Cuprins

1 Numere reale **7**
1.1 Numere reale 7
1.2 Mulţimi numărabile 13

2 Spaţii metrice **17**
2.1 Spaţii metrice 17
2.2 Spaţii vectoriale 22
2.3 Topologia indusă de o metrică 25
2.4 Convergenţa în spaţii metrice 30
2.5 Puncte limită şi limite extreme ale unui şir din $\bar{\mathbb{R}}$ 40

3 Funcţii continue **43**
3.1 Funcţii continue 43
3.2 Limite iterate 49
3.3 Mulţimi compacte 50
3.4 Continuitate pe compacte 53
3.5 Mulţimi conexe 54
3.6 Continuitate pe conexe 54
3.7 Funcţii uniform continue 56
3.8 Aplicaţii liniare şi continue 57

4 Diferenţiabilitate **63**
4.1 Funcţii diferenţiabile 63
4.2 Derivate parţiale 65
4.3 Derivata după o direcţie 71
4.4 Proprietăţi ale funcţiilor diferenţiabile şi ale derivatelor parţiale 72
4.5 Diferenţiabilitatea funcţiilor compuse 73
4.6 Derivate parţiale de ordin superior 81
4.7 Formula lui Taylor pentru funcţii de o variabilă reală 86
4.8 Formula lui Taylor pentru funcţii de mai multe variabile 90
4.9 Puncte de extrem 94
4.10 Difeomorfisme. Teorema de inversiune locală 97
4.11 Funcţii implicite 101
4.12 Extreme cu legături 105
4.13 Metoda celor mai mici pătrate pentru aproximarea unei funcţii 114
4.14 Metoda gradientului 116

5 Serii numerice **119**
5.1 Serii numerice . . . 119
5.2 Proprietăţi ale seriilor numerice şi ale sumelor parţiale . . . 121
5.3 Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare . . . 123
5.4 Serii alternate . . . 124
5.5 Serii absolut convergente . . . 125
5.6 Serii cu termeni pozitivi . . . 128
5.7 Produsul convolutiv a două serii . . . 137

6 Şiruri de funcţii. Serii de funcţii. Serii de puteri **141**
6.1 Şiruri de funcţii . . . 141
6.2 Proprietăţi ale şirurilor de funcţii . . . 144
6.3 Serii de funcţii . . . 147
6.4 Criterii de convergenţă uniformă pentru serii de funcţii . . . 148
6.5 Proprietăţi ale seriilor de funcţii . . . 149
6.6 Serii de puteri . . . 151
6.7 Proprietăţi ale seriilor de puteri . . . 154
6.8 Seria Taylor. Dezvoltări în serii . . . 158

7 Integrale generalizate **163**
7.1 Integrale generalizate . . . 163
7.2 Proprietăţi ale integralelor improprii . . . 165
7.3 Criterii de convergenţă . . . 165

8 Integrale curbilinii **171**
8.1 Drumuri. Curbe . . . 171
8.2 Integrala curbilinie în raport cu lungimea arcului . . . 177
8.3 Calculul integralei curbilinii în raport cu lungimea arcului . . . 178
8.4 Integrala curbilinie în raport cu coordonatele . . . 180
8.5 Calculul integralei curbilinii în raport cu coordonatele . . . 181
8.6 Proprietăţile integralei curbilinii . . . 184
8.7 Independenţa de drum a integralei curbilinii în raport cu coordonatele . . . 184
8.8 Aplicaţii ale integralelor curbilinii . . . 187

9 Integrale duble **189**
9.1 Mulţimi măsurabile Jordan . . . 189
9.2 Integrala dublă. Noţiuni introductive . . . 192
9.3 Proprietăţi ale sumelor Darboux şi Riemann . . . 193
9.4 Proprietăţile integralei duble . . . 195
9.5 Calculul integralelor duble . . . 197
9.6 Formula lui Green . . . 201
9.7 Exprimarea ariei unui domeniu cu ajutorul unei integrale curbilinii . . . 204
9.8 Schimbarea de variabilă la integrala dublă . . . 205
9.9 Aplicaţii ale integralei duble . . . 208

10 Integrale de suprafaţă **211**
10.1 Pânze parametrizate. Suprafeţe 211
10.2 Aria unei suprafeţe 214
10.3 Integrale de suprafaţă 217
10.4 Integrala de suprafaţă în raport cu coordonatele 219
10.5 Formula lui Stokes 222

11 Integrala triplă **225**
11.1 Mulţimi din spaţiu măsurabile Jordan 225
11.2 Integrala triplă 226
11.3 Criterii de integrabilitate 228
11.4 Calculul integralei triple 229
11.5 Formula lui Gauss - Ostrogradsky 233
11.6 Schimbarea de variabilă la integrala triplă 235
11.7 Aplicaţii ale integralelor triple 238

12 Serii Fourier **241**
12.1 Serii Fourier 241
12.2 Operaţii cu serii Fourier 249

Bibliografie **253**

Glosar **254**

Capitolul 1

Numere reale

1.1 Numere reale

Definiţia 1.1.1 *Fie A o mulţime nevidă. Se numeşte relaţie binară pe A orice submulţime a produsului cartezian $R \subseteq A \times A$.*

Pentru $x, y \in A$ în loc de $(x, y) \in R$ vom scrie $x\,R\,y$ şi spunem că x este în relaţia R cu y.

Definiţia 1.1.2 *O relaţie binară R pe A se numeşte relaţie de ordine dacă se verifică următoarele axiome:*

1. $\forall\, x \in A \;\; x\,R\,x$ (reflexivitatea),

2. Dacă $x\,R\,y$ şi $y\,R\,x$, unde $x, y \in A$, atunci $x = y$ (antisimetria),

3. Dacă $x\,R\,y$ şi $y\,R\,z$, unde $x, y, z \in A$, atunci $x\,R\,z$ (tranzitivitatea).

Dacă în plus $\forall\, x, y \in A \;\; x\,R\,y$ sau $y\,R\,x$, atunci relaţia R se numeşte relaţie de ordine totală.

O mulţime A pe care s-a definit o relaţie de ordine R se numeşte mulţime ordonată şi se notează prin (A, R) sau A atunci când se subînţelege care este relaţia de ordine.

Fie A o mulţime ordonată pe care s-a definit relaţia de ordine notată $\leq$. Dacă $B \subset A$ este o submulţime nevidă a lui A, atunci orice element $a \in A$ pentru care $x \leq a$ (respectiv $a \leq x$) oricare ar fi $x \in B$ se numeşte majorant (respectiv minorant) al mulţimii B în A. Dacă submulţimea B admite cel puţin un majorant, respectiv un minorant ea se numeşte majorată (mărginită superior), respectiv minorată (mărginită inferior) în A. Mulţimea B se numeşte mărginită, dacă este atât minorată, cât şi majorată. Dacă mulţimea B admite un majorant, respectiv un minorant ce aparţine lui B acesta se numeşte cel mai mare element, respectiv cel mai mic element notat cu $\max B$, respectiv $\min B$.

Cel mai mic majorant al mulţimii B se numeşte margine superioară exactă sau supremum şi se notează cu $\sup B$.

$b \in A,\;\; b = \sup B \Leftrightarrow x \leq b,\; \forall\, x \in B$ (b este un majorant al muţimii B) şi dacă $b' \in A$ astfel încât $x \leq b'$, $\forall\, x \in B$, atunci $b \leq b'$ (b este cel mai mic majorant al mulţimii B).

Cel mai mare minorant al mulţimii B se numeşte margine inferioară exactă sau infimum şi se notează cu $\inf B$.

$a \in A,\;\; a = \inf B \Leftrightarrow a \leq x,\;\; \forall\, x \in B$ (a este un minorant al mulţimii B) şi dacă $a' \in A$ astfel încât $a' \leq x,\;\; \forall\, x \in B$, atunci $a' \leq a$ (a este cel mai mare minorant al mulţimii B).

Observaţia 1.1.1 *1. Dacă există $\inf B$ şi $\sup B$ nu rezultă neapărat că $\inf B, \sup B \in B$.*

2. Dacă există $\inf B$ şi $\sup B$ conform proprietăţii de antisimetrie acestea sunt unic determinate.

Exemplu 1.1.1 *1. Dacă* $A = \mathbb{R}$ *şi* $B = [0, 1)$*, atunci orice* $a \geq 1$ *este un majorant pentru* B *şi orice* $b \leq 0$ *este un minorant pentru* B*. În acest caz* $\inf B = 0 \in B$, $\sup B = 1 \notin B$*, iar 0 este cel mai mic element al lui* B*.*

2. Dacă $A = \mathbb{R}$ *şi* $B = \mathbb{N}$*, atunci orice* $b \leq 0$ *este un minorant al lui* B*, dar nici un element* $a \in \mathbb{R}$ *nu este majorant pentru* $\mathbb{N}$*;* $\inf N = 0$*,* $\sup A$ *nu există în* $\mathbb{R}$*.*

Dacă $B = \mathbb{Z}$ *atunci nu există nici majoranţi nici minoranţi; nu există* $\inf \mathbb{Z}$ *şi* $\sup \mathbb{Z}$ *în* $\mathbb{R}$*.*

Definiţia 1.1.3 *axiomatică a numerelor reale*

Fie K *o mulţime pe care sunt definite operaţiile de adunare şi înmulţire:*

$$\begin{aligned} +, \cdot : K \times K &\to K, \\ (x, y) &\to x + y \\ (x, y) &\to x\,y \end{aligned}$$

şi o relaţie de ordine $x \leq y$ *între elementele lui* K*, care satisfac următoarele axiome:*

A1) $(K, +, \cdot)$ *este un corp comutativ, adică*

1. *" + " este asociativă:* $\forall\, x, y, z \in K \;\; (x + y) + z = x + (y + z)$,
2. *" + " este comutativă:* $\forall\, x, y \in K \;\; x + y = y + x$,
3. *există în* K *elementul 0 pentru care* $x + 0 = x$, $\forall\, x \in K$,
4. $\forall\, x \in K,\; \exists -x \in K$ *astfel încât:* $x + (-x) = 0$,
5. *" · " este asociativă:* $\forall\, x, y, z \in K \;\; (x\,y)\,z = x\,(y\,z)$,
6. *" · " este comutativă:* $\forall\, x, y \in K \;\; x\,y = y\,x$,
7. *există în* K*, elementul 1 pentru care* $x\,1 = x$, $\;\forall\, x \in K$,
8. $\forall\, x \in K,\; x \neq 0,\; \exists\, x^{-1} \in K$ *astfel încât* $x\,x^{-1} = 1$,
9. *" · " este distributivă faţă de " + ":* $\forall\, x, y, z \in K \;\; x\,(y + z) = x\,y + y\,z$.

A2.) " $\leq$ *" este o relaţie de ordine totală pe* K*, care este compatibilă cu operaţiile algebrice " + " şi " · ";*

1. *"* $\leq$ *" este reflexivă:* $x \leq x$, $\;\forall\, x \in K$,
2. *"* $\leq$ *" este antisimetrică:* $\forall\, x, y \in K$*, dacă* $x \leq y$ *şi* $y \leq x \Rightarrow x = y$,
3. *"* $\leq$ *" este tranzitivă:* $\forall\, x, y, z \in K$*, dacă* $x \leq y$ *şi* $y \leq z \Rightarrow x \leq z$,
4. $\forall\, x, y \in K \;\; x \leq y$ *sau* $y \leq x$,
5. $\forall\, x, y, z \in K$*, dacă* $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
6. $\forall\, x, y, z \in K$ *şi* $0 \leq z$*, dacă* $x \leq y \Rightarrow x\,z \leq y\,z$.

A3) Orice submulţime nevidă şi majorată a lui K *admite o margine superioară exactă (axioma marginii superioare sau axioma Cantor - Dedekind).*

Observaţia 1.1.2 *1. Orice mulţime ce verifică A1, A2 şi A3 este izomorfă cu mulţimea K, pe care o vom nota $\mathbb{R}$ şi care se numeşte mulţimea numerelor reale.*

2. Ultima axiomă din definiţia 1.1.3 constitue punctul de plecare în stabilirea rezultatelor de bază ale analizei matematice, ceea ce o separă de algebră.

Teorema 1.1.1 *regula semnelor în $\mathbb{R}$.*

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \Rightarrow -x < 0;$
$\quad x < 0 \Rightarrow -x > 0$

2. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad x > 0, y > 0 \Rightarrow x\,y > 0$
$\quad x > 0, y < 0 \Rightarrow x\,y < 0$
$\quad x < 0, y < 0 \Rightarrow x\,y > 0;$

3. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$
$\quad 1 \neq 0 \Rightarrow 1 > 0;$

4. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$
$\quad x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0;$

5. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0,\ y \geq 0$ *şi* $x + y = 0 \Rightarrow x = 0$ *şi* $y = 0$.

Demonstraţie:

1. Dacă $x > 0$, $0 = (-x) + x > (-x) + 0 = -x \Rightarrow -x < 0$

   Dacă $x < 0$, $0 = (-x) + x < (-x) + 0 = -x \Rightarrow -x > 0$.

2. Dacă $x > 0$ şi $y > 0$, atunci $x\,y > x\,0 = 0 \Rightarrow x\,y > 0$.

   Dacă $x > 0$ şi $y < 0$, atunci $x > 0$ şi $-y > 0$, deci $x(-y) > 0 \Rightarrow -x\,y > 0 \Rightarrow x\,y < 0$; $x < 0$ şi $y < 0 \Rightarrow x < 0$ şi $-y > 0 \Rightarrow -x\,y < 0 \Rightarrow x\,y > 0$.

3. Dacă $x \neq 0$, atunci $x^2 = x\,x \Rightarrow \begin{cases} \text{dacă } x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \\ \text{dacă } x < 0 \Rightarrow x^2 > 0. \end{cases}$ Cum $1 \neq 0 \Rightarrow 1^2 > 0 \Rightarrow 1 > 0$

4. Dacă $x > 0$, $\ 1 = x\,\frac{1}{x} > 0$. Presupunând că $\frac{1}{x} < 0$, rezultă $1 = x\,\frac{1}{x} < 0$, ceea ce este fals, deci $\frac{1}{x} > 0$.

   Dacă $x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0$ se arată în mod analog.

5. Dacă $x \geq 0$, $\ y \geq 0$ şi $x + y = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x = -y \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -y \geq 0 \Rightarrow y \leq 0$ şi, cum $y \geq 0$, rezultă $y = 0$, care împreună cu $x + y = 0$ ne dă $x = 0$.

Definiţia 1.1.4 *O submulţime $I \subset \mathbb{R}$ se numeşte inductivă dacă $0 \in I$ şi pentru orice $x \in I \Rightarrow x + 1 \in I$.*

Teorema 1.1.2 *Există o singură submulţime $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ numită mulţimea numerelor naturale, care are următoarele proprietăţi:*

1. $0 \in \mathbb{N}$;

2. Dacă $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{N}$;

3. Dacă $A \subset \mathbb{R}$ *cu* $0 \in A$ *şi* $x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$, *atunci* $\mathbb{N} \subseteq A$.

DEMONSTRAŢIE: Unicitatea. Presupunem că există două mulţimi $\mathbb{N}$ şi M care satisfac condiţiile din ipoteză. Conform proprietăţii 3 din enunţ avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ cu $\left.\begin{array}{l} 0 \in \mathbb{N} \\ x \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow M \subseteq \mathbb{N}$. De asemenea avem $M \subset \mathbb{R}$ cu $\left.\begin{array}{l} 0 \in M \\ x \in M \Rightarrow x+1 \in M \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\mathbb{N} \subset M$, adică $M = \mathbb{N}$.

Existenţa. Considerăm mulţimea $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} \,|\, 0 \in A, \text{ dacă } x \in A \Rightarrow x+1 \in A\} \neq \emptyset$. Dacă $\mathbb{N} = \cap_{A \in \mathcal{A}} A$, atunci $0 \in \mathbb{N}$.

Fie $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \cap_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A,\ \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow x+1 \in A,\ \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow x+1 \in \cap_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow$ $x+1 \in \mathbb{N}$.

Din $\mathbb{N} = \cap_{A \in \mathcal{A}} A$ pentru orice $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq A$.

Observaţia 1.1.3 *a) Mulţimea $\mathbb{N}$ este cea mai mică mulţime inductivă din $\mathbb{R}$ (relativ la incluziune).*

b) Avem $0 \in \mathbb{N}, 0+1 = 1 \in \mathbb{N}, 1+1 = 2 \in \mathbb{N}, \ldots,$
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

c) Folosind noţiunea de mulţime inductivă, se poate enunţa principiul inducţiei matematice astfel: Dacă $S \subseteq \mathbb{N}$ este o mulţime inductivă, atunci $S = \mathbb{N}$.

Proprietăţi remarcabile ale mulţimii numerelor naturale $\mathbb{N}$

Teorema 1.1.3 *1. Pentru orice $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 0$. Dacă $x \in \mathbb{N}, x \neq 0$ atunci $\exists\, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = y+1$.*

2. Pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$ cu $x < y \Rightarrow \exists\, z \in \mathbb{N}$ astfel încât $y = x+z$.

3. Pentru orice $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x+y \in \mathbb{N}$ şi $x\,y \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAŢIE.

1. Notăm $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ mulţimea numerelor reale pozitive; $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ şi $0 \in \mathbb{R}$;

   $x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x+1 \in \mathbb{R}_+$. Din teorema 1.1.2 rezultă că $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+$, adică pentru orice $x \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $x \in \mathbb{R}_+$.

   Mulţimea $A = \{0\} \cup \{x+1 \,|\, x \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$. Evident $0 \in A$ şi dacă $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$. Din teorema 1.1.2 obţinem $\mathbb{N} \subseteq A$, deci $A = \mathbb{N}$. Aşadar pentru orice $x \in \mathbb{N},\ x \neq 0$ avem $x \in \{y+1 \,|\, y \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \exists\, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = y+1$.

2. Mulţimea $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, \text{dacă } x < y, \exists\, z \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } x+z = y\} \subseteq \mathbb{N}$. Fie $y \in \mathbb{N}$ cu $0 < y \Rightarrow 0+y = y \Rightarrow 0 \in A$. Fie $x \in A$; dacă $x \in \mathbb{N}$ şi $x+1 < y \Rightarrow y \neq 0$ şi cum $y \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\, y' \in \mathbb{N}$ astfel încât $y = y'+1$.

   Cum $x+1 < y \Rightarrow x+1 < y'+1 \Rightarrow x < y'$ care împreună cu $x \in A$ ne dă că $\exists\, z \in \mathbb{N}$ astfel încât $x+z = y' \Rightarrow (x+1)+z = (x+z)+1 = y'+1 = y$. Deci $\exists\, z \in \mathbb{N}$ astfel încât $(x+1)+z = y \Rightarrow x+1 \in A$.

   Deoarece mulţimea A satisface proprietăţile: $0 \in A$ şi dacă $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$, atunci conform teoremei 1.1.2 $\mathbb{N} \subseteq A$, de unde $A = \mathbb{N}$.

3. Fie $x \in \mathbb{N}$ şi $A = \{y \in \mathbb{N} \,|\, x+y \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$. Cum $x = x+0 \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \in A$. Dacă $y \in A \Rightarrow x+y \in \mathbb{N} \Rightarrow (x+y)+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow x+(y+1) \in \mathbb{N} \Rightarrow y+1 \in A$.

   Deoarece mulţimea A satisface proprietăţile: $0 \in A$ şi dacă $y \in A \Rightarrow y+1 \in A$, atunci conform teoremei 1.1.2 $\mathbb{N} \subseteq A$, de unde $A = \mathbb{N}$.

Fie $x \in \mathbb{N}$ şi $A = \{y \in \mathbb{N} \,|\, x\,y \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$. Din $0 = x\,0 \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \in A$. Dacă $y \in A \Rightarrow x\,y \in \mathbb{N}$; $x(y+1) = x\,y + x \in \mathbb{N}$, deoarece $x\,y, x \in \mathbb{N}$, deci $y+1 \in A$. Deoarece mulţimea A satisface proprietăţile: $0 \in A$ şi dacă $y \in A \Rightarrow y+1 \in A$, atunci conform teoremei 1.1.2 $\mathbb{N} \subseteq A$, de unde $A = \mathbb{N}$.

Teorema 1.1.4 *Mulţimea numerelor naturale este bine ordonată, adică orice submulţime nevidă a lui* $\mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{N}$ *are un cel mai mic element.*

Demonstraţie. Dacă $0 \in A \Rightarrow 0$ este cel mai mic element al lui A, deci $\mathbb{N}$ este bine ordonată.

Dacă $0 \notin A$ considerăm mulţimea $B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x$ este minorant al lui $A\} = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x < y,\ \forall\, y \in A\} \subset \mathbb{N}$, $B \neq \emptyset$, $(0 \in B)$. B nu are proprietatea: dacă $x \in B \Rightarrow x+1 \in B$, deoarece în acest caz ar rezulta $B = \mathbb{N}$, ceea ce este fals. Prin urmare $\exists\, x \in B$ astfel încât $x+1 \notin B$. Arătăm că $x+1$ este cel mai mic element al mulţimii A.

Din $x \in B \Rightarrow x < y,\ \forall y \in A \Rightarrow x+1 \leq y,\ \forall\, y \in B$ adică $x+1$ este minorant al lui A. Din $x+1 \notin B \Rightarrow \exists\, y_0 \in A$ astfel încât $y_0 \leq x+1$ care împreună cu $x+1 \leq y,\ \forall\, y \in B$ ne dă $x+1 = y_0 \in A$, deci $x+1 \in A$, şi cum $x+1$ este minorant al lui A, $x+1$ este cel mai mic element al mulţimii A.

Obţinem astfel că mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ este bine ordonată.

Teorema 1.1.5 *Proprietatea lui Arhimede (287 - 212 î.e.n).*

Mulţimea $\mathbb{N}$ *a numerelor naturale nu este majorată în* $\mathbb{R}$, *adică pentru orice* $x \in \mathbb{R}$, *există* $n \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $x < n$.

Demonstraţie. Presupunem că există $x \in \mathbb{R}$ care să majoreze mulţimea numerelor naturale. $\mathbb{N}$ fiind o submulţime nevidă majorată a lui $\mathbb{R}$, conform axiomei lui Cantor-Dedekind, rezultă că există $\sup \mathbb{N} = \alpha$ astfel ca $n \leq \alpha$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cum $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \leq \alpha \Rightarrow n \leq \alpha - 1 < \alpha$ ceea ce contrazice definirea lui α ca fiind cel mai mic dintre majoranţii lui $\mathbb{N}$, deci $\mathbb{N}$ nu este majorată în $\mathbb{R}$.

Observaţia 1.1.4 *Spunem despre corpul numerelor reale că este un corp arhimedian (are loc axioma lui Arhimede).*

Dacă considerăm ecuaţia
$$a + x = b\,, \tag{1.1}$$
unde $a, b \in \mathbb{N}$, observăm că pentru $b < a$ această ecuaţie nu are soluţii numere naturale. Din (1.1) $x = b - a$, deci operaţia inversă adunării, scăderea, nu conduce întotdeauna la un număr natural. Ecuaţia (1.1) va avea întotdeauna soluţie într-o mulţime pe care o vom nota $\mathbb{Z}$, care este alcătuită din elementele $\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ şi care se numeşte mulţimea numerelor întregi. Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}, +)$ este grup comutativ, iar $(\mathbb{Z}, \cdot)$ este semigrup comutativ cu unitate, aşadar $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este inel comutativ cu unitate. Mulţimea numerelor întregi este total ordonată faţă de relaţia de ordine $\leq$.

Dacă $a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0$ ecuaţia
$$a\,x = b \tag{1.2}$$
nu are soluţii numere întregi decât atunci, când $a|b$. Din (1.2) $x = \dfrac{b}{a}$, deci operaţia inversă înmulţirii, împărţirea, nu conduce întotdeauna la un număr întreg. Ecuaţia (1.2) va avea întotdeauna soluţie într-o mulţime pe care o vom nota $\mathbb{Q}$, numită mulţimea numerelor raţionale şi care este alcătuită din mulţimea numerelor întregi şi mulţimea numerelor de forma $\dfrac{b}{a},\ a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0,$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{b}{a} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0 \right\}$. Orice număr întreg b se poate scrie ca fracţie de forma $\frac{b}{1}$. Prin urmare $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ este corp comutativ în raport cu adunarea şi înmulţirea şi este ordonată faţă de relaţia de ordine $\leq$.

Dacă pentru $a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0$ ecuaţiile (1.1) şi (1.2) au soluţii numere raţionale, ecuaţia $x^2 = a$ nu are întotdeauna soluţie raţională. De exemplu, pentru $a = 2$ nu există nici un număr raţional al cărui pătrat să fie 2. Presupunem că ar exista $x \in \mathbb{Q}$ astfel ca

$$x^2 = 2. \tag{1.3}$$

Îl considerăm pe x scris sub formă de fracţie ireductibilă, adică $x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ (p, q) = 1$.

Din (1.3) obţinem

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2, \tag{1.4}$$

deci p^2 trebuie să fie număr par, adică p este număr par, $p = 2m$. Înlocuind în (1.4), avem $4m^2 = 2q^2$, de unde $2m^2 = q^2$, adică q^2 este un număr par, deci şi q este un număr par $q = 2m$. Atunci $(p, q) = (2m, 2n) = 2(m, n) \neq 1$, ceea ce contrazice ipoteza făcută asupra lui p şi q.

Numerele reale care nu sunt raţionale se numesc numere iraţionale.

Definiţia 1.1.5 *O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte densă în sensul ordinii în $\mathbb{R}$, dacă pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ $x < y$ există $a \in A$ astfel încât $x < a < y$.*

Teorema 1.1.6 *Mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale este densă în sensul ordinii în $\mathbb{R}$.*

Demonstraţie: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ $x < y$ şi notăm $\alpha = y - x > 0$. Atunci conform teoremei 1.1.5 există $n \in \mathbb{N},\ n \neq 0$ astfel încât $\frac{1}{\alpha} < n$, de unde $\frac{1}{n} < \alpha$.

Considerăm mulţimea $A = \left\{ p \in \mathbb{N} \mid \frac{p}{n} \geq y \right\} \neq \emptyset$ şi fie m cel mai mic element din A. Avem $\frac{m}{n} \geq y$ şi $\frac{m-1}{n} < y$. Din $\frac{m}{n} \geq y \Rightarrow \frac{m-1}{n} \geq y - \frac{1}{n} \geq y - \alpha = x \Rightarrow x \leq \frac{m-1}{n} < y$.

Teorema 1.1.7 *Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $x = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$, respectiv $x = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid r > x\}$.*

Demonstraţie: Fie $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\} \neq \emptyset$, deoarece $x - 1 \in A$. A fiind o mulţime nevidă şi majorată de numere reale, rezultă că există $\sup A \in A$; $\sup A < x \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\sup A < r < x$. Cum $r \in A \Rightarrow \sup A < r$ şi $\sup A \in A$, ceea ce este fals, aşadar $\sup A = x$.

Teorema 1.1.8 *Fie $a \in \mathbb{R},\ a \geq 0$ fixat. Dacă pentru orice $\varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}$ avem $a < \varepsilon$, atunci $a = 0$.*

Demonstraţie: Dacă $a \neq 0$, atunci $a > 0$ şi, din proprietatea lui Arhimede, rezultă că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n\,a \geq 1$. Dacă în enunţ luăm $\varepsilon = \frac{1}{n}$, avem $a < \frac{1}{n}$, de unde $na < 1$ şi astfel obţinem o contradicţie. Deci $a = 0$.

Teorema 1.1.9 *(lema intervalelor închise incluse) Fie $I_0 \supset I_1, \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$ un şir descendent de intervale închise şi mărginite în $\mathbb{R}$, $I_n = [a_n, b_n],\ n \geq 0$. Atunci intersecţia $\cap_{n \geq 0} I_n$ este tot un interval. Dacă, în plus, $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, atunci intersecţia $\cap_{n \geq 0} I_n$ este alcătuită dintr-un punct.*

Demonstraţie: Considerăm $A = \{a_n \mid n \geq 0\}$ şi $B = \{b_n \mid n \geq 0\}$,

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < b_n < \cdots < b_2 < b_1 < b_0.$$

Mulţimea A este majorată de b_0, iar mulţimea B este minorată de a_0. Fie $a = \sup A$ şi $b = \inf B$. Deoarece $a_n \leq b_m$, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ avem

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n, \quad \forall\, n \geq 0, \tag{1.5}$$

deci $[a, b] \subset I_n$, $\forall\, n \geq 0$, de unde $[a, b] \subset \cap_{n \geq 0} I_n$.

Dacă $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, atunci din (1.5) obţinem inegalităţile

$$0 \leq b - a \leq b_n - a_n \Rightarrow a = b,$$

aşadar $\cap_{n \geq 0} I_n = \{a\}$.

Lema 1.1.1 *Lema lui Cesaró (1859-1906)*
Orice şir mărginit de numere reale conţine un subşir convergent.

Demonstraţie: Fie (x_n) un şir mărginit de numere reale. Atunci există numerele reale $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ astfel încât $x_n \in [a, b]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ şi considerăm $c = \frac{a+b}{2}$. Dintre intervalele $[a, c]$, respectiv $[c, b]$ îl alegem pe acela care conţine o infinitate de termeni ai şirului x_n. Notăm intervalul ales cu $I_1 = [a_1, b_1]$.

$$a \leq a_1 < b_1 \leq b, \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

Fie $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Dintre intervalele $[a_1, c_1]$, respectiv $[c_1, b_1]$ îl alegem pe acela care conţine o infinitate de termeni ai şirului x_n. Notăm acest interval cu $I_2 = [a_2, b_2]$.

$$a \leq a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \leq b, \quad b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}.$$

Folosind procedeul de mai sus construim inductiv un şir de intervale închise $I_n = [a_n, b_n]$ cu următoarele proprietăţi: I_n conţine o infinitate de termeni ai şirului x_n,

$$a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 = b$$

şi $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Conform teoremei 1.1.9, rezultă $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\xi\}$.

Din construcţia intervalelor I_n există un şir strict crescător de numere naturale $n_0 < n_1 < \cdots < n_p < \ldots$ astfel încât $x_{n_p} \in I_p$, $p \in \mathbb{N}$. Deoarece x_{n_p}, $\xi \in I_p$ avem $|x_{n_p} - \xi| \leq \frac{b-a}{2^p}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, de unde rezultă că $x_{n_p} \to \xi$.

1.2 Mulţimi numărabile

Definiţia 1.2.1 *Două mulţimi A şi B se numesc echipotente dacă există o aplicaţie bijectivă $f : A \to B$. Dacă A şi B sunt mulţimi echipotente, atunci vom nota $A \sim B$, iar relaţia "$\sim$" se numeşte relaţie de echipotenţă.*

Teorema 1.2.1 *Relaţia de echipotenţă este o relaţie de echivalenţă pe clasa mulţimilor.*

Demonstraţie:

1. $A \sim A$, pentru orice mulţime A, deoarece aplicaţia identică $1_A : A \to A$ este o bijecţie, deci " $\sim$ " este reflexivă.

