1. ŞIRURI DE NUMERE

Fie E o mulțime de elemente, I o submulțime de indici, $I \subset \mathbb{N}$ **.**

Definiție:Numim ***țir de numere reale*** o familie de numere reale cu indici numere naturale, pe care îl vom nota cu $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$; a_n se numeşte termenul general al şirului.

Un şir de elemente ale unei mulțimi E este o funcție definitş pe mulțimea $\mathbb{N}$ cu valori în mulțime E.

1.1.1 ***Definiție:***Un şir $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte ***mț rginit*** dacş existş un numşr real $M > 0$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\left|a_n\right| \le M$.

1.1.2 ***Definiție:***Un şir $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte: ***monoton crescț tor*** dacş pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem: $a_n \le a_{n+1}$, i.e. fiecare termen al şirului este mai mic decât urmştorul, respectiv ***monoton descrescț tor*** dacş pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem: $a_n \ge a_{n+1}$, i.e. fiecare termen este mai mare decât urmştorul.

1.1.3 ***Definiție:***Un ***subțir al unui țir*** $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir $\left(a_{n_p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ astfel încât $n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots$

1.1.4 Un numşr $a \in \mathbb{R}$ (finit sau infinit) se numeşte ***limita unui țir*** $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dacş în afara oricşrei vecinştşţi V a lui a se aflş cel mult un numşr finit de termeni ai şirului $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

şirurile de numere reale care au limitş finitş se numesc ***țiruri convergente***. şirurile care nu sunt convergente se numesc ***divergente***.

1.1.5 ***Teoremț :*** Un şir $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent cştre numşrul real a dacşş i numai dacş pentru orice $\varepsilon > 0$ existş un numşr $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \ge n_\varepsilon$ avem: $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$

1.2 CRITERII DE CONVERGENț

1.2.1 Dacş $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir convergent cştre 0 şi $\left|a_n - a\right| < \alpha_n$, atunci şirul $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge cştre a .

1.2.2 Dacş $\alpha_n \to \infty$ şi $a_n \ge \alpha_n$, atunci $a_n \to \infty$.

1.2.3 Dacş $\alpha_n \to -\infty$ şi $a_n \le \alpha_n$, atunci $a_n \to -\infty$.

1.2.4 Dacş $a_n \to 0$ iar $\left|b_n\right| < M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $a_n b_n \to 0$.

1.3 PROPRIETț I

1.3.1 Dacş $a_n \to a$ atunci $\left|a_n\right| \to \left|a\right|$

1.3.2 Orice şir convergent este mşrginit.

1.3.3 Dacş $a_n \to a$ atunci orice subşir al lui $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ are tot limita a .

1.3.4 ***Lema lui Cesaro:*** Orice şir mşrginit conține un subşir convergent.

1.3.5 Dacş $a_n \to a$ atunci: prin schimbarea ordinii termenilor, prin înlşturarea sau adşugarea unui numşr finit de termeni se obține un şir care are tot limita a .

1.3.6 ***Definiție:***Se numeşte ***ţir Cauchy*** sau ***ţir fundamental*** un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea: pentru orice $\varepsilon > 0$ existş un numşr $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n, m \geq N_\varepsilon$ avem: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

1.3.7 ***Criteriul de convergenţ Cauchy:*** Un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacşş i numai dacş este fundamental.

1.4.1 ***Teoremţ :*** Orice şir monoton şi mşrginit este convergent. Orice şir nemşrginit şi monoton este divergent.

Observație: Reciproca teoremei 1.5.1 nu este adevşratş (a se vedea proprietatea 1.3.2)

1.4.2 ***Criteriul de convergenţ Cesaro-Stolz:*** Fie şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care îndeplinesc condițiile:

i. şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescştor şi nemşrginit

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$ (finit)

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

1.4.3 ***Criteriul de convergenţ D'Alembert:*** Dacşş irul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are toți termenii pozitivi şi existş $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, atunci: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1.5 *EXERCIţ II REZOLVATE*

1.5.1 Sş se arate cş urmştoarele şiruri sunt convergente şi sş se calculeze limita lor:

a. $a_n = \frac{n}{n+1}$

b. $a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n}$

Rezolvare: a. Vom arşta cşş irul este monoton şi mşrginit. Avem:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}$$

de unde rezultş $a_{n+1} > a_n$, deci şirul este monoton crescştor.

ş irul este mşrginit (vezi 1.1.1) pentru cş $a_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi

$$a_n = \frac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $0 < a_n < 1$. Atunci, conform 1.5.1, şirul este convergent fiind monoton şi mşrginit. Pentru calculul limitei avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

pentru cş $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

b. Se ştie cş $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, deci $a_n = \frac{n+1}{2n}$. Vom arşta cşş irul este monoton şi mşrginit:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+2}{2(n+1)}\cdot\frac{2n}{n+1}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}<1$$

de unde rezultş $a_{n+1}<a_n$, deci şirul este monoton descrescştor. Se observş uşor cş $0<a_n<1$, deci şirul este mşrginit. Atunci, conform 1.5.1, şirul este convergent şi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$$

1.5.2 Sş se arate folosind teorema 1.6.2 cş:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n^2+2}=0$

Rezolvare: a. Se observş cş:

$$0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Fie $\varepsilon>0$. Inegalitatea $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$ este echivalentş cu $\dfrac{1}{4\varepsilon^2}<n$. Prin urmare, dacş $n\geq n_\varepsilon=\left\lfloor\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right\rfloor+1$, atunci $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$ şi cu atât mai mult $\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|<\varepsilon$, deci conform 1.1.5 obținem: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$.

b. Fie $\varepsilon>0$. Inegalitatea $|a_n-a|<\varepsilon$ devine:

$$\left|\frac{n+1}{3n^2+2}\right|=\frac{n+1}{3n^2+2}<\varepsilon$$

Dar, pentru orice $n\geq\left\lfloor\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$, avem:

$$\varepsilon>\frac{1}{n}>\frac{n+1}{3n^2+2}$$

de unde, pentru orice $n\geq n_\varepsilon=\left\lfloor\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$, obținem: $\left|\dfrac{n+1}{3n^2+2}\right|<\varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n^2+2}=0$ conform 1.1.5.

1.5.3 Sş se arate folosind definiția limitei cş:

a. şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $a_n=\dfrac{n^2+1}{n^2-1}$ nu are limita 2.

b. şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $a_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}$ nu are limitş.

Rezolvare:

a. Fie $\varepsilon=1/2$. Dacş şirul $a_n=\dfrac{n^2+1}{n^2-1}$ ar avea limita 2, existş $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n\geq n_\varepsilon$ sş avem:

$$2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<\frac{n^2+1}{n^2-1}<2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow$$
$$3n^2-3<2n^2+2<5n^2-5 \Leftrightarrow n^2<5<3n^2-2$$

Din prima inegalitae obținem $n \le 2$ ceea ce contrazice presupunerea cş limita şirului este 2. De fapt limita şirului considerat este 1.

b. Sş presupunem cşş irul $a_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$ este convergent. Atunci, conform 1.4, şirul considerat este şir Cauchy, deci pentru orice $\varepsilon>0$ existş $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentr orice $n,m \ge n_\varepsilon$ sş avem: $|a_n-a_m|<\varepsilon$. Fie atunci $\varepsilon=1/2$ şi $n,m\in \mathbb{N}$ suficient de mari, cu n par şi m impar. Atunci:

$$|a_n-a_m|=\left|(-1)^n+\frac{1}{n}-(-1)^m-\frac{1}{m}\right| \ge$$
$$\ge \left|(-1)^n-(-1)^m\right|-\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| \ge 2-1=1$$

contradicție, deci şirul considerat nu este şir Cauchy, prin urmare nu poate fi nici convergent.

1.5.4 Sş se arate cşş irurile de mai jos sunt şiruri Cauchy:

a. $u_n=a_0+a_1q+a_2q^2+\dots+a_nq^n$, unde $|q|<1$ şi existş $M>0$ astfel încât $|a_k|\le M$

b. $u_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

Rezolvare: a. Avem:

$$u_{n+p}-u_n=a_{n+1}q^{n+1}+a_{n+2}q^{n+2}+\dots+a_{n+p}q^{n+p}$$

deci:

$$(*)\,|u_{n+p}-u_n| \le |a_{n+1}|\cdot|q|^{n+1}+|a_{n+2}|\cdot|q|^{n+2}+\dots+|a_{n+p}|\cdot|q|^{n+p}$$

(conform inegalitş ii $|a+b|\le|a|+|b|$). Dar $|a_k|\le M$ şi atunci relația (*) devine:

$$(**)\,|u_{n+p}-u_n| \le |a_{n+1}|\cdot|q|^{n+1}+|a_{n+2}|\cdot|q|^{n+2}+\dots+|a_{n+p}|\cdot|q|^{n+p} \le$$
$$\le M\,|q|^{n+1}\left(1+|q|+\dots+|q|^{p-1}\right)=M\,|q|^{n+1}\frac{1-|q|^p}{1-|q|}\le M\,|q|^{n+1}\frac{1}{1-|q|}$$

deoarece $1+|q|+\dots+|q|^{p-1}$ este suma unei progresii geometrice de rație $|q|$ cu p termeni şi $|q|<1$ .Am obținut aşadar: $|u_{n+p}-u_n|<\frac{M}{1-|q|}\cdot|q|^{n+1}$. Fie $\varepsilon>0$; cum $|q|<1$, existş $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n\ge n_\varepsilon$, $|q|^{n+1}<\frac{1-|q|}{M}\varepsilon$. Atunci, pentru orice $n\ge n_\varepsilon$ şi orice $p\in\mathbb{N}$, relația (**) devine:

$$|u_{n+p}-u_n|<\varepsilon$$

ceea ce înseamnş cşş irul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy.

1.5.5 Sş se demonstreze folosind criteriul lui Cauchy cşş irul

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$$

este divergent.

Rezolavare: Fie $n, p \in \mathbb{N}$. Avem:

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p}$$

Luând $n=p$ relația devine:

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Cum $\frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}$ pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, obținem:

$$|a_{2n} - a_n| \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n} = \frac{1}{2}$$

Am obținut aşadar cş pentru orice $n \in \mathbb{N}$ existş $p = n \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_{n+p} - a_n| \geq \frac{1}{2}$ ceea ce înseamnş cş $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu este şir Cauchy.

Observație: Cum şirul $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ nu este şir Cauchy, nu este nici convergent (acest fapt va folosi pentru a demonstra divergența seriei armonice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

1.5.6 Sş se arate, folosind teorema de convergenţş cu ε (1.1.5), cşş irul $a_n = \frac{n^2}{n^2 - 1}$ are limita 1.

Rezolvare: Fie $\varepsilon > 0$. Inegalitatea $(*) \left| \frac{n^2}{n^2-1} - 1 \right| < \varepsilon$ se mai poate scrie:

$$\left| \frac{n^2}{n^2-1} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{n^2 - n^2 + 1}{n^2 - 1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2-1} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + 1} < n$$

Atunci luând $n_\varepsilon = \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + 1} \right] + 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$, inegalitatea (*) este satisfşcutş, deci conform 1.1.5 limita şirului $a_n = \frac{n^2}{n^2-1}$ este 1.

Observație: Numşrul n_ε aratş cş în afara vecinştşții $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se aflş cel mult n_ε termeni ai şirului considerat. De exemplu, în exercițiul anterior, dacş luşm $\varepsilon = 0.01$, atunci în afara vecinştşții $(1 - 0.01, 1 + 0.01)$ se gşsesc cel mult $n_\varepsilon = \left[\sqrt{\frac{1}{0.01} + 1} \right] + 1 = 11$ dintre primii termeni ai şirului, restul termenilor gşsindu-se în vecinştatea $(1 - 0.01, 1 + 0.01)$.

1.5.7 Fie $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Sş se studieze convergența şirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $x_1 = a^{1/a}, x_{n+1} = x_1^{x_n}$.

Rezolare: Dacş $a=1$, atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şirul constant $x_n=1$, deci convergent cştre 1.

Dacş $a>1$ atunci: $x_1=a^{1/a}>1$, $x_2=x_1^{x_1}=\left(a^{1/a}\right)^{a^{1/a}}=a^{a^{1/a-1}}$, de unde:

$$\frac{x_2}{x_1}=a^{\frac{1}{a}\left(a^{1/a}-1\right)}>1$$

deci $x_2>x_1$. Vom demonstra prin inducţie completş dupş n cş $x_n>x_{n-1}$ pentruu orice $n\in\mathbb{N}$. Pentru $n=1$ proprietatea a fost verificatş. Presupunem relaţia adevşratş pentru n, $x_n>x_{n-1}$. Atunci:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_1^{x_n}}{x_1^{x_n}}=x_1^{x_n-x_{n-1}}$$

Cum $x_n>x_{n-1}$ şi $x_1>1$, obţinem $\frac{x_{n+1}}{x_n}>1$, deci $x_{n+1}>x_n$. Conform principiului inducţiei complete relaţia $x_n>x_{n-1}$ este adevşratş pentru orice $n\in\mathbb{N}$, deci şirul este monoton crescştor.

Acum, $\frac{1}{a}<1$, deci $x_1=a^{1/a}<a$. Presupunem cş $x_n<a$. Atunci $x^{n+1}=x_1^{x_n}<\left(a^{1/a}\right)^a=a$. Conform principiului inducţiei complete, am obţinut aşadar cş $x_n<a$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Am demonstrat aşadar cşş irul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir monoton crescştor şi mşrginit superior, deci conform 1.5.1 este convergent. Fie $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_1^{x_n}\Leftrightarrow x=x_1^{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}\Leftrightarrow x=x_1^{x}\Leftrightarrow x=a^{\frac{x}{a}}$$

de unde obţinem cş $x=a$.

În mod analog se trateazşş i cazul $0<a<1$, pentru care vom obţine de asemenea cşş irul este convergent (fiind monoton descrescştor şi mşrginit inferior) şi are limita *1*.

1.5.8 Sş se studieze convergenţa şirului:

$$a_1=1$$
$$a_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Rezolvare: Avem:

$$a_n=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\dots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\dots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$

ş irul obţinut, $a_n=\frac{n+1}{2n}$, este convergent şi are limita $\frac{1}{2}$.

1.5.9 Sş se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$$

Rezolvare: Fie $a_n = 1^p + 2^p + \dots + n^p$ şi $b_n = n^{p+1}$. şirul $(b_n)_{\in \mathbb{N}}$ este crescştor şi nemşrginit, deci, conform criteriului de convergenţş Cesaro-Stolz (1.5.2), dacş existş $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ şi este finitş, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1^p + 2^p + \dots + (n+1)^p\right) - \left(1^p + 2^p + \dots + n^p\right)}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{\left(\sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k n^k\right) - n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{n^p\left(\sum_{k=0}^{p} C_{p+1}^k n^{k-p}\right)} = \frac{1}{C_{p+1}^1} = \frac{1}{p+1}$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$.

1.5.10 Sş se calculeze:

i. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Rezolvare: i. Fie $a_n = n$. şirul (a_n) are numai termeni pozitivi şi atunci, conform 1.5.3, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

ii. Fie $a_n = \frac{n!}{n^n}$. şirul (a_n) are numai termeni pozitivi şi atunci, conform 1.5.3, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

1.5.11 Fie *a,b* numere reale strict pozitive cu $a>b>0$. Definim recursiv şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel: $a_1 = a, b_1 = b, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$. Sş se arate cş şirurile sunt convergente şi sş se calculeze limita lor.

Rezolvare: Avem: $a_2 - a_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} - a_1 = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} < 0$, pentru cş $a>b$.

$b_2 - b_1 = \frac{2a_1 b_1}{a_1 + b_1} - b_1 = \frac{2ab}{a+b} - b = \frac{ab - b^2}{a+b} = \frac{b(a-b)}{a+b} > 0$, pentru cş $a>b$ şi $a,b>0$.

$\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1+b_1}{2}\cdot\frac{a_1+b_1}{2a_1b_1}=\frac{\left(a_1+b_1\right)^2}{4a_1b_1}>1$, pentru cş $a,b>0$. Am obținut aşadar cş $0<b_1<b_2<a_2<a_1$. Presupunem cş $0<b_{n-1}<b_n<a_n<a_{n-1}$. Atunci:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+b_n}{2}-a_n=\frac{b_n-a_n}{2}<0 \text{ pentru cş } b_n<a_n$$

$$b_{n+1}-b_n=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}-b_n=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}-b_n=\frac{a_nb_n-b_n^{\ 2}}{a_n+b_n}=\frac{b_n\left(a_n-b_n\right)}{a_n+b_n}>0 \quad \text{pentru cş}$$

$0<b_n<a_n$ şi

$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}-\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=\frac{\left(a_n-b_n\right)^2}{a_n+b_n}>0$, deci $0<b_n<b_{n+1}<a_{n+1}<a_n$. Atunci, conform principiului inducției complete, am obținut cş $0<b_1=b<\ldots<b_{n-1}<b_n<a_n<a_{n-1}<\ldots<a_1=a$ pentru orice $n\in ¥$. Cu alte cuvinte am obținut cş: şirul $\left(a_n\right)_{n\in ¥}$ este un şir descrescştor şi mşrginit inferior (de *b*) iar şirul $\left(b_n\right)_{n\in ¥}$ este un şir crescştor şi mşrgini superior (de *a*). Atunci, conform 1.5.1, şirurile $\left(a_n\right)_{n\in ¥}$ şi $\left(b_n\right)_{n\in ¥}$ sunt convergente. Fie $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ şi $\beta=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. Obținem:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}\Leftrightarrow\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2}\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n\right)\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta\right)\Leftrightarrow\alpha=\beta$$

şi de asemenea avem

$a_{n+1}b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}\cdot\frac{a_n+b_n}{2}=a_nb_n$ pentru orice $n\in ¥$, deci $a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n=\ldots=a_1b_1=ab$

de unde: $\alpha\beta=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=ab$, şi cum $\alpha=\beta>0$, obținem $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\sqrt{ab}$.

1.6 EXERCIț II PROPUSE:

Sş se arate cş urmştoarele şiruri sunt convergente şi sş se calculeze limitele lor:

1.6.1 $a_n=\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln\left(n\right)}$

Indicație: Se foloseşte criteriul de convergenţş Cesaro Stolz. R: 1

1.6.2 $a_n=\sqrt[n]{n}$

Indicație: Se foloseşte criteriul lui D'Alembert. R: 1

1.6.3 $a_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$ R: $1/2$

1.6.4 $a_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\left(n+1\right)}$ R: 1

1.6.5 $a_n=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\ldots(1-\frac{1}{n^2})$ R: $1/2$

1.6.6 $a_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{3^n}}$ R: $4/3$

Folosind criteriul de convergenţş Cauchy, sş se demonstreze convergenţa şirurilor:

1.6.7 $u_n = \dfrac{\sin(1)}{2}+\dfrac{\sin(2)}{2^2}+\dots+\dfrac{\sin(n)}{2^n}$

1.6.8 $u_n = \dfrac{\cos(1)}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos(2)}{2\cdot 3}+\dots+\dfrac{\cos(n)}{n(n+1)}$

Sş se calculeze:

1.6.9 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$ R: 0

1.6.10 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\ln(2)}+\frac{1}{\ln(3)}+\dots\frac{1}{\ln(n)}}{n}$ R: 0

1.6.11 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{n}$ R: 0

1.6.12 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ R: ∞

1.6.13 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$ R: $\dfrac{4}{e}$

2. SERII DE NUMERE

Definiție:Se numește **serie de numere** reale perechea $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}},(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ unde $(u_n)_{n\in\mathbb{N}},(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt șiruri de numere reale iar

$$s_1 = u_1$$
$$s_2 = u_1 + u_2$$
$$\ldots$$
$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

Termenii șirului $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numesc **termenii seriei** iar șirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește **șirul sumelor parțiale**.

Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, atunci vom defini

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ nu există, atunci seria se numește **oscilantă**.

O serie se numește **convergentă** dacă șirul sumelor parțiale este convergent, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ există și este finită. În acest caz, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ se numește **suma seriei.** Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, spunem că seria este **divergentă.**

Observație: Se obișnuiește ca seria $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}},(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ să se definească prin notația $\sum u_n$.

2.1 *Proprietăți generale:*

2.1.1 Dacă într-o serie schimbăm ordinea unui număr finit de termeni, se obține o nouă serie de aceeași natură cu seria inițială; Dacă seria inițială are sumă, atunci seria obținută are aceeași sumă.

2.1.2 Dacă la o serie convegentă adăugăm sau înlăturăm un număr finit de termeni se obține de asemenea o serie convergentă, dar, în general, cu altă sumă.

2.1.3 Dacă o serie este convergentă, atunci șirul sumelor parțiale este mărginit (reciproca nu este adevărată).

2.1.4 Dacă termenii unei serii sunt pozitivi iar șirul sumelor parțiale este mărginit, atunci seria este convergentă.

2.1.5 ***Definiție:*** Se numește **rest de ordin p** al unei serii convergente $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}},(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ șirul definit prin:

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} u_n$$

2.1.6 Resturile unei serii convergente formează un șir convergent către *0*.

2.1.7 Dacă $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}},(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ este o serie convergentă, atunci șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al termenilor săi este convergent către *0*. (Aceasta este o condiție necesară, dar nu și suficientă de convergență)

2.1.8 Seriile având ca termeni șirurile $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectiv $(\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $\alpha\in\mathbb{R}^*$, au aceeași natură.

