

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMINTULUI

XII

Matematică

Manual pentru clasa a XII-a

**Elemente
de
analiză matematică**

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ,
BUCUREȘTI — 1990

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

NICU BOBOC

ION COLOJOARĂ



Matematică

Manual pentru cl. a XII-a

Elemente de analiză matematică



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Manualul a fost elaborat pe baza programei școlare
aprobate de Ministerul Învățămîntului cu nr. 39490/1978.

Referenți: Prof. univ. dr. **O. Stănășilă**
prof. **M. Păltineanu**
prof. **M. Rădulescu**
prof. **S. Rădulescu**
prof. **V. Tomuleanu**

ISBN 973-30-0643-2

Redactor: Prof. **Valentin Radu**
Tehnoredactor: **Sanda Dumitrașcu**
Corector: **Theodor Țugulea**
Coperta: **Nicolae Sirbu**

I.

Primitive

§ 1. PRIMITIVE

Fiind dată o funcție $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ (I un interval $\subset \mathbf{R}$), se pun următoarele probleme:

(A) Există (și în ce condiții) o funcție $F : J \rightarrow \mathbf{R}$ a cărei derivată să fie funcția dată f ?

(B) Cum se poate determina o asemenea funcție F , pornind de la f ?

În acest capitol vom studia câteva metode de obținere a funcțiilor F care verifică relația $F' = f$.

Răspunsul la problema (A) este afirmativ pentru o clasă destul de largă de funcții, în particular pentru funcțiile continue. Acest lucru va fi arătat în capitolul II.

1.1. Definiție. Fie J un interval $\subset \mathbf{R}$ și $f : J \rightarrow \mathbf{R}$. Spunem că f admite primitivă pe J dacă există o funcție $F : J \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât:

- 1) F este derivabilă pe J ,
- 2) $F'(x) = f(x)$, $(\forall)x \in J$.

Funcția F se numește primitivă a funcției f .

Dacă intervalul J este închis la stînga și a este extremitatea sa stîngă, atunci prin derivata lui F în punctul a se subînțelege derivata la dreapta a lui F în a . O convenție analogă se face cînd J este închis la dreapta.

1.2. Exemple

1) Fie $n \in \mathbf{N}$ și $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ funcția definită prin relația

$$f(x) = x^n, \quad (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

Atunci pentru orice număr real fixat c , funcția

$$F_c(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \quad (\forall)x \in \mathbf{R}$$

este o primitivă a lui f .

2) Funcția

$$F(x) = (\sin x)^2, \quad (\forall)x \in \mathbf{R}$$

este o primitivă a funcției

$$f(x) = 2\sin x \cos x, \quad (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

3). Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, atunci funcția

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}, \quad (\forall) x \in \mathbf{R}$$

este o primitivă a funcției

$$f(x) = a^x, \quad (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

1.3. Propoziție. Fie J un interval $\subset \mathbf{R}$ și $f : J \rightarrow \mathbf{R}$. Dacă $F_1, F_2 : J \rightarrow \mathbf{R}$ sînt două primitive ale funcției f , atunci există o constantă $c \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$F_1(x) = F_2(x) + c, \quad (\forall) x \in J.$$

Demonstrație. F_1 și F_2 fiind primitive ale lui f , ele sînt derivabile pe J și verifică relațiile

$$F_1'(x) = f(x) = F_2'(x), \quad (\forall) x \in J,$$

deci

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0, \quad (\forall) x \in J.$$

Funcția $F_1 - F_2$, avînd derivata nulă pe intervalul J , este constantă pe acest interval, adică există $c \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$F_1(x) - F_2(x) = c, \quad (\forall) x \in J.$$

1.4. Observații:

a) Dată fiind o primitivă F_0 a unei funcții $f : J \rightarrow \mathbf{R}$, atunci orice altă primitivă F a lui f este de forma

$$F = F_0 + c,$$

unde c este o funcție constantă pe J . Aceasta înseamnă că dacă o funcție f admite primitivă, atunci f admite o infinitate de primitive. Datorită acestui fapt vom spune adeseori:

„ f admite primitive“

în loc de

„ f admite primitivă“

b) Definiția primitivei, dată la punctul 1.1, s-ar putea extinde și la funcții definite pe reuniuni finite de intervale disjuncte, deoarece condițiile din definiția 1.1 au sens și în acest caz mai general. Însă nu mai este adevărat că două astfel de primitive diferă printr-o constantă.

De exemplu, fie $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = x^2.$$

Atunci funcțiile $F, G : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ definite prin

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \quad (\forall) x \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

respectiv

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 1 & \text{dacă } x < 0, \\ \frac{x^3}{3} + 2 & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

sunt derivabile pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ și verifică relațiile

$$F'(x) = f(x) = G'(x), \quad (\forall) x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Totuși, diferența $G - F$ nu este o constantă.

$$G(x) - F(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x < 0, \\ 2 & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

c) O funcție care admite primitive are proprietatea lui Darboux. Într-adevăr, dacă $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ admite primitive, atunci există o funcție derivabilă $F: J \rightarrow \mathbf{R}$ cu proprietatea

$$F' = f.$$

Se știe însă (vezi, Elemente de analiză matematică, cl. a XI-a), că derivata oricărei funcții derivabile are proprietatea lui Darboux. Așadar, f are proprietatea lui Darboux.

d) Dacă J interval $\subset \mathbf{R}$ și $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție astfel încât mulțimea

$$f(J) \stackrel{\text{def.}}{=} \{f(x) \mid x \in J\} \text{ (imaginea lui } J \text{ prin } f)$$

nu este interval, atunci funcția f nu admite primitive.

Într-adevăr, dacă f ar admite primitive, atunci (în baza punctului precedent) f ar avea proprietatea lui Darboux, adică o dată cu două valori ar lua orice valoare intermediară, deci imaginea lui J prin f ar fi un interval. Contradicție cu ipoteza făcută asupra lui f .

e) Orice funcție continuă $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ admite primitive.

Demonstrația acestui rezultat va fi dată în capitolul II, teorema 4.8.

1.5. Definiție. Fie $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ (J interval din \mathbf{R}) o funcție care admite primitive. Mulțimea tuturor primitivelor lui f se numește **integrala nedefinită a funcției f** și se notează prin simbolul

$$\int f(x) dx.$$

Operația de calculare a primitivelor unei funcții (care admite primitive) se numește integrare.

Menționăm că simbolul $\int f(x) dx$ trebuie privit ca o notație indivizibilă, deci părților \int sau dx , luate separat, nu li se atribuie aici nici o semnificație.

În cele ce urmează vom defini operațiile de „adunare“ și „înmulțire cu scalari“ între părți (submulțimi) ale mulțimii funcțiilor $\varphi: J \rightarrow \mathbf{R}$. Vom face acest lucru în scopul de a da un sens precis notațiilor frecvent utilizate în calculul de primitive:

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

$$\lambda \int f(x)dx,$$

unde $\int f(x)dx$ (respectiv $\int g(x)dx$) înseamnă mulțimea tuturor primitivelor lui f (respectiv g).

1.6. *Notații.* Fie J un interval din \mathbf{R} și

$$\mathfrak{F}(J) \stackrel{\text{def.}}{=} \{f : J \rightarrow \mathbf{R}\}$$

mulțimea funcțiilor definite pe J cu valori reale. Reamintim că pe mulțimea $\mathfrak{F}(J)$ se introduc operațiile „adunarea funcțiilor“:

$$(f + g)(x) \stackrel{\text{def.}}{=} f(x) + g(x), \quad (\forall) x \in J$$

și „înmulțirea funcțiilor cu scalari“:

$$(\lambda f)(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda f(x), \quad (\forall) x \in J, \lambda \in \mathbf{R}.$$

Deci $f + g$ este funcția $x \rightarrow f(x) + g(x)$ care asociază fiecărui $x \in J$ numărul real $f(x) + g(x)$, iar funcția λf este funcția $x \rightarrow \lambda f(x)$ care asociază fiecărui $x \in J$ numărul real $\lambda f(x)$.

Dacă \mathfrak{F} și \mathfrak{G} sint părți nevide ale lui $\mathfrak{F}(J)$ și $\lambda \in \mathbf{R}$, atunci punem prin definiție

$$(D_1) \quad \mathfrak{F} + \mathfrak{G} \stackrel{\text{def.}}{=} \{f + g \mid f \in \mathfrak{F} \text{ și } g \in \mathfrak{G}\},$$

$$(D_2) \quad \lambda \mathfrak{F} \stackrel{\text{def.}}{=} \{\lambda f \mid f \in \mathfrak{F}\}.$$

Dacă \mathfrak{F} este formată dintr-un singur element f_0 , atunci în loc de

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$$

sau

$$\{f_0\} + \mathfrak{G}$$

vom scrie simplu

$$f_0 + \mathfrak{G}.$$

Deci

$$(D_3) \quad f_0 + \mathfrak{G} \stackrel{\text{def.}}{=} \{f_0 + g \mid g \in \mathfrak{G}\}.$$

1.7. *Observație.* Notind cu \mathcal{Q} mulțimea funcțiilor constante definite pe J cu valori reale

$$\mathcal{Q} \stackrel{\text{def.}}{=} \{f : J \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ constantă}\},$$

se observă că această mulțime are, față de operațiile de „adunare“ și „înmulțirea cu numere reale diferite de zero“, definite pe părțile lui $\mathfrak{F}(J)$, următoarele proprietăți:

a) $\lambda e = e \quad (\forall)\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0;$

b) $e + e = e$

c) dacă $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție care admite primitive și dacă F_0 este o primitivă a lui f , atunci

$$\int f(x)dx = F_0 + e$$

sau

$$\int F'_0(x)dx = F_0 + e.$$

Într-adevăr, produsul λf , dintre o funcție constantă $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ și un număr real λ fiind tot o funcție constantă, rezultă incluziunea

$$\lambda e \subset e.$$

Reciproc, dacă f este o funcție constantă și $\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0$, atunci funcția

$$g \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda^{-1}f$$

este constantă, deci

$$f = \lambda g \in \lambda e.$$

Așadar, are loc și incluziunea

$$e \subset \lambda e$$

și deci egalitatea $e = \lambda e$.

Suma a două funcții constante fiind tot o funcție constantă, rezultă incluziunea

$$e + e \subset e.$$

Reciproc, dacă f este constantă, atunci $\frac{1}{2}f$ este constantă, deci

$$f = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}f \in e + e.$$

Așadar, are loc și incluziunea $e \subset e + e$ și deci egalitatea

$$e + e = e.$$

Am văzut (observația 1.4 a)) că dacă F este o primitivă a lui f , atunci orice altă primitivă F a lui f este de forma

$$F = F_0 + c,$$

unde c este o funcție constantă pe J . Deci

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \{F \in \mathcal{F}(J) \mid F = \text{primitivă a lui } f\} = \\ &= \{F_0 + c \mid c \in e\} = F_0 + e \end{aligned}$$

1.8. Teoremă. Dacă $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ sînt funcții care admit primitive și $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, atunci funcțiile $f + g$ și λf admit de asemenea primitive și au loc relațiile:

$$(a) \quad \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

$$(b) \quad \int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx,$$

$$(c) \quad \int f(x) dx = \int f(x) dx + \mathcal{C}.$$

Demonstrație. Dacă F este o primitivă a lui f iar G o primitivă a lui g , atunci F și G sînt derivabile pe J și

$$F' = f, \quad G' = g.$$

De aici deducem că $F + G$ și λF sînt derivabile pe J și

$$(F + G)' = F' + G' = f + g,$$

$$(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f,$$

adică $F + G$ este o primitivă a lui $f + g$ și λF este o primitivă a lui λf .

Funcțiile $F, G, F + G, \lambda F$ fiind primitive ale lui $f, g, f + g, \lambda f$ respectiv, rezultă (observația 1.7c))

$$(1) \quad \int f(x) dx = F + \mathcal{C},$$

$$(2) \quad \int g(x) dx = G + \mathcal{C},$$

$$(3) \quad \int (f(x) + g(x)) dx = F + G + \mathcal{C},$$

$$(4) \quad \int \lambda f(x) dx = \lambda F + \mathcal{C}.$$

Din egalitățile (1), (2), (3) și observația 1.7. b) obținem

$$\begin{aligned} \int f(x) dx + \int g(x) dx &= F + \mathcal{C} + G + \mathcal{C} = F + G + \mathcal{C} + \mathcal{C} = \\ &= F + G + \mathcal{C} = \\ &= \int (f(x) + g(x)) dx. \end{aligned}$$

Analog, folosind egalitățile (1), (4) și observația 1.8a), se obține

$$\lambda \int f(x) dx = \lambda(F + \mathcal{C}) = \lambda F + \lambda \mathcal{C} = \lambda F + \mathcal{C} = \int \lambda f(x) dx.$$

1.9. Observație. În demonstrarea faptului că λf admite primitive (teorema 1.8) nu s-a folosit ipoteza $\lambda \neq 0$. Totuși, ipoteza $\lambda \neq 0$ este esențială în demonstrarea egalității:

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx.$$

Într-adevăr, dacă $\lambda = 0$, atunci

$$\lambda f(x) = 0, (\forall) x \in J,$$

deci orice funcție constantă este primitivă a lui λf , în particular funcția constantă 0 este o primitivă a lui $\lambda f = 0$. Așadar (observația 1.7)

$$\int \lambda f(x) dx = 0 + c = c.$$

Pe de altă parte, dacă $\lambda = 0$, atunci

$$\lambda \int f(x) dx = \lambda \{F \mid F \text{ primitivă a lui } f\} = \{\lambda F \mid F \text{ primitivă a lui } f\} = \{0\}.$$

Deci, în general, are loc incluziunea

$$\lambda \int f(x) dx \subset \int \lambda f(x) dx,$$

incluziune care este strictă când $\lambda = 0$.

1.10. Exemple de funcții care nu admit primitive

a) Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

nu admite primitive.

Într-adevăr, imaginea $f(\mathbf{R})$, a lui \mathbf{R} prin f , este egală cu mulțimea $\{-1, 1\}$ formată din punctele -1 și 1 . Cum această mulțime nu este un interval, rezultă (observația 1.4 d)) că funcția f nu admite primitive.

b) Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = [x] \stackrel{\text{def.}}{=} \max \{n \in \mathbf{Z} \mid n \leq x\}$$

($[x]$ = partea întreagă a lui x) nu admite primitive.

Într-adevăr, imaginea $f(\mathbf{R})$ a lui \mathbf{R} prin f , fiind egală cu mulțimea \mathbf{Z} a numerelor întregi, nu poate fi un interval. Deci observația 1.4 d)) f nu admite primitive.

c) Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

nu admite primitive.

Se observă că funcțiile

$$f_1: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_2: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

definite prin

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x},$$

admit, respectiv, ca primitive funcțiile:

$$F_1(x) = c, \quad F_2(x) = x \sin \frac{1}{x}.$$

Dacă funcția f ar admite o primitivă: $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, atunci ar rezulta (observația 1.4. a)) că

$$F|_{(-\infty, 0]} = F_1 + c_1 = k \text{ și } F|_{(0, \infty)} = F_2 + c_2.$$

Orice primitivă este funcție derivabilă, deci continuă, prin urmare, primitiva F este continuă în origine,

deci

$$F(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \leq 0}} F(x) = k,$$

$$F(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = c_2,$$

de unde

$$k = c_2$$

Așadar, funcția F va fi de forma

$$F(x) = \begin{cases} k, & \text{dacă } x \leq 0 \\ k + x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Observînd că

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x} \quad (\forall) x > 0$$

și ținînd seamă de faptul că funcția $x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$ nu are limită în 0, deducem că funcția F nu este derivabilă în 0.

Contradicție cu derivabilitatea lui F pe toată mulțimea \mathbf{R} .

1.11 Tabel de integrale nedefinite

Peste tot în acest tabel J este un interval $\subset \mathbf{R}$

1.	$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = x^n; n \in \mathbf{N}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$
2.	$f : J \rightarrow \mathbf{R}; J \subset (0, \infty)$ $f(x) = x^a; a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c.$
3.	$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = a^x; a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$

4.	$f: J \rightarrow \mathbf{R}; J \subset \mathbf{R}^*$ $f(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + e.$
5.	$f: J \rightarrow \mathbf{R}; J \subset \mathbf{R} \setminus \{-a, a\}$ $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}, \{a \neq 0\}$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + e.$
6.	$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}; a \neq 0$	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + e.$
7.	$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + e.$
8.	$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + e.$
9.	$f: J \rightarrow \mathbf{R}; J \subset \mathbf{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$ $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + e.$
10.	$f: J \rightarrow \mathbf{R}; J \subset \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + e.$
11.	$f: J \rightarrow \mathbf{R}; J \subset \mathbf{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$ $f(x) = \operatorname{tg} x$	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + e.$
12.	$f: J \rightarrow \mathbf{R}; J \subset \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ $f(x) = \operatorname{ctg} x$	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + e.$
13.	$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}; a \neq 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + e.$
14.	$f: J \rightarrow \mathbf{R} \begin{cases} J \subset (-\infty, -a) \\ \text{sau} \\ J \subset (a, \infty) \end{cases}$ $a > 0$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln x + \sqrt{x^2 - a^2} + e.$
15.	$f: J \rightarrow \mathbf{R}; J \subset (-a, a), a > 0,$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + e.$

Exemplele 13 și 14 nu sînt evidente și sînt mai puțin utilizate decît celelalte exemple. Dăm în continuare justificarea exemplului 13 (exemplul 14 se justifică în mod analog).

Derivind funcția

$$g(x) \stackrel{\text{d.f.}}{=} x + \sqrt{x^2 + a^2}, \quad (g(x) > 0, (\forall) x \in \mathbf{R})$$

obținem

$$g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = g(x)f(x),$$

deci

$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = (\ln g(x))',$$

adică funcția $x \rightarrow \ln g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ este o primitivă a funcției

$$f: x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

1.12. Exerciții

I. Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

1. $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbf{R}$;
2. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$;
3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$;
4. $f(x) = a \sin x + b \cos x$, $x \in \mathbf{R}$;
5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$, $x \in (-2, 2)$;
7. $f(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;
8. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;
9. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$, $x \in \mathbf{R}$;
10. $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 1}$, $x \in \mathbf{R}$;
11. $f(x) = 2^x + e^x$, $x \in \mathbf{R}$;
12. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, $x \in (-1, 1)$;
13. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, $x \in (-\infty, -1)$;

$$14. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \in (0, \infty);$$

$$15. f(x) = x\sqrt{x} + 2x\sqrt[3]{x^2}, \quad x \in (0, \infty).$$

II. Să se arate că următoarele funcții *nu* posedă primitive pe \mathbf{R} :

$$1. f(x) = [x] - x, \quad x \in \mathbf{R},$$

unde $[x]$ înseamnă partea întreagă din x .

Indicație: Se va folosi același procedeu ca la exemplul 1.10.

$$2. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ -1, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 0, \\ \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q}, \\ x^3, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q}, \\ x^2, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

III. Ținând seama de faptul că orice funcție continuă pe un interval I are o primitivă, să se arate că următoarele funcții au primitive pe \mathbf{R} :

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

IV.

1. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și $c \in (a, b)$. Se presupune că f admite primitive pe $[a, c]$ și pe $[c, b]$. Să se arate că f admite primitive pe $[a, b]$.

2. Fie $f_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții care admit primitive. Presupunem că există o mulțime finită A de puncte din $[a, b]$ astfel încât

$$(\forall) x \in [a, b] \setminus A \Rightarrow f_1(x) = f_2(x).$$

Să se arate că $f_1(x) = f_2(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$.

3. Să se arate că dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este astfel încât $f^2(x) = 1$ pentru orice x , atunci f are o primitivă dacă și numai dacă $f = 1$ sau $f = -1$.

4. Se consideră o funcție $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ care coincide cu funcția $\sin \frac{1}{x}$ dacă $x \neq 0$.

Să se arate că pentru ca f să posede o primitivă este necesar și suficient ca $f(0) = 0$.

5. Se consideră funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin \frac{1}{x} & , \text{ dacă } x \in (0, 1], \\ 0 & , \text{ dacă } x = 0, \\ -1 + \sin \frac{1}{x} & , \text{ dacă } x \in [-1, 0). \end{cases}$$

Să se arate că f nu admite primitive.

6. Să se arate că funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x} & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

nu admite primitive. Să se deducă de aici că dacă o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ admite primitive nu rezultă, în general, că funcția f^2 admite primitive.

7. Fie $[a, b]$ un interval din \mathbf{R} . Să se construiască o funcție

$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ care să posedे următoarele proprietăți:

- i) să fie mărginită,
 - ii) să fie continuă în orice punct din intervalul deschis (a, b) și să fie discontinuă în punctele a și b ,
 - iii) să posedе o primitivă,
 - iv) să fie egală cu zero în punctele a și b .
8. Fie $[a, b]$ un interval și A o mulțime finită conținută în $[a, b]$. Să se arate că există o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ cu proprietățile:

- i) să fie mărginită,
 - ii) să fie continuă pe $[a, b] \setminus A$ și discontinuă în orice punct din A ,
 - iii) să admită primitive,
 - iv) să se anuleze pe A .
9. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție strict crescătoare care admite primitive și fie F o primitivă a lui f . Să se arate că pentru orice $\xi \in (a, b)$ există $x_1, x_2 \in [a, b]$ astfel încît

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = f(\xi).$$

§ 2. INTEGRAREA PRIN PĂRȚI

În acest paragraf și în următorul admitem următorul rezultat (a cărui demonstrație se va da în capitoul II, teorema 4.8; demonstrație care nu se bazează pe rezultatele din aceste paragrafe):

„Orice funcție continuă $f : J \rightarrow \mathbf{R}$ admite primitive“

Folosind acest rezultat și formula de derivare a produsului a două funcții, obținem următoarea:

2.1. Teoremă. **Formula de integrare prin părți.** Dacă $f, g : J \rightarrow \mathbf{R}$ sînt funcții derivabile cu derivate continue, atunci funcțiile $fg, f'g$ și fg' admit primitive și mulțimile lor de primitive sînt legate prin relația:

$$\int f(x)g'(x)dx = fg - \int g(x)f'(x)dx.$$

Demonstrație. Se știe că orice funcție derivabilă este continuă, deci din ipoteză rezultă că funcțiile $f'g$ și fg' sînt continue, prin urmare și funcția

$$(1) \quad (fg)' = f'g + fg'$$

este continuă. Atunci, pe baza rezultatului menționat mai sus, funcțiile $f'g$, fg' și $(fg)'$ admit primitive. Aplicînd teorema 1.8 (a) egalității (1), obținem:

$$(2) \quad \int (fg)'(x) dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx.$$

Însă (observația 1.7)

$$(3) \quad \int (fg)'(x) dx = fg + c.$$

Din (2), (3) și teorema 1.8 (c) rezultă

$$\int f(x)g'(x) dx = fg + c - \int g(x)f'(x) dx = fg - \int g(x)f'(x) dx.$$

2.2. Exemple

$$1) \int x \cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x \sin x - \int (\sin x)x' dx = x \sin x - \int \sin x dx = \\ = x \sin x + \cos x + c.$$

$$2) \int \cos^2 x dx = \int \cos x \cos x dx = \int \cos x (\sin x)' dx = \\ = \cos x \sin x - \int \sin x (\cos x)' dx = \\ = \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx = \\ = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \\ = \sin x \cos x + \int 1 dx - \int \cos^2 x dx = \\ = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x dx,$$

deci

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + c.$$

Analog se arată că

$$2') \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + c.$$

$$3) \int x^2 \sin x dx = - \int x^2 (\cos x)' dx = \\ = - x^2 \cos x + \int (\cos x) (x^2)' dx = \\ = - x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + e) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + e.$$

În exemplele (4) și (5) funcțiile sînt considerate pe intervale $I \subset (0, \infty)$.

$$4) \text{ Pentru } n \in \mathbb{N}, \text{ avem } \int x^n \ln x \, dx = \int (\ln x) \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} (\ln x)' dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + e = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + e.$$

$$5) \int \cos(\ln x) dx = \int \cos(\ln x) \cdot (x)' dx =$$

$$= x \cos(\ln x) - \int x (\cos(\ln x))' dx =$$

$$= x \cos(\ln x) + \int x \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx.$$

Calculînd

$$\int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int x (\sin(\ln x))' dx =$$

$$= x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

și înlocuind în egalitatea de mai sus se obține

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} \left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x) \right] + e.$$

6) Se consideră un interval I din \mathbb{R} astfel încît

$$\sin x \neq 0, \quad (\forall) x \in I$$

și se cere să se calculeze primitivele funcției

$$\text{Scriind } x \rightarrow \frac{1}{\sin^n x}, \quad n \geq 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

avem

$$\frac{1}{\sin^n x} = \frac{1}{\sin^{n-2} x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}$$

și deci

$$\int \frac{1}{\sin^n x} dx = \int \frac{1}{\sin^{n-2} x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} dx.$$

În a doua integrală din membrul drept aplicăm metoda integrării prin părți, observînd că

$$\frac{\cos x}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{\sin^{n-1} x} \right)'$$

Deci

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} dx &= -\frac{1}{n-1} \int \left(\frac{1}{\sin^{n-1} x} \right)' \cos x dx = \\ &= -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} \int \frac{1}{\sin^{n-1} x} \cdot \sin x dx = \\ &= -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} \int \frac{1}{\sin^{n-2} x} dx. \end{aligned}$$

De aici deducem

$$\int \frac{1}{\sin^n x} dx = \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\sin^{n-2} x} dx - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}.$$

Notînd, pentru $n \geq 1$,

$$I_n = \int \frac{1}{\sin^n x} dx$$

relația de mai sus devine, pentru $n \geq 2$,

$$I_n = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}$$

ceea ce permite să calculăm I_n pentru n par și să reducem calculul lui I_n pentru n impar la calculul lui

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x};$$

I_1 va fi calculată în paragraful următor (exemplul 3.3 (2)).

Vom avea

$$I_2 = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + c,$$

$$I_4 = \int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \frac{2}{3} I_2 - \frac{1}{3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} = -\frac{2 \cos x}{3 \sin x} - \frac{1}{3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} + c,$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin x} dx - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x},$$

$$I_5 = \frac{3}{4} I_3 - \frac{1}{4} \frac{\cos x}{\sin^4 x} = \frac{3}{8} \int \frac{1}{\sin x} dx - \frac{3 \cos x}{8 \sin^2 x} - \frac{1}{4} \frac{\cos x}{\sin^4 x}.$$

7) Să se calculeze $\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx$, unde funcția

$$x \longrightarrow \sqrt{x^2 + \alpha}$$

se consideră definită pe un interval I pe care $x^2 + \alpha > 0$; $\alpha \neq 0$.

Avem

$$\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = \int \frac{x^2 + \alpha}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx + \int \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx.$$

Pentru a calcula integrala

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx$$

vom aplica metoda integrării prin părți. Avem

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx = \int x \cdot (\sqrt{x^2 + \alpha})' dx = x\sqrt{x^2 + \alpha} - \int \sqrt{x^2 + \alpha} dx.$$

Prin urmare s-a obținut relația

$$\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = x\sqrt{x^2 + \alpha} - \int \sqrt{x^2 + \alpha} dx + \int \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx$$

și deci

$$\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx.$$

Întrucât

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha}) + c,$$

deducem

$$\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha}) + c.$$

8) Să se calculeze $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $a > 0$, unde funcția $x \rightarrow \sqrt{a^2 - x^2}$ este definită pe un interval $I \subset (-a, a)$.

Avem

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

Pentru a calcula integrala

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

vom aplica metoda integrării prin părți. Avem

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = - \int x(\sqrt{a^2 - x^2})' dx = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Prin urmare s-a obținut relația

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

sau

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c.$$

2.3. Exerciții. Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

1. $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

2. $f(x) = x \ln x$, $x > 0$.

3. $f(x) = \ln^2 x$, $x > 0$.

4. $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$.

5. $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$, $x > 0$.

6. $f(x) = x^\alpha \ln x$, $x > 0$ unde α este un număr real oarecare.

7. $f(x) = \ln^n x$, $x > 0$, n număr natural, $n \geq 2$.

$$8. f(x) = x^3 \ln^2 x, \quad x > 0.$$

$$9. f(x) = x^\alpha (\ln x)^n, \quad x > 0,$$

unde $\alpha \in \mathbf{R}$ iar n este un număr natural.

$$10. f(x) = x e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$12. f(x) = (x^3 - x + 1) e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$11. f(x) = (x^2 - 2x - 1) e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$13. f(x) = x^n e^{\alpha x}, \quad x \in \mathbf{R},$$

unde n este un număr natural și $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$14. f(x) = x^2 \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$16. f(x) = x^n \sin \alpha x, \quad x \in \mathbf{R}$$

unde n este un număr natural iar $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$15. f(x) = (x^2 - x + 1) \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$28. f(x) = x^2 \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$17. f(x) = e^x \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$29. f(x) = x^3 \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$18. f(x) = e^x \sin 2x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$19. f(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x \in \mathbf{R}; \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

$$30. f(x) = x^4 \sqrt{x^2 - 4}, \quad x \in (2, +\infty).$$

$$20. f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x \in \mathbf{R}; \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

$$31. f(x) = x^5 \sqrt{x^2 - 4}, \quad x \in (2, +\infty).$$

$$21. f(x) = x e^x \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$32. f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad x \in (-3, 3).$$

$$22. f(x) = e^x (\sin x - \cos x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$33. f(x) = x^2 \sqrt{9 - x^2}, \quad x \in (-3, 3).$$

$$23. f(x) = \sin^2 x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$24. f(x) = \sin^3 x + 2 \cos^3 x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$25. f(x) = 2 \sin^4 x + 3 \cos^4 x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$26. f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad x \in (2, +\infty),$$

$$27. f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

§ 3. PRIMA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ

În multe exemple, funcția $h : I \rightarrow \mathbf{R}$, pentru care căutăm o primitivă (funcția care vrem să o „integrăm“), poate fi pusă sub forma

$$(1) \quad h(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad (\forall) t \in I,$$

unde $\varphi : I \rightarrow J$ este o funcție derivabilă, iar $f : J \rightarrow \mathbf{R}$.

Dacă funcția f admite o primitivă F , adică $F' = f$, atunci, ținând seamă de regula de derivare a funcțiilor compuse, putem scrie

$$h(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = (F \circ \varphi)'(t)$$

deci $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui h .

Așadar, găsirea unei primitive a lui h s-a redus, în condițiile de mai sus, la găsirea unei primitive a lui f , problemă care (adeseori) este mai simplă decât găsirea unei primitive a lui h .

Se observă deci că o primitivă a lui h se obține compunând o primitivă F a lui f cu funcția φ .

Să considerăm următorul exemplu:

$$(2) \quad h(t) = (at + b)^n \quad (\forall) t \in \mathbf{R}$$

unde $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, n număr natural ≥ 1 .

Ținând seamă că derivata funcției

$$\varphi(t) = at + b \quad (\forall)t \in \mathbf{R}$$

este egală cu constanta a ,

$$\varphi'(t) = a \quad (\forall)t \in \mathbf{R}$$

și luând

$$f(x) = x^n \quad (\forall)x \in \mathbf{R},$$

se observă din (2) că h ar avea forma (1), dacă ar mai fi înmulțită cu constanta a . Deci

$$ah(t) = (at + b)^n \cdot a = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

adică

$$h(t) = \frac{1}{a} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

3.1. Teoremă (prima metodă de schimbare de variabilă).

Fie I, J intervale din \mathbf{R} și

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

funcții cu proprietățile:

(α) φ derivabilă pe I ,

(β) f admite primitive (fie F o primitivă a sa).

Atunci funcția $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive, iar funcția $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$,
adică

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F \circ \varphi + c$$

Demonstrație. Funcția F fiind o primitivă a lui f , este derivabilă pe J și $F' = f$. Însă φ este derivabilă pe I (ipoteza (α)), deci

și

$$F \circ \varphi \text{ este derivabilă pe } I$$

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad (\forall)t \in I.$$

Așadar,

funcția $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

3.2. Observație. Ținând seama de faptul că orice funcție continuă admite primitive (observația 1.4. e)), putem aplica teorema precedentă, pentru funcțiile f continue.

3.3. Observație. În prima metodă de schimbare de variabilă distingem următoarele date și etape:

a) Se dă o funcție $h : I \rightarrow \mathbf{R}$ care are primitive (de exemplu o funcție continuă);

b) Se caută două funcții $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ astfel încît să putem scrie

$$h(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad (\forall)t \in I;$$

se spune că φ este funcția care schimbă variabila (t în variabila x).

c) Se caută o primitivă F a lui f , adică

$$\int f(x)dx = F + \mathcal{C}.$$

d) În aceste condiții o primitivă H a lui $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ se obține din F prin relația

$$H = F \circ \varphi,$$

adică

$$\int h(t)dt = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F \circ \varphi + \mathcal{C}.$$

Uneori se substituie formal

$$\varphi(t) \text{ prin } x \text{ și } \varphi'(t)dt \text{ prin } dx$$

în

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

și se scrie „egalitatea“

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int f(x)dx.$$

Această „egalitate“ nu are sens, deoarece:

membrul stîng reprezintă mulțimea primitivelor funcției $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ (care sînt funcții definite pe intervalul I),

iar

membrul drept reprezintă mulțimea primitivelor funcției f (care sînt funcții definite pe intervalul J).

Cele două mulțimi pot fi diferite

chiar în cazul cînd $I = J$ și φ nu este funcția identică.

„Egalitatea“ menționată mai înainte este o preluare formală, fără sens, a formulei de schimbare de variabilă în integrala definită:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx,$$

formulă care va fi demonstrată în capitolul II (teorema 4.1.2).

3.4. Tabel de integrale nedefinite

$\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ derivabilă cu derivata continuă.

1.	$\int \varphi^n(x) \varphi'(x) dx = \frac{\varphi^{n+1}(x)}{n+1} + c,$	$n \in \mathbf{N}.$
2.	$\int \varphi^a(x) \varphi'(x) dx = \frac{\varphi^{a+1}(x)}{a+1} + c,$	$a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}, \varphi(I) \subset (0, \infty).$
3.	$\int a^{\varphi(x)} \varphi'(x) dx = \frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + c,$	$a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}.$
4.	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln \varphi(x) + c,$	$\varphi(x) \neq 0, (\forall) x \in I.$
5.	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{\varphi(x) - a}{\varphi(x) + a} \right + c,$	$\varphi(x) \neq \pm a, (\forall) x \in I, a \neq 0.$
6.	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varphi(x)}{a} + c,$	$a \neq 0.$
7.	$\int \sin \varphi(x) \varphi'(x) dx = -\cos \varphi(x) + c.$	
8.	$\int \cos \varphi(x) \varphi'(x) dx = \sin \varphi(x) + c.$	
9.	$\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2 \varphi(x)} dx = \operatorname{tg} \varphi(x) + c,$	$\varphi(x) \notin \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z} \right\} (\forall) x \in I.$
10.	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2 \varphi(x)} dx = -\operatorname{ctg} \varphi(x) + c,$	$\varphi(x) \notin \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}, (\forall) x \in I.$
11.	$\int \operatorname{tg}(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = -\ln \cos \varphi(x) + c,$	$\varphi(x) \notin \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z} \right\} (\forall) x \in I.$
12.	$\int \operatorname{ctg}(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \ln \sin \varphi(x) + c,$	$\varphi(x) \notin \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} (\forall) x \in I.$
13.	$\int \frac{\varphi'(x) dx}{\sqrt{\varphi^2(x) + a^2}} = \ln \left[\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) + a^2} \right] + c,$	$a \neq 0.$
14.	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) - a^2}} dx = \ln \left \varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) - a^2} \right + c,$	$a > 0 \begin{cases} \varphi(I) \subset (-\infty, -a) \\ \text{sau} \\ \varphi(I) \subset (a, \infty). \end{cases}$
15.	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}} dx = \operatorname{arc} \sin \frac{\varphi(x)}{a} + c,$	$a > 0, \varphi(I) \subset (-a, a).$

3.5. Exemple care utilizează prima metodă de schimbare de variabilă.

1) Să se calculeze $\int (at + b)^n dt$, unde

$$a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0, n \in \mathbf{N}, n \geq 1.$$

Am văzut la începutul acestui paragraf că funcția aceasta poate fi pusă sub forma

$$\frac{1}{a} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{1}{a} (at + b)^n \cdot a,$$

unde

$$\varphi(t) = at + b, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (\varphi \text{ este derivabilă})$$

și

$$f(x) = x^n, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (f \text{ admite primitive})$$

O primitivă a lui f este funcția

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in \mathbf{R},$$

deci, în baza teoremei 3.1 funcția

$$F(\varphi(t)) = \frac{(at + b)^{n+1}}{n+1}, \quad t \in \mathbf{R},$$

este o primitivă a funcției

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = (at + b)^n \cdot a.$$

Așadar

$$\int (at + b)^n dt = \frac{(at + b)^{n+1}}{a(n+1)} + \mathcal{C}.$$

Pentru un calcul rapid se procedează astfel

$$\begin{aligned} \int (at + b)^n dt &= \int \frac{1}{a} (at + b)^n \cdot a dt = \frac{1}{a} \int (at + b)^n \cdot a dt = \\ &= \frac{1}{a} \int \left[\frac{(at + b)^{n+1}}{n+1} \right]' dt = \frac{(at + b)^{n+1}}{a(n+1)} + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

2) Fie $u : I \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție cu proprietățile:

$$(\alpha) \quad u(t) \neq 0, \quad (\forall) t \in I,$$

$$(\beta) \quad u \text{ derivabilă.}$$

Se cere să se calculeze

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)} dt.$$

Funcția u' avînd proprietatea lui Darboux (vezi Elemente de analiză matematică cl. a XI-a) și ținînd seama că nu se anulează nicăieri (ipoteza (α)), deducem că u' păstrează semn constant pe I , deci

$$\begin{cases} \text{sau } u'(t) > 0 & (\forall) t \in I \\ \text{sau } u'(t) < 0 & (\forall) t \in I. \end{cases}$$

Dacă $u' > 0$, atunci u este strict crescătoare. Însă u nu se anulează nicăieri (ipoteza (α)), deci

$$\begin{cases} \text{sau } u(t) > 0 & (\forall) t \in I \\ \text{sau } u(t) < 0 & (\forall) t \in I. \end{cases}$$

Printr-un raționament similar se ajunge la aceeași concluzie și în cazul când $u' < 0$.