2. Dacă $A \sim B$, atunci există o aplicaţie bijectivă $f : A \to B$. Cum inversa ei $f^{-1} : B \to A$ este, de asemenea, bijectivă, avem $B \sim A$, deci " $\sim$ " este simetrică.

3. Dacă $A \sim B$ şi $B \sim C$, atunci există două aplicaţii bijective $f : A \to B$ şi $g : B \to C$. Aplicaţia $g \circ f : A \to C$ este, de asemenea, bijectivă şi obţinem $A \sim C$, adică " $\sim$ " este tranzitivă.

Din 1, 2 şi 3 deducem că relaţia de echipotenţă " $\sim$ " este o relaţie de echivalenţă în clasa mulţimilor.

Definiţia 1.2.2 *1. O mulţime A se numeşte finită, dacă există un număr natural $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$ sau $A = \emptyset$, şi infinită în caz contrar.*

2. O mulţime A se numeşte numărabilă dacă $A \sim \mathbb{N}$ şi nenumărabilă dacă este infinită şi nu este numărabilă.

3. O mulţime A este cel mult numărabilă dacă A este finită sau numărabilă.

Observaţia 1.2.1 *1. Două mulţimi finite sunt echipotente dacă şi numai dacă au acelaşi număr de elemente.*

2. Dacă mulţimea A este numărabilă şi $f : \mathbb{N} \to A$ este o bijecţie, iar $f(n) \overset{not}{=} a_n,\ n \in \mathbb{N}$, atunci elementele mulţimii A formează un şir infinit de elemente diferite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Aşadar mulţimea A este numărabilă dacă şi numai dacă toate elementele ei formează un şir $a_1, \ldots, a_n, \ldots$.

3. Orice submulţime infinită a unei mulţimi numărabile este numărabilă.

4. Orice submulţime a unei mulţimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

Exemplu 1.2.1 *1. Mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ este numărabilă.*

2. Mulţimile numerelor pare respectiv impare sunt numărabile.

Corespondenţele $n \to 2n$, respectiv $n \to 2n + 1$ sunt bijective.

Definiţia 1.2.3 *Pentru orice mulţime A se numeşte cardinalul lui A şi se notează $|A|$, clasa de echivalenţă a lui A, adică familia tuturor mulţimilor echipotente cu A.*

$|A| = \{B \mid A \sim B\}$, unde A, B aparţin clasei mulţimilor.

Observaţia 1.2.2 *1. $|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B$.*

2. $|\emptyset| = 0$, iar $|\{1, 2, \ldots, n\}| = n$.

3. Cardinalul mulţimii numerelor naturale se notează $|N| = \aleph_0$ (alef zero).

Teorema 1.2.2 *Reuniunea numărabilă de mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă.*

Demonstraţie: Fie $A_n,\ n \in \mathbb{N}$ un şir de mulţimi numărabile. Deoarece fiecare mulţime $A_n,\ n \in \mathbb{N}$ este numărabilă, rezultă că se pot numerota elementele ei sub forma $A_n = \{a_1^n, a_2^n, \ldots, a_m^n, \ldots\}$. Putem presupune că mulţimile sunt disjuncte două câte două; dacă un element apare în mai multe mulţimi îl menţinem numai în prima mulţime în care apare, iar în restul mulţimilor îl înlăturăm.

Formăm următorul tabel, în care liniile sunt alcătuite din elementele mulţimilor A_n:

$$\begin{tikzcd}
A_1 & a_1^1 \arrow[r] & a_2^1 \arrow[dl] & a_3^1 \arrow[r] & a_4^1 \arrow[dl] & \cdots\cdots\cdots \\
A_2 & a_1^2 \arrow[d] & a_2^2 \arrow[ur] & a_3^2 \arrow[dl] & a_4^2 & \cdots\cdots\cdots \\
A_3 & a_1^3 \arrow[ur] & a_2^3 \arrow[dl] & a_3^3 & a_4^3 & \cdots\cdots\cdots \\
A_4 & a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Luând elementele din tablou în ordinea indicată de săgeţi, formăm şirul $a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_1^3, a_2^2, a_3^1, a_4^1, a_3^2, a_2^3, a_1^4, \ldots$. Oricare ar fi un element a_m^n al unei mulţimi $A_n,\ m \in \mathbb{N}$, el aparţine acestui şir. Prin urmare, şirul de mai sus conţine toate elementele reuniunii $\cup_{n\geq 1} A_n$, deci $\cup_{n\geq 1} A_n$ este numărabilă.

Teorema 1.2.3 *Produsul cartezian al unui număr finit de mulţimi numărabile este, de asemenea, numărabil.*

Demonstraţie: Este suficient de arătat că produsul cartezian a două mulţimi numărabile A_1 şi A_2 este numărabil. Cum A_1 este mulţime numărabilă, putem numerota elementele ei de forma $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Atunci $A_1 \times A_2 = \cup_{n\geq 1}\{a_n\} \times A_2$. Mulţimea $\{a_n\} \times A_2$ este echipotentă cu A_2, prin urmare, este numărabilă. Astfel, produsul $A_1 \times A_2$ este o mulţime numărabilă de mulţimi numărabilă şi, conform teoremei 1.2.2, el este numărabil.

Teorema 1.2.4 *Mulţimile $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$ sunt numărabile.*

Demonstraţie: Cum aplicaţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definită prin

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\[2ex] -\dfrac{n+1}{2}, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$$

este o bijecţie, rezultă că mulţimea numerelor întregi este numărabilă.

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^*$ deoarece, dacă considerăm aplicaţia $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*\ g(n) = n+1, n \in \mathbb{N}$, ea este o bijecţie. Aşadar, $\mathbb{N}^*$ este şi ea numărabilă. Conform teoremei 1.2.3 mulţimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ este numărabilă.

Aplicaţia $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ definită prin $h(p, q) = \dfrac{p}{q}$ fiind o bijecţie, rezultă $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \sim \mathbb{Q}$ şi, deoarece $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, rezultă $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, adică mulţimea numerelor raţionale este numărabilă.

Teorema 1.2.5 *Mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ nu este numărabilă.*

Demonstraţie: Presupunem prin absurd că mulţimea numerelor reale ar fi numărabilă, adică ar exista o bijecţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ f(n) = a_n,\ n \in \mathbb{N}$. Scriem elementele a_n ca fracţii zecimale $a_n = x_n, x_{n1}x_{n2}\ldots x_{nm}\ldots, n \in \mathbb{N}$, unde $(x_{ij})_{i,j\geq 1} \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, 9\},\ x_n \in \mathbb{Z}$.

Considerăm elementul $b = 0, b_1b_2b_3\ldots$, unde $b_1 \neq x_{11},\ b_2 \neq x_{22},\ b_3 \neq x_{33}$ etc. Cum $b \in \mathbf{R}$, există $p \geq 0$ astfel încât $b = x_p$, adică $0, b_1b_2b_3\cdots = x_p, x_{p1}x_{p2}\ldots x_{pn}\ldots \Rightarrow b_p = x_{pp}$, ceea ce contravine alegerii cifrelor b_p. Aşadar, mulţimea numerelor reale $\mathbf{R}$ nu este numărabilă.

Corolarul 1.2.1 *Mulţimea numerelor iraţionale* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *nu este numărabilă.*

DEMONSTRAŢIE: Presupunem că $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ este numărabilă. Deoarece $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ şi $\mathbb{Q}$ este numărabilă, conform teoremei 1.2.2 ar rezulta că $\mathbb{R}$ este numărabilă, ceea ce este fals.

Corolarul 1.2.2 *Orice interval deschis* (α, β), *unde* $\alpha < \beta$ *este mulţime nenumărabilă.*

Capitolul 2

Spaţii metrice

2.1 Spaţii metrice

Spaţiile metrice formează o clasă importantă de spaţii topologice. Datorăm această noţiune matematicianului M. Frechét (1878-1973) care, introducând noţiunea de distanţă între obiecte matematice de acelaşi tip, ne permite să vorbim de distanţa nu numai între două puncte din plan.

Definiţia 2.1.1 *Fie X o mulţime nevidă. O funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:*
(D1) $d(x, x) = 0, \ \forall\, x \in X$;
(D2) $d(x, y) = d(y, x), \ \forall\, x, y \in X$ *(simetrie);*
(D3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \ \forall\, x, y, z \in X$ *(inegalitatea triunghiului);*
se numeşte semimetrică (sau semidistanţă). Dacă, în plus, d verifică şi
(D4) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y, \ \forall\, x, y \in X,$
atunci d se numeşte metrică (sau distanţă).

Observaţia 2.1.1 *1. Dacă în (D3) punem $x = y$ obţinem:*
$d(x, x) \leq d(x, z) + d(z, x), \forall\, x, z \in X,$ *de unde* $d(x, z) \geq 0, \forall\, x, z \in X.$
2. Putem reduce numărul de axiome care caracterizează noţiunea de semimetrică. Astfel (D2) şi (D3) sunt echivalente cu (D2′)
(D2′) : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \ \forall\, x, y, z \in X,$ *deci* $(D1) + (D2) + (D3) \Leftrightarrow (D1) + (D2')$.
Evident $(D2) + (D3) \Rightarrow (D2')$*. Reciproc, luăm în* $(D2')$ $z = x$ *şi obţinem*

$$d(x, y) \leq d(x, x) + d(y, x) \Rightarrow d(x, y) \leq d(y, x)$$

Dacă inversăm pe x cu y avem $d(y, x) \leq d(x, y)$, deci $d(x, y) = d(y, x)$, adică (D2).

Definiţia 2.1.2 *O pereche (X, d), unde $d : X \times X \to \mathbb{R}$ este o metrică (semimetrică) se numeşte spaţiu metric (semimetric). Elementele unui spaţiu metric se numesc puncte.*

Observaţia 2.1.2
1. *Dacă perechea (X, d) este un spaţiu metric şi $A \subset X$ este o submulţime nevidă a lui X, atunci perechea (A, d) este un spaţiu metric.*
2. *Pe o mulţime nevidă X pot fi definite mai multe distanţe, după cum vom constata mai jos, deci mai multe structuri de spaţiu metric. Atunci, când nu este pericol de confuzie, spaţiul metric (X, d) va fi notat cu X.*

În continuare vom da câteva exemple de spaţii metrice.

1. $(\mathbb{R}, d)$ este un spaţiu metric, unde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $d(x, y) = |x - y|$, $\forall\, x, y \in X$ este metrica euclidiană.

2. $(\mathbb{C}, d)$ este spaţiu metric relativ la metrica euclidiană $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

3. $(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ este spaţiu metric, unde metrica euclidiană $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se defineşte astfel: $\forall\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2}.$$

Verificarea proprietăţilor (D1), (D2) şi (D4) este imediată.

Pentru a verifica (D3) fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ şi $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$(D3) \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\right]^{1/2} \tag{2.1}$$

Notăm $x_i - z_i = a_i$ şi $z_i - y_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$. Atunci relaţia (2.1) devine

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2\right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{1/2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{1/2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{1/2} \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right],
\end{aligned}$$

care nu este altceva decât inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz.

Observăm că spaţiile metrice $(\mathbb{R}^2, d)$ şi $(\mathbb{C}, d)$ cu distanţele euclidiene sunt identice.

4. $(\mathbb{R}^n, d)$ este un spaţiu metric, unde $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad \forall\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

este metrica Manhattan (distanţa "poştaşului").

5. $(\mathbb{R}^n, d)$ este un spaţiu metric relativ la distanţa $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$d(x, y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|, \quad \forall\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

6. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Orice matrice din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ poate fi identificată cu un vector din $\mathbb{R}^{mn}$.

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \\
&= (a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\ldots a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\ldots a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn}).
\end{aligned}$$

Cum pe $\mathbb{R}^{mn}$ am introdus deja 3 metrici, rezultă că putem defini distanţa între două matrici folosind cele 3 metrici.

7. $(\mathbb{R}^n, d)$ este un spaţiu metric, unde $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right]^{1/p}, \quad \forall\, p \geq 1,\ p \in \mathbb{R},\ \ \forall\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ este metrica Minkowski (1864 - 1909).

Verificarea proprietăţilor (D1), (D2) şi (D4) este imediată. Pentru a arăta că are loc şi (D3) vom folosi următoarele inegalităţi.

Lema 2.1.1 *Fie $a, b \in \mathbb{R}_+$ şi $p, q > 1$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci*

$$a\, b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstraţie: Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{x^{-q}}{q}$$

este derivabilă şi are un minim în punctul $x = 1$. Pentru $x = a^{\frac{1}{q}} b^{-\frac{1}{p}}$ avem

$$1 = f(1) \leq f\left(a^{\frac{1}{q}} b^{-\frac{1}{p}}\right) = \frac{1}{p}\, a^{\frac{p}{q}} b^{-1} + \frac{1}{q}\, a^{-1} b^{\frac{q}{p}}.$$

Cum $\frac{p}{q} = p - 1$ şi $\frac{q}{p} = q - 1$, rezultă $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Lema 2.1.2 *Fie $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, n}$ şi $p, q > 1$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right]^{1/q} \qquad \text{inegalitatea lui Hölder (1859 - 1937).}$$

Demonstraţie: Presupunem că cel puţin un $a_i \neq 0$ respectiv, $b_i \neq 0$. Fie $a = \dfrac{a_i}{\left[\sum_{i=1}^n a_i^p\right]^{1/p}}$ şi $b = \dfrac{b_i}{\left[\sum_{i=1}^n b_i^q\right]^{1/q}}$.

Folosind lema 2.1.1 pentru a şi b obţinem

$$\frac{a_i b_i}{\left[\sum_{i=1}^n a_i^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^n b_i^q\right]^{1/q}} \leq \frac{a_i^p}{p \sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{b_i^q}{q \sum_{i=1}^n b_i^q}, \quad i = 1, n.$$

Însumând după i avem

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\left[\sum_{i=1}^n a_i^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^n b_i^q\right]^{1/q}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{p \sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{\sum_{i=1}^n b_i^q}{q \sum_{i=1}^n b_i^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

de unde

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right]^{1/q}.$$

Lema 2.1.3 *Fie* $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1,n}$ *şi* $p \geq 1$. *Atunci*

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right]^{1/p} \qquad \textit{inegalitatea lui Minkowski.}$$

DEMONSTRAŢIE: Dacă $p = 1$ obţinem chiar egalitate. Pentru $p > 1$ avem

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p &= \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p-1}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p-1}a_i + \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_1)^{p-1}b_i \leq \\
&\leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{n}\left((a_i+b_i)^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} + \\
&\quad + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{n}\left((a_i+b_i)^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} = \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right]^{1/p}\right],
\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right]^{1/p}.$$

Fie $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ şi $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$(D3) \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|^p\right]^{1/p} \tag{2.2}$$

Notăm $a_i = x_i - z_i$ şi $b_i = z_i - y_i$, $i = \overline{1,n}$. Cu notaţiile făcute 2.2 devine

$$\left[\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n}|b_i|\right]^{1/p},$$

ceea ce este adevărat folosind inegalitatea lui Minkowski.

Observaţia 2.1.3 *Dacă nu va fi precizat vom subînţelege pe* $\mathbb{R}^n$ *distanţa euclidiană.*

8. Pentru orice mulţime nevidă X, (X, d) este spaţiu metric, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}$ $d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = y \\ 1, & \text{dacă } x \neq y \end{cases}$, $\forall\, x, y \in X$, este metrica discretă. Un astfel de spaţiu metric se numeşte spaţiu metric discret.

9. Hipercubul de dimensiune n.

Fie $B = \{0, 1\}$ codul binar. Mulţimea $B^n = B \times B \times \cdots \times B$ se numeşte hipercub de dimensiune n. Orice n-uplu $x \in B^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$ reprezintă un cuvânt de cod de lungime n. Definim adunarea modulo 2 în B şi o extindem la elementele din B^n. Astfel $\forall\, x, y \in B^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $x \oplus y = (x_1 \oplus y, x_2 \oplus y_2, \ldots, x_n \oplus y_n)$. Pentru $\forall\, x, y \in B^n$ se defineşte $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \oplus y_i$, adică numărul de componente ale lui x şi y care nu coincid.

Se verifică uşor că (B^n, d) este un spaţiu metric d, unde d se numeşte distanţa Hamming (1915 - 1998).

Hipercubul de dimensiune 2 este pătratul având latura de lungime 1 şi ca vârfuri cuvintele de cod 00, 01, 10, 11. Hipercubul de dimensiune 3 este cubul obişnuit de latură având lungimea 1, iar ca vârfuri cuvintele de cod 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110 şi 111.

Mulţimea B^n are o interpretare remarcabilă şi anume $B^n \simeq A_n$, unde A_n este mulţimea de numere naturale $\{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$. Orice număr $x \in A_n$ are o reprezentare unică de forma $x = \sum_{i=1}^n a_i 2^{i-1}$ cu $a_i \in B$ şi poate fi astfel identificat cu punctul $a_1 a_2 \ldots a_n \in B^n$.

10. Proiecţia stereografică.

Fie o sferă în $\mathbb{R}^3$ cu centrul în $O(0,0,0)$ şi N extremitatea cealaltă a diametrului ce trece prin O. Orice punct z din planul complex xOy va fi proiectat într-un punct P de pe sferă prin intersecţia sferei cu dreapta Nz. Astfel fiecărui punct din plan îi corespunde un punct de pe sferă şi, reciproc, fiecărui punct de pe sferă îi corespunde un punct din plan. Această corespondenţă este o corespondenţă homeomorfă.

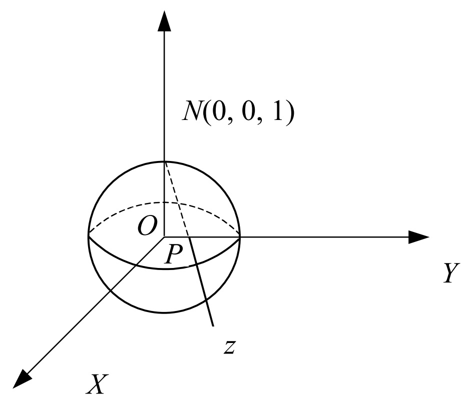

Figura 2.1:

Definim o metrică pe $\mathbb{C}$ (alta decât metrica în plan) numită metrica sferică în $\mathbb{C}$ astfel:

$$\delta : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$
$$\delta(z, z') = d(P, P') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |z'|^2}},$$

unde d este metrica euclidiană în $\mathbb{R}^3$.

Această operaţie, prin care punctele din plan se pun în corespondenţă cu punctele sferei, se numeşte proiecţie stereografică prin polul N, iar sfera se numeşte sfera lui Riemann (1826 - 1866).

Dacă $z \in \mathbb{C}$ se îndepărtează de originea O $(|z| \to \infty)$, atunci punctul P se apropie pe sferă de punctul N şi vom identifica elementul de la infinit cu N de pe sferă. În acest fel în planul complex vom vorbi de un singur punct la infinit.

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se numeşte planul complex compactificat.

Punctul P are coordonatele

$$P\left(\xi = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \qquad \eta = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \qquad \zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.\right)$$

Invers, orice punct $P \neq N$ al sferei va determina un singur punct $z \in \mathbb{C}$ prin intersecţia dreptei NP cu planul $\xi = 0$. Dacă P are coordonatele $P(\xi, \eta, \zeta)$, atunci $z = \dfrac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$.

11. Fie A o mulţime nevidă, $A \subset \mathbb{R}^n$.

$(\mathcal{M}(A), d)$ este spaţiu metric, unde $\mathcal{M}(A)$ este mulţimea funcţiilor numerice, reale, mărginite definite pe A, iar $d : \mathcal{M}(A) \times \mathcal{M}(A) \to \mathbb{R}$ definită prin $d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$, $\forall\, f, g \in \mathcal{M}(A)$ este distanţa uniformă.

Verificarea condiţiilor (D1), (D2) şi (D4) este imediată. Arătăm că are loc şi condiţia (D3). Avem inegalităţile evidente $\forall\, f, g, h \in \mathcal{M}(A)$, $\forall\, x \in A$

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in A} |h(x) - g(x)|.$$

Atunci
$$\sup_{x\in A}|f(x)-g(x)| \le \sup_{x]\in A}|f(x)-h(x)| + \sup_{x\in A}|h(x)-g(x)|,$$
adică $d(f,g) \le d(f,h)+d(h,g)$, $\forall\, f,g,h \in \mathcal{M}(A)$.

12. $(C^k([a,b]),d)$ este spaţiul metric, unde $C^k([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f, f', f'', \ldots, f^{(k)}$ sunt continue pe $[a,b], k \in \mathbb{N}\}$, iar $d : C^k([a,b]) \times C^k([a,b]) \to \mathbb{R}$ este definită prin
$$d(f,g) = \sum_{i=0}^{k} \max_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)| \quad \text{metrica Cebâşev (1821 - 1894).}$$

2.2 Spaţii vectoriale

Definiţia 2.2.1 *Fie V o mulţime nevidă şi $(K,+,\cdot)$ un corp comutativ. Spunem că pe V s-a definit o structură de spaţiu vectorial (sau spaţiu liniar) peste corpul K, dacă s-au definit o lege de compoziţie internă pe V, notată cu $\oplus$,*
$$\begin{aligned} &V \times V \to V \\ &(v,w) \to v \oplus w \end{aligned}$$
şi o lege de compoziţie externă, notată cu $\odot$,
$$\begin{aligned} &K \times V \\ &(\alpha, v) \to \alpha \odot v\,, \end{aligned}$$
care verifică următoarele axiome:

(V1) $(V,\oplus)$ *este grup abelian;*

(V2) $(\alpha+\beta)\odot v = \alpha\odot v \oplus \beta \odot v, \quad \forall\, \alpha,\beta\in K,\ \forall\, v\in V;$

(V3) $\alpha \odot (v\oplus w) = \alpha\odot v \oplus \alpha\odot w, \quad \alpha\in K,\ \forall\, v,w \in V;$

(V4) $\alpha\odot(\beta\odot v) = (\alpha\beta)\odot v, \quad \alpha,\beta\in K,\ \forall\, v\in V;$

(V5) Dacă 1 este elementul unitate al corpului K, atunci $1\odot v = v,\ \forall\, v\in V$.

$(V,K,\oplus,\odot)$ se numeşte spaţiu vectorial (liniar) peste corpul K sau K spaţiu vectorial. Elementele lui V se numesc vectori, iar elementele lui K se numesc scalari. Dacă $K=\mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{C}$, atunci $(V,K,\oplus,\odot)$ este un spaţiu vectorial real, respectiv complex.

Exemplu 2.2.1

1. *Dacă fixăm un corp $(K,+,\cdot)$, atunci pe acest corp avem o structură de K spaţiu vectorial.*

2. *Dacă $V=\mathbb{R}^n$, $K=\mathbb{R}$ şi pentru orice $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ $\alpha\in\mathbb{R}$, definim cele două operaţii*
$$\begin{aligned} &x\oplus y = (x_1+y_1, x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)\\ &\alpha\odot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n), \end{aligned}$$
atunci $\mathbb{R}^n$ este un spaţiu vectorial real n dimensional.

3. *Dacă $V = C^0([a,b]) = \{f : [a,b]\to\mathbb{R} \,|\, f$ continuă$\}$, $K=\mathbb{R}$ şi $\forall\, f,g\in C^0([a,b])$, $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$ şi $\forall\, x\in[a,b]$ definim cele două operaţii:*
$$\begin{aligned} &(f\oplus g)(x) = f(x)+g(x)\\ &(\alpha\odot f)(x) = \alpha f(x) \quad , \end{aligned}$$
atunci $(C^0([a,b]),\mathbb{R},\oplus,\odot)$ devine spaţiu vectorial real.

4. $(C^k([a,b]), K, \oplus, \odot)$ *este spaţiu vectorial real, unde* $\oplus$ *şi* $\odot$ *sunt operaţiile definite la exemplul 3.*

Convenim ca atunci, când nu se produce confuzie, operaţia internă să fie notată cu " + ", iar cea externă " $\cdot$ " şi K-spaţiul vectorial $(V, K, +, \cdot)$ să-l notăm cu V sau V/K.

Definiţia 2.2.2 *Fie* V *un* K *spaţiu vectorial real sau complex. O aplicaţie* $q : V \to \mathbb{R}$ *ce verifică proprietăţile:*

(N1) $q(v) \geq 0, \ \forall\, v \in V$ *şi* $q(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$;

(N2') $q(v) = q(-v), \ \forall\, v \in V$;

(N3) $q(v_1 + v_2) \leq q(v_1) + q(v_2), \ \forall\, v_1, v_2 \in V$ *(proprietatea de subaditivitate), se numeşte cvasinormă.*

Dacă întărim condiţia (N2') prin condiţia:

(N2) $q(\alpha v) = |\alpha| q(v), \ \forall\, v \in V$, *atunci cvasinorma se numeşte normă.*

Observaţia 2.2.1 *1.* $\forall\, v_1, v_2, \ldots, v_n \in V \ q\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) \leq \sum_{i=1}^n q(v_i)$.

2. $\forall\, v_1, v_2 \in V \ |q(v_1) - q(v_2)| \leq q(v_1 - v_2)$.

3. Vom nota, în mod curent, norma prin $\|\cdot\|$.

Exemplu 2.2.2 *Fie* $V = \mathbb{R}^n$ *şi* $K = \mathbb{R}$. *Pentru orice* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *se definesc*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^{1/2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|.$$

Considerăm un spaţiu vectorial real V şi o metrică $d : V \times V \to \mathbb{R}$. Atunci (V, d) va fi spaţiu metric. Fie funcţia $q : V \to \mathbb{R}$ definită prin

$$q(v) = d(v, 0_V) \tag{2.3}$$

şi presupunem, că distanţa d este invariantă la translaţii, adică

$$d(v_1 + v, v_2 + v) = d(v_1, v_2), \qquad \forall\, v, v_1, v_2 \in V.$$

Deoarece $d(v, 0_V) \geq 0$ avem $q(v) \geq 0$, $\forall\, v \in V$; $q(v) = 0 \Leftrightarrow d(v, 0_V) = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$ din (D1) şi (D4) definiţia 2.1.1, deci q verifică (N1).

$\forall\, v \in V\ q(v) = d(v, 0_V) = d(v - v, 0_V - v) = d(0_V, -v) = d(-v, 0_V) = q(-v)$, adică are loc (N2').

$\forall\, v_1, v_2 \in V\ q(v_1 + v_2) = d(v_1 + v_2, 0_V) = d(v_1, -v_2) \leq d(v_1, 0_V) + d(0_V, -v_2) = q(v_1) + q(v_2)$, deci q verifică şi (N3).

Observăm că, pornind cu o metrică invariantă la translaţii, ajungem la o cvasinormă. Are loc şi reciproca, adică o cvasinormă determină o metrică invariantă la translaţii.

Fie $q : V \to \mathbb{R}$ o cvasinormă pe spaţiul vectorial real V şi definim funcţia $d : V \times V \to \mathbb{R}$

$$d(v_1, v_2) = q(v_1 - v_2) \tag{2.4}$$

Atunci

$$\begin{array}{ll}
\forall\, v \in V & d(v, v) = q(v - v) = q(0_V) = 0 \Rightarrow (D1); \\
\forall\, v_1, v_2 \in V & d(v_1, v_2) = q(v_1 - v_2) = q(v_2 - v_1) = d(v_2, v_1) \Rightarrow (D2); \\
\forall\, v_1, v_2, v_3 \in V & d(v_1, v_2) = q(v_1 - v_2) = q(v_1 - v_3 + v_3 - v_2) \leq \\
& \leq q(v_1 - v_3) + q(v_3 - v_2) = d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2) \Rightarrow (D3).
\end{array}$$

Dacă $v_1, v_2 \in V$ $d(v_1, v_2) = 0 \Rightarrow q(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow (D4)$; $\forall\, v_1, v_2, v \in V \quad d(v_1 + v, v_2 + v) = q(v_1 + v - v_2 - v) = q(v_1 - v_2) = d(v_1, v_2)$, adică d definită prin (2.4) este o metrică invariantă la translaţii pe V. Deci metricele invariante la translaţii sunt generate de cvasinorme.

Dacă în (2.3) considerăm că d este o metrică compatibilă cu înmulţirea cu scalarii, adică $\forall\, \alpha \in K$, $\forall\, v_1, v_2 \in V$ $d(\alpha v_1, \alpha v_2) = |\alpha| d(v_1, v_2)$, atunci q definit de (2.3) este o normă. Într-adevăr, $q(\alpha v) = d(\alpha v, 0_V) = |\alpha| d(\alpha, 0_V) = |\alpha| q(v)$, prin urmare are loc (N2).

Dacă q este o normă, atunci metrica d definită de (2.4) este compatibilă cu înmulţirea cu scalarii. Într-adevăr, pentru orice $v_1, v_2 \in V, \forall\, \alpha \in K$ avem

$$d(\alpha v_1, \alpha v_2) = q(\alpha v_1 - \alpha v_2) = q(\alpha(v_1 - v_2)) = |\alpha| q(v_1 - v_2) = |\alpha| d(v_1, v_2).$$

Astfel avem o corespondenţă biunivocă între metricele invariante la translaţii şi compatibile cu înmulţirea cu scalarii şi norme. Metricele care au fost introduse la exemplele de la spaţii metrice sunt induse de norme (distanţa sferică nu este indusă de nici o normă) şi, la rândul lor, induc norme.

Definiţia 2.2.3 *Un K spaţiu vectorial pe care s-a definit o normă se numeşte spaţiu vectorial normat.*

Definiţia 2.2.4 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial, unde $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. O funcţie $(\cdot\,, \cdot) : V \times V \to K$ se numeşte produs scalar dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăţi*

$$\begin{array}{ll} P1 & (x,x) \geq 0, \forall\, x \in V \quad i \quad (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta; \\ P2 & (x,y) = (\overline{y,x}), \forall\, x, y \in V; \\ P3 & (x+y, z) = (x,z) + (y,z), \forall\, x,y,z \in V; \\ P4 & (\alpha x, y) = \alpha(x,y), \forall\, \alpha \in K, \forall\, x,y \in V. \end{array}$$

Exemplu 2.2.3 *În spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^n$ funcţia*

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 2.2.5 *Un spaţiu vectorial pe care s-a definit un produs scalar se numeşte spaţiu prehilbertian.*

Teorema 2.2.1 *Inegalitatea Cauchy - Buniakovski - Schwarz.*

Dacă $(V, K, +, \cdot)$ este un spaţiu prehilbertian înzestrat cu un produs scalar $(\cdot\,, \cdot)$, atunci

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}, \quad \forall\, x, y \in V.$$

Demonstraţie. Fie $x, y \in V$ şi $\alpha \in \mathbb{C}$. Avem

$$0 \leq (\alpha x + y, \alpha x + y) = |\alpha|^2 (x,x) + \alpha(x,y) + \overline{\alpha(x,y)} + (y,y) \tag{2.5}$$

Dacă $(x,y) = 0$, atunci relaţia din enunţ are loc. Dacă $(x,y) \neq 0$, atunci în (2.5) fie $\alpha = \dfrac{\overline{(x,y)}}{|(x,y)|} t, t \in \mathbb{R}$. Avem $t^2 (x,x) + 2t|(x,y)| + (y,y) \geq 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$, $\forall\, x, y \in V$.