2.2 CRITERII DE CONVERGENĂ PENTRU SERII CU TERMENI OARECARE:

2.2.1 ***Criteriul general al lui Cauchy:*** O serie $\left((u_n)_{n\in \mathbb{N}}, (s_n)_{n\in \mathbb{N}}\right)$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq N_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}$

$$\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}\right| < \varepsilon$$

2.2.2 ***Criteriului lui Abel:*** Fie $\left((u_n)_{n\in \mathbb{N}}, (s_n)_{n\in \mathbb{N}}\right)$ o serie cu proprietatea că şirul $(s_n)_{n\in \mathbb{N}}$ al sumelor parţiale este mărginit şi $(\alpha_n)_{n\in \mathbb{N}}$ un şir descrescător de numere reale pozitive, convergent către *0*. Atunci seria $\sum \alpha_n u_n$ este convergentă.

2.3 CRITERII DECONVERGENĂ PENTRU SERII ALTERNATE

2.3.1 ***Definiție:*** Se numeşte **serie alternată** o serie de numere reale pentru care produsul a doi termeni consecutivi este negativ.

2.3.2 ***Criteriul lui Abel:*** Fie $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ un şir descretor de numere reale pozitive, convergent către *0*. Atunci seria $\sum (-1)^n u_n$ este convergentă.

2.4 CRITERII DE CONVERGENȚĂ ABSOLUTĂ

2.4.1 ***Definiție:***Seria $\sum u_n$ se numeşte absolut convergentă dacă seria $\sum |u_n|$ este convergentă. O serie convergentă care nu este absolut convergetă se numește serie semiconvergentă.

2.4.2 ***Teoremă:*** Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor, se obține tot o serie absolut convergentă cu aceeaşi sumă.

2.4.3 ***Teoremă (Riemann):*** Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor astfel încât seria astfel obținută să aibe ca sumă un număr real, finit sau infinit, diferit de suma seriei inițiale, sau ca seria să fie oscilantă.

2.4.4 ***Criteriul comparației:*** Fie $\sum u_n, \sum v_n$ două serii pentru care există un număr natural $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $|u_n| \leq |v_n|$ pentru orice $n>N$. Atunci dacă seria $\sum v_n$ este absolut convergentă, seria $\sum u_n$ este absolut convergentă.

2.5 CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII CU TERMENI POZITIVI

Observație: O serie cu termeni pozitivi poate fi convergentă sau divergentă, cu suma ∞. Pentru o serie cu termeni pozitivi proprietatea de convergenă este echivalentă cu proprietatea de absolut convergenă .

2.5.1 ***Primul criteriu al comparației:*** Fie $\sum u_n, \sum v_n$ două serii cu termeni pozitivi pentru care există un număr natural $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $u_n \leq v_n$ pentru orice $n>N$. Atunci:

a. dacă seria $\sum v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum u_n$ este convergentă

b. dacă seria $\sum u_n$ este divergentă,atunci seria $\sum v_n$ este divergentă

2.5.2 ***Al doilea criteriu al comparației:*** Fie $\sum u_n, \sum v_n$ două serii cu termeni pozitivi pentru care există un număr natural $N \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

pentru orice $n>N$. Atunci:

a. dacă seria $\sum v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum u_n$ este convergentă

b. dacă seria $\sum u_n$ este divergentă,atunci seria $\sum v_n$ este divergentă

2.5.3 ***Al treilea criteriu al comparației:*** Fie $\sum u_n, \sum v_n$ două serii cu termeni pozitivi astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$$

a. dacă $0 < k < \infty$, atunci cele două serii au aceeaşi natură

b. dacă $k=0$ iar seria $\sum v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum u_n$ este convergentă

c. dacă $k = \infty$ iar seria $\sum v_n$ este divergentă, atunci seria $\sum u_n$ este divergentă

Observație: Aceste criterii ne oferă posibilitatea de a stabili natura unei serii cu termeni pozitivi comparând-o cu o altă serie a cărei natură o cunoaştem. De obicei, pentru comparaaie se foloseşte seria geometrică sau seria $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (seria armonică generalizată).

Observație: Seria armonică generalizată $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ este: convergentă dacă $\alpha > 1$ şi divergentă dacă $\alpha \le 1$.

Observație: Seria $\sum_n \frac{1}{n!}$ este convergentăş i are suma ***e* (numărul lui Euler).**

2.5.4 ***Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy):*** Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a. Dacă există un număr natural N ți un număr $0<k<1$ astfel încât pentru orice $n \ge N$ să avem $\sqrt[n]{u_n} \le k$, atunci seria este convergentă

b. Dacă $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$ pentru o infinitate de termeni, atunci seria este divergentă

Corolar: Dacă pentru seria $\sum u_n$ cu termeni pozitivi există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$, atunci această serie converge dacă $k < 1$ ți diverge dacă $k > 1$.

2.5.5 ***Criteriul raportului (al lui D'Alembert):*** Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a. Dacă există un număr natural N ți un număr $0<k<1$ astfel încât pentru orice $n \ge N$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le k$, atunci seria este convergentă.

b. Dacă există un număr natural N astfel încât pentru orice $n \ge N$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$, atunci seria este divergentă.

Corolar:

Dacă pentru seria $\sum u_n$ cu termeni pozitivi există $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, atunci această serie converge dacă $k < 1$ ți diverge dacă $k > 1$.

2.5.6 ***Criteriul Raabe-Duhamel:*** Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a. Dacă există un număr $k > 1$ ți un număr natural N astfel încât

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \ge k$$

pentru orice $n \ge N$, atunci seria este convergentă.

b. Dacă există un număr natural N astfel încât

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)<1$$

pentru orice $n \geq N$, atunci seria este divergentă.

Corolar: Dacă pentru seria cu termeni pozitivi $\sum u_n$ există

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lambda$$

atunci seria converge dacă $\lambda>1$ ţi diverge dacă $\lambda<1$.

2.5.7 ***Criteriul logaritmic:*** Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a. Dacă există un număr natural *N* astfel încât pentru orice $n \geq N$

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}>1$$

atunci seria este convergentă.

b. Dacă există un număr natural *N* astfel încât pentru oirice $n \geq N$

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}<1$$

atunci seria este divergentă.

Corolar: Dacă pentru seria cu termeni pozitivi există

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}=\lambda$$

atunci această serie converge dacă $\lambda>1$ ţi diverge dacă $\lambda<1$.

2.6 EXERCIŢII REZOLVATE

2.6.1 Să se studieze convergenţa seriei

$$\sum_n u_n=\sum_n \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

calculând suma ei.

Rezolvare: Termenul general al sumei este:

$$u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Atunci ţirul sumelor parţiale se mai poate scrie:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

Conform definiţiei, seria data este convergentă dacă ţirul sumelor parţiale este convergent ţi are ca sumă limita acestui ţir, dacă aceasta există. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

de unde obţinem că seria $\sum_n u_n$ este convergentă ţi are suma $\frac{1}{2}$.

2.6.2 Să se calculeze suma seriei:

$$\sum_n \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Rezolvare: Termenul general al seriei este:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Ne prpunem să scriem termenul general al seriei ca o sumă de fracții simple, i.e.:

$$u_n = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

Obținem:

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n^2(A+B+C) + n(3A+2B+C) + (2A+2B+C)}{n(n+1)(n+2)}$$

Prin trecere la identificarea coeficienților obținem sistemul:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A+2B+C=1 \end{cases}$$

cu soluția $A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{1}{2}$. Ațadar termenul general al seriei se mai poate scrie:

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

ț irul sumelor parțiale devine:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n^2+3n}{4n^2+12n+8}$$

Cum suma seriei este egală cu limita țirului sumelor parțiale, obținem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{4n^2+12n+8} = \frac{1}{4}$$

2.6.3 Să se calculeze suma seriei:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \ldots..$$

Rezolvare: Se observă că termenii generali ai seriei sunt termenii unei progresii geometrice al cărei prim termen este $u_0 = \frac{2}{3}$ rația $q = \frac{1}{2}$. Prin urmare, țirul sumelor parțiale este:

$$s_n = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \ldots u_0 q^{n-1} = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$

adică:

$$s_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

de unde obținem:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{4}{3}$$

2.6.4 Să se calculeze suma seriei:

$$\sum_{n\in ¥}\frac{n^3}{n!}$$

Reozolvare: Conform observaţiei 3, 2.5.3, seria $\sum_{n}\frac{1}{n!}$ este convergentă ţi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$. Vom scrie termenul general al seriei $\sum_{n}\frac{n^3}{n!}$ în raport de termenul general al seriei $\sum_{n}\frac{1}{n!}$. Avem, pentru *n>2*:

$$n^3=n(n-1)(n-2)+an(n-1)+bn=n^3+(a-3)n^2+(2-a+b)n$$

de unde, prin identificarea coeficienţilor, obţinem: $a-3=0, 2+a+b=0$, deci $a=3, b=1$. Atunci termenul general al seriei devine:

$$\frac{n^3}{n!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}+\frac{3n(n-1)}{n!}+\frac{n}{n!}=\frac{1}{(n-3)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

ţ irul sumelor parţiale se mai poate scrie aţadar:

$$s_n=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k-3)!}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}$$

ţi cum suma seriei este egală cu limita ţirului sumelor parţiale, avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}=\lim_{n\to\infty}s_n=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!}+3\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=5e$$

Stabiliţi natura seriilor:

2.6.5 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

Rezolvare: Am demonstrat la 1.5.10 că $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Atunci limita ţirului termenului general al seriei este:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}=1$$

deci seria nu este convergentă, conform 2.1.7 (ţirul termenului general nu converge la *0*).

2.6.6 $\sum_{n\geq 1}\ln\frac{n+1}{n}$

Rezolvare: Suma parţială a acestei serii este:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)-\ln(k)\right)=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)$$

Cum $\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$, obţinem că seria $\sum_{n\geq 1}\ln\frac{n+1}{n}$ este divergentă ţi are suma ∞.

Observaţie: ţ irul termenilor acestei serii, $u_n=\ln\frac{n+1}{n}$, converege la *0*, ($\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{n}=0$), cu toate că seria este divergentă. Acest fapt demonstrează că proprietatea 2.1.7 nu este ţi o condiţie suficientă de convergenţă pentru serii.

2.6.7 $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

Rezolvare: Deoarece pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $\ln n<n$, obținem de asemenea $\sqrt[n]{\ln n}<\sqrt[n]{n}$, și deci:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}}>\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \text{ pentru orice } n\geq 2 .$$

Conform exercițiului 2.6.1, seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ este divergentă. Din primul criteriu al comparației 2.5.1 obținem atunci că seria $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ este divergentă.

2.6.8 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n+n}$

Rezolvare: Cum $2^n+n\geq 2^n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, obținem că: $0<\frac{1}{2^n+n}<\frac{1}{2^n}$. Cum seria cu termenul general $v_n=\frac{1}{2^n}$ este convergentă (este o serie gemetrică cu rația $q=1/2$ subunitară) și seria dată are termenii pozitivi, din primul criteriu al comparației 2.5.1 obținem că seria cu termenul general $u_n=\frac{1}{2^n+n}$ este de asemenea convergentă.

2.6.9 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$

Rezolvare: Vom folosi crieteriul al treilea al comparației, 2.5.3, în care:

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)},\quad v_n=\frac{1}{n^2}$$

Conform observației 2, 2.5.3, seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha>1$, deci seria care are ca termen general $v_n=\frac{1}{n^2}$ este convergentă. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=1$$

Cum limita este finită, conform criteiului al treilea al comparației, cele două serii au aceeași natură, prin urmare și seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă..

2.6.10 $\sum_{n\geq 1}\left(a\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n,\ a>0$

Rezolvare: Folosind corolarul criteriului rădăcinii, 2.5.4, se obține:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}a\frac{n^2+n+1}{n^2}=a$$

ți deci seria este divergentă dacă $a>1$ ți convergentă dacă $0<a<1$. Pentru $a=1$ criteriul rădăcinii nu precizează natura seriei, deci va trebui să determinăm natura seriei în acest caz prin alte metode. Fie ațadar $a=1$. Termenul general al seriei devine în acest caz:

$$u_n = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n$$

ți deci

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n^2}\cdot n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}} = e$$

Cum limita țirului termenului general al seriei este diferită de zero, conform observației 2.1.7 seria este divergentă ți în acest caz.

2.6.11 $\quad \sum\limits_{n\ge 1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Rezolvare: În acest caz este comod de aplicat criteriu rădăcinii, 2.5.4, ți obținem:

$$u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

ți deci seria este convergentă.

2.6.12 $\quad \sum\limits_{n\ge 1}\frac{2^n n!}{n^n}$

Rezolvare: Aplicând criteriul raportului, 2.5.5, se obține:

$$u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e}$$

Dar $\frac{2}{e}<1$, deci, conform criteriului mai sus amintit, seria este convergentă.

2.6.13 $\quad \sum\limits_{n\ge 1}\frac{a^n}{2^n+5^n}, a>0$

Rezolvare: Vom folosi criteriul raportului, 2.5.5. Avem:

$$u_n = \frac{a^n}{2^n+5^n} > 0$$

ți deci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+1}}\cdot\frac{2^n+5^n}{a^n}=\lim_{n\to\infty} a\frac{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+1\right)}{5^{n+1}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}+1\right)}=\frac{a}{5}$$

Pentru $\frac{a}{5}<1$, deci pentru $a<5$, seria este convergentă, iar pentru $\frac{a}{5}>1$, deci pentru $a>5$, seria este divergentă, conform criteriului raportului. Pentru $a=5$, criteriul raportului nu ne poate preciza natura seriei . Pentru a stabili totuți natura seriei date ți în acest caz putem folosi una din următoarele metode:

- proprietatea 2.1.7, unde

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{2^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}=1$$

  deci termenul general al seriei nu converge la 0, ceea ce înseamna că seria este divegentă în acest caz

- criteriul Raabe-Duhamel, pentru care

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2^{n+1}+5^{n+1}}{5(2^n+5^n)}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\frac{2^{n+1}-5^{n+1}-5\cdot 2^n+5^{n+1}}{5\left(2^n+5^n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\frac{2^n\left(2-5\right)}{5\left(2^n+5^n\right)}=\frac{-3}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+\left(\frac{5}{2}\right)^n}=0$$

ți cum această limită este subunitară, seria este divergentă.

2.6.14 $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n)},\lambda>0$

Rezolvare: Aplicând criteriul lui D'Alembert obținem:

$$u_n=\frac{n!}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n)}>0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n+1)}\cdot\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n)}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\lambda+n+1}=1$$

ceea ce înseamnă că acest criterii nu ne poate da informații asupra naturii seriei. Aplicăm criteriul Raabe-Duhamel ți obținem:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\lambda+n+1}{n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\lambda}{n+1}=\lambda$$

Prin urmare, dacă $\lambda>1$, seria este convergentă, iar pentru $0<\lambda<1$ seria este divergentă. Dacă $\lambda=1$, termenul general al seriei devine:

$$u_n=\frac{n!}{2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n+1)}=\frac{1}{n+1}$$

deci am obținut seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+1}$, care este divergentă (vezi 2.5.3 observații)

2.6.15 $\sum_{n\geq 1} a^{1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{n}},a>0$

Rezolvare: Aplicând criteriul Raabe-Duhamel se ajunge la calcule complicate. Putem aplica criteriul logaritmic:

$$u_n = a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\ln a}{\ln n} = -\ln a \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n} = -\ln a$$

(aplicând eventual criteriul Cesaro-Stolz pentru determinarea limitei $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1$).

Prin urmare, dacă $-\ln a = \ln \frac{1}{a} > 1$, adică $\frac{1}{a} > e \Leftrightarrow a < \frac{1}{e}$, seria este convergentă, iar dacă $\ln \frac{1}{a} < 1$, adică $a > \frac{1}{e}$, seria este divergentă. Dacă $a = \frac{1}{e}$ criteriul logaritmic nu ne poate da informații asupra naturii seriei.

2.6.16 $\sum_{n\geq 1} n^{-\ln a}, a > 0$

Rezolvare: Se aplică criteriul logaritmic, 2.6.5.Obținem:

$$u_n = n^{-\ln a} > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{n^{-\ln a}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^{\ln a}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a \cdot \ln n}{\ln n} = \ln a$$

Prin urmare, dacă $\ln a > 1$, adică $a > e$, seria este convergentă. Pentru $\ln a < 1$, adică pentru $a < e$, seria este divergentă. Dacă *a=e*, atunci criteriul logaritmic nu ne poate da informații despre natura seriei. Dacă *a=e*, atunci termeul general al seriei devine:

$$u_n = n^{-\ln e} = n^{-1} = \frac{1}{n}$$

obținându-se seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, serie divergentă.

2.6.17 Să se studieze natura seriei:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3^n}$$

Rezolvare: Seria $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$ este convergentă, pentru că termenul general $v_n = \frac{1}{3^n}$ este o progresie geometrică cu rația subunitară. Cum termenul general al seriei date are proprietatea $|u_n| = \frac{1}{3^n}$, obținem ațadar că aceasta este absolut convergentă.

2.6.18 Să se studieze convergența seriei:

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$$

Rezolvare: Pentru a verifica dacă seria dată este convergentă vom aplica criteriul lui Abel, 2.3.1. ț irul cu termenul general $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ este descrescător pentru că:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^3+n^2+n+1-n^3-2n^2-n-1}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} =$$

$$= \frac{-n^2}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} < 0$$

ț i de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$.

Prin urmare, conform criteriului lui Leibniz, seria cu termenul general $u_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ este convergentă.

Pentru a verifica dacă seria este absolut convergentă, vom aplica criteriul comparației, 2.5.3, unde:

$$u_n = \left|(-1)^n \frac{n}{n^2+1}\right| = \frac{n}{n^2+1}$$

$$v_n = \frac{1}{n}$$

Obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

deci cele două serii au aceeaț i natură. Cum seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă, obținem că ț i seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+1}$ este divergentă, deci seria dată nu este absolut convergentă.

2.7 EXERCIȚII PROPUSE:

2.7.1 Să se stabilească natura următoarelor serii ț i să calculeze suma lor

a. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{16n^2-8n-3}$ — $R: \frac{1}{4}$, convergentă

b. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$, unde α este un număr real diferit de orice întreg negativ — $R: \frac{1}{1+\alpha}$ convergentă

c. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{(n+\sqrt{2})(n+\sqrt{2}+1)}$ — $R: \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ convergentă

d. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{5^n}$ — $R: \frac{5}{6}$ convergentă

Indicație: Se va scrie $\frac{2^n+(-1)^n}{5^n}=\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$, ți prin urmare seria dată este suma a două progresii geometrice de rație $\frac{2}{5}$ ți $\frac{-1}{5}$

2.7.2 Să se stabilească natura următoarelor serii:

a. $\sum\limits_{n\ge 1}\frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$ *R:* convergentă

b. $\sum\limits_{n\ge 1}\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ *R:* convergentă

c. $\sum\limits_{n\ge 1}\frac{1}{30n+7}$ *R:* divergentă

d. $\sum\limits_{n\ge 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ *R:* convergentă

e. $\sum\limits_{n\ge 2}\frac{1000}{n^2-\sqrt{2}}$ *R:* convergentă

Indicație: se va folosi inegalitatea:

$$\frac{1000}{n^2-\sqrt{2}}<\frac{1000}{n^2-n}=\frac{1000}{n(n-1)}<\frac{1000}{(n-1)^2}$$

f. $\sum\limits_{n\ge 1}\frac{1}{2^n+a},\quad a>-2$ *R:* convergentă

Indicație: se va compara cu seria $\sum\limits_{n\ge 1}\frac{1}{2^n}$, folosind al treilea criteriu al comparației.

2.7.3 Să se stabilească natura seriilor următoare aplicând criteriul raportului ți criteriul rădăcinii:

a. $\sum\limits_{n\ge 1}\frac{a^n}{n!},\quad a>0$ *R:* convergentă

b. $\sum\limits_{n\ge 1}\frac{(n^3+1)a^n}{(n+1)!},\quad a>0$ *R:* convergentă

c. $\sum\limits_{n\ge 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ *R:* convergentă

d. $\sum\limits_{n\ge 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$ *R:* convergentă

e. $\sum\limits_{n\ge 1}\left(\frac{2n^2+7n+5}{6n^2+5n+9}\right)^n$ *R:* convergentă

f. $\sum\limits_{n\ge 1}\left(\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)^n$ *R:* convergentă

Indicație: $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

g. $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\lg n)^n}$ *R:* convergentă

h. $\sum_{n\geq 1}\frac{2n^{n+5}}{(3n+7)^n}$ *R:* convergentă

2.7.4 Să se stabileascănatura seriilor următoareaplicând criteriul Raabe-Duhamel:

a. $\sum_{n\geq 1}\frac{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(2+5(n-1))}{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(3+5(n-1))}$ *R:* divergentă

b. $\sum_{n\geq 1}\frac{a^n\cdot n!}{n^n},\quad a>0$ *R:* convergentă pentru $a<e$
divergentă pentru $a\geq e$

c. $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n+1)},\quad \alpha>0$ *R:* convergentă pentru $\alpha>2$
divergentă pentru $0<\alpha\leq 2$

2.7.5 Să se stabilească natura seriilor următoare:

a. $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ *R:* semiconvergentă

b. $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{(n+a)^\alpha}$ unde α este un număr real diferit de orice întreg negativ *R:*absolut convergentă pentru $\alpha>1$. semiconvergentă pentru $\alpha<1$

c. $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n\sqrt[3]{n}}$ *R:* divergentă

2.7.6 Să se studieze convergența seriei:

$$\sum_{n\geq 2}\left(2-\sqrt{e}\right)\left(2-\sqrt[3]{e}\right)\ldots\left(2-\sqrt[n]{e}\right),\quad a>0$$

Indicație: Se aplică criteriul lui D’Alembert și criteriul al doilea al comparației.

3. FUNCȚII REALE DE O VARIABILȚ REALȚ

3.1 LIMITE DE FUNCȚII

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 (număr finit sau infinit) un punct de acumulare al mulțimii *A* (nu neapărat $x_0 \in A$) ți $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de variabilă reală.