Luând funcția

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

definită pe $(0, \infty)$ dacă $u > 0$,

sau

definită pe $(-\infty, 0)$ dacă $u < 0$, rezultă că

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = f(u(t)) \cdot u'(t) \quad t \in I.$$

O primitivă a funcției f fiind funcția

$$F(x) = \ln |x|$$

rezultă, aplicând teorema 3.1, că funcția

$$(F \circ u)(t) = \ln |u(t)| \quad t \in I$$

este o primitivă a funcției $\frac{u'}{u}$. Așadar,

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)} dt = \ln u + c.$$

Pe scurt, se poate proceda astfel

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)} dt = \int (\ln |u(t)|)' dt = \ln u + c.$$

3) Să se calculeze $\int \frac{\sin 2t dt}{1 + \sin^2 t}$.

Luăm

$$I = \mathbf{R}, J = [1, 2]$$

și

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

definite prin

$$\varphi(t) \stackrel{\text{def.}}{=} 1 + \sin^2 t,$$

respectiv

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{x}.$$

Atunci f este continuă pe J , φ este derivabilă, iar derivata sa

$$\varphi'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$$

este continuă pe I . Deci sînt îndeplinite condițiile teoremei 3.1,

$$\int \frac{\sin 2t \, dt}{1 + \sin^2 t} = \int \frac{1}{\varphi(t)} \varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Funcția

$$F(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \ln t, \quad t \in [1, 2]$$

fiind o primitivă a lui f , rezultă (în baza teoremei 3.1) că

$$\int \frac{\sin 2t \, dt}{1 + \sin^2 t} = \ln$$

4) Să se calculeze

$$\int \frac{dt}{\sin t}$$

unde funcția

$$h(t) = \frac{1}{\sin t}$$

este considerată pe un interval $I \subset \mathbb{R}$ astfel încît

$$\sin t \neq 0 \quad (\forall) t \in I$$

(de exemplu $I = (0, \pi)$).

Funcția considerată în acest exemplu nu pare, la prima vedere, a fi de forma

$$(f \circ \varphi) \varphi'.$$

Pentru a o aduce la această formă (sau la combinație liniară de funcții de această formă), vom face unele transformări. De exemplu, scriind

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} \right)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} \right)}$$

și observînd că

$$\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)' = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} \right),$$

obținem

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)'}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} = \frac{u'(t)}{u(t)},$$

adică funcția de sub integrală este de tipul considerat în exemplul precedent, unde

$$u(t) = \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

Deci, în baza exemplului precedent, avem

$$\int \frac{1}{\sin t} dt = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + c.$$

Se mai poate face și transformarea

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin t} &= \frac{\sin t}{\sin^2 t} = \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t} = \frac{\sin t}{(1 - \cos t)(1 + \cos t)} = \frac{1}{2} \frac{\sin t}{1 - \cos t} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\sin t}{1 + \cos t}. \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin t} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin t}{1 - \cos t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{\sin t}{1 + \cos t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(1 - \cos t)'}{1 - \cos t} dt - \frac{1}{2} \int \frac{(1 + \cos t)'}{1 + \cos t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln |1 - \cos t| - \frac{1}{2} \ln |1 + \cos t| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \right| + c = \\ &= \ln \left| \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \right|^{\frac{1}{2}} + c = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + c. \end{aligned}$$

5) Să se calculeze integrala

$$\int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} dt,$$

unde funcția de sub integrală este definită pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Avem

$$\int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} dt = \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} dt.$$

Punând

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R},$$

unde

$$\varphi(t) = \operatorname{tg} t,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

deducem că

$$\varphi'(t) = 1 + \operatorname{tg}^2 t$$

și deci

$$\int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} dt = \int \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1 + \varphi^2(t)}} dt = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Întrucât

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + c,$$

obținem

$$\int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} dt = \ln (\operatorname{tg} t + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}) + c.$$

6) Să se calculeze:

$$\int \frac{t^2 + 1}{t\sqrt{t^4 + 1}} dt,$$

unde funcția

$$t \rightarrow \frac{t^2 + 1}{t\sqrt{t^4 + 1}}$$

este definită pe un interval $I \subset (0, \infty)$.

Punând

$$I \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R},$$

unde

$$\varphi(t) \stackrel{\text{def.}}{=} t \rightarrow \frac{1}{t}$$

și

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2 + x^2}}$$

avem

$$\varphi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2}$$

și

$$\frac{t^2 + 1}{t\sqrt{t^4 + 1}} = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}} = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi^2(t) + 2}} = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Deoarece

$$\int f(x) dx = \ln (x + \sqrt{2 + x^2}) + c$$

deducem, aplicând teorema 3.1,

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 + 1}{t\sqrt{t^4 + 1}} dt &= \ln (\varphi(t) + \sqrt{2 + \varphi^2(t)}) + c = \\ &= \ln \left(t - \frac{1}{t} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} \right) + c = \ln \frac{t^2 - 1 + \sqrt{t^4 + 1}}{t} + c. \end{aligned}$$

7) Să se calculeze $\int \sqrt{at^2 + bt + c} dt$, $a > 0$,

unde funcția

$$t \rightarrow \sqrt{at^2 + bt + c}$$

este definită pe un interval I pe care $at^2 + bt + c$ este strict pozitivă.

Dacă $at^2 + bt + c$ nu are rădăcini reale, atunci I poate fi \mathbf{R} , dacă $at^2 + bt + c$ are rădăcinile reale α, β cu $\alpha < \beta$, atunci avem

$$I \subset (-\infty, \alpha) \text{ sau } I \subset (\beta, +\infty).$$

Deoarece $a > 0$, avem

$$at^2 + bt + c = \frac{1}{4a} [(2at + b)^2 + 4ac - b^2]$$

și deci

$$t \in I \Rightarrow (2at + b)^2 > b^2 - 4ac.$$

Considerăm acum funcția

$$\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$$

definită prin

$$\varphi(t) = 2at + b.$$

Din cele de mai sus rezultă că

$$\varphi^2(t) > b^2 - 4ac,$$

$$\varphi'(t) = 2a, \quad t \in I.$$

Punînd

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4ac - b^2},$$

observăm că f este definită pe orice interval pentru care $x^2 > b^2 - 4ac$. Deoarece

$$t \in I \Rightarrow \varphi^2(t) > b^2 - 4ac$$

rezultă că f este definită pe intervalul $\varphi(I)$; avem

$$f(\varphi(t)) = \sqrt{(2at + b)^2 + 4ac - b^2} = 2\sqrt{a} \sqrt{at^2 + bt + c}$$

și deci

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 4a\sqrt{a} \sqrt{at^2 + bt + c}.$$

Din exemplul 2.2 (7) deducem că

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 4ac - b^2} + \frac{4ac - b^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + 4ac - b^2}| + c$$

și deci din teorema 3.1, obținem

$$\begin{aligned} \int \sqrt{at^2 + bt + c} dt &= \frac{1}{4a} \left[(2at + b) \sqrt{at^2 + bt + c} + \right. \\ &\left. + \frac{4ac - b^2}{2\sqrt{a}} \ln \left| 2at + b + 2\sqrt{a} \sqrt{at^2 + bt + c} \right| \right] + c. \end{aligned}$$

8) Să se calculeze

$$\int \sqrt{at^2 + bt + c} dt, \quad a < 0,$$

unde funcția

$$t \mapsto \sqrt{at^2 + bt + c}$$

este definită pe un interval I pe care $at^2 + bt + c$ este strict pozitivă.

Aceasta are sens numai dacă rădăcinile trinomialului sînt reale și distincte. În acest caz dacă rădăcinile sînt α și β , $\alpha < \beta$, atunci

$$I \subset (\alpha, \beta)$$

și

$$b^2 - 4ac > 0.$$

Deoarece $a < 0$, avem

$$at^2 + bt + c = -\frac{1}{4a} (\delta^2 - (2at + b)^2),$$

unde

$$\delta = \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Considerăm acum funcția

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$\varphi(t) = 2at + b.$$

Din cele de mai sus rezultă că

$$\varphi^2(t) < \delta^2, \quad t \in I,$$

$$\varphi'(t) = 2a.$$

Punând

$$f(x) = \sqrt{\delta^2 - x^2},$$

observăm că f este definită pe orice interval pe care $x^2 < \delta^2$. Deoarece

$$t \in I \Rightarrow \varphi^2(t) < \delta^2$$

rezultă că f este definită pe intervalul $\varphi(I)$ și avem

$$f(\varphi(t)) = \sqrt{\delta^2 - (2at + b)^2} = 2\sqrt{-a}\sqrt{at^2 + bt + c}$$

și deci

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 4a\sqrt{-a}\sqrt{at^2 + bt + c}.$$

Din exemplul(2.8) deducem că

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2} x\sqrt{\delta^2 - x^2} + \frac{\delta^2}{2} \arcsin \frac{x}{\delta} + c$$

și deci, din teorema 3.1, obținem

$$\begin{aligned} \int \sqrt{at^2 + bt + c} dt &= \frac{1}{4a\sqrt{-a}} \left[(2at + b)\sqrt{-a}\sqrt{at^2 + bt + c} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b^2 - 4ac}{2} \arcsin \frac{2at + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right] + c, \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx &= \frac{1}{4a} \left[(2ax + b)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4ac - b^2}{2\sqrt{a}} \ln (2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}) \right] + c. \end{aligned}$$

3.6. Exerciții

I. Să se calculeze, utilizând prima metodă de schimbare de variabilă, primitivele următoarelor funcții:

1. $f(x) = \frac{4x + 2}{x^2 + x + 3}, \quad x \in \mathbf{R}.$
2. $f(x) = \frac{8x^3 + 6x}{2x^4 + 3x^2 + 5}, \quad x \in \mathbf{R}.$
3. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}, \quad x \in \mathbf{R}.$
4. $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$
5. $f(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$
6. $f(x) = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$
7. $f(x) = 2x \sin(x^2 + 1)e^{\cos(x^2 + 1)} \quad x \in \mathbf{R}.$
8. $f(x) = x^2 e^{x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$
9. $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$
10. $f(x) = \sin x \cos^2 x, \quad x \in \mathbf{R}.$
11. $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x, \quad x \in \mathbf{R}.$
12. $f(x) = \sin^3 x, \quad x \in \mathbf{R}.$
13. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$
14. $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$
15. $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$
16. $f(x) = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$
17. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (0, 1).$
18. $f(x) = \frac{x}{1+x^4}, \quad x \in \mathbf{R}.$
19. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^6}, \quad x \in \mathbf{R}.$
20. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}, \quad x \in (-1, 1).$
21. $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \quad x \in (-\infty, 0).$
22. $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}, \quad x \in (e, \infty).$

23. $f(x) = \cos x \cdot \sin(\sin x) \cdot \cos(\sin x)$, $x \in \mathbf{R}$.
24. $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}}$, $x \in (0, \pi)$.
25. $f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$, $x \in (0, \infty)$.
26. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.
27. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, $x \in (2, \infty)$.
28. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbf{R}$.
29. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$, $x \in (1, 2)$.
30. $f(x) = \sqrt{9 - 4x^2}$, $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
31. $f(x) = x^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}$, $x \in \mathbf{R}$.
32. $f(x) = x \sqrt{(x-1)^3}$, $x \in (1, \infty)$.
33. $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$, $x \in (1, \infty)$.
34. $f(x) = \frac{\arcsin x}{x^2}$, $x \in (0, 1)$.
35. $f(x) = \frac{1}{x \sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$, $x \in (0, \infty)$.

§ 4. A DOUA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ

Am văzut că în prima metodă de schimbare de variabilă se căuta să se pună funcția de integrat, h , sub forma

$$h(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

și o primitivă H a lui h se obține compunând o primitivă F a lui f cu funcția φ :

$$H = F \circ \varphi.$$

Există situații în care este mai ușor de găsit o primitivă a funcției $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ decât o primitivă a funcției f .

În a doua metodă de schimbare de variabilă se cunoaște o primitivă H a funcției $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ și se cere să se găsească o primitivă F a funcției f ; F se obține din H astfel

$$F = H \circ \varphi^{-1}.$$

4.1. Teoremă (A doua metodă de schimbare de variabilă). Fie I, J intervale din \mathbf{R} și

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

funcții cu proprietățile:

- a) φ bijectivă, derivabilă, cu derivata nenulă pe I ,

b) funcția $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ admite primitive (fie H o primitivă a sa).

Atunci

- (1) funcția f admite primitive,
- (2) funcția $H \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă a lui f , adică

$$\int f(x)dx = H \circ \varphi^{-1} + c.$$

Demonstrație. Funcția H fiind o primitivă a lui h este derivabilă și $H' = h = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Însă din ipoteza (a) rezultă că funcția inversă φ^{-1} este derivabilă pe J , deci

$$H \circ \varphi^{-1} \text{ este derivabilă pe } J$$

și

$$\begin{aligned} (H \circ \varphi^{-1})'(x) &= H'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = \\ &= (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = \\ &= f(x) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x) \quad (\forall) x \in J. \end{aligned}$$

Așadar, funcția $H \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă a lui f .

4.2. Observație. Ipotezele (a) și (b) pot fi înlocuite cu următorul grup mai restrictiv de ipoteze:

- a') φ bijectivă, derivabilă cu derivata continuă și nenulă pe I ,
- b') f continuă pe J .

Ipotezele a'), b') implică atât ipotezele a), b) din a doua metodă de schimbare de variabilă cât și ipotezele (α), (β) din prima metodă de schimbare de variabilă:

$$\begin{array}{l} ((a'), (b')) \nearrow ((a), (b)) \\ \searrow ((\alpha), (\beta)). \end{array}$$

4.3. Observație. Fie f și φ funcții care verifică ipotezele (a') și (b'). Atunci pentru o funcție $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ are loc echivalența:

$$F \text{ este primitivă a lui } f \Leftrightarrow F \circ \varphi \text{ este o primitivă a lui } (f \circ \varphi)\varphi.$$

Cu alte cuvinte:

„În ipotezele a'), b'), cele două metode de schimbare de variabilă sînt echivalente“.

Implicația de la stînga la dreapta reprezintă prima metodă de schimbare de variabilă, iar implicația de la dreapta la stînga rezultă din a doua metodă de schimbare de variabilă.

Într-adevăr, să presupunem că funcția $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi)\varphi'$ și să notăm

$$H \stackrel{\text{def.}}{=} F \circ \varphi.$$

Atunci, în baza celei de-a doua metode de schimbare de variabilă, funcția

$$H \circ \varphi^{-1} = F \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = F$$

este o primitivă a lui f .

4.4. *Observație.* În a doua metodă de schimbare de variabilă se remarcă următoarele date și etape:

a) Se dă o funcție $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ care are primitive (de exemplu o funcție continuă);

b) Se caută o funcție $\varphi: I \rightarrow J$ care este derivabilă și cu derivata nenulă. În acest caz, φ' (avînd proprietatea lui Darboux) păstrează semn constant, deci φ este strict monotonă, prin urmare există φ^{-1} ; se spune că $\psi = \varphi^{-1}: J \rightarrow I$ este funcția care schimbă variabila (x în variabila t);

c) Se caută o primitivă H a funcției

$$(f \circ \varphi)\varphi',$$

adică

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = H + \mathcal{C}.$$

d) În aceste condiții o primitivă F a lui f se obține din H prin relația

$$F = H \circ \varphi^{-1},$$

adică

$$\int f(x)dx = H \circ \varphi^{-1} + \mathcal{C}.$$

4.5. EXEMPLE CARE UTILIZEAZĂ A DOUA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ

1) Să se calculeze

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx.$$

Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{e^{2x}}{1 + e^x},$$

este continuă. Luăm funcția $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$\varphi(t) = \ln t.$$

Această funcție este bijectivă, inversa sa fiind

$$\varphi^{-1}(x) = e^x \quad (\forall) x \in \mathbf{R},$$

iar derivata sa

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t} \quad (\forall) t \in (0, \infty)$$

este nenulă pe $(0, \infty)$.

Căutăm o primitivă a funcției

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{t^2}{1+t}, \quad \frac{1}{t} = \frac{t}{1+t}.$$

Avem

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int \frac{t}{1+t} dt = \int \frac{1+t}{1+t} dt - \int \frac{1}{1+t} dt = t - \ln(1+t) + c.$$

Notind cu

$$H(t) = t - \ln(1+t)$$

primitiva lui $h = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, rezultă în baza teoremei 4.1 că funcția

$$(H \circ \varphi^{-1})(x) = e^x - \ln(1 + e^x)$$

este o primitivă a funcției f . Deci

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = e^x - \ln(1+e^x) + c,$$

2) Să se calculeze
$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx.$$

Luăm $(1, \infty) \xrightarrow{\varphi} (0, \infty) \xrightarrow{f} \mathbf{R}$, unde

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x}} \text{ și } \varphi(t) = t^2 - 1,$$

deci

$$\varphi^{-1}(x) = \sqrt{1+x}, \quad \varphi'(t) = 2t.$$

Avind

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= \int \frac{2t}{(t^2-1)t} dt = \int \frac{2}{(t-1)(t+1)} dt = \\ &= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln \frac{t-1}{t+1} + c \end{aligned}$$

rezultă

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx = \ln \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} + c.$$

3) Să se calculeze

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Funcția $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definită prin

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

este continuă. Luăm $I = J = (0, \infty)$ și $\varphi: I \rightarrow J$ definită prin

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}.$$

Observăm că φ este bijectivă, derivabilă, iar φ' este continuă și nenulă pe I :

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

Deci (observația 4.2) sînt îndeplinite condițiile teoremei 4.1.

Observăm că

$$(f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2} \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} = -\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} = -(\sqrt{1 + t^2})'$$

deci o primitivă a funcției $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ este funcția $t \rightarrow -\sqrt{1 + t^2}$, prin urmare

$$\int (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) dt = -\sqrt{1 + t^2} + c.$$

Aplicînd teorema 4.1 și ținînd seamă că $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, obținem

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + x^2}} = -\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} + c.$$

4) Să se calculeze

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad (a > 0).$$

Funcția $f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}_+$ definită prin

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{a^2 - x^2}$$

este continuă. Funcția $\varphi: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-a, a)$ definită prin

$$\varphi(t) = a \sin t$$

este bijectivă, derivabilă, cu derivata continuă și

$$\varphi'(t) = a \cos t \neq 0, \quad (\forall) t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Observăm că

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t = a^2 \cos^2 t,$$

deci (vezi exemplul 2.2 (2))

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt &= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cdot \cos t) + c = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} \right) + c. \end{aligned}$$

Aplicînd teorema 4.1 și ținînd seama că

$$\varphi^{-1}(x) = \arcsin \frac{x}{a},$$

obținem

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \left[\arcsin \frac{x}{a} + \sin \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \sqrt{1 - \left(\sin \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \right)^2} \right] + c =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{2} \left[\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right] + c = \\
&= \frac{1}{2} \left(a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right) + c.
\end{aligned}$$

5) Să se calculeze $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx$, $a > 0$,

unde funcția

$$x \rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

este definită pe intervalul $(-a, a)$.

Funcția

$$\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-a, a)$$

definită prin

$$\varphi(t) = a \sin t$$

este bijectivă, derivabilă și

$$\varphi'(t) = a \cos t \neq 0, \quad (\forall) t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ayem

$$\begin{aligned}
f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) &= \sqrt{\frac{a - a \sin t}{a + a \sin t}} \cdot a \cos t = \\
&= a \sqrt{\frac{1 - \sin t}{1 + \sin t}} \cos t = a \frac{\cos^2 t}{1 + \sin t} = a(1 - \sin t),
\end{aligned}$$

și deci

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = a \int (1 - \sin t) dt = a(t + \cos t) + c.$$

Deoarece

$$\varphi^{-1}(x) = \arcsin \frac{x}{a}$$

deducem, aplicând teorema 4.1

$$\int f(\varphi)(x) dx = a \left(\arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + c.$$

6) Să se calculeze $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$,

unde $a > 0$ și $b^2 - 4ac < 0$.

Funcția

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

este definită și continuă pe \mathbf{R} .

Considerăm următoarea schimbare de variabilă

$$\Psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

definită prin

$$\Psi(x) = \sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Avem

$$\Psi'(x) = \sqrt{a} + \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Să arătăm că $\Psi'(x) \neq 0 (\forall)x \in \mathbf{R}$. Dacă ar exista $x_0 \in I$ astfel încît $\Psi'(x_0) = 0$, atunci

$$2\sqrt{a}\sqrt{ax_0^2 + bx_0 + c} + 2ax_0 + b = 0,$$

deci

$$4a(ax_0^2 + bx_0 + c) = (2ax_0 + b)^2,$$

de unde ar rezulta egalitatea

$$b^2 - 4ac = 0$$

care contrazice ipoteza din enunț. Avînd

$$\Psi'(x) \neq 0 \quad (\forall)x \in \mathbf{R}$$

și

$$\Psi'\left(-\frac{b}{2a}\right) = \sqrt{a} > 0$$

rezultă

$$\Psi'(x) > 0 \quad (\forall)x \in \mathbf{R},$$

deci

(α) Ψ este strict crescătoare.

Pe de altă parte, pentru orice $x \neq 0$ avem

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{ax^2 - (ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax} - \sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{x\left(-b - \frac{c}{x}\right)}{\sqrt{ax} - |x|\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}} = \\ &= \frac{-b - \frac{c}{x}}{\sqrt{a} - \frac{|x|}{x}\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}}, \end{aligned}$$

deci

(β)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = \frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

Evident.

$$(\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = +\infty.$$

Din (α) , (β) , (γ) rezultă că

$$\psi(\mathbb{R}) = \left(-\frac{b}{2\sqrt{a}}, +\infty \right)$$

iar funcția

$$\varphi \stackrel{\text{def.}}{=} \psi^{-1} : \left(-\frac{b}{2\sqrt{a}}, +\infty \right) \rightarrow \mathbb{R},$$

satisface condițiile teoremei 4.1. Punând

$$t = \Psi(x)$$

găsim

$$(t - \sqrt{a}x)^2 = ax^2 + bx + c$$

și deci

$$x = \varphi(t) = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}.$$

Deoarece

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = (t - \sqrt{a}\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

deducem

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = -\frac{\sqrt{a}}{2} \varphi^2(t) + \int t\varphi'(t) dt = -\frac{\sqrt{a}}{2} \varphi^2(t) + t\varphi(t) - \int \varphi(t) dt.$$

Dar

$$\begin{aligned} \int \varphi(t) dt &= \int \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b} dt = \frac{1}{4a} \int \frac{4at^2 - b^2}{2\sqrt{at} + b} dt + \\ &+ \frac{1}{4a} \int \frac{b^2 - 4ac}{2\sqrt{at} + b} dt = \frac{1}{4a} \int (2\sqrt{at} - b) dt + \\ &+ \frac{1}{4a} (b^2 - 4ac) \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln(2\sqrt{at} + b) + c = \\ &= \frac{1}{4a} (\sqrt{a}t^2 - bt) + \frac{b^2 - 4ac}{8a\sqrt{a}} \ln(2\sqrt{at} + b) + c, \end{aligned}$$

deci

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = -\frac{\sqrt{a}}{2} \varphi^2(t) + t\varphi(t) - \frac{\sqrt{a}t^2}{4a} + \frac{bt}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{8a\sqrt{a}} \ln(2\sqrt{at} + b) + c.$$

Aplicând teorema 4.1 obținem

$$\int f(x) dx = -\frac{\sqrt{a}}{2} x^2 + x(\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c}) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sqrt{a}}{4a} (\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c})^2 + \frac{b}{4a} (\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c}) + \\
& + \frac{4ac - b^2}{8a\sqrt{a}} \ln [2\sqrt{a} (\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c}) + b] + e = \\
& = x\sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{1}{2} x\sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \\
& - \frac{c\sqrt{a}}{4a} + \frac{4ac - b^2}{8a\sqrt{a}} \ln (2ax + b + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}) + e
\end{aligned}$$

adică

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx &= \frac{1}{4a} \left[(2ax + b) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \right. \\
& \left. + \frac{4ac - b^2}{2\sqrt{a}} \ln (2ax + b + 2\sqrt{a} \sqrt{ax^2 + bx + c}) \right] + e.
\end{aligned}$$

4.6. Exerciții

Să se calculeze, utilizând a doua metodă de schimbare de variabilă, primitivele următoarelor funcții:

$$1. f(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}, \quad x \in (0, \infty).$$

$$2. f(x) = \cos^2 \sqrt{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

$$3. f(x) = \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$4. f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$5. f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}}, \quad x \in (0, \infty).$$

$$6. f(x) = \frac{1}{(x^2 + 2) \sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in (0, \infty).$$

$$7. f(x) = \frac{x^4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1 + x^2}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$8. f(x) = \frac{1}{x \sqrt{1 + x + x^2}}, \quad x \in (0, \infty).$$

§5. INTEGRAREA FUNCȚIILOR RAȚIONALE

5.1. Reamintim că o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval din \mathbb{R} , se numește *rațională* dacă există două polinoame P și Q cu coeficienți numere reale, astfel încît

$$(\forall) x \in I \Rightarrow Q(x) \neq 0 \text{ și } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

O funcție rațională f se va numi *simplă* dacă este de una din următoarele forme:

- i) $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$;
- ii) $f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$;
- iii) $f(x) = \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ și $b^2 - 4ac < 0$.

Se arată că orice funcție rațională se scrie ca o sumă finită de funcții raționale simple și prin aceasta calculul primitivelor unei funcții raționale se reduce la calculul primitivelor funcțiilor raționale simple.

Vom da în continuare metode de calcul a primitivelor funcțiilor de tipul ii) și iii) analizând pe rând diverse cazuri particulare.

5.2. Dacă funcția rațională $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este de forma

$$f(x) = \frac{1}{x-a}$$

și

$$I \subset (a, \infty) \text{ sau } I \subset (-\infty, a)$$

avem

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + \mathcal{C},$$

adică

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln(x-a) + \mathcal{C} \text{ dacă } I \subset (a, \infty)$$

și

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln(a-x) + \mathcal{C} \text{ dacă } I \subset (-\infty, a).$$

Dacă funcția rațională $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este de forma

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

și

$$I \subset (a, \infty) \text{ sau } I \subset (-\infty, a),$$

avem

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + \mathcal{C}.$$

5.3. Dacă funcția rațională $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este de tipul

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a \neq 0$$

și

$$I \subset \mathbf{R},$$

atunci se știe că

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C.$$

Dacă funcția rațională $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ ($I \subset \mathbf{R}$) este de tipul

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2$$

vom da o formulă de recurență pentru calculul lui

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx.$$

Înmulțind și împărțind mai întâi cu a^2 , apoi adunând și scăzând x^2 la numărător, obținem

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \\ &= \frac{1}{a^2} \left[I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx \right]. \end{aligned}$$

Primitiva din paranteză se va calcula prin părți

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx &= -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \cdot x + \int (x)' \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} dx = \\ &= -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Deci

$$I_n = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} \right].$$

Înainte de a trece la calcularea primitivelor celorlalte funcții de tipul iii) vom face următoarele observații.

Observații: (α) Funcțiile de tipul iii) pot fi considerate (dacă se dă a factor comun forțat la numitor) ca fiind de forma

$$f(x) = \frac{B'x + C'}{(x^2 + px + q)^n}$$

cu

$$p^2 - 4q = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} < 0.$$

(β) Dacă $p^2 - 4q < 0$, atunci $x^2 + px + q$ se poate scrie ca suma de două pătrate:

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}\right) + q - \frac{p^2}{4} = \\ = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} = \varphi^2(x) + \delta^2,$$

unde

$$\varphi(x) = x + \frac{p}{2} \text{ și } \delta = \sqrt{\frac{4q - p^2}{4}} > 0.$$

5.4. Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$) este de tipul

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + px + q},$$

atunci folosind observația (β), avem

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + \delta^2} dx = \frac{1}{\delta} \arctg \frac{\varphi(x)}{\delta} + \mathcal{C} = \\ = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctg \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + \mathcal{C}.$$

Dacă funcția rațională f este de tipul

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq 2,$$

cu $p^2 - 4q < 0$, atunci în baza observației (β), putem scrie

$$f(x) = \frac{1}{[\varphi^2(x) + \delta^2]^n},$$

unde

$$\varphi(x) = x + \frac{p}{2} \text{ și } \delta^2 = \frac{4q - p^2}{4}.$$

Deci

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{[\varphi^2(x) + \delta^2]^n} dx = \int \frac{\varphi'(x)}{[\varphi^2(x) + \delta^2]^n} dx = F \circ \varphi + \mathcal{C}$$

unde F este o primitivă a funcției

$$u \rightarrow \frac{1}{(u^2 + \delta^2)^n},$$

al cărei calcul a fost descris în 4.3.

Dacă funcția rațională f este de tipul

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + px + q)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

atunci, înmulțind și împărțind întâi cu 2, apoi adunând și scăzând p , obținem

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} - \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}.$$

A doua funcție din membrul drept este, abstracție făcând de constanta $\frac{p}{2}$, de tipul precedent.

Pentru a calcula o primitivă a primei funcții din membrul drept, facem schimbarea de variabilă

$$\Psi(x) = x^2 + px + q,$$

și obținem:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \int \frac{\Psi'(x)}{\Psi^n(x)} dx = -\frac{1}{(n-1)\Psi^{n-1}(x)} + \mathcal{C} = \\ &= -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

5.5. *Exemplu.* Se consideră funcția rațională

$$f(x) = \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}.$$

Avem, aplicând procedeul de mai sus

$$\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$$

și deci

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2+x+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx.$$

Aplicând acum procedeul de la 5.4 funcției

$$x \rightarrow \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$$

vom avea

$$(2x+1)(x^2+x+1)' = 4(x^2+x+1) - 3$$

și deci

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{4(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} dx = \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{3} \int (2x+1) \cdot \frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} dx. \end{aligned}$$

Aplicând formula integrării prin părți la termenul al doilea din membrul drept avem

$$\frac{1}{3} \int (2x+1) \cdot \frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} dx = -\frac{1}{3} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

și deci

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{1}{3} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx.$$

Aplicând acum procedeul de la 5.3 obținem:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] + c.$$

În final găsim

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{6} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \\ + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{3} \frac{x-1}{x^2+x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

Admitem fără demonstrație următorul rezultat:

5.6. Teorema (Descompunerea funcțiilor raționale în funcții raționale simple.) Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție rațională

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (Q(x) \neq 0 \quad (\forall) x \in I)$$

unde P și Q sînt polinoame prime între ele. Presupunem că descompunerea lui Q în factori primi are forma

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_q)^{\alpha_q} \cdot (x^2 + M_1x + N_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + M_r x + N_r)^{\beta_r}.$$

Atunci f se descompune, în mod unic,

$$f(x) = L(x) + \sum_{n=1}^q \left[\frac{A_1^n}{(x - a_n)^{\alpha_n}} + \frac{A_2^n}{(x - a_n)^{\alpha_n-1}} + \dots + \frac{A_n^n}{x - a_n} \right] + \\ + \sum_{m=1}^r \left[\frac{B_1^m x + C_1^m}{(x^2 + M_m x + N_m)^{\beta_m}} + \frac{B_2^m x + C_2^m}{(x^2 + M_m x + N_m)^{\beta_m-1}} + \dots + \frac{B_m^m x + C_m^m}{x^2 + M_m x + N_m} \right]$$

unde L este un polinom cu coeficienți reali, iar $a_m, M_m, N_m, A_i^n, B_j^m, C_j^m$ sînt constante reale și $M_m^2 - 4N_m < 0$.

5.7. Observații. Practic, pentru a realiza o descompunere a unei funcții raționale ca sumă de funcții raționale simple se procedează astfel:

Se face împărțirea cu rest a lui P la Q . Vom avea

$$P = L \cdot Q + R$$

unde R este un polinom de grad strict mai mic decît gradul lui Q și deci

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

i) Se scrie formula de descompunere ca în enunțul teoremei în care coeficienții $A, \dots, B, \dots, C, \dots$ sînt nedeterminați.

ii) Se aduce la același numitor în membrul drept și se pune condiția ca numărătorul fracției care rezultă în membrul drept să coincidă cu numărătorul fracției din membrul stîng, de fapt aceasta revine la a scrie că două polinoame coincid.

iii) Se obține un sistem linear în care necunoscutele sînt coeficienții cău-

tați $A, \dots, B, \dots, C, \dots$

Deci, existența și unicitatea soluției acestui sistem este echivalentă cu existența și unicitatea coeficienților din teorema 5.6.

Procedeul descris mai sus de gășire a coeficienților $A, \dots, B, \dots, C, \dots$ se numește *metoda coeficienților nedeterminați*.

5.8. Example

1) Să se calculeze

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 + 1} dx$$

pe un interval I care nu conține punctul $x = -1$.

Vom avea

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 + 1} = x + \frac{-x + 1}{x^3 + 1}$$

și din $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ deducem că are loc o descompunere de forma

$$\frac{-x + 1}{x^3 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}.$$

Aducând la același numitor în membrul drept obținem

$$-x + 1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1), \quad (\forall)x \in I$$

și deci

$$-x + 1 = x^2(A + B) + x(-A + B + C) + A + C, \quad (\forall)x \in I,$$

ceea ce conduce la sistemul

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -A + B + C = -1, \\ A + C = 1. \end{cases}$$

Un calcul simplu ne dă $A = \frac{2}{3}$, $B = -\frac{2}{3}$, $C = \frac{1}{3}$.

Deci

$$f(x) = x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{3} \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}.$$

Prin urmare $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 + 1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \ln \frac{(x + 1)^2}{x^2 - x + 1} + c.$

2) Să se calculeze

$$\int \frac{1}{x^3 + x^5} dx$$

pe un interval care nu conține punctul $x = 0$.

Divizorii ireductibili ai lui $x^3 + x^5$ sînt x și $x^2 + 1$. Primul are ordinul de mul-

tiplicitate 3, iar al doilea are ordinul 1. Avem deci

$$\frac{1}{x^3 + x^5} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Aducînd la același numitor în membrul drept obținem:

$$1 = A_1x^2(x^2 + 1) + A_2x(x^2 + 1) + A_3(x^2 + 1) + x^3(Bx + C)$$

și deci sistemul

$$\begin{cases} A_1 + B = 0, \\ A_2 + C = 0, \\ A_1 + A_3 = 0, \\ A_2 = 0, \\ A_3 = 1, \end{cases}$$

a cărui soluție este

$$A_1 = -1, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 1, \quad B = 1, \quad C = 0.$$

Deci

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Prin urmare $\int \frac{dx}{x^3 + x^5} = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x|} - \frac{1}{2x^2} + c.$

3) Să se calculeze

$$\int \frac{x + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx.$$

Divizorii ireductibili ai lui $x^4 + x^2 + 1$ sînt $x^2 + x + 1$ și $x^2 - x + 1$. Fiecare dintre acești divizori are ordinul de multiplicitate 1. Avem deci

$$f(x) = \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{B'x + C'}{x^2 - x + 1}.$$

Aducînd la același numitor în membrul drept obținem:

$$x + 1 = (Bx + C)(x^2 - x + 1) + (B'x + C')(x^2 + x + 1)$$

care conduce la sistemul

$$\begin{cases} B + B' = 0 \\ -B + C + B' + C' = 0 \\ B - C + B' + C' = 1 \\ C + C' = 1 \end{cases}$$

echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} B + B' = 0, \\ -B + B' = -1, \\ C + C' = 1, \\ -C + C' = 1 \end{cases}$$

a cărui soluție este

$$B = \frac{1}{2}, \quad B' = -\frac{1}{2}, \quad C = 0, \quad C' = 1.$$

Avem

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{4} \frac{2x - 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{4} \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$-\frac{1}{4} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

de unde

$$\int \frac{x+1}{x^4+x+1} dx = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c.$$

4) Să se calculeze

$$\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx$$

pe intervalul $(-\pi, \pi)$.

Facem substituția

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

obținem

$$x = \varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} t, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

și

$$\varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}.$$

Punând

$$f(x) = \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5}, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

obținem

$$f(x) = \frac{1}{2 \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 5}$$

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{1}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} \cdot \frac{2}{1+t^2} = \frac{2}{6t^2 + 4t + 4} = \frac{1}{3t^2 + 2t + 2}.$$

Deoarece

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int \frac{1}{3t^2 + 2t + 2} dt = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t+1}{\sqrt{5}} + c,$$

obținem

$$\int f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + c.$$

5.9. *Exerciții.* Să se calculeze primitivele următoarelor funcții raționale, utilizând descompunerea în funcții raționale simple:

1. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$, $x \in \mathbf{R}$.
2. $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$, $x \in (-\infty, 0)$.
3. $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^3 (x^2 - x + 1)^2}$, $x \in (-\infty, 1)$.
4. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^3 (x^2 + 3x + 2)}$, $x \in (-2, -1)$.
5. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}$, $x \in \mathbf{R}$.
6. $f(x) = \frac{1 + x^2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$, $x \in \mathbf{R}$.
7. $f(x) = \frac{x^7 + 1}{x^2(x - 1)^3}$, $x \in (0, 1)$.
8. $f(x) = \frac{1}{x(x + 1)(x + 2)}$, $x \in (0, \infty)$.
9. $f(x) = \frac{1}{x(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$, $x \in (0, \infty)$.
10. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 + x^2(1 - \sqrt{2}) + x(1 - \sqrt{2}) + 1}$, $x \in (0, \infty)$.
11. $f(x) = \frac{1}{1 + x^3}$, $x \in (0, \infty)$.
12. $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^4}$, $x \in \mathbf{R}$.
13. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 4x + 5}$, $x \in \mathbf{R}$.
14. $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 3)(x + 1)}$, $x \in (0, \infty)$.
15. $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)^2}$, $x \in (0, \infty)$.