Teorema 2.2.2 *Orice spaţiu prehilbertian este un spaţiu normat.*

DEMONSTRAŢIE: Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu prehilbertian înzestrat cu un produs scalar $(\cdot\,,\cdot):V\to K$ şi definim funcţia $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}$ $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$. Arătăm că funcţia $\|\cdot\|$ este o normă. Avem

$$\begin{aligned}
&\|x\|=0\Leftrightarrow\sqrt{(x,x)}=0\Leftrightarrow(x,x)=0\Leftrightarrow x=\theta\\
&\|\alpha x\|=\sqrt{(\alpha x,\alpha x)}=\sqrt{\alpha\bar{\alpha}(x,x)}=\sqrt{|\alpha|^2(x,x)}=|\alpha|\sqrt{(x,x)}=|\alpha|\|x\|\\
&\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=\\
=\ &\|x\|^2+\|y\|^2+(x,y)+\overline{(x,y)}=\|x\|^2+\|y^2\|+2\,\mathrm{Re}\,(x,y)\le\\
\le\ &\|x\|^2+\|y\|^2+2|(x,y)|\le\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\,\|y\|=(\|x\|+\|y\|)^2,
\end{aligned}$$

adică $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$.

2.3 Topologia indusă de o metrică

Definiţia 2.3.1 *Fie X un spaţiu metric, $x\in X$ un punct fixat şi $r>0$ un număr real pozitiv. Mulţimea $S(x,r)=\{y\in X\,|\,d(x,y)<r\}$ se numeşte sferoid deschis centrat în x de rază r.*

Exemplu 2.3.1 *1. Fie $X=\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ şi $r>0$.*

$$S(x,r)=\{y\in\mathbb{R}\,|\,|x-y|<r\}=(x-r,x+r).$$

Aşadar, sferoizii deschişi din $\mathbb{R}$ sunt intervalele deschise din $\mathbb{R}$.

2. Fie $X=\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in X$ şi $r>0$.

$$S(x,r)=\{y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,(y_i-x_i)^2<r^2\}.$$

Pentru $n=2$ sferoizii din $\mathbb{R}^2$ reprezintă discurile din $\mathbb{R}^2$, iar pentru $n=3$ sferoizii din $\mathbb{R}^3$ sunt sferele pline din $\mathbb{R}^3$.

3. Fie $X=C^0([a,b])$, $f\in C^0([a,b])$ şi $r>0$.

$$S(f,r)=\{g\in C^0([a,b])\,|\,d(f,g)<r\}=\{g\in C^0([a,b])\,|\,\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|<r\}.$$

$$g\in S(f,r)\Rightarrow|f(x)-g(x)|<r,\ \ \forall\,x\in[a,b]\Rightarrow f(x)-r<g(x)<f(x)+r,\ \ x\in A,$$

aşadar $S(f,r)$ este mulţimea funcţiilor g ce au graficul situat între graficele funcţiilor $f-r, f+r$.

Fie X un spaţiu metric.

Definiţia 2.3.2 *Se numeşte vecinătate a punctului $x\in X$ orice mulţime $V\subset X$ pentru care există un sferoid deschis centrat în x, adică $\exists\,S(x,r)\subset V$, $r>0, r\in\mathbb{R}$.*

Pentru orice $x\in X$ notăm $\mathcal{V}_x=\{V\subset X\,|\,V$ vecinătate a punctului $x\in X\}$.

Observaţia 2.3.1 *Orice sferoid cu centrul în x este o vecinătate a lui x.*

Teorema 2.3.1 *Proprietăţile vecinătăţilor unui punct, într-un spaţiu metric X.*

1. $\forall\, V \in \mathcal{V}_x$ *avem* $x \in V$;

2. Dacă $V \in \mathcal{V}_x$ *şi* $V \subset U$, *atunci* $U \in \mathcal{V}_x$;

3. Dacă $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$, *atunci* $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$;

4. Dacă $V \in \mathcal{V}_x$, *atunci* $\exists\, U \in \mathcal{V}_x$, $U \subset V$ *astfel încât* $\forall\, y \in U$, $V \in \mathcal{V}_y$

5. Dacă $x \neq y$, $x, y \in X$, *atunci* $\exists\, V \in \mathcal{V}_x$ *şi* $V \in \mathcal{V}_y$ *astfel încât* $V \cap U = \emptyset$ *(proprietatea Haussdorf).*

Demonstraţie: 1. evident.

2. Dacă $V \in \mathcal{V}_x$, atunci $\exists\, r > 0$ astfel încât $S(x, r) \subset V$. Cum $V \subset U$ rezultă că $\exists\, r > 0$ astfel încât $S(x, r) \subset U$, de unde $U \in \mathcal{V}_x$.

3. Din $V_i \in \mathcal{V}_x$, $i = \overline{1, 2}$ rezultă că există $r_i > 0$ astfel încât $S(x, r_i) \subset V_i$, $\forall\, i = \overline{1, 2}$. Alegând $r = \min(r_1, r_2) > 0$, avem $S(x, r) \subset V_1 \cap V_2$ şi, deci, $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$.

4. Cum $V \in \mathcal{V}_x$, rezultă că există $r > 0$ astfel încât $S(x, r) \subset V$. Dacă luăm $U = S(x, r) \in \mathcal{V}_x$, atunci aceasta satisface cerinţa.

5. Întrucât $x \neq y$, rezultă $d(x, y) > 0$. Fie $r = \dfrac{1}{3} d(x, y) > 0$ şi $V = S(x, r) \in \mathcal{V}_x$, $U = S(y, r) \in \mathcal{V}_y$. Presupunem că $V \cap U \neq \emptyset$, adică $\exists\, z \in V \cap U$. Din $z \in V \cap U \Rightarrow d(x, z) < r$ şi $d(y, z) < r$. Însă

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r = \frac{2}{3} d(x, y) \Rightarrow \frac{1}{3} d(x, y) < 0,$$

ceea ce contravine faptului că $d(x, y) > 0$. Astfel, presupunerea făcută este falsă, prin urmare, $V \cap U = \emptyset$.

Definiţia 2.3.3 *Fie X un spaţiu metric. Submulţimea $D \subset X$ se numeşte deschisă sau un deschis al spaţiului X dacă $D \in \mathcal{V}_x$, $\forall\, x \in D$, adică o dată cu orice punct al ei conţine un sferoid centrat în acel punct.*

Teorema 2.3.2 *Fie X un spaţiu metric, $a \in X$ şi $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$. Atunci $S(a, r)$ este o mulţime deschisă.*

Demonstraţie: Fie $b \in S(a, r)$, $d(a, b) < r$ şi notăm $r_1 = r - d(a, b) > 0$. Pentru ca $S(a, r)$ să fie o mulţime deschisă e suficient să arătăm că $S(b, r_1) \subset S(a, r)$.

$x \in S(b, r_1) \Rightarrow d(x, b) < r_1 = r - d(a, b) \Rightarrow d(x, b) + d(a, b) < r$; $d(x, a) \leq d(x, b) + d(a, b) \Rightarrow d(x, a) < r$, adică $x \in S(a, r)$.

Definiţia 2.3.4 *Fie X un spaţiu metric. O submulţime $F \subset X$ se numeşte închisă sau un închis al spaţiului X, dacă $X - F = C_X F$ este deschisă.*

Exemplu 2.3.2 *1. $\emptyset$ şi X sunt în acelaşi timp mulţimi deschise şi închise.*

2. Pentru $X = \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ intervalele (a, b), (a, ∞), $(-\infty, a)$ sunt mulţimi deschise, intervalele $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$ sunt mulţimi închise, dar intervalele $[a, b)$, $(a, b]$ nu sunt nici închise, nici deschise. Mulţimea $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ este închisă, dar mulţimea $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nu este nici închisă, nici

deschisă.

3. *Pentru* $X = \mathbb{R}^2$ *mulţimile* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < r^2\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 > r^2\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r^2 < x^2+y^2 < R^2\}$, *unde* $r, R \in \mathbb{R}$, $r, R > 0$, *sunt mulţimi deschise, în timp ce mulţimile* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq r^2\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \geq r^2\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r^2 \leq x^2+y^2 < R^2\}$ *sunt mulţimi închise.*

   Mulţimea formată dintr-un singur punct în $\mathbb{R}^2$ *este închisă ca şi mulţimea* $[a,b] \times [c,d]$.

4. *Fie* Y *un spaţiu metric şi* $X \subset Y$ *spaţiul metric cu distanţa indusă. O submulţime* $A \subset X$ *este deschisă în* $X \Leftrightarrow\ \exists\, D \subset Y$ *deschisă astfel încât* $A = D \cap X$.

Definiţia 2.3.5 *Dacă* X *este o mulţime şi* $\mathcal{T}$ *o familie de submulţimi ale lui* $X, \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ *ce verifică proprietăţile:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

2. *Orice reuniune de mulţimi din* $\mathcal{T}$ *aparţine lui* $\mathcal{T}$, *adică* $\forall\, A_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$ *avem* $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$;

3. *Orice intersecţie finită de mulţimi din* $\mathcal{T}$ *aparţine lui* $\mathcal{T}$, *adică* $\forall\, A_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$ *cu* I *finită avem* $\cap_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$,

atunci spunem că pe X *este definită o topologie* $\mathcal{T}$, *iar perechea* $(X, \mathcal{T})$ *se numeşte spaţiu topologic.*

Teorema 2.3.3 *Fie* X *un spaţiu metric şi* $\mathcal{T} = \{D \subset X \,|\, D$ *mulţime deschisă*$\}$ *mulţimea deschişilor din X. Atunci* $(X, \mathcal{T})$ *este un spaţiu topologic.*

DEMONSTRAŢIE: 1. evident.

2. Fie $D_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$ mulţimi deschise şi notăm $D = \cup_{i\in I} D_i$. Dacă $a \in D$, atunci $\exists\, i_0 \in I$ astfel încât $a \in D_{i_0}$ şi, cum D_{i_0} este deschisă, $\exists\, S(a,r) \subset D_{i_0} \subset D$, aşadar D este deschisă.

3. Fie $D = \cap_{i\in I} D_i$ unde $D_i \in \mathcal{T}$ sunt mulţimi deschise, $i \in I$, I finită. Dacă $a \in D$, atunci $a \in D_i$, $\forall\, i \in I$. Cum D_i sunt mulţimi deschise, rezultă că $\exists\, S(a, r_i) \subset D_i$, $\forall\, i \in I$. Luând $r = \min_{i\in I} r_i > 0$ avem $S(a,r) \subset D_i$, $\forall\, i \in I$, deci $S(a,r) \subset D$, adică D este mulţime deschisă.

Observaţia 2.3.2 *Din teorema 2.3.3 rezultă că orice spaţiu metric este în mod natural un spaţiu topologic.*

Teorema 2.3.4 *Fie* X *un spaţiu metric şi* $\mathcal{F} = \{F \subset X \,|\, F$ *mulţime închisă*$\}$ *mulţimea închişilor din* X. *Atunci* $(X, C\mathcal{F})$ *este un spaţiu topologic.*

DEMONSTRAŢIE. Cum $F \subset X$ este mulţime închisă $\Leftrightarrow C_x F$ este deschisă şi folosind formula lui de Morgan (1806 - 1871) şi teorema 2.3.3 rezultă cerinţa teoremei.

Observaţia 2.3.3 1. *Intersecţia unei familii infinite de mulţimi deschise nu este întotdeauna deschisă. Dacă considerăm mulţimile* $A_n = \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$ *ele sunt deschise, dar intersecţia lor* $A = \cap_{n\geq 1} A_n = \{0\}$ *nu este deschisă.*

2. *Reuniunea unei familii infinite de mulţimi închise nu este întotdeauna închisă. Dacă considerăm mulţimile* $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$, $n \geq 1$ *ele sunt mulţimi închise, dar reuniunea lor* $A = \cup_{n\geq 1} A_n = (0,1]$ *nu este închisă.*

3. *Orice mulţime finită este închisă, ea fiind reuniune finită de mulţimi formate dintr-un singur element, care sunt mulţimi închise, într-un spaţiu metric.*

Fie X un spaţiu metric şi $A \subset X$ o submulţime a lui X.

Definiţia 2.3.6 *Un punct $a \in A$ se numeşte punct interior lui A dacă există un sferoid centrat în a inclus în A, adică $\exists\, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ astfel încât $S(a, r) \subset A$. Mulţimea $\overset{\circ}{A} = \{a \in X \mid a$ este punct interior lui $A\}$ se numeşte interiorul lui A.*

Definiţia 2.3.7 *Un punct $a \in X$ se numeşte punct aderent lui A dacă orice vecinătate a punctului a are puncte din A, adică $\forall\ V \in \mathcal{V}_a$, $V \cap A \neq \emptyset$. Mulţimea $\bar{A} = \{a \in X \mid a$ punct aderent lui $A\}$ se numeşte aderenţa sau închiderea lui A.*

Definiţia 2.3.8 *Un punct $a \in X$ se numeşte punct exterior lui A dacă este punct interior mulţimii CA, adică $a \in \overset{\circ}{C}A$. Mulţimea punctelor exterioare lui A se numeşte exteriorul lui A şi se notează ExtA.*

Definiţia 2.3.9 *Un punct $a \in X$ se numeşte punct frontieră al mulţimii A dacă nu este nici punct interior nici punct exterior lui A. Mulţimea $\partial A = FrA = \{a \in X \mid a$ punct frontieră al lui $A\}$ se numeşte frontiera lui A.*

Definiţia 2.3.10 *Un punct $a \in X$ se numeşte punct de acumulare al mulţimii A dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}_a$ a punctului a avem $(V \cap A) - \{a\} \neq \emptyset$. Mulţimea $A' = \{a \in X \mid a$ punct de acumulare al lui $A\}$ se numeşte mulţimea punctelor de acumulare sau mulţimea derivată a lui A.*

Orice punct de acumulare al lui A este punct aderent al lui A, dar pot exista puncte aderente ale lui A care să nu fie puncte de acumulare.

Un punct aderent a al lui A, care nu aparţine lui A, este în mod necesar punct de acumulare. Punctele lui A nu sunt în mod necesar puncte de acumulare.

De exemplu, dacă $A = \{a\}$, atunci $a \in \bar{A}$ dar a nu este punct de acumulare al lui A, deoarece A nu conţine nici un alt punct diferit de a, deci nu verifică definiţia punctului de acumulare.

Dacă o mulţime A dintr-un spaţiu metric are un punct de acumulare, atunci ea este infinită. Prin urmare o mulţime finită nu are nici un punct de acumulare. Există şi mulţimi infinite care nu au nici un punct de acumulare cum sunt $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

Definiţia 2.3.11 *Un punct $a \in A$ se numeşte punct izolat al lui A dacă există o vecinătate a lui a ce are ca element comun cu A doar pe a, adică $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $V \cap A = \{a\}$.*

Observaţia 2.3.4 *1.* $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$;
2. $A' \subseteq \bar{A}$ *şi* $\bar{A} = A \cup A'$;
3. $FrA = \bar{A} \cap \overline{CA}$.

Exemplu 2.3.3

1. *Fie* $X = \mathbb{R}$ *şi* $A = (0, 1)$. *Avem* $\overset{\circ}{A} = (0, 1)$, $\bar{A} = [0, 1]$, $FrA = \{0, 1\}$.
2. $X = \mathbb{R}$ *şi* $A = \mathbb{N}$. *Avem* $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$, $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $Fr\mathbb{N} = \mathbb{N}$.
3. $X = \mathbb{R}$ *şi* $A = \mathbb{Q}$. *Avem* $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $Fr\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
4. $X = \mathbb{R}^2$ *şi* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, *atunci* $\overset{\circ}{A} = A$, $\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $FrA = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

5. $X = \mathbb{R}$, $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, *atunci* $A' = \{0\}, \mathring{A} = \emptyset$, $\bar{A} = A' \cup A = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, $FrA = \bar{A}$.

Teorema 2.3.5 *Pentru orice submulţime $A \subset X$, $\mathring{A}$ este cea mai mare mulţime deschisă inclusă în A, relativ la relaţia de incluziune.*

Demonstraţie. Pentru orice $a \in \mathring{A}$ notăm D_a mulţimea deschisă cu $a \in D_a \subset A$. Cum D_a este deschisă, rezultă că A este vecinătate pentru orice $y \in D_a$, prin urmare, $D_a \subset \mathring{A}$. Deoarece $\mathring{A} = \cup_{a \in A} D_a$ obţinem $\mathring{A}$ mulţime deschisă.

Fie $D \subset A$ o mulţime deschisă. Dacă $a \in D \subset A$, atunci $a \in \mathring{A}$, deci $D \subset \mathring{A}$, adică $\mathring{A}$ este cea mai mare mulţime deschisă inclusă în A.

Corolarul 2.3.1 *O mulţime $A \subset X$ este deschisă dacă şi numai dacă $A = \mathring{A}$.*

Demonstraţie: Dacă A este o mulţime deschisă şi, cum $\mathring{A}$ este cea mai mare mulţime deschisă inclusă în A, obţinem $A = \mathring{A}$. Dacă $A = \mathring{A}$ rezultă evident că A este mulţime deschisă.

Teorema 2.3.6 *Pentru orice $A \subset X$ avem $C\bar{A} = \overset{\circ}{CA}$ şi $C\mathring{A} = \overline{CA}$.*

Demonstraţie: $a \in C\bar{A} \Leftrightarrow a \notin \bar{A} \Leftrightarrow \exists\, V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $V \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists\, V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $V \subset CA \Leftrightarrow a \in \overset{\circ}{CA}$, adică $C\bar{A} = \overset{\circ}{CA}$.

Pentru cea de-a doua relaţie avem: $C\overline{CA} = C\overset{\circ}{CA} = \mathring{A} \Leftrightarrow C\mathring{A} = CC\overline{CA} = \overline{CA}$.

Teorema 2.3.7 *Pentru orice $A \subset X$, $\bar{A}$ este cea mai mică mulţime închisă, relativ la relaţia de incluziune, care include pe A.*

Demonstraţie: $C\bar{A} = \overset{\circ}{CA}$ şi, cum $\overset{\circ}{CA}$ este mulţime deschisă, rezultă $\bar{A}$ mulţime închisă. Fie $F \subset X$ o mulţime închisă astfel încât $A \subset F$. Atunci $CF \subset CA$ şi $C\bar{A} = \overset{\circ}{CA} \subset CA$. Dar, întrucât $\overset{\circ}{CA}$ este cea mai mare mulţime deschisă inclusă în CA şi CF este o mulţime deschisă inclusă în CA, rezultă $CF \subset C\bar{A}$, adică $\bar{A} \subset F$.

Corolarul 2.3.2 *Pentru orice $A \subset X$ mulţimea A este închisă dacă şi numai dacă $A = \bar{A}$.*

Demonstraţie: Dacă A este închisă avem $A = \bar{A}$, adică A îşi conţine toate punctele aderente şi, cum $A' \subseteq A$, A îşi conţine toate punctele de acumulare.

Să admitem că A îşi conţine toate puctele de acumulare. Fie $a \in \bar{A}$ şi presupunem că $a \notin A$. Atunci a este punct de acumulare al lui A, deci $a \in A$, contradicţie; rezultă deci că $a \in A$. Cum a a fost ales arbitrar avem $\bar{A} \subseteq A$, deci $A = \bar{A}$, adică A este închisă.

Corolarul 2.3.3 *O mulţime $A \subset X$ este închisă dacă şi numai dacă îşi conţine toate punctele de acumulare.*

Exemplu 2.3.4 *1. Pentru $X = \mathbb{R}$ şi $A = [0, 1]$ avem $\bar{A} = [0, 1] = A$, adică A este închisă.*

2. Mulţimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ şi $\mathbb{R}$ sunt închise, $\mathbb{Q}$ însă nu.

Teorema 2.3.8 *Pentru orice $A \subset X$ $\mathring{A} = \cup_{D \subset A} D$, D deschisă şi $\bar{A} = \cap_{F \supset A} F$, F închisă.*

Demonstraţie: Dacă D este mulţime deschisă, $D \subset A$, rezultă că $\cup_{D\subset A} D$ este mulţime deschisă inclusă în A, deci $\cup_{D\subset A} \subseteq \mathring{A}$.

Fie $a \in \mathring{A}$. Atunci există $D \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $D \subset A$, deci $\mathring{A} \subset \cup_{D\subset A} D$, $D \in v_a$, de unde D este deschisă şi $\mathring{A} = \cup_{D\subset A} D$.

Teorema 2.3.9 *1. O mulţime $A \subset X$ este închisă dacă şi numai dacă $\partial A \subset A$*

2. O mulţime $A \subset X$ este deschisă dacă şi numai dacă $\partial(CA) \subset CA$.

Demonstraţie: 1. $\partial A = \bar{A} \cap \overline{CA} = \bar{A} \cap C\mathring{A} = \bar{A} \backslash \mathring{A}$, deci $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$; A este închisă $\Leftrightarrow A = \mathring{A} \cup \partial A$, adică $\partial A \subset A$.

2. A este deschisă $\Leftrightarrow CA$ este închisă $\Leftrightarrow \partial(CA) \subset CA$.

Observaţia 2.3.5 *1. Există mulţimi în $\mathbb{R}$ pentru care $\partial A = A$, de exemplu, $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.*

2. Fie X un spaţiu metric. Dacă $A \subset B \subset X$, atunci $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ şi $\bar{A} \subset \bar{B}$, dar în general $FrA \not\subset FrB$. Dacă $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ şi $B = \mathbb{Q} \cup [0,1]$ avem $A \subset B$, $FrA = \mathbb{R}$, dar $FrB = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

2.4 Convergenţa în spaţii metrice

Fie (X, d) un spaţiu metric.

Definiţia 2.4.1 *Orice aplicaţie $f : \mathbb{N} \to X$ $f(n) \overset{not}{=} x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se numeşte şir de elemente din X şi se notează $(x_n)_n$ sau simplu (x_n). Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, x_n se numeşte termenul general al şirului (x_n).*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & N \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Definiţia 2.4.2 *Fie $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o aplicaţie strict crescătoare. Se numeşte subşir al şirului (x_n) din X orice aplicaţie $g : \mathbb{N} \to X$ care realizează comutativitatea diagramei adică $(f \circ h)(n) = g(n)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, de unde avem $g(n) = f(h(n)) = x_{h(n)}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Exemplu 2.4.1 $(x_{2n+1}), (x_{2n}), (x_{n^2})$ *reprezintă subşiruri ale unui şir (x_n) din X.*

Definiţia 2.4.3 *Fie (x_n) un şir de puncte din X şi $l \in X$. Spunem că şirul (x_n) are limita l, sau că este convergent către l, dacă $\lim_{n\to\infty} d(x_n, l) = 0$ sau $d(x_n, l) \to 0$ pe $\mathbb{R}$, $n \to \infty$. Notăm $x_n \to l$ pe X, sau dacă nu este pericol de confuzie $x_n \to l$.*

Observaţia 2.4.1 *Definiţii echivalente ale limitei de şiruri.*
Întrucât $d(x_n, l) \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ avem:

1. $x_n \to l \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ $d(x_n, l) < \varepsilon$;
2. $x_n \to l \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ $x_n \in S(l, \varepsilon)$
3. $x_n \to l \Leftrightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}_l,\ \exists\, n_V \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall\, n \geq n_V$ $x_n \in V$.

Teorema 2.4.1 *Unicitatea limitei*
Orice şir de puncte convergent din X are limită unică.

Demonstraţie: Presupunem că şirul convergent (x_n) de puncte din X nu are limită unică, adică există $l_1 \neq l_2$, $l_1, l_2 \in X$ astfel încât $x_n \to l_1$ şi $x_n \to l_2$.

Cum $l_1 \neq l_2$, $l_1, l_2 \in X$, conform proprietăţii Haussdorf, există $V_1 \in \mathcal{V}_{l_1}$ şi $V_2 \in \mathcal{V}_{l_2}$ astfel ca $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Din $x_n \to l_1$ şi $x_n \to l_2$ folosind observaţia 2.4.1 punctul 3 pentru V_1, respectiv V_2 rezultă că există $n_{V_1}, n_{V_2} \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in V_1$, $\forall\, n \geq n_{V_1}$, respectiv $x_n \in V_2$, $\forall\, n \geq n_{V_2}$. Atunci pentru orice $n \geq \max(n_{V_1}, n_{V_2})$ avem $x_n \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ceea ce este fals, aşadar $l_1 = l_2$.

Observaţia 2.4.2 *Limita unui şir convergent fiind unică se poate nota* $\lim_{n\to\infty} x_n = l$.

Exemplu 2.4.2 *1. Şirul* $x_n = \left(\frac{n}{2n+1}, \frac{2^n-1}{2^n+1}, \frac{1}{n}, \sqrt[n]{2}\right)$, $\quad n \geq 1$, *din* $\mathbb{R}^4$, *converge către* $l = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 1\right)$, *deoarece*

$$d(x_n, l) = \left[\left(\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2^n-1}{2^n+1} - 1\right)^2 + \frac{1}{n^2} + \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

2. Într-un spaţiu metric discret un şir este convergent dacă şi numai dacă, începând de la un anumit rang, şirul este constant.

Teorema 2.4.2 *Orice subşir al unui şir convergent* (x_n)*, de puncte din X, are aceeaşi limită ca şirul* (x_n).

Demonstraţie: Fie $(x_{h(n)})$ un subşir al şirului convergent (x_n) din X, unde $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o aplicaţie strict crescătoare, $h(n) \geq n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(x_n) este convergent $\Leftrightarrow$ $\exists\, l \in X, \forall\, V \in \mathcal{V}_l,\ \exists\, n_V \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in V$, $\forall\, n \geq n_V$.

Întrucât $h(n) \geq n$ avem $x_{h(n)} \in V$, $\forall\, n \geq n_V$, adică $x_{h(n)} \to l$.

Caracterizarea mulţimilor închise cu ajutorul şirurilor

Teorema 2.4.3 *Fie* X *un spaţiu metric şi* $A \subset X$ *o submulţime.*

1. *Un punct* $l \in X$ *aparţine lui* $\bar{A}$ *dacă şi numai dacă există un şir* (x_n) *de puncte din* A *aşa încât* $x_n \to l$ *pe* X.
2. *Mulţimea* A *este închisă dacă şi numai dacă limita oricărui şir convergent de puncte din* A *aparţine lui* A.

Demonstraţie.

1. Dacă $l \in \bar{A}$, atunci pentru orice $n \geq 1 \quad S\left(l, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$. Fie $x_n \in A \cap S\left(l, \frac{1}{n}\right), n \geq 1$.

   Obţinem un şir de puncte $(x_n) \subset A$ astfel încât $d(x_n, l) < \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, adică $x_n \to l$ pe X.

   Reciproc, dacă (x_n) este un şir de puncte din A şi $x_n \to l$ pe X, atunci rezultă că în orice sferoid centrat în l se află puncte ale şirului, deci puncte din A, aşadar $a \in \bar{A}$.

2. Presupunem mulţimea A închisă şi $x_n \to l, x_n \in A, n \geq 1$. Conform punctului 1 al teoremei $l \in \bar{A}$, dar cum A este închisă, rezultă $l \in A$.

   Reciproc, dacă limita oricărui şir convergent de puncte din A aparţine lui A, atunci conform punctului 1 al teoremei, rezultă $\bar{A} \subseteq A$, adică mulţimea A este închisă.

Definiţia 2.4.4 *O submulţime $A \subset X$ a unui spaţiu metric X se numeşte densă dacă orice punct din X este limita unui şir convergent de puncte din A.*

Teorema 2.4.4 *O submuţime $A \subset X$ a unui spaţiu metric X este densă dacă şi numai dacă $\bar{A} = X$.*

DEMONSTRAŢIE. A este densă $\Leftrightarrow \forall\, l \in X$ este limita unui şir de puncte din $A \Leftrightarrow$ conform teoremei 2.4.3 $\forall\, l \in X, l \in \bar{A} \Leftrightarrow X \subset \bar{A} \Leftrightarrow X = \bar{A}$.

Exemplu 2.4.3 *Pentru $X = \mathbb{R}$ submulţimile $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sunt dense. Într-adevăr, în orice interval $\left(l - \frac{1}{n}, l + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$ alegem $x_n \in \mathbb{Q}$ şi $y_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Atunci $x_n, y_n \to l$, deci $\bar{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} - \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*

Definiţia 2.4.5 *Un şir de puncte (x_n) din X se numeşte şir fundamental sau şir Cauchy dacă $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall\, n, m \geq n(\varepsilon)$.*

Observaţia 2.4.3 *(x_n) este şir fundamental $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\, p \geq 1$.*

Definiţia 2.4.6 *Un şir (x_n) din X se numeşte mărginit dacă există $S(a, r), a \in X, r > 0$ astfel încât $x_n \in S(a, r)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 2.4.5 *Fie (x_n) un şir de puncte din X.*
1. *Dacă şirul (x_n) este convergent, atunci el este fundamental.*
2. *Dacă şirul (x_n) este fundamental, atunci el este mărginit.*

DEMONSTRAŢIE: 1. (x_n) şir convergent $\Rightarrow \exists\, l \in X, \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$. Pentru orice $m, n \geq n(\varepsilon)$ avem $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, l) + d(x_m, l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, adică (x_n) este şir fundamental.

2. (x_n) şir fundamental $\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall\, n, m \geq n(\varepsilon)$. Luând $m = n(\varepsilon)$ obţinem $x_n \in S(x_{n(\varepsilon)}, \varepsilon)$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$. Dacă $r = \max(d(x_0, x_{n(\varepsilon)}), d(x_1, x_{n(\varepsilon)}), \ldots, d(x_{n(\varepsilon)-1}, x_{n(\varepsilon)}), \varepsilon)$, atunci $x_n \in S(x_{n(\varepsilon)}, r)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, aşadar şirul (x_n) este mărginit.

Observaţia 2.4.4 *În general nu orice şir fundamental este convergent. $\mathbb{Q}$ cu distanţa euclidiană d este spaţiu metric, fiind subspaţiu al spaţiului metric $(\mathbb{R}, d)$.*

Pentru $\sqrt{2}$ considerăm şirurile aproximaţiilor prin lipsă şi adaos:

$$1 < 1,4 < 1,41 < \cdots < \sqrt{2} \cdots < 1,42 < 1,5 < 2.$$

Obţinem două şiruri de numere raţionale (q_n) şi (q'_n) cu următoarele proprietăţi:

$$q_0 < q_1 < \cdots < q_n < \cdots < \sqrt{2} < \cdots < q'_n < \cdots < q'_1 < q'_0 \quad \text{şi}$$

$$q'_n - q_n = \frac{1}{10^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

După cum au fost construite cele două şiruri (q_n) şi (q'_n) rezultă $q_n < \sqrt{2} < q'_n$, prin urmare,

$$\sqrt{2} - q_n < \frac{1}{10^n} \quad \text{respectiv} \quad q'_n - \sqrt{2} < \frac{1}{10^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Trecând la limită în aceste relaţii obţinem $\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} q'_n = \sqrt{2}$.

Şirul (q_n), fiind convergent în $\mathbb{R}$, este fundamental în $\mathbb{R}$; rezultă (q_n) şir fundamental în $\mathbb{Q}$, dar (q_n) nu este convergent în $\mathbb{Q}$, deoarece $\lim_{n\to\infty} q_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Aşadar, reciproca teoremei 2.4.5 punctul 1 nu este, în general, adevărată.