3.1.1 ***Definiție:*** Vom spune că $l \in \mathbb{R}$ (finit sau infinit) este **limita funcției** f în punctul x_0 relativ la mulțimea *A* dacă pentru orice ăir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din *A*, $x_n \neq x_0$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, ăirul $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ al valorilor funcției are limita l. Vom scrie atunci:

$$\lim_{x\to x_0, x\in A} f(x) = l \text{ sau } \lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

Petru definiția 3.1.1 sunt echivalente afirmațiile:

3.1.2

a. Numărul $l \in \mathbb{R}$ (finit sau infinit) este **limita funcției** f în punctul x_0 relativ la mulțimea *A* dacăă i numai dacă pentru orice vecinătate *V* a lui l existăvecinătatea *U* a lui x_0, depinzând de *V*, astfel încât pentru orice $x \in A \cap U$, $x \neq x_0$, avem $f(x) \in V$.

b. Dacă x_0 ăi l sunt finite, atunci l este **limita funcției** f în punctul x_0 relativ la mulțimea *A* dacă ă i numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

c. Dacă x_0 este finit ăi $l = +\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ dacăă i numai dacă pentru orice număr $M > 0$ există $\delta_M > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta_M$ avem $f(x) > M$.

d. Dacă $x_0 = \infty$ ăi l este finit, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} = l$ dacăă i numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A, x \neq x_0, x > \delta_\varepsilon$ avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

3.1.3 ***Operații cu limite de funcții:*** Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și x_0 un punct de acumulare pentru mulțimea *A*. Dacț existț $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$, finite sau infinite, atunci:

a. dacț $l_1 + l_2$ are sens, funcția sumț $f + g$ are limitț în punctul x_0 și avem:

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = l_1 + l_2$$

b. dacț $l_1 \cdot l_2$ are sens, funcția produs $f \cdot g$ are limitț în punctul x_0 și avem:

$$\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$$

c. dacț $g(x) \neq 0$ pe o vecințtate a lui x_0 și dacț $\dfrac{l_1}{l_2}$ are sens, atunci funcția $\dfrac{f}{g} : \{x \in A \mid g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ are limitț în punctul x_0 și avem:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{l_1}{l_2}$$

d. dacţ $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci funcția $\alpha \cdot f : A \to \mathbb{R}$ are limitţ în punctul x_0 şi avem:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot l_1$$

3.1.4 ***Criterii de existențĂa limitelor de funcții:***

a. dacţ $|f(x) - l| \le g(x)$ pentru orice $x \in A$ şi $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

b. dacţ $f(x) \ge h(x)$ pentru orice $x \in A$ şi $\lim_{x \to x_0} h(x) = \infty$, atunci $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

c. dacţ existţ $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \le M$ pentru orice $x \in A$ (i.e. *f* este mţrginitţ pe *A*) şi $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0$

d. ***Criteriul lui Cauchy:*** Funcția $f : A \to \mathbb{R}$ are limitţ în punctul de acumulare finit x_0 al lui *A* dacţ ş i numai dacţ pentru orice $\varepsilon > 0$ existţ o vecinţtate *V* a lui x_0 astfel încât pentru orice $x', x'' \in V \cap A, x' \ne x''$ avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

3.1.5 În aplicații se folosesc des urmţtoarele limite:

a. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{tg(ax)}{bx}$

b. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

c.
$$\lim_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} \infty, \text{ dacţ } a > 1 \\ 0, \text{ dacţ } 0 < a < 1 \end{cases}$$
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, \text{ dacţ } a > 1 \\ \infty, \text{ dacţ } 0 < a < 1 \end{cases}$$

3.2 CONTINUITATEA FUNCĂIILOR DE O VARIABILĂ REALĂ

3.2.1 ***Definiție:*** Spunem cţ funcția *f* este **continuă** în punctul de acumulare $x_0 \in A$ dacă pentru orice ţir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ convergent la x_0 avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$

Următoarele definiții sunt echivalente cu definiția dată mai sus **continuității unei funcții într-un punct**:

a. Pentru orice vecinătate *U* a lui $f(x_0)$ există o vecinătate *V* a lui x_0 astfel încât pentru orice $x \in V \cap A$ avem $f(x) \in U$.

b. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$, cu $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

3.2.2 ***Definiție:*** Spunem că funcția $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este **continuă la stânga (respectiv la dreapta)** în $x_0 \in A$ dacă pentru orice şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A, x_n \le x_0$ (respectiv $x_n \ge x_0$), cu $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ (se mai poate scrie: $\lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = f(x_0)$ (respectiv $\lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0)$) , i.e. **limita laterală** la stânga (respectiv la dreapta) ale funcşiei *f* în punctul x_0 există şi este egală cu $f(x_0)$.

3.2.3 ***Propoziție:*** Funcția $f:A\to\mathbb{R}$ este continuş în $x_0\in A$ dacşş i numai dacş este continuş la stânga şi la dreapta în x_0.

3.2.4 ***Definiție:*** Un punct $x_0\in A$ se numeşte **punct de discontinuitate** a lui f dacş f nu ste continuş în x_0. Un punct de discontinuitate pentru funcția *f* se numeşte **punct de discontinuitate de speța I** dacă limitele laterale al funcției f în punctul x_0 există, sunt finite, dar nu sunt egale. Un punct de discontinuitate pentru funcția *f* se numețte **punct de discontinuitate de speța a II-a** dacă nu este de speța I.

3.2.5 ***Definiție:*** Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție. Spunem cţ funcția f are **proprietatea lui Darboux pe intervalul *I*** dacţ pentru orice $a,b\in I, a\neq b$ şi pentru orice $\lambda\in\mathbb{R}$, $f(a)\le\lambda\le f(b)$ existţ $c_\lambda\in(a,b)$ astfel încât $f(c_\lambda)=\lambda$.

3.2.6 ***Propoziție:*** Orice funcție continuţ $f:I\to\mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux. (Reciproca nu este adevţratţ).

3.3 UNIFORM CONTINUITATEA FUNCĂIILOR DE O VARIABILĂ REALĂ

3.3.1 ***Definiție:*** Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$. Spunem cţ *f* este uniform continuţ pe *I* dacţ pentru orice $\varepsilon>0$ existţ $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât pentru orice $x',x''\in I$ cu $|x'-x''|<\delta_\varepsilon$ sţ avem $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

3.3.2 ***Propoziție:*** Orice funcție uniform continuţ este continuţ. (Reciproca nu este adevţratţ)

3.4 DERIVABILITATEA FUNCĂIILOR DE O VARIABILĂ REALĂ

3.4.1 ***Definiție:*** Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval, $f:I\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in I$. Dacţ existţş i este finitţ

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

vom spune cţ funcția *f* este **derivabilă** în punctul x_0. Vom nota:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

şi o vom numi derivata funcăiei *f* în x_0.

Limitele

$$f_d'(x_0)=\lim_{x\to x_0, x>x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f_s'(x_0)=\lim_{x\to x_0, x<x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

dacă există, se numesc respectiv **derivata la dreapta** şi **derivata la stânga a funcției *f* în punctul** x_0.

3.4.2 ***Propoziție:*** Funcția $f:I\to\mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 dacăă i numai dacă are derivate laterale egale în x_0.

3.4.3 ***Teorema lui Rolle:*** Fie funcția $f:I\to\mathbb{R}$, $a,b\in I, a<b$. Dacă:

i. *f* este continuă pe $[a,b]$.

ii. *f* este derivabilă pe (a,b)

iii. $f(a)=f(b)$

atunci există cel puțin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

3.4.4 ***Teorema lui Lagrange:*** Fie funcția $f : I \to \mathbb{R}$, $a,b \in I, a < b$. Dacă:

i. f este continuă pe $[a,b]$.

ii. f este derivabilă pe (a,b)

atunci există cel puțin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

3.4.5 ***Consecințe:*** Dacă $f'(x) > 0$ (respectiv $f'(x) < 0$) pe intervalul *I*, atunci *f* este crescătoare (respectiv descrescătoare) pe acest interval.

3.4.6 ***Teorema lui Cauchy:*** Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a,b \in I$. Dacă:

i. f ăi *g* sunt continue pe $[a,b]$

ii. f ăi *g* sunt derivabile pe (a,b)

iii. $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a,b)$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

3.4.7 ***Regulile lui l'Hospital :*** *1.* Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$. Dacă:

i. $f(c) = g(c) = 0$

ii. *f* ăi *g* sunt derivabile în *c*

iii. $g'(c) = 0$

atunci $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

2. Fie $f, g : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, unde *c* este un punct de acumulare pentru *I*. Dacă:

i. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$

ii. f ăi *g* sunt derivabile pe $I \setminus \{c\}$

iii. $g'(x) \neq 0$ pentru $x \in I \setminus \{c\}$

iv. $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

atunci $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

3. Fie $f, g : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, unde *c* este un punct de acumulare pentru *I*. Dacă:

i. $\lim\limits_{x \to c} |g(x)| = +\infty$

ii. f ăi *g* sunt derivabile pe $I \setminus \{c\}$

iii. $g'(x) \neq 0$ pentru $x \in I \setminus \{c\}$

iv. $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

atunci $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$

3.4.8 *Observații:* *i.*Fie $f,g: I\setminus\{c\}\to ¡$ astfel încât $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ ăi $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$ ăi $F=f\cdot g$. Dacă vom scrie $F=\dfrac{f}{\frac{1}{g}}=\dfrac{g}{\frac{1}{f}}$ vom obține unul din cazurile în care se poate aplica regula lui l'Hospital (2. sau 3.)

ii. Fie $f,g: I\setminus\{c\}\to ¡$ astfel încât. $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=\pm\infty$ ăi $\Phi=f-g$. Atunci dacă vom scrie $\Phi=f-g=\dfrac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f\cdot g}}$ vom obține unul d $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ in cazurile în care se poate aplica regula lui l'Hospital (2. sau 3.)

iii. Fie $f,g: I\setminus\{c\}\to ¡$ astfel încât

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ ăi sau

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=1$ ăi $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$ sau

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ ăi $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$

ăi $\Psi=f^{g}$, atunci dacă vom scrie $\Psi=f^{g}=e^{g\ln f}$ se obține cazul *i.* prezentat mai sus.

3.5 DIFERENĂIABILITATEA FUNCĂIILOR DE O VARIABILĂ REALĂ

3.5.1 ***Definiție:*** Vom spune că funcția $f: I\to ¡$, unde I este un interval, este **diferențiabilă** în punctul $x_0\in I$ dacă există un număr $A\in ¡$ astfel încât pentru orice $x\in I$ să avem:

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0)$$

unde $\alpha: I\to ¡$ este o funcşie cu proprietatea $\alpha(x_0)=0$ și $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

3.5.2 ***Consecință:*** 1.O funcție $f: I\to ¡$ este diferențiabilş în $x_0\in I$ dacşş i numai dacş este derivabilş în x_0 . Dacş *f* este derivabilş în x_0 , atunci

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0)$$

unde $\alpha: I\to ¡$ este o funcție cu proprietatea $\alpha(x_0)=0$ și $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Pentru valori suficient de apropiate ale lui *x* de x_0 vom putea scrie:

$$f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)(x-x_0),\ x\approx x_0,\ x\in I$$

3.6 PROBLEME REZOLVATE

Folosind definiția limitei unei funcții într-un punct (3.1.3), sş se arate cş:

3.6.1 $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$

Rezolvare: fie $\delta>0$ un numşr real și $x\in ¡$ astfel încât $|x-2|<\delta$. Obținem atunci cş $-\delta<x-2<\delta\Leftrightarrow 2-\delta<x<\delta+2$. Cum însş $|x+2|\le|x|+2$ și $-2-\delta<2-\delta$, avem:

$|x|<2+\delta$ și

$$|x+2| \le |x| + 2 < 4 + \delta$$

Atunci:

$$(*)\ \left|x^2-4\right| = \left|(x-2)(x+2)\right| = |x-2| \cdot |x+2| < \delta(4+\delta)$$

Fie atunci $\varepsilon > 0$ şi $\delta > 0$ astfel încât $\delta(\delta+4) < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{2+\sqrt{4+\varepsilon}}$. Pentru $x \in I, |x-2| < \delta$ în relaţia (*) obţinem : $\left|x^2-4\right| < \varepsilon$. Am obţinut aşadar:

Pentru orice $\varepsilon > 0$ existş $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{2+\sqrt{4+\varepsilon}}$ astfel încât pentru orice $x \in I$, cu $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{2+\sqrt{4+\varepsilon}}$, avem: $\left|x^2-4\right| < \varepsilon$, ceea ce înseamnş conform definiţiei 3.1.3 cş funcţia datş are limita *4* în $x_0 = 2$.

3.6.2 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$

Rezolvare: Vom arşta cş pentru orice $\varepsilon > 0$ existş $\delta_\varepsilon > 0$ astfel înct pentru orice $x > \delta_\varepsilon$ sş avem $\dfrac{1}{x^2+1} < \varepsilon$. Având în vedere cş $x > 0$, inegalitatea $\dfrac{1}{x^2+1} < \varepsilon$ se mai poate scrie:

$$x > \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$$

Atunci luând $\delta_\varepsilon = \sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$, pentru $x > \delta_\varepsilon$ ingalitatea $\dfrac{1}{x^2+1} < \varepsilon$ este realizatş.

3.6.3 Fie $f : ¡^* \to ¡$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ .Sş se arate cş $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Rezolvare: Fie $g, h : ¡^* \to ¡$, $g(x) = \sin(x), h(x) = \dfrac{1}{x}$. Avem: $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ şi $|g(x)| = |\sin(x)| \le 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Atunci conform criteriului 3.1.4, *c*., obţinem cş:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) \cdot h(x) = 0$$

deci $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

3.6.4 Sş se arate cş funcţia $f : (0,\infty) \to ¡$, $f(x) = (1+\sin x)\ln x$ nu tinde cştre ∞ atunci când *x* tinde cştre ∞ .

Rezolvare: Sş presupunem cş funcţia datş tinde cştre ∞ atunci când *x* tinde cştre ∞ . Atunci, conform criteriului 3.1.4,*b*., pentru orice şir $(x_n)_{n\in ¥}$ cu $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ avem $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. Fie atunci şirul $(x_n)_{n\in ¥}, x_n = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$. Evident avem $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot \lim_{n\to\infty} n = \infty$. Atunci $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$, conform criteriului mai sus amintit. Dar:

$$f\left(x_n\right)=\boldsymbol{(1+sin(}\frac{3\pi}{2}+2n\pi\boldsymbol{))}\cdot\boldsymbol{ln(}\frac{3\pi}{2}+2n\pi\boldsymbol{)}=$$
$$=\boldsymbol{(1+sin}\frac{3\pi}{2}\boldsymbol{)}\cdot\boldsymbol{ln(}\frac{3\pi}{2}+2n\pi\boldsymbol{)}=\boldsymbol{(1-1)}\cdot\boldsymbol{ln(}\frac{3\pi}{2}+2n\pi\boldsymbol{)}=0$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=0$, contradicție, deci presupunerea fşcutş este falsş, şi prin urmare funcția datş nu tinde cştre ∞ atunci când *x* tinde cştre ∞.

3.6.5 Sş se arate cş funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=\boldsymbol{sin}\,x$ nu are limitş când *x* tinde cştre ∞.

Rezolvare: Vom arşta cş existş ş irurile $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\lim\limits_{x\to\infty}y_n=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x_n\right)\neq\lim\limits_{x\to\infty}f\left(y_n\right)$. Fie aşadar $x_n=n\pi,\ y_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$. Avem evident

$$\lim_{n\to\infty}n\pi=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\infty$$

Dar $f\left(x_n\right)=\boldsymbol{sin}\left(n\pi\right)=0$ şi $f\left(y_n\right)=\boldsymbol{sin}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(y_n\right)=1$, deci

$$\lim_{x\to\infty}f\left(x_n\right)\neq\lim_{x\to\infty}f\left(y_n\right)$$

ceea ce contrazice criteriul 3.1.4, *b*.

3.6.6 Fie $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-1,1\right\}\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=\frac{x}{x^2-1}$. Are aceastş funcție limitş în punctele *-1* şi *1*?

Rezolvare: O funcție are limitş într-un punct dacşş i numai dacş limitele laterale în acel punct existşş i sunt egale. Sş remarcşm maii întâi cş deşi puuncteele *-1* şi *1* nu aparțin domeniiului de definiție al funcției *f*, ele sunt totuşi punte de acumulare pentru acesta. Vom calcula şadar limitile laterale ale funcției în cele douş puncte. Avem:

$$\lim_{x\to-1,x<-1}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1,x<-1}\frac{x}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\lim_{x\to-1,x<-1}\frac{x}{x-1}\cdot\lim_{x\to-1,x<-1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\infty\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-1,x>-1}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1,x>-1}\frac{x}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\lim_{x\to-1,x>-1}\frac{x}{x-1}\cdot\lim_{x\to-1,x>-1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\cdot\infty=\infty$$

deci funcția nu admite limitş în punctul $x=-1$. Analog:

$$\lim_{x\to1,x<1}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to1,x<1}\frac{x}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\lim_{x\to1,x<1}\frac{x}{x+1}\cdot\lim_{x\to1,x<1}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\infty\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to1,x>1}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to1,x>1}\frac{x}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\lim_{x\to1,x>1}\frac{x}{x+1}\cdot\lim_{x\to1,x>1}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}\cdot\infty=\infty$$

decii funcția datş nu are limitş nici în punctul *x=1*.

3.6.7 Sş se arate cş funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=\boldsymbol{cos}\frac{1}{x}$ nu are limitş în punctul *x=0*, demonstrând cş nu satisface criteriul general al lui Cauchy.

Rezolvare: Vom arşta cş existş $\varepsilon_1>0$ astfel încât pentru orice $\delta>0$ sş existe x_1,x_2, satisfşcând inegalitşş ile $\left|x_1\right|,\left|x_2\right|<\delta$ şi $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\geq\varepsilon_1$.

Fie $\varepsilon_1=2$. Atunci pentru orice $\delta>0$ existş un numşr natural $n\in\mathbb{N}$ astfel încât:

$$x_1=\frac{1}{2n\pi}<\delta,\quad x_2=\frac{1}{\left(2n+1\right)\pi}<\delta$$

pentru cş $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)\pi}=0$

Dar

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|\cos 2n\pi-\cos(2n+1)\pi\right|=2$$

şi deci criteriul genral Cauchy este contrazis; aşadar funcţia datş nu are limitş în punctul $x=0$.

3.6.8 Sş se arate cş funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}$ satisface criteriul general al lui Cauchy în punctul $x=1$.

Rezolvare: Fie $x',x''>0,\quad x',x''\neq 1$. Atunci:

$$(*)\quad \left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\frac{x'}{x'+1}-\frac{x''}{x''+1}\right|=\left|\frac{x'-x''}{(x'+1)(x''+1)}\right|\le\frac{|x'-x''|}{|(x'+1)(x''+1)|}<$$

$$<|x'-x''|=|x'-1+1-x''|\le|x'-1|+|x''-1|$$

Alegem $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ şi x',x'' astfel încât $|x'-1|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |x''-1|<\frac{\varepsilon}{2}$. Atunci în relaţia (*) obţinem:

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<|x'-1|+|x''-1|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ceea ce înseamnş cş funcţia datş satisface criteriul lui Cauchy în puntul $x=1$.

3.6.9 Sş se calculeze:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

Rezolvare: Suntem în cazul exceptat $\infty-\infty$. Avem:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

Cum $x\to\infty$, deci $x>0$, obţinem $|x|=x$ şi deci:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$$

($\frac{1}{x}\to 0$ şi $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\le\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; se aplicş 3.1.4, *c*.).

3.6.10 Sş se calculeze:

$$\lim_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

Rezolvare: Avem:

$$f(x)=x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=x\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

Pentru $x\to\infty$ avem $x>0$ deci $|x|=x$. Atunci:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

Pentru $x\to-\infty$ avem $x<0$ şi deci $|x|=-x$. Atunci:

$$f(x)=x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=x\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\right)=x\left(-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\right)=$$

$$=-x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)$$

Atunci:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}-x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)=-\infty$$

3.6.11 Sş se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$$

Rezolvare: Suntem în cazul exceptat $\frac{0}{0}$. ş inând cont de relaţia:

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

în care luşm $a=\sqrt[n]{1+x}, b=1$, obţinem:

$$\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^n-1^n}{x\left(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\dots+\sqrt[n]{1+x}+1\right)}=$$

$$=\frac{x}{x\left(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\dots+\sqrt[n]{1+x}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\dots+\sqrt[n]{1+x}+1}$$

şi atunci:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\dots+\sqrt[n]{1+x}+1}=\frac{1}{n}$$

3.6.12 Sş se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

Rezolvare: Suntem de asemenea în cazul $\frac{0}{0}$. Atunci:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

şi deci:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$ (vezi 3.1.5,*a*.)

3.6.13 Sş se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{5x}$$

Rezolvare: Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos 4x}{5x}=\frac{2}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 4x=\frac{2}{2}$$

(a se vedea operații cu limite de funcții, 3.1.3)

3.6.14 Sş se calculeze:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}$$

Rezolvare: Deoarece $\lim_{x\to 1}(1-x)=0$ şi $\lim_{x\to 1, x>1}\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}=\infty$, $\lim_{x\to 1, x<1}\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}=-\infty$, suntem în cazul exceptat $o\cdot\infty$. Fie atunci $1-x=u$; atunci pentru $x\to 1$, avem $u\to 0$ şi

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{u\to 0}u\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}(1-u)\right)=\lim_{u\to 0}u\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi u}{2}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}u\right)}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi},$$

unde am aplicat 3.1.5, *a*.