5.10. *Exerciții.* Să se calculeze primitivele următoarelor funcții reducibile la funcții raționale:

I.

1. $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, $x \in (-1, \infty)$.
2. $f(x) = \frac{1}{(1 + x)\sqrt{1 + x - x^2}}$, $x \in \left(0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.
3. $f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x + 4}}$, $x \in \mathbf{R}$.

$$4. f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$5. f(x) = \frac{x}{\sqrt{(7x - 10 - x^2)^3}}, \quad x \in (2, 5).$$

$$6. f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - 2x - x^2}}, \quad x \in (0, -1 + \sqrt{2}).$$

$$7. f(x) = \frac{x}{(1 - x^3)\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$8. f(x) = \frac{x + \sqrt{1 + x + x^2}}{1 + x + \sqrt{1 + x + x^2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$9. f(x) = x^2 \sqrt{-x^2 + 4x + 5}, \quad x \in (-1, 5).$$

$$10. f(x) = \frac{1 + x}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}}, \quad x \in (-1, 5).$$

II.

$$1. f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$2. f(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$3. f(x) = \frac{1}{\sin x - 2 \cos x + 3}, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$4. f(x) = \frac{1}{\sin x (2 + \cos x - 2 \sin x)}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right).$$

$$5. f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$6. f(x) = \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$7. f(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

$$8. f(x) = \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$9. f(x) = \frac{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}{\sin x - \cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$10. f(x) = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 + 2a \sin x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

unde a este un număr real $0 < a < 1$.

II.

Funcții integrabile

§ 1. DIVIZIUNI

1.1. Definiție. Fie $[a, b]$ un interval închis și mărginit din \mathbb{R} . Se numește **diviziune a intervalului** $[a, b]$ un sistem de puncte

$$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

din $[a, b]$ astfel încît

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Uneori vom nota diviziunile astfel:

$$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

Cea mai mare dintre lungimile intervalelor

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

se numește **norma diviziunii** Δ și se notează: $\|\Delta\|$.

Așadar,

$$\|\Delta\| \stackrel{\text{def.}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

1.2. Exemple. Sistemele de puncte

$$\Delta_1 = (0, 1),$$

$$\Delta_2 = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\right),$$

$$\Delta_3 = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1\right)$$

sînt diviziuni ale intervalului $[0, 1]$. Aceste diviziuni au respectiv normele:

$$\|\Delta_1\| = 1; \quad \|\Delta_2\| = \frac{1}{2}; \quad \|\Delta_3\| = \frac{1}{5}.$$

1.3. Observații: α) Dacă $[a, b]$ este un interval, atunci $\Delta = (a, b)$ este singura diviziune a lui $[a, b]$ de normă egală cu $b - a$. Orice altă diviziune a intervalului $[a, b]$ va avea norma strict mai mică decît $b - a$.

β) Pentru orice număr real $r > 0$ există diviziuni Δ ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$\|\Delta\| < r.$$

Într-adevăr, să notăm cu L lungimea intervalului $[a, b]$:

$$L = b - a$$

și să luăm un număr natural n astfel încît

$$n > \frac{L}{r}.$$

Împărțind intervalul $[a, b]$ în n părți egale, obținem diviziunea

$$\Delta = \left(a, a + \frac{L}{n}, a + 2 \frac{L}{n}, \dots, a + (n-1) \frac{L}{n}, b \right),$$

care are norma egală cu $\frac{L}{n}$. Deci

$$\|\Delta\| = \frac{L}{n} < r.$$

1.4. *Exerciții.* Determinați normele diviziunilor:

$$\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1 \right),$$

$$\Delta_2 = \left(0, \frac{2}{13}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right),$$

$$\Delta_3 = (1, e, e^2, \dots, e^{11}),$$

$$\Delta_4 = \left(0, \frac{1}{2^{10}}, \frac{1}{2^9}, \dots, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}, 1 \right).$$

1.5. *Definiție.* Fie

$$\Delta_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

și

$$\Delta_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m)$$

două diviziuni ale unui interval $[a, b]$.

Se spune că Δ_2 este mai fină decât Δ_1 dacă orice punct al diviziunii Δ_1 este și punct al diviziunii Δ_2 , adică mulțimea

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

este inclusă în mulțimea

$$\{y_0, y_1, \dots, y_m\}.$$

Dacă Δ_2 este mai fină decât Δ_1 vom scrie

$$\Delta_1 \subset \Delta_2.$$

1.6. *Exemplu.* Fie

$$\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{2}, 1 \right),$$

$$\Delta_2 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 1 \right),$$

$$\Delta_3 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right)$$

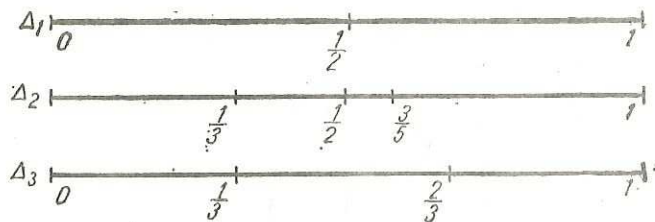


Fig. II.1.

diviziuni ale intervalului $[0,1]$. Atunci

$$\Delta_1 \subset \Delta_2, \Delta_1 \not\subset \Delta_3, \Delta_2 \not\subset \Delta_3.$$

1.7. *Observații.* α) Dacă Δ, Δ' sint diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$\Delta \subset \Delta',$$

atunci

$$\|\Delta'\| \leq \|\Delta\|.$$

Deci, prin trecere la o diviziune mai fină, norma diviziunii se micșorează.

β) Din $\|\Delta'\| < \|\Delta\|$ nu rezultă, în general, că $\Delta \subset \Delta'$. De exemplu, dacă

$$\Delta = \Delta_1 = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\Delta' = \Delta_3 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right),$$

atunci

$$\|\Delta'\| = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \|\Delta\|$$

și totuși

$$\Delta \not\subset \Delta'.$$

1.8. Definiție. Fie

$$\Delta_1 = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

și

$$\Delta_2 = (y_0, y_1, \dots, y_m)$$

două diviziuni ale intervalului $[a, b]$. Diviziunea formată din mulțimea

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_0, y_1, \dots, y_m\},$$

ale cărei elemente sint luate în ordine strict crescătoare, se numește **reuniunea diviziunilor** Δ_1, Δ_2 și se notează

$$\Delta_1 \cup \Delta_2.$$

1.9. *Exemplu.* Dacă

$$\Delta_1 = \left(1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, 2\right),$$

$$\Delta_2 = \left(1, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2\right),$$

$$\Delta_3 = (1, \sqrt{3}, 2)$$

sint diviziuni ale intervalului $[1, 2]$, atunci

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 = \left(1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2\right),$$

$$\Delta_1 \cup \Delta_3 = \left(1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2\right),$$

$$\Delta_2 \cup \Delta_3 = \left(1, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2\right).$$

1.10. *Observații.* $\alpha)$ Reuniunea $\Delta_1 \cup \Delta_2$ a două diviziuni este mai fină decât fiecare din diviziunile Δ_1, Δ_2 :

$$\Delta_1 \subset \Delta_1 \cup \Delta_2 \text{ și } \Delta_2 \subset \Delta_1 \cup \Delta_2.$$

$\beta)$ Dacă

$$\Delta_1 = (x_0, x_1, \dots, x_n),$$

$$\Delta_2 = (y_0, y_1, \dots, y_m)$$

și

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 = (z_0, z_1, \dots, z_p),$$

atunci

$$p \leq n + m - 1.$$

1.11. *Exerciții.* $a)$ Determinați reuniunea perechilor de diviziuni

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta' = \left(0, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}, 1\right), \\ \Delta'' = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right); \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta' = (0, e, e^2, 10), \\ \Delta'' = (0, 1, 2, 3, \dots, 10). \end{array} \right.$$

$b)$ Fie p, q două numere naturale și diviziunile

$$\Delta' = \left(0, \frac{1}{p^n}, \frac{2}{p^n}, \dots, \frac{k}{p^n}, \dots, \frac{p^n - 1}{p^n}, 1 \right).$$

$$\Delta'' = \left(0, \frac{1}{q^n}, \frac{2}{q^n}, \dots, \frac{k}{q^n}, \dots, \frac{q^n - 1}{q^n}, 1 \right).$$

Să se arate că:

i) $\Delta' \subset \Delta'' \Leftrightarrow p$ divide pe q ;

ii) $\Delta' \cup \Delta'' \subset \Delta$ unde

$$\Delta = \left(0, \frac{1}{(pq)^n}, \frac{2}{(pq)^n}, \dots, \frac{k}{(pq)^n}, \dots, \frac{(pq)^n - 1}{(pq)^n}, 1 \right).$$

§ 2. FUNCȚII INTEGRABILE

2.1. Definiție. Considerăm următoarele obiecte:

- 1) un interval închis și mărginit $[a, b]$;
- 2) o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$;
- 3) o diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ a intervalului $[a, b]$;
- 4) un sistem de n puncte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ astfel încît

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, \quad (1 \leq i \leq n)$$

numit sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ .
Numărul real

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

se numește suma Riemann asociată funcției f , diviziunii Δ și punctelor intermediare $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Acest număr va fi notat prin $\sigma_{\Delta}(f, \xi)$ sau prin $\sigma_{\Delta}(f, \xi_i)$.

2.2. Observație. Dacă funcția f este pozitivă, atunci suma Riemann $\sigma_{\Delta}(f, \xi_i)$ reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de bază $x_i - x_{i-1}$ și de înălțime $f(\xi_i)$, ($1 \leq i \leq n$). Deci $\sigma_{\Delta}(f, \xi_i)$ aproximează aria mulțimii din plan, denumită subgraficul lui f ,

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

delimitată de axa Ox , graficul funcției f și dreptele paralele la axa Oy care trec prin punctele de coordonate $(a, 0)$, respectiv $(b, 0)$ (fig. II.2).

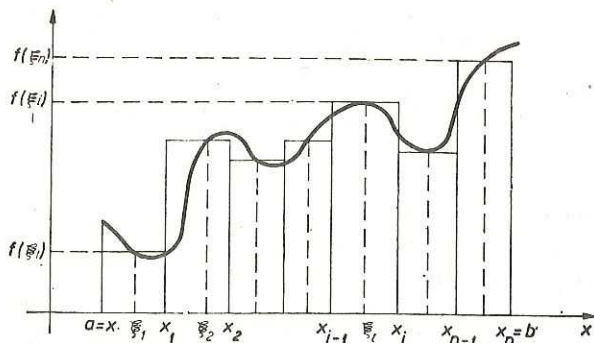


Fig. II.2.

Pină acum nu ne-am pus problema ce înseamnă că o mulțime mărginită din plan are arie și cum s-ar defini aceasta. Noțiunea de arie va fi studiată în Capitolul III, paragraful 1, unde se va arăta că dacă funcția f este continuă, atunci mulțimea Γ_f are arie și

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx.$$

2.3. Definiție. O funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **integrabilă Riemann** (sau, simplu, **integrabilă**) dacă există un număr real I_f cu proprietatea:

oricare ar fi $\epsilon > 0$ există $\eta_\epsilon > 0$ astfel încît pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\epsilon$ și orice puncte intermediare

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I_f| < \epsilon.$$

Numărul real I_f se numește **integrala sau integrala definită a funcției f pe intervalul $[a, b]$** și se notează

$$\int_a^b f(x)dx.$$

2.4. Observații.(α) Pentru un interval fixat $[a, b]$, numărul I_f , asociat fiecărei funcții integrabile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este unic determinat de f .

Într-adevăr, dacă I_1, I_2 ar fi două numere care verifică condițiile din definiția 2.3, atunci pentru orice $\epsilon > 0$ ar exista $\eta_{k,\epsilon} > 0$ ($k = 1, 2$) astfel încît pentru orice diviziune

$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ a lui $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_{k,\epsilon}$ și orice puncte intermediare $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ($1 \leq i \leq n$) să avem

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I_k| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (k = 1, 2).$$

Luind

$$\eta_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \min(\eta_{1,\varepsilon}, \eta_{2,\varepsilon})$$

rezultă că pentru orice diviziune Δ a lui $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ și orice sistem (ξ_i) de puncte intermediare asociat lui Δ , avem

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ și } |\sigma_\Delta(f, \xi) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2},$$

deci

$$|I_1 - I_2| < |I_1 - \sigma_\Delta(f, \xi)| + |\sigma_\Delta(f, \xi) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă

$$I_1 = I_2.$$

(β) Orice funcție integrabilă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este mărginită, adică există o constantă $M \geq 0$ astfel încît

$$|f(x)| \leq M \quad (\forall) x \in [a, b].$$

Într-adevăr, să notăm cu I_f integrala lui f pe intervalul $[a, b]$ și să luăm $\varepsilon = 1$. Din definiția integrabilității lui f , rezultă că există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$(1) \quad |\sigma_\Delta(f, \xi_i) - I_f| < 1$$

oricare ar fi diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, cu $\|\Delta\| < \eta$, și oricare ar fi punctele intermediare

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (1 \leq i \leq n).$$

Considerind o diviziune fixată

$$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n) \text{ cu } \|\Delta\| < \eta$$

este suficient să arătăm că f este mărginită pe fiecare interval $[x_{k-1}, x_k]$ al acestei diviziuni. În acest scop, considerăm un element arbitrar $x \in [x_{k-1}, x_k]$ și luăm următorul sistem de puncte intermediare

$$(2) \quad \xi_i = \begin{cases} x_i, & \text{dacă } i \neq k \\ x, & \text{dacă } i = k. \end{cases}$$

Atunci din (1) și (2) rezultă

$$|f(x)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i \neq k} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - I_f| < 1$$

deci

$$|f(x)| \leq M_k$$

unde cu M_k am notat numărul real pozitiv

$$\frac{1}{x_k - x_{k-1}} \left(1 + |I_f| + \sum_{i \neq k} |f(x_i)| (x_i - x_{i-1}) \right).$$

(γ) Integrala definită a unei funcții f este un număr real, spre deosebire de integrala nedefinită a lui f care este mulțimea tuturor primitivelor lui f .

2.5. *Exemple.*

1) Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție constantă

$$f(x) = c, \quad (\forall) x \in [a, b].$$

Vom arăta că f este integrabilă și

$$\int_a^b f(x) dx = c(b - a).$$

Se observă că, oricare ar fi diviziunea

$$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

a lui $[a, b]$ și oricare ar fi punctele intermediare

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, \quad (1 \leq i \leq n),$$

avem

$$\sigma_{\Delta}(f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a).$$

Deci, luând $I = c(b - a)$, avem

$$|\sigma_{\Delta}(f, \xi) - I| = 0 < \varepsilon$$

oricare ar fi $\varepsilon > 0$. Prin urmare f este integrabilă și

$$\int_a^b f(x) dx = c(b - a).$$

2) Fie $\alpha \in \mathbf{R}$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \alpha x, \quad (\forall) x \in [a, b]$$

Vom arăta că f este integrabilă și

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{\alpha}{2} (b^2 - a^2).$$

Pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ a intervalului $[a, b]$ cu norma mai mică ca $\eta > 0$ și orice puncte intermediare

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

avem

$$(1) \quad \begin{aligned} \sigma_{\Delta}(f, \xi) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[f(\xi_i) - f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \right] (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Deoarece $f(x) = \alpha x$ pentru orice $x \in [a, b]$, deducem

$$f(\xi_i) - f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) = \alpha \left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right).$$

Observînd că $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ este mijlocul intervalului $[x_{i-1}, x_i]$, deducem

$$(2) \quad \left| f(\xi_i) - f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \right| < |\alpha| \eta.$$

Pe de altă parte avem

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) (x_i - x_{i-1}) = \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i-1}) (x_i - x_{i-1}) = \\ = \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{\alpha}{2} (b^2 - a^2);$$

deci din relațiile (1), (2) și (3) deducem

$$\left| \sigma_{\Delta}(f, \xi) - \frac{\alpha}{2} (b^2 - a^2) \right| \leq |\alpha| \eta (b - a).$$

Fie acum $\varepsilon > 0$ și

$$0 < \eta_{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{|\alpha| \cdot |b - a|},$$

obținem

$$\left| \sigma_{\Delta}(f, \xi) - \frac{\alpha}{2} (b^2 - a^2) \right| < \varepsilon,$$

pentru orice diviziune Δ cu $\|\Delta\| < \eta$ și orice sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ . De aici rezultă că f este integrabilă și că

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{\alpha}{2} (b^2 - a^2).$$

3) Să se arate că funcția

$$f(x) = \cos x$$

este integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ și

$$\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a.$$

Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ și fie $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i \leq n$) puncte intermediare arbitrare.

Aplicînd teorema creșterilor finite funcției $f(x) = \sin x$ pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i \leq n$), obținem punctele $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ astfel încît

$$\sin x_i - \sin x_{i-1} = (x_i - x_{i-1}) \cos c_i, \quad (1 \leq i \leq n).$$

Ținînd seama de aceste egalități putem scrie:

$$(4) \quad \sigma_{\Delta}(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^n \cos \xi_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \cos c_i (x_i - x_{i-1}) + \\ + \sum_{i=1}^n (\cos \xi_i - \cos c_i) (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (\sin x_i - \sin x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n (\cos \xi_i - \cos c_i) (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sin b - \sin a + \sum_{i=1}^n (\cos \xi_i - \cos c_i) (x_i - x_{i-1}).$$

Aplicind acum teorema creșterilor finite funcției $f(x) = \cos x$ pe intervalul $[\xi_i, c_i]$ sau $[c_i, \xi_i]$, obținem un punct $\theta_i \in (\xi_i, c_i)$ astfel încît

$$\cos \xi_i - \cos c_i = (\xi_i - c_i) \sin \theta_i,$$

deci

$$|\cos \xi_i - \cos c_i| \leq |\xi_i - c_i| \cdot |\sin \theta_i| \leq \|\Delta\|,$$

prin urmare

$$(2) \quad \left| \sum_{i=1}^n (\cos \xi_i - \cos c_i) (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \|\Delta\| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \|\Delta\| (b - a).$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$(3) \quad |\sigma_{\Delta}(f, \xi_i) - (\sin b - \sin a)| \leq \|\Delta\| (b - a).$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$, luăm η_{ε} astfel încît

$$0 < \eta_{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Atunci din (3) rezultă că pentru orice diviziune Δ , cu $\|\Delta\| < \eta_{\varepsilon}$ și pentru orice puncte intermediare ξ_i are loc inegalitatea

$$|\sigma_{\Delta}(f, \xi_i) - (\sin b - \sin a)| < \varepsilon.$$

Aceasta arată că funcția $f(x) = \cos x$ este integrabilă pe $[a, b]$

și

$$\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a.$$

2.6. Exemple de funcții neintegrabile. 1) Vom arăta că funcția lui Dirichlet $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional,} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

nu este integrabilă.

Fie $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ o diviziune a intervalului $[0, 1]$ și fie

$$\xi_i', \xi_i'' \in [x_{i-1}, x_i], \quad 1 \leq i \leq n$$

două sisteme de puncte intermediare alese astfel încît

fiecare ξ_i' ($1 \leq i \leq n$) este rațional,

iar

fiecare ξ_i'' ($1 \leq i \leq n$) este irațional.

Atunci

$$g(\xi_i') = 1 \text{ și } g(\xi_i'') = 0, \quad (1 \leq i \leq n),$$

deci

$$(1) \quad \sigma_{\Delta}(g, \xi') = 1, \quad \sigma_{\Delta}(g, \xi'') = 0.$$

Dacă g ar fi integrabilă, atunci ar exista $I \in \mathbb{R}$ care ar verifica condițiile definiției

2.3. În particular, pentru $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ ar exista $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice diviziune

$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ a lui $[0, 1]$, cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$, avem

$$(2) \quad |\sigma_\Delta(g, \xi') - I| < \varepsilon \text{ și } |\sigma_\Delta(g, \xi'') - I| < \varepsilon.$$

Din (1) și (2) rezultă

$$|1 - I| = |\sigma_\Delta(g, \xi') - I| < \varepsilon.$$

$$|I| = |0 - I| = |\sigma_\Delta(g, \xi'') - I| < \varepsilon,$$

ceea ce conduce la contradicția

$$1 = |1 - I + I| \leq |1 - I| + |I| < 2\varepsilon < 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Așadar, funcția g nu este integrabilă.

2) Funcția $g_\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha}, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

fiind nemărginită pentru $\alpha > 0$, rezultă din observația 2.4(β) că nu este integrabilă.

2.7. Observație. Dacă $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sînt două funcții cu proprietățile:

(α) f este integrabilă pe $[a, b]$;

(β) există o parte finită $A \subset [a, b]$ astfel încît

$$g(x) = f(x), \quad (\forall) x \in [a, b] \setminus A,$$

atunci

(1) g este integrabilă pe $[a, b]$

și

$$(2) \quad \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Este suficient ca demonstrația să fie dată pentru cazul cînd mulțimea finită A este formată dintr-un singur punct c , deoarece cazul general se poate obține din acesta prin inducție. Presupunem deci $A = \{c\}$.

Funcția f fiind integrabilă, este mărginită (observația 2.4(β)), deci există $M_1 \geq 0$ astfel încît

$$|f(x)| \leq M_1 \quad (\forall) x \in [a, b]$$

luînd

$$M \stackrel{\text{def.}}{=} \max(M_1, |g(c)|)$$

rezultă

$$|f(x)| \leq M \quad (\forall) x \in [a, b]$$

și

$$|g(x)| \leq M \quad (\forall) x \in [a, b]$$

f fiind integrabilă, înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$(1) \quad \left| \sigma_{\Delta}(f, \xi_i) - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

oricare ar fi diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, cu $\|\Delta\| < \eta'_\varepsilon$, și oricare ar fi punctele intermediare $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] (1 \leq i \leq n)$.

Luind

$$\eta_\varepsilon \stackrel{\text{def.}}{=} \min \left(\eta'_\varepsilon, \frac{\varepsilon}{8M} \right)$$

avem $\eta_\varepsilon \leq \eta'_\varepsilon$

și

$$(2) \quad 4M\eta_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă c este un punct al diviziunii Δ , atunci există $0 \leq j \leq n$ astfel încît $c = x_j$. În acest caz singurele puncte intermediare care ar putea coincide cu $c = x_j$ sînt punctele ξ_j sau ξ_{j+1} .

Deci ținînd seama de faptul că $f(x) = g(x) (\forall x \neq c)$, obținem

$$\begin{aligned} \left| \sigma_{\Delta}(f, \xi_i) - \sigma_{\Delta}(g, \xi_i) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) - g(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \\ &\leq \left| f(\xi_j) - g(\xi_j) \right| (x_j - x_{j-1}) + \left| f(\xi_{j+1}) - g(\xi_{j+1}) \right| (x_{j+1} - x_j) \leq \\ &\leq 4M \|\Delta\| < 4M\eta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Dacă c nu este un punct al diviziunii Δ , atunci c este conținut într-un interval deschis (x_{k-1}, x_k) . Deci singurul punct intermediar care ar putea coincide cu c este punctul ξ_k , prin urmare

$$\begin{aligned} \left| \sigma_{\Delta}(f, \xi_i) - \sigma_{\Delta}(g, \xi_i) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - g(\xi_i)) (x_i - x_{i-1}) \right| = \\ &= \left| f(\xi_k) - g(\xi_k) \right| (x_k - x_{k-1}) \leq 2M \|\Delta\| < 2M\eta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Din analiza făcută pînă acum rezultă că, oricare ar fi poziția punctului c , are loc inegalitatea

$$(3) \quad \left| \sigma_{\Delta}(f, \xi_i) - \sigma_{\Delta}(g, \xi_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Din inegalitățile (1) și (3) obținem

$$\left| \sigma_{\Delta}(g, \xi_i) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon,$$

adică g este integrabilă și

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2.8. Observație. Observația precedentă arată că dacă f este o funcție integrabilă pe $[a, b]$ și dacă se modifică valorile funcției f într-o mulțime finită de puncte $A =$

$= \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subset [a, b]$, atunci funcția nou-obținută este încă integrabilă și integralele celor două funcții sînt egale.

Dacă modificarea valorilor funcției f se face într-o mulțime infinită de puncte, atunci funcția nou-obținută poate să nu mai fie integrabilă. Într-adevăr, funcția constantă

$$f_0(x) = 0, (\forall)x \in [0, 1]$$

este integrabilă (exemplul 2.5 (1)). Totuși funcția lui Dirichlet (exemplul 2.6 (1))

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0, 1] \cap Q, \\ 0, & \text{dacă } x \in [0, 1] \setminus Q, \end{cases}$$

care se poate obține prin modificarea funcției f_0 pe mulțimea infinită

$$[0, 1] \cap Q$$

nu este integrabilă.

2.9. Teoremă. Pentru o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ următoarele afirmații sînt echivalente:

(α) f este integrabilă;

(β) există un număr real I astfel încît

oricare ar fi șirul de diviziuni

$$\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n), \quad (n \in \mathbb{N})$$

ale intervalului $[a, b]$ cu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$$

și oricare ar fi punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leq \xi_i^n \leq x_i^n, \quad (1 \leq i \leq k_n; n \in \mathbb{N}),$$

șirul sumelor Riemann

$$\{\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

converge la I .

Demonstrație (α) \Rightarrow (β). Presupunem că funcția f este integrabilă și vom arăta că are loc afirmația (β).

Fie deci

$$\Delta_n = (a = x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n = b)$$

un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$$

și fie

$$\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n] \quad (1 \leq i \leq k_n)$$

puncte intermediare.

Funcția f fiind integrabilă, există $I_f \in \mathbb{R}$ cu proprietatea: pentru orice $\varepsilon > 0$ există η_ε astfel încît oricare ar fi diviziunea Δ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ și oricare ar fi punctele

intermediare ξ_i are loc inegalitatea

$$(2) \quad |\sigma_{\Delta}(f, \xi_i) - I_f| < \varepsilon.$$

Din relația (1) rezultă că există un rang $n_\varepsilon = n(\eta_\varepsilon)$ astfel încît

$$\|\Delta_n\| < \eta_\varepsilon, \quad (\forall) n \geq n_\varepsilon;$$

deci, ținînd seamă de (2) obținem

$$|\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) - I_f| < \varepsilon, \quad (\forall) n \geq n_\varepsilon,$$

adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) \text{ există} = I_f.$$

(β) \Rightarrow (α). Să presupunem că f verifică condiția (β) și să arătăm că f este integrabilă, mai precis, numărul I care figurează în condiția (β) este chiar integrala lui f .

Dacă numărul I n-ar fi integrala lui f , atunci ar exista $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît oricare ar fi $\eta > 0$ există o diviziune

$$\Delta_\eta = (x_0^\eta, x_1^\eta, \dots, x_{k_\eta}^\eta)$$

a lui $[a, b]$ cu $\|\Delta_\eta\| < \eta$ și există punctele intermediare

$$x_{i-1}^\eta \leq \xi_i^\eta \leq x_i^\eta \quad (1 \leq i \leq k_\eta)$$

astfel încît

$$|\sigma_{\Delta_\eta}(f, \xi_i^\eta) - I| \geq \varepsilon_0.$$

Luînd în particular $\eta = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$), obținem o diviziune

$$\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n)$$

a lui $[a, b]$ cu

$$(1) \quad \|\Delta_n\| < \frac{1}{n}$$

și un sistem ξ^n de puncte intermediare

$$x_{i-1}^n \leq \xi_i^n \leq x_i^n, \quad (1 \leq i \leq k_n)$$

astfel încît

$$(2) \quad |\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) - I| \geq \varepsilon, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Din inegalitatea (1) rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0,$$

iar din (2) rezultă că șirul sumelor Riemann

$$\{\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

nu converge la I , ceea ce contrazice ipoteza (β).

2.10. Observație. Condiția (β) din enunțul teoremei 2.9 este echivalentă cu condiția următoare (aparent mai slabă)

(β') oricare ar fi șirul de diviziuni

$$\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n), \quad (n \in \mathbb{N})$$

ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$, și oricare ar fi punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leq \xi_i^n \leq x_i^n, \quad (1 \leq i \leq k_n; n \in \mathbb{N}),$$

șirul sumelor Riemann este convergent.

Evident $(\beta) \Rightarrow (\beta')$.

Demonstrația implicației $(\beta') \Rightarrow (\beta)$ revine la a demonstra că toate sumele Riemann

$$\{\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n)\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \text{cu } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$$

au o limită comună.

Presupunem că (β') are loc; fie

$$\Delta'_n = (a = x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n = b), \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$\Delta''_n = (a = y_0^n, y_1^n, \dots, y_{p_n}^n = b), \quad (n \in \mathbb{N})$$

două șiruri de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta'_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta''_n\| = 0$$

și fie punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leq \xi_i^n \leq x_i^n, \quad (1 \leq i \leq k_n; n \in \mathbb{N}),$$

$$y_{i-1}^n \leq \eta_i^n \leq y_i^n, \quad (1 \leq i \leq p_n; n \in \mathbb{N}).$$

Considerăm șirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit în felul următor

$$(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \stackrel{\text{def}}{=} (\Delta'_0, \Delta''_0, \Delta'_1, \Delta''_1, \dots, \Delta'_n, \Delta''_n, \dots),$$

iar punctele intermediare le luăm astfel

$$\theta_i^n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \xi_i^n, & \text{dacă } n = \text{impar}, \\ \eta_i^n & \text{dacă } n = \text{par}. \end{cases}$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$, rezultă din ipoteza (β') că șirurile de sume Riemann

$$\{\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n)\}, \quad \{\sigma_{\Delta_n}(f, \eta^n)\}, \quad \{\sigma_{\Delta_n}(f, \theta^n)\}$$

sînt convergente; fie I' , I'' , respectiv I , limitele lor. Însă primele două șiruri sînt subșiruri ale celui de-al treilea șir, deci (Observația A 15) au aceeași limită. Așadar,

$$I' = I = I''.$$

2.11. Observație. În cursul demonstrației teoremei 2.9 și a observației precedente s-a arătat că dacă este îndeplinită una din cele trei condiții echivalente (α) , (β) , (β') , atunci integrala lui f este obținută astfel:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n),$$

iar limita nu depinde de șirul de diviziuni $\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n)$ ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$ și nici de punctele intermediare $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$, $(1 \leq i \leq k_n; n \in \mathbb{N})$.

2.12. Teoremă. (Formula lui Leibniz — Newton).

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă care admite primitive pe $[a, b]$.
Atunci pentru orice primitivă F a lui f are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Demonstrație. Fie

$$\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n)$$

un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0.$$

Aplicînd teorema creșterilor finite funcției F pe intervalul $[x_{i-1}^n, x_i^n]$, obținem $\xi_i^n \in (x_{i-1}^n, x_i^n)$ cu proprietatea

$$F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = F'(\xi_i^n) (x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Însă, prin ipoteză $F'(x) = f(x)$, $(\forall) x \in [a, b]$, deci

$$F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = f(\xi_i^n) (x_i^n - x_{i-1}^n).$$

prin urmare

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) &= \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^n) (x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{k_n} [F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n)] = \\ &= F(b) - F(a), \quad (\forall) n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Atunci (observația 2.11)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = F(b) - F(a).$$

2.13. Notăție. În loc de $F(b) - F(a)$ se folosește frecvent notația

sau

$$F(x) \Big|_a^b$$

$$[F(x)]_a^b$$

și se citește: $F(x)$ luat între a și b .

2.14. Exemplu de funcție integrabilă care nu admite primitive. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcția constantă egală cu 1,

$$f(x) = 1, \quad (\forall) x \in [a, b]$$

și $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq \frac{a+b}{2}; \\ -1, & \text{dacă } x = \frac{a+b}{2}. \end{cases}$$

Atunci (exemplul 2.5 (1)) funcția f este integrabilă, iar funcția g se obține din f , modificând pe f în punctul $\frac{a+b}{2}$. Prin urmare, în baza observației 2.7 și funcția g este integrabilă.

Dacă g ar admite primitive, atunci g ar avea și proprietatea lui Darboux (observația I. 1.4 (c)). Cum g nu se anulează nicăieri, rezultă că g nu are proprietatea lui Darboux.

2.15. Observație. Din exemplul de mai sus rezultă că *clasa funcțiilor integrabile care admit primitive, nu coincide cu clasa tuturor funcțiilor integrabile.*

Funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

fiind nemărginită, nu este integrabilă (observația 2.4(β)).

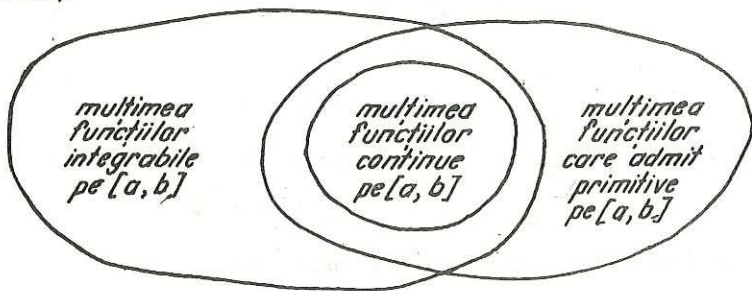
Se observă că funcția

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este derivabilă și $F' = f$, adică f admite primitive.

Există funcții mărginite care au primitive, dar care nu sînt integrabile. Prezentarea unui astfel de exemplu necesită noțiuni și rezultate care depășesc cadrul acestui manual.

Vom vedea în paragrafele următoare că mulțimea funcțiilor continue pe un interval $[a, b]$ este conținută atât în mulțimea funcțiilor integrabile pe $[a, b]$ (teorema 3.12) cît și în mulțimea funcțiilor care admit primitive pe $[a, b]$ (teorema 4.8).



2.16. Propoziție. Dacă $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sînt două funcții integrabile, iar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lambda f + \mu g$$

este integrabilă și

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Demonstrație. Fie

$$\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n), \quad (n \in \mathbb{N})$$

un șir de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$$

și fie punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leq \xi_i^n \leq x_i^n, \quad (1 \leq i \leq k_n; n \in \mathbb{N}).$$

Avem

$$\begin{aligned} (1) \quad \sigma_{\Delta_n}(\lambda f + \mu g, \xi^n) &= \sum_{i=1}^n [\lambda f(\xi_i^n) + \mu g(\xi_i^n)](x_i^n - x_{i-1}^n) = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) + \mu \sum_{i=1}^n g(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = \lambda \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) + \mu \sigma_{\Delta_n}(g, \xi^n). \end{aligned}$$

Funcțiile f și g fiind integrabile, rezultă (observația 2.11) că membrul drept al egalității (1) converge la

$$\lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Prin urmare șirul $\{\sigma_{\Delta_n}(\lambda f + \mu g, \xi^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent, și $\lambda f + \mu g$ este integrabilă. Trecând la limită în (1), obținem

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

2.17. Propoziție. Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă pozitivă

$$f(x) \geq 0, \quad (\forall) x \in [a, b],$$

atunci

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Demonstrație. Fie

$$\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n) \quad n \in \mathbb{N}$$

un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$$

și fie punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leq \xi_i^n \leq x_i^n, \quad (1 \leq i \leq k_n; n \in \mathbb{N}).$$

Atunci, f fiind pozitivă, avem

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) \geq 0,$$

deci

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) \geq 0.$$

2.18. Consecință. Dacă $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ sînt funcții integrabile astfel încît

$$f(x) \leq g(x), \quad (\forall) x \in [a, b],$$

atunci

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că funcția $g - f$ este pozitivă. Deci aplicînd propozițiile 2.16 și 2.17, obținem

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0,$$

adică

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

2.19. Consecință. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ este integrabilă și

$$m \leq f(x) \leq M, \quad (\forall) x \in [a, b],$$

atunci

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

Demonstrație. Aplicînd consecința 2.18 funcției f și funcțiilor constante m , M și țînînd seama de exemplul 2.5 (1), obținem

$$m(b - a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b - a).$$

2.20. Observație. Orice funcție integrabilă fiind mărginită (observația 2.4 (β)), există $m, M \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$m \leq f(x) \leq M, \quad (\forall) x \in [a, b].$$

2.21. Propoziție. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ și $c \in (a, b)$ astfel încît restricțiile lui f la $[a, c]$ și la $[c, b]$ sînt integrabile. Atunci f este integrabilă și

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Demonstrație. Notăm cu f_1 restricția lui f la $[a, c]$ și cu f_2 restricția lui f la $[c, b]$. Prin ipoteză funcțiile f_1 și f_2 sînt integrabile deci (observația 2.4 (β)), mărginite. Rezultă că f este mărginită, deci există $M > 0$ astfel încît

$$|f(x)| < M, \quad (\forall) x \in [a, b].$$

Utilizând din nou integrabilitatea lui f_1 și f_2 deducem că pentru $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$(1') \quad \left| \int_a^c f(x) dx - \sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$(1'') \quad \left| \int_c^b f(x) dx - \sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'') \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pentru orice diviziuni Δ' și Δ'' ale intervalelor $[a, c]$ și respectiv $[c, b]$ cu $\|\Delta'\| < \eta_\varepsilon$, $\|\Delta''\| < \eta_\varepsilon$ și orice sisteme ξ' și ξ'' de puncte intermediare asociate diviziunilor Δ' și respectiv Δ'' . În plus, putem presupune că, micșorînd eventual pe η_ε , avem

$$2M \eta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fie acum

$$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ și punctele intermediare

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad (1 \leq i \leq n).$$

Vom arăta că

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| < \varepsilon,$$

unde

$$I = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Într-adevăr, dacă c este un punct al diviziunii Δ , atunci

$$\Delta' = (x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, c)$$

este o diviziune a lui $[a, c]$, iar

$$\Delta'' = (c, x_{p+1}, \dots, x_n)$$

este o diviziune a lui $[c, b]$ și avem.

$$\|\Delta'\| < \eta_\varepsilon, \quad \|\Delta''\| < \eta_\varepsilon.$$

Punînd

$$\xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}),$$

$$\xi'' = (\xi_p, \xi_{p+1}, \dots, \xi_n)$$

avem

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') + \sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'')$$

și deci din (1') - (1'') rezultă

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| \leq \left| \sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') - \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'') - \int_c^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Dacă c nu este punct al diviziunii Δ , atunci există $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încît

$$x_{p-1} < c < x_p.$$

Deducem că

$$\Delta' = (x_0, \dots, x_{p-1}, c)$$

este o diviziune a lui $[a, c]$, iar

$$\Delta'' = (c, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$$

este o diviziune a lui $[c, b]$. Punind

$$\xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}, c),$$

$$\xi'' = (c, \xi_{p+1}, \dots, \xi_n),$$

obținem

$$\sigma_{\Delta}(f, \xi) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + f(\xi_p)(x_p - x_{p-1}),$$

$$\sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') = \sum_{i=1}^{p-1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + f(c)(c - x_{p-1}),$$

$$\sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'') = \sum_{i=p+1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + f(c)(x_p - c)$$

și deci

$$\sigma_{\Delta}(f, \xi) = \sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') + \sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'') + f(\xi_p)(x_p - x_{p-1}) - f(c)(x_p - x_{p-1}).$$

De aici și din relațiile (1') - (1'') deducem

$$|\sigma_{\Delta}(f, \xi) - I| \leq \left| \sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') - \int_a^c f(x)dx \right| + \left| \sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'') - \int_c^b f(x)dx \right| + |f(\xi_p) - f(c)|(x_p - x_{p-1})$$

și deci

$$|\sigma_{\Delta}(f, \xi) - I| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + 2M \cdot \eta_{\varepsilon} < \varepsilon.$$

2.22. Definiție. Dacă $a \leq b$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci punem prin definiție

$$(\alpha) \quad \int_a^b f(x)dx = 0, \text{ dacă } a = b$$

și

$$(\beta) \quad \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

2.23. Exerciții.

I. Să se calculeze sumele Riemann asociate funcțiilor, diviziunilor Δ și sistemelor ξ de puncte intermediare specificate mai jos:

$$1. f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right),$$

$$f(x) = x^2, \quad \xi = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \right);$$

$$2. f: \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta = \left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right),$$

$$f(x) = \sin x, \quad \xi = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right);$$

$$3. f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R},$$

$$f(x) = e^x,$$

$$4. f: [0, 3] \rightarrow \mathbf{R},$$

$$f(x) = x^3,$$

$$5. f: [1, 2] \rightarrow \mathbf{R},$$

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

$$\Delta = \left(-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \right),$$

$$\xi = (-\ln 2, 0, \ln 2);$$

$$\Delta = (0, 1, 2, 3),$$

$$\xi = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right);$$

$$\Delta = \left(1, \frac{9}{8}, \frac{7}{6}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2 \right),$$

$$\xi = \left(\frac{10}{9}, \frac{8}{7}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, 2 \right).$$

II.