Convergenţa în $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.

Teorema 2.4.6 *Considerăm* (x_n) *un şir de puncte din spaţiul metric* $\mathbb{R}^m$, *relativ la metrica euclidiană,* $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn})$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. *Şirul* (x_n) *este convergent, respectiv fundamental, respectiv mărginit în* $\mathbb{R}^m$ *dacă şi numai dacă cele m şiruri componente* $(x_{1n}), (x_{2n}), \ldots, (x_{mn})$ *din* $\mathbb{R}$ *au simultan această proprietate.*

Demonstraţie: Şirul (x_n) este convergent în $\mathbb{R}^m \Leftrightarrow\ \exists\ l = (l_1, l_2, \ldots, l_m) \in \mathbb{R}^m$ astfel încât $x_n \to l$ pe $\mathbb{R}^m$, adică $d(x_n, l) \to 0$.

Pe de altă parte, se verifică uşor că au loc următoarele inegalităţi:

$$|x_{in} - l_i| \leq \max_{i=\overline{1,m}} |x_{in} - l_i| \leq \left[\sum_{i=1}^{m}(x_{in} - l_i)^2\right]^{1/2} \leq \sum_{i=1}^{m}|x_{in} - l_i|, \qquad \forall\ i = \overline{1,m}.$$

$$d(x_n, l) \to 0 \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{m}(x_{in} - l_i)^2\right]^{1/2} \to 0,$$

care împreună cu

$$|x_{in} - l_i| \leq \left[\sum_{i=1}^{m}(x_i - l_i)^2\right]^{1/2}$$

stabilesc $|x_{in} - l_i| \to 0$, pe $\mathbb{R}$, $\forall\ i = \overline{1,m}$, adică $x_{in} \to l_i$, pe $\mathbb{R}$, $\forall\ i = \overline{1,m}$.

Reciproc, dacă $x_{in} \to l_i$, pe $\mathbb{R}$, $\forall\ i = \overline{1,m}$, atunci $\sum_{i=1}^{m} |x_{in} - l_i| \to 0$, care împreună cu

$$\left[\sum_{i=1}^{m}(x_{in} - l_i)^2\right]^{1/2} \leq \sum_{i=1}^{m}|x_{in} - l_i|\ , \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

ne dau $d(x_n, l) \to 0$, deci $x_n \to l$ pe $\mathbb{R}^m$.

Dacă şirul (x_n) este mărginit în $\mathbb{R}^m$, atunci există $M > 0$ astfel ca $\|x_n\| \leq M$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Cum $|x_{in}| \leq \|x_n\| \leq M$, $\forall\ i = \overline{1,m}$, rezultă că şirul (x_{in}) mărginit $\forall\ i = \overline{1,m}$.

Reciproc, dacă şirurile (x_{in}), $i = \overline{1,m}$ sunt mărginite, atunci există $M_i > 0$ astfel încât $|x_{in}| \leq M$, $\forall\ i = \overline{1,m}$ şi $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Dar

$$\|x_n\| \leq \sum_{i=1}^{m}|x_{in}| \leq \sum_{i=1}^{m} M_i \overset{not}{=} M\ , \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

deci şirul (x_n) este mărginit în $\mathbb{R}^m$.

Dacă şirul (x_n) este fundamental în $\mathbb{R}^m$, atunci $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\left[\sum_{i=1}^{m}(x_{in} - x_{in+p})^2\right]^{1/2} < \varepsilon \quad \forall\ n \geq n(\varepsilon) \quad \text{i} \quad \forall\ p \geq 1,$$

care împreună cu

$$|x_{in} - x_{in+p}| \leq \left[\sum_{i=1}^{m}(x_{in} - x_{in+p})^2\right]^{1/2}$$

stabilesc $|x_{in} - x_{in+p}| < \varepsilon$, $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$, $\forall\ p \geq 1$ şi $\forall\ i = \overline{1,m}$, adică (x_{in}) este şir fundamental $\forall\ i = \overline{1,m}$.

Reciproc, dacă (x_{in}), $i=\overline{1,m}$ sunt şiruri fundamentale, atunci $\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, n_i(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_{in}-x_{in+p}|<\frac{\varepsilon}{m}\,,\qquad \forall\, i=\overline{1,m}\ ,$$

care împreună cu

$$\left[\sum_{i=1}^{m}(x_{in}-x_{in+p})^2\right]^{1/2}\le\sum_{i=1}^{m}|x_{in}-x_{in+p}|$$

ne dau

$$\left[\sum_{i=1}^{m}(x_{in}-x_{in+p})^2\right]^{1/2}<\varepsilon,\quad \forall\, n\ge\max_{i=\overline{1,m}}n_i(\varepsilon),$$

adică (x_n) este şir fundamental în $\mathbb{R}^m$.

Definiţia 2.4.7 *Un spaţiu metric X se numeşte complet dacă orice şir fundamental din X este convergent în X.*

Teorema 2.4.7 $\mathbb{R}$ *este spaţiu metric complet, relativ la metrica euclidiană.*

Demonstraţie: Fie (x_n) un şir fundamental de numere reale. Din teorema 2.4.7 el este mărginit şi conform lemei lui Cesaro (x_n) conţine un subşir convergent, adică $\exists\, h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ o funcţie strict crescătoare ($h(n)\ge n,\ \forall\, n\in\mathbb{N}$) astfel încât $(x_{h(n)})$ este un subşir convergent al şirului (x_n). Deoarece $(x_{h(n)})$ este un şir convergent, rezultă că $\exists\, l\in\mathbb{R}$ astfel ca $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, n'(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ cu $|x_{h(n)}-l|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, n\ge n'(\varepsilon)$. Pe de altă parte, cum (x_n) este şir fundamental avem că $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, n''(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ astfel încât $|x_n-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, n,m\ge n''(\varepsilon)$. Luând $m=h(n)\ge n\ge n''(\varepsilon)$, obţinem

$$|x_n-l|\le|x_n-x_{h(n)}|+|x_{h(n)}-l|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad,\quad \forall\, n\ge\max(n'(\varepsilon),n''(\varepsilon)),$$

aşadar, (x_n) este şir convergent, adică $(\mathbb{R},d)$ este spaţiu metric complet.

Observaţia 2.4.5 *Pentru orice numere reale a,b cu $a<b$, intervale $(-\infty,a]$, $[a,b]$, $[a,\infty)$ sunt spaţii metrice complete.*

Teorema 2.4.8 $\mathbb{R}^m$, $m\ge1$, *este spaţiu metric complet, relativ la metrica euclidiană (şi faţă de celelalte metrici definite pe $\mathbb{R}^m$).*

Demonstraţie: Fie (x_n) un şir fundamental de puncte din $\mathbb{R}^m$, $x_n=(x_{1n},x_{2n},\ldots,x_{mn})\in\mathbb{R}^m$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Atunci, conform teoremei 2.4.6, cele m şiruri componente (x_{in}) de numere reale, $i=\overline{1,m}$, sunt fundamentale . Din teorema 2.4.7 rezultă că şirurile (x_{in}), $i=\overline{1,m}$, sunt convergente în $\mathbb{R}$ şi, aplicând din nou teorema 2.4.6, obţinem că şirul (x_n) este convergent în $\mathbb{R}^m$.

Teorema 2.4.9 *Pentru orice mulţime nevidă A, spaţiul metric $\mathcal{M}(A)$ este complet, relativ la metrica uniformă.*

Demonstraţie: Fie (f_n) un şir fundamental de elemente din $\mathcal{M}(A)$, adică un şir de funcţii mărginite $f_n:A\to\mathbb{R}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ pentru care $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ astfel încât $\|f_m-f_n\|<\varepsilon$, $\forall\, m,n\ge n(\varepsilon)$. Deoarece $|f_m(x)-f_n(x)|\le\sup_{x\in A}|f_m(x)-f_n(x)|=\|f_m-f_n\|<\varepsilon$, $\forall\, m,n\ge n(\varepsilon)$ şi $\forall\, x\in A$, rezultă că pentru orice $x\in A$ şirul de numere reale $(f_n(x))$ este fundamental şi, conform teoremei 2.4.7, $(f_n(x))$ este un şir convergent, care converge către un număr real $f(x)$, unde $f : A \to \mathbb{R}$. Pentru ca teorema să fie demonstrată, trebuie să arătăm că $f \in \mathcal{M}(A)$ şi $f_n \to f$ pe $\mathcal{M}(A)$.

Deoarece (f_n) este un şir fundamental, rezultă că $\forall\, \varepsilon > 0$ există un număr $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\, p \geq 1$ să avem

$$d(f_{n+p}, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.6}$$

Pentru $n = n(\varepsilon)$ avem $d(f_{n(\varepsilon)+p}, f_{n(\varepsilon)}) < \frac{\varepsilon}{2}$, de unde obţinem

$$|f_{n(\varepsilon)+p}(x) - f_{n(\varepsilon)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \forall\, p \geq 1 \quad \text{şi} \quad \forall\, x \in A. \tag{2.7}$$

Atunci când în (2.7) $p \to \infty$ avem $|f(x) - f_{n(\varepsilon)}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, x \in A$, deci $|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |f_{n(\varepsilon)}(x)|$, $\forall\, x \in A$. Cum $f_{n(\varepsilon)} \in \mathcal{M}(A)$, rezultă că şi $f \in \mathcal{M}(A)$.

În relaţia (2.6) îl facem pe p să tindă la ∞ şi obţinem

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \forall\, x \in A \quad \text{şi} \quad \forall\, n \geq n(\varepsilon).$$

Atunci $d(f_n, f) = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,, \ \ \forall\, n \geq n(\varepsilon)$, prin urmare, $f_n \to f$ pe $\mathcal{M}(A)$. Astfel şirul (f_n) este convergent în $\mathcal{M}(A)$ şi spaţiul metric $\mathcal{M}(A)$ este complet.

Definiţia 2.4.8 *Un spaţiu vectorial normat complet $(X, \|\cdot\|)$ se numeşte spaţiu Banach.*

Observaţia 2.4.6 *Din cele demonstrate anterior rezultă că spaţiile vectoriale normate $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ respectiv $\mathcal{M}(A)$ sunt spaţii Banach.*

Definiţia 2.4.9 *Fie $f : X \to X$ o aplicaţie definită pe spaţiul metric X. Se numeşte punct fix al aplicaţiei f orice element $x_0 \in X$ pentru care $f(x_0) = x_0$.*

Exemplu 2.4.4
1. *Pentru funcţia identică a unui spaţiu metric X, $1_X : X \to X$ toate punctele spaţiului sunt puncte fixe.*
2. *Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^4$ are punctele fixe $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.*

Definiţia 2.4.10 *Fie X un spaţiu metric şi $f : X \to X$ o aplicaţie. Spunem că f este o contracţie dacă $\exists\, c \in [0, 1)$ astfel încât $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$, $\forall\, x, y \in X$.*

Dacă f este o contracţie, atunci numărul real $c \in [0, 1)$ se numeşte coeficientul contracţiei f.

Teorema 2.4.10 *Banach (1892-1945)*

În orice spaţiu metric complet X orice contracţie are un singur punct fix.

Demonstraţie: Fie $f : X \to X$ o contracţie.

Unicitatea: Presupunem prin reducere la absurd că $x_1, x_2 \in X$ sunt două puncte fixe ale lui f, $x_1 \neq x_2$, adică $f(x_1) = x_1$ şi $f(x_2) = x_2$. Atunci $\exists\, c \in [0, 1)$ astfel că $d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq cd(x_1, x_2) \Rightarrow (1 - c)d(x_1, x_2) \leq 0$. Dar, cum $x_1 \neq x_2 \Rightarrow d(x_1, x_2) > 0$ şi obţinem $c \geq 1$, ceea ce este o contradicţie.

Existenţa: Ideea demonstraţiei este de a construi un şir fundamental. Fie $x_0 \in X$ un punct arbitrar din spaţiul X. Construim şirul în felul următor: $x_1 = f(x_0)$; avem următoarele posibilităţi $x_1 = x_0$, deci $f(x_0) = x_0$ şi am găsit un punct fix $x_0 \in X$, care este şi singurul, sau $x_1 \neq x_0$, de unde $d(x_1, x_0) = \delta > 0$, $x_2 = f(x_1)$, $\ x_3 = f(x_2), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots, n \geq 1$.

Arătăm că şirul construit mai sus este fundamental.

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq cd(x_1, x_0) = c\delta$$

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq cd(x_2, x_1) = c^2\delta$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d(x_n, x_{n-1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2}) \leq d(x_{n-1}, x_{n-2})) \leq c^{n-1}\delta\ , \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Atunci pentru orice $p \geq 1$ avem

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) \ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq c^n\delta + c^{n+1}\delta + \cdots + c^{n+p-1}\delta = \\ &= c^n\delta\ [1 + c + c^2 + \cdots + c^{p-1}] = c^n\delta\frac{1 - c^P}{1 - c}. \end{aligned}$$

Deoarece $0 \leq c < 1 \Rightarrow c^n \to 0$, deci $c^n\delta\frac{1-c^P}{1-c} \to 0 \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\ p \geq 1$ să avem $c^n\delta\frac{1-c^P}{1-c} < \varepsilon$. Deci $\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\ p \geq 1$ $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$, adică şirul (x_n) este fundamental. Cum spaţiul metric X este complet, rezultă (x_n) şir convergent, aşadar există $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \in X$.

$d(x_{n+1}, f(\xi)) = d(f(x_n), f(\xi)) \leq cd(x_n, \xi)$. Dar, cum $x_n \to \xi$, atunci $d(x_n, \xi) \to 0$, de unde $d(x_{n+1}, f(\xi)) \to 0$, ceea ce implică $x_{n+1} \to f(\xi)$. Deoarece, pe de altă parte, avem $x_{n+1} \to \xi$, din unicitatea limitei unui şir convergent rezultă $f(\xi) = \xi$, adică ξ este unicul punct fix al contracţiei f.

Observaţia 2.4.7 *Metoda de demonstraţie folosită pentru determinarea punctului fix ξ al unei contracţii f se numeşte metoda aproximaţiilor succesice ale lui ξ. Astfel, x_0 este prima aproximaţie, $x_1 = f(x_2)$ a doua aproximaţie, $x_2 = f(x_3)$a treia aproximaţie, ..., $x_n = f(x_{n-1})$ a $n+1$ aproximaţie a lui ξ. Acest şir de aproximaţii converge către ξ. Eroarea făcută în aproximarea $x_n \simeq \xi$ este cu atât mai mică cu cât n este mai mare. Dacă vrem să calculăm ξ cu aproximare mai mică decât ε, este suficient să aflăm n minim astfel ca*

$$d(x_n, \xi) \leq c^n\frac{\delta}{1-c} < \varepsilon.$$

În aplicarea efectivă a principiului contracţiei este important să determinăm în mod convenabil un spaţiu metric complet X precum şi o contracţie $f : X \to X$.

Principiul contracţiei poate fi folosit la rezolvarea într-un spaţiu metric a ecuaţiei $f(x) = x$.

Exemplu 2.4.5 *1. Fie $X = \mathbb{R}$ (sau $[a, b], [a, \infty), (-\infty, a]$). Considerăm o funcţie derivabilă $f : X \to X$. Din teorema creşterilor finite rezultă că există un punct ξ situat între x_1 şi x_2, $x_1, x_2 \in X$ astfel încât $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$. Dacă pe X derivata funcţiei este mărginită şi mai mult este mai mică decât 1, adică $|f'(x)| \leq c < 1$, $\forall\ x \in X$, atunci f este o contracţie şi putem aplica teorema 2.4.10.*

Fie ecuaţia algebrică $x^3 + px + r = 0$, care, scriind-o sub forma $x = \frac{-r}{x^2 + p}$, reduce problema găsirii soluţiilor ecuaţiei iniţiale la determinarea punctelor fixe ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) =$

$\dfrac{-r}{x^2+p}$. *Dacă* $p = 4$ *şi* $r = -1$ *avem* $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$. *Arătăm că* f *este contracţie.*

$$d(f(x), f(y)) = \frac{|x+y|d(x,y)}{(x^2+4)(y^2+4)}.$$

Cu ajutorul şirului lui Rolle (1652 - 1719) găsim că ecuaţia $x^3 + 4x - 1 = 0$ *are o singură rădăcină în intervalul* $[0,1]$. *Vrem să determinăm această rădăcină cu aproximaţie* $\leq 10^{-3}$.

Avem $f : [0,1] \to [0,1]$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+4)^2}$.

$$c = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = \sup \frac{2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2}{25} < 1,$$

$x_0 = 0$, $x_1 = f(x_0) = \frac{1}{4}$, $\delta = d(x_0, x_1) = \frac{1}{4}$. *Determinăm cel mai mic număr natural* n *pentru care avem*

$$\frac{\delta c^n}{1-c} < 10^{-3} \Rightarrow \frac{25}{92}c^n < 10^{-3} \Rightarrow c^n < \frac{92}{25000} \Rightarrow n = 3,$$

deci

$$\xi \simeq x_3 = f(x_2) = f\left(\frac{16}{65}\right) = \frac{1}{\left(\frac{16}{65}\right)^2 + 4} = \frac{4225}{17156} = 0,246269.$$

2. Cu ajutorul principiului contracţiei putem rezolva uneori şi problema determinării zerourilor unei aplicaţii.

Considerăm cazul funcţiilor $f : [a,b] \to [-c,c]$, *derivabile, strict crescătoare. Deoarece* f *este strict crescătoare, rezultă că* $\exists\, m, M$ *astfel încât* $0 < m \leq f'(x) \leq M$, $\forall\, x \in [a,b]$. *Fie* $p \in (m, M)$ *şi* $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{p}$, $x \in [a,b]$.

Dacă g *admite un punct fix* ξ, *din* $\xi = g(\xi)$ *rezultă* $f(\xi) = 0$, *aşadar, punctele fixe ale lui* g *vor fi zerouri pentru* f. *Pentru anumite valori ale lui* p *putem avea* g *contracţie. Cum*

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{p} \Rightarrow 1 - \frac{M}{p} \leq g'(x) \leq 1 - \frac{m}{p} < 1,$$

deoarece $m < p < M$, *şi pentru ca* $|g'(x)| \leq C < 1$ *trebuie să avem* $p > \frac{M}{2}$. *Pentru* $p \in \left(\max\left\{m, \dfrac{M}{2}\right\}, M\right)$ g *devine o contracţie şi se poate aplica principiul contracţiei.*

Dacă punem $p = p(x)$, *se poate extinde procedeul anterior. Pentru* $p(x) = f'(x)$ *obţinem metoda Newton pentru determinarea zerourilor. Avem* $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, *iar dacă* f *este de două ori derivabilă şi* $|f(x)f'(x)| \leq cf'^2(x)$, $0 < c < 1$, *atunci* g *este contracţie şi putem aplica principiul contracţiei.*

Să calculăm aproximativ $\sqrt[p]{a}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$ *folosind metoda Newton. Luăm* $f(x) = x^p - a$ *şi*

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^{p-a}}{px^{p-1}} = \frac{1}{p}[(p-1)x + ax^{1-p}].$$

Cum

$$g'(x) = \frac{p-1}{p}[1 - ax^{-p}] < \frac{p-1}{p} < 1,$$

rezultă că g *defineşte o contracţie şi vom putea afla* $\sqrt[p]{a} \simeq x_n$, *unde* x_n *este al* $(n+1)$ *termen din şirul aproximaţiilor succesive construit cu ajutorul lui* g.

Pentru $p = 2$ *avem* $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, *iar pentru* $p = 3$ $g(x) = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{a}{x^2}\right)$.

3. Considerăm un sistem liniar de forma

$$A\,X = B, \tag{2.8}$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

$a_{kk} \neq 0, \forall\, k = \overline{1,n}$, *şi vrem să-i găsim soluţiile*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

$$(2.8) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \\ \\ \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + x_2 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n = \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 + \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 + \dots + x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}. \end{cases}$$

Astfel, sistemul liniar (2.8) devine

$$I_nX + \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} X = \bar{B},$$

deci $X = \bar{A}X + \bar{B}$, *unde*

$$\bar{A} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad i \qquad \bar{B} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Considerăm funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $f(X) = \bar{A}X + \bar{B}$.

Dacă această funcţie este o contracţie, atunci putem aplica principiul contracţiei şi problema este rezolvată. Să vedem când această funcţie este contracţie.

$$d(f(X), f(Y)) = d(\bar{A}X + \bar{B}, \bar{A}Y + \bar{B}) = \|\bar{A}(X - Y)\| \quad i$$

notăm $X - Y = Z$, $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$.

Atunci

$$\bar{A}Z = -\begin{pmatrix} \frac{a_{12}}{a_{11}}z_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}z_3 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}z_n \\ \\ \frac{a_{21}}{a_{22}}z_1 + \frac{a_{23}}{a_{22}}z_3 \cdots + \frac{a_{2n}}{a_{22}}z_n \\ \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}}z_1 + \frac{a_{n2}}{a_{nn}}z_n + \cdots + \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}z_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \|\bar{A}Z\| &= \left[\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}z_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}z_n\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_{n1}}{a_{nn}}z_1 + \cdots + \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}z_{n-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le \left\{\left[\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)^2\right]\|Z\|^2 + \cdots + \left[\left(\frac{a_{n1}}{a_{nn}}\right)^2 + \cdots + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \left(\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}\right)^2\right]\|Z\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = c\|Z\| = c\|X - Y\| = cd(X, Y), \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} c &= \left[\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)^2 + \left(\frac{a_{21}}{a_{22}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_{2n}}{a_{22}}\right)^2 + \cdots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a_{n1}}{a_{nn}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}\right)^2\right]^{1/2} \end{aligned}$$

Dacă $c < 1$, *atunci* f *devine o contracţie şi ecuaţia* $X = f(X)$ *are soluţie unică, care se poate determina prin metoda aproximaţiilor succesive.*

$X_0 = 0$, $X_1 = f(X_0) = \bar{A}X_0 + \bar{B} = \bar{B}$, $X_2 = f(X_1) = \bar{A}X_1 + \bar{B} = \bar{A}\bar{B} + \bar{B}$, *etc.* ...

Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} 10X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 + 10X_2 - 2X_3 = 4 \\ X_1 + 20X_3 = -2 \end{cases} \tag{2.9}$$

cu aproximaţie $\le \frac{1}{3}$ *folosind metoda iterativă expusă anterior.*

Sistemul (2.9) este echivalent cu următorul sistem:

$$\begin{cases} x_1 = -0,1x_2 + 0,1x_3 \\ x_2 = -0,1x_1 + 0,2x_3 + 0,4 \\ x_3 = -0,05x_1 - 0,1 \end{cases} \Leftrightarrow X = \bar{A}X + \bar{B},$$

unde $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & 0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,2 \\ -0,05 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *iar* $\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ -0,1 \end{pmatrix}$. *Considerăm funcţia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(X) = AX + B$.

$$c = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}^2} = \sqrt{0,0725} < 1,$$

aşadar, f este contracţie şi putem aplica metoda aproximaţiilor succesive.

$X_0 = 0,\ X_1 = f(X_0) = B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ -0,1 \end{pmatrix},\ \delta = d(X_0, X_1) = \sqrt{0,17}.$

Determinăm cel mai mic număr natural n pentru care

$$\frac{\delta c^n}{1-c} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{0,17}(\sqrt{0,0725})^n}{1-\sqrt{0,0725}} < \frac{1}{3}.$$

Obţinem $n = 1$ şi, astfel, $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ -0,1 \end{pmatrix}$ este soluţia sistemului (2.9) cu aproximaţia $\leq \frac{1}{3}$.

2.5 Puncte limită şi limite extreme ale unui şir din $\bar{\mathbb{R}}$

Definiţia 2.5.1 *Un număr $l \in \bar{\mathbb{R}}$ se numeşte punct limită al unui şir (x_n), dacă orice vecinătate a punctului a conţine o infinitate de termeni ai şirului.*

Observaţia 2.5.1 *Dacă un număr apare de o infinitate de ori într-un şir, acesta este un punct limită al şirului.*

Exemplu 2.5.1

1. *Şirul $x_n = \cos\frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{N}$ are patru puncte limită şi anume $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ şi 1.*
2. *Şirul $x_n = -\frac{n}{1+n}$ $n \in \mathbb{N}$ are un singur punct limită, $l = -1$.*
3. *Şirul* $1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4;\ 1, 2, 3, 4, 5; \ldots;\ 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots; \ldots$ *are o infinitate de puncte limită. Orice număr natural este punct limită, deoarece fiecare dintre numerele naturale apare de o infinitate de ori şi folosim observaţia 2.5.1.*
4. *Şirul $x_n = n$ nu are nici un punct limită finit, dar ∞ este punct limită al acestui şir.*

Teorema 2.5.1 *Un număr $l \in \bar{\mathbb{R}}$ este punct limită al unui şir (x_n) dacă şi numai dacă există un subşir al şirului (x_n) care are limita l.*

Demonstraţie. $\Leftarrow$ Dacă $\exists\ (x_{h(n)})$ astfel ca $\lim_{n\to\infty} x_{h(n)} = l$, unde $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie strict crescătoare, atunci în orice vecinătate a punctului l se află o infinitate de termeni ai şirului $(x_{h(n)})$, prin urmare, o infinitate de termeni ai şirului (x_n) şi, conform definiţiei 2.5.1, punctul l este punct limită al şirului (x_n).

$\Rightarrow$ Fie $l \in \mathbb{R}$ punct limită al şirului (x_n). Considerăm $V_1 = (l-1, l+1) \in \mathcal{V}_l$. Conform definiţiei 2.5.1, în această vecinătate se află o infinitate de termeni ai şirului (x_n). Notăm $x_{h(1)}$ unul dintre aceşti termeni. Avem $|x_{h(1)} - l| < 1$.

În vecinătatea $V_2 = \left(l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{V}_a$ se află, de asemenea, o infinitate de termeni ai şirului (x_n); notăm $x_{h(2)}$ unul dintre aceşti termeni cu $h(2) > h(1)$ şi avem $|x_{h(2)} - l| < \frac{1}{2}$. Prin inducţie putem alege un şir de numere $(x_{h(n)})$, unde $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie strict crescătoare astfel ca $|x_{h(n)} - l| < \frac{1}{n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $\lim_{n\to\infty} x_{h(n)} = l$, unde $(x_{h(n)})$ este un subşir al şirului (x_n).

Dacă $l = \infty$, respectiv $l = -\infty$ atunci vom alege vecinătăţile $V_n = (n, \infty)$ ale lui ∞, respectiv $V_n = (-\infty, -n)$ ale lui $-\infty, n \in \mathbb{N}$ şi vom proceda ca mai sus.

Observaţia 2.5.2 *Din lema lui Cesaro rezultă că orice şir mărginit are cel puţin un punct limită.*

Fie (x_n) un şir de numere din $\mathbb{R}$. Definim $\alpha_0 = \inf_{m\geq 0} x_m$, $\alpha_1 = \inf_{m\geq 1} x_m, \ldots$, $\alpha_n = \inf_{m\geq n} x_m, \ldots$, respectiv $\beta_0 = \sup_{m\geq 0} x_m$, $\beta_1 = \sup_{m\geq 1} x_m, \ldots$, $\beta_n = \sup_{m\geq n} x_m, \ldots$ Avem $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_k \leq \cdots \leq \beta_p \leq \ldots \leq \beta_1 \leq \beta_0$, $\forall\, k, p \in \mathbb{N}$.

Definiţia 2.5.2 *Se numeşte limita inferioară a şirului* (x_n) *elementul*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} x_m \in \bar{\mathbb{R}},$$

şi care se notează $\alpha = \underline{\lim} x_n$.

Se numeşte limita superioară a şirului (x_n) *elementul*

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} x_m \in \bar{\mathbb{R}},$$

şi care se notează $\beta = \overline{\lim} x_n$.

Observaţia 2.5.3
1. $\alpha = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} x_m = \sup_n \inf_{m\geq n} x_n$ *deoarece* (α_n) *este un şir crescător şi mărginit, iar* $\beta = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} x_m = \inf_n \sup_{m\geq n} x_m$ *deoarece* (β_n) *este un şir descrescător şi mărginit.*
2. $\alpha \leq \beta$, *deci* $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$.
3. *Limita inferioară, respectiv limita superioară există pentru orice şir din* $\mathbb{R}$, *deşi nu orice şir de numere are limită.*

Exemplu 2.5.2
1. *Dacă* $x_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, & \textit{pentru } n \textit{ par} \\ -1, & \textit{pentru } n \textit{ impar} \end{cases}$ *avem* $\alpha_n = -1$ *şi* $\beta_n = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$, *deci* $\underline{\lim} x_n = -1$ *şi* $\overline{\lim} x_n = 1$.
2. *Dacă* $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, *atunci* $\underline{\lim} x_n = 0$, *iar* $\overline{\lim} x_n = 1$.
3. *Fie* $a \geq 0$ *şi* $x_n = (-1)^n \left(a + \frac{1}{n}\right)$. *Atunci*

$$\inf_{m\geq n} (-1)^m \left(a + \frac{1}{m}\right) = \begin{cases} -a - \frac{1}{n} & , \quad \textit{dacă } n \textit{ impar} \\ -a - \dfrac{1}{n+1} & , \quad \textit{dacă } n \textit{ par} \end{cases} \quad i$$

$$\sup_{m\geq n} (-1)^m \left(a + \frac{1}{m}\right) = \begin{cases} a + \dfrac{1}{n+1} & , \quad \textit{dacă } n \textit{ impar} \\ a + \frac{1}{n} & , \quad \textit{dacă } n \textit{ par} \end{cases},$$

deci $\underline{\lim} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(-a - \frac{1}{n}\right) = -a$, $\overline{\lim} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(a + \frac{1}{n}\right) = a$.

Teorema 2.5.2 *Fie* (x_n) *un şir de elemente din* $\mathbb{R}$ *şi* $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.

1. $a = \underline{\lim} x_n$ *dacă şi numai dacă* $\forall\, u < a$ *mulţimea* $\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n < u\}$ *este finită şi* $\forall\, v > a$ *mulţimea* $\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n < v\}$ *este infinită.*
2. $b = \overline{\lim} x_n$ *dacă şi numai dacă* $\forall\, u < b$, *mulţimea* $\{n \in \mathbb{N}\} \,|\, x_n > u\}$ *este infinită şi* $\forall\, v > b$ *mulţimea* $\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n > v\}$ *este finită.*

Demonstraţie: 1. Fie $a = \underline{\lim} x_n \Rightarrow a = \alpha = \sup_n \inf_{m \geq n} x_m = \sup_n \alpha_n$. Dacă $a = -\infty$, atunci $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = -\infty$ şi pentru orice $v > a$, mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n < v\}$ rezultă infinită.

Presupunem $a \in \mathbb{R}$. Atunci $\forall\, u < a$, $\exists\, n_0$ astfel încât $u < \alpha_{n_0} < a$, deci pentru $\forall\, n \geq n_0 \quad x_n \geq \alpha_{n_0} > u$, adică $\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n < u\}$ este finită. Dacă $v > a$ atunci, evident, mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n < v\}$ este infinită.