3.6.15 Sş se calculeze:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$$

Rezolvare: Sş observşm mai întâi cş $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-2}=1$, deci suntem în cazul exceptat 1^∞. Avem:

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{x^2}=\left(\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{3}}\right)^{\frac{3x^2}{x^2-2}}$$

Cum:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{3}}=e \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}=3$$

obținem cş:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=e^3$$ (am aplicat 3.1.5,*b*)

3.6.16 Sş se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$$

Rezolvare: Suntem în cazul $\frac{0}{0}$. Avem:

$$\frac{\ln(1+kx)}{x}=\frac{1}{x}\ln(1+kx)=\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}$$

şi atunci:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\ln\left[\left((1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right)^{k}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}k\cdot\ln(1+kx)^{\frac{1}{kx}}=k\cdot\ln\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{kx}}=k\cdot\ln(e)=k$$

3.6.17 Sş se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$$

Rezolvare: Suntem în cazul $\frac{0}{0}$. Notşm $t=e^{2x}-1$, de unde: $e^{2x}=t+1$ sau, logaritmând, $\ln\left(e^{2x}\right)=\ln(t+1)\Leftrightarrow 2x=\ln(t+1)\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln(1+t)$. Observşm cş dacş $x\to 0$, atunci $t\to 0$. Obținem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{3}{2}\ln(1+t)}=\frac{2}{3}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\frac{2}{3}$$

(pentru cş $\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\ln(e)}=1$)

3.6.18 Sş se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x},\quad a>0$$

Rezolvare: Suntem în cazul $\frac{0}{0}$. Notşm $a^{x}-1=t$, de unde:

$$a^{x}=t+1\Leftrightarrow\ln\left(a^{x}\right)=\ln(t+1)\Leftrightarrow x\cdot\ln(a)=\ln(t+1)\Leftrightarrow x=\frac{\ln(t+1)}{\ln(a)}$$

Se observş cş dacş $x\to 0$ atunci $t\to 0$. Obținem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln(a)}}=\ln(a)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=\ln(a)$$

3.6.19 Studiați continuitatea funcției:

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^{2}}}, & \text{daca } x\in ¡ \setminus\{0\}\\ 1, & \text{daca } x=0\end{cases}$$

Rezolvare: Pentru $x\neq 0$, funcția este continuş; vom studia continuitatea funcției numai în punctul $x=0$. Avem:

$$\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty \text{ şi deci } \lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

Cum $\lim\limits_{x\to0} f(x)\neq f(0)$, funcția nu este continuş în punctul $x=0$; acest punct este punct de discontinuitate de spețа întâia.

3.6.29 Studiați continuitatea funcției:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1+x}}}, \text{ daca } x\in ¡ \setminus\{-2\}\\ 0, \text{ daca } x=-2\end{cases}$$

Rezolvare: Funcția este continuş în orice punct $x\neq-2$; în punctul $x=-2$ avem:

$$f(-2+0)=\lim_{x\to-2,\,x>-2}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x+2}}}=\frac{1}{\infty}=0 \text{ , pentru cş } \lim_{x\to-2,\,x>-2}\frac{1}{2+x}=\infty$$

$$f(-2-0)=\lim_{x\to-2,\,x>-2}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x+2}}}=\frac{1}{1}=1 \text{ , pentru cş } \lim_{x\to-2,\,x>-2}\frac{1}{2+x}=-\infty$$

Am obținut aşadar cş limitele laterale ale funcției în punctul $x=-2$ nu sunt egale, de funcția nu este continuş în $x=-2$; deoarece $f(-2+0)=f(-2)=0$, funcția datş este continuş la dreapta în punctul $x=-2$; $x=-2$ este punct de discontinuitate d spețа a doua.

3.6.29 Fie $f(x)=\begin{cases}x+1,\ x\in[0,1]\\ 3ax+3,\ x\in(1,3]\end{cases}$. Sş se determine constanta a astfel încât funcția f sş fie continuş pe intervalul închis $[1,2]$.

Rezolvare: Deoarece funcția f pe intervalele $[1,2)$ şi $(1,2]$ este liniarş, deci continuş, vom studia continuitatea funcției f numai în punctul $x=1$. Condiția de continuitate pentru funcția f în punctul $x=1$ se scrie:

$$(1)\quad f(1)=f(1+0)=f(1-0)$$

Dar:

$$(2)\quad f(1)=1+1=2$$

$$f(1-0)=\lim_{x\to1,\,x<1} f(x)=\lim_{x\to1,\,x<1}(x+1)=2$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1,\,x>1} f(x)=\lim_{x\to1,\,x>1}(3ax+3)=3a+3$$

Din relațiile (1) şi (2) obțținem aşadar cş: $3a+3=2$, deci $a=-\dfrac{1}{3}$.

3.6.22 Sş se studieze continuitaea funcției:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(x^n+1\right),\quad 0\leq x\leq 1$$

Reyolavare: Dacş $x\in[0,1)$, atunci $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^n+1\right)=1+\lim\limits_{n\to\infty}x^n=1$. Dacş $x=1$, atunci $f(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1^n+1\right)=2$. Aşadar funcția este continuş pe intervalul $[0,1)$ şi discontinuş în punctul $x=1$, având o discontinuitate de prima speţş.

3.6.29 Sş se arate funcția $f(x)=x2^x-1$ se anulează într-un punct $\xi\in(0,1)$.

Rezolvare: Avem: $f(0)=-1<0$ și $f(1)=1\cdot 2^1-1=1>0$. Cum funcția *f* este continuş pe intervalul $(0,1)$, *f* are proprietatea lui Darboux pe intervalul $(0,1)$, cu alte cuvinte existş cel puțin un punct $\xi\in(0,1)$ astfel încât $f(\xi)=0$.

3.6.24 Sş se arate cş funcția

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ daca } x\in ¤ \\ -1, \text{ daca } x\in ¡ \setminus ¤ \end{cases}$$

Rezolvare: Fie $x'\in ¤$. Cum mulțimea numerelor iraționale este densş în mulțimea numerelor reale, oricare ar fi o vecinştate *V* a lui *x'*, existş un punct $x''\in ¡ \setminus ¤$ cu $x''\in V$. Am obținut așadar cş pentru orice vecinştate *V* a lui x' existş $x''\in V$ astfel încât $f(x')-f(x'')=1-(-1)=2$, deci *f* nu este continuş în nici un punct $x\in ¤$.

Analog, pentru orice $x'\in ¡ \setminus ¤$, ținând cont cş mulțimea numerelor raționale este densş în mulțimea numerelor reale, *f* nu este continuş în nici un punct $x\in ¡ \setminus ¤$; așadar *f* nu este continuş în nici un punct $x\in ¡$ $\left(¡ = ¤ \cup (¡ \setminus ¤)\right)$.

3.6.25 Sş se studieze continuitatea uniformş pentru funcția: $f(x)=\boldsymbol{sin}\left(x^2\right)$

Rezolvare: Cum funcția sinus este o funcție mşrginitş pe ¡, funcția *f* este de asemenea mşrginitş. De asemenea, fiind compunerea a douş funcții continue, *f* este continuş.

Pentru a studia uniform continuitatea funcției avem:

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ daca } x^2=(4k+1)\dfrac{\pi}{2}, k\in ¥ \\ -1, \text{ daca } x^2=(4k+3)\dfrac{\pi}{2}, k\in ¥ \\ 0, \text{ daca } x^2=k\pi, k\in ¥ \end{cases}$$

Fie $x'=\sqrt{(4k+3)\frac{\pi}{2}}$, $x''=\sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$. Atunci $x'-x''=\dfrac{\pi}{\sqrt{(4k+3)\frac{\pi}{2}}+\sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}}$, și deci pentru valori ale lui *k* suficient de mari, punctele x' și x'' pot fi luate oricât de apropiate. Însş:

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\boldsymbol{sin}(4k+3)\frac{\pi}{2}-\boldsymbol{sin}(4k+1)\frac{\pi}{2}\right|=2$$

Am arştat așadar cş existş $\varepsilon=2$ și punctele x',x'' situate la distanțş oricât de micş astfel încât $\left|f(x')-f(x'')\right|=2$, ceea ce demonstează cş funcția datş nu este uniform continuş pe ¡ (dar este uniform continuş pe orice interval compact din ¡).

3.6.26 Sş se studieze uniform continuitatea funcției $f:[0,\infty)\to ¡$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}+x$

Rezolvare: Se observş cş funcția datş este continuş (fiind suma dintre raportul a douş funcții continue și o funcție continuş) și nemşrginitş pe intervalul considerat (avem: $\boldsymbol{lim}_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}+x=\infty$). Vom arşta cş este uniform continuş pe $[0,\infty)$.

Fie $x_1, x_2 \ge 0$. Avem:

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right| = \left|\frac{x_1}{x_1+1}+x_1-\frac{x_2}{x_2+1}-x_2\right| = \left|(x_1-x_2)+(x_1-x_2)\left(1+\frac{x_2-x_1}{(1+x_1)\cdot(1+x_2)}\right)\right| \le$$

$$\le |x_1-x_2|\left(1+\frac{|x_1-x_2|}{(1+x_1)(1+x_2)}\right) < |x_1-x_2|\left(1+|x_2-x_1|\right)$$

Fie $\varepsilon > 0$ şi $\delta > 0$ astfel încât $\delta(1+\delta) < \varepsilon$. Atunci pentru orice $x_1, x_2 \ge 0$ astfel încât $|x_1-x_2| < \delta$ obţinem, conform relaţiei de mai sus, $|f(x_1)-f(x_2)| < \delta(1+\delta) < \varepsilon$, ceea ce demonstreazş cş funcţia datş este uniform continuş pe $[0,\infty)$.

3.6.27 Sş se studieze derivabilitatea funcţiei $f(x)=\sin(2x^2+1)$ în punctul $x_0 = 2$

Rezolvare: Conform definiţiei, o funcţie este derivabilş într-un punct x_0 dacş existşş i este finitş $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. În cazul de faţş obţinem:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sin(2x^2+1)-\sin(9)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2\cdot\sin\frac{2x^2+1-9}{2}\cdot\cos\frac{2x^2+1+9}{2}}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2\cdot\sin(x^2-4)\cdot\cos(x^2+5)}{x-2} = 2\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}(x+2)\cos(x^2+5) = 8\cos(9)$$

pentru cş $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4} = 1$; aşadar $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ existşş i este finitş, deci funcţia datş este derivabilş în punctul $x_0 = 2$.

3.6.28 Sş se studieze derivabilitatea funcţiei $f(x)=\begin{cases}\ln(1+2x), & -\frac{1}{2}<x<0\\ 2x, & x>0\end{cases}$.

Rezolvare: Pentru $x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$ avem $f'(x)=\left(\ln(1+2x)\right)' = \frac{2}{1+2x}$; pentru $x\in(0,\infty)$ avem $f'(x)=2$. Aşadar f este derivabilş pe $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup(0,\infty)$; pentru a studia derivabilitatea funcţiei în punctul $x=0$ vom folosi proprietatea 3.4.2; derivatele laterale ale funcţiei *f* în $x=0$ sunt:

$$f_d'(0) = \lim_{x\to 0, x>0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0, x>0}\frac{2x-0}{x-0} = \lim_{x\to 0, x>0}\frac{2x}{x} = 2$$

$$f_s'(0) = \lim_{x\to 0, x<0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0, x<0}\frac{\ln(1+2x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0, x<0}\frac{\ln(1+2x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0, x<0}\ln\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{\frac{2x}{x}} = 2$$

Cum derivatele laterale sunt egale, funcţia *f* este derivabilş în $x=0$ şi $f'(0)=2$.

3.6.29 Sş se studieze derivabilitatea funcţiei $f:[0,\pi]\to ¡$, $f(x)=\max\left(\cos(x),\cos^3(x)\right)$.

Rezolvare: Fie $g:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\cos(x)-\cos^3(x)$. Avem:

$$g(x)=\cos(x)\left(1-\cos^2(x)\right)=\cos(x)\sin^2(x)$$

şi deci $g(x)>0\Leftrightarrow\cos(x)>\cos^3(x)$ pentru $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $g(x)\le 0\Leftrightarrow\cos(x)\le\cos^3(x)$ pentru $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, pentru cş $\sin^2(x)\ge 0$ pentru orice x şi $\cos(x)>0$ pentru $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(x)\le 0$ pentru $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Am obținut aşadar cş:

$$f(x)=\begin{cases}\cos(x),\text{daca } 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ \cos^3(x),\text{ daca } \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$$

deci

$$f'(x)=\begin{cases}-\sin(x),0\le x<\frac{\pi}{2},x\ne\frac{\pi}{2}\\ -3\cos^2(x)\sin(x),\frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$$

Pentru $x=\frac{\pi}{2}$ vom stabili derivablitatea funcției f pornind de la propoziţia 3.4.2:

$$f_d'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2},x>\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3(x)-0}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2},x>\frac{\pi}{2}}-\left(\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2=0$$

$$f_s'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2},x<\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)-0}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2},x<\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-1$$

Cum derivatele laterale nu sunt egale , funcția nu este derivabilş în $x=\frac{\pi}{2}$.

3.6.30 Sş se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{x}{1+x^2}<\operatorname{arctg}(x)$$

pentru orice $x\in(0,\infty)$.

Rezolvare: Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg}(x)$. Avem:

$$f'(x)=\frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}-\frac{1}{1+x^2}=-\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}<0$$

pentru orice $x\in(0,\infty)$. Cum derivata funcției este negativş pe $(0,\infty)$, funcția f este descrescştoare pe $(0,\infty)$. Obținem aşadar cş $f(x)<f(0)=0$ pentru orice $x\in(0,\infty)$, de unde $\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg}(x)<0\Leftrightarrow\frac{x}{1+x^2}<\operatorname{arctg}(x)$ pentru orice $x\in(0,\infty)$.

3.6.31 Sş se demonstreze inegalitatea

$$\boldsymbol{tg}(x) > x + \frac{x^3}{3}$$

pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rezolvare: Fie $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to ¡$, $f(x) = \text{tg}(x) - x - \frac{x^3}{3}$. Avem:

$$f'(x) = \frac{1}{\boldsymbol{cos}^2(x)} - 1 - x^2 = \frac{1 - \boldsymbol{cos}^2(x) - x^2\boldsymbol{cos}^2(x)}{\boldsymbol{cos}^2(x)} = \frac{\boldsymbol{sin}^2(x) - x^2\boldsymbol{cos}^2(x)}{\boldsymbol{cos}^2(x)} =$$

$$= \frac{\left(\boldsymbol{sin}(x) + x\boldsymbol{cos}(x)\right)\left(\boldsymbol{sin}(x) - x\boldsymbol{cos}(x)\right)}{\boldsymbol{cos}^2(x)}$$

Fie $g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to ¡$, $g(x) = \boldsymbol{sin}(x) - x\boldsymbol{cos}(x)$. Avem

$g'(x) = \boldsymbol{cos}(x) - \boldsymbol{cos}(x) + x\boldsymbol{sin}(x) = x\boldsymbol{sin}(x) > 0$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci *g* este descrescştoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $g(x) > g(0) = 0$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, de unde $\boldsymbol{sin}(x) - x\boldsymbol{cos}(x) > 0$.

Cum $\boldsymbol{sin}(x) + x\boldsymbol{cos}(x) > 0, \boldsymbol{cos}^2(x) > 0$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem cş $f'(x) > 0$, deci funcția *f* este crescştoare pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci $f(x) > f(0) = 0, (\forall) x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $\text{tg}(x) - x - \frac{x^3}{3} > 0 \Leftrightarrow \text{tg}(x) > x + \frac{x^3}{3}$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

3.6.32 Sş se demonstreze inegalitatea

$$\left|\boldsymbol{sin}(b) - \boldsymbol{sin}(a)\right| \le |b - a|$$

pentru orice $a, b \in ¡$.

Rezolvare: Fie $f : [a, b] \to ¡$, $f(x) = \boldsymbol{sin}(x)$. Cum *f* este continuş pe $[a, b]$ şi derivabilş pe (a, b), din teorema lui Lagrange (3.4.4) obținem existş $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

deci

$$\frac{\boldsymbol{sin}(b) - \boldsymbol{sin}(a)}{b - a} = \boldsymbol{cos}(c)$$

De aici obținem $\left|\boldsymbol{sin}(b) - \boldsymbol{sin}(a)\right| = |b - a| \cdot \left|\boldsymbol{cos}(c)\right| \le |b - a|$ pentru cş $\left|\boldsymbol{cos}(c)\right| \le 1$.

3.6.33 Sş se demonstreze inegalitatea

$$\frac{b - a}{\boldsymbol{cos}^2(a)} \le \boldsymbol{tg}(b) - \boldsymbol{tg}(a) \le \frac{b - a}{\boldsymbol{cos}^2(b)}$$

pentru orice $0 \le a < b < \frac{\pi}{2}$.

Rezolvare: Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathbf{tg}(x)$. Cum *f* este continuş pe $[a,b]$ şi derivabilş pe (a,b), *f* îndeplineşte ipotezele teoremei Lagrange (3.4.4), deci existş $c \in (a,b)$ astfel încât:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{\mathbf{tg}(b)-\mathbf{tg}(a)}{b-a} = \frac{1}{\mathbf{cos}^2(c)}$$

Deoarece funcția $\mathbf{cos}(x)$ este descrescştoare pe intervalul $[a,b] \subset \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, cum $a < c < b$, obținem cş:

$$\mathbf{cos}(a) > \mathbf{cos}(c) > \mathbf{cos}(b) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{cos}^2(a) > \mathbf{cos}^2(c) > \mathbf{cos}^2(b) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{cos}^2(a)} < \frac{1}{\mathbf{cos}^2(c)} < \frac{1}{\mathbf{cos}^2(b)}$$

Dar $\frac{\mathbf{tg}(b)-\mathbf{tg}(a)}{b-a} = \frac{1}{\mathbf{cos}^2(c)}$, deci $\frac{b-a}{\mathbf{cos}^2(a)} \le \mathbf{tg}(b) - \mathbf{tg}(a) \le \frac{b-a}{\mathbf{cos}^2(b)}$

pentru orice $0 \le a < b < \frac{\pi}{2}$.

3.6.34 Sş se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathbf{tg}(x)-x}{x-\mathbf{sin}(x)}$.

Rezolvare: Fie $f,g:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{tg}(x) - x$, $g(x) = x - \mathbf{sin}(x)$. Observşm cş:

i. funcțiile *f* şi *g* sunt derivabile pentru orice $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ şi

$$f'(x) = \frac{1}{\mathbf{cos}^2(x)} - 1, \quad g'(x) = 1 - \mathbf{cos}(x)$$

ii. $g'(x) \ne 0 \quad (\forall) x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

iv.
$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\mathbf{cos}^2(x)}-1}{1-\mathbf{cos}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\mathbf{cos}^2(x)}{\mathbf{cos}^2(x)(1-\mathbf{cos}(x))} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\mathbf{cos}(x))(1+\mathbf{cos}(x))}{\mathbf{cos}^2(x)(1-\mathbf{cos}(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\mathbf{cos}(x)}{\mathbf{cos}^2(x)} = 2$$

Atunci, conform teoremei lui l'Hospital (3.4.7) avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)-x}{x-\mathbf{sin}(x)} = 2.$$

3.6.35 Sş se calculeze: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x - x}{\mathbf{ln}(x) - x + 1}$

Rezolvare: Fie $f,g:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x - x$, $g(x) = \mathbf{ln}(x) - x + 1$. Observşm cş:

i. *f* şi *g* admit derivatede ordinul I şi II pe $(0,\infty)$ şi

$$f'(x)=x^x(\ln(x)+1)-1,\ g'(x)=\frac{1}{x}-1$$

$$f''(x)=x^x(\ln(x)+1)^2+x^{x-1},\ g''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

ii. $g'(x)\neq 0$ şi $g''(x)\neq 0$ pentru orice $x\in(0,\infty)$

iii. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1} g'(x)=0$

iv. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x(\ln(x)+1)^2+x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}}=-2$

Atunci conform teoremei lui l'Hospital (3.4.7) obţinem:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ şi } \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f''(x)}{g''(x)} \text{ de unde } \lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln(x)-x+1}=-2 .$$

3.6.36 Sş se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0,x>0} x^2\ln(x)$

Rezolvare: Fie $f,g:(0,\infty)\to\infty,\ f(x)=x^2,\ g(x)=\ln(x)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0,x>0} f(x)=0$ şi $\lim\limits_{x\to 0,x>0} g(x)=-\infty$, suntem în cazul exceptat $0\cdot\infty$. În aceste condiţii avem:

$$\lim_{x\to 0,x>0} x^2\ln(x)=\lim_{x\to 0,x>0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}}$$

şi ajungem astfel la cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$. Se verificş uşor cş sunt verificate ipotezele teoremei lui l'Hospital (3.4.7), deci obţinem:

$$\lim_{x\to 0,x>0} x^2\ln(x)=\lim_{x\to 0,x>0}\frac{(\ln(x))'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=\lim_{x\to 0,x>0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to 0,x>0}-\frac{x^2}{2}=0$$

3.6.37 Sş se calculeze $\lim\limits_{x\to 0,x>0} x^x$

Rezolvare: Suntem în cazul de excepţie 0^0. În aceste condiţii scriem:

$$\lim_{x\to 0,x>0} x^x=\lim_{x\to 0,x>0} e^{\ln(x^x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0,x>0} x\ln(x)}$$

Dar $\lim\limits_{x\to 0,x>0} x\ln(x)=\lim\limits_{x\to 0,x>0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0,x>0}\frac{(\ln(x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0,x>0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$, deci $\lim\limits_{x\to 0,x>0} e^{x\ln(x)}=e^0=1$