1. Se consideră o funcție $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ integrabilă, astfel încât există o constantă α cu proprietatea: pentru orice interval deschis $(x', x'') \subset [a, b]$, există cel puțin un punct $\xi \in (x', x'')$ în care funcția f ia valoarea α . Să se arate că

$$\int_a^b f(x) dx = \alpha(b - a).$$

2. Să se arate că funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{dacă } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

este integrabilă, dar nu posedă nici o primitivă. Să se calculeze integrala lui f .

3. Se consideră o funcție $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ integrabilă, astfel încât pentru orice interval deschis $(x', x'') \subset [a, b]$, există cel puțin un punct $\xi \in (x', x'')$ astfel încât $f(\xi) = 2\xi$. Să se arate că

$$\int_a^b f(x) dx = b^2 - a^2.$$

4. Se consideră o funcție $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ integrabilă, astfel încât pentru orice interval deschis $(x', x'') \subset [a, b]$, există cel puțin un punct $\xi \in (x', x'')$ astfel încât $f(\xi) = \frac{1}{1 + \xi}$. Să se arate că

$$\int_0^1 f(x) dx = \ln 2.$$

5. Se consideră o funcție $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ astfel, încât în orice interval deschis $(x', x'') \subset [a, b]$, există două puncte $\xi' \in (x', x'')$, $\xi'' \in (x', x'')$ astfel încât

$$f(\xi') = \xi', f(\xi'') = 2\xi''.$$

Să se arate că f nu este integrabilă.

6. Se consideră o funcție $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ pentru care există o diviziune

$$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

a lui $[a, b]$ astfel încât f este egală cu o constantă α_i pe fiecare interval deschis

(x_{i-1}, x_i) . Să se arate că f este integrabilă și

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - x_{i-1}).$$

7. Să se arate că funcția

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$f(x) = |\sin x|$$

este integrabilă și să se calculeze integrala sa.

8. Se consideră o funcție

$$f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

astfel încît

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [0, 1], \\ x^2 + 1, & \text{dacă } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Să se arate că f este integrabilă și să se calculeze integrala sa.

9. Se consideră funcția

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$f(x) = [2^5 x],$$

unde $[y]$ înseamnă partea întreagă din y (adică cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu y). Să se arate că f este integrabilă și să se calculeze integrala sa.

10. Se consideră funcția

$$f: [0, 2\sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$f(x) = x - [x].$$

Să se arate că această funcție este integrabilă și să se calculeze integrala sa.

§ 3. INTEGRABILITATEA FUNCȚIILOR MONOTONE ȘI A FUNCȚIILOR CONTINUE

3.1. Definiție. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită și $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Notăm

$$m_i \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad (= \text{marginea inferioară a mulțimii } f[x_{i-1}, x_i]);$$

$$M_i \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad (= \text{marginea superioară a mulțimii } f[x_{i-1}, x_i]);$$

$$s_{\Delta}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}),$$

$$S_{\Delta}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

$s_{\Delta}(f)$ (respectiv $S_{\Delta}(f)$) se numește suma Darboux inferioară (respectiv superioară) asociată funcției f și diviziunii Δ .

3.2. Observație. Dacă funcția f este pozitivă, atunci $s_{\Delta}(f)$ (respectiv $S_{\Delta}(f)$) reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de bază $[x_i - x_{i-1}]$ și înălțime m_i (respectiv M_i).

Deci aria figurii plane mărginite de axa Ox , graficul lui f și dreptele paralele la axa Oy , care trec prin punctele de coordonate $(a, 0)$, respectiv $(b, 0)$, este aproximată de $s_{\Delta}(f)$ prin lipsă, iar de $S_{\Delta}(f)$ prin adaos.

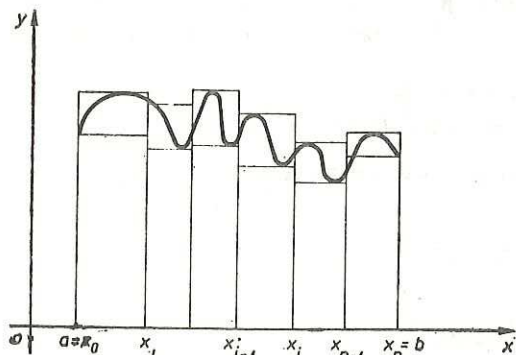


Fig. II.3.

3.3. Propoziție. Sumele Darboux ale unei funcții mărginite $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ au următoarele proprietăți:

$$(i) s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta}(f, \xi_i) \leq S_{\Delta}(f),$$

$$(\forall) \xi_i \in [x_{i-1}, x_i];$$

(ii) dacă Δ' este mai fină decât

Δ ($\Delta \subset \Delta'$), atunci

$$s_{\Delta}(f) \leq s_{\Delta'}(f)$$

și

$$S_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta}(f);$$

(iii) pentru orice pereche de diviziuni Δ_1, Δ_2 ale intervalului $[a, b]$ are loc inegalitatea

$$s_{\Delta_1}(f) \leq s_{\Delta_2}(f).$$

Demonstrație. (i) Înmulțind în inegalitățile evidente

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i, \quad (\forall) \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

cu $x_i - x_{i-1}$ și însumând după i , obținem:

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}),$$

adică

$$s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta}(f, \xi_i) \leq S_{\Delta}(f).$$

(ii) Fie $\Delta \subset \Delta'$ și să considerăm cazul cel mai simplu: diviziunea Δ' este obținută din diviziunea

$$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n)$$

prin adăugarea unui singur punct de diviziune c_j între x_{j-1} și x_j

$$\Delta' = (x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, c_j, x_j, \dots, x_n).$$

Notînd

$$m'_j \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in [x_{j-1}, c_j]} f(x) \quad \text{și} \quad m''_j \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in [c_j, x_j]} f(x),$$

rezultă

$$m_j \leq m'_j \quad \text{și} \quad m_j \leq m''_j,$$

deci

$$s_{\Delta}(f) = m_j(x_j - x_{j-1}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = m_j[(x_j - c_j) + (c_j - x_{j-1})] + \\ + \sum_{i \neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq m''_j(x_j - c_j) + m'_j(c_j - x_{j-1}) + \sum_{i \neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) = s_{\Delta'}(f).$$

Cazul general se reduce la aplicarea succesivă a cazului particular studiat mai sus. În mod analog se demonstrează inegalitatea

$$S_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta}(f).$$

(iii) Fie Δ_1, Δ_2 două diviziuni ale intervalului $[a, b]$ și fie $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_1 \cup \Delta_2$, reuniunea lor. Atunci (observația 1.10 (α))

$$\Delta_k \subset \Delta, \quad (\forall) \quad k = 1, 2,$$

deci, aplicînd punctul (ii), obținem

$$(1) \quad S_{\Delta_k}(f) \leq s_{\Delta}(f) \quad \text{și} \quad S_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta_k}(f), \quad (\forall) \quad k = 1, 2.$$

Însă (punctul (i))

$$s_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta}(f),$$

prin urmare

$$s_{\Delta_1}(f) \leq s_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta_2}(f).$$

3.4. Observație. Proprietatea 3.3 (ii) se poate exprima astfel:

Prin trecere de la o diviziune la alta mai fină, sumele Darboux inferioare cresc, iar sumele Darboux superioare descresc.

De asemenea, proprietatea 3.3 (iii) mai poate fi formulată și în modul următor:
Orice sumă Darboux inferioară este mai mică decît orice sumă Darboux superioară.
Aceste rezultate pot fi reformulate astfel:

3.5. Propoziție. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție mărginită, atunci:

- (α) mulțimea $\{s_{\Delta}(f)\}_{\Delta}$ a tuturor sumelor Darboux inferioare ale funcției f este majorată (de orice sumă Darboux superioară a lui f);
- (β) mulțimea $\{S_{\Delta}(f)\}_{\Delta}$ a tuturor sumelor Darboux superioare este minorată (de orice sumă Darboux inferioară).

3.6. Observații: (α). Mulțimea $\{s_{\Delta}(f)\}$ fiind majorată, admite (vezi A_8) o margine superioară, notăm $\underline{I}(f)$ această margine superioară

$$\underline{I}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\Delta} s_{\Delta}(f).$$

(β) Mulțimea $\{S_{\Delta}(f)\}$ fiind minorată, are (vezi A_8) o margine inferioară; notăm cu $\bar{I}(f)$ această margine inferioară

$$\bar{I}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\Delta} S_{\Delta}(f)$$

(γ) Pentru orice diviziune Δ a intervalului $[a, b]$ au loc inegalitățile

$$s_{\Delta}(f) \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq S_{\Delta}(f).$$

3.7. Teoremă. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Atunci următoarele afirmații sînt echivalente:

(i) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_{\varepsilon} > 0$ astfel încît

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon,$$

oricare ar fi diviziunea Δ a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_{\varepsilon}$;

(ii) funcția f este integrabilă.

Demonstrație. (i) \Rightarrow (ii) Avem inegalitățile

$$(1) \quad s_{\Delta}(f) \leq I(f) \leq \bar{I}(f) \leq S_{\Delta}(f), \quad (\forall) \Delta,$$

deci

$$0 \leq \bar{I}(f) - I(f) \leq S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f), \quad (\forall) \Delta.$$

Însă prin ipoteză, pentru orice $\varepsilon > 0$ există η_{ε} astfel încît

$$(2) \quad S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon, \quad (\forall) \Delta \text{ cu } \|\Delta\| < \eta_{\varepsilon},$$

deci

$$0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon, \quad (\forall) \Delta \text{ cu } \|\Delta\| < \eta_{\varepsilon}.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă că numerele reale $\underline{I}(f)$ și $\bar{I}(f)$ sînt egale; fie $I(f)$ valoarea lor comună. Atunci din (1) obținem

$$(3) \quad s_{\Delta}(f) \leq I(f) \leq S_{\Delta}(f), \quad (\forall) \Delta.$$

Însă (propoziția 3.3 (i)) pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ a lui $[a, b]$ și orice puncte intermediare $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, ($1 \leq i \leq n$), au loc inegalitățile,

$$(4) \quad s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta}(f, \xi_i) \leq S_{\Delta}(f).$$

Din inegalitățile (2) – (4) obținem

$$|\sigma_{\Delta}(f, \xi_i) - I(f)| \leq S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon,$$

oricare ar fi diviziunea Δ a lui $[a, b]$ și oricare ar fi punctele intermediare ξ_i . Aceasta înseamnă că f este integrabilă și că

$$\int_a^b f(x) dx = I(f) = \underline{I}(f) = \bar{I}(f).$$

3.8. Observație. Demonstrația implicației inverse este relativ simplă și se bazează pe următoarele relații dintre sumele Riemann și sumele Darboux:

$$s_{\Delta}(f) = \inf \{ \sigma_{\Delta}(f, \xi) \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], 1 \leq i \leq n \},$$

$$S_{\Delta}(f) = \sup \{ \sigma_{\Delta}(f, \xi) \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], 1 \leq i \leq n \}.$$

3.9. Teoremă. Orice funcție constantă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă.

Demonstrație. Dacă f este constantă, atunci (exemplul 2.5 (1)) f este integrabilă. Considerăm acum cazul când f nu este constantă; în acest caz

$$|f(a) - f(b)| > 0.$$

Presupunem că f este crescătoare și pentru orice $\varepsilon > 0$ să notăm

$$(1) \quad \eta_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

Fie

$$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

o diviziune a lui $[a, b]$ astfel încît

$$(2) \quad \|\Delta\| < \eta_\varepsilon.$$

Funcția f fiind crescătoare, avem

$$(3) \quad \begin{cases} f(x_{i-1}) = m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \\ f(x_i) = M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x). \end{cases}$$

Din (3), (2) și (1) obținem

$$\begin{aligned} S_\Delta(f) - s_\Delta(f) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \|\Delta\| \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \|\Delta\| (f(b) - f(a)) < \\ &< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon, \end{aligned}$$

deci f este integrabilă.

Observație: În demonstrarea unor rezultate importante ca:

— integrabilitatea funcțiilor continue,

— calculul ariilor (respectiv volumelor) unor mulțimi asociate funcțiilor continue pozitive,

se folosește o condiție mai puternică decît condiția de continuitate. Această condiție este îndeplinită de funcțiile continue pe *intervale închise și mărginite*. Vom admite, deci, fără demonstrație următorul rezultat:

3.10. Orice funcție continuă definită pe un interval închis și mărginit, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, verifică condiția:

$$(U) \quad \left| \begin{array}{l} \text{oricare ar fi } \varepsilon > 0, \text{ există } \eta_\varepsilon > 0 \text{ astfel încît pentru orice} \\ x', x'' \in [a, b] \text{ cu } |x' - x''| < \eta_\varepsilon \text{ are loc inegalitatea} \\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \end{array} \right.$$

Funcțiile care îndeplinesc condiția (U) se numesc **uniform continue**.

3.11. Exemplu de funcție continuă, definită pe un interval mărginit neînchis, care nu verifică condiția (U).

Fie $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \cos \frac{1}{x}.$$

Funcția f este continuă pe $(0, 1]$, deoarece este compunerea funcțiilor continue

$$x \rightarrow \frac{1}{x} \text{ și } t \rightarrow \cos t.$$

Să arătăm acum că funcția f nu verifică condiția (U).

Fie $0 < \varepsilon < 1$. Deoarece șirul $\left(\frac{1}{2n(2n+1)\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge la zero, rezultă că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$\frac{1}{2n(2n+1)\pi} < \varepsilon, \quad (\forall) n \geq n_\varepsilon.$$

Luînd un $n \geq n_\varepsilon$ și

$$x = \frac{1}{2n\pi}, \quad y = \frac{1}{(2n+1)\pi},$$

rezultă

$$|x - y| = \left| \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{(2n+1)\pi} \right| = \frac{1}{2n(2n+1)\pi} < \varepsilon.$$

Însă

$|f(x) - f(y)| = |\cos 2n\pi - \cos (2n+1)\pi| = |1 - (-1)| = 2$,
ceea ce arată că funcția f nu verifică condiția (U).

3.12. Teoremă. Orice funcție continuă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă.

Demonstrație. În baza teoremei precedente f este uniform continuă, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$(1) \quad (\forall) x', x'' \in [a, b],$$

cu

$$|x' - x''| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Fie $\Delta = (a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$ o diviziune a lui $[a, b]$ astfel încît

$$(2) \quad \|\Delta\| < \eta_\varepsilon.$$

Cum orice funcție continuă pe un interval închis și mărginit este mărginită și își atinge marginile, rezultă că există

$$(3) \quad u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

astfel încît

31

$$(4) \quad \begin{cases} f(u_i) = m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \\ f(v_i) = M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x). \end{cases}$$

Din (2) și (3) rezultă

$$|u_i - v_i| < \eta_\varepsilon,$$

deci aplicînd (1) pentru $x' = u_i$ și $x'' = v_i$ și ținînd seamă de (4), obținem

$$M_i - m_i = |f(v_i) - f(u_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad (1 \leq i \leq n),$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} S_\Delta(f) - s_\Delta(f) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Această inegalitate avînd loc pentru orice diviziune Δ a lui $[a, b]$ de normă $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$, înseamnă (teorema 3.7) că funcția f este integrabilă.

3.13. Exerciții.

I. Să se calculeze sumele Darboux asociate următoarelor funcții și diviziuni:

1. $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right),$$

$$f(x) = x^2,$$

$$\Delta_2 = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right).$$

2. $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Delta_1 = \left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f(x) = \sin x,$$

$$\Delta_2 = \left(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right).$$

3. $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Delta_1 = \left(1, \frac{9}{8}, \frac{7}{6}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2\right),$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x},$$

$$\Delta_2 = \left(1, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, 2\right).$$

4. $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Delta_1 = (0, 1, 2, 3),$$

$$f(x) = \frac{x^2}{4-x},$$

$$\Delta_2 = (0, 2, 3).$$

5. $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Delta_1 = \left(-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right),$$

$$f(x) = e^x,$$

$$\Delta_2 = (-1, 0, 1).$$

II. Să se arate că următoarele funcții sînt integrabile și să se calculeze integralele lor:

$$1. f(x) = \sqrt{x^2 - 1},$$

$$x \in [1, 2].$$

$$2. f(x) = \sqrt{x},$$

$$x \in [0, 2].$$

$$3. f(x) = x^\alpha,$$

$$x \in [0, a], a > 0, \alpha > 0.$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0, \\ \min \left(x, \ln \frac{1}{x} \right) & \text{dacă } x \in (0, 2]. \end{cases}$$

3.14. Calculul limitelor unor sume cu ajutorul integralelor.

1. Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right] = \ln 2.$$

Pentru a vedea ce funcție trebuie considerată, transformăm suma de mai sus astfel

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right].$$

Vom considera deci funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1+x}$$

și, pentru fiecare $n \geq 1$, formăm diviziunea echidistantă

$$\Delta_n = \left(x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \dots < x_n = \frac{n}{n} = 1 \right)$$

de normă $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n}$, iar în fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ alegem punctul intermediar

$$\xi_i \stackrel{\text{def}}{=} x_i = \frac{i}{n}.$$

Se observă că termenul general al șirului din enunț este chiar suma Riemann asociată funcției f , diviziunii Δ_n și punctelor intermediare ξ_i :

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+n} = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \\ &= \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2. \end{aligned}$$

2. Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right] = \frac{\pi}{6}.$$

Scriind suma de mai sus sub forma

$$\frac{1}{n} \left[\frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{n}{n}\right)^2}} \right],$$

se observă că această sumă este suma Riemann asociată funcției $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}},$$

diviziunii Δ_n și punctelor intermediare ξ_i definite ca în exemplul precedent. Deci

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i) = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

3.15. Exerciții. Folosind metoda de calcul de la punctul precedent, să se calculeze limita șirurilor de termen general:

$$1. s_n = \frac{3}{n} \left[1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right].$$

$$2. s_n = \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right].$$

$$3. s_n = \frac{\pi}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right].$$

$$4. s_n = \frac{\pi}{2n} \left[1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right].$$

$$5. s_n = n \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right].$$

§ 4. INTEGRAREA FUNCȚIILOR CONTINUE

4.1. Observație. În paragraful precedent s-a arătat că orice funcție continuă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă.

Deci, toate rezultatele, relative la funcțiile integrabile, obținute în paragraful 3, sînt valabile și pentru funcții continue.

Unele rezultate din acest paragraf sînt adevărate numai pentru funcții continue, iar altele se pot demonstra și în cazul general al funcțiilor integrabile. Totuși, pentru simplitate, peste tot în acest paragraf vom lucra cu funcții continue.

4.2. Teorema de medie. Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încît

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi).$$

Demonstrație: Funcția f , fiind continuă pe $[a, b]$, este mărginită și își atinge

marginile. Notînd

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{și} \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x),$$

există $u, v \in [a, b]$ astfel încît

$$f(u) = m \quad \text{și} \quad f(v) = M.$$

Cum pentru orice $x \in [a, b]$ avem $m \leq f(x) \leq M$, aplicînd consecința 2.19 obținem

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

de unde

$$f(u) = m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M = f(v).$$

Cum însă f este continuă pe $[a, b]$, f are proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$; există deci $\xi \in [a, b]$ astfel încît

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

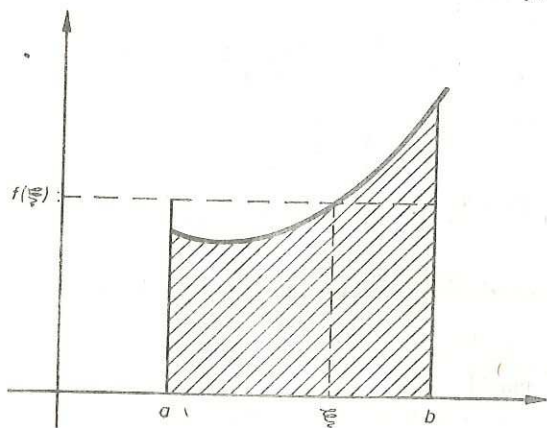


Fig. II. 4.

4.3. *Observație.* Scriind teorema de medie sub forma

$$f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x) dx,$$

punem în evidență următoarea interpretare geometrică:

Dacă f este o funcție continuă și pozitivă pe $[a, b]$, există un punct $\xi \in [a, b]$ astfel încît subgraficul lui f (Γ_f ; vezi observația 2.2) are aceeași arie cu dreptunghiul de bază $b-a$ și înălțime $f(\xi)$.

4.4. **Propoziție.** Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci are loc inegalitatea

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Demonstrație. Întrucît f este continuă rezultă că $|f|$ este continuă. Ținînd seama de inegalitățile

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad (\forall) x \in [a, b]$$

și aplicînd consecința 2.18, obținem

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

deci

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

4.5. *Observație.* Rezultatul precedent este adevărat și pentru funcții integrabile oarecare.

4.6. *Propoziție.* Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și pozitivă iar $[c, d]$ este un interval inclus în $[a, b]$, atunci are loc inegalitatea

$$\int_c^d f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Demonstrație. Aplicând propozițiile 2.21 și 2.17, obținem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx \geq \int_c^d f(x) dx.$$

4.7. *Consecință.* Dacă $a < b$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și pozitivă, neidentică nulă pe (a, b) , atunci

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

Demonstrație. Prin ipoteză există un punct $x_0 \in (a, b)$ astfel încît

$$f(x_0) > 0.$$

Funcția f fiind continuă, rezultă (propoziția $A_{12}(\beta)$) că există un interval deschis J astfel încît $x_0 \in J \subset [a, b]$ și

$$f(x) > 0, \quad (\forall) x \in J.$$

Fie $[c, d] \subset J$, $c < d$ și

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in [c, d]} f(x).$$

Atunci există $x_1 \in [c, d]$ astfel încît

$$m = f(x_1).$$

Însă $x_1 \in [c, d] \subset J$, deci $f(x_1) > 0$, prin urmare

$$m > 0.$$

Aplicînd propoziția precedentă, obținem

$$0 < m(d - c) \leq \int_c^d f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

4.8. *Teorema de existență a primitivelor unei funcții continue.* Pentru orice funcție continuă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, funcția $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(t) dt, \quad (\forall) x \in [a, b]$$

este o primitivă a lui f care se anulează în punctul a .

Demonstrație. Fie $x_0 \in [a, b]$ și $x \in [a, b]$ cu $x \neq x_0$. Atunci (definiția 2.22(β) și propoziția 2.21)

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Aplicând teorema de medie integralei $\int_{x_0}^x f(t) dt$, obținem $\xi_x \in [x_0, x]$ sau $\xi_x \in [x, x_0]$, (după cum $x_0 < x$ sau $x > x_0$) astfel încît

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = f(\xi_x)(x - x_0).$$

Din (1) și (2) rezultă

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi_x),$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(\xi_x) = f(x_0)$$

(deoarece ξ_x este cuprins între x și x_0 , iar f este continuă).

Dacă $x_0 = a$ (respectiv $x_0 = b$), atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a)$$

$$\left(\text{respectiv } \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b) \right).$$

În concluzie F este derivabilă pe $[a, b]$ și $F' = f$, adică F este o primitivă a funcției f . În baza definiției 2.22(α), avem

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0.$$

Teorema următoare determină toate primitivele unei funcții continue date, primitive care se anulează în același punct.

4.9. Teoremă. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui f care se anulează într-un punct $x_0 \in [a, b]$. Atunci g are forma

$$g(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad (\forall) x \in [a, b].$$

Demonstrație. Am văzut (teorema 4.8) că funcția

$$(1) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

este o primitivă a lui f . Cum diferența a două primitive ale aceleiași funcții este o constantă (propoziția I. 1.3), rezultă că există $k \in \mathbb{R}$ astfel încît

$$(2) \quad F(x) = g(x) + k, \quad (\forall) x \in [a, b].$$

Însă

$$g(x_0) = 0,$$

deci

$$(3) \quad k = F(x_0).$$

Din relațiile (2), (3), (1) și propoziția 2.21, rezultă că pentru orice $x \in [a, b]$ avem

$$g(x) = F(x) - k = F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

4.10. Teoremă (formula de integrare prin părți). Dacă $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sînt două funcții derivabile, cu derivate continue, atunci

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx.$$

Demonstrație. Formula de derivare a produsului a două funcții derivabile

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad (\forall) x \in [a, b]$$

arată că funcția produs, $f \cdot g$, este o primitivă a funcției $f' \cdot g + f \cdot g'$. Deci, aplicînd formula lui Leibniz-Newton (teorema 2.12) și propoziția 2.16, obținem:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) &= \int_a^b (f \cdot g)'(x) dx = \int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] dx = \\ &= \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx, \end{aligned}$$

adică

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = (f \cdot g)(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx.$$

4.11. Exemple.

1) Să se calculeze integrala

$$\int_0^1 x^2 e^x dx.$$

Avem

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^x dx &= x^2 e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x (x^2)' dx = e - \int_0^1 2xe^x dx = e - 2xe^x \Big|_0^1 + \\ + \int_0^1 e^x (2x)' dx &= e - 2e + 2 \int_0^1 e^x dx = -e + 2e^x \Big|_0^1 = -e + 2e - 2 = e - 2. \end{aligned}$$

2) Să se calculeze integrala

$$\int_0^\pi x^2 \cos x dx.$$

Avem

$$\int_0^\pi x^2 \cos x dx = x^2 \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x (x^2)' dx = -2 \int_0^\pi x \sin x dx =$$

$$= 2x \cos x \Big|_0^\pi - 2 \int_0^\pi \cos x \cdot (x)' dx = -2\pi - 2 \int_0^\pi \cos x dx = -2\pi - 2 \sin x \Big|_0^\pi = -2\pi.$$

3) Să se calculeze integrala

$$\int_4^5 \sqrt{x^2 - 9} dx.$$

Utilizând metoda integrării prin părți (exemplul 2.2 (7), cap I) deducem că o primitivă a funcției

$$x \rightarrow \sqrt{x^2 - 9},$$

pe intervalul $[4, 5]$, va fi funcția

$$g(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 9} - \frac{9}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 9}|$$

și deci

$$\int_4^5 \sqrt{x^2 - 9} dx = g(x) \Big|_4^5.$$

4) Să se calculeze

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx.$$

Avem

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 \ln x dx &= \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 x^3 (\ln x)' dx = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{9} x^3 \Big|_1^2 = \\ &= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

5) Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x dx.$$

Avem

$$\operatorname{tg}^2 x = (\operatorname{tg}^2 x + 1) - 1 = (\operatorname{tg} x)' - 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x (\operatorname{tg} x)' dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = x \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx - \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

4.12. Teoremă. (Formula de schimbare de variabilă)

Fie $[a, b] \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ (J interval din \mathbb{R}) două funcții cu proprietățile:

1) f este continuă pe J ,

2) φ este derivabilă, cu derivata continuă pe $[a, b]$. Atunci

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Demonstrație. Funcția f fiind continuă, admite primitive. Dacă F este o primitivă a lui f pe J , atunci

$$(1) \quad F'(x) = f(x), \quad (\forall) \quad x \in J$$

și (formula lui Leibniz-Newton)

$$(2) \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Folosind formula de derivare a funcțiilor compuse și relația (1) deducem că $F \circ \varphi$ este o primitivă a funcției $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t), \quad (\forall) \quad t \in [a, b].$$

Aplicând formula lui Leibniz-Newton și ținând seama de (2) obținem

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) dt = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

4.13. Observație. Dacă $[a, b] \xrightarrow{\varphi} [c, d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ sint două funcții cu proprietățile:

- (α) f este continuă pe $[c, d]$,
 (β) φ este bijectivă, φ și φ^{-1} derivabile cu derivate continue,

atunci

$$\int_a^b f(\varphi(t)) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)(\varphi^{-1})'(x) dx.$$

Într-adevăr, funcțiile φ și f fiind continue, rezultă că $f \circ \varphi$ este continuă, deci admite primitive. Fie $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât

$$(1) \quad P' = f \circ \varphi.$$

Atunci (formula lui Leibniz-Newton)

$$(2) \quad \int_a^b f(\varphi(t)) dt = P(b) - P(a).$$

Pe de altă parte, ținând seamă că (1) avem

$$(P \circ \varphi^{-1})'(x) = P'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = f(x)(\varphi^{-1})'(x)$$

deci

$$(3) \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)(\varphi^{-1})'(x) dx = (P \circ \varphi^{-1})(\varphi(b)) - (P \circ \varphi^{-1})(\varphi(a)) = P(b) - P(a).$$

Din (2) și (3) se obține egalitatea din enunț, egalitatea care se mai numește și *a doua formulă de schimbare de variabilă*.

4.14. Exemple.

1) Să se calculeze

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^5 x dx$$

Avem

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^5 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^4 x \sin x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx.$$

Considerând aplicația

$$x \rightarrow \varphi(x) = \cos x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right],$$

obținem

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^5 x dx &= - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 - \varphi^2(x))^2 \cdot \varphi'(x) dx = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} [1 - 2\varphi^2(x) + \varphi^4(x)] \varphi'(x) dx = \\ &= - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2u^2 + u^4) du = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2u^2 + u^4) du = \\ &= \left(u - \frac{2}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 \right) \Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^5 \right] = \frac{43}{60} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

2) Să se calculeze

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx.$$

Avem, ca în exemplul 3.3 (2), cap. I,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2})}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)'}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt = \\ &= \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \ln \sqrt{3}. \end{aligned}$$

3) Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

Avem, ca în exemplul 3.3 (1) cap. I,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin^2 x)'}{1 + \sin^2 x} dx = \ln(1 + \sin^2 x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2.$$

4) Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + x^4} dx.$$

Avem

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2)'}{1 + (x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \arctg x^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

5) Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ și $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}.$$

Se cere să se calculeze

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

În acest scop definim funcția $\varphi: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [\alpha, \beta]$ prin

$$\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 t.$$

Avem deci situația următoare

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\varphi} [\alpha, \beta] \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

unde f este continuă, iar φ este derivabilă cu derivata continuă; deci sînt îndeplinite condițiile teoremei 4.12 (formula de schimbare de variabilă). Aplicînd această teoremă, obținem:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\varphi(t) - \alpha)(\beta - \varphi(t))} \cdot \varphi'(t) dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[(\beta - \alpha) \sin^2 t] \cdot [(\beta - \alpha)(1 - \sin^2 t)]} 2(\beta - \alpha) \sin t \cos t dt = \\ &= (\beta - \alpha)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\sin t \cos t)^2 dt = \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2 dt = \frac{(\beta - \alpha)^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^2}{4} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\beta - \alpha)^2 \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Așadar,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)} dx = (\beta - \alpha)^2 \frac{\pi}{8}.$$

Observăm că funcția $x \rightarrow \sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}$ este un caz particular al funcției studiate în exemplul 3.5 (4), capitolul I. Însă primitivele găsite acolo nu sînt definite pe întreg intervalul $[\alpha, \beta]$ ci doar pe (α, β) .

6) Să se calculeze integrala

$$\int_1^4 \sqrt{1 + \sqrt{x}} \, dx$$

Avem

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}} \quad (\forall) x \in [1, 4]$$

și luăm $\varphi: [1, 2] \rightarrow [1, 4]$ definită prin

$$\varphi(t) = t^2.$$

Atunci

$$\varphi'(t) = 2t$$

și

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \sqrt{1 + t} \cdot 2t,$$

deci

$$\int_1^4 \sqrt{1 + \sqrt{x}} \, dx = \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} f(x) dx = \int_1^2 f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = 2 \int_1^2 t \sqrt{1 + t} \, dt.$$

Facem o nouă schimbare de variabilă:

În acest caz notăm

$$g(t) = t \sqrt{1 + t} \quad (\forall) t \in [1, 2]$$

și definim $u: [2, 3] \rightarrow [1, 2]$ prin

$$u(s) = s - 1.$$

Atunci

$$u'(s) = 1$$

și

$$g(u(s))u'(s) = (s - 1)\sqrt{s} = s^{3/2} - s^{1/2}$$

deci

$$\begin{aligned} 2 \int_1^2 t \sqrt{1 + t} \, dt &= 2 \int_{n(2)}^{n(3)} g(t) dt = 2 \int_2^3 g(u(t))u'(t) dt = 2 \int_2^3 (s^{3/2} - s^{1/2}) ds \\ &= 2 \left[\frac{2}{5} \cdot s^{5/2} - \frac{2}{3} \cdot s^{3/2} \right] \Big|_2^3 = \frac{8}{15} (6\sqrt{3} - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

7) Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Avem

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1}$$

și luăm $\varphi: [0, 1] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ definită prin

$$\varphi(t) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} t.$$

Atunci

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1 + t^2}$$

și

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{t}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \frac{t+1}{t^2+1}.$$

Ultima egalitate se obține calculând coeficienții A , B , C din identitatea

$$\frac{t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+1}{t^2+1}.$$

Aceste calcule dau $A = -\frac{1}{2}$ și $B = C = \frac{1}{2}$.

Așadar

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} dx &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt = \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \\ &= \left[-\frac{1}{2} \ln(t+1) + \frac{1}{4} \ln(t^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \right] \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \ln 2 \right). \end{aligned}$$

4.15. Observație. Fie $a > 0$ și $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx.$$

Într-adevăr, aplicând propoziția 2.24, avem

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx. \quad (1)$$

În baza definiției 2.22 (β), are loc relația

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^{-a} f(x) dx. \quad (2)$$

Luând funcția $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(t) = -t$$

și aplicând formula de schimbare de variabilă (teorema 4.12), obținem

$$\int_0^{-a} f(x) dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(-a)} f(x) dx = \int_0^a f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = -\int_0^a f(-t) dt. \quad (3)$$

Din relațiile (1), (2) și (3), rezultă

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx.$$

4.16. Definiție. Fie J un interval simetric (adică J este de forma $(-a, a)$ sau $[-a, a]$) și $f: J \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că f este o funcție pară (respectiv impară) dacă

$$f(-x) = f(x) \text{ (respectiv } f(-x) = -f(x)), \quad (\forall) x \in J.$$

4.17. *Observație.* Fie $f: [-a, a] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{dacă } f \text{ este pară,} \\ 0, & \text{dacă } f \text{ este impară.} \end{cases}$$

Într-adevăr, dacă f este pară, atunci

$$f(-x) = f(x), \quad (\forall) x \in [-a, a],$$

deci (observația 4.15)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx = \int_0^a 2f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Dacă f este impară, atunci

$$f(x) + f(-x) = 0, \quad (\forall) x \in [-a, a],$$

deci (observația 4.15)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx = 0.$$

4.18. Exerciții.

I.

1. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă și strict crescătoare. Să se arate că există un singur punct $c \in [a, b]$ astfel încît

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c).$$

2. Se consideră funcția

$$f(x) = x^2, \quad x \in [1, 3].$$

Să se determine $c \in (1, 3)$ astfel încît

$$\int_1^3 f(x) dx = 2f(c).$$

3. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă neidentică nulă, astfel încît

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Să se arate că există în $[a, b]$ două puncte $x_1, x_2, x_1 < x_2$ astfel încît

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0.$$

4. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă. Se presupune că pentru orice interval deschis $(a', b') \subset [a, b]$ există un interval $[a'_0, b'_0] \subset (a', b')$ astfel încît

$$\int_{a'_0}^{b'_0} f(x) dx = 0.$$

Să se arate că f este identică nulă.

II. Să se verifice egalitățile:

$$1. \int_0^\pi \sin^3 x dx = \frac{4}{3}.$$

$$2. \int_0^\pi \cos^3 x dx = 0.$$

$$\begin{aligned}
 3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x \, dx &= \frac{2}{5} \left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \right). & 4. \int_0^{\pi} x \sin x \, dx &= \pi. \\
 5. \int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx &= \frac{\pi^2}{4}. & 6. \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx &= 2. \\
 7. \int_0^2 x^2 \sqrt{1+x^3} \, dx &= \frac{52}{9}. & 8. \int_0^4 x \sqrt{x^2+9} \, dx &= \frac{98}{3}. \\
 9. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} \, dx &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}. & 10. \int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} e - \frac{\pi}{4}. \\
 11. \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx &= \sqrt{2} - 1 + \ln(\sqrt{2}+1). & 12. \int_0^1 \frac{1}{2+\sqrt{x}} \, dx &= 2 - 4 \ln \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

III. Să se calculeze integralele:

$$\begin{aligned}
 1. \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}} \, dx. & & 2. \int_{-1}^2 \frac{1}{4x^2+4x+5} \, dx. \\
 3. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} x) \, dx. & & 4. \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, dx. \\
 5. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x \, dx. & & 6. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} \, dx. \\
 7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \, dx. & & 8. \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos 2x \, dx. \\
 9. \int_0^1 x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx. & & 10. \int_0^1 e^{2x} \sin 3x \, dx. \\
 11. \int_0^2 x^3 e^x \, dx. & & 12. \int_0^2 x \ln(1+x) \, dx. \\
 13. \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1} \, dx. & & 14. \int_1^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx. \\
 15. \int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{2-x^2}} \, dx. & &
 \end{aligned}$$



Aplicații ale integralei definite și metode de calcul

§ 1. INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A INTEGRALEI DEFINITE A UNEI FUNCȚII POZITIVE

În acest paragraf vom defini clasa mulțimilor din planul \mathbb{R}^2 care au arie și vom arăta că dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție continuă, atunci mulțimea

$$\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

numită *subgraficul lui f*, are arie și aria sa este egală cu integrala lui f pe intervalul $[a, b]$:

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx.$$

1.1. Definiție. O mulțime E din planul \mathbb{R}^2 se numește **elementară** dacă

$$E = \bigcup_{i=1}^n D_i,$$

unde D_i sînt dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele de coordonate, iar oricare două dreptunghiuri diferite D_i, D_j au cel mult o latură comună. Punem prin definiție

$$\text{aria}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \text{aria}(D_i).$$

1.2. Observații. a) Reprezentarea unei mulțimi elementare E sub forma

$$E = \bigcup_{i=1}^n D_i,$$

nu este unică.

b) Reuniunea, intersecția și diferența a două mulțimi elementare sînt tot mulțimi elementare.

c) Aria unei mulțimi elementare E nu depinde de scrierea lui E sub forma $E = \bigcup_{i=1}^n D_i$ ca în definiția 1.1, adică dacă

$$E = \bigcup_{i=1}^n D_i \quad \text{și} \quad E = \bigcup_{j=1}^m G_j,$$

sînt două reprezentări ale lui E ca în definiția 1.1, atunci

$$\sum_{i=1}^n \text{aria}(D_i) = \sum_{j=1}^m \text{aria}(G_j).$$

d) Dacă E, F sînt mulțimi elementare disjuncte, sau care au în comun cel mult laturi ale unor dreptunghiuri componente, atunci

$$\text{aria } (E \cup F) = \text{aria } (E) + \text{aria } (F).$$

e) Dacă E, F sînt mulțimi elementare astfel încît $E \subset F$, atunci

$$\text{aria } (E) \leq \text{aria } (F)$$

și

$$\text{aria } (F \setminus E) = \text{aria } (F) - \text{aria } (E).$$

1.3. Definiție. Fie A o mulțime mărginită din plan. Spunem că mulțimea A are arie, dacă există două șiruri $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}, (F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de mulțimi elementare astfel încît:

$$(1) \quad E_n \subset A \subset F_n, \quad (\forall) n \in \mathbb{N},$$

(2) șirurile de numere reale pozitive

$$\{\text{aria } (E_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ și } \{\text{aria } (F_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

sînt convergente și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } (E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } (F_n).$$

În acest caz punem

$$\text{aria } (A) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } (E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } (F_n).$$

1.4. Observații. (α) Definiția ariei lui A este corectă; adică dacă luăm $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}, (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alte două șiruri de mulțimi elementare care satisfac condițiile (1) și (2) din definiția 1.3, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } (U_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } (V_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } (E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } (F_n).$$

(β) Dacă A și B au arie, atunci $A \cup B$, $A \cap B$ și $A \setminus B$ au arie.

(γ) Dacă A, B au arie și $A \cap B = \emptyset$, atunci

$$\text{aria } (A \cup B) = \text{aria } (A) + \text{aria } (B).$$

(δ) Dacă A, B au arie și $B \subset A$, atunci

$$\text{aria } (A \setminus B) = \text{aria } (A) - \text{aria } (B).$$

Nu demonstrăm aici aceste rezultate.

1.5. Exemplu de funcție al cărei subgraфіc nu are arie. Fie $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ funcția lui Dirichlet

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{dacă } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

și

$$\Gamma_g \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq g(x)\}.$$

Vom arăta că:

(α) dacă E elementară $\subset \Gamma_g$, atunci $\text{aria } (E) = 0$,

(β) dacă F elementară $\supset \Gamma_g$, atunci $\text{aria } (F) \geq 1$.

Din faptul că între două numere reale există întotdeauna un număr irațional, rezultă că orice dreptunghi $D \subset \Gamma_g$ are înălțimea egală cu 0, deci aria sa este egală cu 0

$$\text{aria}(D) = 0.$$

Cum orice mulțime elementară $E \subset \Gamma_g$ este alcătuită din dreptunghiuri $D \subset \Gamma_g$, rezultă afirmația (α).

Pătratul $D_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ este cea mai mică mulțime elementară care include pe Γ_g ; adică dacă F elementară $\supset \Gamma_g$, atunci $F \supset D_1$, așadar,

$$\text{aria}(F) \geq \text{aria}(D_1) = 1.$$

Fie acum $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de mulțimi elementare astfel încât șirurile ariilor lor sînt convergente și

$$E_n \subset \Gamma_g \subset F_n, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}.$$

Atunci din (α) rezultă

$$\text{aria}(E_n) = 0, \quad (\forall) n \in \mathbb{N},$$

iar din (β) se obține

$$\text{aria}(F_n) \geq 1, \quad (\forall) n \in \mathbb{N},$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria}(E_n) = 0 < 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria}(F_n).$$

Așadar, mulțimea Γ_g nu are arie.

Din cele arătate mai sus se vede că: *dacă A este o mulțime care are arie, nu rezultă neapărat că orice submulțime B a lui A are arie.*

1.6. Teoremă. Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pozitivă atunci

$$(\alpha) \quad \Gamma_f \text{ are arie}$$

și

$$(\beta) \quad \text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Demonstrație. Fie

$$\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{p_n}^n = b) \quad (n \in \mathbb{N})$$

un șir de diviziuni astfel încît

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$$

și să notăm cu m_i^n (respectiv M_i^n) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcției f pe intervalul închis și mărginit $[x_{i-1}^n, x_i^n]$.

Se știe (vezi Elemente de analiză matematică, cl. a XI-a) că orice funcție continuă pe un interval închis și mărginit J , își atinge marginile pe J . Deci, în cazul nostru există

$$u_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n] \quad \text{și} \quad v_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$$

astfel încît

$$f(u_i^n) = m_i^n \text{ și } f(v_i^n) = M_i^n.$$

Fie (fig. III.1)

$$D_i^n \stackrel{\text{def}}{=} [x_{i-1}^n, x_i^n] \times [0, m_i^n],$$

$$G_i^n \stackrel{\text{def}}{=} [x_{i-1}^n, x_i^n] \times [0, M_i^n]$$

dreptunghiurile de bază $x_{i-1}^n - x_{i-1}^n$ și înălțime m_i^n , respectiv M_i^n . Mulțimile elementare

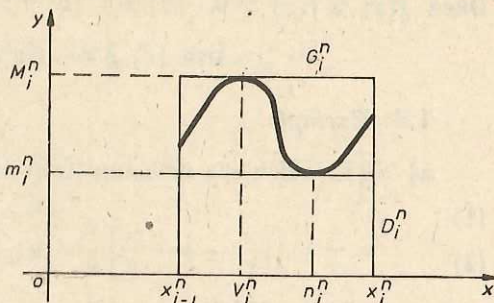


Fig. III.1

$$E_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{p_n} D_i^n, \text{ respectiv } F_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{p_n} G_i^n$$

verifică incluziunile

$$(2) \quad E_n \subset \Gamma_f \cup F_n,$$

iar ariile lor sînt

$$(3) \quad \text{aria}(E_n) = \sum_{i=1}^{p_n} m_i^n (x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{p_n} f(u_i^n) (x_i^n - x_{i-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(f, u_i^n)$$

respectiv

$$(4) \quad \text{aria}(F_n) = \sigma_{\Delta_n}(f, v_i^n).$$

Funcția f fiind continuă, este integrabilă (cap. II, teorema 3.12), deci (cap. II, observația 2.11), ținînd seama de relațiile (1), (3) și (4), obținem:

$$(5) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, u_i^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria}(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, v_i^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria}(F_n).$$

Șirurile de mulțimi elementare (E_n) și (F_n) verificînd relațiile (2) și (5), rezultă că mulțimea Γ_f are arie și (definiția 1.3)

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx.$$

1.7. Consecință. Dacă $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sînt funcții continue astfel încît

$$f(x) \leq g(x), \quad (\forall) x \in [a, b]$$

atunci mulțimea (fig. III.2)

$\Gamma_{f,g} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b; f(x) \leq y \leq g(x)\}$, cuprinsă între graficele funcțiilor f, g și dreptele paralele la Oy care taie axa Ox în punctele a și b respectiv, are arie și

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

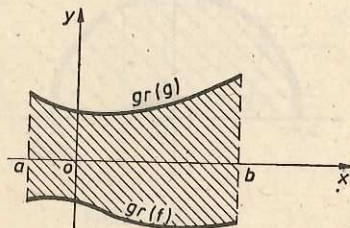


Fig. III.2

Dacă $g(x) \geq f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in [a, b]$, atunci

$$\text{aria } (\Gamma_{f,g}) = \text{aria } (\Gamma_g) - \text{aria } (\Gamma_f).$$

1.8. Exemple.

1) Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între parabolele de ecuații:

(1) $y^2 = ax,$

(2) $x^2 = ay,$

unde $a > 0$ (fig. III.3).

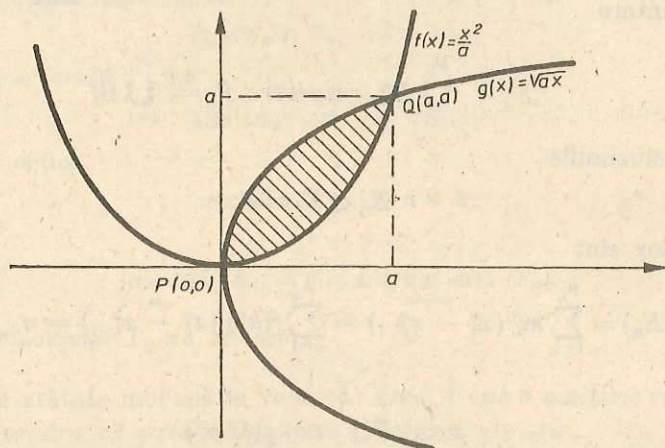


Fig. III.3

Rezolvind acest sistem de ecuații, obținem punctele de intersecție ale acestor parabole.

$$\begin{aligned} \text{aria } (\Gamma_{f,g}) &= \int_0^a (g(x) - f(x)) dx = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \\ &= \left(\sqrt{a} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3a} \right) \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} a^2 = \frac{a^2}{3}. \end{aligned}$$

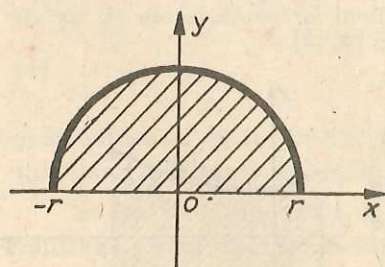


Fig. III.4

2) Să se calculeze aria mulțimii (fig. III.4)

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0\},$$

$$(r > 0).$$

Observăm că mulțimea A este subgraficul funcției $f: [-r, r] \rightarrow \mathbf{R}_+$ definite prin

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Am văzut în capitolul I, exemplul 3.5 (2), că funcția

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left[r^2 \arcsin \frac{x}{r} + x \sqrt{r^2 - x^2} \right], \quad (-r \leq x \leq r)$$

este o primitivă a lui f . Deci

$$\begin{aligned} \text{aria } (A) &= \text{aria } (\Gamma_f) = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left[r^2 \arcsin \frac{x}{r} + x \sqrt{r^2 - x^2} \right] \Big|_{-r}^r = \\ &= \frac{1}{2} [r^2 \arcsin 1 - r^2 \arcsin (-1)] = \frac{r^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \pi r^2. \end{aligned}$$

3) Să se găsească aria mulțimii A (fig. III.5) cuprinse între cercul de ecuație

$$(I) \quad x^2 + y^2 = 4px$$

și parabola de ecuație

$$(II) \quad y^2 = 2px.$$

Scriind ecuația (I) sub forma

$$(I) \quad (x - 2p)^2 + y^2 = (2p)^2,$$

se observă că cercul considerat are centrul în punctul $(2p, 0)$, iar raza sa este $2p$.

Pentru a determina punctele în care parabola intersectează cercul, vom rezolva sistemul format din ecuațiile (I) și (II). Dacă se înlocuiește y^2 din (II) în (I), atunci

$$x^2 = 2px,$$

deci se obțin soluțiile

$$x = 0 \text{ și } x = 2p.$$

Înlocuind pe $x = 0$ (respectiv $x = 2p$) în ecuația (II), obținem soluțiile

$$y = 0 \text{ și } y = \pm 2p.$$

Așadar, parabola de ecuație (II) și cercul de ecuație (I) se intersectează în punctele

$$O(0, 0), \quad P(2p, 2p), \quad Q(2p, -2p).$$

Este suficient să calculăm aria mulțimii A_1 cuprinse între arcul de parabolă OP și arcul de cerc OP , adică aria mulțimii cuprinse între graficele funcțiilor

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2px}, \quad (0 \leq x \leq 2p),$$

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{4px - x^2}, \quad (0 \leq x \leq 2p).$$

Funcțiile f și h fiind pozitive, avem

$$(1) \quad \text{aria } (A_1) = \text{aria } (\Gamma_{f,h}) = \text{aria } (\Gamma_h) - \text{aria } (\Gamma_f),$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \text{aria } (\Gamma_f) &= \int_0^{2p} f(x) dx = \int_0^{2p} \sqrt{2p} x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \sqrt{2p} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2p} = \frac{8}{3} p^2. \end{aligned}$$

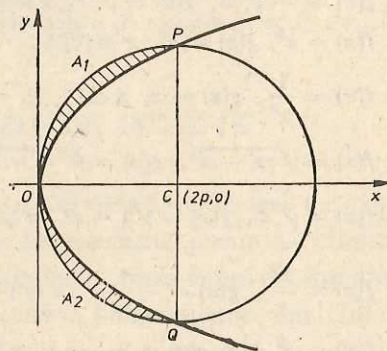


Fig. III.5

Deși se observă ușor că

$$\text{aria } (\Gamma_h) = \frac{1}{4} \text{ aria cercului de rază } 2p = \frac{1}{4} \pi (2p)^2 = \pi p^2,$$

totuși vom folosi integrala pentru a calcula aria (Γ_h) .

Scriind $\sqrt{4px - x^2}$ sub forma

$$\sqrt{x(4p - x)},$$

se vede că avem de integrat o funcție de forma

$$\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}.$$

Pentru a putea aplica rezultatul obținut în exemplul 4.13 (5), din capitolul II, considerăm funcția h_1 definită pe $[0, 4p]$ (și nu numai pe $[0, 2p]$ cum era definită h), prin aceeași relație

$$(3) \quad h_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x(4p - x)}, \quad (\forall) x \in [0, 4p].$$

Atunci are loc relația

$$(4) \quad \text{aria } (\Gamma_h) = \frac{1}{2} \text{ aria } (\Gamma_{h_1}).$$

În exemplul 4.13(5) s-a obținut egalitatea

$$(5) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)} dx = (\beta - \alpha)^2 \frac{\pi}{8}.$$

Din (3), (4) și (5) (pentru $\alpha = 0$ și $\beta = 4p$), obținem:

$$(6) \quad \text{aria } (\Gamma_h) = \frac{1}{2} \int_0^{4p} \sqrt{x(4p - x)} dx = \frac{1}{2} (4p)^2 \cdot \frac{\pi}{8} = \pi p^2.$$

În sfârșit din relațiile (1), (2) și (6) rezultă

$$\begin{aligned} \text{aria } (A) &= \text{aria } (A_1) + \text{aria } (A_2) = 2 \text{ aria } (A_2) = \\ &= 2 [\text{aria } (\Gamma_h) - \text{aria } (\Gamma_f)] = 2\pi p^2 - \frac{16}{3} p^2. \end{aligned}$$

1.9. Exerciții

I. Să se calculeze aria mulțimii $\Gamma_{f,g}$:

1. $f(x) = -\sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 4]$.
2. $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$.
3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x$, $x \in [1, 3]$.
4. $f(x) = \sqrt{rx - x^2}$, $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [0, r]$.
5. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \left[0, \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)\right]$.
6. $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in [-1, 1]$.
7. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3 - x$, $x \in [-2, 1]$.
8. $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$.

9. $f(x) = |x|$, $g(x) = 1$, $x \in [-1, 1]$.
10. $f(x) = 0$, $g(x) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$, $x \in [0, a]$.
11. $f(x) = \frac{x^2}{4a}$, $g(x) = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$, $x \in [-2a, 2a]$.

II.

- Să se calculeze aria mulțimii cuprinsă între parabola de ecuație $y^2 = 4x$ și dreapta de ecuație $y = 2x$.
- Să se calculeze aria mulțimii din semiplanul $\{(x, y) \mid y > 0\}$ cuprinsă între hiperbola echilaterală de ecuație $xy = a^2$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = a$ și $x = 2a$.
- Interiorul cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 16$ este despărțit de parabola de ecuație $y^2 = 6x$ în două regiuni. Să se găsească aria fiecăreia din ele.
- Interiorul elipsei de ecuație $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ este despărțit de hiperbola de ecuație $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ în trei regiuni. Să se calculeze aria fiecăreia din ele.
- Să se calculeze aria figurii cuprinsă între parabolele de ecuații

$$y^2 = 8(2 - x) \quad \text{și} \quad y^2 = 24(2 + x).$$
- Interiorul cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 8$ este despărțit de parabola de ecuație $y^2 = 2x$ în două regiuni. Să se calculeze aria fiecăreia din ele.
- Fie hiperbola echilaterală de ecuație $x^2 - y^2 = a^2$ și dreapta de ecuație $y = kx$ ($0 < k < 1$). Să se calculeze aria mulțimii cuprinsă între semidreapta Ox ($x > 0$), arcul de hiperbolă $x^2 - y^2 = a^2$ ($y > 0$) și dreapta $y = kx$.
- Să se calculeze aria mulțimii cuprinsă între parabola de ecuație $y^2 = x$ și dreapta de ecuație $y = 2x - 1$.
- Să se calculeze aria mulțimii cuprinsă între parabolele de ecuație $y^2 = x$, $x^2 = 8y$.

§ 2. VOLUMUL CORPURILOR DE ROTAȚIE

În acest paragraf vom presupune că cititorul este familiarizat cu calculul volumului unor corpuri uzuale ca: paralelipiped, prismă, piramidă, cilindru, con, trunchi de con. Pornind de la volumul cilindrului, vom defini ce înseamnă că un corp de rotație (corp obținut prin rotirea subgraficului unei funcții pozitive f în jurul axei Ox) are volum și vom deduce o formulă de calcul al volumului unor astfel de corpuri.

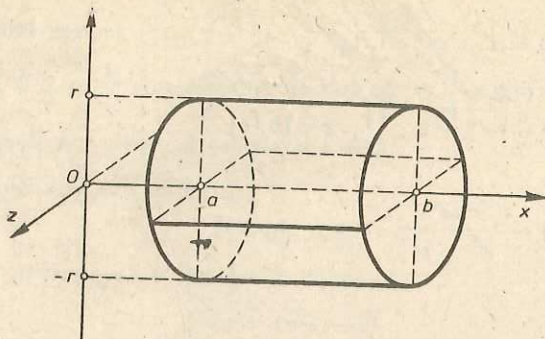


Fig. III.6

Cel mai simplu corp de rotație se obține rotind subgraficul unei funcții constante pozitive:

$$f(x) = r, (\forall) x \in [a, b]$$

în jurul axei Ox (fig. III.6). Această mulțime (care este un cilindru de rază r și înălțime $b - a$) poate fi scrisă sub forma

$$C_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leq r, a \leq x \leq b\}.$$

Volumul acestui cilindru C_r este

$$\text{vol}(C_r) = \pi r^2(b - a).$$

2.1. Definiție. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$. Mulțimea

$$C_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

se numește corpul de rotație determinat de funcția f sau corpul obținut prin rotirea subgraficului funcției f în jurul axei Ox (fig. III.7).

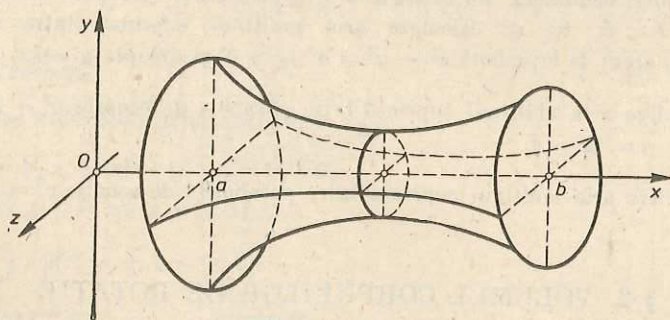


Fig. III.7

2.2. Observație. Dacă funcția $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ este constantă pe porțiuni, adică dacă există o diviziune $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ a lui $[a, b]$ astfel încât g este constantă pe fiecare interval (x_{i-1}, x_i) :

$$g(x) = c_i, \quad (\forall) x \in (x_{i-1}, x_i),$$

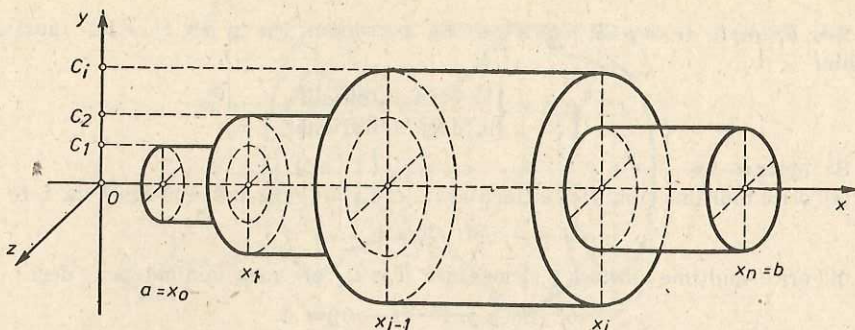


Fig. III.8

atunci corpul de rotație determinat de f are forma următoare (fig. III.8): adică este o reuniune finită de cilindri. Volumul unui asemenea corp de rotație este

$$\text{vol}(C_f) = \pi \sum_{i=1}^n c_i^2 (x_i - x_{i-1}).$$

Prin analogie cu noțiunea de mulțime elementară introdusă în paragraful precedent, vom numi *mulțime cilindrică elementară*, orice mulțime care se obține prin rotirea subgraficului unei funcții constante pe porțiuni în jurul axei Ox .

Cel mai mic (respectiv cel mai mare) dintre numerele pozitive c_1, c_2, \dots, c_n va fi numit *raza minimă* (resp. *raza maximă*) a mulțimii cilindrice elementare $C(f)$.

Așa cum am folosit mulțimile elementare pentru a defini aria unei mulțimi din plan, vom folosi mulțimile cilindrice elementare pentru a defini volumul corpurilor de rotație.

2.3. Definiție. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ și C_f corpul de rotație determinat de funcția f . Spunem că C_f are volum dacă există două șiruri $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de mulțimi cilindrice elementare (fiecare G_n și H_n fiind determinate de funcțiile constante pe porțiuni $g_n, h_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$) astfel încît

$$(1) \quad G_n \subset C_f \subset H_n, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}$$

și

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(G_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(H_n).$$

În acest caz volumul lui C_f se definește prin

$$\text{vol}(C_f) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(G_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(H_n).$$

2.4. Observație. Definiția volumului corpului de rotație C_f nu depinde de șirurile $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ considerate.

2.5. *Exemplu de corp de rotație care nu are volum.* Fie $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ funcția lui Dirichlet

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ rațional,} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ irațional.} \end{cases}$$

Se observă că

(α) orice mulțime cilindrică elementară $G \subset C_g$ are raza maximă egală cu zero deci,

$$\text{vol}(G) = 0,$$

(β) orice mulțime cilindrică elementară $H \supset C_g$ are raza minimă ≥ 1 , deci

$$\text{vol}(H) \geq \pi \cdot 1^2 \cdot (1 - 0) = \pi.$$

Fie acum $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de mulțimi cilindrice elementare astfel încît

$$(1) \quad G_n \subset C_g \subset H_n, \quad (\forall) n \in \mathbb{N},$$

(2) șirurile de numere pozitive $(\text{vol}(G_n))_{n \in \mathbb{N}}$ și $(\text{vol}(H_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sînt convergente. Atunci din (1), (α) și (β) rezultă

$$\text{vol}(G_n) = 0 \text{ și } \text{vol}(H_n) \geq \pi, \quad (\forall) n \in \mathbb{N},$$

deci (2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(G_n) = 0 < \pi \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(H_n),$$

de unde rezultă că C_g nu are volum.

2.6. Teoremă. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție continuă, atunci (i) corpul de rotație determinat de f are volum și

$$(ii) \quad \text{vol}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Demonstrație. (Modelată după demonstrația teoremei 1.6). Fie

$$\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{p_n}^n = b), \quad (n \in \mathbb{N})$$

un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$$

și să notăm cu m_i^n (respectiv M_i^n) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcției f pe intervalul închis și mărginit $[x_{i-1}^n, x_i^n]$. Atunci există $u_i^n, v_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$ astfel încît

$$f(u_i^n) = m_i^n \text{ și } f(v_i^n) = M_i^n.$$

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ definim funcțiile constante pe porțiuni $g_n, h_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$g_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} m_i^n = f(u_i^n), & \text{dacă } x \in (x_{i-1}^n, x_i^n), \quad (1 \leq i \leq p_n), \\ f(x_i), & \text{dacă } x = x_i, \quad (0 \leq i \leq p_n), \end{cases}$$

$$h_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} M_i^n = f(v_i^n), & \text{dacă } x \in (x_{i-1}^n, x_i^n), \quad (1 \leq i \leq p_n), \\ f(x_i), & \text{dacă } x = x_i, \quad (0 \leq i \leq p_n). \end{cases}$$

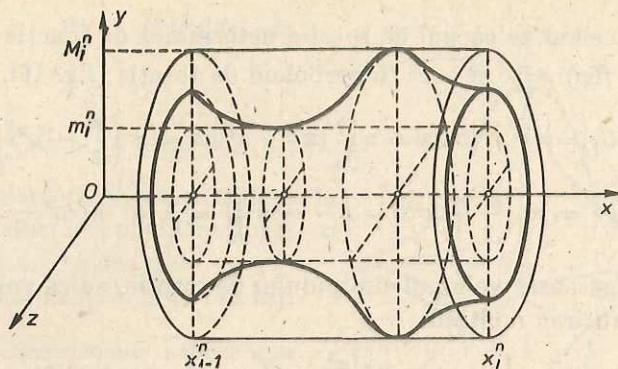


Fig. III.9

Atunci corpurile de rotație G_n și H_n determinate de g_n și h_n , respectiv, sînt mulțimi cilindrice elementare cu proprietățile:

$$(2) \quad G_n \subset C_f \subset H_n, \quad (\forall) n \in \mathbb{N},$$

$$(3) \quad \begin{cases} \text{vol}(G_n) = \pi \sum_{i=1}^{p_n} f^2(u_i^n) (x_i^n - x_{i-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(\pi f^2, u_i^n), \\ \text{vol}(H_n) = \pi \sum_{i=1}^{p_n} f^2(v_i^n) (x_i^n - x_{i-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(\pi f^2, v_i^n). \end{cases}$$

Funcția f fiind continuă, rezultă că și funcția πf^2 este continuă, deci (capitolul II, teorema 3.12) πf^2 este integrabilă, prin urmare, ținînd seamă de (1) și (3), obținem:

$$(4) \quad \begin{cases} \pi \int_a^b f^2(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(\pi f^2, u_i^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(G_n) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(\pi f^2, v_i^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(H_n). \end{cases}$$

Șirurile de mulțimi cilindrice elementare $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verificînd relațiile (2) și (4), rezultă că $C(f)$ are volum și

$$\text{vol}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

2.7. Exemple

a) Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ definită prin $f(x) = \sqrt{2ax}$ (paraboloid de rotație; fig. III.10).

Avem

$$\begin{aligned} \text{vol}(C_f) &= \pi \int_0^b f^2(x) dx = \\ &= 2\pi a \int_0^b x dx = 2\pi a \frac{x^2}{2} \Big|_0^b = \pi a b^2. \end{aligned}$$

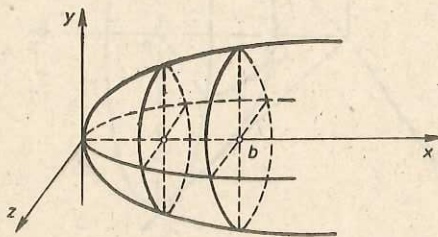


Fig. III.10

β) Să se calculeze corpul de rotație determinat de funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$ definită prin $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ (hiperboloid de rotație; fig. III.11)

$$\begin{aligned} \text{vol}(C_f) &= \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_a^b (x^2 - a^2) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x \right) \Big|_a^b = \\ &= \pi \left[\left(\frac{b^3}{3} - a^2 b \right) - \left(\frac{a^3}{3} - a^3 \right) \right] = \frac{\pi}{3} (b^3 + 2a^3 - 3a^2 b). \end{aligned}$$

γ) Să se găsească volumul elipsoidului de rotație, adică volumul corpului obținut prin rotirea mulțimii

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad (a, b > 0)$$

în jurul axei Ox (fig. III.12)

Datorită simetriei elipsoidului față de planul yOz , este suficient să calculăm numai volumul jumătății situate în partea dreaptă ($x > 0$) a planului yOz . Fie deci,

$$f: [0, a] \rightarrow \mathbf{R}_+, \quad f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \text{vol}(C_f) &= \pi \int_0^a f^2(x) dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \\ &= \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} b^2 a, \end{aligned}$$

deci

$$\text{volumul elipsoidului} = \frac{4\pi}{3} ab^2.$$

Dacă $a = b = r$, atunci regăsim

$$\text{volumul sferei de rază } a = \frac{4\pi}{3} a^3.$$

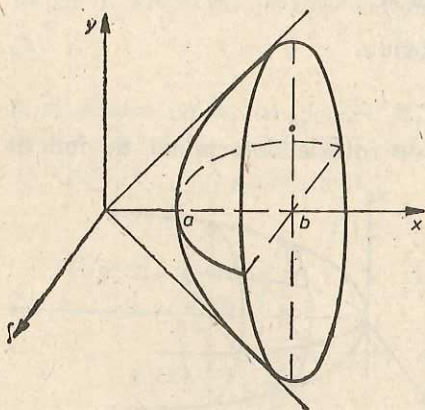


Fig. III.11

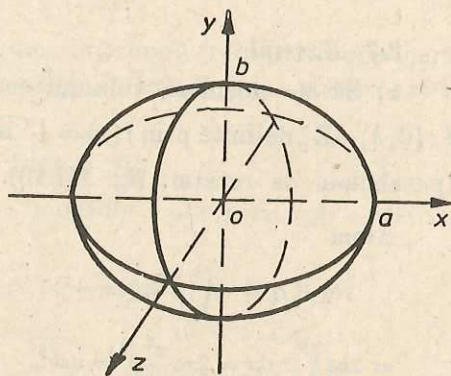


Fig. III.12

δ) Fie $a > 0$ și astroida de ecuație

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad (a > 0).$$

Să se calculeze volumul astroidului de rotație (corpul obținut prin rotirea mulțimii mărginite de astroidă, în jurul axei Ox ; fig. III.13).

Datorită simetriei este suficient să calculăm volumul corpului de rotație determinat de funcția

$$f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in [0, a].$$

Avem

$$\begin{aligned} \text{vol}(C_f) &= \pi \int_0^a f^2(x) dx = \pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 dx = \\ &= \pi \int_0^a \left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} - x^2 \right) dx = \\ &= \pi \left(a^2 x - \frac{9}{5} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{18}{105} \pi a^3. \end{aligned}$$

Deci volumul astroidului de rotație este

$$\frac{32}{105} \pi a^3.$$

2.8. Exerciții

Să se calculeze volumele corpurilor de rotație determinate de funcțiile:

1. $f(x) = b \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad x \in [a, b], \quad a, b > 0.$
2. $f(x) = 2x - x^2, \quad x \in [0, 2].$
3. $f(x) = \sin x, \quad x \in [0, \pi].$
4. $f(x) = e^{-x}, \quad x \in [0, 2].$
5. $f(x) = \arcsin x, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2} \right].$
6. $f(x) = x \ln x, \quad x \in [1, e].$
7. $f(x) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad x \in [0, a].$
8. $f(x) = xe^x, \quad x \in [0, 1].$

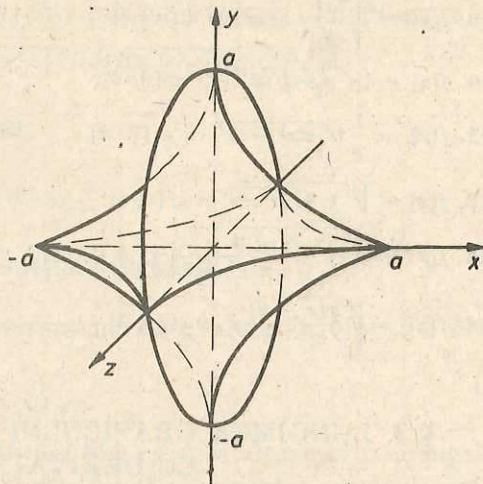


Fig. III.13

$$9. f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{a}}, \quad x \in [0, a].$$

$$10. f(x) = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2, \quad x \in [0, a].$$

$$11. f(x) = \frac{1}{a} \sqrt{ax^3 - x^4}, \quad x \in [0, a].$$

$$12. f(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x^2}}, \quad x \in [0, 1].$$

$$13. f(x) = \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x}, \quad x \in [a, b], \quad b > a > 0.$$

$$14. f(x) = \sqrt{\frac{x(x-3)}{x-4}}, \quad x \in [0, 3].$$

§ 3. LUNGIMEA GRAFICULUI UNEI FUNCȚII DERIVABILE CU DERIVATA CONTINUĂ

În acest paragraf vom defini lungimea graficului unei funcții continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ și vom arăta că dacă f este derivabilă cu derivata continuă, atunci graficul lui f are lungime finită și

$$\text{lungimea graficului lui } f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

3.1. Definiție. Pentru orice funcție $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ și orice diviziune

$$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

a intervalului $[a, b]$ definim funcția $f_\Delta: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ prin

$$f_\Delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) \text{ dacă } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (1 \leq i \leq n);$$

f_Δ se numește funcția poligonală asociată lui f și lui Δ (fig. III.14).

3.2. Observație. Funcția f_Δ se obține, pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, scriind ecuația dreptei care trece prin punctele din plan

$$A_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$$

și

$$A_i(x_i, f(x_i)).$$

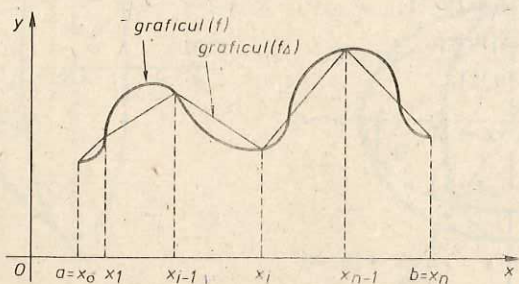


Fig. III.14

Distanța dintre punctele A_{i-1} și A_i este (aplicînd teorema lui Pitagora):

$$d(A_{i-1}, A_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

3.3. Definiție. Numărul pozitiv

$$l(f_\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n d(A_{i-1}, A_i)$$

se numește **lungimea graficului funcției poligonale f_Δ** .