Reciproc, presupunem că $\forall\, u < a$ mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n < u\}$ este finită şi $\forall\, v > a$ mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n < v\}$ este infinită. Fie $\alpha = \underline{\lim} x_n$. Dacă $a = -\infty$ atunci $a \leq \alpha$. Dacă $-\infty < a$ şi $u < a$, atunci $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \geq u, \forall\, n \geq n_0$, deci $\alpha_{n_0} \geq u$, de unde $u \leq \alpha$. Pentru orice $u < a$ avem $u \leq \alpha$, aşadar $a \leq \alpha$. Cum, pentru orice $v > a$ mulţimea $\{n \in \mathbb{N} | x_n < v\}$ este infinită, rezultă că $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n < v, \forall\, n \geq n_1$, deci $\alpha_{n_1} \leq v$, de unde $\alpha \leq v$. Obţinem că pentru orice $v > a$ avem $\alpha \leq v$, de unde $\alpha \leq a$ şi deci $a = \alpha$.

2. Se arată în mod analog ca şi la punctul 1.

Teorema 2.5.3 *Fie (x_n) un şir de elemente din $\mathbb{R}$.*

1. *$\underline{\lim} x_n$ şi $\overline{\lim} x_n$ sunt puncte limită pentru şirul (x_n) şi pentru orice alt punct limită ξ avem $\underline{\lim} x_n \leq \xi \leq \overline{\lim} x_n$.*
2. *Şirul (x_n) are limita l în $\bar{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă $\underline{\lim} x_n = l = \overline{\lim} x_n$.*

Demonstraţie: 1. (α_n) respectiv (β_n) sunt subşiruri ale şirului (x_n) şi au limitele $\underline{\lim} x_n$ respectiv $\overline{\lim} x_n$ şi, conform teoremei 2.5.1, aceste limite sunt puncte limite ale şirului (x_n). Dacă ξ este un punct limită al şirului (x_n), atunci există o funcţie strict crescătoare $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_{h(n)} = \xi$. Deoarece $\alpha_n = \inf_{m \geq n} x_m$, respectiv $\beta_n = \sup_{m \geq n} x_m$ şi, cum $h(n) \geq n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, avem $\alpha_n \leq x_{h(n)} \leq \beta_n$ de unde rezultă $\underline{\lim} x_n \leq \xi \leq \overline{\lim} x_n$.

2. Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, atunci orice subşir al şirului (x_n) va avea limita l, deci toate punctele limită coincid cu l, prin urmare, $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = l$.

Reciproc, dacă $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = l$, pentru orice vecinătate $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ a lui $l, \varepsilon > 0$, mulţimile $\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \leq l-\varepsilon\}$ şi $\{n \in \mathbb{N} \,|\, l+\varepsilon \leq x_n\}$ sunt finite, conform teoremei 2.5.2. Rezultă că în afara vecinătăţii $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ se află un număr finit de termeni ai şirului (x_n), aşadar $\lim_{n\to\infty} x_n = l$.

Capitolul 3

Funcţii continue

3.1 Funcţii continue

În acest capitol vom studia comportarea unei funcţii f definită pe o submulţime a unui spaţiu metric, într-un punct $a \in X$. Problema care se pune este dacă pentru valori suficient de "aproape" de a, valorile funcţiei $f(x)$ pot fi oricât de aproape de $f(a)$.

Fie X, Y două spaţii metrice, $A \subset X$ o submulţime nevidă a lui X, $f : A \to Y$ o funcţie şi $a \in A$.

Definiţia 3.1.1 *Funcţia f este continuă în punctul a dacă, pentru orice şir (x_n) de elemente din A cu $x_n \to a$ pe X, rezultă că $f(x_n) \to f(a)$ pe Y.*

Funcţia f este continuă pe mulţimea A dacă este continuă în fiecare punct al mulţimii A.

Observaţia 3.1.1 *Problema continuităţii nu are sens în punctele în care funcţia nu este definită.*

Teorema 3.1.1 *Dacă (X, d) şi (Y, d') sunt două spaţii metrice, $\emptyset \neq A \subset X$, $f : A \to Y$ o funcţie şi $a \in A$, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1. *f este continuă în a;*
2. *$\forall\, V \in \mathcal{V}_{f(a)}$, $\exists\, U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $\forall\, x \in U \cap A \Rightarrow f(x) \in V$;*
3. *$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall\, x \in A$ cu $d(x, a) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$.*

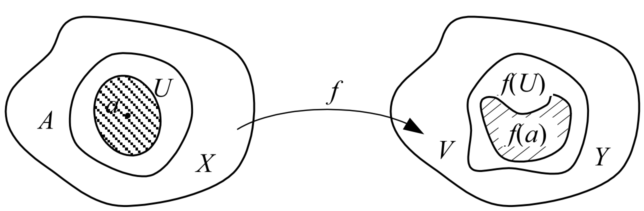

Figura 3.1:

Demonstraţie: $1 \Rightarrow 2$ Presupunem că f este continuă în a şi afirmaţia 2 nu este adevărată. Atunci există $V_0 \in \mathcal{V}_{f(a)}$ astfel încât pentru orice $U \in \mathcal{V}_a$, există $x_U \in U \cap A$ cu $f(x_U) \notin V_0$.

Pentru orice $n \geq 1$ considerăm vecinătăţile $U_n = S(a, \frac{1}{n}) \in \mathcal{V}_a$. Atunci există $x_n \in U_n \cap A$ astfel încât $f(x_n) \notin V_0$. Şirul (x_n) construit are proprietatea: $x_n \in A$, $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ şi $f(x_n) \notin V_0, \forall\, n \in \mathbb{N}$, ceea ce contrazice ipoteza.

$2 \Rightarrow 3$ Presupunem că are loc afirmaţia 2 şi fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $V = S(f(a), \varepsilon) \in \mathcal{V}_{f(a)}$, conform ipotezei, există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $\forall\, x \in U \cap A$ implică $f(x) \in V$. Cum $U \in \mathcal{V}_a$, rezultă că există $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ astfel ca $\forall\, x \in S(a, \delta) \cap A$ avem $f(x) \in S(f(a), \varepsilon)$ sau echivalent $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall\, x \in A$ cu $d(x, a) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$, adică afirmaţia 3.

$3 \Rightarrow 1$ Presupunem afirmaţia 3 îndeplinită şi fie (x_n) un şir de elemente din A, $x_n \to a$ pe X. Pentru $\forall\, \varepsilon > 0$ alegem $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât să se verifice 3. Există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$

$d(x_n, a) < \delta(\varepsilon)$ şi cu condiţia 3 avem $d'(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$, ceea ce este echivalent cu $f(x_n) \to f(a)$ pe Y, adică funcţia f este continuă în punctul a.

Exemplu 3.1.1 *1. Fie X un spaţiu metric. Aplicaţia identică $1_X : X \to X$ este continuă pe X. Într-adevăr, dacă $a \in X$ este un punct arbitrar, iar (x_n) este un şir de puncte al spaţiului X, $x_n \to a$ pe X, atunci $1_X(x_n) = x_n \to a = 1_X(a)$ pe X.*

2. *Dacă (X, d) este un spaţiu metric, atunci distanţa $d : X \times X \to \mathbb{R}$ este o aplicaţie continuă. Într-adevăr, dacă $(a, b) \in X \times X$ şi $x_n \to a$ pe X, $y_n \to b$ pe X, $(x_n, y_n) \subset X \times X$, atunci din inegalitatea:*

$$|d(x_n, y_n) - d(a, b)| \leq d(x_n, a) + d(y_n, b),$$

   rezultă $d(x_n, y_n) \to d(a, b)$.

3. *În orice spaţiu vectorial normat X, norma $q : X \to \mathbb{R}$ este o aplicaţie continuă, deoarece putem scrie $q(x) = d(x, 0)$, iar (X, d) unde $d(x, y) = q(x - y)$ este un spaţiu metric şi, conform exemplului 2, distanţa d este o aplicaţie continuă.*

4. *Fie $(X_1, q_1), (X_2, q_2), \ldots, (X_n, q_n)$ spaţii vectoriale normate. Pe spaţiul vectorial $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, definim norma $q(x) = \max_{i=\overline{1,n}} q_i(x_i), x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$. Aplicaţia proiecţie $p_i : X \to X_i$, $p_i(x) = x_i$, $\forall\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$, $i = \overline{1, n}$, este continuă.*

   Avem $q_i(p_i(x) - p_i(a)) = q_i(x_i - a_i) \leq \max_{i=\overline{1,n}} q_i(x_i - a_i) = q(x - a)$, $\forall\, x, a \in X$.

   Fie $\varepsilon > 0$ şi alegem $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Pentru orice $x \in X$ pentru care $q(x - a) < \delta(\varepsilon)$ rezultă $q_i(p_i(x) - p_i(a)) < \varepsilon$, adică aplicaţia p_i este continuă în punctul a. Cum a a fost ales arbitrar în spaţiul X, rezultă p_i continuă pe spaţiul X.

Teorema 3.1.2 *Fie X, Y, Z spaţii metrice, $\emptyset \neq A \subset X$, $\emptyset \neq B \subset Y$, $f : A \to B$, $g : B \to Z$ două funcţii şi $a \in A$. Dacă funcţia f este continuă în punctul a, iar funcţia g este continuă în punctul $f(a)$, atunci funcţia $g \circ f : A \to Z$ este continuă în a.*

Demonstraţie: Fie (x_n) un şir de puncte din X, $x_n \to a$ pe X. Din continuitatea funcţiilor f şi g în punctele a, respectiv $f(a)$ obţinem $f(x_n) \to f(a)$ pe Y şi $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ pe Z.

Aşadar, $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a)$ pe Z, adică $g \circ f$ este continuă în punctul a.

Corolarul 3.1.1 *Dacă $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, f este continuă pe X, g este continuă pe Y, atunci $g \circ f : X \to Z$ este continuă pe X.*

Fie X, Y spaţii metrice, $\emptyset \neq A \subset X$. Notăm

$$C^0(A; Y) = \{f : A \to Y \mid f \quad \text{continuă pe} \;\; A\}.$$

Teorema 3.1.3 *Dacă $(Y, \|\cdot\|)$ este un spaţiu vectorial normat şi $f \in C^0(A; Y)$, atunci funcţia $\|f(\cdot)\| : A \to \mathbb{R}$, $\|f(\cdot)\| \in C^0(A; \mathbb{R})$.*

Demonstraţie: Cum în orice spaţiu vectorial normat Y norma este funcţie continuă pe Y, iar f este continuă pe A, din teorema 3.1.2 rezultă că funcţia $\|f(\cdot)\| \in C^0(A; \mathbb{R})$.

Teorema 3.1.4 *Dacă $(Y, \|\cdot\|)$ este un K-spaţiu normat, atunci mulţimea $C^0(A; Y)$ este un spaţiu vectorial peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$).*

Demonstraţie: Considerăm $f, g \in C^0(A; Y)$ şi vrem să arătăm că $\alpha f + \beta g \in C^0(A; Y)$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$.

Fie $a \in A$ şi (x_n) un şir de puncte în A, $x_n \to a$ pe X. Are loc următoarea relaţie:

$$\begin{aligned} \|(\alpha f + \beta g)(x_n) - (\alpha f + \beta g)(a)\| &= \|\alpha(f(x_n) - f(a)) + \beta(g(x_n) - g(a))\| \leq \\ &\leq |\alpha|\|f(x_n) - f(a)\| + |\beta|\|g(x_n)g(a)\|\,. \end{aligned}$$

Din teorema 3.1.3 şi din continuitatea funcţiilor f şi g în punctul a, rezultă că $(\alpha f + \beta g)(x_n) \to (\alpha f + \beta g)(a)$ pe Y. Cum punctul $a \in A$ a fost ales arbitrar, obţinem $(\alpha f + \beta g) \in C^0(A; Y)$.

Teorema 3.1.5 *Fie X, Y două spaţii metrice şi $f : X \to Y$ o funcţie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *f este continuă pe X;*
2. *Pentru orice deschis $D \subset Y \Rightarrow f^{-1}(D)$ este deschis în X;*
3. *Pentru orice închis $F \subset Y \Rightarrow f^{-1}(F)$ este închis în X.*

Demonstraţie: $1 \Rightarrow 2$ Presupunem că funcţia f este continuă pe X; fie $D \subset Y$ un deschis în Y şi $a \in f^{-1}(D)$. Atunci $f(a) \in D$ şi, cum D este deschis în Y, există $\varepsilon > 0$ astfel ca $S(f(a), \varepsilon) \subset D$. Din teorema 3.1.1 există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall\, x \in S(a, \delta(\varepsilon)) \Rightarrow f(x) \in S(f(a), \varepsilon)$, sau echivalent $f(S(a, \delta(\varepsilon))) \subset S(f(a), \varepsilon) \subset D$. De aici obţinem $S(a, \delta(\varepsilon)) \subset f^{-1}(D)$, adică $f^{-1}(D)$ este un deschis în X.

$2 \Leftrightarrow 3$ Rezultă imediat folosind relaţia $f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(F)$.

$2 \Rightarrow 1$ Presupunem că are loc 2 şi fie $a \in X$. Dacă $V \in \mathcal{V}_{f(a)}$, atunci există $\varepsilon > 0$ astfel ca $S(f(a), \varepsilon) \subset V$. Sferoidul $S(f(a), \varepsilon)$ fiind un deschis din Y, din ipoteză rezultă $f^{-1}(Sf(a), \varepsilon)$ deschis în X ce conţine punctul a. Atunci există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $U = S(a, \delta(\varepsilon)) \subset f^{-1}(S(f(a)), \varepsilon)$, de unde $f(U) \subset S(f(a), \varepsilon) \subset V$, adică funcţia f este continuă în punctul a. Cum acest punct a fost ales arbitrar din spaţiul X, rezultă funcţia f continuă pe X.

Corolarul 3.1.2 *Dacă X este un spaţiu metric şi $f, g : X \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue pe X, atunci mulţimile $D_1 = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$, $D_2 = \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$ sunt deschise, iar mulţimile $F_1 = \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$, $F_2 = \{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\}$ sunt închise.*

Demonstraţie: Funcţia $h : X \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$, $\forall\, x \in X$ este continuă pe X. Mulţimile $(-\infty, 0), (0, \infty)$ sunt deschise în $\mathbb{R}$, iar mulţimile $(-\infty, 0], [0, \infty)$ sunt închise în $\mathbb{R}$. Conform teoremei 3.1.5 mulţimile $h^{-1}((-\infty, 0)) = D_1$, $h^{-1}((0, \infty)) = D_2$ rezultă deschise în X, iar mulţimile $h^{-1}((-\infty, 0]) = F_1$, $h^{-1}([0, \infty)) = F_2$ rezultă închise în X.

Corolarul 3.1.3 *Dacă X este un spaţiu metric, $f, g : X \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue, iar $A \subset X$ o mulţime densă a spaţiului X pentru care $f\,|_A = g\,|_A$, atunci $f = g$.*

Demonstraţie: $A \subseteq \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = F$. Mulţimea F este închisă, deoarece $F = F_1 \cap F_2$, unde F_1, F_2 sunt mulţimile din corolarul 3.1.2. Atunci $\bar{A} \subseteq \bar{F} = F$ şi, cum A este densă, obţinem $X \subseteq F$, adică $X = F$. Aşadar, $f = g$.

Teorema 3.1.6 *Fie X un spaţiu metric, Y un spaţiu normat, $\emptyset \neq A \subset X$, $f : A \to Y$ şi $a \in A$. Dacă funcţia f este continuă în punctul a şi $f(a) \neq 0_Y$, atunci există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $f(x) \neq 0_Y$, $\forall\, x \in A \cap U$.*

Demonstraţie: Deoarece $f(a) \neq 0_Y$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $V = S(f(a), \varepsilon) \in \mathcal{V}_{f(a)}$ şi $0_Y \notin V$. Din continuitatea funcţiei f în punctul a pentru vecinătatea V există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel ca $f(x) \in V$, $\forall\, x \in A \cap U$ şi, cum $0_Y \notin V$, obţinem $f(x) \neq 0_Y$, $\forall\, x \in A \cap U$.

Corolarul 3.1.4 *Dacă X este un spaţiu metric, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă în a astfel ca $f(a) > 0$, respectiv $f(a) < 0$, atunci există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $f(x) > 0$, respectiv $f(x) < 0$, $\forall\, x \in A \cap U$.*

Teorema 3.1.7 *Dacă X, Y sunt două spaţii metrice, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$ şi $f : A \to Y$ este o funcţie continuă în a, atunci există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $f\,|_{A\cap U}$ să fie mărginită.*

Demonstraţie: Fie $\varepsilon > 0$ şi $V = S(f(a), \varepsilon) \in \mathcal{V}_{f(a)}$. Din continuitatea funcţiei f în punctul a, pentru V, există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $f(x) \in S(f(a), \varepsilon)$, $\forall\, x \in A \cap U$, adică $f\,|_{A\cap U}$ este mărginită.

Teorema 3.1.8 *Dacă X este un spaţiu metric, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$ şi $f, g : A \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue în a, atunci următoarele funcţii $fg, |fg|, \max(f, g), \min(f, g) : A \to \mathbb{R}$ sunt continue în a. Dacă $f(a) \neq 0$, atunci şi funcţia $\frac{g}{f} : A \to \mathbb{R}$ este continuă în a.*

Demonstraţie: Demonstraţia este imediată folosind definiţia 3.1.1, iar pentru $\max(f, g), \min(f, g)$ şi relaţiile:

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}[f + g + |f - g|]$$

$$\min(f, g) = \frac{1}{2}[f + g - |f - g|].$$

Teorema 3.1.9 *Dacă X este un spaţiu metric, $\emptyset \neq A \subset X$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ şi $a \in A$, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. Funcţia f este continuă în punctul a;

2. Funcţiile $f_i, i = \overline{1, m}$ sunt continue în punctul a.

Demonstraţie: $1 \Rightarrow 2$ Presupunem funcţia f continuă în punctul a. Din continuitatea diagramei avem $f_i = pr_i \circ f$, $\quad \forall\, i = \overline{1, m}$, unde $pr_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sunt funcţiile proiecţie, care sunt continue $\forall\, i = \overline{1, m}$.

Conform teoremei 3.1.2 rezultă că funcţiile f_i sunt continue în punctul a $\forall\, i = \overline{1, m}$.

$2 \Rightarrow 1$ Presupunem funcţiile $f_i, i = \overline{1, m}$, continue în punctul a. Pentru orice şir (x_n) de puncte din A, $x_n \to a$ pe X avem $f_i(x_n) \to f(a)$, $\forall\, i = \overline{1, m}$.

$f(x_n) = (f_1(x_n), f_2(x_n), \ldots, f_m(x_n)) \to (f_1(a), f_2(a), \ldots, f_m(a)) = f(a)$ pe $\mathbb{R}^m$ Aşadar, rezultă că f este continuă în punctul a.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_i"'] & \mathbb{R}^m \arrow[dl, "\mathrm{pr}_i"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Figura 3.2:

Teorema 3.1.10 *Darboux (1842 - 1917) - Bolzano (1781 - 1848)*

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ este o funcţie reală continuă au loc următoarele afirmaţii:

1. *Dacă $f(a)f(b) \leq 0$, atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încât $f(\xi) = 0$;*

2. *Dacă $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ şi $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, atunci pentru orice $c \in (m, M)$ există $\eta \in [a, b]$ astfel încât $f(\eta) = c$;*

3. *Dacă f este strict monotonă, atunci $f : [a, b] \to [m, M]$ este o bijecţie, iar inversa f^{-1} este continuă şi strict monotonă.*

DEMONSTRAŢIE: 1. Fie $I_0 = [a, b]$. Împărţim intervalul I_0 în două intervale închise având lungimi egale. Funcţie f va lua valori de semne opuse la capetele unuia dintre aceste intervale, pe care-l vom nota I_1. Continuând acest procedeu găsim un şir descendent de intervale închise $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$ cu lungimea intervalului I_n tinzând către zero.

Fie a_n, respectiv b_n, $n \geq 1$ capetele intervalelor I_n în care funcţia este pozitivă, respectiv negativă. Din lema intervalelor închise incluse există $\xi \in \cap_{n\geq 0} I_n$ cu $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$. Deoarece f este continuă, atunci rezultă $f(a_n) \to f(\xi)$, $f(b_n) \to f(\xi)$. Cum $f(a_n) \geq 0$, $f(b_n) \leq 0 \Rightarrow f(\xi) \geq 0$ şi $f(\xi) \leq 0$, adică $f(\xi) = 0$.

2. Din $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ şi $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \Rightarrow\ \exists\, \alpha, \beta \in [a, b]$ astfel încât $m \leq f(\alpha) < c < f(\beta) \leq M$.

Funcţia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - c$ este continuă pe $[\alpha, \beta]$, $g(\alpha) = f(\alpha) - c < 0$, $g(\beta) = f(\beta) - c > 0$ şi, aplicând punctul 1 al teoremei, există $\eta \in [\alpha, \beta]$ astfel ca $g(\eta) = 0 \Rightarrow f(\eta) = c$.

3. Din punctul 2 al teoremei avem funcţia f surjectivă, iar din enunţ fiind strict monotonă, ea este injectivă, deci bijectivă. Dacă $I \subset [a, b]$ este mulţime închisă, atunci $(f^{-1})^{-1}(I) = f(I)$ este, de asemenea, închisă. Conform teoremei 3.1.5 funcţia f^{-1} este continuă pe $[a, b]$.

Fie $(X, d), (Y, d)$ două spaţii metrice, $\emptyset \neq A \subset X$ şi $f : A \to Y$ o funcţie.

Definiţia 3.1.2 *Fie $a \in A'$. Funcţia f are limita $l, l \in Y$, în punctul a dacă funcţia* $g : A \cup \{a\} \to Y$, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ l, & x = a \end{cases}$ *este continuă în punctul a şi vom nota* $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Observaţia 3.1.2 *1.* $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\, (x_n) \subset A$, $x_n \neq a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$ *pe* $X \Rightarrow f(x_n) \to l$ *pe* Y *(definiţia lui Heine)*

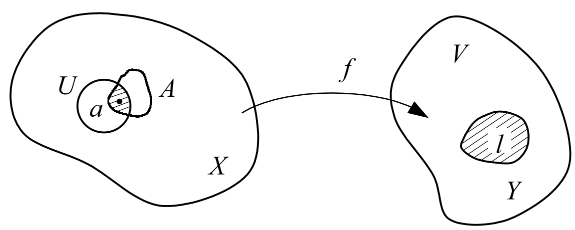

Figura 3.3:

2. $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}_l,\ \exists\, U \in \mathcal{V}_a$ *astfel încât* $\forall\, x \in (A \cap U) - \{a\} \Rightarrow f(x) \in V$

3. $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $\forall\, x \in A - \{a\}$ *cu* $d(x, a) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), l) < \varepsilon$.

Teorema 3.1.11 *Dacă* $Y = \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall\, x \in A$, *şi* $a \in A$ *astfel ca* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, *atunci* $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

DEMONSTRAŢIE: Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall\, x \in A - \{a\}$ cu $d(x, a) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow g(x) < \varepsilon$, $|f(x)| < \varepsilon$, adică $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Următoarea teoremă ne asigură existenţa limitei unei funcţii într-un punct.

Teorema 3.1.12 *Cauchy-Bolzano*

Dacă (X, d) *spaţiu metric,* (Y, d') *spaţiu metric complet,* $\emptyset \neq A \subset X$ *şi* $f : A \to Y$, *atunci sunt echivalente următoarele afirmaţii:*

1. Funcţia f are limită în punctul a;

2. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, U \in \mathcal{V}_a$ *astfel încât* $\forall\, x, x' \in (U \cap A) - \{a\} \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Demonstraţie: $1 \Rightarrow 2$ Fie $\lim_{x\to a} f(x) = l$ şi $\varepsilon > 0$. Din observaţia 3.1.2 rezultă că există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall\, x \in A - \{a\}$ cu $d(x,a) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x),l) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luăm $U = S(a, \delta(\varepsilon))$; atunci $\forall\, x, x' \in (U \cap A) - \{a\}$

$$d'(f(x), f(x')) \leq d'(f(x), l) + d'(f(x'), l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$2 \Rightarrow 1$ Fie (x_n) un şir de puncte din A, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ pe X. Există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ $x_n \in U \cap A$, unde $U \in \mathcal{V}_a$ este vecinătatea din enunţ. Deci $\forall\, n, m \geq n(\varepsilon)$ $d'(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$, adică şirul $(f(x_n))$ este fundamental. Cum Y este spaţiu metric complet, şirul $(f(x_n))$ este convergent şi fie $l = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Arătăm că limita şirului $(f(x_n))$ nu depinde de alegerea şirului (x_n). Fie (y_n) un şir de puncte din A, $y_n \neq a$, $y_n \to a$ pe X. Urmând acelaşi raţionament ca şi pentru şirul (x_n), găsim $l_1 = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$. Considerăm şirul $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$. Evident acest şir are limita a, iar şirurile $(f(x_n)), (f(y_n))$ sunt subşiruri ale şirului convergent $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots, f(x_n), f(y_n), \ldots$.

Aşadar, avem $l = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = l_1$, adică funcţia f are limită în punctul a.

Exemplu 3.1.2 *1. Fie*

$$f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad .$$

Deoarece

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\ |x| \leq |x| \to 0, (x,y) \to (0,0), \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

2. Fie

$$f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \ .$$

Vrem să calculăm $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. *Dacă* $x \to 0$ *şi* $y = mx \to 0$, $m \in \mathbb{R}$ *atunci observăm că*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2}.$$

În concluzie, funcţia f *nu are limită în punctul* $(0,0)$.

3. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x^3}{x^2+y^2} & , \ \textit{dacă}\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ \textit{în rest} \end{cases} ,$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin^2 \frac{x^3}{2}}{x^2+y^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2 \frac{x^3}{2}}{\left(\frac{x^3}{2}\right)^2} \frac{x^6}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0). \end{aligned}$$

Prin urmare, funcţia f *este continuă pe* $\mathbb{R}^2$.

3.2 Limite iterate

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A'$, $f : A \to Y$ o funcţie, unde Y este un spaţiu metric şi $\sigma \in S_n$ o permutare a primelor n numere naturale.

Definiţia 3.2.1 *Dacă există limitele succesive*

$$\lim_{x_{\sigma(n)} \to a_{\sigma(n)}} (\ldots \lim_{x_{\sigma(1)} \to a_{\sigma(1)}} f(x)) = l_\sigma,$$

unde $a_{\sigma(i)} \in A'_{\sigma(i)}$, $A_i = \{x_i \,|\, (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in A\}$, *atunci această limită se numeşte limită iterată a funcţiei* f *în punctul* a.

Observaţia 3.2.1 *1. Funcţia f poate avea cel mult* $n!$ *limite iterate.*

2. Dacă $n = 2$, *funcţia* f *poate avea cel mult două limite iterate, şi anume,* $\lim_{x \to a}(lim_{y \to b} f(x, y))$, *respectiv* $\lim_{y \to b}(\lim_{x \to a} f(x, y))$.

Exemplu 3.2.1

1. $$f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \;\; f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{x \to 0}(\lim_{y \to 0} f(x, y)) = \lim_{y \to 0}(\lim_{x \to 0} f(x, y)) = 0.$$

2. $$f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \;\; f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{x \to 0}(\lim_{y \to 0} f(x, y)) = 1, \;\; \lim_{y \to 0}(\lim_{x \to 0} f(x, y)) = -1.$$

3. $$f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \;\; f(x, y) = y \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}$$

$\lim_{x \to 0}(\lim_{y \to 0} f(x, y)) = 0$, *dar* $\lim_{y \to 0}(\lim_{x \to 0} f(x, y))$ *nu există.*

Teorema 3.2.1 *Dacă există limita funcţiei* f *în punctul* a *şi una dintre limitele iterate în acest punct, atunci aceste limite sunt egale.*

Demonstraţie: Pentru simplificare vom demonstra în cazul $n = 2$. Fie $(a, b) \in A'$ şi presupunem că există limitele $l = \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$ şi $l_1 = \lim_{x \to a}(\lim_{y \to b} f(x, y))$.

Pentru fiecare $x \in A_1 = pr_1 A$ vom nota $F(x) = \lim_{y \to b} f(x, y)$. Atunci $l_1 = \lim_{x \to a} F(x)$.

Fie $\varepsilon > 0$; deoarece $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = l$, există $U \in \mathcal{V}_{(a,b)}$ astfel încât

$$d'(f(x, y), l) < \frac{\varepsilon}{2}, \;\; \forall\, (x, y) \in (A \cap U) - \{(a, b)\} \tag{3.1}$$

$$\lim_{y \to b} d'(f(x, y), l) = d'(F(x), l), \;\; y \in A_1.$$

Din inegalitatea (3.1), obţinem

$$d'(F(x), l) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \;\; \forall\, x \text{ astfel încât } (x, b) \in U.$$

Atunci

$$\lim_{x \to a} d'(F(x), l) = d'(\lim_{x \to a} F(x), l) = d'(l_1, l) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

adică $l = l_1$.

Observaţia 3.2.2 *1. Dacă există una din limitele iterate ale funcţiei f într-un punct, nu rezultă că există şi celelalte limite iterate în acel punct.*

2. *Dacă există două limite iterate ale unei funcţii într-un punct şi dacă ele sunt diferite, atunci funcţia f nu are limită în acel punct.*

3. *Sunt cazuri când punctul $a \in A'$, $A \subset \mathbb{R}^n$, dar $\not\exists a_i \in A_i'$. În acest caz nu are sens $\lim_{x_i \to a_i} f(x)$.*

3.3 Mulţimi compacte

Definiţia 3.3.1 *Fie X un spaţiu metric. O familie $\{D_i\}_{i\in I}$ de părţi ale lui X având proprietatea $\cup_{i\in I} D_i = X$ se numeşte acoperire a sa. Se numeşte subacoperire a acoperirii $\{D_i\}_{i\in I}$ o subfamilie $\{D_i\}_{i\in J}$, $J \subset I$ astfel încât $\cup_{i\in J} D_i = X$.*

Dacă $K \subset X$ este o submulţime a spaţiului metric X, atunci o familie $\{D_i\}_{i\in I}$ de părţi ale lui X având proprietatea $K \subset \cup_{i\in I} D_i$ se numeşte acoperire a mulţimii K. Se numeşte subacoperire a acoperirii $\{D_i\}_{i\in I}$ o subfamilie $\{D_i\}_{i\in J}$, $J \subset I$ astfel încât $K \subset \cup_{i\in J} D_i$.

Dacă mulţimea I este finită, acoperirea se numeşte finită.

Dacă toate mulţimile D_i sunt deschise spunem că acoperirea $\{D_i\}_{i\in I}$ este acoperire deschisă.