3.6.38 Folosind diferenţiala, sş se calculeze aproximativ valorile:

i. $\arcsin(0,51)$

ii. $\operatorname{arctg}(1,05)$

Rezolvare: i. Fie funcţia $f:[-1,1]\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ f(x)=\arcsin(x)$. Punând $x=0,5,\ \Delta x=0,01$ şi aplicând definiţia diferenţialei unei funcţii (3.5.1) se obţine:

$$\boldsymbol{arcsin}(x+\Delta x)\approx \boldsymbol{arcsin}(x)+(\boldsymbol{arcsin}(x))'\cdot\Delta x$$

sau, în cazul de faţş:

$$\boldsymbol{arcsin}(0{,}51)\approx \boldsymbol{arcsin}(0{,}5)+\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\cdot 0{,}01\approx 0{,}513$$

ii. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\operatorname{arctg}(x)$. Punând $x=1,\ \Delta x=0{,}05$ și aplicând definiția diferențialei unei funcții (3.5.1) se obține:

$$\boldsymbol{arctg}(x+\Delta x)\approx \boldsymbol{arctg}(x)+(\boldsymbol{arctg}(x))'\cdot\Delta x$$

sau, în cazul de faţş:

$$\boldsymbol{arctg}(1{,}05)\approx \boldsymbol{arctg}(1)+\frac{1}{1+1}\cdot 0{,}05\approx 0{,}811$$

3.7 PROBLEME PROPUSE

Folosind definiția limitei unei funcții într-un punct sş se arate cş:

3.7.1 $\boldsymbol{lim}_{x\to 2}\frac{x^2+2x}{3}=\frac{3}{8}$

3.7.2 $\boldsymbol{lim}_{x\to 0}\frac{2x^2+1}{x+3}=\frac{1}{3}$

3.7.3 Sş se arate cş funcția $f(x)=\boldsymbol{cos}(x)$ nu are limitş când $x\to\infty$.

Sş se calculeze urmştoarele limite:

3.7.4 $\boldsymbol{lim}_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+3x+6}-\sqrt{x^2-2x+16}}{x-2}$ R: $\frac{5}{8}$

3.7.5 $\boldsymbol{lim}_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-\sqrt[n]{1-x}}{x}$ R: $\frac{2}{n}$

3.7.6 $\boldsymbol{lim}_{x\to 0}\frac{(1-\boldsymbol{cos}(x))^2}{x^4}$ R: $\frac{1}{4}$

Indicație: $1-\boldsymbol{cos}(x)=2\,\boldsymbol{sin}^2\left(\frac{x}{2}\right)$

3.7.7 $\boldsymbol{lim}_{x\to \pi}\frac{\boldsymbol{sin}(x)}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}$ R: $\frac{\pi}{2}$

Indicație: Se folosește substituția $x=\pi+u$

3.7.8 $\boldsymbol{lim}_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ R: e^2

3.7.9 $\boldsymbol{lim}_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right)^{x}$ R: e^2

3.7.10 $\boldsymbol{lim}_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\,\boldsymbol{tg}(x)-2}{x-\frac{\pi}{4}}$ R: $\boldsymbol{ln}(16)$

Indicație: $2^{tg(x)-1}-1=t$

3.7.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\cos(x)}{x}$

Indicație: Se scrie $\dfrac{e^{2x}-\cos(x)}{x}=\dfrac{e^{2x}-1}{x}+\dfrac{1-\cos(x)}{x}$ şi se calculeazş fiecare limitş în parte R:2

Sş se determine constanta α astfel încât urmştoarele funcții sş fie continue:

3.7.12 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\alpha^2-2\alpha x+x^2}, \text{ daca } 1\le x<2\\ \alpha x+3, \text{ daca } 2\le x\le 3\end{cases}$ R: $\alpha=-\dfrac{1}{3}$

3.7.13 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6\sin(\alpha(x-1))}{x-1}, \text{ daca } 0\le x<1\\ \alpha x+3, \text{ daca } 1\le x\le 2\end{cases}$ R: $\alpha=\dfrac{5}{7}$

Sş se studieze continuitatea urmştoarelor funcții:

3.7.14 $f(x)=\begin{cases}e^x+x-1, x\le 1\\ x^{\frac{1}{x-1}}, x>1\end{cases}$ R: contiunuş

3.7.15 $f(x)=\begin{cases}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}, x\ne 0\\ 1, x=0\end{cases}$ R: discontinuş în $x=0$

3.7.16 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{Q}\\ -x, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ R: continunuş în $x=0$, discontinuş pentru $x\ne 0$

Sş se studieze continuitatea uniformş a funcțiilor:

3.7.17 $f:(0,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x)$ R: nu este uniform continuş

3.7.18 $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$ R: este uniform continuş

3.7.19 $f:\left(0,\dfrac{1}{\pi}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ R: nu este uniform continuş

Fiind dat $\varepsilon>0$, sş se determine δ_ε astfel încât sş fie satisfşcutş condiția de continuitate pentru funcțiile:

3.7.20 $f(x)=\sqrt{2x+3}, x\in[0,2]$

3.7.21 $f(x)=\dfrac{x}{x+2}, x\in[1,\infty)$

Sş se studieze derivabilitatea funcțiilor urmştoare:

3.7.22 $f(x)=\begin{cases}\ln(x^2+3x), 0<x\le 1\\ \dfrac{5}{4}(x-1)+2\ln(2), x>1\end{cases}$ R: funcția este derivabilş pentru orice x

3.7.23 $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2+11}, x\le 4\\ \dfrac{8}{27}x+\dfrac{49}{27}, x>4\end{cases}$ R: funcția este derivabilş pentru orice x

3.7.24 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\left|\ln(x)-1\right|$ — R: funcția nu este derivabilş în $x=e$

3.7.25 $f(x)=\min\left\{x^2+x,4x-2\right\}$ — R: funcția nu este derivabilş în $x=1$ şi $x=2$

Indicație: Se studiazş semnul funcției $g(x)=x^2+x-(4x-2)$

Sş se calculeze derivatele funcțiilor urmştoare:

3.7.26 $f(x)=\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)+\frac{6}{x+1},\ x>-1,\ x\neq 0$ — R: $f'(x)=\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}$

3.7.27 $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}},\ x\neq\pm 1$ — R: $-\frac{4x}{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2\left(1+x^2\right)^4}}$

3.7.28 $f(x)=\frac{1}{3\cos^3(x)}-\frac{1}{\cos(x)},\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ — R: $\frac{\sin^3(x)}{\cos^4(x)}$

Sş se demonstreze inegalitş ile:

3.7.29 $e^x>1+x$ pentru orice $x\neq 0$

3.7.30 $\arcsin(x)>x+\frac{x^3}{6}$ pentru orice $x\in(0,1)$

3.7.31 $\left|\cos(b)-\cos(a)\right|\leq|b-a|$ pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$

3.7.32 $\frac{a-b}{a}\leq\ln\left(\frac{a}{b}\right)\leq\frac{a-b}{b}$ pentru orice $0<b<a$

Folosind teorema lui l'Hospital, sş se calculeze limitele:

3.7.33 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3(x)}{x\sin(2x)}$ — R: $\frac{3}{4}$

3.7.34 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x\sin(x)-\cos(x)}{x^2}$ — R: $\frac{1}{2}$

3.7.35 $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x}}\ln(x)$ — R: 0

3.7.36 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ — R: $-\frac{e}{2}$

3.7.37 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ — R: $e^{\frac{1}{6}}$

Sş se calculeze valorile aproximative pentru:

3.7.38 $tg\left(46^{o}\right)$ — R: $1{,}035$

3.7.39 $\ln(0{,}09)$ — R: $-0{,}1$

CAP. 4 SERI DE FUNCȚII

Fie $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcții, $f_n : E \to \mathbb{R}$

4.1.1 ***Definiție:*** Se numeşte **serie de funcții** o serie de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \dots$$

Pentru orice punct $x_0 \in E$ se poate defini seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x_0\right)$, care poate fi convergentă sau divergentă.

4.1.2 ***Definiție:*** Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se numeşte **convergentă** în punctul $x_0 \in E$ dacă seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x_0\right)$ este convergentă. Mulțimea punctelor $x \in E$ în care seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă se numeşte **mulțime de convergență** a seriei date şi o vom nota cu ***X.***

4.2 CONVERGENȚĂ SIMPLĂ

4.2.1 ***Definiție:*** Fie şirul de funcții $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : E \to \mathbb{R}$ şi $f : E \to \mathbb{R}$. Spunem că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge simplu** către funcția f dacă seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge la $f(x)$ pentru orice $x \in E$. Funcția f se numeşte **suma** seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

4.2.2 ***Propoziție:*** Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este simplu convergentă pe E către f dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $x \in E$ există un număr $N_{\varepsilon,x}$ astfel încât pentru orice $n \ge N_{\varepsilon,x}$ avem:

$$\left|f_1(x) + f_2(x) + \dots f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

pentru orice $x \in E$.

4.3 CONVERGENȚA UNIFORMĂ

4.3.1 ***Definiție:*** Fie şirul de funcții $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : E \to \mathbb{R}$ şi $f : E \to \mathbb{R}$. $f : E \to \mathbb{R}$. Spunem că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge uniform** către funcția f dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr N_ε astfel încât pentru orice $n \ge N_\varepsilon$ avem:

$$\left|f_1(x) + f_2(x) + \dots f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

pentru orice $x \in E$.

Observație: Rezultă de aici că în cazul convergenței uniforme N_ε este independent de punctul $x \in E$, i.e. este același pentru orice $x \in E$.

4.3.2 ***Definiție:*** Se numeşte **rest de rang n** al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ seria

$$R_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \dots + f_{n+p} + \dots$$

Observație: Mulăimea de convergenă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este şi mulăimea de convergenă a se seriei R_n .

4.4 CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII DE FUNCȚII

4.4.1 ***Teoremț :*** Condiăia necesară şi suficientă ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ să fie uniform convergentă (simplu convergentă) pe mulăimea E este ca restul său R_n să fie uniform convergent (respectiv simplu convergent) pe E pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

4.4.2 ***Teoremț :*** Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă (simplu convergentă) pe E către funcăia f dacă şi numai dacă şirul de funcăii $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este uniform convergent (respectiv simplu convergent) către funcăia identic nulă pe E.

4.4.3 ***Criteriu lui Cauchy:*** O serie de funcăii definite pe E este uniform convergentă pe mulăimea E dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural N_ε astfel încât pentru orice $n > N_\varepsilon$ şi $p \geq 1$ şi pentru orice $x \in E$ să avem:

$$\left| f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x) \right| < \varepsilon$$

4.4.4 ***Teoremț :*** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$, cu $\phi_n(x) > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, două serii de funcăii definite pe mulăimea E. Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi pentru orice $x \in E$ avem $\left|f_n(x)\right| \leq \phi_n(x)$ şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$ este uniform convergentă pe E, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe E.

4.4.5 ***Criteriul lui Weierstrass:*** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o serie de funcăii definite pe E şi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie de numere reale pozitive convergentă. Dacă $\left|f_n(x)\right| < a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in E$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convrgentă pe E.

4.4.6 ***Propoziție:*** Fie seriile de funcăii definite pe mulăimea E $\sum_n f_n, \sum_n g_n$ cu sumele f şi respectiv g, având mulăimile de convergenă X_1 şi respectiv X_2 . Atunci:

a. Seria $\sum_n (f_n + g_n)$ este convergentă pe $X_1 \cap X_2$ către funcăia $f + g$

b. pentr $\alpha \in \mathbb{R}$, seria $\sum_n \alpha f_n$ este convergentă pe mulăimea X_1 către funcăia αf

4.5 CONTINUITATEA, DERIVABILITATEA ţI INTEGRABILITATEA SERIILOR UNIFORM CONVERGENTE

4.5.1 ***Teoremţ :*** Fie $\sum_n f_n$ o serie de funcăi definite pe mulămea *E* uniform convergentă pe *E* către funcăa *f*. Dacă toate funcăile f_n sunt continue în punctul $x_0 \in E$ (respectiv pe mulămea *E*), atunci funcăa *f* este continuă în x_0 (respectiv pe mulămea *E*)

4.5.2 ***Teoremţ :*** Fie $\sum_n f_n$ o serie de funcăi definite pe intervalul $[a,b]$, convergentă pe $[a,b]$ către funcăa *f*. Dacă toate funcăile f_n sunt integrabile pe intervalul $[a,b]$, atunci *f* este integrabilă pe intervalul $[a,b]$ şi $\sum_n \int_a^b f_n(x)\,dx$ este convergentă. De asemenea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

4.5.3 ***Teoremţ :*** Dacă $\sum_n f_n$ este o serie de funcăi uniform convergentă pe un interval mărginit *I* către funcăa *f* şi dacă funcăile f_n sunt derivabile pe I iar seria de funcăi $\sum_n f_n{}'$ converge uniform către funcăa g, atunci *f* este derivabilă pe *I* şi $f' = g$.

4.6 EXERCIŢII REZOLVATE

4.6.1 Calculaăi domeniul de convergenă al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$

Rezolvare: Dacă $|x|<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1$; pentru ca o serie de numere reale să conveargă este necesar însă ca şirul termenilor generali să conveargă la *0*, deci seria de funcăi dată nu este convergentă pentru $|x|<1$.

Dacă $|x|=1$, atunci se obăne seria cu termenul general $u_n = \frac{1}{2}$, deci seria de funcăi nu converge nici pentru $|x|=1$, din aceleaşi considerente.

Dacă $|x|>1$, atunci:

$$\frac{1}{1+x^{2n}} < \frac{1}{x^{2n}}$$

iar seria cu termenul general $u_n = \frac{1}{x^{2n}}$ este convergentă pentru $|x|>1$ (este o progresie geometrică cu raăa subunitară), deci conform teoremei 4.4.4, seria dată converge pentru $|x|>1$. Aşadar domeniul de convergenă pentru seria dată este $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

4.6.2 Aplicând criteriu lui Weierstrass să se arate că seria

$$\sin(x) + \frac{1}{2^2}\sin^2(2x) + \frac{1}{3^2}\sin^2(3x) + \dots$$

converge uniform în intervalul $(-\infty,\infty)$.

Rezolvare: Avem: $\left|\frac{1}{n^2}\boldsymbol{sin}^2(nx)\right| \le \frac{1}{n^2}$. Cum seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă, conform criteriului lui Weierstrass (4.4.5) seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\boldsymbol{sin}^2(nx)$ converge uniform pe mulţimea $(-\infty,\infty)$.

4.6.3 Să se determine mulţimea de convergenţă pentru seria de funcţii
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)\right)^n$$

Rezolvare: Se observă că şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are ca domeniu de definiţie mulţimea $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Fie aşadar $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Obţinem seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)\right)^n$. Pentru această serie aplicăm criteriul rădăcinii şi obţinem:

- dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| = \left|\frac{1-x}{1-2x}\right| < 1$ atunci seria numerică este convergentă; rezolvând inecuaţia $\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| < 1$ obţinem $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)$. Aşadar seria de funcţii converge pentru $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)$.
- dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| = \left|\frac{1-x}{1-2x}\right| > 1$ atunci seria numerică este divergentă; aşadar seria de funcţii nu este convergentă pentru $x\in\left(0,\frac{2}{3}\right)\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$
- dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| = \left|\frac{1-x}{1-2x}\right| = 1$, deci pentru $x\in\left\{0,\frac{2}{3}\right\}$ obţinem:
  - dacă $x=0$, se obţine seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, care nu este convergentă, deci seria de funcţii nu converge pentru $x=0$
  - dacă $x=\frac{2}{3}$, se obţine seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, care nu este convergentă pentru că termenul general al seriei nu converge la 0.

Aşadar mulţimea de convergenţă pentru seria dată este $(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)$.

4.6.4 Se poate aplica teorema de integrare (4.5.2) pentru seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\boldsymbol{cos}(nx)$ pe segmentul $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$?

Rezolvare: Se observă că $\left|\frac{1}{2^{n-1}}\cos(nx)\right| \le \frac{1}{2^{n-1}}$. Dar $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ sunt termenii unei progresii geometrice infinit descrescătoare, deci seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ este convergentă, de unde, conform criteriului lui Weierstrass, seria de funcții dată este uniform convergentă pe segmentul $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$. În aceste condiții, ipotezele teoremei de integrare a seriilor de funcții sunt realizate, deci aceasta se poate aplica.

4.4.5 Să se determine mulțimea de convergență pentru seriile de funcții:

a. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$

b. $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(2-x^{\frac{1}{3}}\right)\ldots\left(2-x^{\frac{1}{n}}\right),\quad x>0$

Rezolvare: a. Fie $x\in\mathbb{R}$ și seria numerică cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|f_n(x)\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n)}\cdot\frac{\left|(1-x^2)^n\right|}{(1+x^2)^n}.$$

Vom aplica criteriul raportului acestei serii. Obținem:

- Dacă $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f_{n+1}(x)\right|}{\left|f_n(x)\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|1-x^2\right|}{1+x^2}\cdot\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \frac{\left|1-x^2\right|}{1+x^2} < 1$, atunci seria $\sum_{n=2}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$ este convergegentă; așadar pentru $\frac{\left|1-x^2\right|}{1+x^2} < 1 \Leftrightarrow x\neq 0$ seria $\sum_{n=2}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$ este convergentă, ceea ce înseamnă că seria $\sum_{n=2}^{\infty}f_n(x)$ este absolut convergentă, deci în particular convergentă. Am obținut așadar că seria de funcții dată converge pentru $x\neq 0$.
- Dacă $x=0$ se obține seria numerică $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$, care conform criteriului lui Leibnitz este de asemenea convergentă (este o serie alternată și $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n)}=0$)

În concluzie, domeniul de convergență pentru seria de funcții $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$ este $\mathbb{R}$.

b. Pentru $x=2$ seria este evident convergentă, pentru că toți termenii sunt egali cu 0. Fie $x>0, x\neq 2$ și seria numerică cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(2-x)\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(2-x^{\frac{1}{3}}\right)\ldots\left(2-x^{\frac{1}{n}}\right)\right|$. Să remarcă mai întâi că, deoarece $\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{n}}=1$, există un rang $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $2-x^{\frac{1}{n}}>0$ pentru orice $n\ge n_0$. Aplicăm criteriul Raabe-Duhamel seriei numerice alese. Obținem:

- dacă $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\left|f_n(x)\right|}{\left|f_{n+1}(x)\right|}-1\right)>1$, atunci seria numerică aleasă este convergentă. Dar:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|f_n(x)|}{|f_{n+1}(x)|}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(x^{\frac{1}{n+1}}-1\right)}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}=\ln(x)$$

pentru că $\lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}=\ln(a)$. Așadar, pentru $\ln(x)>1\Leftrightarrow x>e$ seria numerică aleasă este convergentă, de unde seria de funcții dată converge pentru orice $x>e$.

- dacă $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|f_n(x)|}{|f_{n+1}(x)|}-1\right)<1\Leftrightarrow 0<x<e, x\neq 2$ atunci seria numerică aleasă este divergentă. Dar seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ are aceeași natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$, pentru că termenii seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ se obțin din termenii seriei $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ înmulțindu-i eventual cu -1, deci seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ diverge pentru $0<x<e, x\neq 2$

În concluzie, mulțimea de convergență pentru seria de funcții $\sum^{\infty}(2-x)\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(2-x^{\frac{1}{3}}\right)\ldots\left(2-x^{\frac{1}{n}}\right)$ este $(e,\infty)\cup\{2\}$.

4.7 EXERCIȚII PROPUSE

Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de funcții:

4.7.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+x}}$ — R: $\{x\in\mathbb{R}\mid x>1\}$

4.7.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ax)^n}{a^n+x^n},\quad a>0, x>0$ — R: $\begin{cases}x\in(0,1), \text{ daca } a\geq 1\\ x\in(0,\infty), \text{ daca } a\in(0,1)\end{cases}$

4.7.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{7n^2+3n+2}\cdot\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ — R: $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$

4.7.4 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$ — R: $\mathbb{R}$

4.7.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}\sin(nx)$ — R: $\mathbb{R}$

Să se studieze natura convergenței seriilor de funcții pe mulțimile indicate:

4.7.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^x}{1+x+n}-\frac{(n-1)^x}{n+1}\right),\quad x\in[0,1]$ — R: uniform convergentă

4.7.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n+x}-\frac{(n-4)x}{1+(n-1)x}\right),\quad x\in[0,1]$ — R: converge neuniform

CAP.5 SERII DE PUTERI

5.1.1 ***Definiție:*** Se numeşte **serie de puteri** o serie de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ definite pe $\mathbb{R}$, unde fiecare funcţie f_n este de forma $f_n(x) = a_n x^n, a_n \in \mathbb{R}$.

Aşadar o serie de puteri se poate scrie sub forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Observații:

1. Toate rezultatele privind seriile de funcţii sunt valabile şi pentru seriile de puteri
2. Mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri conţine cel puţin un punct, şi anume $x = 0$, deoarece pentru $x = 0$ seria de puteri este convergentă şi are suma a_0.

5.1.2 ***Teorema lui Abel:*** Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ există un număr real $0 \le R \le \infty$ astfel încât:

i. seria este absolut convergentă pe $(-R, R)$

ii. pentru orice *x* cu $|x| > R$ seria este divergentă

iii. pentru orice număr $0 < r < R$ seria este uniform convergentă pe $[-r, r]$.

Numărul *R* se numește **raza de convergență** a seriei.

5.1.3 ***Teoremă:*** Fiind dată seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda$ (finit sau infinit), atunci: raza de convergenţă *R* este:

i. $\frac{1}{\lambda}$, dacă $0 < \lambda < \infty$

ii. 0, dacă $\lambda = \infty$

iii. ∞, dacă $\lambda = 0$

5.1.4 ***Teoremă:*** Fiind dată seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dacă există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ (finit sau infinit), atunci: raza de convergenţă *R* este:

iv. $\frac{1}{\lambda}$, dacă $0 < \lambda < \infty$

v. 0, dacă $\lambda = \infty$

vi. ∞, dacă $\lambda = 0$

5.2 *PROPRIETĂŢI ALE SERIILOR DE PUTERI*

5.2.1 Suma *S* a unei serii de puteri este o funcţie continuă pe intervalul de convergenţă

5.2.2 Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pe $(-R, R)$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ formată cu derivatele termenilor seriei date are acelaşi interval de convergenţă. Dacă f este suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, atunci f este indefinit derivabilă pe intervalul de convergenţă iar derivata sa de ordinul n, $f^{(n)}$, este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul n.