3.4. *Observație.* Dacă Δ, Δ' sînt diviziuni ale intervalului $[a, b]$ și $\Delta \subset \Delta'$, atunci

$$l(f_\Delta) \leq l(f_{\Delta'}).$$

Ținînd seama că orice diviziune Δ' mai fină ca Δ se obține prin adăugarea la Δ a noi puncte de diviziune, este suficient să considerăm cazul în care Δ' se obține din Δ prin adăugarea unui singur punct $c \in (x_{j-1}, x_j)$:

$$\Delta = (a = x_0 < \dots < x_{j-1} < x_j < \dots < x_n = b),$$

iar

$$\Delta' = (a = x_0 < \dots < x_{j-1} < c < x_j < \dots < x_n = b).$$

Notînd cu B punctul de coordonate $(c, f(c))$ avem (fig. III.15):

$$d(A_{j-1}, A_j) \leq d(A_{j-1}, B) + d(B, A_j),$$

deci

$$\begin{aligned} l(f_\Delta) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n d(A_{i-1}, A_i) + d(A_{j-1}, A_j) \leq \\ &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n d(A_{i-1}, A_i) + d(A_{j-1}, B) + d(B, A_j) = l(f_{\Delta'}). \end{aligned}$$

3.5. *Definiție.* Spunem că **graficul unei funcții continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ are lungime finită** dacă există o constantă $M \geq 0$ astfel încît

$$l(f_\Delta) \leq M,$$

pentru orice diviziune Δ a intervalului $[a, b]$.

În acest caz **marginea superioară a mulțimii**

$$\{l(f_\Delta) \mid \Delta \text{ diviziune a lui } [a, b]\}$$

este $< \infty$. Numărul real pozitiv

$$l(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{l(f_\Delta) \mid \Delta \text{ diviziune a lui } [a, b]\}$$

se numește **lungimea graficului funcției f** .

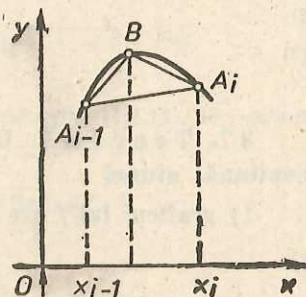


Fig. III.15

3.6. Observație. Dacă graficul lui f are lungime finită, atunci există un șir de diviziuni $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ale intervalului $[a, b]$ astfel încât

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$$

și

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l(f_{\Delta_n}) = l(f).$$

Într-adevăr, pentru orice $n \geq 1$ avem

$$l(f) - \frac{1}{n} < l(f) = \text{cel mai mic majorant al mulțimii } \{l(f_{\Delta})_{\Delta}\},$$

deci $l(f) - \frac{1}{n}$ nu este majorant pentru această mulțime, adică există o diviziune $\bar{\Delta}_n$ a lui $[a, b]$ astfel încât

$$(3) \quad l(f) - \frac{1}{n} < l(f_{\bar{\Delta}_n}) \leq l(f)$$

(a doua inegalitate rezultând din faptul că $l(f)$ este majorant pentru mulțimea $\{l(f_{\Delta})_{\Delta}\}$). Din (3) rezultă

$$(4) \quad l(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} l(f_{\bar{\Delta}_n}).$$

Luând, pentru fiecare $n \geq 1$, o diviziune Δ_n cu proprietățile

$$\bar{\Delta}_n \subset \Delta_n$$

$$\|\Delta_n\| \leq \frac{1}{n},$$

rezultă (observația 3.4) că:

$$(5) \quad l(f_{\bar{\Delta}_n}) \leq l(f_{\Delta_n}) \quad (\leq l(f))$$

și

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0.$$

Din (4) și (5) rezultă că șirul $\{l(f_{\Delta_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent

și

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l(f_{\Delta_n}) = l(f).$$

3.7. Teoremă. Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă, cu derivata continuă, atunci

1) graficul lui f are lungime finită

și

$$2) \quad l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că funcția

$$x \rightarrow \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

este continuă, deci mărginită, adică există $M \geq 0$ astfel încît

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} \leq M, \quad (\forall) x \in [a, b].$$

Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ o diviziune oarecare a lui $[a, b]$. Aplicînd teorema creșterilor finite lui f , pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, ($1 \leq i \leq n$) obținem un $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ astfel încît

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

deci

$$\begin{aligned} l(f_\Delta) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq M \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = M(b - a), \end{aligned}$$

oricare ar fi diviziunea Δ a intervalului $[a, b]$. În concluzie, graficul lui f are lungime finită.

Fie acum

$$\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{p_n}^n = b), \quad n \in \mathbb{N},$$

un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu proprietățile (vezi observația 3.6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$$

și

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l(f_{\Delta_n}) = l(f).$$

Aplicînd, ca mai sus, teorema creșterilor finite lui f pe fiecare interval $[x_{i-1}^n, x_i^n]$, obținem un $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$ astfel încît

$$(2) \quad f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n) = f'(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Notînd $\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \dots, \xi_{p_n}^n)$ și ținînd seamă de (2), obținem

$$\begin{aligned} l(f_{\Delta_n}) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i^n - x_{i-1}^n)^2 + (f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n))^2} = \\ (3) \quad &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2} \cdot (x_i^n - x_{i-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(\sqrt{1 + (f')^2}, \xi^n). \end{aligned}$$

Funcția $\sqrt{1 + (f')^2}$ fiind continuă, este integrabilă (teorema II.3.12), deci (observația II.2.11)

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(\sqrt{1 + (f')^2}, \xi^n) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Din egalitățile (1), (3) și (4) obținem

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

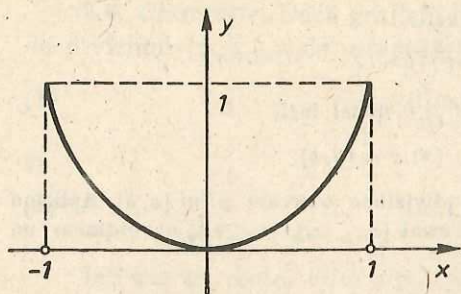


Fig. III.16

3.8. Exemple

α) Să se calculeze lungimea graficului funcției (fig. III.16)

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-1, 1].$$

Datorită simetriei este suficient să calculăm lungimea graficului restricției f_0 a lui f la $[0, 1]$. Avem

$$\begin{aligned} l(f) &= 2l(f_0) = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx, \end{aligned}$$

deci aplicând exercițiul 2.2 (7) din capitolul I, obținem

$$l(f) = 2 \left[\frac{1}{2} 2x \sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{2} \ln \left(2x + \sqrt{1 + 4x^2} \right) \right] \Big|_0^1 = 2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}).$$

β) Să se calculeze lungimea graficului funcției

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \ln \sqrt{x}, \quad x \in [1, e].$$

Avem

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right),$$

deci

$$\begin{aligned} l(f) &= \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{x} \right)^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \right)} dx = \\ &= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2x}\right)^2} dx = \int_1^e \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \ln x \right) \Big|_1^e = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} (e^2 + 1). \end{aligned}$$

γ) Să se calculeze lungimea astroidei (fig. III.17) de ecuație

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad (a > 0).$$

Prima bisectoare ($y = x$) intersectează (în primul cadran) astroida în punctul

$$M \left(2^{-\frac{3}{2}} a, 2^{-\frac{3}{2}} a \right).$$

Datorită simetriei avem egalitățile:

lungimea arcului $(\widehat{AM}) = \frac{1}{2}$ lungimea arcului $(\widehat{AMB}) = \frac{1}{8}$ lungimea astroidei,

deci este suficient să calculăm lungimea graficului funcției

$$f(x) = \left(\frac{2}{3} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in \left[2^{-\frac{3}{2}} a, a \right]$$

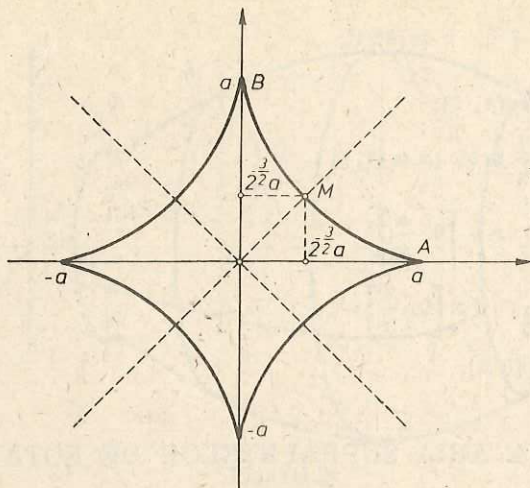


Fig. III.17

Derivând funcția f , obținem

$$f'(x) = \frac{3}{2} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{3} \right) x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\left(\frac{2}{a^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

deci

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{\frac{2}{a^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}}{\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \right)^2}} = \sqrt{\left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{3}},$$

prin urmare

$$\begin{aligned} l(f) &= \int_{-\frac{3}{2}a}^a \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = a^{\frac{1}{3}} \int_{-\frac{3}{2}a}^a x^{-\frac{1}{3}} dx = \\ &= a^{\frac{1}{3}} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \Big|_{-\frac{3}{2}a}^a = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} \left[a^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{a}{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \right] = \frac{3}{4} a. \end{aligned}$$

Așadar, lungimea astroidei este

$$8l(f) = 6a.$$

3.9. Exerciții. Să se calculeze lungimile graficelor următoarelor funcții:

1. $f(x) = \ln x$, $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$.

2. $f(x) = \ln(1 - x^2)$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$$3. f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad x \in [0, 1].$$

$$4. f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [1, 2].$$

$$5. f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad x \in [1, e].$$

$$6. f(x) = \ln \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

$$7. f(x) = \ln \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in \left[0, \frac{2}{3}\right].$$

$$8. f(x) = e^x, \quad x \in [0, 1].$$

§ 4. ARIA SUPRAFETELOR DE ROTAȚIE

4.1. Definiție. Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție continuă, atunci mulțimea

$$S_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} = f(x), \quad (\forall) x \in [a, b]\}$$

se numește suprafața de rotație determinată de funcția f (fig. III.18) sau suprafața obținută prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox .

Am văzut în paragraful precedent cum se asociază lui f și fiecărei diviziuni $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ a intervalului $[a, b]$ o funcție poligonală f_Δ . Considerăm acum suprafața de rotație $S(f_\Delta)$ determinată de funcția f_Δ .

4.2. Observație. Presupunind cunoscut faptul că aria laterală a unui trunchi de con de raze r_1, r_2 și generatoare g (fig. III.19) este dată de relația

$$\pi(r_1 + r_2)g,$$

putem calcula aria laterală a suprafeței de rotație $S(f_\Delta)$ determinată de funcția poligonală f_Δ .

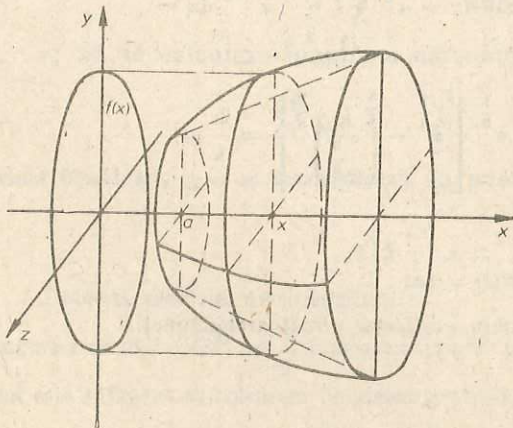


Fig. III.18

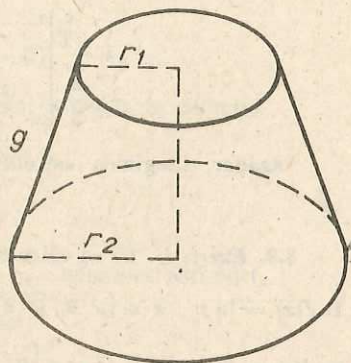


Fig. III.19

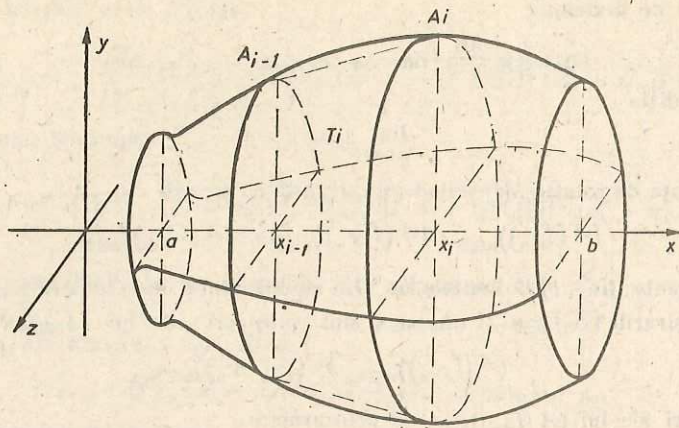


Fig. III.20

Într-adevăr, aria laterală a trunchiului de con T_i (fig. III.20) de raze $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ și generatoare $d(A_{i-1}, A_i)$ (distanța dintre A_{i-1} și A_i) fiind

$$\pi(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \cdot d(A_{i-1}, A_i),$$

rezultă că aria laterală a suprafeței $S(f_\Delta)$ este

$$A(f_\Delta) = \pi \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

După această observație putem defini ce înseamnă că o suprafață de rotație are arie, precum și aria laterală a unei astfel de suprafețe.

4.3. Definiție. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție continuă. Spunem că suprafața de rotație $S(f)$ are arie, dacă oricare ar fi șirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0,$$

șirul

$$(A(f_{\Delta_n}))_{n \in \mathbb{N}}$$

al ariilor laterale ale suprafețelor de rotație $S(f_{\Delta_n})$ ($n \in \mathbb{N}$) este convergent în \mathbb{R} . În acest caz numărul real pozitiv

$$A(f) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} A(f_{\Delta_n})$$

se numește aria laterală a suprafeței de rotație $S(f)$.

4.4. Observație. Numărul real pozitiv $A(f)$ este corect definit, adică nu depinde de șirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ considerat.

Într-adevăr, fie $(\Delta'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(\Delta''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta'_n\| = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta''_n\|.$$

Atunci șirul de diviziuni

$$(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \stackrel{\text{def}}{=} (\Delta'_0, \Delta''_0, \Delta'_1, \Delta''_1, \dots, \Delta'_n, \Delta''_n, \dots)$$

verifică condiția

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$$

deci, suprafața de rotație $S(f)$ avînd arie, rezultă că șirurile

$$(A(f_{\Delta_n}))_{n \in \mathbb{N}}, (A(f_{\Delta'_n}))_{n \in \mathbb{N}}, (A(f_{\Delta''_n}))_{n \in \mathbb{N}}$$

sînt convergente; fie l, l', l'' limitele lor. Din modul cum a fost construit șirul $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se vede că șirurile $(\Delta'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(\Delta''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sînt subșiruri ale lui $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deci șirurile

$$(A(f_{\Delta'_n}))_{n \in \mathbb{N}} \text{ și } (A(f_{\Delta''_n}))_{n \in \mathbb{N}}$$

sînt subșiruri ale lui $(A(f_{\Delta_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ și prin urmare

$$l' = l \text{ și } l'' = l,$$

adică

$$l' = l''.$$

4.5. Teoremă. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție derivabilă, cu derivata continuă, atunci

(α) suprafața de rotație determinată de f are arie și

$$(β) A(f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Demonstrație: Funcția f fiind continuă pe intervalul închis și mărginit $[a, b]$, verifică (vezi, cap. II, 3.10) condiția (U), adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$(1) \quad (\forall) x', x'' \in [a, b] \text{ cu } |x' - x''| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4\pi l(f)},$$

unde $l(f)$ este lungimea graficului lui f .

Fie acum

$$\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{p_n}^n = b) \quad (n \in \mathbb{N})$$

un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$. Atunci există un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$\|\Delta_n\| < \eta_\varepsilon, \quad (\forall) n \geq n_\varepsilon.$$

Aplicînd teorema creșterilor finite lui f pe fiecare interval $[x_{i-1}^n, x_i^n]$, obținem un $\xi_i^n \in (x_{i-1}^n, x_i^n)$ cu proprietatea

$$(2) \quad f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n) = f'(\xi_i^n) \cdot (x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f\sqrt{1+(f')^2}, \xi_i^n) = \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx,$$

deci există $n_\varepsilon'' \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$(3) \quad \left| \sigma_{\Delta_n}(f\sqrt{1+(f')^2}, \xi_i^n) - \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon''$.

Deși aria laterală a lui $S(f\Delta_n)$

$$A(f\Delta_n) = \pi \sum_{i=1}^{p_n} (f(x_{i-1}^n) + f(x_i^n)) \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2} (x_i^n - x_{i-1}^n)$$

nu reprezintă suma Riemann

$$\sigma_{\Delta_n}(2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) = 2\pi \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i^n) \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2} (x_i^n - x_{i-1}^n),$$

vom arăta totuși că diferența lor în modul este mai mică decît $\frac{\varepsilon}{2}$.

Fie $n \geq n_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$. Atunci

$$|x_{i-1}^n - \xi_i^n|, |x_i^n - \xi_i^n| \leq x_i^n - x_{i-1}^n < \|\Delta_n\| < \eta_\varepsilon,$$

deci, ținînd seamă de (1), obținem

$$|f(x_{i-1}^n) - f(\xi_i^n)| < \frac{\varepsilon}{4\pi l(f)}$$

și

$$|f(x_i^n) - f(\xi_i^n)| < \frac{\varepsilon}{4\pi l(f)},$$

de unde

$$(4) \quad |f(x_{i-1}^n) + f(x_i^n) - 2f(\xi_i^n)| < \frac{\varepsilon}{2\pi l(f)}, \quad (\forall) n \geq n_\varepsilon.$$

Folosind inegalitatea (4), obținem

$$\begin{aligned} & \left| A(f\Delta_n) - \sigma_{\Delta_n}(2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) \right| = \\ & = \left| \pi \sum_{i=1}^{p_n} (f(x_{i-1}^n) + f(x_i^n) - 2f(\xi_i^n)) \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2} (x_i^n - x_{i-1}^n) \right| \leq \\ & \leq \pi \sum_{i=1}^{p_n} |f(x_{i-1}^n) + f(x_i^n) - 2f(\xi_i^n)| \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2} (x_i^n - x_{i-1}^n) < \\ & < \pi \frac{\varepsilon}{2\pi l(f)} \sum_{i=1}^{p_n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2} (x_i^n - x_{i-1}^n) = \frac{\varepsilon}{2l(f)} l(f\Delta_n) \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2l(f)} \cdot l(f) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad (\forall) n \geq n_\varepsilon. \end{aligned}$$

Din această inegalitate și inegalitatea (3) rezultă că, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\begin{aligned} & \left| A(f\Delta_n) - 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \right| \leq \\ & \leq \left| A(f\Delta_n) - \sigma_{\Delta_n}(2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) \right| + \\ & + \left| \sigma_{\Delta_n}(2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) - 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \right| < \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (\forall) n \geq n_\varepsilon, \end{aligned}$$

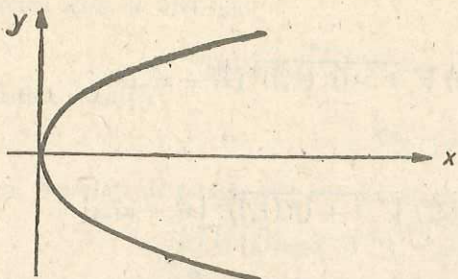


Fig. III.21

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n} (2\pi f \sqrt{1 + (f'(x))^2}, \xi_i^n)$$

există și este egală cu

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Cum aceasta are loc pentru orice șir de diviziuni $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ale lui $[a, b]$ de normă tinzînd la zero, rezultă (definiția 4.3) că suprafața de rotație determinată de f are arie și

$$A(f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

4.6. *Observație.* Considerînd parabola de ecuație

$$y^2 = 2ax, \quad (a > 0)$$

se observă că panta tangentei la parabolă în origine este infinită (fig. III.21), adică funcția

$$f(x) = \sqrt{2ax}, \quad x \in [0, \infty)$$

nu este derivabilă în 0. Ținînd seamă de această observație și de faptul că integrala

$$\int_a^b g(x) dx$$

a fost definită pentru funcții g definite pe întregul interval $[a, b]$, rezultă că, în cazul considerat, nu se poate vorbi de

$$\int_0^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Totuși, se observă (intuitiv) că această suprafață de rotație are arie. În observația care urmează vom încerca să arătăm că au arie și suprafețele de rotație determinate de funcții f care nu sînt neapărat derivabile la capetele intervalului $[a, b]$, dar pentru care funcția $f\sqrt{1 + (f')^2}$ are limită finită în punctele a și b .

4.7. *Observație.* Să considerăm funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ cu proprietățile:

(c₁) f este derivabilă, cu derivata continuă pe (a, b) ,

(c₂) funcția $f\sqrt{1 + (f')^2}$ are limite finite în punctele a și b .

În acest caz funcția $f\sqrt{1 + (f')^2}$ poate fi prelungită la o funcție continuă $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Într-adevăr, dacă y_a (respectiv y_b) este limita funcției $f\sqrt{1 + (f')^2}$ în punctul a (respectiv b), atunci definim funcția $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ prin egalitatea

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} y_a, & \text{dacă } x = a, \\ f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}, & \text{dacă } x \in (a, b), \\ y_b, & \text{dacă } x = b. \end{cases}$$

Funcția h are următoarele proprietăți:

(α) restricția lui h la (a, b) coincide cu $f\sqrt{1 + (f')^2}$;

(β) $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = y_a = h(a)$;

(γ) $\lim_{x \rightarrow b} h(x) = y_b = h(b)$.

Din (β) și (γ) rezultă că h este continuă în punctele a și b , iar din ipoteza (c_1) și proprietatea (α) rezultă continuitatea lui h pe (a, b) ; deci h este continuă pe întregul interval închis $[a, b]$, prin urmare h este integrabilă pe $[a, b]$.

Observăm că, în cursul demonstrației teoremei 4.5, nu s-a utilizat nicăieri nici $f'(a)$ și nici $f'(b)$, ci numai $f'(\xi_i^n)$, unde $\xi_i^n \in (x_{i-1}^n, x_i^n) \subset (a, b)$ au fost obținuți aplicând teorema creșterilor finite.

Pe de altă parte, ținând seama de proprietatea (α) a lui f , rezultă că pentru acești ξ_i^n , avem

$$\sigma_{\Delta_n}(2\pi f\sqrt{1+(f')^2}, \xi_i^n) = \sigma_{\Delta_n}(2\pi h, \xi_i^n),$$

deci se obține inegalitatea (cu notațiile din demonstrația teoremei 4.5)

$$|A(f_{\Delta_n}) - \sigma_{\Delta_n}(2\pi h, \xi_i^n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (\forall) n \geq n_\varepsilon.$$

Însă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(2\pi h, \xi_i^n) = 2\pi \int_a^b h(x) dx,$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(f_{\Delta_n}) \text{ există} = 2\pi \int_a^b h(x) dx.$$

Așadar, putem formula următorul rezultat:

4.8. Teoremă. Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție derivabilă, cu derivata continuă pe (a, b) astfel încît funcția $f\sqrt{1+(f')^2}$ are limite finite în punctele a și b , atunci suprafața de rotație determinată de f are arie și

$$A(f) = 2\pi \int_a^b h(x) dx,$$

unde h este prelungirea (prin continuitate) a lui $f\sqrt{1+(f')^2}$ la intervalul închis $[a, b]$.

4.9. Exemple.

$\alpha)$ Să se calculeze aria suprafeței de rotație determinată de funcția

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin x, \quad x \in [0, \pi], \quad (\text{fig. III.22}).$$

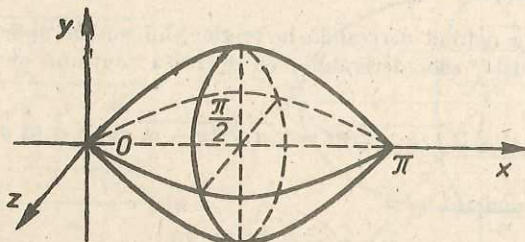


Fig. III.22

Funcția $x \rightarrow \sin x$ este derivabilă, cu derivata continuă pe toată mulțimea \mathbf{R} , deci f satisface condițiile teoremei 4.5. Datorită simetriei, este suficient să se calculeze aria suprafeței determinate de restricția f_0 a lui f la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Deci

$$A(f) = 2A(f_0) = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă

$$u = \varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

obținem

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

și

$$\begin{aligned} (1) \quad A(f) &= -4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \varphi^2(x)} \cdot \varphi'(x) dx = \\ &= -4\pi \int_1^0 \sqrt{1 + u^2} du = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du. \end{aligned}$$

O primitivă a funcției $u \rightarrow \sqrt{1 + u^2}$ este funcția (vezi cap. I, exemplul 2.2 (7)):

$$(2) \quad F(u) = \frac{1}{2} [u\sqrt{1 + u^2} + \ln(u + \sqrt{1 + u^2})].$$

Din relațiile (1), (2) și formula Leibniz-Newton, obținem:

$$\begin{aligned} A(f) &= 2\pi \left[u\sqrt{1 + u^2} + \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right]_0^1 = \\ &= 2\pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]. \end{aligned}$$

β) Să se calculeze aria suprafeței de rotație determinată de funcția

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2ax}, \quad x \in [0, b] \quad (a > 0)$$

(paraboloid de rotație).

Funcția $x \rightarrow \sqrt{x}$ nefiind derivabilă în origine, nu putem aplica teorema 4.5 (vezi observația 4.6). Totuși f este derivabilă, cu derivata continuă pe $(0, b]$, iar funcția

$$f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{a} \sqrt{2x + a}, \quad (\forall) x \in (0, b]$$

are limită finită în punctul 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} = a,$$

deci funcția $h : [0, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$ definită prin

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a, & \text{dacă } x = 0, \\ f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}, & \text{dacă } x \in (0, b] \end{cases}$$

este continuă pe $[0, b]$.

Aplicând teorema 4.8, rezultă că suprafața de rotație determinată de funcția

$$f(x) = \sqrt{2ax}, \quad x \in [0, b]$$

are arie

$$\begin{aligned} A(f) &= 2\pi \int_0^b h(x) dx = 2\pi \int_0^b \sqrt{a} \sqrt{2x+a} dx = \\ &= \pi \sqrt{a} \int_0^b (2x+a)^{\frac{1}{2}} (2x+a)' dx = \pi \sqrt{a} \left. \frac{(2x+a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^b = \\ &= \frac{2\pi \sqrt{a}}{3} \left[(a+2b)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \right]. \end{aligned}$$

γ) Să se calculeze aria suprafeței (fig.III.23) obținute prin rotirea în jurul axei Ox a elipsei de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > b > 0)$$

Deci se cere să se calculeze aria suprafeței de rotație determinată de funcția

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a].$$

Derivând în egalitatea

$$f^2(x) = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2,$$

obținem

$$f(x) f'(x) = -\frac{b^2}{a^2} x,$$

deci

$$\begin{aligned} A(f) &= 2\pi \int_{-a}^a f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{f^2(x) + (f(x) f'(x))^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{b^4}{a^4} x^2} dx = \\ &= \frac{2\pi b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2} dx = \\ &= \frac{2\pi b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - e^2 x^2} dx. \end{aligned}$$

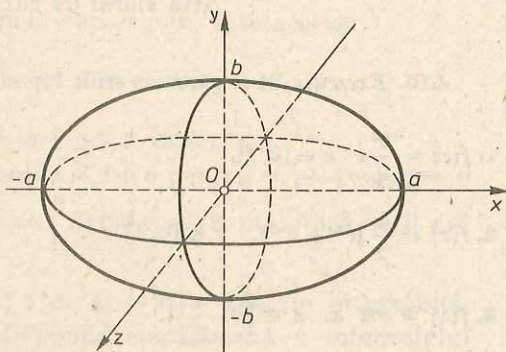


Fig. III.23

Numărul pozitiv

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a}$$

se numește *excentricitatea elipsei*.

Funcția $x \rightarrow \sqrt{a^2 - (ex)^2}$ fiind pară, avem (vezi cap. II, observația 4.16)

$$A(f) = \frac{4\pi b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - (ex)^2} dx = \frac{4\pi be}{a} \int_0^a \sqrt{\left(\frac{a}{e}\right)^2 - x^2} dx.$$

Se știe (vezi cap. I, exemplul 3.5 (2)) că o primitivă a funcției $x \rightarrow \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ este funcția

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[\alpha^2 \arcsin \frac{x}{\alpha} + x \sqrt{\alpha^2 - x^2} \right].$$

Deci

$$\begin{aligned} A(f) &= \frac{2\pi be}{a} \left[\left(\frac{a}{e}\right)^2 \arcsin \frac{x}{\frac{a}{e}} + x \sqrt{\left(\frac{a}{e}\right)^2 - x^2} \right] \Big|_0^a = \\ &= \frac{2\pi be}{a} \left[\left(\frac{a}{e}\right)^2 \arcsin e + a \sqrt{\left(\frac{a}{e}\right)^2 - a^2} \right] = \\ &= \frac{2\pi be}{a} \left[\left(\frac{a}{e}\right)^2 \arcsin e + \frac{a^2}{e} \sqrt{1 - e^2} \right] = \\ &= 2\pi ab \left[\frac{\arcsin e}{e} + \sqrt{1 - e^2} \right]. \end{aligned}$$

Observăm că dacă b tinde către a , atunci excentricitatea elipsei tinde la zero și elipsa devine un cerc de rază a . În acest caz

$$\lim_{e \rightarrow 0} \frac{\arcsin e}{e} = 1$$

și

Aria sferei de rază a este $4\pi a^2$.

4.10. Exerciții. Să se găsească ariile suprafețelor de rotație determinate de funcțiile:

1. $f(x) = \frac{x^3}{3}$, $x \in [0, 1]$.

2. $f(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$, $x \in [0, 1]$.

3. $f(x) = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$.

$$5. f(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right].$$

$$6. f(x) = 2\sqrt{1-x^2}, \quad x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

$$7. f(x) = \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}, \quad x \in [0, 1].$$

$$8. f(x) = \frac{1}{3\sqrt{a}}\sqrt{x(3a-x)^2}, \quad x \in [0, 3a].$$

§ 5. CALCULUL APROXIMATIV AL INTEGRALELOR DEFINITE

Am văzut în capitolul II (teorema 2.12) că dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, care admite primitive, atunci integrala definită a lui f poate fi calculată cu ajutorul formulei lui Leibniz-Newton:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

unde F este o primitivă a lui f .

În cazul funcțiilor integrabile care nu au primitive (astfel de funcții există, vezi exemplul II.2.13), sau al funcțiilor care au primitive, dar acestea sînt greu de calculat (de exemplu: nu se pot exprima cu ajutorul unor funcții elementare cunoscute), nu putem utiliza formula Leibniz-Newton. În asemenea situații trebuie recurs la alte metode. De obicei se folosesc metode de aproximare a integralei prin anumite sume $\sigma(f, \Delta)$ asociate unor diviziuni particulare Δ ale intervalului $[a, b]$.

Atunci cînd folosim o anumită metodă de aproximare a integralei $\int_a^b f(x)dx$, trebuie să cunoaștem, în funcție de diviziunea aleasă Δ , cit de mare poate fi diferența (în valoare absolută) dintre integrala $\int_a^b f(x)dx$ și suma $\sigma(f, \Delta)$ asociată diviziunii Δ .

Dacă se lucrează cu diviziuni *echidistante*, adică diviziuni:

$$\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

la care distanța dintre oricare două puncte consecutive este aceeași

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad (1 \leq i \leq n),$$

atunci problema de mai sus poate fi reformulată astfel:

„Dat fiind un $\epsilon > 0$, cit de mare trebuie să fie n pentru ca eroarea care o facem, atunci cînd luăm $\sigma(f, \Delta_n)$ în loc de $\int_a^b f(x)dx$, să fie mai mică decît ϵ ?”

5.1. Metoda dreptunghiurilor. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă, $\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ o diviziune echidistantă a intervalului $[a, b]$ și drept puncte „intermediare” luăm punctele x_1, x_2, \dots, x_n , adică în

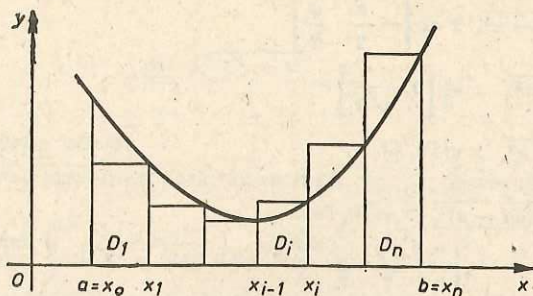


Fig. III.24

fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, drept punct „intermediar“ luăm extremitatea din dreapta a acestui interval. Atunci

$$(1) \quad \sigma_{\Delta_n}(f, x_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i) (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + \dots + f(x_n)].$$

Întrucît această sumă depinde numai de f și de n , o vom nota simplu prin $D_n(f)$.

În cazul particular, cînd f este pozitivă, suma $D_n(f)$ reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor D_1, D_2, \dots, D_n , unde (fig. III.24)

$$D_i \stackrel{\text{def}}{=} [x_{i-1}, x_i] \times [0, f(x_i)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i; 0 \leq y \leq f(x_i)\}.$$

Așadar, cînd f este pozitivă,

$$D_n(f) = \sum_{i=1}^n \text{aria } (D_i).$$

Din acest motiv, metoda de aproximare a integralei definite a unei funcții integrabile prin suma $D_n(f)$ se numește metoda dreptunghiurilor.