Definiţia 3.3.2 *O submulţime $K \subset X$ a unui spaţiu metric X se numeşte compactă sau un compact al lui X, dacă din orice acoperire deschisă a ei se poate extrage o subacoperire finită, adică pentru orice familie de mulţimi deschise $\{D_i \,|\, i \in I, D_i \text{ deschis}\}$, astfel încât $K \subset \cup_{i\in I} D_i$, rezultă că există o submulţime finită $J \subset I$ astfel încât $K \subset \cup_{i\in J} D_i$.*

Definiţia 3.3.3 *O submulţime $K \subset X$ a unui spaţiu metric este mărginită dacă $\exists\, a \in K$ şi $\exists\, r > 0$, $r \in \mathbb{R}$ astfel încât $K \subset S(a, r)$, adică dacă este conţinută într-un sferoid.*

Teorema 3.3.1 *Orice mulţime compactă dintr-un spaţiu metric este închisă şi mărginită.*

DEMONSTRAŢIE: K este închisă $\Leftrightarrow K = \bar{K}$. Presupunem că $\bar{K} \not\subseteq K$ şi fie $x \in \bar{K}$ astfel încât $x \notin K$. Pentru orice $y \in K$ avem $x \neq y$. Cum spaţiul metric este un spaţiu separat, rezultă că $\exists\, r_y > 0$, astfel încât $S(x, r_y) \cap S(y, r_y) = \emptyset$. Sferoizii $S(y, r_y), y \in K$ formează o acoperire deschisă a lui K, $K \subset \cup_{y\in K} S(y, r_y)$ şi, cum K este compactă, rezultă că există o subacoperire finită a sa, adică $\exists\, y_1, y_2, \ldots, y_p \in K$ şi $\exists\, r_{y_1} > 0, \ldots r_{y_p} > 0$ numere reale astfel încât

$$K \subset S(y_1, r_{y_1}) \cup S(y_2, r_{y_2}) \cup \cdots \cup S(y_p, r_{y_p}).$$

Luând $r = \min(r_{y_1}, \ldots, r_{y_p}) > 0$, obţinem $S(x, r) \cap S(y_i, r_{y_i}) = \emptyset$, $\forall\, i = \overline{1, p}$, de unde avem

$$S(x, r) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p} S(y_i, r_i) \right) = \emptyset \Rightarrow S(x, r) \cap K = \emptyset,$$

adică, $x \notin \bar{K}$, ceea ce contravine ipotezei $x \in \bar{K}$. Astfel $\bar{K} \subseteq K$, deci $K = \bar{K}$, adică mulţimea K este închisă. Fie $a \in X$; pentru fiecare $x \in K$ considerăm $d(x, a) \geq 0$. Conform proprietăţii lui Arhimede $\exists\, n_x \in \mathbb{N}$, astfel încât $d(x, a) < n_x \Rightarrow x \in S(a, n_x)$. Dacă $n_x = [d(x, a)] + 1$, atunci $K \subset \cup_{n_x \in \mathbb{N}} S(a, n_x)$. Mulţimea $\{S(a, n_x) \,|\, n_x \in \mathbb{N}\}$ constituie o acoperire deschisă a lui K şi, cum K este compactă, din această acoperire se poate extrage o subacoperire finită, deci $\exists\, n_1 > 0 \ldots, n_m > 0$ astfel încât $K \subset S(a, n_1) \cup S(a, n_2) \cup \cdots \cup S(a, n_m)$. Luând $n = \max_{i=\overline{1,m}} n_i > 0$, obţinem $K \subset S(a, n)$, adică mulţimea K este mărginită.

Teorema 3.3.2 *Caracterizarea mulţimilor compacte cu şiruri.*

O submulţime $K \subset X$ a unui spaţiu metric este compactă dacă şi numai dacă pentru orice şir de puncte din K există un subşir convergent în K, adică $\forall\ (x_n) \subset K,\ \exists\ (x_{f(n)})$ subşir astfel încât $x_{f(n)} \to \xi \in K$.

Demonstraţie: Presupunem mulţimea K compactă şi fie (a_n) un şir de puncte din K, astfel încât acest şir nu conţine subşiruri convergente în X. Dacă ar conţine un subşir convergent în X, atunci $x_{f(n)} \to \xi \in X$, $x_{f(n)} \in K$. Din teorema 2.4.3 $\xi \in \bar{K}$ şi, cum K este compactă, K este închisă, deci $\xi \in K$.

Considerăm acum mulţimile

$$D_0 = X - \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}, D_1 = X - \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}, \dots, D_n = X - \{x_n, x_{n+1}, \dots\} \dots$$

care au proprietăţile:

$$D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots \tag{3.2}$$

şi $K \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

Fie $y \in D_0$. Dacă pentru orice $r > 0\ \ S(y,r)$ conţine termeni ai şirului (x_n), luăm $r = \dfrac{1}{n}$, $x_n \in S\left(y, \dfrac{1}{n}\right)$. Obţinem astfel un şir de puncte $x_{f(n)} \to y$, ceea ce contravine faptului, că nici un subşir al şirului (x_n) nu este convergent în X. Deci $\exists\ r > 0$, astfel ca $S(y,r) \subset D_0$, prin urmare, D_0 este o mulţime deschisă, iar din (3.2) avem (D_n) şir de mulţimi deschise, care formează o acoperire deschisă a lui K. Cum K este o mulţime compactă, se poate extrage o subacoperire finită a sa, $K \subset D_{n_1} \cup D_{n_2} \cup \dots \cup D_{n_p} = D_n$, unde $n = \max_{i=\overline{1,p}} n_i$, deci $K \subset D_n$. Dar din modul de definire al mulţimilor D_n avem $x_n \notin D_n$ şi $x_n \in K$. Am obţinut astfel o contradicţie, aşadar orice şir de elemente din K conţine un subşir convergent în K.

Pentru a demonstra reciproca vom arăta următoarele:

1. $\forall\ \varepsilon > 0$ există o acoperire finită a lui K formată din sferoizi de rază ε, adică $K \subset S(x_1,\varepsilon) \cup \dots \cup S(x_p,\varepsilon)$ unde $x_1, x_2, \dots, x_p \in K$.

2. Dacă $K \subset \cup_{i\in I} D_i$ este o acoperire deschisă, atunci $\exists\ \varepsilon_0 > 0$, astfel încât $\forall\ x \in K$, $\exists\ i_x \in I$ cu $S(x,\varepsilon_0) \subset D_{i_x}$.

Presupunem că $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ astfel încât nu avem o acoperire finită a lui K de sferoizi deschişi de rază ε_0. Dacă $x_0 \in K$ şi $K \not\subset S(x_0,\varepsilon_0)$, atunci $\exists\ x_1 \in K$ astfel ca $x_1 \notin S(x_0,\varepsilon_0)$, deci $d(x_1,x_0) \geq \varepsilon_0$.

Dacă $K \not\subset S(x_0,\varepsilon_0) \cup S(x_1,\varepsilon_0)$, atunci $\exists\ x_2 \in K$ astfel ca $x_2 \notin S(x_0,\varepsilon_0) \cup S(x_1,\varepsilon_0) \Rightarrow d(x_2,x_0) \geq \varepsilon_0$ şi $d(x_2,x_1) \geq \varepsilon_0$. Continuând procedeul, formăm un şir de elemente din K, $(x_n) \subset K$ astfel încât $\forall\ p,q \in \mathbb{N}\ \ d(x_p,x_q) \geq \varepsilon_0$. Acest şir nu poate avea nici un subşir convergent în X. Dacă $(x_{f(n)})$ ar fi un subşir al şirului (x_n), convergent în X, atunci $(x_{f(n)})$ ar fi şir fundamental adică $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall\ p,q \geq n(\varepsilon)\ \ d(x_p,x_q) < \varepsilon$ şi obţinem astfel o contradicţie. Prin urmare $\forall\ \varepsilon > 0$, $K \subset S(x_1,\varepsilon) \cup S(x_2,\varepsilon) \cup \dots \cup S(x_p,\varepsilon)$ cu $x_1, x_2, \dots, x_p \in K$.

Pentru a arăta afirmaţia a doua presupunem că $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ x_\varepsilon \in K$ astfel ca $\forall\ i \in I$ $S(x_\varepsilon,\varepsilon) \not\subset D_i$. Luăm $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ există $x_n \in K$ astfel încât $S\left(x_n, \dfrac{1}{n}\right) \not\subset D_i, \forall\ i \in I$. Dar din ipoteză avem că şirul (x_n) din K conţine un subşir convergent în K, adică există $(x_{f(n)})$ astfel încât $x_{f(n)} \to \xi \in K$.

Cum $K \subset \cup_{i\in I} D_i$, există $i_0 \in I$ astfel încât $\xi \in D_{i_0}$. Deoarece D_{i_0} este un deschis, există $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$ cu $S(\xi,r) \subset D_{i_0}$.

Pentru n suficient de mare avem $d(x_{f(n)},\xi) < \dfrac{r}{2}$ şi $\dfrac{1}{f(n)} < \dfrac{r}{2}$. Arătăm că are loc următoarea incluziune $S\left(x_{f(n)}, \dfrac{1}{f(n)}\right) \subset S(\xi,r)$. Pentru aceasta fie

$y \in S\left(x_{f(n)}, \frac{1}{f(n)}\right)$;

$$d(y,\xi) \le d(y, x_{f(n)}) + d(x_{f(n)}, \xi) \le \frac{1}{f(n)} + \frac{r}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

prin urmare, $S\left(x_{f(n)}, \frac{1}{f(n)}\right) \subset S(\xi, r) \subset D_{i_0}$, contradicţie.

Pentru acoperirea deschisă $\{D_i \,|\, i \in I\}$ a lui K alegem un $\varepsilon > 0$ astfel încât să se verifice proprietatea 2. Conform proprietăţii 1, pentru acest ε există o acoperire finită a lui K cu sferoizi de rază ε, adică $K \subset S(x_1, \varepsilon) \subset S(x_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup S(x_n, \varepsilon)$ cu $S(x_j, \varepsilon) \subset D_{i_{x_j}}$, $\forall\, j = \overline{1, n}$.

Am obţinut astfel $K \subset D_{i_{x_1}} \cup D_{i_{x_2}} \cup \cdots \cup D_{i_{x_n}}$, adică K este o mulţime compactă.

Corolarul 3.3.1 *Un spaţiu metric X este compact dacă şi numai dacă orice şir de puncte din X conţine un subşir convergent.*

Teorema 3.3.3 *Orice interval $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ închis şi mărginit pe $\mathbb{R}$ este compact.*

Demonstraţie: Dacă (x_n) este un şir de puncte din $[a, b]$, atunci el este mărginit şi, conform lemei lui Cesaro, acest şir conţine un subşir convergent către un punct $\xi \in \overline{[a, b]} = [a, b]$. Din teorema 3.3.2 obţinem că intervalul închis şi mărginit $[a, b]$ din $\mathbb{R}$ este un compact.

Teorema 3.3.4 *Dacă X şi Y sunt spaţii metrice compacte, atunci spaţiul metric $X \times Y$ este compact.*

Demonstraţie: Pe mulţimea $X \times Y$ se introduce distanţa

$$d(x, y) = \sqrt{d_X^2(x_1, x_2) + d_Y^2(y_1, y_2)}, \;\; \forall\, x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2) \in X \times Y.$$

Considerăm şirul $((x_n, y_n))$ de puncte din $X \times Y$. Cum $(x_n) \subset X$, iar X este spaţiu metric compact, rezultă că există subşirul convergent $(x_{f(n)})$ al şirului (x_n), $x_{f(n)} \to a \in X$, unde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie strict crescătoare. Y fiind spaţiu metric compact, şirul $(y_{f(n)}) \subset Y$ are un subşir convergent (teorema 3.3.2) $(y_{g(f(n))})$, $y_{g(f(n))} \to b \in Y$, unde $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie strict crescătoare.

Evident $x_{g(f(n))} \to a$ şi am găsit subşirul $((x_{g(f(n))}, y_{g(f(n))})$ al şirului $((x_n, y_n))$ din $X \times Y$ convergent către $(a, b) \in X \times Y$. Prin urmare, conform teoremei 3.3.2, rezultă $X \times Y$ spaţiu metric compact.

Corolarul 3.3.2 *Orice paralelipiped închis $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ din $\mathbb{R}^p$ este compact, $p \ge 1$.*

Demonstraţie: Din teorema 3.3.3 intervalul $[a_i, b_i]$ din $\mathbb{R}$ este compact, $\forall\, i = \overline{1, p}$. P fiind produs cartezian finit de mulţimi compacte, rezultă conform teoremei 3.3.4 P este un compact.

Caracterizarea mulţimilor compacte din $\mathbb{R}^p, p \ge 1$.

Teorema 3.3.5 *Heine - Borel*

O submulţime $K \subset \mathbb{R}^p$, $p \ge 1$ este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită.

DEMONSTRAŢIE: Necesitatea a fost arătată la teorema 3.3.1. Pentru a demonstra suficienţa, fie $K \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime închisă şi mărginită. Atunci există un paralelipiped $P \subset \mathbb{R}^p$, $P = [a_1, b_1,] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ astfel încât $K \subseteq P$.

Dacă (x_n) este un şir de puncte din K, atunci $(x_n) \subset P$ şi, cum P este compact, şirul (x_n) conţine un subşir convergent $x_{f(n)} \to \xi$ în P, unde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie strict crescătoare; $x_{f(n)} \in K \Rightarrow \xi \in \bar{K} = K$, adică şirul (x_n) conţine un subşir convergent $x_{f(n)} \to \xi$ în K şi, conform teoremei 3.3.2, mulţimea K este compactă.

Observaţia 3.3.1 *1. Dacă $K \subset \mathbb{R}^p$ nu este închisă sau nu este mărginită, există acoperiri ale lui K cu intervale deschise, din care nu se poate extrage o subacoperire finită, adică K nu este un compact. Dacă $K = (-1, 1)$, intervalele $\left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ constituie o acoperire a lui K, dar din care nu se poate extrage o subacoperire finită. Dacă $K = [0, \infty)$, intervalele $(n-2, n), n \geq 1$ constituie o acoperire a lui K, dar din care nu se poate extrage o subacoperire finită.*

2. Orice mulţime finită $K = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset X$, unde X este un spaţiu metric, este închisă şi mărginită, deci compactă.

3. Orice reuniune finită de mulţimi compacte este compactă.

4. Intervalele $(a, b), [a, b), (a, b]$ nu sunt compacte deoarece nu sunt închise, ca şi spaţiile $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}^2$ deoarece nu sunt mărginite.

5. Sfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$ şi elipsoidul plin $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1\}$ sunt mulţimi compacte.

3.4 Continuitate pe compacte

Teorema 3.4.1 *Dacă X, Y sunt două spaţii metrice, $\emptyset \neq K \subset X$ un compact şi $f : K \to Y$ o funcţie continuă pe K, atunci $f(K) \subset Y$ este un compact.*

DEMONSTRAŢIE: Fie $(D_i \,|\, i \in I)$ o acoperire cu deschişi din Y a lui $f(K)$, deci $f(K) \subset \cup_{i \in I} D_i$. Atunci

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(D_i).$$

Deoarece f este continuă pe K, iar D_i sunt deschişi în Y, conform teoremei 3.1.5, rezultă că mulţimile $f^{-1}(D_i)$, $i \in I$ sunt deschise în X. Cum aceste mulţimi formează o acoperire a lui K, iar K este un compact, există mulţimea $J \subset I$ finită astfel ca $K \subset \cup_{i \in J} f^{-1}(D_i)$.

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(D_i)\right) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(D_i)) \subset \bigcup_{i \in J} D_i.$$

Aşadar, din acoperirea $(D_i \,|\, i \in I)$ a lui $f(K)$ am extras o subacoperire finită $(D_i \,|\, i \in J)$, adică $f(K) \subset Y$ este un compact.

Definiţia 3.4.1 *O funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ îşi atinge marginile dacă $\exists\ \alpha, \beta \in A$ astfel încât* $\inf_{x \in A} f(x) = f(\alpha)$ *şi* $\sup_{x \in A} f(x) = f(\beta)$.

Teorema 3.4.2 *Orice funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ definită şi continuă pe un compact A dintr-un spaţiu metric X este mărginită şi îşi atinge marginile.*

DEMONSTRAŢIE: Întrucât f este continuă pe A şi $A \subset X$ compact, conform teoremei 3.4.1, rezultă $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ compact, iar din teorema 3.3.1 $f(A)$ este mărginită şi închisă; $\inf_{x \in A} f(x), \sup_{x \in A} f(x) \in \overline{f(A)} = f(A)$, deci f îşi atinge marginile.

3.5 Mulţimi conexe

Fie X un spaţiu metric fixat.

Definiţia 3.5.1 *O submulţime $C \subset X$ se numeşte neconexă dacă există două mulţimi deschise nevide D_1 şi D_2 în X astfel încât*

$$D_1 \cap D_2 \cap C = \emptyset$$

$$D_1 \cap C \neq \emptyset, \quad D_2 \cap C \neq \emptyset \quad i \quad C \subset D_1 \cup D_2 \tag{3.3}$$

Un spaţiu metric X se numeşte neconex dacă există două mulţimi deschise nevide D_1 şi D_2 în X astfel încât $X = D_1 \cup D_2$ şi $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

O submulţime $C \subset X$ se numeşte conexă dacă nu este neconexă.

Observaţia 3.5.1 *a) Spaţiul X este conex $\Leftrightarrow$ orice submulţime nevidă simultan închisă şi deschisă în X coincide cu X.*

b) A spune că o mulţime $C \subset X$ este conexă înseamnă că aceasta "este formată dintr-o singură bucată".

Exemplu 3.5.1 *1. Într-un spaţiu metric mulţimea formată dintr-un singur punct este conexă.*

2. Într-un spaţiu metric X mulţimea formată din 2 puncte distincte este neconexă. Într-adevăr, dacă $C = \{a, b\} \in X, a \neq b$, atunci pentru $D_1 = X - \{a\}$, $D_2 = X - \{b\}$ se verifică (3.3).

3. Mulţimea $C = (-1, 1] \cup (4, 5)$ este neconexă, deoarece pentru $D_1 = (-1, 2)$ şi $D_2 = (4, 5)$ se verifică (3.3).

4. Sferele sunt conexe.

5. În plan o coroană circulară este conexă.

3.6 Continuitate pe conexe

Teorema 3.6.1 *Fie X, Y două spaţii metrice şi $f : X \to Y$ o aplicaţie continuă. Dacă $A \subset X$ mulţimea este conexă, atunci mulţimea $f(A) \subset Y$ este conexă.*

Demonstraţie: Presupunem că $f(A)$ este neconexă. Din (3.3) există două mulţimi deschise nevide A_1 şi A_2 în Y astfel încât $A_1 \cap A_2 \cap f(A) = \emptyset$, $A_1 \cap f(A) \neq \emptyset$, $A_2 \cap f(A) \neq \emptyset$ şi $f(A) \subset A_1 \cup A_2$. Funcţia f fiind continuă, rezultă că mulţimile $D_1 = f^{-1}(A_1)$ şi $D_2 = f^{-1}(A_2)$ sunt deschise în X şi nevide.

$A_1 \cap f(A) \neq \emptyset \Leftrightarrow \ \exists\, y \in A_1 \cap f(A) \Rightarrow \ \exists\, x \in A$ astfel încât $y \in A_1$ şi $y = f(x) \Rightarrow x \in D_1 \cap A \Rightarrow D_1 \cap A \neq \emptyset$. În mod analog se arată că

$$D_2 \cap A \neq \emptyset. \tag{3.4}$$

Din $f(A) \subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(A_1 \cup A_2) = D_1 \cup D_2$, deci

$$A \subset D_1 \cup D_2 \tag{3.5}$$

Presupunem că $D_1 \cap D_2 \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \ \exists\, x \in D_1 \cap D_2 \cap A \Rightarrow f(x) \in f(A) \cap A_1 \cap A_2 = \emptyset$, absurd, prin urmare

$$D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset. \tag{3.6}$$

Din (3.4), (3.5) şi (3.6) obţinem A neconexă, fals, aşadar $f(A)$ este conexă.

Teorema 3.6.2 *O mulţime $C \subset X$ dintr-un spaţiu metric este conexă dacă şi numai dacă orice funcţie continuă $f : C \to \{0,1\}$ este constantă.*

DEMONSTRAŢIE: $\Rightarrow$ Fie C conexă şi presupunem că există o funcţie continuă $f : C \to \{0,1\}$ neconstantă. Atunci $f(C) = \{0,1\}$ din teorema 3.6.1 ar rezulta conexă, ceea ce este absurd.

$\Leftarrow$ Presupunem că orice funcţie continuă $f : C \to \{0,1\}$ este constantă. Dacă C este neconexă, atunci există mulţimile deschise şi nevide D_1, D_2 în X astfel încât $C \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 \cap C \neq \emptyset$, $D_2 \cap C \neq \emptyset$ şi $C \subset D_1 \cup D_2$.

Definim funcţia $f : C \to \{0,1\}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in D_1 \cap C \\ 1, & x \in D_2 \cap C\,. \end{cases}$$

Din $c \in D_1 \cap C \Rightarrow f(c) = 0$. Cum D_1 este un deschis în X, există $S(c,\delta) \subset D_1$ astfel încât $f(x) = 0$, $\forall\ x \in S(c,\delta) \cap C$. Analog se arată că dacă $c \in D_2 \cap C$ există $S(c,\delta_1)$ astfel încât $f(x) = 1, \forall\ x \in S(c,\delta_1) \cap C$, adică funcţia f este continuă şi neconstantă, ceea ce contrazice ipoteza. Aşadar mulţimea C este conexă.

Teorema 3.6.3 *Dacă $\{C_i \,|\, i \in I, C_i \text{ conexă}\}$ este o familie de mulţimi conexe ale unui spaţiu metric X astfel încât $\cap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$, atunci mulţimea $\cup_{i\in I} C_i$ este conexă.*

DEMONSTRAŢIE: Fie $f : C \to \{0,1\}$ o funcţie continuă, unde $C = \cup_{i\in I} C_i$. Deoarece $\cap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$, există $c \in \cap_{i\in I} C_i$. Presupunem $f(c) = 1$. Pentru orice $x \in C$, $\exists\ i \in I$ astfel încât $x \in C_i$. Restricţia funcţiei f la C_i fiind continuă, iar C_i conexă, rezultă că f este constantă pe C_i. Atunci, deoarece $c \in C_i$, $f(x) = f(c) = 1$, aşadar f este constantă pe C şi, conform teoremei 3.6.2, obţinem C conexă. Cazul $f(c) = 0$ se tratează în mod analog.

Definiţia 3.6.1 *O mulţime $I \subset \mathbb{R}$ se numeşte interval dacă din $a, b \in I$, $a < b$ şi $a \leq c \leq b$, rezultă $c \in I$.*

Teorema 3.6.4 *O submulţime $C \subseteq \mathbb{R}$ este conexă dacă şi numai dacă C este un interval.*

DEMONSTRAŢIE: $\Rightarrow$ Fie C conexă şi presupunem că C nu este interval. Atunci, rezultă că există numerele a, b, c astfel încât $a < c < b$, $\quad a, b, \in C$ şi $c \notin C$. Luând $D_1 = C \cap (-\infty, c) \neq \emptyset$ şi $D_2 = C \cap (c, \infty) \neq \emptyset$ se verifică condiţia (3.3) şi rezultă că C este neconexă, ceea ce este absurd. Aşadar C este un interval.

$\Leftarrow$ Fie C un interval şi presupunem că este neconex. Conform teoremei 3.6.2 rezultă că există o funcţie $f : C \to \{0,1\}$ continuă şi neconstantă. Atunci din teorema Darboux-Bolzano funcţia f ar trebui să ia valoarea $\dfrac{1}{2}$, ceea ce este fals, deoarece f ia numai valorile 0 şi 1.

Corolarul 3.6.1 *Dacă $f : X \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, $C \subseteq X$ conex, pentru care există $a, b \in C$ astfel ca $f(a) < 0$ şi $f(b) > 0$, atunci există $c \in C$ astfel încât $f(c) = 0$.*

DEMONSTRAŢIE: Conform teoremei 3.6.1 rezultă că $f(C)$ este o submulţime conexă a lui $\mathbb{R}$, adică un interval. Atunci, pentru că $0 \in [f(a), f(b)] \subseteq f(C)$, există $c \in C$ astfel încât $f(c) = 0$.

Observaţia 3.6.1 *1. Proprietatea din corolarul 3.6.1 se numeşte proprietatea lui Darboux. Această proprietate nu o au numai funcţiile continue.*

2. Orice mulţime convexă din $\mathbb{R}^n$ este conexă.

3. Orice interval din $\mathbb{R}^n$ este conex.

Definiţia 3.6.2 *O mulţime deschisă şi conexă într-un spaţiu metric se numeşte domeniu.*

Definiţia 3.6.3 *Fie $a, b \in \mathbb{R}^n$. Se numeşte linie poligonală ce uneşte punctele a, b o submulţime $L \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât să existe punctele $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ şi $L_{ab} = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{m-1}, x_m] \cup [x_m, b]$.*

Observaţia 3.6.2 *1. Intervalul $[a, b]$ în $\mathbb{R}^n$ se defineşte ca fiind*

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb \,|\, t \in [0, 1]\}.$$

2. Intervalul $[a, b]$ din $\mathbb{R}^n$ este conex, deoarece $[a, b] = f([0, 1])$, $f(t) = (1-t)a+tb$, $\forall\, t \in [0, 1]$, iar funcţia f este continuă pe mulţimea conexă $[0, 1]$.

Caracterizarea mulţimilor conexe în $\mathbb{R}^n$

Teorema 3.6.5 *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, nevidă din $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Sunt echivalente condiţiile:*
1. D este domeniu în $\mathbb{R}^n$;
2. Orice două puncte din D pot fi numite printr-o linie poligonală conţinută în D.

Demonstraţie: $1 \Rightarrow 2$ Fie $a, b \in D$ două puncte fixate. Notăm $D_1 = \{x \in D \,|$ există o linie poligonală în D, care uneşte punctele a şi $x\} = \{x \in D \,|\, \exists\, L_{ax} \subset D\}$ şi $D_2 = D - D_1$; D_1 şi D_2 mulţimi deschise. Dacă $D_2 \neq \emptyset$, atunci D este neconexă, ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare $D_1 = D$ şi $b \in D_1$, adică $\exists\, L_{ab} \subset D$.

$2 \Rightarrow 1$ Fie $a \in D$ un punct fixat. Pentru orice punct $b \in D$ există o linie poligonală $L_{ab} \subset D$ şi care, conform teoremei 3.6.3, este mulţime conexă. Mulţimea $D = \cup_{b \in D} L_{ab}$ este conexă, deorece L_{ab} sunt conexe şi $\cap_{b \in D} L_{ab} = \{a\}$.

3.7 Funcţii uniform continue

Fie (X, d) şi (Y, d') două spaţii metrice, $\emptyset \neq A \subset X$.

Definiţia 3.7.1 *O funcţie $f : A \to Y$ se numeşte uniform continuă pe mulţimea A dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall\, x, y \in A$ cu $d(x, y) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Observaţia 3.7.1 *1. Continuitatea uniformă este o proprietate globală a funcţiilor, în timp ce continuitatea este o proprietate punctuală.*

2. Orice funcţie f uniform continuă pe A este continuă pe A. Într-adevăr, din definiţia 3.7.1 pentru $a = x' \in A$ fixat se obţine f continuă în a şi, cum $a \in A$ a fost ales arbitrar, rezultă f continuă pe A. Reciproca este, în general, falsă.

3. În continuitatea punctuală δ depinde, în general, de ε şi de punct, pe când în continuitatea uniformă δ depinde doar de ε.

Exemplu 3.7.1 *1. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x$ este uniform continuă pe $\mathbb{R}$, deoarece $\forall\, \varepsilon > 0$ punând $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ obţinem*

$$\forall\, x, x' \in \mathbb{R} \text{ cu } |x - x'| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| = |x - x'| < \varepsilon.$$

2. Funcţia $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x}$ *nu este uniform continuă pe* $(0,1)$. *Presupunem* f *uniform continuă pe (0, 1); atunci pentru* $\varepsilon=\frac{1}{3}$ *există* $\delta>0$ *astfel încât* $\forall\ x,x'\in(0,1)$ *cu* $|x-x'|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\frac{1}{3}$. *Fie* $x=\dfrac{1}{n+1}$, $x'=\dfrac{1}{n+2}$, $n\in\mathbb{N}$ *astfel încât* $\dfrac{2}{n+1}<\delta$. *Atunci*

$$|x-x'|=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right|<\frac{2}{n+1}<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x')|=|n+1-(n+2)|=1<\frac{1}{3},$$

fals.

3. Funcţia $f:(1,2)\times(1,2)\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\frac{x}{y}$ *este uniform continuă. Într-adevăr, fie* $\varepsilon>0$ *şi* $x,x',y,y'\in(1,2)$ *astfel ca* $|x-x'|<\delta$, $|y-y'|<\delta$, *unde* $0<\delta<\frac{\varepsilon}{4}$;

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x',y')| &= \left|\frac{x}{y}-\frac{x'}{y'}\right|=\frac{|xy'-x'y|}{yy'}=\frac{|xy'-x'y'+x'y'-x'y|}{yy'}\leq\\ &\leq \frac{y'|x-x'|+x'|y'-y|}{yy'}<\delta\ \frac{x'+y'}{yy'}<4\delta<\varepsilon.\end{aligned}$$

Teorema 3.7.1 *Heine (1821 - 1881)*
Orice funcţie $f:A\to Y$ *continuă pe un compact* A *este uniform continuă pe acel compact.*

Demonstraţie: Presupunem că f nu este uniform continuă. Atunci $\exists\ \varepsilon>0$ astfel încât $\forall\ \delta>0$, există $x,x'\in A$ cu $d(x,x')<\delta$ pentru care $d'(f(x),f(x'))\geq\varepsilon$. Luăm $\delta=\frac{1}{n}$, $n\geq 1$. Există şirurile $(x_n),(x'_n)\subset A$ cu $d(x_n,x'_n)<\dfrac{1}{n}$ astfel ca $d'(f(x_n),f(x'_n))\geq\varepsilon$. $A\subset X$ compactă $\Rightarrow$ şirul $(x_n)\subset A$ conţine un subşir convergent în A, deci există $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ funcţie strict crescătoare şi $a\in A$ astfel ca $x_{h(n)}\to a$ pe X.

Cum $d(x_n,x'_n)<\frac{1}{n}\Rightarrow x'_{h(n)}\to a$ pe X, iar din continuitatea funcţiei $f\Rightarrow f(x_{h(n)})\to f(a)$ pe Y şi $f(x'_{h(n)})\to f(a)$ pe Y, adică $d(f(x_{h(n)}),f(x'_{h(n)}))\to 0$, ceea ce contrazice faptul că $d(f(x_{h(n)}),f(x'_{h(n)}))\geq\varepsilon$, $\forall\ n\geq 1$. Rezultă f uniform continuă.

Exemplu 3.7.2 *1. Funcţia* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & ,\quad x\neq 0\\[2ex] 1 & ,\quad x=0\end{cases}$$

este uniform continuă pe [0, 1], deoarece este continuă pe compactul [0, 1].

