mid b \Rightarrow 7 \mid a$. **69.** Din $2c = 3(9 - a - 2b) \Rightarrow 3 \mid c$ şi cum c este număr prim $\Rightarrow c = 3$. Avem: $a + 2b = 7$. Cum a şi b sunt cifre deducem: $a = 3$ şi $b = 2$. **70.** Cele trei numere sunt: 2, 31 şi 53. **71.** A are $(a+1)(b+1)$ divizori, 2A are $(a+2)(b+1)$ divizori, 3A are $(a+1)(b+2)$ divizori. Din $(a+2)(b+1) - (a+1)(b+1) = 3$ şi $(a+1)(b+2) - (a+1)(b+1) = = 4$, găsim: $(b+1)(a+2-a-1) = 3$, de unde $b = 2$; $(a+1)(b+2-b-1) = 4$, de unde $a = 3$. Numărul căutat este 72. **72.** Din $A = 2^x \cdot 3^y \cdot 83^z$, cu numărul divizorilor $(x+1)(y+1)(z+1) = 16$, cu $x+1 \geq 2$, $y+1 \geq 2$, $z+1 \geq 2$ (fiecare număr conţine fiecare din factorii daţi cel puţin cu exponentul 1). Din $2 < 3 < 83$ şi A cel mai mic $\Rightarrow$ x

$\geq y \geq z$. Avem: $16 = 16\cdot1\cdot1 = 8\cdot2\cdot1 = 4\cdot2\cdot2$. Din $x+1 = 16 \Rightarrow x = 15$, $y+1 = 1 \Rightarrow y = 0$ nu convine. La fel dacă $x+1 = 8$, $z + 1 = 1$. Convenabilă este situația: $x+1 = 4$, $y+1 = 2$, $z+1 = 2$. Obținem numărul $A = 1992$. **73.** 34 fiind număr par $\Rightarrow$ 2 nu poate fi termen al sumei. Căutăm numerele printre: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …. Fie $a < b < c < d$ cele patru numere. Avem: $d = 34–(a+b+c)$, valoarea minimă pentru $a+b+c$ este 15, de unde: $d \leq 34–15 = 19$. Aşadar, $\{a, b, c, d\} \subset \{3,5,7,11,13,17,19\}$. De aici obținem numerele: 3, 5, 7, 19 cu produsul 1995, sau 3, 7, 11, 13 cu produsul 3003. Valoarea minimă este 1995. **74.** Fie $A = 3^p + p^3$. Dacă $p = 2$, obținem $A = 17$ număr prim. Dacă $p \geq 3$ şi p număr prim el este de forma $4k+1$ sau $4k+3$, $k \in \boldsymbol{N}$. Avem: $A = 3^p + 1 + p^3 - 1$. Cum $3^p + 1 = (4-1)^p + 1 = M_4 - 1 + 1 = M_4$,$p^3 - 1 =(4k+1)^3 - 1 = M_4$ şi $p^3 - 1 = (4k+3)^3 - 1 = M_4 + 27 - 1 = M_2$. Aşadar, pentru oricare $n \geq 3$ numerele de forma dată sunt compuse. Singura soluție este $p = 2$.**75.** Numărul n fiind prim, el este de forma $3k+1$ sau $3k+2$. Analizând numerele găsim singura soluție $n = 3$, $p = 1$ sau $n = 3$, $p = 2$.