5.2.3 ***Seria Taylor:***

5.2.3.1 ***Definiție:*** Se numeşte **serie Taylor** o serie de funcţii de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, a \in \mathbb{R}$.

Observație: Punând $y = x - a$, se obţine seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Dacă intervalul de convergenţă al acestei serii este $(-R, R)$, atunci $(a-R, a+R)$ va fi intervalul de convergenţă al seriei Taylor.

5.2.3.2 ***Definiție:*** Fie I un interval, $a \in I$ un punct interior lui I şi $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă pe intervalul I. Seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

se numeşte **seria Taylor a funcției *f* în punctul *a***.
Dacă I' este intervalul de convergenţă al acestei serii, vom spune că f este dezvoltabilă în serie Taylor pe I dacă f este suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ pe I'.

5.2.3.3 ***Teoremă:*** Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie Taylor pe intervalul I' dacă şi numai dacă este indefinit derivabilă pe I' şi restul ei de ordin n din formula lui Taylor tinde către 0 atunci când $n \to \infty$ pentru orice $x \in I'$

Observație: Dacă $a = 0$ se obține seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$, numită **seria MacLaurin** a funcției f şi spunem că f este dezvoltabilă în serie de puteri pe I'.

5.3 EXERCIȚII REZOLVATE

5.3.1 Studiați convergența seriei de puteri:

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$$

Rezolvare: Seria dată se mai poate scrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ unde $a_n = \frac{1}{n}$. Calculăm raza de covergență:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

de unde $R=\frac{1}{\lambda}=1$. Conform teoremei lui Abel seria de puteri converge pe $(-1,1)$ ăi diverge pe $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Studiem convergența seriei în capetele intervalului:

- pentru $x=1$ obținem seria arminică $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ care este divergentă
- pentru $x=-1$ obținem seria $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots.$ care este convergentă conform criteriului lui Leibnitz.

  Aăadar, domeniul de convergență al seriei date este $[-1,1)$.

5.3.2 Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x-2)^n$.

Rezolvare: Notăm $t=x-2$. Atunci seria dată devine: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot t^n$. Calculăm raza de convergență cu teorema 5.1.3:

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$$

de unde $R=\frac{1}{\lambda}=1$ .Aăadar seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot t^n$ converge pentru $t\in(-1,1)$ ăi diverge pentru $t\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; revenind la notația făcută, obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x-2)^n$ converge pentru $x\in(1,3)$ ăi diverge pentru $x\in(-\infty,1)\cup(3,\infty)$.

Pentru $x=1$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, care este convergentă (seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha>1$).

Pentru $x=3$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$, serie care este de asemenea convergentă, conform criteriului lui Leibnitz.

În concluzie, domeniul de convergență pentru seria dată este $[1,3]$.

5.3.3 Să se determine mulțimea de convergențăă i suma următoarelor serii de puteri:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Rezolvare: a. Pentru această serie de puteri avem $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$; din teorema 5.1.3 obținem că:

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

deci raza de convergență este egală cu $R=\frac{1}{\lambda}=1$. Obținem aăadar că seria de puteri converge pentru $x\in(-1,1)$ ăi diverge pentru $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Pentru $x=1$ se obține seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, care este convergentă conform criteriului lui Leibnitz. Pentru $x=-1$ se obține seria numerică $(-1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, serie divergentă. Aăadar domeniul de convergență pentru seria dată este $(-1,1]$.

Conform 5.2.2, dacă f este suma seriei de funcții, atunci pentru $x\in(-1,1)$:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot\frac{x^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x}$$

De aici, integrând, obținem:

$$f(x)=\int\frac{1}{1+x}dx=\ln(x)+C$$

Cum $f(0)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{1+n}\frac{0}{n}=0$, obținem că $C=o$, deci $f(x)=\ln(x+1)$ pentru orice $x\in(-1,1)$.

Cum seria de funcții este convergentăă i în punctul $x=1$ iar conform teoremei lui Abel (5.1.2) suma unei serii de puteri este continuă pe domeniul de convergență, obținem:

$$f(1)=\lim_{x\to1,x<1}f(x)=\lim_{x\to1,x<1}\ln(1+x)=\ln(2).$$

Observație: Pentru $x=1$ am obținut suma seriei armonice alternate: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\ln(2)$

b. Să observăm mai întâi că seria dată se mai poate scrie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot(x^2)^n$ ăi atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ este convergentă dacăă i numai dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot(x^2)^n$ este convergentă. Notăm $x^2=t$. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot(x^2)^n$ devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot t^n$. Raza de convergență a acestei serii de puteri este, conform 5.2.2:

$$R=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=1,$$

de unde obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot t^n$ converge pentru $t\in(-1,1)$ ăi diverge pentru $t\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Revenind la notația făcută obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot(x^2)^n$ converge pentru $x^2\in(-1,1)$, deci pentru $x\in(-1,1)$, ăi diverge pentru $x^2\in ¡ \setminus(-1,1)$, deci pentru $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. De aici obține că seria dată converge pentru $x\in(-1,1)$ ăi diverge pentru $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Pentru $x=1$ respectiv $x=-1$ se obțin serii numerice alternate care verifică criteriul lui Leibnitz, deci sunt convergente.

În concluzie, domeniul de convergență al seriei date este intervalul $[-1,1]$.

Fie f suma seriei date. Derivând această serie termen cu termen obținem:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot(2n+1)x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

pentru orice $x\in(-1,1)$ (am obținut suma unei progresii geometrice de rație x^2).
Integrând rezultă:

$$f(x)=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\boldsymbol{arctg}(x)+C$$

pentru orice $x\in(-1,1)$. Cum $f(0)=0$, obținem că $C=0$.

Din continuitatea lui f în punctele $x=-1$ ăi respectiv $x=1$, obținem că $f(-1)=\lim_{x\to-1}\boldsymbol{arctg}(x)=-\frac{\pi}{4}$

respectiv $f(1)=\lim_{x\to1}\boldsymbol{arctg}(x)=\frac{\pi}{4}$.

Observație: Pentru $x=1$ am stabilit ăi suma seriei numerice $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$

5.3.4 Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcții, precizându-se ăi domeniul pe care este valabilă dezvoltarea:

a. $f(x)=e^x$

b. $f(x)=\boldsymbol{sin}(x)$

c. $f(x)=(1+x)^{\alpha},\alpha\in$ ¡

Rezolvare: Să remarcăm mai întâi că funcțiile date sunt funcții indefinit derivabile pe ¡ .

a. Avem

$\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$ pentru orice $x\in$ ¡ , deci $e^{(n)}(0)=e^0=1$

deci obținem dezvoltarea:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

Pentru a determina raza de convergență obținem:

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

de unde, conform teoremei 5.1.3, obținem că $R=\infty$, deci domeniul de convergență este $(-\infty,\infty)$.

b. Avem

$$\boldsymbol{sin}'(x)=\boldsymbol{cos}(x)=\boldsymbol{sin}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{sin}''(x)=\boldsymbol{sin}'\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{sin}\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

...

$$\boldsymbol{sin}^{(n)}(x)=\boldsymbol{sin}\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

de unde

$$\sin^{2n}(0) = \sin\left(2n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin(n\pi) = 0$$

$$\sin^{(4n+1)}(0) = \sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\sin^{(4n+3)}(0) = \sin\left((4n+3)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

Obținem aăadar dezvoltarea:

$$\sin(x) = \sin(0) + \frac{\sin'(0)}{1!}x + \frac{\sin^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin^{(3)}(x)}{3!}x^3 + \ldots =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

ăi în cazul acestei serii domeniul de convergență este $(-\infty, \infty)$.

c. Remarcăm că pentru orice $\alpha \in ¡$ avem:

$$\left((1+x)^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

de unde se obține dezvoltarea:

$$(1+x)^{\alpha} = (1+x)^{\alpha}\Big|_{x=0} + \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}\Big|_{x=0}}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}\Big|_{x=0}}{2!}x^2 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Pentru a determina raza de convergență a acestei mulțimi avem:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1} = 1$$

pentru $\alpha \in ¡ \setminus ¢$, de unde raza de convergență este $R = \frac{1}{\lambda} = 1$, deci domeniul de convergență este intervalul $(-1,1)$.

5.3.5. Să se arate că seriile următoare sunt dezvoltabile în serie de puteri ăi să se găsească această dezvoltare, stabilindu-se ăi intervalul pe care este valabilă dezvoltarea:

a. $f:(-1,1) \to ¡,\ f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

b. $f: ¡ \setminus \{-2,-3\} \to ¡,\ f(x) = \frac{3x}{x^2+5x+6}$

Rezolvare: a. Avem: $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} = (1-x^2)^{-1}$ pentru orice $x \in (-1,1)$. Cum f' este o funcție binomială, f' este indefinit derivabilăă i deci f este indefinit derivabilă în orice punct $x \in (-1,1)$. Atunci conform 5.2.2.3, funcția f este dezvoltabilă în serie Taylor pe intervalul $(-1,1)$.

Înlocuind în dezvoltarea funcției binomiale:

$$g(x) = (1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

pe x cu $-t^2$ ăi pe α cu -1 obținem:

$$\frac{1}{1-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}$$

pentru orice $t\in(-1,1)$, care prin integrare termen cu termen pe intervalul $[0,x]$, cu $0<x<1$, conduce la:

$$\int_o^x\frac{1}{1-t^2}dt=\int_o^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\right)dt$$

de unde, pentru orice $x\in(-1,1)$:

$$\boldsymbol{ln}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

b. Avem $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+5x+6}=\dfrac{9}{x+3}-\dfrac{6}{x+2}$

Folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcției binomiale obținem:

$$\frac{9}{x+3}=3\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}=3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^n}\ \text{ pentru orice } x\in(-3,3) \text{ ăi}$$

$$-\frac{6}{x+2}=-3\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}=-3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}\ \text{ pentru orice } x\in(-2,2)$$

Adunând cele două dezvoltări obținem aăadar că:

$$f(x)=3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)x^n\ \text{ pentru orice } x\in(-2,2)\ .$$

5.3.6 Să se dezvolte în serie de puteri funcția $f(x)=2^x$.

Rezolvare: Calculăm valorile funcției ăi ale derivatelor sale pentru $x=0$:

$$f(x)=2^x,\ f(0)=1$$

$$f'(x)=2^x\boldsymbol{ln}(2),\ f'(0)=\boldsymbol{ln}(2)$$

$$f''(x)=2^x\boldsymbol{ln}^2(2),\ f'(0)=\boldsymbol{ln}^2(2)$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x)=2^x\boldsymbol{ln}^n(2),\ f^{(n)}(0)=\boldsymbol{ln}^n(2)$$

Se observă că $0<\boldsymbol{ln}(2)<1$ ăi inegalitatea $\left|f^{(n)}(x)\right|<2^x$ este aăadar verificată pentru orice $x\in$ ¡ . În consecință, funcția poate fi dezvoltată în serie Taylor în punctul $x=0$ ăi se obține:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots$$

ăi deci:

$$2^x=1+x\boldsymbol{ln}(2)+\frac{x^2\boldsymbol{ln}^2(2)}{2!}+\frac{x^3\boldsymbol{ln}^3(x)}{3!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{ln}^n(2)}{n!}x^n$$

pentru orice $x\in$ ¡ .

5.3.7 Să se dezvolte în serie de puteri funcția $f(x)=e^{-x^2}$.

Rezolvare: În dezvoltarea în serie a funcției

$$g(x)=e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

pentru orice $x\in$ ¡ , înlocuim pe *x* cu $-x^2$ ăi se obține:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5.3.8 Să se calculeze $\sqrt{e}$ cu aproximarea $\varepsilon=10^{-5}$.

Rezolvare: Pentru funcția $f(x)=e^x$ avem dezvoltarea în serie de puteri

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

deci pentru $x=\frac{1}{2}$ obținem:

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{1!\cdot 2}+\frac{1}{2!2^2}+\dots+\frac{1}{n!\cdot 2^n}+\dots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\cdot 2^n}$$

Restul de ordin n pentru seria $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ este:

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n!\,x^k}{(n+k)!}<\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(n+1)^k}=\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{\frac{x}{n+1}}{1-\frac{x}{n+1}}$$

(unde am ținut cont că $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(n+1)^k}$ este suma unei progresii geometrice de rație $\frac{x}{n+1}$), deci:

$$R_n(x)<\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{x}{n+1-x}$$

Punând $x=\frac{1}{2}$ se obține:

$$R_n\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{n!2^n}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{n!2^n}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

Trebuie să determinăm valoarea lui $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $R_n\left(\frac{1}{2}\right)<\varepsilon=10^{-5}$. Se observă că $R_6<10^{-5}$ ăi $R_5>10^{-5}$, deci valoarea căutată este $n=6$. Aăadar obținem:

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{1!\cdot 2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\frac{1}{3!\cdot 2^3}+\frac{1}{4!\cdot 2^4}+\frac{1}{5!\cdot 2^5}+\frac{1}{6!\cdot 2^6}=1{,}64872$$

5.4 EXERCIȚII PROPUSE

Să se determine mulțimea de cinvergență pentru următoarele serii de puteri:

5.4.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-2)^n\right)x^n$ R: $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

5.4.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$ R: $(-3,3)$

5.4.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n$ R: $(-\infty,\infty)$

5.4.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots\cdot(4n-3)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots\cdot(4n-1)}x^n$ R: $[-1,1)$

Să se determine domeniul de convergență și suma seriilor de puteri:

5.4.5 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2x^n$ R: $(-1,1)$ $\frac{1-x}{(1+x)^3}$

5.4.6 $\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n$ R: $(-1,1)$ $\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

Să se dezvolte în serie de puteri funcțiile:

5.4.7 $f(x)=3^x$ R: $1+\ln(3)x+\frac{\ln^2(3)}{2!}x^2+\frac{\ln^3(3)}{3!}x^3+\ldots,\ x\in\mathbb{R}$

5.4.8 $f(x)=\cos^2(x)$ R: $1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6$

5.4.9 $f(x)=\sqrt{x+a},\quad a>0$

Indicație: $f(x)=\sqrt{a}\cdot\sqrt{1+\frac{x}{a}}=\sqrt{a}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$

Să se calculeze cu eroarea indicată:

5.4.10 $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ cu eroarea $\varepsilon=10^{-5}$ R: $0,81873$

5.4.11 $\cos(18^o)$ cu eroarea $\varepsilon=10^{-4}$ R: $0,9511$

5.4.12 $\ln(1,04)$ cu eroarea $\varepsilon=10^{-4}$ R: $0,0392$

CAPITOLUL 6: FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

Fie mulțimea $E \subset \mathbb{R}^n$ și $f : E \to \mathbb{R}$ o funcție definită pe E cu valori în $\mathbb{R}$. Argumentul funcției este un vector din $\mathbb{R}^n$. Spunem că f este o **funcție reală de variabilă vectorială**.

O variabilă reală x din $\mathbb{R}^n$ este echivalentă cu n variabile reale $x_1, x_2, ..., x_n$ (care sunt **coordonatele** vectorului x).

Valorile funcției se notează cu $f(x)$ sau $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, iar funcția se numește funcție reală de n variabile reale.

6.1 CONTINUITATEA FUNCȚIILOR DE MAI MULTE VARIABILE REALE

Fie $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in E$ un punct de acumulare pentru mulțimea E.

6.1.1.1 ***Definiție:*** Spunem că numărul l (finit sau infinit) este limita funcției f în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate U a lui l există o vecinătate V a lui x_0, $V \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât pentru orice $x \in V, x \neq x_0$ să avem $f(x) \in U$.

Vom scrie:

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Propozițiile următoare dau definiții echivalente ale limitei:

6.1.1.2 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ dacă și numai dacă pentru orice șir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset E, x_k \neq x_0$ care converge la x_0 se obține că $f(x_k) \to l$

6.1.1.3 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ dacă și numai dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E, x \neq x_0$ cu $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Observație: Pentru o funcție de două variabile, $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pentru limita sa în punctul (x_0, y_0) vom folosi notația $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ și o numim limita funcției f când (x, y) tinde către (x_0, y_0) .

În acest caz, definiția echivalentă 6.1.1.3 se scrie:

6.1.1.3' $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ dacă și numai dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $(x, y) \in E, (x, y) \neq (x_0, y_0)$ cu $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_\varepsilon$ să avem $|f(x, y) - l| < \varepsilon$.

De remarcat de asemenea că toate proprietățile funcțiilor de o variabilă reală care nu implică relația de ordine și produsul se păstrează.

6.1.2 LIMITE ITERATE

Fie $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Din această funcție putem obține funcții reale de o singură variabilă reală, funcții pe care le vom numi **funcții parțiale**:

$$f_k : x_k \to f(x_1, x_2, ..., x_n), k = 1, 2, ..., n$$

Se pot de asemenea considera limitele acestor funcții de o variabilă:

$$\lim_{x_k \to a_k} f(x_k) = \lim_{x_k \to a_k} f(x_1, x_2, \dots, x_n),\ k = 1, 2, \dots, n$$

unde a_k este un punct de acumulare al mulțimii $E_k = \{x_i \mid x_i \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E\}$. Limita funcției parțiale f_k este un număr real care depinde de celelalte $n-1$ variabile reale diferite de x_k.

Limita $\lim_{x_{\sigma(1)} \to a_{\sigma(1)}} \lim_{x_{\sigma(2)} \to a_{\sigma(2)}} \dots \lim_{x_{\sigma(n)} \to a_{\sigma(n)}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, unde σ este o permutare a mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$, se numeşte **limita iterată** a funcției f în punctul $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Pentru o funcție de două variabile se pot considera limitele iterate:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right),\quad \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right)$$

6.1.2.1 ***Propoziție:*** Dacă există limita unei funcţii într-un punct şi una din limitele iterate, atunci acestea sunt egale.

6.1.3 ***Definiție:*** Fie $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in E$ un punct de acumulare pentru mulţimea *E*. Spunem că funcţia *f* este continuă în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât pentru orice $x \in V \cap E$ să avem $f(x) \in U$.

Următoarele propoziţii dau definiţii echivalente ale continuităţii:

6.1.4 Funcţia f este continuă în punctul x_0 dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ acre converge la x_0 avem $f(x_k) \to f(x_0)$.

6.1.5 Funcţia f este continuă în punctul x_0 dacă şi numai dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E$ cu $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$ să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

6.1.6 Funcţia f este continuă în punctul $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ dacă şi numai dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ cu $|x_k - x_k^0| < \delta_\varepsilon, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ să avem $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)| < \varepsilon$.

6.2 DERIVATE PARȚIALE. DIFERENȚIALE

6.2.1 ***Definiție:*** Se numeşte **derivata parțială** a unei funcții $u = f(x, y)$ în raport cu variabila independentş *x* în punctul (x, y) numşrul real

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

calculatş pentru *y* constant.

Se numeşte derivata parțialş a unei funcții $u = f(x, y)$ în raport cu variabila independentş *x* în punctul (x, y) numşrul real

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

calculatş pentru *x* constant.

Se mai noteazş: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x'(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y'(x, y)$

Regulile şi formulele de derivare ordinare sunt valabile şi pentru calculul derivatelor parțiale.

6.2.2 ***Definiție:*** Se numeşte **creştere totală** a unei funcții $u = f(x, y)$ în punctul (x, y) diferența:

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

unde Δx şi Δy sunt creşterile arbitrare date variabilelor independente ale funcției.

6.2.3 ***Definiție:*** Funcția $u = f(x, y)$ se numeşte **diferențiabilă** în punctul (x, y) dacă în acest punct creşterea totală poate fi scrisă sub forma:

$$\Delta u = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \theta(\rho)$$

unde $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ iar funcşia θ este o funcşie continuă în 0 şi $\theta(0) = 0$.

Se numeşte **diferențiala totală** a funcşiei $u = f(x, y)$ partea principală a creşterii totale Δu , această parte fiind liniară în raport cu creşterile date variabilelor independente x şi y , i.e. $du = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$

6.2.4 ***Teoremă:*** Dacă funcşia $u = f(x, y)$ admite derivate parşiale în punctul (x, y) continue în (x, y) , atunci u este diferenşiabilă în (x, y) şi avem:

$$du(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dy$$

6.2.5 ***Definiție:*** Se numesc **derivate parțiale de ordinul 2** ale funcției $u = f(x, y)$ derivatele parțiale ale derivatelor parțiale de ordinul 1.
Avem următoarele derivate parțiale de ordinul 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y)$$

Observație: În mod analog se definesc derivatele parțiale de ordin mai mare decât 2.

6.2.6 ***Teorema lui Schwarz:*** Dacş funcția $u = f(x, y)$ este continuşş i admite derivate parțiale în punctul (x, y) , continue în (x, y) , atunci:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

(nu conteazş ordinea de derivare).

6.2.7 Se numeşte **diferențială de ordinul 2** a funcției $u = f(x, y)$ diferențiala diferențialei totale, i.e.:

$$d^2u = d(du)$$

În mod analog se defineşte diferențiala de ordin n, $d^n u = d\left(d^{n-1}u\right)$

6.2.8 ***Teoremă:*** Dacă funcția $u = f(x, y)$ admite derivate parțiale de ordinul 2 în punctul (x, y) continue în (x, y) , atunci:

$$d^2u(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2$$

În general, dacă funcția $u = f(x, y)$ admite derivate parțiale de ordinul n în punctul (x, y) continue în (x, y) atunci se poate scrie simbolic:

$$d^n u(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)^n$$

care formal se dezvoltă urmând legea binomului lui Newton.