2. Funcţia $f:[1,2]\times[1,2]\to\mathbb{R}\ f(x,y)=\frac{x}{y}$ *este uniform continuă, deoarece este continuă iar* $[1,2]\times[1,2]$ *este compact.*

Observaţia 3.7.2 *Dacă* $f:X\to X$, *atunci au loc următoarele implicaţii* f *contracţie* $\Rightarrow f$ *uniform continuă* $\Rightarrow f$ *continuă.*

3.8 Aplicaţii liniare şi continue

Fie E şi F spaţii vectoriale normate, reale.

Definiţia 3.8.1 *Funcţia* $f:E\to F$ *se numeşte aplicaţie liniară sau operator liniar dacă:*
1. $f(x+y)=f(x)+f(y),\forall\ x,y\in E$;
2. $f(\alpha x)=\alpha f(x),\forall\ x\in E$ *şi* $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}$.

Exemplu 3.8.1 *1.* $E = F = \mathbb{R}$.
Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este o aplicaţie liniară, atunci* $f(x) = f(x1) = xf(1)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, *deoarece mulţimea* $\{1\}$ *este bază în* $\mathbb{R}$. *Notând* $f(1) = a \in \mathbb{R}$ *găsim că toate aplicaţiile liniare de la* $\mathbb{R}$ *la* $\mathbb{R}$ *sunt de forma* $f(x) = ax$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

2. $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$.
Considerăm în $\mathbb{R}^n$ *baza canonică* $\{e_1, \dots, e_n\}$, *iar în* $\mathbb{R}$ *baza {1}, unde* $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $\forall\ i = \overline{1,n}$. *Orice* $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ *se scrie sub forma* $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$.

Dacă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *este aplicaţie liniară de la* $\mathbb{R}^n$ *la* $\mathbb{R}$, *atunci*

$$f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \cdots + x_nf(e_n).$$

Notând $f(e_i) = a_i \in \mathbb{R}$ *obţinem că toate aplicaţiile liniare de la* $\mathbb{R}^n$ *la* $\mathbb{R}$ *sunt de forma* $f(x) = \sum_{i=1}^n a_ix_i = (a, x)$, *unde* $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

3. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^m$.
Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ *este aplicaţie liniară de la* $\mathbb{R}$ *la* $\mathbb{R}^m$, *atunci pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *avem*

$$f(x) = f(x1) = xf(1) = x(a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_me_m) = x(a_1, a_2, \dots, a_m),$$

unde $f(1) \in \mathbb{R}^m$, $f(1) = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, *iar* $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ *este baza canonică din* $\mathbb{R}^m$.

Observăm că $f(x) = (xa_1, \dots, xa_m) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ *unde* $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sunt aplicaţii liniare.*

4. $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$.
Fie $\{e_1, \dots, e_n\}$, *respectiv* $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ *bazele canonice din* $\mathbb{R}^n$, *respectiv* $\mathbb{R}^m$. *Dacă* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *este aplicaţie liniară între spaţiile* $\mathbb{R}^n$ *şi* $\mathbb{R}^m$, *atunci* $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ $x = (x_1, \dots, x_n)$ *avem*

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n x_je_j\right) = \sum_{j=1}^n x_jf(e_j).$$

Cum $f(e_j) \in \mathbb{R}^m$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}e'_i$, *deci*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^n x_j\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}e'_i\right) = \sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)e'_i = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j\right) = \\ &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "pr_i"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

unde $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_i(x) = (b_i, x)$, $b_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = \overline{1,m}$ *sunt aplicaţii liniare.*

Matricea $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,m}$ *este matricea asociată aplicaţiei liniare* f *în bazele canonice din* $\mathbb{R}^n$ *şi* $\mathbb{R}^m$.

Observaţia 3.8.1 *1. Dacă* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *şi* $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *sunt aplicaţii liniare ce au matricele* A, *respectiv* B *relative la bazele canonice ale spaţiilor respective, atunci operatorul* $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *are matricea* BA.

2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este aplicaţie liniară $\Leftrightarrow$ cele m componente $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt aplicaţii liniare.

Definiţia 3.8.2 *Aplicaţia liniară $f : E \to F$ este mărginită dacă $\exists\, m > 0$ astfel încât $\|f(x)\| \leq m\|x\|, \forall\, x \in E$.*

Observaţia 3.8.2 *În definiţia 3.8.2 $\|f(x)\|$ reprezintă norma în spaţiul F, iar $\|x\|$ reprezintă norma în spaţiul E.*

Teorema 3.8.1 *Fie $f : E \to F$ o aplicaţie liniară. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:*
1. Aplicaţie f este continuă pe E.
2. Aplicaţia f este continuă în 0_E.
3. Aplicaţia f este mărginită.

Demonstraţie: $1 \Rightarrow 2$ evident;

$2 \Rightarrow 1$. Fie $x_0 \in E$ şi $x_n \to x_0$. Atunci $x_n - x_0 \to 0_E$ şi, conform ipotezei, $f(x_n - x_0) \to f(0_E) = 0_F$, de unde $f(x_n) - f(x_0) \to 0_F$. Deci $f(x_n) \to f(x_0)$, adică f este continuă în punctul x_0. Cum $x_0 \in E$ a fost ales arbitrar, rezultă că aplicaţia liniară f este continuă pe E.

$2 \Rightarrow 3$. Presupunem f continuă în 0_E, deci $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall\, x \in E$ cu $\|x\| < \delta(\varepsilon)$ avem $\|f(x)\| < \varepsilon$. Alegem $\varepsilon = 1$; atunci

$$\exists\, \delta_1 > 0 \quad \text{astfel încât dacă} \quad \|x\| < \delta_1, x \in E \quad \text{avem} \quad \|f(x)\| < 1. \tag{3.7}$$

Fie $y \in E, y \neq 0_E \Rightarrow \|y\| > 0$. Notăm $y_1 = \dfrac{\delta_1}{2\|y\|}y$; $\|y_1\| = \dfrac{\delta_1\|y\|}{2\|y\|} = \dfrac{\delta_1}{2} < \delta_1$ şi, conform (3.7), va rezulta $\|f(y_1)\| < 1$. Dar

$$\begin{aligned} \|f(y_1)\| &= \left\| f\left(\frac{\delta_1 y}{2\|y\|}\right)\right\| = \left\|\frac{\delta_1}{2\|y\|}f(y)\right\| = \\ &= \frac{\delta_1}{2\|y\|}\|f(y)\| < 1 \Rightarrow \|f(y)\| < \frac{2}{\delta_1}\|y\|\,. \end{aligned}$$

Dacă $y = 0_E$, atunci $f(0_E) = 0_F$ şi $\|0_E\| = 0$. Aşadar, aplicaţia liniară f este mărginită.

$3 \Rightarrow 2$. Fie $x_n \to 0_E$ şi presupunem că f este mărginită, deci $\exists\, m > 0$ astfel încât $\forall\, x \in E$ avem $\|f(x)\| \leq m\|x\|$. Atunci $0 < \|f(x_n)\| \leq m\|x_n\|$ şi trecând la limită avem $\|f(x_n)\| \to 0 \Rightarrow f(x_n) \to 0_F = f(0_E)$, adică f este continuă în 0_E.

Fie E şi F spaţii vectorial normate. Notăm $\mathcal{L}_C(E,F) = \{f \in \mathcal{L}(E,F) \mid f$ este continuă pe $E\}$ spaţiul aplicaţiilor liniare şi continue de la E la F.

Teorema 3.8.2 *$\mathcal{L}_C(E,F)$ este spaţiu vectorial normat.*

Demonstraţie: Se verifică uşor că $\mathcal{L}_C(E,F)$ este un spaţiu vectorial.

Fie $f \in \mathcal{L}_C(E,F)$, adică f este o aplicaţie liniară şi continuă între spaţiile vectoriale normate E şi F şi notăm

$$m_1 = \sup\{\|f(x)\| \mid \|x\| = 1\} = \|f\|_1$$

$$m_2 = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \mid x \neq 0_E\right\} = \|f\|_2$$

$$m_3 = \sup\{\|f(x) \mid \|x\| \leq 1\} = \|f\|_3$$

$$\{\|f(x)\| \mid \|x\|=1\} = \left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \mid \|x\|=1\right\} \subseteq \left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \mid x \neq 0_E\right\},$$

astfel

$$m_1 \leq m_2 \tag{3.8}$$

Fie $x \neq 0_E$, $\bar{x} = \dfrac{x}{\|x\|}$. Cum $\|\bar{x}\| = 1$ rezultă

$$\|f(\bar{x})\| \leq m_1 \tag{3.9}$$

$$\|f(\bar{x})\| = \left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|\frac{f(x)}{\|x\|}\right\| = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \tag{3.10}$$

Din (3.9) şi (3.10) obţinem $\dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq m_1$, $x \neq 0_E$ de unde $m_1 \geq m_2$ care împreună cu (3.8) ne dă $m_1 = m_2$.

Demonstrăm că $m_1 \leq m_3 \leq m_2$.

$$\{\|f(x)\| \mid \|x\|=1\} \subseteq \{\|f(x)\| \mid \|x\| \leq 1\} \Rightarrow m_1 \leq m_3.$$

Dacă $0 < \|x\| \leq 1$, atunci $\|f(x)\| \leq \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq m_2$, aşadar, $m_3 = \sup\{\|f(x)\| \mid \|x\| \leq 1\} \leq m_2$.

Dacă $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E \Rightarrow \|f(0_E)\| = 0 \leq m_2$ şi astfel am arătat că $m_1 \leq m_3 \leq m_2$ şi, cum $m_1 = m_2$, obţinem $m_1 = m_2 = m_3$.

Arătăm că $f \to \|f\| = m_1 = m_2 = m_3$ este normă.

1. $\|f\| \geq 0$, $\quad \|f\| = 0 \Rightarrow f(x) = 0_F$. Avem

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0, \ \forall\, x \neq 0_E \Rightarrow \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq 0, \quad \forall\, x \neq 0_E \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|f(x)\| = 0, \quad \forall\, x \neq 0_E \Rightarrow f(x) = 0_F, \quad \forall\, x \neq 0_E. \end{aligned}$$

Cum $f(0_E) = 0_F$, rezultă $f(x) = 0_F$, $\ \forall\, x \in E$.

2.
$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \tag{3.11}$$

(3.11) $\Leftrightarrow \sup\{\|f(x)+g(x)\| \mid \|x\|=1\} \leq \sup\{\|f(x)\| + \|g(x)\| \mid \|x\|=1\} \overset{not}{=} m$.

Avem $\|f(x)+g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|$ şi

$$m' \overset{not}{=} \sup\{\|f(x)\| \mid \|x\|=1\}, \qquad m'' \overset{not}{=} \sup\{\|g(x)\| \mid \|x\|=1\},$$

şi arătăm că $m = m' + m''$.

$$\|f(x)\| \leq m', \quad \|g(x)\| \leq m'', \quad \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq m' + m'', \forall\, x \in E, \|x\| = 1.$$

Cum m este cel mai mic majorant pentru $\|f(x)\| + \|g(x)\|, \|x\| = 1$, rezultă $m \leq m' + m''$.

Fie $\varepsilon > 0$, $m' + m'' - \varepsilon = m' - \frac{\varepsilon}{2} + m'' - \frac{\varepsilon}{2}$;

$$\|f(x)\| > m' - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{şi} \quad \|g(x)\| > m'' - \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \forall\, x \in E, \ \ \|x\| = 1,$$

deci $m' + m'' = m$. Prin urmare, $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

3.
$$\begin{aligned} \|\alpha f\| &= \sup\{\|\alpha f(x)\| \mid \|x\|=1\} = \sup\{|\alpha|\|f(x)\| \mid \|x\|=1\} = \\ &= |\alpha| \sup\{\|f(x)\| \mid \|x\|=1\} = |\alpha|\|f\|, \ \ \forall\, \alpha \in K. \end{aligned}$$

Observaţia 3.8.3 *În general $\mathcal{L}_C(E,F) \subseteq \mathcal{L}(E,F)$, dar se verifică uşor că dacă E şi F sunt spaţii vectoriale normate finit dimensionale avem egalitate, adică $\mathcal{L}_C(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$.*

Teorema 3.8.3 *Dacă F este spaţiu Banach, atunci $\mathcal{L}_C(E,F)$ este un spaţiu Banach.*

Demonstraţie: Fie (f_n) un şir fundamental de aplicaţii liniare şi continue. Atunci $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\, p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$ $\|f_{n+p} - f_n\|_3 < \varepsilon$;

$$\|f_{n+p} - f_n\|_3 = \sup\{\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| \mid \|x\| \leq 1\}$$

$$\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| \leq \|f_{n+p} - f_n\|_3 \|x\| < \varepsilon \|x\| \leq \varepsilon,$$

adică şirul (f_n) fundamental în Y şi, cum spaţiul Y este complet, şirul (f_n) este convergent. Fie $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Pentru orice $x, y \in E$ şi $\forall\, \alpha, \beta \in K$ avem:

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} [\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)] = \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \Rightarrow f \in \mathcal{L}(E,F) \end{aligned}$$

Arătăm că f este mărginită. ¸irul (f_n) fiind fundamental, el este mărginit, adică $\exists\, M > 0$ astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|f_n\| \leq M$. Din $\|f(x)\| - \|f_n(x)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\|$ obţinem $\lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\| = \|f(x)\|$. Atunci

$$\|f(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_3 \|x\| \leq M\|x\| \leq M,$$

adică aplicaţia liniară f este mărginită şi conform teoremei 3.8.1 ea este continuă pe X. Aşadar, $f \in \mathcal{L}_C(E,F)$.

Capitolul 4

Diferenţiabilitate

4.1 Funcţii diferenţiabile

Fie $f : A \to F$ o funcţie definită pe deschisul $A \subseteq E$, unde $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$.

Definiţia 4.1.1 *Spunem că funcţia f este diferenţiabilă în punctul $x_0 \in A$ dacă există o aplicaţie liniară $l \in \mathcal{L}(E, F)$ astfel încât*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - l(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0_F. \tag{4.1}$$

Funcţia f este diferenţiabilă pe mulţimea A dacă este diferenţiabilă în orice punct $x_0 \in A$.

Observaţia 4.1.1 *1. Dacă notăm $x - x_0 = h$, atunci funcţia f este diferenţiabilă în punctul $x_0 \in A$ dacă $\exists\, l \in \mathcal{L}(E, F)$ astfel încât*

$$\lim_{h \to 0_E} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)}{\|h\|} = 0_F\, .$$

2. Dacă notăm

$$\frac{f(x) - f(x_0) - l(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \alpha(x),$$

atunci funcţia f este diferenţiabilă în punctul $x_0 \in A$ dacă $f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + \|x - x_0\|\alpha(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0_F$.

Teorema 4.1.1 *Dacă o funcţie $f : A \to F$, $A = \overset{\circ}{A} \subset E$ este diferenţiabilă într-un punct $x_0 \in A$, atunci aplicaţia liniară $l \in \mathcal{L}(E, F)$ din definiţia 4.1.1 este unic determinată.*

Demonstraţie: Presupunem că există $l_1, l_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ cu

$$\lim_{h \to 0_E} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - l_i(h)}{\|h\|} = 0_F, \qquad i = 1, 2.$$

Definim funcţiile $g_i : E \to F, i = 1, 2$

$$g_1(h) = \begin{cases} f(x_0 + h) - f(x_0) - l_1(h), & \text{dacă} \quad x_0 + h \in A \\ -l_1(h), & \text{dacă} \quad x_0 + h \notin A \end{cases}, \quad \text{respectiv}$$

$$g_2(h) = \begin{cases} f(x_0 + h) - f(x_0) - l_2(h), & \text{dacă} \quad x_0 + h \in A \\ -l_2(h), & \text{dacă} \quad x_0 + h \notin A \end{cases},$$

$$g_1(h) - g_2(h) = l_2(h) - l_1(h) \overset{not}{=} l(h), \qquad l \in \mathcal{L}(E, F).$$

Avem

$$\lim_{h\to 0_E}\frac{g_i(h)}{\|h\|}=0_F \Rightarrow \lim_{h\to 0_E}\frac{g_1(h)-g_2(h)}{\|h\|}=\lim_{h\to 0_E}\frac{l(h)}{\|h\|}=0_F.$$

Din $\lim\limits_{h\to 0_E}\dfrac{l(h)}{\|h\|}=0_F$ rezultă că $\forall\ \varepsilon>0,\ \ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$ astfel încât dacă $\|h\|<\delta(\varepsilon)$ să avem $\dfrac{\|l(h)\|}{\|h\|}<\varepsilon$, adică $\|l(h)\|<\varepsilon\|h\|$.

Dacă $\|h\|=0 \Leftrightarrow h=0_E \Rightarrow l(h)=0_F$, deci $\|l(h)\|\le\varepsilon\|h\|$.

Fie $h_1\neq 0_E$ şi $h_2=\dfrac{\delta_1}{\|h_1\|}h_1$, $\delta_1<\delta(\varepsilon)$;

$$\|h_2\|=\delta_1\left\|\frac{h_1}{\|h_1\|}\right\|=\delta_1<\delta(\varepsilon)\Rightarrow \|l(h_2)\|<\varepsilon\|h_2\|\Rightarrow\frac{\|l(h_2)\|}{\|h_2\|}<\varepsilon.$$

Dar

$$\frac{\|l(h_2)\|}{\|h_2\|}=\frac{\left\|l\left(\frac{\delta_1}{\|h_1\|}h_1\right)\right\|}{\left\|\frac{\delta_1}{\|h_1\|}h_1\right\|}=\frac{\frac{\delta_1}{\|h_1\|}\|l(h_1)\|}{\frac{\delta_1}{\|h_1\|}\|h_1\|}=\frac{\|l(h_1)\|}{\|h_1\|}<\varepsilon.$$

Deoarece $\|l\|=\sup\left\{\dfrac{\|l(h)\|}{\|h\|}\mid h\neq 0_E\right\}\le\varepsilon\Rightarrow\forall\ \varepsilon>0\quad \|l\|\le\varepsilon$, de unde rezultă $\|l\|=0\Rightarrow l(h)=0_F,\ \forall\ h\in E$ adică $l_1(h)=l_2(h),\ \forall\ h\in E$.

Definiţia 4.1.2 *Dacă funcţia $f:A\to F$, definită pe deschisul $A\subseteq E$, este diferenţiabilă într-un punct $x_0\in A$, atunci aplicaţia $l\in\mathcal{L}(E,F)$ din definiţia 4.1.1 se numeşte diferenţiala lui f în punctul x_0 şi se notează $l=df(x_0)$.*

Cu această notaţie relaţia (4.1) devine

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-df(x_0)(x-x_0)}{\|x-x_0\|}=0_F.$$

Observaţia 4.1.2 *Dacă $f:E\to F$ este o aplicaţie liniară, adică $f\in\mathcal{L}(E,F)$, atunci f este diferenţiabilă în orice punct $x_0\in E$ şi $df(x_0)=f$. Într-adevăr, avem*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f(x-x_0)}{\|x-x_0\|}=\lim_{x\to x_0}\frac{0_F}{\|x-x_0\|}=0_F$$

Teorema 4.1.2 *Orice funcţie $f:A\to\mathbb{R}$, $A=\mathring{A}\subset\mathbb{R}$, este diferenţiabilă într-un punct $x_0\in A$ dacă şi numai dacă f este derivabilă în x_0.*

Demonstraţie: f este diferenţiabilă în $x_0\in A\Leftrightarrow\ \exists\ l\in\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ astfel încât

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-l(x-x_0)}{|x-x_0|}=0.$$

Cum $l\in\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})\Rightarrow l(x)=ax,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$, unde $a=l(1)\in\mathbb{R}$. Deci f este diferenţiabilă în $x_0\Leftrightarrow\ \exists\ a\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)}{|x-x_0|}=0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)}{|x-x_0|}\right|=0\Leftrightarrow$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)}{x-x_0}=0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a=0\Leftrightarrow$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a\Leftrightarrow f'(x_0)=a\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f\quad\text{este derivabilă în }\ x_0.$$

În plus, avem $df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h \tag{4.2}$$

Observaţia 4.1.3 $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $1_{\mathbb{R}}(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ *este diferenţiabilă în orice punct* $x_0 \in \mathbb{R}$ *şi* $d1_{\mathbb{R}}(x_0)(h) = h = 1h = 1_{\mathbb{R}}(h)$; *astfel (4.2) devine*

$$\begin{aligned} df(x_0)(h) &= f'(x_0)h = f'(x_0)d1_{\mathbb{R}}(x_0)(h),\ \forall\, h \in \mathbb{R} \Rightarrow df(x_0) = f'(x_0)d1_{\mathbb{R}}(x_0) = \\ &= f'(x_0)d1_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Notând $d1_{\mathbb{R}} = dx$, *obţinem* $df(x_0) = f'(x_0)dx$ *deci* $f'(x_0) = \dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Teorema 4.1.3 *Fie* $f : A \to \mathbb{R}^m$ *o funcţie definită pe un deschis* $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ *şi* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, *unde* $f_i : A \to \mathbb{R}$, $\forall\, i = \overline{1,m}$. *Funcţia* f *este diferenţiabilă în punctul* x_0 *dacă şi numai dacă funcţiile* f_i, $i = \overline{1,m}$ *sunt diferenţiabile în* x_0 *şi, în plus, avem*

$$df(x_0) = (df_1(x_0), df_2(x_0), \ldots, df_m(x_0)).$$

Demonstraţie: f diferenţiabilă în $x_0 \Leftrightarrow\ \exists\ l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ astfel încât $f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + \|x - x_0\|\alpha(x)$, $\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0_{\mathbb{R}^m}$. Deoarece $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $l = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$, $l_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_i : A \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_i(x) = 0$, $i = \overline{1,m}$, avem

$$\begin{aligned} (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) &= (f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_m(x_0)) + \\ &+ (l_1(x - x_0), l_2(x - x_0), \ldots, l_m(x - x_0)) + \\ &+ \|x - x_0\|(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots \alpha_m(x)) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$f_i(x) = f_i(x_0) + l_i(x - x_0) + \|x - x_0\|\alpha_i(x), \qquad \lim_{x\to x_0}\alpha_i(x) = 0 \quad , \quad \forall\, i = \overline{1,m}.$$

$\Leftrightarrow f_i$ sunt diferenţiabile în x_0, $\forall\, i = \overline{1,m}$ şi $df(x_0) = (df_1(x_0),\ df_2(x_0),\ \ldots, df_m(x_0))$.

Aşadar, este suficient în continuare să studiem diverse proprietăţi ale funcţiilor diferenţiabile în cazul $m = 1$.

4.2 Derivate parţiale

Definiţia 4.2.1 *Fie* $f : A \to \mathbb{R}$ *o funcţie definită pe deschisul* $A \subset \mathbb{R}^n$ *şi* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$. *Spunem că funcţia* f *este derivabilă parţial în raport cu variabila* x_i *în punctul* a, *dacă există şi este finită limita:*

$$\lim_{x_i\to a_i}\frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{x_i - a_i} \tag{4.3}$$

Limita (4.3) se numeşte derivata parţială a funcţiei f în raport cu variabila x_i în punctul a şi se notează $f'_{x_i}(a)$ sau $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{x_i\to a_i}\frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{x_i - a_i} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h}, \end{aligned}$$

unde $h = x_i - a_i$.

Funcţia f este derivabilă parţial în raport cu variabila x_i pe A dacă există $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ pentru orice $a \in A$. Funcţia f este derivabilă parţial pe A dacă pentru orice $a \in A$ şi pentru orice $i = \overline{1,n}$ există $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Pentru cazul $n = 2$, respectiv $n = 3$ vom folosi notaţiile $(x_1, x_2) = (x, y)$, $(a_1, a_2) = (x_0, y_0)$ respectiv $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, $(a_1, a_2, a_3) = (x_0, y_0, z_0)$.

Pentru $n = 2$ funcţia $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}$ este derivabilă parţial în raport cu x, respectiv cu y în punctul (x_0, y_0) dacă există limita

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

respectiv

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Exemplu 4.2.1 *1.* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x, y) = x^3 y^2 + y$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$;

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x,1) - f(1,1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = 3 \\
&\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \lim_{y \to 1} \frac{f(1,y) - f(1,1)}{y - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{y^2 + y - 2}{y - 1} = \lim_{y \to 1}(y + 2) = 3, \\
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3 y + 1.
\end{aligned}$$

2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(x) = x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p$, $p \geq 1$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = p x_i^{p-1}$, $\forall\, i = \overline{1,n}$.

Definiţia 4.2.2 *Fie $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcţie definită pe deschisul $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ şi $a \in A$. Dacă există toate derivatele parţiale $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}(a)$, unde $k = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$, atunci matricea*

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \right)_{k = \overline{1,m},\ i = \overline{1,n}}$$

se numeşte matricea jacobiană a funcţiei f în punctul a, sau derivata Fréchet a lui f în punctul a.

Observaţia 4.2.1

$$J_f(a) = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\[2ex]
\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\[2ex]
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\[2ex]
\dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)
\end{pmatrix}$$

Dacă $m = n$ *determinant funcţional jacobiandeterminantul matricei* $J_F(a)$ *se numeşte jacobianul sau determinantul funcţional al funcţiilor* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *în raport cu variabilele* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *în punctul* a *şi se notează*

$$\det J_f(a) = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(a).$$

Definiţia 4.2.3 *Fie* $f : A \to \mathbb{R}$ *o funcţie definită pe deschisul* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *pentru care există derivatele parţiale* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\forall\, i = \overline{1,n}$ *într-un punct* $a \in A$. *Vectorul*

$$grad\; f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) = \nabla f(a)$$

se numeşte gradientul funcţiei f *în punctul* a *(*∇ *este operatorul lui Hamilton).*

Exemplu 4.2.2 *1.* $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $f(r,t) = (r\cos t, r\sin t)$

$$J_f(r,t) = \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix} \quad i \quad \det J_f(r,t) = r.$$

2. $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $f(r,\theta,\varphi) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$

$$J_f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

şi $\det J_f(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\theta$.

3. Gradientul funcţiei $f : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *este*

$$\text{grad } f(x,y,z) = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Teorema 4.2.1 *Dacă* $f : A \to \mathbb{R}$ *este o funcţie definită pe deschisul* $A \subset \mathbb{R}^n$, *diferenţiabilă în punctul* $a \in A$, *atunci* f *este continuă şi există derivatele parţiale în punctul* a, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\forall\, i = \overline{1,n}$.

Demonstraţie: Deoarece funcţia f este diferenţiabilă în punctul $a \in A$ avem

$$f(x) = f(a) + df(a)(x-a) + \|x-a\|\alpha(x) \quad , \quad \lim_{x\to a}\alpha(x) = 0. \tag{4.4}$$

Trecând la limită în relaţia (4.4) obţinem

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(f(a) + df(a)(x-a) + \|x-a\|\alpha(x)) = f(a),$$

deci f este continuă în punctul $x = a$.

Arătăm pentru uşurinţa scrierii în cazul $n = 2$ (deoarece demonstraţia pe cazul general se face în mod analog).

f este diferenţiabilă în punctul $(x_0, y_0) \Leftrightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

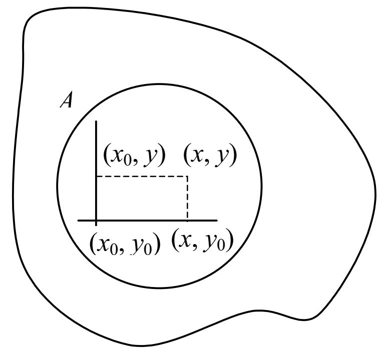

Figura 4.1:

Aşadar, $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0\,,$$

respectiv

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0) - b(y - y_0)}{|y - y_0|} = 0\,,$$

adică

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \text{ şi}$$

$$\exists \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} = b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,.$$

Formula de calcul a diferenţialei

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n$ o funcţie diferenţiabilă în punctul $a \in A$ şi $pr_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $pr_1(x,y) = x$, $pr_2(x,y) = y$ proiecţiile liniare, $pr_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

$d\,pr_1(x_0,y_0)(x,y) = 1x + 0 = x = pr_1(x,y)$

$d\,pr_2(x_0,y_0)(x,y) = 0 + 1y = y = pr_2(x,y)$

$d\,f(x_0,y_0)(x,y) = f'_x(x_0,y_0)d\,pr_1(x_0,y_0)(x,y) + f'_y(x_0,y_0)d\,pr_2(x_0,y_0)(x,y)$

$d\,f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)d\,pr_1(x_0,y_0) + f'_y(x_0,y_0)d\,pr_2(x_0,y_0) \Rightarrow$

$d\,f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)d\,pr_1 + f'_y(x_0,y_0)d\,pr_2$. Notăm $dpr_1 = dx$ şi $dpr_2 = dy$. Cu aceste notaţii avem $df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy$.

În cazul general

$$\begin{aligned} df(a) &= f'_{x_1}(a)dx_1 + f'_{x_2}(a)dx_2 + \cdots + f'_{x_n}(a)dx_n \quad \text{sau} \\ df(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n \end{aligned} \tag{4.5}$$

unde $d\,pr_i = dx_i$, $\forall\, i = \overline{1,n}$; (4.5) reprezintă formula de calcul a diferenţialei.

Exemplu 4.2.3 *1.* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^3y^2 + y$, $(x_0,y_0) = (1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3$, $df(1,1) = 3dx + 3dy = 3(dx + dy)$, *iar într-un punct curent* (x,y) *avem* $df(x,y) = 3x^2y^2dx + (2x^3y + 1)dy$.

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f(x,y,z) = xyz$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz$ *şi* $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy$, $df(x,y,z) = yzdx + xzdy + xydz$.

3. Funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{dacă} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0, & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

nu este diferenţiabilă în origine, deşi are derivate parţiale în origine.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0.$$

Dacă f ar fi diferenţiabilă în origine, atunci ar exista limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\ ,$$

dar limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

nu există.

Observaţia 4.2.2 *1. Din exemplul 4.2.3 se observă că nu este în general suficient ca o funcţie să admită derivate parţiale într-un punct pentru ca să fie diferenţiabilă în acel punct.*

2. Orice funcţie elementară este diferenţiabilă pe orice mulţime deschisă din domeniul de definiţie. Prin urmare, funcţiile polinomiale, raţionale, exponenţiale, etc. sunt funcţii diferenţiabile.

3. Dacă $f:A\to\mathbb{R}^m$, $A=\mathring{A}\subset\mathbb{R}^n$ deschis, $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)$ şi f este diferenţiabilă în $x_0\in A$, atunci matricea diferenţialei $df(x_0)$ în bazele canonice este $J_f(x_0)$. Dacă $m=n$, $df(x_0)$ este izomorfism $\Leftrightarrow \dfrac{D(f_1,f_2,\dots,f_m)}{D(x_1,x_2,\dots,x_m)}(x_0)\neq 0$.

Teorema 4.2.2 *Dacă $f:A\to\mathbb{R}$, $A=\mathring{A}\subset\mathbb{R}^n$, este o funcţie, ce admite derivate parţiale continue într-un punct $a\in A$, atunci f este diferenţiabilă în a.*

Demonstraţie: Pentru simplificare vom considera cazul $n=2$, $a=(x_0,y_0)\in A$.