5.2. Estimarea erorii în metoda dreptunghiurilor.

Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă, cu derivata continuă, atunci

$$\left| \int_a^b f(x) dx - D_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{n} M(f'),$$

unde

$$M(f') \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Demonstrație. Fie ca mai sus

$$\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b),$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad (\forall) i = 1, \dots, n$$

și

$$D_n(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i) (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Notînd, ca de obicei,

$$m_i \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

$$M_i \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

și ținînd seamă că funcția f este continuă (fiind derivabilă), rezultă că f este mărginită și își atinge marginile pe intervalul închis și mărginit $[x_{i-1}, x_i]$. Deci există $u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]$ astfel încît

$$(1) \quad m_i = f(u_i), \quad M_i = f(v_i).$$

Aplicînd teorema creșterilor finite lui f , obținem un punct ξ_i cuprins între u_i și v_i astfel încît

$$(2) \quad f(v_i) - f(u_i) = f'(\xi_i)(v_i - u_i).$$

Avînd

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

rezultă

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

adică (vezi cap. II, propoziția 3.3 (i)).

$$(4) \quad s_{\Delta_n}(f) \leq D_n(f) \leq S_{\Delta_n}(f).$$

Ținînd seamă de relațiile (1) – (4) și de inegalitatea

$$|v_i - u_i| \leq x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n},$$

obținem

$$(5) \quad \begin{aligned} S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n [f(v_i) - f(u_i)] = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(v_i - u_i) \leq \\ &\leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n |f'(\xi_i)| \cdot (v_i - u_i) \leq \frac{(b-a)^2}{n^2} n M(f') = \frac{(b-a)^2}{n} M(f'). \end{aligned}$$

Pe de altă parte (vezi cap. II, relația (3) din demonstrația teoremei 3.7)

$$(6) \quad s_{\Delta_n}(f) \leq \int_a^b f(x) \leq S_{\Delta_n}(f).$$

Din (4), (5) și (6) obținem

$$\left| \int_a^b f(x) dx - D_n(f) \right| \leq S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f) \leq \frac{(b-a)^2}{n} M(f').$$

5.3. Metoda trapezelor. Această metodă constă în aproximarea integralei

$\int_a^b f(x) dx$ prin suma

$$T_n(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + f(b) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right],$$

cînd

$$x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}(b-a), \quad (1 \leq i \leq n).$$

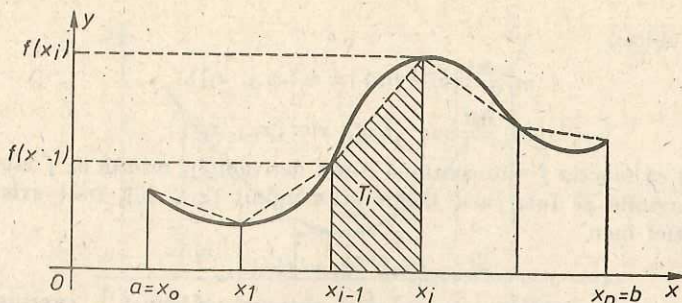


Fig. III.25

Dacă funcția f este pozitivă ($f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in [a, b]$), atunci această problemă revine la aproximarea ariei mulțimii

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

(cuprinse între axa Ox , graficul lui f și drepte paralele la Oy , care taie axa Ox în punctele a și b respectiv) prin suma ariilor trapezelor T_i (fig. III.25)

$$\text{aria } T(i) = \frac{1}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{2n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Deci, dacă f este pozitivă, atunci

$$T_n(f) = \sum_{i=1}^n \text{aria } (T_i) = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right].$$

5.4. Estimarea erorii în metoda trapezelor

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de două ori derivabilă, cu derivata a doua f'' continuă, atunci

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M(f''),$$

unde

$$M(f'') \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Demonstrație. Pentru orice $\alpha, \beta \in [a, b]$, cu $\alpha < \beta$, definim funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin egalitatea

$$(1) \quad g(t) = \frac{1}{2} (t - \alpha)(t - \beta).$$

Atunci

$$(2) \quad g(\alpha) = g(\beta) = 0,$$

$$g'(t) = \frac{1}{2} [2t - (\alpha + \beta)].$$

$$(3) \quad \begin{cases} g'(\alpha) = \frac{1}{2} (\alpha - \beta), \\ g'(\beta) = \frac{1}{2} (\beta - \alpha), \end{cases}$$

$$(4) \quad g''(t) = 1.$$

Aplicind de două ori formula de integrare prin părți și ținind seamă de relațiile (1) — (4), obținem:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g''(t)dt = f(t)g'(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} - f'(t)g(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)g(t)dt = \\ &= f(\beta) \frac{1}{2} (\beta - \alpha) - f(\alpha) \frac{1}{2} (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(t - \beta)dt = \\ &= \frac{1}{2} [f(\alpha) + f(\beta)] (\beta - \alpha) + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha) (t - \beta)dt, \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(\alpha) + f(\beta)] (\beta - \alpha) \right| &= \frac{1}{2} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(t - \beta)dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} |f''(t)| \cdot |t - \alpha| \cdot |t - \beta| dt \leq \frac{M(f'')}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)(\beta - t)dt. \end{aligned}$$

Însă

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha) (\beta - t)dt &= \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha) [(\beta - \alpha) - (t - \alpha)]dt = \\ &= (\beta - \alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha) dt - \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)^2 dt = (\beta - \alpha) \frac{(t - \alpha)^2}{2} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \frac{(t - \alpha)^3}{3} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{2} - \frac{(\beta - \alpha)^3}{3} = \frac{(\beta - \alpha)^3}{6}, \end{aligned}$$

deci

$$(5) \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - \frac{1}{2} [f(\alpha) + f(\beta)] (\beta - \alpha) \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^3}{12} M(f'').$$

Aplicind egalitatea (5) pentru $\alpha = x_{i-1}$ și $\beta = x_i$, obținem

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{1}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{12} \cdot M(f'') = \frac{(b - a)^3}{12n^3} \cdot M(f''),$$

de unde, folosind proprietatea de aditivitate a integralei, deducem

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - T_n(f) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{1}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \\ &\leq n \cdot \frac{(b - a)^3}{12n^3} M(f'') = \frac{(b - a)^3}{12n^2} \cdot M(f''). \end{aligned}$$

5.5. Exemple. a) Pentru funcția

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2, \quad x \in [0, 2]$$

se cere să se calculeze sumele $D_4(f)$, $T_4(f)$ și să se determine abaterea dintre aceste sume și integrala

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \simeq 2,66.$$

Am văzut că dacă

$$\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b) \text{ și } x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n},$$

atunci

$$D_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

$$T_n(f) = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right].$$

În cazul considerat avem

$$\Delta_4 = \left(0 < \frac{1}{2} < 1 < \frac{3}{2} < 2 \right) \text{ și } x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{4} = \frac{1}{2},$$

deci

$$D_4(x^2) = \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 4 \right] = \frac{15}{4} = 3,75$$

și

$$T_4(x^2) = \frac{1}{4} \left[f(2) + 2 \left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) \right) \right] = \frac{1}{4} \left[4 + 2 \left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} \right) \right] = \frac{11}{4} = 2,75.$$

Abaterile sînt

$$D_4(x^2) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{15}{4} - \frac{8}{3} = \frac{13}{12},$$

respectiv

$$T_4(x^2) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{11}{4} - \frac{8}{3} = \frac{1}{12}.$$

β) Funcția

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad x \in [0, 1]$$

fiind continuă, admite primitive. Totuși primitivele acestei funcții nu pot fi exprimate prin funcții elementare, deci nu putem calcula exact valoarea integralei

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

În acest caz, aproximarea numerică a acestei integrale devine o necesitate. Dacă luăm

$$\Delta_3 = \left(0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1 \right),$$

atunci

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{3} = \frac{1}{3}$$

și

$$T_3(e^x) = \frac{1}{6} \left[e^0 + e^1 + 2 \left(e^{\frac{1}{9}} + e^{\frac{4}{9}} \right) \right].$$

Folosind un calculator, obținem valori aproximative ale termenilor din suma de mai sus

$$e = 2,7182818; \quad e^{\frac{1}{9}} = 1,1175191; \quad e^{\frac{4}{9}} = 1,5596234;$$

deci

$$T_3(e^{x^2}) = \frac{1}{6} [3,7182818 + 5,354285] = \frac{9,0725668}{6} = 1,5120945.$$

Dacă se ia diviziunea

$$\Delta_4 = \left(0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1 \right), \quad \frac{b-a}{4} = \frac{1}{4},$$

atunci

$$T_4(e^{x^2}) = \frac{1}{8} \left[1 + e + 2 \left(e^{\frac{1}{16}} + e^{\frac{1}{4}} + e^{\frac{9}{16}} \right) \right].$$

Însă

$$e^{\frac{1}{16}} = 1,0644945; \quad e^{\frac{1}{4}} = 1,2840254; \quad e^{\frac{9}{16}} = 1,7550547,$$

deci

$$T_4(e^{x^2}) = \frac{1}{8} [3,7182818 + 8,2071492] = \frac{11,925431}{8} = 1,4906789.$$

Luând acum diviziunea

$$\Delta_{10} = (0 < 0,1 < 0,2 < \dots < 0,9 < 1), \quad \frac{b-a}{10} = \frac{1}{10},$$

avem

$$T_{10}(e^{x^2}) = \frac{1}{20} [1 + e + 2(e^{(0,1)^2} + e^{(0,2)^2} + \dots + e^{(0,9)^2})].$$

Însă

1 + e = 3,7282818,	e ^{(0,5)²} = 1,2840254,
e ^{(0,1)²} = 1,0100502,	e ^{(0,6)²} = 1,4333294,
e ^{(0,2)²} = 1,0408108,	e ^{(0,7)²} = 1,6323162,
e ^{(0,3)²} = 1,0941743,	e ^{(0,8)²} = 1,8964809,
e ^{(0,4)²} = 1,1735109,	e ^{(0,9)²} = 2,247908,

deci

$$T_{10}(e^{x^2}) = \frac{1}{20} [3,71822818 + 25,6251676] = \frac{29,3434494}{20} = 1,46717247$$

β') *Estimarea erorilor.* Funcția pozitivă

$$f''(x) = 2(1 + 2x^2)e^{x^2}, \quad x \in [0, 1]$$

fiind crescătoare, va avea maximumul în punctul 1, deci

$$M(f'') = 6e$$

Se știe (vezi 5.4) că

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M(f'')$$

deci

$$\left| \int_0^1 e^{x^2} dx - T_3(e^{x^2}) \right| \leq \frac{M(f'')}{12 \cdot 3^2} = \frac{6e}{12 \cdot 9} = \frac{e}{18} = 0,15101,$$

$$\left| \int_0^1 e^{x^2} dx - T_4(e^{x^2}) \right| \leq \frac{M(f'')}{12 \cdot 4^2} = \frac{6e}{12 \cdot 16} = \frac{e}{32} = 0,08493,$$

$$\left| \int_0^1 e^{x^2} dx - T_{10}(e^{x^2}) \right| \leq \frac{M(f'')}{12 \cdot 10^2} = \frac{6e}{12 \cdot 100} = \frac{e}{200} = 0,01359.$$

Așadar, avem evaluarea

$$1,45358 = T_{10}(e^{x^2}) - 0,01359 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq T_{10}(e^{x^2}) + 0,01359 = 1,48076.$$

Observație. Călculele numerice de mai sus au fost efectuate cu un calculator de buzunar.

β'') *Determinarea numărului minim, n, de puncte de diviziune, astfel încît:*

$$\left| D_n(e^{x^2}) - \int_0^1 e^{x^2} dx \right| < \frac{1}{1000}.$$

Funcția $f'(x) = 2xe^{x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) fiind strict crescătoare, va avea maximul în punctul 1, deci

$$M(f') = 2e.$$

Se cere, deci, să determinăm $n \geq 1$ astfel încît

$$\frac{(b-a)^2}{n} M(f') < \frac{1}{1000},$$

adică, în cazul nostru

$$\frac{1}{n} 2e < \frac{1}{1000},$$

sau

$$n > 2000e \approx 5436.$$

Așadar, pentru a calcula, prin metoda dreptunghiurilor, integrala

$$\int_0^1 e^{x^2} dx,$$

cu o eroare mai mică decît $\frac{1}{1000}$, este nevoie să se ia cel puțin 5437 puncte de diviziune.

β''') *Determinarea numărului minim n de puncte de diviziune astfel încît*

$$\left| T_n(f) - \int_0^1 e^{x^2} dx \right| < \frac{1}{1000}.$$

Se cere să determinăm $n \geq 1$ astfel încît

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M(f'') < \frac{1}{1000}.$$

În cazul nostru $b - a = 1$, iar $M(f'') = 6e$. Deci

$$\frac{6e}{12n^2} < \frac{1}{4\,000},$$

de unde

$$n > \sqrt{500e} = 10\sqrt{5e} \approx 36,86.$$

Așadar, pentru a calcula, prin metoda trapezelor, integrala

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

cu o eroare mai mică decât $\frac{1}{4\,000}$, sînt suficiente 37 puncte de diviziune.

În exemplele prezentate mai sus se arată că metoda dreptunghiurilor apare mai puțin „economică” decât metoda trapezelor, în sensul că pentru a obține o evaluare dată a integralei, numărul de operații necesare în prima metodă este mult mai mare decât cel din a doua metodă.

5.6. *Exerciții.* Să se calculeze suma

$$D_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

respectiv

$$T_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right],$$

prin metoda dreptunghiurilor (respectiv metoda trapezelor) de aproximare a integralei

$$\int_a^b f(x) dx$$

și să se evalueze eroarea pentru funcțiile:

1. $f(x) = x^2 + 3x$, $x \in [0, 4]$; $n = 4$; $n = 8$.
2. $f(x) = x^3 + 1$, $x \in [0, 2]$; $n = 4$; $n = 6$.
3. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in [0, 1]$; $n = 3$; $n = 5$.
4. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, 2]$; $n = 3$; $n = 5$.

§ 6. CENTRE DE GREUTATE

În cele ce urmează vor fi considerate numai plăci plane atât de subțiri încît, din punct de vedere practic, grosimea lor să poată fi neglijată. În aceste condiții vom identifica plăcile plane cu mulțimi din plan. Deoarece în practică este nevoie adeseori să se calculeze aria plăcilor plane, vom identifica plăcile plane cu mulțimi din \mathbb{R}^2 care au arie.

Nu vom intra în considerații fizice privind definiția masei unui corp, în particular a unei plăci plane. Vom spune totuși că masa este o măsură a cantității de materie dintr-un corp. Cu identificarea de mai sus, masa reprezintă o funcție $A \rightarrow m(A)$, care asociază fiecărei plăci plane (pe care o identificăm cu o mulțime care are arie) A , un număr real pozitiv $m(A)$, numit *masa* lui A . Această funcție trebuie să satisfacă, în cadrul mecanicii clasice, următoarele condiții:

(M_1) dacă placa A se descompune în n plăci plane disjuncte A_1, A_2, \dots, A_n , atunci

$$m(A) = m(A_1) + m(A_2) + \dots + m(A_n),$$

(M_2) masa $m(A)$ a unei plăci plane A rămâne constantă în timpul mișcării. O placă A se numește *omogenă* dacă există o constantă $k > 0$, astfel încît

$$m(B) = k \cdot \text{aria}(B),$$

pentru orice parte B (care are arie) a lui A .

Dacă $D = [a, b] \times [c, d]$ este o placă dreptunghiulară omogenă (fig. III.26), atunci există o constantă $k \geq 0$, astfel încît

$$m(D) = k \text{ aria}(D) = k(b - a)(d - c).$$

Pentru o astfel de placă de masă nenulă, centrul de greutate se definește ca fiind punctul $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ de coordonate

$$\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(b + a).$$

$$\bar{y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(d + c).$$

Să considerăm acum o placă E formată dintr-un număr finit de plăci dreptunghiulare D_1, D_2, \dots, D_n cu laturile paralele cu axele de coordonate și astfel încît fiecare două plăci D_i, D_j ($i \neq j$) au în comun cel mult o latură. Aceasta înseamnă că mulțimea din \mathbb{R}^2 cu care se identifică E este elementară (vezi cap. III, definiția 1.1). Pentru comoditate, astfel de plăci vor fi numite *elementare*.

Fie E o placă elementară formată din plăcile dreptunghiulare

$$D_1, D_2, \dots, D_n$$

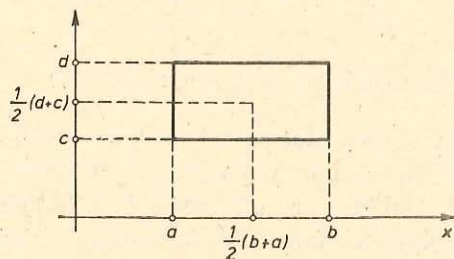


Fig. III.26

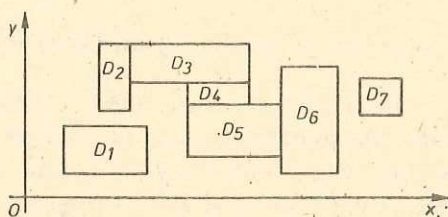


Fig. III.27

de mase

$$m(D_1), m(D_2), \dots, m(D_n)$$

și ale căror centre de greutate sînt respectiv punctele

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1), (\bar{x}_2, \bar{y}_2), \dots, (\bar{x}_n, \bar{y}_n).$$

Atunci centrul de greutate al lui E va fi, prin definiție, punctul (\bar{x}, \bar{y}) de coordonate

$$\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n m(D_i) \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n m(D_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n m(D_i) \bar{x}_i}{m(E)},$$

$$\bar{y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n m(D_i) \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n m(D_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n m(D_i) \bar{y}_i}{m(E)}.$$

Dacă placa E este omogenă, atunci există o constantă $k > 0$, astfel încît

$$m(B) = k \text{ aria}(B),$$

oricare ar fi partea B (care are arie) a lui E ; în particular,

$$m(D_i) = k \text{ aria}(D_i), \quad (\forall) i = 1, 2, \dots, n.$$

Deci putem exprima coordonatele centrului de greutate numai în funcție de ariile și centrele de greutate ale dreptunghiurilor D_i

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{aria}(D_i) \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n \text{aria}(D_i)}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{aria}(D_i) \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n \text{aria}(D_i)}.$$

Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue astfel încît $f(x) \leq g(x)$, $(\forall) x \in [a, b]$. Să considerăm mulțimea

$$\Gamma_{f,g} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b; f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

cuprinsă între graficele funcțiilor f, g și dreptele paralele la Oy care taie axa Ox în punctele a și b respectiv.

În cele ce urmează vom defini centrele de greutate ale plăcilor plane care se identifică cu mulțimi din plan de forma $\Gamma_{f,g}$.

Fie deci

$$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$, ξ_i mijlocul intervalului $[x_{i-1}, x_i]$

$$\xi_i = \frac{1}{2} (x_i + x_{i-1}), \quad (1 \leq i \leq n)$$

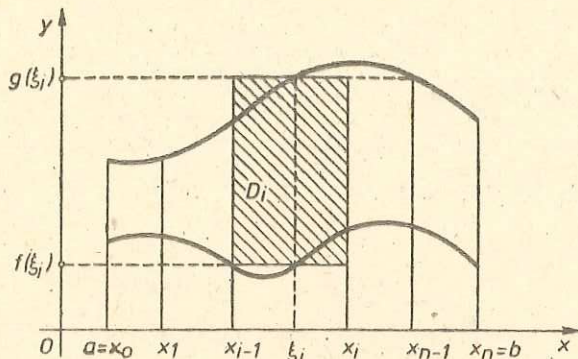


Fig. III.28

și dreptunghiul (fig. III.28)

$$D_i = [x_{i-1}, x_i] \times [f(\xi_i), g(\xi_i)]$$

a cărei arie este

$$\text{aria}(D_i) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (g(\xi_i) - f(\xi_i)).$$

Dacă norma diviziunii Δ este suficient de mică, atunci mulțimea

$$\Gamma_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i; f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

(delimitată de graficele lui f, g și de dreptele paralele la Oy care taie axa Ox în punctele x_{i-1} și x_i , respectiv) se aproximează cu dreptunghiul D_i , deci centrul de greutate al lui Γ_i se aproximează cu centrul de greutate al lui D_i ; prin urmare centrul de greutate al lui

$$\Gamma_{f,g} = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$$

se aproximează cu centrul de greutate al mulțimii elementare

$$E_\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^n D_i.$$

Coordonatele centrului de greutate al lui D_i fiind

$$\bar{x}_i = \xi_i, \quad \bar{y}_i = \frac{1}{2}[g(\xi_i) + f(\xi_i)],$$

rezultă că centrul de greutate al lui E_Δ va avea coordonatele:

$$\bar{x}_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^n \text{aria}(D_i) \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n \text{aria}(D_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i [g(\xi_i) - f(\xi_i)] \cdot (x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^n [g(\xi_i) - f(\xi_i)] \cdot (x_i - x_{i-1})},$$

$$\bar{y}_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^n \text{aria}(D_i) \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n \text{aria}(D_i)} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [g^2(\xi_i) - f^2(\xi_i)] \cdot (x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^n [g(\xi_i) - f(\xi_i)] \cdot (x_i - x_{i-1})}.$$

Aceste considerații conduc la următoarea:

6.1. Definiție. Dacă A este o placă plană care se identifică cu o mulțime de forma $\Gamma_{f,g}$, unde $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sînt funcții continue, atunci centrul de greutate al lui A este, prin definiție, punctul $(\bar{x}_A, \bar{y}_A) \in \mathbb{R}^2$ ale cărui coordonate sînt

$$\bar{x}_A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_a^b x[g(x) - f(x)]dx}{\int_a^b [g(x) - f(x)]dx} = \frac{\int_a^b x[g(x) - f(x)]dx}{\text{aria}(\Gamma_{f,g})}$$

$$\bar{y}_A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)]dx}{\int_a^b [g(x) - f(x)]dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)]dx}{\text{aria}(\Gamma_{f,g})}$$

Dacă $f(x) = 0$ și $g(x) \geq 0$ ($\forall x \in [a, b]$), atunci

$$\bar{x}_A = \frac{\int_a^b xg(x)dx}{\text{aria}(\Gamma_g)}, \quad \bar{y}_A = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b g^2(x)dx}{\text{aria}(\Gamma_g)}$$

6.2. Exemple. a) Fie $a > 0$ și o placă plană omogenă de forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a; y^2 \leq ax\}$$

(porțiunea din plan cuprinsă între parabola de ecuație

$$y^2 = ax$$

și dreapta paralelă la Oy care taie axa Ox în punctul a ; fig. III.29).

Pentru a calcula centrul de greutate al lui A considerăm funcțiile $f, g : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ definite prin

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\sqrt{ax}, \quad g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{ax}$$

Atunci coordonatele centrului de greutate al lui A sînt

$$\bar{x}_A = \frac{\int_0^a x[\sqrt{ax} - (-\sqrt{ax})]dx}{\int_0^a [\sqrt{ax} - (-\sqrt{ax})]dx} = \frac{2 \int_0^a x\sqrt{ax} dx}{2 \int_0^a \sqrt{ax} dx} = \frac{\int_0^a x^{\frac{3}{2}} dx}{\int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^a}{\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a} = \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5} a,$$

$$\bar{y}_A = \frac{\frac{1}{2} \int_0^a [(\sqrt{ax})^2 - (-\sqrt{ax})^2]dx}{2 \int_0^a \sqrt{ax} dx} = \frac{0}{\int_0^a \sqrt{ax} dx} = 0.$$

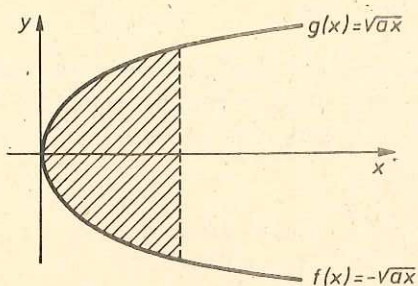


Fig. III.29

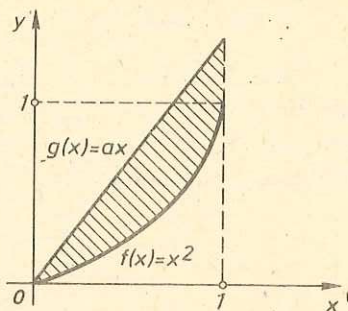


Fig. III.30

Deci centrul de greutate se află pe axa Ox , care este și axă de simetrie a mulțimii A .

β) Să se determine centrul de greutate al unei plăci plane omogene de forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; x^2 \leq y \leq ax\},$$

unde $a \geq 1$ (fig. III.30).

Luând $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2, \quad g(x) \stackrel{\text{def}}{=} ax,$$

rezultă

$$\begin{aligned} \text{aria}(A) &= \int_0^1 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^1 (ax - x^2) dx = \left(a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{a}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3a - 2}{6}, \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} \bar{x}_A &= \frac{\int_0^1 x(ax - x^2) dx}{\text{aria}(A)} = \frac{6}{3a - 2} \cdot \int_0^1 (ax^2 - x^3) dx = \frac{6}{3a - 2} \left[a \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right] \Big|_0^1 = \\ &= \frac{6}{3a - 2} \left(\frac{a}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{6(4a - 3)}{(3a - 2) \cdot 12} = \frac{4a - 3}{2(3a - 2)}, \end{aligned}$$

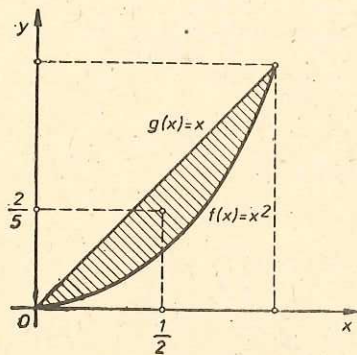


Fig. III.31

$$\begin{aligned} \bar{y}_A &= \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 (a^2 x^2 - x^4) dx}{\text{aria}(A)} = \\ &= \frac{6}{(3a - 2)} \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3(5a^2 - 3)}{15(3a - 2)} = \frac{5a^2 - 3}{5(3a - 2)}. \end{aligned}$$

În cazul particular când $a = 1$ (fig. III.34), centrul de greutate va fi situat în punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$.

γ) Să se determine centrul de greutate al unei plăci plane omogene de forma unui triunghi.

Pentru simplitate vom considera cazul unei plăci triunghiulare în care două din vîrfuri B și C sînt situate pe axa Ox , iar al treilea A este situat pe axa Oy (fig. III.32). Așadar, vom avea

$$A(0, a), B(b, 0), C(c, 0).$$

Vom presupune, de asemenea $b < 0 < c$. Ecuația dreptei ce trece prin A și B va fi

$$y = -\frac{a}{b}(x - b),$$

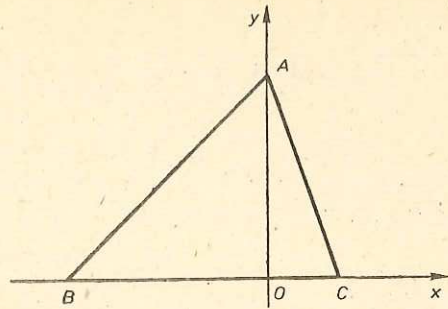


Fig. III.32

iar ecuația dreptei ce trece prin A și C va fi

$$y = -\frac{a}{c}(x - c).$$

Notăm cu $g: [b, c] \rightarrow \mathbf{R}$ funcția definită prin

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{a}{b}(x - b), & \text{dacă } x \in [b, 0], \\ -\frac{a}{c}(x - c) & \text{dacă } x \in [0, c] \end{cases}$$

și cu $f: [b, c] \rightarrow \mathbf{R}$ funcția identic nulă. Mulțimea $\Gamma_{f,g}$ va fi interiorul triunghiului ABC și deci aria sa va fi egală cu

$$\frac{1}{2} a(c - b).$$

Abscisa centrului de greutate al mulțimii $\Gamma_{f,g}$ va fi

$$x_0 = \frac{\int_b^c xg(x)dx}{\text{aria}(\Gamma_{f,g})}.$$

Avem

$$\begin{aligned} \int_b^c xg(x)dx &= \int_b^0 xg(x)dx + \int_0^c xg(x)dx = -\frac{a}{b} \int_b^0 x(x - b)dx - \frac{a}{c} \int_0^c x(x - c)dx = \\ &= -\frac{a}{b} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} \right) \Big|_b^0 - \frac{a}{c} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{cx^2}{2} \right) \Big|_0^c = -\frac{a}{b} \left(\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3} \right) - \\ &\quad - \frac{a}{c} \left(\frac{c^3}{3} - \frac{c^3}{2} \right) = -\frac{ab^2}{6} + \frac{ac^2}{6} = \frac{a}{6} (c^2 - b^2) \end{aligned}$$

și deci

$$x_0 = \frac{\frac{a}{6} (c^2 - b^2)}{\frac{1}{2} a(c - b)} = \frac{1}{3} (b + c).$$

Ordonata centrului de greutate a mulțimii $\Gamma_{f,g}$ va fi

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2} \int_b^c g^2(x)dx}{\text{aria}(\Gamma_{f,g})}.$$

Avem

$$\begin{aligned} \int_b^c g^2(x) dx &= \int_b^0 g^2(x) dx + \int_0^c g^2(x) dx = \frac{a^2}{b^2} \int_b^0 (x-b)^2 dx + \frac{a^2}{c^2} \int_0^c (x-c)^2 dx = \\ &= \frac{a^2}{b^2} \frac{(x-b)^3}{3} \Big|_b^0 + \frac{a^2}{c^2} \frac{(x-c)^3}{3} \Big|_0^c = -\frac{1}{3} \frac{a^2}{b^2} b^3 + \frac{1}{3} \frac{a^2}{c^2} c^3 = \frac{1}{3} a^2 (c-b) \end{aligned}$$

și deci

$$y_0 = \frac{\frac{a^2}{6} (c-b)}{\frac{1}{2} a(c-b)} = \frac{a}{3}.$$

Așadar, centrul de greutate va fi punctul de coordonate

$$\left(\frac{1}{3} (b+c), \frac{a}{3} \right),$$

ceea ce reprezintă punctul de intersecție al medianelor triunghiului ABC .

6.3. Exerciții. Să se găsească centrele de greutate ale următoarelor plăci plane omogene:

1. $A = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$.
2. $A = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$.
3. $A = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2\sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$.
4. $A = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$.
5. $A = \{(x, y) \mid -x \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 4\}$.

§ 7. LUCRU MECANIC

Considerăm o particulă P care se mișcă pe un interval $J \subset \mathbf{R}$ sub acțiunea unei forțe \vec{F} , de direcție Ox . Forța \vec{F} avind în fiecare punct $t \in J$ o valoare $F(t)$ care acționează în direcția axei Ox , vom identifica $F(t)$ cu un număr real; acest număr va fi considerat pozitiv dacă forța $F(t)$ acționează *de la stînga la dreapta* și negativ dacă acționează *de la dreapta la stînga*. În această situație, forța \vec{F} poate fi considerată ca o funcție $F: J \rightarrow \mathbf{R}$.

În cazul cînd forța F este constantă

$$F(t) = F_0, \quad (\forall) t \in J,$$

lucrul mecanic efectuat de forța F pentru a deplasa particula P din punctul $a \in J$ în punctul $b \in J$, este, prin definiție, numărul real

$$L_{a,b}(F) = F_0 \cdot (b - a).$$

Dacă forța F nu este constantă, atunci un raționament similar cu cel folosit în definiția integralei va conduce la definiția lucrului mecanic în cazul general.

Fie $a, b \in J$, $a < b$ și $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Particula P , mișcându-se de la a la b trece prin punctele x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , deci, conform a ceea ce se admite în fizică,

$$L_{a,b}(F) = L_{x_0,x_1}(F) + L_{x_1,x_2}(F) + \dots + L_{x_{n-1},x_n}(F).$$

Dacă $\|\Delta\|$ (norma diviziunii Δ) este suficient de mică, atunci forța \vec{F} se aproximează, pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, prin forța (constantă pe $[x_{i-1}, x_i]$)

$$F_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} F(\xi_i), \quad (\forall) x \in [x_{i-1}, x_i],$$

unde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ este un punct fixat. Deci, lucrul mecanic efectuat de forța \vec{F} pentru a deplasa particula P din punctul x_{i-1} în punctul x_i , se aproximează prin

$$F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Așadar, lucrul mecanic efectuat de forța F pentru a deplasa particula P de la a la b se aproximează cu

$$\sum_{i=1}^n F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Aceste considerații sugerează următoarea

7.1. Definiție. Fie J un interval $\subset \mathbb{R}$, $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ o forță care este considerată ca o funcție continuă și P o particulă care se mișcă în intervalul J sub acțiunea forței F . Atunci lucrul mecanic efectuat de forța F pentru deplasarea particulei P din punctul $a \in J$ în punctul $b \in J$ este, prin definiție, numărul real

$$L_{a,b}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b F(x) dx.$$

7.2. Exemple. α) Fie P_0, P două particule de mase m_0 , respectiv m , situate pe axa Ox în punctele x_0 , respectiv x .

Considerăm particula P_0 fixă și situată la stînga față de particula P (fig. III.33). Atunci, conform legii atracției universale, forța care acționează asupra lui P (de la dreapta spre stînga) este

$$F(x) = -k \frac{mm_0}{(x - x_0)^2},$$

unde k este o constantă. În acest caz, lucrul mecanic efectuat de forța \vec{F} pentru deplasarea particulei P dintr-un punct $x_1 (> x_0)$ în alt punct $x_2 (> x_1)$ este

$$\begin{aligned} L_{x_1, x_2}(F) &= -kmm_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x - x_0)^2} = kmm_0 \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{x - x_0} \right)' dx = \\ &= kmm_0 \frac{1}{x - x_0} \Big|_{x_1}^{x_2} = kmm_0 \left[\frac{1}{x_2 - x_0} - \frac{1}{x_1 - x_0} \right] = \frac{kmm_0(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)}. \end{aligned}$$



Fig. III.33

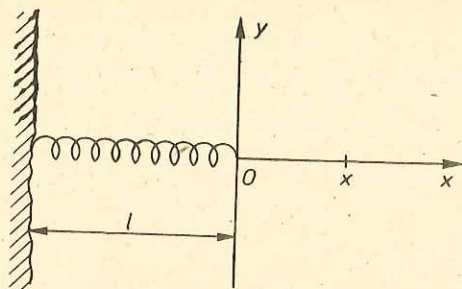


Fig. III.34

β) Se știe (din considerații experimentale) că forța necesară pentru a întinde un resort de lungime dată l , pînă la lungimea $l + x$ (fig. III.34) este proporțională cu lungimea x , adică

$$F(x) = kx$$

(constanta $k > 0$ depinde de resort).

Deci, lucrul mecanic necesar pentru a întinde resortul pînă la lungimea $l + x_0$ ($x_0 > 0$) este

$$L_{x_0} = \int_0^{x_0} kx dx = k \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_0} = \frac{k}{2} x_0^2.$$

Constanta k poate fi determinată din relația $F(x) = kx$, dacă se cunosc unele date suplimentare despre resortul considerat. Astfel, dacă se știe că pentru a întinde resortul cu 1 cm este nevoie de o forță de 5N, atunci

$$k \cdot \frac{1}{100} = 5,$$

deci

$$k = 500$$

Așadar, în cazul considerat

$$L_{x_0} = \frac{500}{2} x_0^2 = 250 x_0^2 \text{ în Jouli.}$$

7.3. Exerciții

1. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru întinderea unui resort elastic cu 2 m, știind că pentru a-l întinde cu 1 m este necesară o forță de 100 N.
2. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru întinderea unui resort elastic cu 5 cm, știind că pentru a-l întinde cu 1 m este necesară o forță de 10 N.
3. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru a ridica un corp cu masa de 5 kg la înălțimea de 100 m.
4. O picătură de apă avînd masa inițială M cade sub acțiunea greutății sale și se evaporă uniform, pierzînd prin aceasta în fiecare secundă o masă m . Să se găsească lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a picăturii, din momentul începerii căderii sale pînă în momentul evaporării totale. Se va neglija rezistența aerului.

ANEXĂ

În această anexă sînt date unele definiții și rezultate care sînt folosite în acest manual. Toate acestea și-ar găsi mai bine locul în manualul de Elemente de analiză matematică de clasa a XI-a, cu atît mai mult cu cît unele noțiuni au fost deja utilizate în clasa a XI-a.

A₁. Definiție. Fie $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Un număr real α se numește *minorant* al mulțimii E dacă

$$(\forall) x \in E \Rightarrow \alpha \leq x.$$

Un număr real β se numește *majorant* al mulțimii E dacă

$$(\forall) x \in E \Rightarrow x \leq \beta.$$

O mulțime $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ se zice *minorată* (respectiv *majorată*) dacă există minoranți (respectiv majoranți) ai lui E . Dacă E este minorată și majorată, atunci E se numește *mărginită*.

A₂. Observație. Un minorant (respectiv majorant) al unei mulțimi E nu aparține neapărat mulțimii E .

A₃. Exemple: (1). Dacă $E = [0, 1)$, atunci:

- orice număr real $\alpha \leq 0$ este un minorant al mulțimii E , în particular 0 este minorant al mulțimii E ;
- orice număr real $\beta \geq 1$ este un majorant al mulțimii E ;
- nici un majorant al mulțimii lui E nu aparține lui E .

(2) Mulțimea $(-\infty, 0]$ nu are minoranți.

(3) Mulțimea \mathbb{N} a numerelor naturale nu are majoranți.

A₄. Definiție. Fie $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Un număr real α se numește *cel mai mic element* al lui E dacă

1) α este minorant al lui E ,

2) $\alpha \in E$.

Un număr real β se numește *cel mai mare element* al lui E dacă

i) β este majorant al lui E

ii) $\beta \in E$.

A₅. Observație. (a) Dacă α este cel mai mic element al lui E , atunci α este unicul element cu această proprietate.

Într-adevăr, dacă α' este un alt număr cu proprietățile:

1') α' este minorant al lui E ,

2') $\alpha' \in E$,

atunci din 1) și 2') rezultă

$$\alpha \leq \alpha',$$

iar din 1') și 2) rezultă

$$\alpha' \leq \alpha,$$

deci

$$\alpha' = \alpha.$$

(b) În mod analog se arată unicitatea celui mai mare element (dacă există) al unei mulțimi.

(c) În exemplul (1) din (A_3) , am văzut că:

– mulțimea minoranților lui $[0, 1]$ este intervalul $(-\infty, 0]$,

– mulțimea majoranților lui $[0, 1]$ este intervalul $[1, \infty)$,

deci

$0 =$ cel mai mare element al mulțimii $(-\infty, 0]$

și

$1 =$ cel mai mic element al mulțimii $[1, \infty)$,

cu alte cuvinte

$0 =$ cel mai mare minorant al lui $[0, 1]$

și

$1 =$ cel mai mic majorant al lui $[0, 1]$.

Aceste observații sugerează următoarea

A_6 . *Definiție.* Fie $E \subset \mathbb{R}$, mulțime nevidă minorată. Un număr real m se numește *marginea inferioară* a lui E dacă m este cel mai mare minorant al lui E , adică:

1) m este minorant al lui E

și

2) m este cel mai mare element al mulțimii minoranților lui E .

Fie $E \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă majorată. Un număr real M se numește *marginea superioară* a lui E dacă

M este cel mai mic majorant al lui E , adică

i) M este un majorant al lui E ,

ii) M este cel mai mic element al mulțimii majoranților lui E .

Marginea inferioară (respectiv superioară) a unei mulțimi E se notează $\inf E$ (respectiv $\sup E$).

A_7 . *Observație.* Marginea inferioară (respectiv superioară), a unei mulțimi, atunci când există, este unică. Aceasta rezultă din definiția (A_6) și observația (A_5) .

Admitem, fără demonstrație, următorul rezultat:

A_8 . *Orice parte nevidă minorată (respectiv majorată) a lui \mathbb{R} are margine inferioară (respectiv superioară).*

A_9 . *Exemple.* (1) Marginea inferioară (respectiv superioară) a mulțimii $[0, 1]$ este numărul real 0 (respectiv 1).

(2) Marginea inferioară a mulțimii

$$E = \left\{ 1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2^2}, \dots, n + \frac{1}{2^n}, \dots \right\}$$

este $\frac{3}{2}$.

(3) Marginea inferioară (respectiv superioară) a mulțimii

$$E = \{x^2 e^{x^2} \mid 0 \leq x \leq a\}$$

este 0 (respectiv $a^2 e^{a^2}$).

A₁₀. *Definiție.* O mulțime A din plan se numește mărginită dacă există un dreptunghi care să o conțină, adică dacă există două puncte

$$(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2,$$

astfel încît

$$(\forall) (x, y) \in A \Rightarrow \begin{cases} a_1 \leq x \leq b_1 \\ \text{și} \\ a_2 \leq y \leq b_2 \end{cases}$$

În mod analog se definesc mulțimile mărginite în spațiu.

A₁₁. *Propoziție.* Fie $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ o mulțime minorată (respectiv majorată) și fie

$$m = \inf A \text{ (respectiv } M = \sup A).$$

Atunci există un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ (respectiv $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$) astfel încît

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ (respectiv } M = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n).$$

Demonstrație

Dacă $M = \sup A$, atunci

$$(\forall) n \geq 1, M - \frac{1}{n} < M = \text{cel mai mic majorant al lui } A,$$

deci

$$M - \frac{1}{n} \text{ nu este majorant al lui } A,$$

ceea ce înseamnă că există $b_n \in A$ astfel încît

$$M - \frac{1}{n} < b_n \leq M,$$

de unde rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ există} = M.$$

În mod analog se arată existența unui șir $(a_n) \subset A$ care converge la m .

În propoziția care urmează sînt demonstrate două proprietăți ale funcțiilor continue.

A₁₂. *Propoziție.* Fie I un interval $\subset \mathbb{R}$ și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă într-un punct $a \in I$. Atunci

(α) pentru orice $\epsilon > 0$ există $\delta_\epsilon > 0$ astfel încît

$$(\forall) x \in I \text{ cu } |x - a| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon;$$

(β) dacă $f(a) > 0$, există un interval deschis $J \ni a$, astfel încît

$$(\forall) x \in J \cap I \Rightarrow f(x) > 0.$$

Demonstrație (α). Presupunem, prin absurd, că (α) nu are loc. Aceasta înseamnă că există $\epsilon_0 > 0$ astfel încît pentru orice $\delta > 0$ există $x_\delta \in I$ cu proprietățile:

$$|x_\delta - a| < \delta$$

și

$$|f(x_\delta) - f(a)| \geq \epsilon_0.$$

În particular, pentru $\delta = \frac{1}{n}$ există $x_n \in I$ cu proprietățile:

$$(1) \quad |x_n - a| < \frac{1}{n}$$

și

$$(2) \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0.$$

Din (1) rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

iar din (2) se vede că șirul $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ nu converge la $f(a)$.