6.3 FORMULA LUI TAYLOR

Fie $f(x,y)$ o funcție reală de două variabile independente definită pe mulțimea $E \subset \mathbb{R}^2$ ți (a,b) un punct interior mulțimii *E*. Dacă funcția *f* este diferențiabilă de n ori în punctul (a,b), atunci:

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b) \right)\left(f(a,b) \right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b) \right)^2 \left(f(a,b) \right) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b) \right)^n \left(f(a,b) \right) + R_n(x,y)$$

relație care se numește **formula lui Taylor** de ordinul n corespunzătoare funcției $f(x,y)$ în punctul (a,b). Funcția $R_n(x,y)$ definită pe *E* se numește **restul de ordinul n** al formulei lui Taylor.

Observație: Dacă în loc de punctul (a,b) se ia punctul $(0,0)$, formula de mai sus se numește **formula lui MacLaurin.**

6.4 DERIVAREA FUNCĂIILOR COMPUSE

6.4.1 ***PropoziĂe:*** Fie $u = f(x,y)$ unde $x = \phi(t),\ y = \psi(t)$ astfel încât funcțiile $f(x,y), \phi(t), \psi(t)$ sunt derivabile. Atunci derivata funcției compuse $u = f(\phi(t), \psi(t))$ se calculează după formula:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

6.4.2 ***PropoziĂe:*** Fie $u = f(x,y)$ unde $y = \phi(x)$ astfel încât funcțiile $f(x,y), \phi(x)$ sunt derivabile. Atunci derivata funcției compuse $u = f(x, \phi(x))$ în raport cu *x* se calculează după formula:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

6.4.3 ***PropoziĂe:*** Fie $u = f(x,y)$ unde $x = \phi(\xi,\eta),\ y = \psi(\xi,\eta)$ astfel încât funcțiile $f(x,y), \phi(\xi,\eta), \psi(\xi,\eta)$ sunt derivabile. Atunci derivatele parțiale ale funcției compuse $u = f(\phi(\xi,\eta), \psi(\xi,\eta))$ se calculează după formula:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

6.5 DERIVAREA FUNCĂIILOR IMPLICITE

6.5.1 ***Teorema de derivare a funcĂilor implicite 1:*** Fie funcția implicită $y = y(x)$ dată prin ecuația $F(x, y) = 0$, unde $F(x, y)$ este o funcție diferențiabilă de variabile *x* ți *y*. Atunci:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}$$

cu condiția $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$

Observație: Derivata de ordin superior a unei funcții implicite se calculează derivând succesiv în relația dată mai sus ți cosiderând pe *y* ca fiind o funcție de *x*.

6.5.2 ***Teorema de derivare a funcĂilor implicite 2:*** Fie funcția implicită de două variabile $z = \phi(x, y)$ dată prin ecuația $F(x, y, z) = 0$, unde $F(x, y, z)$ este o funcție diferențiabilă de variabile *x* , *y* ți *z*. Atunci:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

cu condiția $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

6.6 EXTRMELE FUNCĂIILOR DE DOUĂ VARIABILE

Fie $f : E \subset ¡^2 \to ¡$ o funcție de două variabile care admite derivate parțiale de ordinul 2 pe întreg domeiul de definiție. Atunci:

6.6.1 ***Teoremă:*** Condiția necesară ca un punct $(x_0, y_0) \in E$ să fie punct de extrem local pentru funcția *f* este ca deriavatele ei parțiale să se anuleze în (x_0, y_0) , i.e.:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Observație: Punctele în care derivatele parțiale se anulează se numesc **puncte staționare**.

6.6.2 ***Teoremă:*** Condiția suficientş ca un punct staționar (x_0, y_0) sş fie punct de extrem este ca:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2 > 0$$

Dacş $\Delta > 0$, atunci:

- dacş $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, (x_0, y_0) este punct de minim local
- dacş $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, (x_0, y_0) este punct de maxim local

Dacş $\Delta < 0$, atunci (x_0, y_0) nu este punct de extrem. Dacş $\Delta = 0$ nu se poate preciza prin aceastş teoremş dacş (x_0, y_0) este sau nu punct de extrem.

6.7 EXTREME CU LEGĂTURI

6.7.1 ***Definiție:*** Se numește **extreme cu legătură** al unei funcții $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ supus la legătura $F(x,y)=0$ un punct de extrem al funcției f cu condiția ca variabilele x ăi y să verifice ecuația legăturii $F(x,y)=0$.

6.7.2 Pentru a afla punctele de extrem supuse la legături se procedează astfel:
- se construieăte **funcția Lagrange**:

  $L(x,y,\lambda)= f(x,y)+\lambda\cdot F(x,y)$

λ se numeăte **multiplicator Lagrange**.
- se determină punctele staționare pentru funcția Lagrange
- pentru a afla cea mai mare ăi cea mai mică valoare într-un domeniu închis trebuie ca:
  a. să se determine punctele staționare situate în domeniu ăi valoarea funcției în aceste puncte
  b. să se determine cele mai mari ăi cele mai mici valori ale funcției pe liniile ce formează frontiera domeniului
  c. să se aleagă cea mai mare ăi cea mai mică valoare din toate valorile găsite.

6.8 EXERCIȚII REZOLVATE

6.8.1 Folosind definiția limitei unei funcții într-un punct (6.1.1.1-6.1.1.3) să se arate că:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}(4x+2y)=8$$

Rezolvare: Conform definiției trebuie să demonstrăm că pentru orice $\varepsilon>0$ există un număr real $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât dacă $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta_\varepsilon$ să avem $|4x+2y-8|<\varepsilon$.

Să remarcăm mai întâi că $|x-1|<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$, $|y-2|<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$ .Avem:

$$(*)\quad |4x+2y-8|=|4x-4+2y-4|<|4x-4|+|2y-4|=4\cdot|x-1|+2\cdot|y-2|$$

Fie atunci $\varepsilon>0$ ăi $\delta_\varepsilon=6\varepsilon$. Atunci, conform observației de mai sus avem:

$$|x-1|<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{6}$$

$$|y-2|<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta_e=\frac{\varepsilon}{6}$$

ăi înlocuind în relația $(*)$ obținem:

$$|4x+2y-8|<\frac{4\varepsilon}{6}+\frac{2\varepsilon}{6}=\varepsilon$$

6.8.2 Să se calculeze limitele iterate:

a. $\displaystyle\lim_{x\to3,y\to\infty}\frac{xy-1}{y+1}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to2,y\to0}\frac{\sin(xy)}{y}$

Rezolvare: a. Avem: $\displaystyle\lim_{x\to3,y\to\infty}\frac{xy-1}{y+1}=\lim_{x\to3}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{xy-1}{y+1}\right)=\lim_{x\to3}x=3$

b. Avem: $\lim\limits_{x\to 2, y\to 0}\dfrac{\sin(xy)}{y}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x\cdot\sin(xy)}{xy}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\right)=\lim\limits_{x\to 2}x=2$

6.8.3 Să se calculeze $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{ax+by}{cx+dy}$ atunci când $(x,y)\to(0,0)$ pe prima bisectoare.

Rezolvare: Ecuația primei bisectoare este $d: y=x$. Atunci limita dată devine:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ax+by}{cx+dy}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+bx}{cx+dx}=\frac{a+b}{c+d}$$

6.8.4 Să se studieze continuitatea funcției:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{daca } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{daca } x^2+y^2=0\end{cases}$$

în punctul $(0,0)$.

Rezolvare: Avem $f(x,0)=0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, deci $\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=0=f(0,0)$, deci f este continuă în origine în raport cu variabila *x*. De asemenea avem: $f(0,y)=0$ pentru orice $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, deci $\lim\limits_{x\to 0}f(0,y)=0=f(0,0)$, deci f este continuă în origine în raport cu variabila *y*.

Dar funția dată nu este continuă în origine în raport cu ansamblul variabilelor, deoarece nu are limită în acest punct. Într-adevăr, pentru $x\neq 0$, avem:

$$f(x,y)=\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Fie dreapta de ecuație $d: y=mx, m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ care trece prin origine, cu coeficientul unghiular *m*. Obținem:

$$\lim_{x\to 0, y=mx}\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{mx}{x}}{1+\left(\frac{mx}{x}\right)^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

ăi deci limitele depind de dreapta pe care tinde punctul (x,y) către $(0,0)$, ceea ce înseamnă că funcția dată nu are limită în origine, de unde obăinem că f nu este continuă în origine.

6.8.5 Să se calculeze $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ ăi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1)$ pornind de la definiție pentru funcția $f(x,y)=\sqrt{x+y}$.

Rezolvare: Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x,1)-f(1,1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-2}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Pentru derivata de ordinul 2 avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(1,1)=\lim_{y\to 1}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}{y-1}$$

Trebuie aăadar calculat: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,y)$. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,y)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x,y)-f(1,y)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{1+y}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{1+y}\right)\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{1+y}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{1+y}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+y-1-y}{(x-1)\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{1+y}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{1+y}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{1+y}}=\frac{1}{2\sqrt{1+y}}$$

de unde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1)=\lim_{y\to 1}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+y}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{y-1}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{y\to 1}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+y}}{(y-1)\sqrt{1+y}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{y\to 1}\frac{-1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+y}\right)\sqrt{1+y}}=\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

6.8.6 Să se calculeze: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y),\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ pentru funcțiile:

a. $f(x,y)=\boldsymbol{ln}\left(x+y^2-1\right)$

b. $f(x,y)=\boldsymbol{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$

Rezolvare: a.Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{x+y^2-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y}{x+y^2-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y^2-1}\right)=\frac{-2y}{\left(x+y^2-1\right)^2}$$

b. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-\frac{1}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=-\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right)=\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

6.8.7 Fie $f(x,y)=\boldsymbol{sin}(x)\boldsymbol{sin}(y)$. Să se calculeze $df(x,y)$.

Rezolvare: Avem:

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy$$

unde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\boldsymbol{cos}(x)\boldsymbol{sin}(y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\boldsymbol{sin}(x)\boldsymbol{cos}(y)$.

deci

$$df(x,y)=\boldsymbol{cos}(x)\boldsymbol{sin}(y)\,dx+\boldsymbol{sin}(x)\boldsymbol{cos}(y)\,dy$$

6.8.8 Fie $f(x,y)=x^2y$. Să se calculeze $d^3f(x,y)$.

Rezolvare: Avem

$$d^3f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy\right)^3=$$

$$=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)\,dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x\partial y}(x,y)\,dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial^2 y\partial x}(x,y)\,dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)\,dy^3$$

unde:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)=2,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)=0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)=0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)=0$$

deci:

$$df(x,y)=6\,dx^2dy$$

6.8.9 Să se scrie dezvoltarea polinomului

$$P(x,y)=x^2y-2xy+2x^2-4x+y+2$$

după puterile lui $(x-1)$ ăi $(y+2)$.

Rezolvare: Folosim formula lui Taylor (6.3.1) pentru funcții de două variabile. Avem:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)=2xy-2y+4x-4,\quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=x^2-2x+1$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y)=2y+4,\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y)=0,\ \frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(x,y)=2x-1$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}(x,y)=0,\ \frac{\partial^3 P}{\partial x^2\partial y}(x,y)=2,\ \frac{\partial^3 P}{\partial x\partial y^2}(x,y)=0,\ \frac{\partial^3 P}{\partial y^3}(x,y)=0$$

ăi deci derivatele parțiale în punctul $(1,-2)$ sunt:

$$P(1,-2)=0,\quad \frac{\partial P}{\partial x}(1,-2)=0,\quad \frac{\partial P}{\partial y}(1,-2)=0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(1,-2)=0,\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(1,-2)=0,\ \frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(1,-2)=1$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}(1,-2)=0,\ \frac{\partial^3 P}{\partial x^2\partial y}(1,-2)=2,\ \frac{\partial^3 P}{\partial x\partial y^2}(1,-2)=0,\ \frac{\partial^3 P}{\partial y^3}(1,-2)=0$$

ăi atunci:

$$P(x,y)=(x-1)^2(y+2)$$

6.8.10 Să se scrie derivatele după puterile lui x ăi y ale funcției

$$f(x,y)=e^{\boldsymbol{sin}(ax+by)}$$

până la termenii de gradul 2 inclusiv.

Rezolvare: Vom folosi formula lui MacLaurin. Pentru aceasta trebuie să calculăm valorile funcției ăi ale derivatelor parțiale de ordinul 1 ăi 2 în punctul $(0,0)$. Avem:

$$f(0,0)=e^{\boldsymbol{sin}(0)}=e^0=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_{(0,0)}=a\,\boldsymbol{cos}(ax+by)e^{\boldsymbol{sin}(ax+by)}\Big|_{(0,0)}=a\,\boldsymbol{cos}(0)e^{\boldsymbol{sin}(0)}=a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|_{(0,0)}=b\,\boldsymbol{cos}(ax+by)e^{\boldsymbol{sin}(ax+by)}\Big|_{(0,0)}=b\,\boldsymbol{cos}(0)e^{\boldsymbol{sin}(0)}=b$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=a^2e^{\boldsymbol{sin}(ax+by)}\left(\left(\boldsymbol{cos}^2(ax+by)\right)-\boldsymbol{sin}(ax+by)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=b^2e^{\boldsymbol{sin}(ax+by)}\left(\left(\boldsymbol{cos}^2(ax+by)\right)-\boldsymbol{sin}(ax+by)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=abe^{\boldsymbol{sin}(ax+by)}\left(\left(\boldsymbol{cos}^2(ax+by)\right)-\boldsymbol{sin}(ax+by)\right)$$

de unde:

$$e^{\boldsymbol{sin}(ax+by)}=1+ax+by+\frac{1}{2\boldsymbol{!}}\left(a^2x^2+2abxy+b^2y^2\right)\left(\left(\boldsymbol{cos}^2(ax+by)\right)-\boldsymbol{sin}(ax+by)\right)e^{\boldsymbol{sin}(ax+by)}$$

6.8.11 Fie funcția $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ unde $x=a\,\boldsymbol{cos}(t),\ y=a\,\boldsymbol{sin}(t)$. Să se calculeze $\frac{df}{dt}$.

Rezolvare: Conform 6.4.1 avem:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xe^{x^2+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2ye^{x^2+y^2}$$

$$\frac{dx}{dt}(t)=-a\,\boldsymbol{sin}(t),\ \frac{dy}{dt}(t)=a\,\boldsymbol{cos}(t)$$

deci:

$$\frac{df}{dt}(t)=-2xe^{x^2+y^2}\cdot a\,\boldsymbol{sin}(t)+2ye^{x^2+y^2}\cdot a\,\boldsymbol{cos}(t)$$

unde înlocuind $x=a\,\boldsymbol{cos}(t),\ y=a\,\boldsymbol{sin}(t)$ obținem:

$$\frac{df}{dt}(t)=-2a\,\boldsymbol{cos}(t)e^{a^2}\cdot a\,\boldsymbol{sin}(t)+2a\,\boldsymbol{sin}(t)e^{a^2}\cdot a\,\boldsymbol{cos}(t)=0$$

6.8.12 Fie $f(x,y)=\boldsymbol{ln}\left(x^2-y^2\right)$ unde $y=x^2$. Să se calculeze: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{df}{dx}(x)$.

Rezolvare: Conform 6.4.2 avem:

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{x^2-y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{2y}{x^2y^2},\ \frac{dy}{dx}(x)=e^x$$

de unde:

$$\frac{df}{dx}(x)=\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{2ye^x}{x^2-y^2}=\frac{2\left(x-ye^x\right)}{x^2-y^2}$$

6.8.13 Fie $f(x,y)=x^2+y^2$ unde $x=\xi+\eta,\ y=\xi-\eta$. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi,\eta),\ \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi,\eta)$.

Rezolvare: Din 6.4.3 avem:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

unde:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta)=1,\ \frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi,\eta)=1,\ \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi,\eta)=1,\ \frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta)=1$$

de unde:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi,\eta)=2x+2y=2(\xi+\eta)+2(\xi-\eta)=4\xi$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi,\eta)=2x-2y=2(\xi+\eta)-2(\xi-\eta)=4\eta$$

6.8.14 Fie $f(x,y)=\boldsymbol{ln}\left(x^2+y^2\right)$ unde $x=\xi\eta,\ y=\frac{\xi}{\eta}$. Să se calculeze:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(\xi,\eta),\ \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}(\xi,\eta),\ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}(\xi,\eta)\ .$$

Rezolvare: Derivând relaţiile obţinute la 6.4.3 obţinem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}=\frac{\partial f}{\partial \eta}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}$$

Avem:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta)=\eta,\ \frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi,\eta)=\xi,\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}(\xi,\eta)=0,\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}(\xi,\eta)=0,\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi\partial \eta}(\xi,\eta)=1$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi,\eta)=\frac{1}{\eta},\ \frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta)=\frac{-\xi}{\eta^2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}(\xi,\eta)=0,\ \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(\xi,\eta)=\frac{2\xi}{\eta^3},\ \frac{\partial^2 y}{\partial \xi\partial \eta}(\xi,\eta)=-\frac{1}{\eta^2}$$

ăi deci:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(\xi,\eta)=\eta^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(\xi,\eta)=\xi\eta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\xi}{\eta^3}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}=\xi^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{2\xi^2}{\eta^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\xi^2}{\eta^4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{2\xi}{\eta^3}\frac{\partial f}{\partial y}$$

6.8.15 Fie $\boldsymbol{cos}(x+y)+y=0$. Să se calculeze y' .

Rezolvare: Folosim teorema de derivare a funcțiilor implicite (6.5.1):

$$y'=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

unde $F(x,y)=\boldsymbol{cos}(x+y)+y$. Avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=-\boldsymbol{sin}(x+y),\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=-\boldsymbol{sin}(x+y)+1$$

ăi deci :

$$y'=-\frac{-\boldsymbol{sin}(x+y)}{-\boldsymbol{sin}(x+y)+1}=\frac{\boldsymbol{sin}(x+y)}{1-\boldsymbol{sin}(x+y)}.$$

6.8.16 Fie $y-\boldsymbol{sin}(y)=x$. Să se calculeze y' ăi y'' .

Rezolvare: Folosim terema de derivare a funcțiilor implicite pentru $F(x,y)=y-\boldsymbol{sin}(y)-x$. Avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=-1,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=1-\boldsymbol{cos}(y)=2\,\boldsymbol{sin}^2\left(\frac{y}{2}\right)$$

de unde $y'=-\dfrac{-1}{2\,\boldsymbol{sin}^2\left(\frac{y}{2}\right)}=\dfrac{1}{2\,\boldsymbol{sin}^2\left(\frac{y}{2}\right)}$

Pentru a calcula y'' derivăm relația obținută anterior:

$$y''=\frac{1}{2}\frac{-2\,\boldsymbol{sin}\left(\frac{y}{2}\right)\boldsymbol{cos}\left(\frac{y}{2}\right)\frac{y'}{2}}{\boldsymbol{sin}^4\left(\frac{y}{2}\right)}=-\frac{y'}{2}\frac{\boldsymbol{cos}\left(\frac{y}{2}\right)}{\boldsymbol{sin}^3\left(\frac{y}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{2\,\boldsymbol{sin}^2\left(\frac{y}{2}\right)}\frac{\boldsymbol{cos}\left(\frac{y}{2}\right)}{\boldsymbol{sin}^3\left(\frac{y}{2}\right)}=-\frac{1}{4}\frac{\boldsymbol{cos}\left(\frac{y}{2}\right)}{\boldsymbol{sin}^5\left(\frac{y}{2}\right)}$$

6.8.17 Fie $z^3-3xyz=a^3$. Să se calculeze $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Rezolvare: Fie $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$. Folosim teorema de derivare a funcțiilor implicite 6.5.2. Avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=-3xy,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=-3xz,\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=3z^2-3xy$$

Atunci:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{yz}{z^2-xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{xz}{z^2-xy}$$

6.8.18 Fie $xyz=x+y+z$. Să se calculeze dz .

Rezolvare: Avem: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$. Aplicăm teorema de derivare a funcțiilor implicite; avem:

$$F(x,y,z)=xyz-x-y-z$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=yz-1,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=xz-1,\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=xy-1$$

de unde:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(yz-1)}{xy-1},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(xz-1)}{xy-1}$$

Prin urmare:

$$dz=\frac{1-yz}{xy-1}dx+\frac{1-xz}{xy-1}dy$$

6.8.19 Să se calculeze derivatele y' ăi z' ale funcțiilor implicite *y,z* definite prin sistemele următoare:

a. $$\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x^2+y^2+z^2-2x-10=0 \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} x^2-y^2+z^2-1=0 \\ y^2+z-2x=0 \end{cases}$$

Rezolvare: Se derivează̦ inând cont că y ăi z sunt funcții de x ăi se obține:

$$\begin{cases} 1+y'+z'=0 \\ 2x+2yy'+2zz'-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'+z'=-1 \\ yy'+zz'=1-x \end{cases}$$

Rezolvând sistemul în raport cu y' ăi z' se obține:

$$y'=\frac{x-1-z}{z-y},\quad z'=\frac{1-x-y}{z-y}$$

b. Se procedează în mod analog:

$$\begin{cases} 2x-2yy'+2zz'=0 \\ 2yy'+z'-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yy'-zz'=x \\ 2yy'+z'=2 \end{cases}$$

de unde rezultă:

$$y'=\frac{2z+x}{y(2z+1)},\quad z'=\frac{2(1-x)}{2z+1}$$

6.8.20 Să se calculeze punctele de extrem locall pentru funcția:

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$$

Rezolvare: Pentru început vom determina punctele staționare ale funcției. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y-3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+2y-6$$

Aăadar punctele staționare sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$$

deci mulțimea punctelor staționare este $S=\{(0,3)\}$.

Pentru a stabili dacă punctul staționar $(0,3)$ este punct de extrem calculăm derivatele parțiale de ordinul 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2$$

ăi deci:

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,3)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,3)\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,3)\right)^2=3>0$$

deci $(0,3)$ este punct de extrem local, ăi anume de minim, pentru că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,3)>0$.

6.8.21 Să se calculeze punctele de extrem locall pentru funcția:

$$f(x,y)=\frac{1}{2}xy+(47-x-y)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)$$

Rezolvare: Pentru început vom determina punctele staționare ale funcției. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}$$

Aăadar punctele staționare sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{12}y-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{47}{3}=0 \\ -\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{12}x+\dfrac{47}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+y=188 \\ x+6y=141 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=21 \\ y=20 \end{cases}$$

deci mulțimea punctelor staționare este $S=\{(21,20)\}$.

Pentru a stabili dacă punctul staționar $(0,3)$ este punct de extrem calculăm derivatele parțiale de ordinul 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\frac{2}{3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-\frac{1}{12},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-\frac{1}{2}$$

ăi deci:

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(21,20)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(21,20)\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(21,20)\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{144}>0$$

deci $(0,3)$ este punct de extrem local, ăi anume de maxim, pentru că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(21,20)<0$.

6.8.22 Să se afle extremul funcției $f(x,y)=xy$ cu condiția $2x+3y-5=0$.

Rezolvare: Construim mai întâi funcția Lagrange, unde legătura este $F(x,y)=2x+3y-5=0$. Avem:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot F(x,y)=xy+\lambda(2x+3y-5)$$

Determinăm punctele staționare pentru funcția Lagrange. Avem:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=y+2\lambda,\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=x+3\lambda,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=2x+3y-5$$

ăi deci punctele staționare sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+2\lambda=0\\ x+3\lambda=0\\ 2x+3y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{4}\\ y=\frac{5}{6}\\ \lambda=-\frac{5}{12}\end{cases}$$

Am obținut aăadar un singur punct staționar, $\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6},-\frac{5}{12}\right)$

Diferențiind legătura obținem:

$$dF(x,y)=2dx+3dy$$

Punem condiția:

$$dF\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)=0\Leftrightarrow 2dx+3dy=0\Leftrightarrow dy=-\frac{2}{3}dx$$

Calculăm diferențiala de ordinul 2 pentru funcția Lagrange pentru $\lambda=-\frac{5}{12}$. Avem:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\left(x,y,-\frac{5}{12}\right)=0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(x,y,-\frac{5}{12}\right)=0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}\left(x,y,-\frac{5}{12}\right)=1$$

de unde $d^2L\left(x,y,-\frac{5}{12}\right)=1dxdy$. Atunci:

$$d^2L\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6},-\frac{5}{12}\right)=1dxdy$$

ăi înlocuind $dy=-\frac{2}{3}dx$, obținem: $d^2L\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6},-\frac{5}{12}\right)=1dx\left(-\frac{2}{3}dx\right)=-\frac{2}{3}d^2x$, de unde tragem concluzia că punctul $\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)$ este punct de minim ($-\frac{2}{3}<0$).

6.9 EXERCIȚII PROPUSE

Folosind definiția limitei unel funcții într-un punct (6.1.1.1) să se demonstreze că:

6.9.1 $\lim\limits_{x\to 2, y\to 2}\frac{x}{y}=1$

6.9.2 $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0,\quad |x|+|y|\neq 0$

Să se studieze continuitatea funcțiilor:

6.9.3 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-\cos\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}, & \text{daca } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{daca } x^2+y^2=0\end{cases}$

6.9.4 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, \text{ daca } x^2+y^2\neq 0\\ 0, \text{ daca } x^2+y^2=0\end{cases}$

Să se calculeze derivatele parțiale indicate pentru funcțiile:

6.9.5 $f(x,y)=x^2+2y^2-3xy-4x+2y+5$

Calculați $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

R: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-3y-4$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y-3x+2$

6.9.6 $r(\theta,\rho)=\rho^2 \boldsymbol{sin}^4(\theta)$

Calculați $\dfrac{\partial r}{\partial \theta}(\theta,\rho), \dfrac{\partial r}{\partial \rho}(\theta,\rho)$

R: $\dfrac{\partial r}{\partial \theta}(\theta,\rho)=4\rho^2 \boldsymbol{sin}^3(\theta)\boldsymbol{cos}(\theta)$

$\dfrac{\partial r}{\partial \rho}(\theta,\rho)=2\rho \boldsymbol{sin}^4(\theta)$

6.9.7 $f(x,y,z)=2y\sqrt{x}+3y^2\sqrt[3]{z^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$

R: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\dfrac{y}{\sqrt{x}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2\sqrt{x}+6y\sqrt[3]{z^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\dfrac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}$

6.9.8 Să se calculeze diferențialele totale pentru funcțiile:

a. $u(x,y)=\boldsymbol{ln}(x^2+y^2)$

R: $du(x,y)=\dfrac{2x}{x^2+y^2}dx+\dfrac{2y}{x^2+y^2}dy$

b. $u(x,y)=\boldsymbol{ln}\left(\boldsymbol{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$

R: $du(x,y)=\dfrac{2}{x\,\boldsymbol{sin}\left(\dfrac{2y}{x}\right)}dy-\dfrac{2y}{x^2\,\boldsymbol{sin}\left(\dfrac{2y}{x}\right)}dx$

c. $u(x,y)=x^y$

R: $du(x,y)=\dfrac{yx^y}{x}dx+\boldsymbol{ln}(x)x^y dy$

6.9.9 Să se calculeze derivatele parțiale indicate pentru funcțiile:

a. $f(x,y)=4x^3+3x^2y+3xy^2-y^3$

Calculați $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$

R: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=6(x+y)$

b. $f(x,y)=xy+\boldsymbol{sin}(x+y)$

Calculați $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$.

R: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\boldsymbol{sin}(x+y)$

c. $f(x,y)=x^2\boldsymbol{ln}(x+y)$

Calculați: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$.

R: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{x^2+2xy}{(x+y)^2}$

d. $f(x,y)=\boldsymbol{sin}(x+\boldsymbol{cos}(y))$

Calculați $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)$.

R: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)=\boldsymbol{sin}(y)\boldsymbol{cos}(x+\boldsymbol{cos}(y))$

6.9.10 Calculați diferențiala de ordinul 2 pentru funcțiile:

a. $u(x,y)=\boldsymbol{cos}(x+y)$ R: $d^2u(x,y)=-cox(x+y)d^2x-2cox(x+y)dxdy-$
$-cox(x+y)d^2y$

b. $u(x,y)=x^2+y^2-xy-2x+y+7$ R: $d^2u(x,y)=2dx^2-2dxdy+2dy^2$

6.9.11 Calculați derivatele funcțiilor compuse:

a. $u=\frac{1}{2}\boldsymbol{ln}\left(\frac{x}{y}\right)$ unde $x=\boldsymbol{tg}^2(t),\ y=\boldsymbol{ctg}^2(t)$. Calculați $\frac{du}{dt}$. R: $\frac{du}{dt}(t)=\frac{4}{\boldsymbol{sin}(2t)}$

b. $z=\frac{x^2-y}{x^2+y}$ unde $y=3x+1$. Calculați $\frac{dz}{dx}$. R: $\frac{dz}{dx}(x)=\frac{2x(3x+2)}{\left(x^2+3x+1\right)^2}$

c. $u(x,y)=x^2y$ unde $y=\boldsymbol{cos}(x)$. Calculați $\frac{\partial u}{\partial x}$ ăi $\frac{du}{dx}$. R: $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\boldsymbol{cos}(x)$
$\frac{du}{dx}=x(2\boldsymbol{cos}(x)-x\boldsymbol{sin}(x))$

d. $u(x,y)=x^2+y^2$ unde $x=\xi+\eta,\ y=\xi-\eta$. Calculați $\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}$. R: $\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,\eta)=4\xi$
$\frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi,\eta)=4\eta$

6.9.12 Calculați derivatele funcțiilor implicite:

a. $\left(x^2+y^2-bx\right)^2-a^2\left(x^2+y^2\right)=0$.
Se cere y' în punctul $M(b,0)$. R: $y'=\frac{a^2-b^2}{2b^2-a^2}$

b. $3\boldsymbol{sin}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)-2\boldsymbol{cos}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)+1=0$.
Se cere y' . R: $y'=\frac{y}{2x}$

c. $x+y-e^{x+y}=0$.
Se cere y', y'' . R: $y'=-1,\ y''=0$

d. $x+y+z=e^z$.
Se cere $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$. R: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1}$

e. $x=x\boldsymbol{ln}\left(\frac{z}{y}\right)$.
Se cere dz . R: $dz=\frac{dx+\frac{z}{y}dy}{1+\boldsymbol{ln}\left(\frac{z}{y}\right)}$

6.9.13 Determinați punctele de extrem local pentru funcțiile:

a. $f(x,y)=xy^2(1-x-y)$ R: $\frac{1}{4}$, punct de maxim

b. $f(x,y)=x^3+y^3-15xy$ R: -125 , punct de minim

c. $f(x,y)=y-\left(x^2+y^2\right)^{\frac{2}{3}}$ R: 4 , punct de maxim

6.9.14 Determinați punctele de extrem cu legături pentru funcțiile:

a. $f(x,y)=x^2+y^2$ cu legătura $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ R: $\left(\frac{36}{25},\frac{48}{25}\right)$ punct de minim

b. $f(x,y)=x^2-xy+y^2-yx^2$ cu legătura $2x+3y-12=0$

6.9.15 Să se scrie plinomul lui Taylor de gradul al treilea în punctul $(1,1)$ pentru funcția $f(x,y)=x^y,\ x>0, y>0$

R: $T_3(x,y)=1+\frac{1}{1!}(x-1)+\frac{1}{2!}2(x-1)(y-1)+\frac{1}{3!}3(x-1)^2(y-1)$.

6.9.16 Să se dezvolte polinomul:

$$P(x,y)=2x^3-3x^2y+2y^3+9x^2-3y+6x+3$$

după puterile lui $(x+1)$ ăi $(y-1)$.

R: $P(x,y)=2(x+1)^3-3(x+1)^2(y-1)+2(y-1)^3+6(x+1)(y-1)+6(y-1)^2$

6.9.17 Să se calculeze $z'(x)$ ăi $y'(x)$ dacă:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x-9=0 \\ x^3-y^3+z^3-3z=0 \end{cases}$$

în punctul $A(3,3,-\sqrt{3})$

R: $y'=\frac{9\sqrt{3}+2}{3(3\sqrt{3}-2)},\quad z'=\frac{12}{3\sqrt{3}-2}$

CAP.7 EXERCIȚII SUPLIMENTARE

7.1 Să se arate că următoarele ăiruri sunt convergente:

a. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{sin}\left(\frac{\pi}{n+k}\right)$

b. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \boldsymbol{ln}(n)$

c. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{4^k}$

d. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

e. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k}\right)$

f. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{log}_{\frac{1}{2}} \frac{k^2+2k}{(k+1)^2}$

g. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{n^3+k}$

7.2 Să se calculeze următoarele limite de ăiruri:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-3)^n + 2^n}{(-3)^{n+1} + 2^{n+1}}$ R: $-\frac{1}{3}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}, \alpha > 0$ R: $\frac{1}{2}$, daca $\alpha = 1$; 0, daca $\alpha \neq 1$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1} - 2\sqrt{n^2-n+1}}{n}$ R: -1

d. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}\right)$ R: $\frac{2}{3}$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2 \sqrt[k]{k}}{n(n+1)(n+2)}$ R: $\frac{1}{3}$

f. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{ln}(n)}{n^k}$ R: 0

g. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ R: x

h. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ dacă $x_n > 0$ ăi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ R: x

i. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ R: e

j. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot (n!)}$ R: 1

k. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}}{n}$ R: $\dfrac{4}{e}$

7.3 Folosind criteriul general de convergență al lui Cauchy, să se stabilească natura ăirurilor:

a. $a_n=\dfrac{10}{1}+\dfrac{11}{3}+\dfrac{12}{5}+\ldots+\dfrac{10+n}{2n+1}$ R: divergent

b. $a_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$ R: convergent

c. $a_n=\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$ R: convergent

7.4 Să se stabilească natura următoarelor serii:

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{10^n+1}$ R: convergentă

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ R: divergentă

c. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ R: convergentă

d. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}$ R: divergentă

e. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}$ R: divergentă

f. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)$ R: divergentă

g. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^n+5}{(3n+7)^n}$ R: convergentă

h. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$ R: divergentă

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10}{100\sqrt[3]{n}-13}$ R: divergentă

j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ R: convergentă

k. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ R: convergentă

l. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ R: convergentă

m. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n+7}{5^n+n}$ R: convergentă

n. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\left(\dfrac{a}{e}\right)^n$, $a>0$ R: convergentă, dacă $a<e$
Divergentă, dacă $a\ge e$

o. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ R: convergentă

p. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n$ R: convergentă, dacă $a<c$
Divergentă, dacă $a \geq c$

q. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{(n+1)(n+x)}-n\right), x \geq 0$ R: convergentă, dacă $x<1$
Divergentă, dacă $x \geq 1$

r. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ R: convergentă

s. $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n, \alpha>0$ R: convergentă, dacă $\alpha<1$
Divergentă, dacă $\alpha \geq 1$

t. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\ln(n)}, \alpha>0$ R: convergentă, dacă $\alpha<e^{-1}$
Divergentă, dacă $\alpha \geq e^{-1}$

u. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ R: convergentă

v. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-\left(\lambda \ln(n)+\ln^2(n)\right)}, 0<a<1$ R: convergentă, dacă $a^{\lambda}>e$
Divergentă, dacă $a^{\lambda} \leq e$

7.5 Să se stabilească natura următoarelor serii alternate:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ R: absolut convergentă

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ R: absolut convergentă

c. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$ R: divergentă

d. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ R: semiconvergentă

e. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$ R: semiconvergentă

7.6 Să se determine domeniul de convergență al seriilor de puteri:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$ R: $[-2,2)$

b. $1+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+n+1}\left(\frac{x^2-2}{1-2x^2}\right)^n$ R: $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ R: $[-1,1]$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ R: $(-1,1]$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{x+3}\right)^{n}$ R: $[-1,3)$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2n}$ R: $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{n}$ R: $(-\infty,0)$

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^{n}(x-5)^{n}}$ R: $\left(-\infty,\frac{14}{3}\right)\cup\left(\frac{15}{3},\infty\right)$

7.7 Să se determine mulțimea de convergențăă i suma seriilor de puteri:

a. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ R: $[-1,1]$, $S=\boldsymbol{arctg}(x)$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$ R: $(-1,1)$, $S=\frac{2}{(1-x)^{3}}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^{n}}{n}$ R: $(-1,1)$, $S=\boldsymbol{ln}(1+x)$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{3}x^{n}$ R: $(-1,1)$, $S=\frac{x^{3}+4x^{2}+x}{(1-x)^{4}}$

e. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3)x^{n}$ R: $(-1,1)$, $S=\frac{6}{(1-x)^{4}}$

f. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n}(n+1)^{2}x^{n}$ R: $(-1,1)$, $S=\frac{1-x}{(1+x)^{3}}$

7.8 Să se demnstreze că următoarele serii numerice sunt convergente ăi să se calculeze suma lor cu ajutorul seriilor de puteri:

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$ R: $\frac{\pi}{8}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)}$ R: $\frac{\pi}{2}-\boldsymbol{ln}(2)$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!-n!}$ R: 1

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+3)!}$ R: $\frac{11}{2}-2e$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2}}{n!}$ R: $2e$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}$ R: $2e$

7.9 Să se dezvolte în serie Taylor după puterile lui x funcțiile:

a. $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}+2\cos(x)}{4}$ R: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$

b. $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x)+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ R: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},\ x\in(-1,1)$

c. $f(x)=\frac{x}{x^{2}+9}$ R: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}},\ x\in(-3,3)$

d. $f(x)=\frac{5-2x}{6-5x+x^{2}}$ R: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n}}+\frac{1}{3^{n}}\right)x^{n-1},\ x\in(-2,2)$

e. $f(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ R: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in(-1,1)$

f. $f(x)=\sin^{3}(x)$ R: $f(x)=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1-3^{2n}}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ x\in\mathbb{R}$

g. $f(x)=\arcsin(x)$ R: $f(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((2n-1)!)!}{((2n)!)!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1,1]$

7.10 Să se calculeze limitele:

a. $\lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$ R: e

b. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-e^{-\frac{x^{2}}{2}}}{x^{4}}$ R: $-\frac{1}{12}$

c. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{x^{2}}$ R: 4

d. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}\sin(x)-x(1+x)}{x^{3}}$ R $\frac{1}{3}$

e. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-\sin(2x)+2x^{2}}{x^{3}}$ R: 4

f. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^{3}}$ R: $\frac{1}{2}$

g. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-x-1}{1-4x-e^{-4x}}$ R: $\frac{1}{8}$

h. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+2\sin(x)+\ln(1-x)-1}{x(\ln(1+x)-x)}$ R: $\frac{5}{3}$

i. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+\sin(2x)+2x^{2}}{2x+e^{-x}-e^{x}}$ R: 12

j. $\lim_{x\to\infty}\left(x-x^{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$ R: $\frac{1}{2}$

k. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$ R: $\frac{1}{3}$

7.11 Să se studieze continuitatea în origine a următoarelor funcții:

a. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-\cos\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}, \text{daca } x^2+y^2\neq 0\\ 0, \text{daca } x^2+y^2=0\end{cases}$ R: continuă

b. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, \text{daca } x^2+y^2\neq 0\\ 0, \text{daca } x^2+y^2=0\end{cases}$ R: nu este continuă

c. $f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, (x,y)\neq(0,0)\\ 1, (x,y)=(0,0)\end{cases}$ R: continuă

7.12 Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul 1 pentru funcțiile:

a. $f(x,y)=(1+xy)^y, 1+xy>0$

R: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y^2(1+xy)^{y-1}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(1+xy)^y\ln(1+xy)+xy(1+xy)^{y-1}$

b. $f(x,y)=x^{\ln(y)}, x>0, y>0$

R: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x^{\ln(y)-1}\ln(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{y}x^{\ln(y)}\ln(x)$

c. $f(x,y)=\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}+\arcsin\left(\frac{x+y}{xy}\right)$

R: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$

d. $f(x,y,z)=x^{y^z}$

R:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=y^z x^{y^z-1}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x^{y^z}y^{z-1}\ln(x)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=x^{y^z}y^z\ln(y)\ln(x)$

7.13 Să se calculeze $\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y)$ pentru funcția $f(x,y)=\operatorname{arctg}(xy)$.

R: $\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y)=-2x\frac{3y^2-x^2y^4}{\left(1+x^2y^2\right)^3}$

7.14 Să se arate că următoarele funcții verifică ecuațiile corespunzătoare:

a. $z(x,y)=xy\phi\left(x^2-y^2\right)$; ecuația $xy^2\frac{\partial y}{\partial x}+x^2y\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2+y^2\right)z$

b. $u = \mathbf{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$; ecuația $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

c. $u = \phi(x - at) + \psi(x + at)$; ecuația $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

d. $z = \phi(x^2 + y^2)$; ecuația $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

e. $z = \rho f(\mathbf{ln}(\rho) + \theta)$; ecuația $\rho\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\partial z}{\partial \theta} = z$

f. $z = \frac{x}{y}\left(f(y) + g\left(\frac{y}{x}\right)\right)$; ecuația $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

7.15 Să se determine punctele de extrem local pentru următoarele funcții:

a. $f(x, y) = (x-1)^2 + (y+6)^2$ R: $(1, -6)$ minim

b. $f(x, y) = xy(a - x - y), a > 0$ R: $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ maxim

c. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + -3ax - 3by$ R: $(2a - b, 2b - a)$ minim

d. $f(x, y) = \mathbf{cos}(x)\mathbf{cos}(y)\mathbf{cos}(x + y), x \in [0, \pi], y \in [0, \pi]$ R: $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ minim

$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ minim

e. $f(x, y) = \mathbf{ln}(1 - x^2 - y^2)$ R: $(0, 0)$ maxim

7.16 Să se determine punctele de extrem cu legăturile menționate pentru funcțiile:

a. $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ R: $\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}\right)$ minim

b. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy - 7, \quad x + y = 1$ R: $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ minim

c. $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ R: $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ minim

$(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ maxim

d. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 1, \quad x^2 - y^2 = 1$ R: $(1, 0)$ minim

7.17 Să se calculeze $y'(0)$ dacă: $(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2), y(0) = a$ iar y este definită implicit ca funcție de *x*.

R: $y'(0) = \frac{b}{a}$

7.18 Să se calculeze y', y'', y''' dacă funcția $y(x)$ este definită implicit de ecuația:

$$x^2 + y^2 + xy = 3$$

R: $y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}, \quad y'' = -\frac{18}{(x + 2y)^3}, \quad y''' = -\frac{162x}{(x + 2y)^5}$

7.19 Să se calculeze dz ăi d^2z dacă:

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

R: $dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy$, $\quad d^2z=\frac{y^2-a^2}{z^3}dx^2-\frac{2xy}{z^3}dxdy+\frac{x^2-a^2}{z^3}dy^2$

7. 20 Să se calculeze $y'(x), z'(x)$ ale funcțiilor $y(x), z(x)$ definite implicit de sistemul:

$$\begin{cases} x^3+3y^2-z^2+x-y-8=0 \\ x^2-y^2-3z-3=0 \end{cases}$$

în punctul $(1,2,-2)$.

R: $\left(-\frac{20}{17},\frac{38}{17}\right)$