Contradicție cu continuitatea lui f în a .

(β). Presupunem că $f(a) > 0$, atunci există ε_1 astfel încît $0 < \varepsilon_1 < f(a)$, deci

$$(3) \quad f(a) - \varepsilon_1 > 0.$$

Funcția f fiind continuă în a , are proprietatea (α), deci pentru $\varepsilon_1 > 0$ de mai sus există $\delta_1 > 0$ astfel încît

$$(\forall) x \in I \text{ cu } |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon_1.$$

Această proprietate mai poate fi scrisă și astfel

$$(\forall) x \in I \cap (a - \delta_1, a + \delta_1) \Rightarrow f(a) - \varepsilon_1 < f(x) < f(a) + \varepsilon_1.$$

Punînd $J = (a - \delta_1, a + \delta_1)$ și ținînd seamă de (3), avem

$$(\forall) x \in I \cap J \Rightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon_1 > 0.$$

A_{13} . *Observații.* (i) Orice funcție care are proprietatea (α) este continuă în a . Deci funcție f este continuă în punctul a dacă și numai dacă are proprietatea (α) din propoziția A_{12} .

(ii) Proprietatea (β) din propoziția A_{12} s-a folosit la demonstrarea consecinței 4.7 din capitolul II, care afirmă că dacă f este o funcție continuă, pozitivă și neidentică nulă, atunci

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

A_{14} . *Definiție.* Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Pentru orice șir crescător de numere naturale

$$n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$$

șirul de numere reale

$$x_{n_0}, x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \dots,$$

notat prin $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, se numește *subșir* al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

A_{15} . *Observație.* Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir convergent de numere reale, atunci orice subșir al său $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ este convergent și

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

CAPITOLUL I

1. 12. I

1. $\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + e$; 2. $\frac{x^2}{2} + \ln x + e$; 3. $\frac{x^2}{2} + \ln(-x) + e$; 4. $-a \cos x + b \sin x + e$; 5. $\frac{1}{2} \arcsin 2x + e$; 6. $\arcsin \frac{x}{2} + e$; 7. $-2 \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + e$; 8. $-2 \operatorname{ctg} 2x + e$; 9. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + e$; 10. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + e$; 11. $\frac{2^x}{\ln 2} + e^x + e$; 12. $\frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} + e$; 13. $\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + e$; 14. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + e$; 15. $\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{3}{8} x^2 \sqrt[3]{x^2} + e$.

1. 12. II

1. Dacă f ar avea primitive, atunci și funcția

$$f(x) + x = [x]$$

ar avea primitive. Contradicție cu exemplul 1.10 (b).

2. Se observă că $f(\mathbb{R}) = \{-1, 0, 1\}$ adică $f(\mathbb{R})$ nu este interval. Deci (observația 1.4(d)) f nu admite primitive.

3. O primitivă a lui $f|(-\infty, 0)$ (respectiv $f|(0, \infty)$) este funcția

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \left(\text{resp. } f_2(x) = x \sin \frac{1}{x} + c_2 \right).$$

Deci o primitivă a lui f , dacă ar exista, ar fi de forma

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Cum funcția

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

nu are limită în zero, rezultă că F nu este derivabilă în zero. Deci F nu poate fi o primitivă pe \mathbb{R} .

4. Considerînd funcția $H(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, ($\forall x \neq 0$), se observă că $H|_{(-\infty, 0)}$ (resp. $H|_{(0, \infty)}$) este o primitivă a lui $f|_{(-\infty, 0)}$ (resp. $f|_{(0, \infty)}$). Dacă ar exista o primitivă $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ a lui f , atunci

$$F|_{(-\infty, 0)} = H|_{(-\infty, 0)} + c_1$$

și

$$F|_{(0, \infty)} = H|_{(0, \infty)} + c_2$$

F este continuă (fiind derivabilă) pe \mathbf{R} , deci

$$F(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} F(x) = c_1 \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = c_2 \quad \left. \vphantom{\lim} \right\} = c$$

Atunci:

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x) + c - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x)}{x} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \neq \frac{1}{2} = f(0)$$

deci F nu poate fi primitivă a lui f .

5. Imaginea intervalului $(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ prin funcția f nu este un interval, deoarece

$$f(\sqrt{3}) = 3^{\frac{3}{2}} < 8 < 5^{\frac{3}{2}} = f(\sqrt{5})$$

iar

$$8 \neq f(x) \quad (\forall x \in (\sqrt{3}, \sqrt{5}))$$

Deci (observația 1.4(d)) f nu admite primitive.

6. Analog cu 5), imaginea intervalului $(\sqrt{15}, \sqrt{17})$ prin funcția f nu este un interval, deci f nu admite primitive.

7. Notînd cu G o primitivă a funcției continue

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

și cu

$$H(x) = \begin{cases} -x^2 \sin \frac{1}{x} + 2G(x), & \text{dacă } x \neq 0, \\ 2G(0) & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

se observă că $H|_{(-\infty, 0)}$ (resp. $H|_{(0, \infty)}$) este o primitivă a lui $f|_{(-\infty, 0)}$ (resp. $f|_{(0, \infty)}$).

Dacă F ar fi o primitivă a lui f , atunci

$$F|_{(-\infty, 0)} = H|_{(-\infty, 0)} + c_1 \text{ și } F|_{(0, \infty)} = H|_{(0, \infty)} + c_2$$

F fiind derivabilă, este continuă, deci

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} F(x) = c_1 + 2G(0) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} F(x) = c_2 + 2G_0 \end{aligned} \right\} = c + 2G_0$$

prin urmare F ar fi de forma

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 \sin \frac{1}{x} + 2G(x) + c, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 2G(0) + c, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

și

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 \sin \frac{1}{x} + 2G(x) + c - 2G(0) - c}{x - 0} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = 2G'(0) = 2g(0) = 0 \end{aligned}$$

Însă $f(0) = \frac{1}{2}$, deci $F'(0) \neq f(0)$, adică F nu este primitivă a lui f .

8. Se raționează ca în exercițiul precedent luând

$$g(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & , \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & , \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

și

$$H(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} - 2G(x), & , \text{dacă } x \neq 0 \\ -2G(0) & , \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

9. Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, rezultă că pentru orice $\theta < \varepsilon < 1$ există o vecinătate V_ε a lui zero astfel încît

$$\varepsilon < f(x) < 1 \quad (\forall) x \in V_\varepsilon \cap (0, \infty)$$

V_ε fiind vecinătate a lui 0, există $a \in \mathbf{R}$ astfel încît $(0, a) \subset V_\varepsilon \cap (0, \infty)$. Atunci

$$f(0) = 0 < \varepsilon < f(a) \quad \text{și} \quad f(x) > \varepsilon \quad (\forall) x \in (0, a).$$

Așadar, imaginea intervalului $(0, a)$ prin f nu este un interval. Deci f nu admite primitive.

10. Se rezolvă un mod analog cu 9), utilizînd faptul că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

1. 12. III

1. f este continuă; 2. f este continuă; 3. Fie G o primitivă a funcției continue

$$g(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad \text{Atunci } F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} - 2G(x), & x \neq 0, \\ -2G(0), & x = 0 \end{cases}$$

este o primitivă continuă a funcției date; 4. Analog cu exercițiul 3; 5, 6, 7, f este continuă.

1. 12. IV

1. Dacă F (resp. G) este o primitivă a lui $f|_{[a, c]}$ (resp. $f|_{[c, b]}$) astfel încât $F(c) = G(c)$, atunci funcția

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{dacă } x \in [a, c] \\ G(x), & \text{dacă } x \in [c, b] \end{cases}$$

este o primitivă a lui f pe $[a, b]$.

2. Funcția $g = f_1 - f_2$ are proprietatea Darboux și $g(x) = 0$ ($\forall x \in [a, b] \setminus A$). Deci $g(x) = 0$ ($\forall x \in [a, b]$), adică $f_1 = f_2$.
3. Notînd cu $N_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = \pm 1\}$, rezultă $A_+ \cup A_- = \mathbb{R}$ și $A_+ \cap A_- = \emptyset$. Dacă $A_+ \neq \emptyset$ și $A_- \neq \emptyset$, atunci f nu ar avea proprietatea lui Darboux, deci f nu ar admite primitive. Așadar,

$$\text{sau } A_+ = \emptyset \text{ sau } A_- = \emptyset,$$

adică

$$\text{sau } f = -1 \text{ sau } f = +1.$$

4. Dacă $f(0) = 0$, atunci în baza exercițiului 1.12. III(3) rezultă că f admite primitive. Răciproc, dacă $f(0) \neq 0$, atunci, analog cu exercițiul 1.12. II(8), se arată că în acest caz f nu admite primitive.

5. Se observă că f se poate scrie sub forma $f = g + h$, unde

$$g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

și

$$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ 1, & \text{dacă } x \in (0, 1] \end{cases}$$

Dacă f ar admite primitive, cum g admite primitive (exercițiul 1.12. III(3)), ar rezulta că funcția h (care nu are proprietatea lui Darboux) ar admite primitive. Contradicție.

6. Dacă ar exista o primitivă F a lui f , atunci aceasta ar fi de forma

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{1}{4} x^2 \sin \frac{2}{x} + G(x), & \text{dacă } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ G(0), & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

unde G este o primitivă a funcției continue

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{2}{x}, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Însă

$$F'(0) = \frac{1}{2} \neq f(0),$$

deci f nu admite primitive.

Se observă că funcția considerată, f , este pătratul funcției din exercițiul 1.12.III(4).

7. Fie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

și G o primitivă a sa (există conform exercițiului 1.12.III(3)). Se observă că funcția $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$h(x) = (x - a)(x - b)$$

se anulează, iar a și b , este derivabilă pe $[a, b]$ și derivata sa este diferită în punctele a și b . Funcția $G \cdot h$ este derivabilă, iar derivata sa

$$(G \cdot h)'(x) = g(h(x))h'(x) = \begin{cases} (2x - a - b) \sin \frac{1}{(x-a)(x-b)} & \text{dacă } x \in (a, b) \\ 0 & \text{dacă } x = a \quad \text{sau } x = b \end{cases}$$

satisface condițiile din enunț.

8. Se consideră funcția G din exemplul precedent și funcția $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$h(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

Atunci funcția $(G \cdot h)'$ satisface condițiile din enunț.

9. Funcția

$$g_{\xi}(x) = F(x) - f(\xi)x$$

este derivabilă, iar derivata sa

$$g'_{\xi} = F' - f(\xi) = f - f(\xi)$$

este strict negativă (respectiv strict pozitivă) la stînga (respectiv la dreapta lui ξ). Prin urmare, funcția g_{ξ} este strict descrescătoare la stînga lui ξ și strict crescătoare la dreapta, deci g_{ξ} nu este injectivă pe $[a, b]$, adică există $x_1 \in [a, \xi]$ și $x_2 \in (\xi, b]$ astfel încît

$$g_{\xi}(x_1) = g_{\xi}(x_2)$$

de unde rezultă că

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = f(\xi).$$

2. 3.

1. $x(\ln x - 1) + e$; 2. $\frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) + e$; 3. $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + e$;

4. $\frac{x^3}{9}(3 \ln x - 1) + e$; 5. $\frac{\ln^2 x}{2} + e$; 6. $\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}[(\alpha+1) \ln x - 1] + e$, $\alpha \neq -1$;

$\frac{n x}{2} + e$, $\alpha = -1$; 7. $x[\ln^n x - n \ln^{n-1} x + \dots + (-1)^{n-1} n(n-1) \dots 2 \ln x + (-1)^n n!] + e$;

8. $\frac{x^4}{32} (8 \ln^2 x - 4 \ln x + 1) + e$; 9. $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left[\ln^n x - \frac{n}{\alpha+1} \ln^{n-1} x + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{n-1} \frac{n(n-1) \dots 2}{(\alpha+1)^{n-1}} \ln x + (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^n} \right] + e, \alpha \neq -1; \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} + e, \alpha = -1;$
10. $e^x(x-1) + e$; 11. $e^x(x^2 - 4x + 3) + e$; 12. $e^x(x^3 - 3x^2 + 5x - 4) + e$;
13. $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \left[x^n - \frac{n}{\alpha} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2} x^{n-2} \dots + (-1)^{n-1} \frac{n(n-1) \dots 2}{\alpha^{n-1}} x + (-1)^n \frac{n!}{\alpha^n} \right] + e$;
14. $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + e$; 15. $(-x^2 + x + 1) \cos x + (2x - 1) \sin x + e$;
16. $I_n = -\frac{1}{\alpha} x^n \cos \alpha x + \frac{n}{\alpha^2} x^{n-1} \sin x - \frac{n(n-2)}{\alpha^2} I_{n-2}$; 17. $\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + e$;
18. $\frac{e^x}{5} (\sin 2x - 2 \cos 2x) + e$; 19. $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x) + e$; 20. $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot (\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x) + e$; 21. $\frac{x e^x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2} \cos x + e$;
22. $-e^x \cos x + e$; 23. $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + e$; 24. $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + 2 \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + e$; 25. $\frac{15}{8} x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{5}{32} \sin 4x + e$; 26. $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 4} - 2 \ln(x + \sqrt{x^2 - 4}) + e$; 27. $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + e$;
28. $\frac{1}{4} x^3 \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{8} x \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + e$; 29. $\frac{1}{5} (1 + x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} (1 + x^2)^{\frac{3}{2}} + e$; 30. $\frac{1}{6} \sqrt{x^2 - 4} (x^5 - x^3 - 6x) - 4 \ln(x + \sqrt{x^2 - 4}) + e$;
31. $\frac{16}{3} (x^2 - 4)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5} (x^2 - 4)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{7} (x^2 - 4)^{\frac{7}{2}} + e$;
32. $\frac{x}{2} \sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + e$; 33. $\frac{x^3}{4} \sqrt{9 - x^2} - \frac{9}{8} x \sqrt{9 - x^2} + \frac{81}{8} \arcsin \frac{x}{3} + e$.

3.6. I

1. $2 \ln(x^2 + x + 3) + e$; 2. $\ln(2x^4 + 3x^2 + 5) + e$; 3. $-\arctg(\cos x) + e$;
4. $-\ln(\cos x) + e$; 5. $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right) + e$; 6. $\ln(\operatorname{tg} x) + C$; 7. $-e^{\cos(x^2 + 1)} + e$;
8. $\frac{e^{x^3}}{3} + e$; 9. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + e$; 10. $-\frac{\cos^3 x}{3} + e$; 11. $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + e$; 12. $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + e$; 13. $\ln \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + e$; 14. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + e$; 15. $-\ln(\cos x) + \frac{\cos^2 x}{2} + e$; 16. $\ln(1 + \operatorname{tg} x) + e$; 17. $\frac{2}{3} \arcsin x \sqrt{x} + e$; 18. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + e$;
19. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + e$; 20. $\frac{1}{2} \arcsin x^2 + e$; 21. $\arcsin e^x + C$; 22. $\ln(1 + \ln x) + e$;
23. $-\frac{\cos^2(\sin x)}{2} + e$; 24. $-\arcsin(\cos^2 x) + e$; 25. $\operatorname{arctg}(\ln x) + e$; 26. $\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1} + e$.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + e; \quad 27. \frac{(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}}{4} - \frac{1}{8} \ln\left(\frac{2x-3}{2} + \right. \\
& \left. + \sqrt{x^2-3x+2}\right) + e; \quad 28. \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}{4} + \frac{3}{8} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \right. \\
& \left. + \sqrt{x^2+x+1}\right) + e; \quad 29. \frac{2x-3}{4} \sqrt{-x^2+3x-2} + \frac{1}{4} \arcsin \sqrt{x-1} + e; \\
30. & \frac{x}{2} \sqrt{9-4x^2} + \frac{9}{4} \arcsin \frac{2x}{3} + e; \quad 31. -\frac{5}{12} (x+1) (x^2+2x+2)^{\frac{3}{2}} + \\
& + \frac{3}{8} (x+1) \sqrt{x^2+2x+2} + \frac{3}{8} \ln(x+1 + \sqrt{x^2+2x+2}) + e; \\
32. & 2(x-1)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{x-1}{7} + \frac{1}{5}\right) + e; \quad 33. \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + e; \\
34. & -\frac{\arcsin x}{x} + \ln \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} + e; \\
35. & \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^4+x^2+1} + x^2-1}{\sqrt{x^4+x^2+1} + x^2+1} + e.
\end{aligned}$$

4. 6.

$$\begin{aligned}
1. & \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin e^{-x} + e; \\
2. & \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x} \sin 2\sqrt{x}}{2} + \frac{\cos 2\sqrt{x}}{4} + e; \\
3. & \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+\sin^2 x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+\sin^2 x}} + e; \quad 4. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{x^4+2x^2} + e; \\
5. & \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{x+1}}{2} - \frac{\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{2} + e; \\
6. & -\frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2(x^2+1)} - x}{\sqrt{2(x^2+1)} + x} + e; \quad 7. \operatorname{arctg} x \left(\frac{x^3}{3} - x + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right) - \frac{x^2}{6} + \\
& + \frac{4}{3} \ln \sqrt{1+x^2} + e; \quad 8. \ln \frac{\sqrt{x^2+x+1} + x-1}{\sqrt{x^2+x+1} + x+1} + e.
\end{aligned}$$

5. 9.

$$\begin{aligned}
1. & \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + e; \quad 2. x + 2 \ln(1-x) + e; \quad 3. -2 \ln(1-x) + \frac{3}{x-1} - \\
& - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \ln(x^2-x+1) + \frac{28}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x-2}{x^2-x+1} + e; \\
4. & 5 \ln \frac{x+2}{-x-1} - \frac{5}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{3} \frac{1}{(x+1)^3} + e; \quad 5. \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + e; \\
6. & \frac{1}{3} \cdot \frac{x-2}{x^2-x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + e; \quad 7. \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 6x - 3 \ln x + \frac{1}{x} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 13 \ln(1-x) - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + e; \quad 8. \frac{1}{2} \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x+2) + e. \\
9. & \frac{1}{6} \ln x - \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{6} \ln(x+3) + e; \\
10. & x + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + (\sqrt{2}-1) \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1) + e; \\
11. & \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + e; \\
12. & \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} [\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)] + e; \\
13. & x - 2 \ln(x^2 + 4x + 5) + e; \quad 14. -\frac{1}{4} \ln(x+1) + \frac{1}{8} \ln(x^2+3) + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + e; \quad 15. \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} + e;
\end{aligned}$$

5.10.

$$\begin{aligned}
1. & \ln(x+1 + \sqrt{x^2+2x+2}) + \frac{2}{x+2 + \sqrt{x^2+2x+2}} + e; \\
2. & -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x-x^2}-x-1}{x} + e; \quad 3. 2 \ln(\sqrt{x^2+2x+4}-x) - \\
& - \frac{3}{2} \ln(\sqrt{x^2+2x+4}-x-1) - \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}-x-1} + e; \\
4. & 2 \ln(x + \sqrt{x^2-x+1}) - \frac{3}{2} \ln(2x-1 + 2\sqrt{x^2-x+1}) - \\
& - \frac{3}{2} \frac{1}{2(\sqrt{x^2-x+1}+x)-1} + e; \quad 5. \frac{2}{9} \left(5 \sqrt{\frac{x-2}{5-x}} - 2 \sqrt{\frac{5-x}{x-2}} \right) + e; \\
6. & \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+x-1}{\sqrt{1-2x-x^2}-1} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x} + e; \\
7. & \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{2 + \sqrt{2(1-x^2)}}{2 - \sqrt{2(1-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(1-x^2)}}{-2x} + e; \\
8. & x - 2 \ln(1+x + \sqrt{1+x+x^2}) + \frac{3}{2} \frac{1}{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}} + \\
& + \frac{3}{2} \ln(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}) + e; \quad 9. -\frac{3x+20}{12} (-x^2+4x+5)^{\frac{3}{2}} + \\
& + \frac{25}{8} (x-2) \sqrt{-x^2+4x+5} + \frac{225}{8} \operatorname{arc} \sin \frac{x-2}{3} + e; \quad 10. -\sqrt{-x^2+4x+5} - \\
& - 6 \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{5-x}{6}} + e.
\end{aligned}$$

5.10.II.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + c$; 2. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + c$; 3. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2} + c$;
 4. $\frac{1}{3} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \ln \left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) - \frac{5}{3} \left(3 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c$; 5. $x + \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + c$;
 6. $-\frac{1}{4} \cos x (\cos x + \sin x) + \frac{1}{4} \ln (\sin x + \cos x) + c$; 7. $\ln (\operatorname{tg}^2 x + 2) +$
 $+\frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + c$. 8. $-\frac{1}{\operatorname{tg} x} + 2 \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c$;
 9. $\frac{5}{2\sqrt{2}} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$;
 10. $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(1 + a^2) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2a}{1 - a^2} + c$.

CAPITOLUL II

1.4.

$$\| \Delta_1 \| = \frac{1}{3}; \quad \| \Delta_2 \| = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}; \quad \| \Delta_3 \| = e^{10}(e - 1); \quad \| \Delta_4 \| = \frac{1}{2}$$

1.11.

$$(1) \Delta' \cup \Delta'' = \left(1, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

$$(2) \Delta' \cup \Delta'' = (0, 1, 2, e, 3, 4, 5, 6, 7, e^2, 8, 9, 10)$$

b) 1) dacă $\Delta' \subset \Delta''$, atunci p divide q , 2) dacă p divide q , atunci $\Delta' \subset \Delta''$.

$$\text{Conform primului punct } \left\{ \begin{array}{l} p \text{ divide } pq \Rightarrow \Delta' \subset \Delta \\ q \text{ divide } pq \Rightarrow \Delta'' \subset \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta' \cup \Delta'' \subset \Delta.$$

2.23.I.

$$1. \sigma_{\Delta}(f, \xi) = \frac{7}{24}; \quad 2. \sigma_{\Delta}(f, \xi) = \frac{\pi}{12} \left(3 + \sin \frac{\pi}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$3. \sigma_{\Delta}(f, \xi) = \frac{9}{4}; \quad 4. \sigma_{\Delta}(f, \xi) = \frac{153}{8}; \quad 5. \sigma_{\Delta}(f, \xi) = \frac{1889}{2880}.$$

2.23.II

1. f fiind integrabilă, pentru orice șir de diviziuni cu $\|\Delta_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ și orice alegere a punctelor intermediare ξ_i^n , șirul sumelor Riemann converge. Alegem în particular punctele intermediare ξ_i^n astfel încît $f(\xi_i^n) = \alpha$. Atunci

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) = \sum_{i=1}^{h_n} \alpha(x_i^n - x_{i-1}^n) = \alpha \sum_{i=1}^{h_n} (x_i^n - x_{i-1}^n) = \alpha(b - a),$$

deci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) = \alpha(b - a) = \int_a^b f(x) dx.$$

2. Calculăm $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) = \frac{1}{2}$, oricare ar fi (Δ_n) înct $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ și oricare ar fi $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$. f nu posedă primitivă, deoarece f nu are proprietatea Darboux. $f([0, 1]) = \{0, 1\}$ nu este interval. 3. Dacă f integrabilă atunci pentru (\forall) șir de diviziuni $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel încît $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ și orice $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n)$ există =

$$= \int_a^b f(x) dx. \text{ Se aleg punctele } \xi_i^n \text{ astfel încît } f(\xi_i^n) = 2 \xi_i^n. \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) = 2 \sum_{i=0}^{h_n} (x_i^n - x_{i-1}^n) \xi_i^n.$$

Funcția $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$ este integrabilă.

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta_n}(g, \xi_i^n) &= 2 \sum_{i=1}^{h_n} (x_i - x_{i-1}) \xi_i^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(g, \xi_i^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) = \int_a^b g(x) dx = \\ &= b^2 - a^2 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = b^2 - a^2; \end{aligned}$$

4. Se aleg punctele intermediare ξ_i^n astfel încît $f(\xi_i^n) = \frac{1}{1 + \xi_i^n} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) =$

$$= \sum_{i=1}^{h_n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{1}{1 + \xi_i^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{h_n} (x_i - x_{i-1}) \left(\frac{1}{1 + \xi_i^n} \right) = \int_1^2 \frac{1}{1 + x} dx = \ln 2.$$

5. Dacă f ar fi integrabilă, atunci pentru orice alegere a șirului de diviziuni (Δ_n) cu $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ și orice alegere a punctelor ξ_i^n , șirul sumelor Riemann are limită =

$$= \int_a^b f(x) dx. \text{ Alegem în particular } \xi_i'^n \text{ astfel încît } f(\xi_i'^n) = \xi_i'^n \text{ și } \xi_i''^n, \text{ astfel încît } f(\xi_i''^n) = 2 \xi_i''^n. \text{ Avem}$$

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i'^n) = \sum_{i=1}^{h_n} (x_i - x_{i-1}) \xi_i'^n \text{ și } \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i''^n) = \sum_{i=1}^{h_n} (x_i - x_{i-1}) 2 \xi_i''^n,$$

$$\text{deci } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i'^n) = \int_1^2 x dx = \frac{3}{2} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i''^n) = \int_1^2 2x dx = 3$$

Așadar f nu este integrabilă;

6. Fie $f_i : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x) = f(x) (\forall x \in (x_{i-1}, x_i))$, $g_i : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i(x) = \alpha_i (\forall x \in [x_{i-1}, x_i])$, g_i sînt integrabile (ca funcții constante), deci f_i sînt integrabile (diferă de g_i în punctele x_{i-1} și x_i). Dar f_i este restricția lui f la $[x_{i-1}, x_i]$. Din propoziția 2.21 rezultă că f este integrabilă și

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^b f_n(x) dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - x_{i-1}).$$

7. $f_1(x) = -\sin x (\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, 0])$; $f_2(x) = \sin x (\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}])$. f_1, f_2 sînt integra-

bile; ele sînt restricții ale funcției f la intervalele $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, respectiv $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Conform propoziției 2.21. f este integrabilă și $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\pi}^0 -\sin x dx +$

$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2$. 8. Funcțiile $f_1(x) = x$ pentru $x \in [0, 1]$, $g(x) = x^2 + 1$ pentru $x \in [1, 2]$, sînt integrabile pe $[0, 1]$, respectiv pe $[1, 2]$. $f_2(x) = x^2 + 1$ pentru $x \in (1, 2]$ și $f_2(1) = 1$ este integrabilă pe $[1, 2]$ (deoarece diferă de g în punctul $x = 1$), prin urmare f este integrabilă și $\int_0^2 f(x)dx = \frac{23}{6}$; 9. Explicităm funcția $f(x) = [2^5 x] = [32x]$ astfel

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{32}\right) \\ 1, & x \in \left[\frac{1}{32}, \frac{2}{32}\right) \\ 2, & x \in \left[\frac{3}{32}, \frac{3}{32}\right) \\ \vdots \\ k-1, & x \in \left[\frac{k-1}{32}, \frac{k}{32}\right) \\ 31 & x \in \left[\frac{31}{32}, 1\right]. \end{cases}$$

Deci există o diviziune $\Delta = \left(0, \frac{1}{32}, \frac{2}{32}, \frac{3}{32}, \dots, \frac{k}{32}, \dots, \frac{32}{32}\right)$ a intervalului $[0, 1]$ astfel încît f este constantă pe fiecare interval deschis (x_{i-1}, x_i) , ($1 \leq i \leq 32$). Conform exercițiului 6, f este integrabilă și $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{32} (x_i - x_{i-1})f(\xi_i) = \sum_{i=1}^{32} (x_i - x_{i-1})\alpha_i =$
 $= \frac{1}{32} (1 + 2 + \dots + 32) = \frac{31}{2}$; 10. Se scrie explicit funcția

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ x-1, & x \in [1, 2] \\ x-2, & x \in [2, 3] \\ x-3, & x \in [3, 2\sqrt{3}]. \end{cases}$$

Conform propoziției 2.21, f este integrabilă și $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)dx = 12 - 6\sqrt{3}$.

3.13.I.

1. $s_1(f) = \frac{5}{27}$, $S_1(f) = \frac{14}{27}$, $s_2(f) = \frac{143}{576}$, $S_2(f) = \frac{7}{16}$; 3. $s_2(f) = \frac{439}{780}$, $S_2(f) = \frac{243}{390}$;
 4. $s_1(f) = \frac{7}{3}$, $S_1(f) = \frac{34}{3}$; $s_2(f) = 2$, $S_2(f) = 13$; 5. $s_1(f) = \frac{1}{2} (e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}} +$

$$+ 1 + e^{\frac{1}{2}}, S_1(f) = \frac{1}{2} (e^{-\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{2}} + e + 1), S_2(f) = 1 + e, s_2(f) = e^{-1} + 1.$$

3.13.II.

$$1. \sqrt[3]{3} - \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{2}; \quad 2. \frac{4\sqrt{2}}{3}; \quad 3. \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.$$

3.15.

$$1. 2; \quad 2. \frac{2(2\sqrt{2} - 1)}{3}; \quad 3. 2; \quad 4. 1; \quad 5. \frac{1}{2}.$$

4.18.I.

1. În baza teoremei de medie există $c \in [a, b]$ cu $f(c) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) dx$. Dacă ar exista și un $c' \neq c$ cu aceeași proprietate, atunci ar rezulta $f(c') = f(c)$. Aceasta nu poate avea loc, deoarece f , fiind strict crescătoare, este injectivă;

$$2. c = \sqrt[3]{\frac{13}{3}};$$

3. Dacă, prin absurd, f nu își schimbă semnul pe nici un interval $[x', x''] \subset [a, b]$, atunci $f \geq 0$ sau $-f \geq 0$ pe $[a, b]$. Aplicând propoziția 4.7 lui f sau $-f$, se obține $\int_a^b f(x) dx > 0$ sau $-\int_a^b f(x) dx > 0$. Contradicție;

4. Dacă ar exista $c \in [a, b]$ cu $f(c) \neq 0$, să admitem $f(c) > 0$; atunci $(A_{12}(\beta))$ ar exista $r > 0$ astfel încât $f(x) > 0, \forall x \in (c - r, c + r)$, prin urmare (propoziția 4.7) $\int_{c-r}^{c+r} f(x) dx > 0$. Contradicție.

4.18.III.

$$1. \frac{\pi}{2}; \quad 2. \frac{1}{4} \left(\arctg \frac{5}{2} + \arctg \frac{1}{2} \right); \quad 3. \frac{\pi \ln 2}{8}; \quad 4. \frac{\pi}{4}; \quad 5. \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}; \quad 6. \frac{4 - \pi}{2};$$

$$7. \frac{2}{15}; \quad 8. -\frac{\pi}{4}; \quad 9. \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} - 1 + \ln 2 \right); \quad 10. \frac{1}{13} [e^2 (2 \sin 3 - 3 \cos 3) + 3];$$

$$11. 2(e^2 + 3); \quad 12. \frac{3}{2} \ln 3; \quad 13. \frac{1}{4} \ln 2; \quad 14. 2(\sqrt{5} - \sqrt{2}) - \ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(2 + \sqrt{5});$$

$$15. 2\sqrt{2} - 2 + \frac{\pi}{4}.$$

1.9.

1. $\frac{32}{3}$; 2. $\frac{1}{12}$; 3. $\frac{10}{3}$; 4. $\frac{\pi r^2}{8}$; 5. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) -$
 $-\frac{1}{12\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1)^{\frac{3}{2}}$; 6. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$; 7. $\frac{9}{2}$; 8. $e + \frac{1}{e} - 2$; 9. 1;
 10. $\frac{a^2}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)$; 11. $4a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \right)$.

1.9.II

1. $A = \frac{1}{3}$; 2. $A = a^2 \ln 2$; 3. $A_1 = \frac{4}{3} (\sqrt{3} + 4\pi)$, $A_2 = \frac{4}{3} (8\pi - \sqrt{3})$;
 4. $A_1 = A_2 = \pi - 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln 3$, $A_3 = 2\pi - 2A_1$;
 5. $A = \frac{32\sqrt{6}}{3}$; 6. $A_1 = 2 \left(\pi + \frac{2}{3} \right)$, $A_2 = 6\pi - \frac{4}{3}$; 7. $A =$
 $= \frac{a^2}{2} \ln \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}$; 8. $A = \frac{9}{16}$; 9. $A = \frac{8}{3}$.

2.8.

1. $\frac{b^2}{\frac{4}{a^3}} \left(b^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{7}{3}} \right) \cdot \frac{3}{7}$; 2. $\frac{16\pi}{15}$; 3. $\frac{\pi^2}{2}$; 4. $\frac{\pi}{2} (1 - e^{-4})$; 5. $\pi \left(\frac{\pi^2}{72} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - 1 \right)$;
 6. $\frac{5e^3 - 2}{27} \pi$; 7. $\frac{a^3}{8} (e^2 + 4 - e^{-2})$; 8. $\frac{\pi}{4} (e^2 - 1)$; 9. $\frac{\pi a^3}{4}$; 10. $\frac{\pi a^2}{6}$; 11. $\frac{\pi a^3}{20}$;
 12. $\frac{2\pi}{5}$; 13. $\pi \left[2a - 2b + (a+b) \ln \frac{b}{a} \right]$; 14. $\pi \left[\frac{15}{2} - 8 \ln 2 \right]$.

3.9.

1. $1 + \ln \sqrt{\frac{3}{2}}$; 2. $-\frac{1}{2} + \ln 3$; 3. $\frac{e - e^{-1}}{2}$; 4. $\frac{1}{2} (3\sqrt{2} - \sqrt{5}) -$
 $-\frac{1}{8} \ln \frac{(3 - 2\sqrt{2})(\sqrt{5} + 2)}{(3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{5} - 2)}$;
 5. $\frac{1}{4} (e^2 + 1)$; 6. $\ln(\sqrt{2} + 1)$; 7. $\ln 5 - \frac{2}{3}$;
 8. $\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{1+e^2} - 1)^2}{e^2(\sqrt{2} - 1)^2}$.

4.10.

1. $(2\sqrt{2} - 1) \frac{\pi}{9}$; 2. $\frac{\pi}{4} (e^2 - e^{-2} + 4)$; 3. $\pi [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$;
 4. $\pi \left(e\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln \frac{e + \sqrt{1+e^2}}{1 + \sqrt{2}} \right)$; 5. $2\pi a \left(\frac{b\pi}{3} + a \right)$;
 6. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right]$; 7. $\frac{\pi}{8} \left(\frac{5\sqrt{17} - 3}{8} + \ln \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \right)$; 8. $3\pi a^2$.

5.6.

1. $D_4(f) = 60$, $T_4(f) = 46$, $D_8(f) = 52,5$, $T_8(f) = 45,5$,
 $ED_4(f) = 14,6667$, $ET_4(f) = 0,6667$, $ED_8(f) = 7,1667$, $ET_8(f) = 0,1667$;
 2. $D_4(f) = 6,25$, $T_4(f) = 6,25$, $D_6(f) = 7,4444$, $T_6(f) = 6,111$,
 $ED_4(f) = \frac{1}{8}$, $ET_4(f) = 0,25$, $ED_6(f) = 0,4444$, $ET_6(f) = 0,111$;
 3. $D_3(f) = 0,6973$, $T_3(f) = 0,7807$, $D_5(f) = 0,7377$, $T_5(f) = 0,7867$,
 $ED_3(f) = 0,088$, $ET_3(f) = 0,0046$, $ED_5(f) = 0,0486$, $ET_5(f) = 0,0014$;
 4. $D_3(f) = 0,6166$, $T_3(f) = 0,7054$, $D_5(f) = 0,6455$, $T_5(f) = 0,6956$;
 $ED_3(f) = 0,0765$, $ET_3(f) = 0,0065$, $ED_5(f) = 0,0475$, $ET_5(f) = 0,0025$.

6.3.

1. $x = 0$, $y = \frac{4}{3\pi}$; 2. $x = y = \frac{4}{3\pi}$; 3. $x = 0$, $y = \frac{8}{3\pi}$; 4. $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{8}$;
 5. $x = \frac{8}{3}$, $y = 0$.

7.3.

1. $L = 20 J$; 2. $L = 0,125 J$; 3. $L = 4900 J$; 4. $L = \frac{1}{6} g^2 \frac{M^3}{m^2}$.

CUPRINS

I. Primitive	3
§ 1. Primitive	3
§ 2. Integrarea prin părți	15
§ 3. Prima metodă de schimbare de variabilă	20
§ 4. A doua metodă de schimbare de variabilă	32
§ 5. Integrarea funcțiilor raționale	40
II. Funcții integrabile	51
§ 1. Diviziuni	51
§ 2. Funcții integrabile	55
§ 3. Integrabilitatea funcțiilor monotone și a funcțiilor continue	73
§ 4. Integrarea funcțiilor continue	81
III. Aplicații ale integralei definite și metode de calcul	94
§ 1. Interpretarea geometrică a integralei definite a unei funcții pozitive	94
§ 2. Volumul corpurilor de rotație	101
§ 3. Lungimea graficului unei funcții derivabile cu derivata continuă	106
§ 4. Aria suprafețelor de rotație	112
§ 5. Calculul aproximativ al integralelor definite	123
§ 6. Centre de greutate	131
§ 7. Lucru mecanic	138
ANEXĂ	141
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	145

Nr. colilor de tipar : 10
Bun de tipar : 4.XII.1989



Com. nr. 90 422/36 422
Combinatul Poligrafic
București
ROMÂNIA



Lei 11,10

ISBN 973-30-0643-2