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0) &= f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0)=\\ &= g(x)-g(x_0)+h(y)-h(y_0)\,,\end{aligned}$$

unde $g:[x_0,x]\to\mathbb{R}$ $g(x)=f(x,y)$, iar $h:[y_0,y]\to\mathbb{R}$ $h(y)=f(x_0,y)$.

$$g'(t)=\lim_{x\to t}\frac{g(x)-g(t)}{x-t}=\lim_{x\to t}\frac{f(x,y)-f(t,y)}{x-t}=f'_x(t,y)$$

$$h'(u)=\lim_{y\to u}\frac{h(y)-h(u)}{y-u}=\lim_{y\to u}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,u)}{y-u}=f'_y(x_0,u).$$

Funcţiile g şi h sunt funcţii Rolle pe intervalele $[x_0, x]$ respectiv $[y_0, y]$. Aplicăm teorema creşterilor finite acestor funcţii. Există $\xi \in (x_0, x)$ şi $\eta \in (y_0, y)$ astfel încât:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = g'(\xi)(x-x_0) + h'(\eta)(y-y_0) = f'_x(\xi,y)(x-x_0) + f'_y(x_0,\eta)(y-y_0).$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \\
&= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \big[f'_x(\xi,y)(x-x_0)+f'_y(x_0,\eta)(y-y_0)- \\
&- f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\big] = \\
&= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(f'_x(\xi,y)-f'_x(x_0,y_0))(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} + \frac{(f'_y(x_0,\eta)-f'_y(x_0,y_0))(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 \quad &\le \quad \left|\frac{(f'_x(\xi,y)-f'_x(x_0,y_0))(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} + \frac{(f'_y(x_0,\eta)-f'_y(x_0,y_0))(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right| \le \\
&\le \quad |f'_x(\xi,y)-f'_x(x_0,y_0)|\frac{|x-x_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} + |f'_y(x_0,\eta)-f'_y(x_0,y_0)| \\
&\quad \frac{|y-y_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \le |f'_x(\xi,y)-f'_x(x_0,y_0)| + |f'_y(x_0,\eta)-f'_y(x_0,y_0)|,
\end{aligned}$$

deoarece

$$\frac{|x-x_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}, \qquad \frac{|y-y_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \le 1.$$

Când $(x,y) \to (x_0,y_0)$ atunci $(\xi,\eta) \to (x_0,y_0)$. Cum derivatele parţiale sunt funcţii continue în (x_0,y_0),

$$\lim_{(\xi,y)\to(x_0,y_0)} f'_x(\xi,y) = f'_x(x_0,y_0) \quad , \quad \text{respectiv} \quad \lim_{\eta\to y_0} f'_y(x_0,\eta) = f'_y(x_0,y_0).$$

Obţinem

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0,$$

adică funcţia f este derivabilă în punctul (x_0,y_0).

Corolarul 4.2.1 *Orice funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ definită pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, ce admite derivate parţiale continue pe A, este diferenţiabilă pe A.*

Observaţia 4.2.3 *Notăm $C^0(A)$ mulţimea funcţiilor continue definite pe deschisul $A \subset \mathbb{R}^n$ şi cu $C^1(A)$ mulţimea funcţiilor continue cu derivate parţiale continue pe deschisul $A \subset \mathbb{R}^n$.*

Cu aceste notaţii corolarul 4.2.1 se enunţă astfel: orice funcţie $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(A)$ este diferenţiabilă pe A.

4.3 Derivata după o direcţie

Fie o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ definită pe un deschis $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ un versor ($\|v\| = 1$) şi $x_0 \in A$. Dacă f este diferenţiabilă în punctul x_0, atunci ne vom apropia de x_0 prin puncte de forma $x = x_0 + tv$, unde $t \in \mathbb{R}$. Deoarece A este un deschis, există $S(x_0, r) \subset A$ astfel încât $\forall\, t \in (-r, r)$ $x_0 + tv \in A$. Într-adevăr, $d(x_0 + tv, x_0) = \|x_0 + tv - x_0\| = \|tv\| = |t|\|v\| = |t| < r$, de unde $x_0 + tv \in S(x_0, r) \subset A$.

Atunci

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - tdf(x_0)(v)}{|t|} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = df(x_0)(v) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Definiţia 4.3.1 *Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie definită pe deschisul $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ şi $v \in \mathbb{R}^n$ un versor, atunci limita $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$, ce reprezintă viteza de variaţie a funcţiei f în punctul x_0 după versorul v, se numeşte derivata funcţiei f în punctul x_0 după versorul v şi se notează $\dfrac{df}{dv}(x_0)$.*

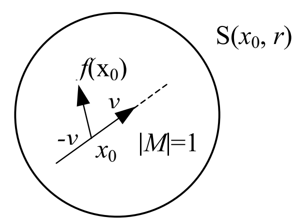

Figura 4.2:

Dacă notăm $x = x_0 + tv$ avem

$$\frac{df}{dv}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{t} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{t}$$

$$\frac{df}{d(-v)}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 - tv) - f(x_0)}{t} = \lim_{u\to 0} \frac{f(x_0 + uv) - f(x_0)}{-u} = -\frac{df}{dv}(x_0).$$

Teorema 4.3.1 *Dacă $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n$, este o funcţie diferenţiabilă într-un punct $x_0 \in A$, atunci pentru orice versor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ avem*

$$\begin{aligned} \frac{df}{dv}(x_0) &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = \\ &= (v, \nabla f(x_0)) = \|\nabla f(x_0)\| \cos(\nabla f(x_0), v) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Demonstraţie: Din (4.6) avem

$$\begin{aligned} \frac{df}{dv}(x_0) &= df(x_0)(v) = df(x_0)(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)v_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)v_n = \\ &= (v, \nabla f(x_0)) = \|\nabla f(x_0)\|\|v\| \cos(\nabla f(x_0), v) = \\ &= \|\nabla f(x_0)\| \cos(\nabla f(x_0), v). \end{aligned}$$

Observaţia 4.3.1 *Dacă luăm versorii v care fac cu gradientul un unghi mai mic, respectiv mai mare decât 90°, atunci aceştia sunt vectorii de creştere, respectiv de descreştere. $\dfrac{df}{dv}(x_0)$ este maxim când $\nabla f(x_0) = v$, adică $\cos(\nabla f(x_0), v)$ are valoarea maximă 1.*

Exemplu 4.3.1 *Să se calculeze derivata funcţiei* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ *în punctul* $A(2,1,3)$ *după direcţia* $\overrightarrow{AB}$, *unde* $B(5,5,15)$.

Versorul direcţiei $\overrightarrow{AB}$ *este* $v=\left(\frac{3}{13},\frac{4}{13},\frac{12}{13}\right)$. *Avem*

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y,z)&=y+z, \quad f'_x(2,1,3)=4\\
f'_y(x,y,z)&=x+z, \quad f'_y(2,1,3)=5\\
f'_z(x,y,z)&=x+y, \quad f'_z(2,1,3)=3.
\end{aligned}$$

După formula (4.7) obţinem $\frac{df}{dv}(2,1,3)=4\frac{3}{13}+5\frac{4}{13}+3\frac{12}{13}=\frac{68}{13}$.

4.4 Proprietăţi ale funcţiilor diferenţiabile şi ale derivatelor parţiale

Teorema 4.4.1 *Dacă* $f,g:A\to\mathbb{R}$, $A=\overset{\circ}{A}\subset\mathbb{R}^n$ *sunt două funcţii diferenţiabile într-un punct* $x_0\in A$, *atunci* $f+g$, λf, *unde* $\lambda\in\mathbb{R}$, fg *şi* f/g *(dacă* $g(x_0)\neq 0$*) sunt diferenţiabile în* x_0 *şi avem:*

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)+\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0), \qquad \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i}(x_0)=\lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\,,$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)g(x_0)+f(x_0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0)\,,$$

$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i}(x_0)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)g(x_0)-\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0)f(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,,$$

$$\begin{aligned}
&\nabla(f+g)(x_0)=\nabla f(x_0)+\nabla g(x_0), \quad \nabla(\lambda f)(x_0)=\lambda\nabla f(x_0)\,,\\
&\nabla(fg)(x_0)=\nabla f(x_0)g(x_0)+\nabla g(x_0)f(x_0)\,,\\
&\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)=\frac{\nabla f(x_0)g(x_0)-\nabla g(x_0)f(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,.
\end{aligned}$$

Dacă $v\in\mathbb{R}^n$ *este versor, atunci*

$$\begin{aligned}
&\frac{d(f+g)}{dv}(x_0)=\frac{df}{dv}(x_0)+\frac{dg}{dv}(x_0), \quad \frac{d(\lambda f)}{dv}(x_0)=\lambda\frac{df}{dv}(x_0)\,,\\
&\frac{d(fg)}{dv}(x_0)=\frac{df}{dv}(x_0)g(x_0)+\frac{dg}{dv}(x_0)f(x_0)\,,\\
&\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dv}(x_0)=\frac{\frac{df}{dv}(x_0)g(x_0)-\frac{dg}{dv}(x_0)f(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&d(f+g)(x_0)=df(x_0)+dg(x_0), \quad d(\lambda f)(x_0)=\lambda df(x_0)\,,\\
&d(fg)(x_0)=df(x_0)g(x_0)+dg(x_0)f(x_0)\,,\\
&d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{df(x_0)g(x_0)-f(x_0)dg(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,.
\end{aligned}$$

Demonstraţie: Cum pentru derivatele parţiale $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, funcţiile $f+g$, λf, fg, f/g sunt considerate funcţii de o variabilă reală x_i, restul variabilelor fiind constante, folosim regulile cunoscute din liceu pentru funcţiile de o variabilă. Pentru derivata după o direcţie respectiv diferenţiala folosim regulile de calcul (4.5) şi (4.7).

4.5 Diferenţiabilitatea funcţiilor compuse

Teorema 4.5.1 *Fie $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}^p$ două funcţii definite pe deschişi $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Dacă funcţia f este diferenţiabilă în $a \in B$, iar funcţia g este diferenţiabilă în $b = f(a)$, atunci funcţia h este diferenţiabilă în a şi $dh(a) = dg(b) \circ df(a)$, unde $h : A \to \mathbb{R}^p$ $h = g \circ f$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h = g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

Figura 4.3:

Demonstraţie: f diferenţiabilă în $a \Rightarrow\ \exists\, T = df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ astfel încât $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0_{\mathbb{R}^m}$, $x \in A$.

g diferenţiabilă în $b = f(a) \Rightarrow\ \exists\, U = dg(b) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ astfel încât $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{g(y) - g(b) - U(y-b)}{\|y-b\|} = 0_{\mathbb{R}^p}$, $y \in B$.

Notăm
$$\frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = \varphi(x) ,$$
respectiv
$$\frac{g(y) - g(b) - U(y-b)}{\|y-b\|} = \Psi(y) \quad \text{şi avem:}$$
$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x), \quad \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0_{\mathbb{R}^m} \tag{4.8}$$
$$g(y) = g(b) + U(y-b) + \|y-b\|\Psi(y), \quad \lim_{y \to b} \Psi(y) = 0_{\mathbb{R}^p} . \tag{4.9}$$

Înlocuind în (4.9) $y = f(x)$ şi $b = f(a)$ rezultă:
$$\begin{aligned} &g(f(x)) = g(f(a)) + U(f(x) - f(a)) + \|f(x) - f(a)\|\Psi(f(x)), \quad \text{de unde} \\ &h(x) = h(a) + U(f(x) - f(a)) + \|f(x) - f(a)\|\Psi(f(x)). \end{aligned}$$

Din (4.8) avem $f(x) - f(a) = T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)$. Atunci
$$\begin{aligned} h(x) &= h(a) + U(T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)) + \|T(x-a) + \\ &\quad + \|x-a\|\varphi(x)\|\Psi(f(x)) , \\ h(x) &= h(a) + (U \circ T)(x-a) + \|x-a\|U(\varphi(x)) + \\ &\quad + \|T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)\|\Psi(f(x)) . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Împărţind (4.10) cu $\|x-a\|$ obţinem
$$\frac{h(x) - h(a) - (U \circ T)(x-a)}{\|x-a\|} = U(\varphi(x)) + \frac{\|T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)\|\Psi(f(x))}{\|x-a\|}$$

Când $x \to a$, atunci $\varphi(x) \to 0_{\mathbb{R}^m}$ şi $U(\varphi(x)) \to U(0_{\mathbb{R}^m}) = 0_{\mathbb{R}^p}$, iar
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = b \Rightarrow \lim_{x \to a} \Psi(f(x)) = \lim_{y \to b} \Psi(y) = 0_{\mathbb{R}^p} .$$

De asemenea,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{\|x-a\|}\|T(x-a)+\|x-a\|\varphi(x)\| \leq \\
&\leq \frac{1}{\|x-a\|}(\|T(x-a)\|+\|x-a\|\|\varphi(x)\|) = \\
&= \frac{1}{\|x-a\|}\|T(x-a)\|+\|\varphi(x)\| \leq \\
&\leq \frac{1}{\|x-a\|}m\|x-a\|+\|\varphi(x)\| = m+\|\varphi(x)\|,
\end{aligned}$$

deoarece $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ şi, prin urmare, conform teoremei 3.8.1, $\exists\, m > 0$ astfel încât $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ $\|T(x)\| \leq m\|x\|$.

Cum $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, rezultă că pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}_a$ a punctului a, $\|\varphi(x)\|$ este mărginită, adică $\exists\, m_1 > 0$ astfel încât $\|\varphi(x)\| \leq m_1$, $\forall\, x \in V$. Astfel, am arătăm că factorul

$$\frac{\|T(x-a)+\|x-a\|\varphi(x)\|}{\|x-a\|}$$

este mărginit, aşadar

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{\|x-a\|}(\|T(x-a)+\|x-a\|\varphi(x)\|)\Psi(f(x))+U(\varphi(x))\right] = 0_{\mathbb{R}^p}\,.$$

Atunci

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)-(U\circ T)(x-a)}{\|x-a\|} = 0_{\mathbb{R}^p}\,,$$

adică funcţia h este diferenţiabilă în punctul a şi

$$dh(a) = U\circ T = dg(b)\circ df(a) = dg(f(a))\circ df(a).$$

Corolarul 4.5.1 *Fie $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}^p$ două funcţii definite pe deschişii $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Dacă funcţia f este diferenţiabilă pe A şi g este diferenţiabilă pe $f(A)$, atunci h este diferenţiabilă pe A şi $\forall\, a \in A$ $dh(a) = dg(f(a))\circ df(a)$, unde $h : A \to \mathbb{R}^p \quad h = g\circ f$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "df(a)"] \arrow[dr, "dh(a)"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "dg(b)"] \\
 & \mathbb{R}^p
\end{tikzcd}$$

Figura 4.4:

Corolarul 4.5.2 *Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, unde $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$, este o funcţie diferenţiabilă pe $[a,b]$, atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât $f(b)-f(a) = df(c)(b-a)$*

Demonstraţie: Pentru $n = 1$ avem $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, diferenţiabilă pe $[a,b]$, deci derivabilă pe $[a,b]$. Din teorema lui Lagrange a creşterilor finite pe $\mathbb{R}$ $\exists\, c \in (a,b)$ astfel încât $f(b)-f(a) = f(c)(b-a)$. Dar $f'(c)(b-a) = df(c)(b-a)$, deci $f(b)-f(a) = df(c)(b-a)$.

Fie $n > 1$, $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = a+t(b-a), \quad t \in [0,1]\}$.

Definim funcţia $g : [0,1] \to [a,b]$, $g(t) = a + t(b-a)$, $\forall\, t \in [0,1]$. Dacă $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ şi $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$, atunci $g(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \ldots, a_n + t(b_n - a_n))$, şi $g_i(t) = a_i + t(b_i - a_i)$, $\forall\, i = \overline{1,n}$. Deoarece funcţiile g_i sunt derivabile pe $[0,1]$, $i = \overline{1,n}$, deci diferenţiabile pe $[0,1]$, rezultă că funcţia g este diferenţiabilă pe $[0,1]$. Din teorema 4.5.1 avem că funcţia $h = f \circ g$, $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă pe $[0,1]$ şi, aplicând teorema lui Lagrange a creşterilor finite funcţiei h pe intervalul $[0,1]$, obţinem că $\exists\, \mathcal{T} \in (0,1)$ astfel ca

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \supset [0,1] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h = f \circ g"'] & {[a,b] \subset \mathbb{R}^n} \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Figura 4.5:

$$h(1) - h(0) = h'(\mathcal{T})(1-0) = dh\mathcal{T}(1-0), \tag{4.11}$$

şi $dh(\mathcal{T}) = df(g(\mathcal{T})) \circ dg(\mathcal{T})$.

$$\begin{aligned}
dh(\mathcal{T})(1-0) &= (df(g(\mathcal{T}) \circ dg(\mathcal{T}))(1-0) = df(g(\mathcal{T}))(dg(\mathcal{T})(1-0)), \\
dg(\mathcal{T})(1-0) &= (dg_1(\mathcal{T})(1-0), \ldots, dg_n(\mathcal{T})(1-0)) = (g_1'(\mathcal{T})(1-0), \ldots, \\
&\qquad g_n'(\mathcal{T})(1-0)) = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n) = b - a,
\end{aligned}$$

deci $dh(\mathcal{T})(1-0) = df(g(\mathcal{T}))(b-a), g(\mathcal{T}) = c \in (a,b)$, $h(1) = (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(b)$, $h(0) = (f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(a)$. Înlocuind în (4.11) rezultă $f(b) - f(a) = df(c)(b-a)$, unde $c \in (a,b)$.

Corolarul 4.5.3 *Inegalitatea lui Lagrange*

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, unde $[a,b] \subset \mathbb{R}^m$, este o funcţie diferenţiabilă pe $[a,b]$, atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\|\,\|b-a\|$.

Demonstraţie: Fie funcţia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $g(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)(f_i(b) - f_i(a))$, unde $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Funcţia g îndeplineşte ipotezele corolarului 4.5.2, prin urmare $\exists\, c \in (a,b)$ astfel încât

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b-a) \tag{4.12}$$

Avem

$$g(b) - g(a) = \sum_{i=1}^{m} [f_i(b) - f_i(a)]^2 = \|f(b) - f(a)\|^2 \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
g'(c)(b-a) &= \sum_{i=1}^{m} f_i'(c)(f_i(b) - f_i(a))(b-a) \leq \\
&\leq \|f'(c)(b-a)\|\,\|f(b) - f(a)\|
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Din relaţiile (4.12), (4.13) şi (4.14) obţinem $\|f(b) - f(a)\|^2 \leq \|f'(c)\|\,\|b-a\|\,\|f(b) - f(a)\|$, adică $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\|\,\|b-a\|$.

Corolarul 4.5.4 *Derivarea funcţiilor compuse*

Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ intervale deschise $f : A \to B$ şi $g : B \to \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă f este derivabilă în punctul $a \in A$ şi g este derivabilă în punctul $b = f(a)$, atunci $h = g \circ f : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a şi $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Demonstraţie: Cum f derivabilă în a, respectiv g derivabilă în $b = f(a)$, rezultă f diferenţiabilă în a, respectiv g diferenţiabilă în b, iar din teorema 4.5.1 rezultă h diferenţiabilă (deci derivabilă) în a şi $dh(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.

Dar, cum $df(a)(x) = f'(a)x$, şi $dh(a)(x) = h'(a)x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, obţinem

$$dg(f(a)) \circ df(a)(x) = dg(f(a))(df(a)(x)) = dg(f(a))(f'(a)x) = g'(f(a))f'(a)x,$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, adică $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Observaţia 4.5.1 *Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $T = (T_1, T_2, \ldots, T_m)$, unde $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $T_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Considerăm $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, respectiv $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ bazele canonice în spaţiile $\mathbb{R}^n$ respectiv $\mathbb{R}^m$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avem:*

$$T(x) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \cdots + x_nT(e_n),$$
$$T(e_i) = (T_1(e_i), T_2(e_i), \ldots, T_m(e_i)) = T_1(e_i)f_1 + T_2(e_i)f_2 + \cdots + T_m(e_i)f_m.$$

Atunci

$$\begin{aligned} T(x) \;=\; & x_1(T_1(e_1), \ldots, T_m(e_1)) + x_2(T_1(e_2), \ldots, T_m(e_2)) + \\ & + x_n(T_1(e_n), \ldots, T_m(e_n)) = (x_1T_1(e_1) + x_2T_1(e_2) + \cdots + \\ & + x_nT_1(e_n), x_1T_2(e_1) + x_2T_2(e_2) + \cdots + \\ & + x_nT_2(e_n), \ldots, x_1T_m(e_1) + x_2T_m(e_2) + \cdots + x_nT_M(e_n)), \end{aligned}$$

relaţie care se scrie sub forma matricială

$$\begin{pmatrix} T_1(e_1) & T_1(e_2) & \ldots & T_1(e_n) \\ T_2(e_1) & T_2(e_2) & \ldots & T_2(e_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_m(e_1) & T_m(e_2) & \ldots & T_m(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_m(x) \end{pmatrix}.$$

Matricea $(T_i(e_j))_{i,j}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ se numeşte matricea asociată aplicaţiei T în bazele canonice din $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}^m$ şi se notează $M_T = (T_i(e_j))_{i,j}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Dacă $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ şi $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$, atunci $M_{U \circ T} = M_U M_T$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "U \circ T"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "U"] \\ & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

Figura 4.6:

2. Considerăm $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcţie definită pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ şi presupunem că f este diferenţiabilă în punctul a. Matricea asociată diferenţialei funcţiei f în punctul a, în bazele canonice din $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}^m$, coincide cu matricea jacobiană a funcţiei f în punctul a.

$df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_m), \;\; f_i : A \to \mathbb{R}$

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Fie $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *şi* $y = df(a)(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. *Avem*

$$\begin{pmatrix} df_1(a)(x) \\ df_2(a)(x) \\ \vdots \\ df_m(a)(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

deci $J_f(a) = M_{df(a)}$.

Corolarul 4.5.5 *Fie* $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}^p$ *două funcţii definite pe deschişii* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$. *Dacă funcţia* f *este diferenţiabilă în* $a \in A$, *iar* g *este diferenţiabilă în* $b = f(a)$, *atunci* $g \circ f$ *este diferenţiabilă în* a *şi*

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a) \tag{4.15}$$

Acest corolar este des uzitat în practică în calculul diferenţialei funcţiilor compuse.

Cazuri particulare

1. Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to \mathbb{R}$ două funcţii definite pe mulţimile deschise $A \subset \mathbb{R}$ şi $B \subset \mathbb{R}^2$, diferenţiabile pe A, respectiv B. $f = (u, v)$, $\quad f(x) = (u(x), v(x))$, $h(x) = g(u(x), v(x)), \forall\, x \in A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ x \arrow[r] \arrow[dr, "h = g\circ f"'] & (u,v) \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Avem $dh(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$, $J_h(x) = (h'(x))$, $J_g(f(x)) = J_g(u(x), v(x)) = \left(\dfrac{\partial g}{\partial u}(u(x), v(x))\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u(x), v(x))\right)$, $J_f(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}, x \in A$

Aplicând regula de calcul (4.15) obţinem

$$(h'(x)) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u(x), v(x))\ \frac{\partial g}{\partial v}(u(x), v(x))\right) \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix},$$

de unde

$$h'(x) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x), v(x))u'(x) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x), v(x))v'(x)$$

sau

$$h' = \frac{\partial g}{\partial u}u' + \frac{\partial g}{\partial v}v'. \tag{4.16}$$

2. Fie $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ două funcţii definite pe deschişii $A \subset \mathbb{R}^2$ şi $B \subset \mathbb{R}^2$, diferenţiabile pe A, respectiv B. $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, $h(x, y) = (g \circ f)(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$, $\forall\, (x, y) \in A$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \\
(x,y) \arrow[r] \arrow[dr, "h=g\circ f"'] & (u,v) \arrow[d, "g"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Avem
$$dh(x,y) = dg(f(x,y)) \circ df(x,y)$$
sau aplicând (4.15)
$$J_h(x,y) = J_g(f(x,y))J_f(x,y) \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
J_h(x,y) &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right),\\
J_g(f(x,y)) &= J_g(u(x,y),v(x,y)) =\\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\right),\\
J_f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Astfel relaţia matricială (4.17) devine:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\right)\cdot$$
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\\ \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix},$$

de unde

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial v}{\partial y}(x,y),$$

sau
$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\
\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

3. Fie $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}^3$ două funcţii definite pe deschişii $A \subset \mathbb{R}^3$ şi $B \subset \mathbb{R}^2$, diferenţiabile pe A, respectiv B.

$f(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z))$, $g(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v))$,

$$\begin{aligned} h(x,y,z) = (g\circ f)(x,y,z) = g(u(x,y,z),v(x,y,z)) &== (g_1(u(x,y,z),v(x,y,z)),\\ &g_2(u(x,y,z),v(x,y,z)),g_3(u(x,y,z),v(x,y,z))) =\\ &= (h_1(x,y,z),h_2(x,y,z),h_3(x,y,z)) \quad \forall\,(x,y,z)\in A, \end{aligned}$$

unde $g_i : B \to \mathbb{R}$, $h_i : A \to \mathbb{R}$ $h_i = g_i(u,v)$, $\forall\, i = \overline{1,3}$.

$$\begin{tikzcd} (x,y,z) \arrow[r, "f"] & (u,v) \\ A \arrow[r] \arrow[dr, "h=g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Atunci

$$dh(x,y,z) = dg(f(x,y,z))df(x,y,z)$$

sau, aplicând (4.15), $J_h(x,y,z) = J_g(f(x,y,z))J_f(x,y,z)$, adică

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial h_1}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial h_1}{\partial z}(x,y,z) \\[2ex] \dfrac{\partial h_2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial h_2}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial h_2}{\partial z}(x,y,z) \\[2ex] \dfrac{\partial h_3}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial h_3}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial h_3}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u}(u(x,y,z),v(x,y,z)) & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}(u(x,y,z),v(x,y,z)) \\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial u}(u(x,y,z),v(x,y,z)) & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}(u(x,y,z),v(x,y,z)) \\[2ex] \dfrac{\partial g_3}{\partial u}(u(x,y,z),v(x,y,z)) & \dfrac{\partial g_3}{\partial v}(u(x,y,z),v(x,y,z)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial v}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}, \quad \text{de unde}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial g_i}{\partial u}(u(x,y,z),v(x,y,z))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \\ &+ \frac{\partial g_i}{\partial v}(u(x,y,z),v(x,y,z))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial h_i}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial g_i}{\partial u}(u(x,y,z),v(x,y,z))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) + \\ &+ \frac{\partial g_i}{\partial v}(u(x,y,z),v(x,y,z))\frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial h_i}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial g_i}{\partial u}(u(x,y,z),v(x,y,z))\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) + \\ &+ \frac{\partial g_i}{\partial v}(u(x,y,z),v(x,y,z))\frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z), \end{aligned}$$

$i = \overline{1,3}$ sau

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_i}{\partial x} &= \frac{\partial g_i}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g_i}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\
\frac{\partial h_i}{\partial y} &= \frac{\partial g_i}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g_i}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial h_i}{\partial z} &= \frac{\partial g_i}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g_i}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}, \quad i = \overline{1,3}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Exemplu 4.5.1 *1. Să se calculeze f' dacă $f = f(u,v) = u^v$ şi $u = u(x)$, $v = v(x)$.*

Conform regulii de derivare a funcţiilor compuse (4.16) avem

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)u'(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)v'(x) = vu^{v-1}u'(x) + u^v \ln u v'(x).$$

2. Să se calculeze f'_x şi f'_y pentru funcţia $f(u,v) = \ln(u^2+v)$, unde $u = e^{x+y^2}$ şi $v = x^2+y$.

Conform regulii de derivare a funcţiilor compuse (4.18) avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \\
&= \frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v}2x = \frac{2}{u^2+v}(ue^{x+y^2}+x) = \frac{2}{u^2+v}(u^2+x), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{2u}{u^2+v}2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} = \\
&= \frac{1}{u^2+v}(4uye^{x+y^2}+1) = \frac{1}{u^2+v}(4u^2y+1)\,.
\end{aligned}$$

3. Se dă funcţia $f(u,v) = (uv, u+v, \frac{u}{v})$ şi $u(x,y,z) = x^2 z \sin y$, $v(x,y,z) = y\cos z + x$, $v \neq 0$, $f = (f_1, f_2, f_3)$. Să se calculeze $\frac{\partial f_i}{\partial x}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ şi $\frac{\partial f_i}{\partial z}$, $i = \overline{1,3}$.

Conform regulii de derivare (4.19) avem:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2vxz\sin y + u$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2xz\sin y + 1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xz\sin y}{v} - \frac{u}{v^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = vx^2 z\cos y + u\cos z$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = x^2 z\cos y + \cos z$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{v}x^2 z\cos y - \frac{u}{v^2}\cos z$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = vx^2\sin y - uy\sin z$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = x^2\sin y - y\sin z$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{x^2\sin y}{v} + \frac{u}{v^2}y\sin z.$$

4.6 Derivate parţiale de ordin superior

Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie definită pe mulţimea deschisă $A \subset \mathbb{R}^n$. Presupunem că funcţia f este derivabilă parţial pe A, adică există aplicaţiile $g_i : A \to \mathbb{R}$ $g_i(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $\forall\, x \in A$, $i = \overline{1, n}$.

Definiţia 4.6.1 *Fie $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$. Dacă aplicaţia $g_i : A \to \mathbb{R}$ are derivată parţială în punctul a în raport cu variabila x_j, adică există şi este finită limita*

$$\lim_{x_j \to a_j} \frac{g_i(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) - g_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{x_j - a_j}, \tag{4.20}$$

atunci spunem că f este derivabilă parţial de ordinul al doilea în punctul a în raport cu variabilele x_i şi x_j. Dacă există şi este finită limita (4.20), atunci aceasta se notează cu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ sau $f''_{x_i x_j}(a)$ dacă $i \neq j$, respectiv $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ sau $f''_{x_i^2}(a)$ dacă $i = j$ şi se numeşte derivata parţială de ordinul al doilea mixtă, respectiv nemixtă a funcţiei f în punctul a în raport cu variabilele x_i şi x_j. Dacă există $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ pentru orice $i, j = \overline{1, n}$, atunci f este derivabilă parţială de ordinul al doilea în punctul a. Dacă există $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ pentru orice $a \in A$ şi pentru orice $i, j = \overline{1, n}$, atunci f este derivabilă parţial de ordinul al doilea pe A.

Pentru o funcţie f derivabilă parţial de ordinul al doilea pe A se obţin următoarele funcţii definite pe A:

n derivate parţiale de ordinul întâi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}$,

$n^2 - n$ derivate parţiale de ordinul al doilea mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : A \to \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1,n}$
$i \neq j$,
n derivate parţiale de ordinul al doilea nemixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} : A \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$.

Derivatele parţiale de ordinul p se obţin prin derivarea parţială a derivatelor parţiale de ordinul $p-1$ (în mod inductiv).

Definiţia 4.6.2 *O funcţie $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte de clasă $C^p(A)$ pe mulţimea A, $f \in C^p(A)$, dacă este de clasă $C^{p-1}(A)$ şi derivatele parţiale de ordinul $p-1$ sunt funcţii de clasă $C^1(A)$, adică dacă funcţia admite derivate parţiale până la ordinul p pe A şi acestea sunt funcţii continue pe A.*

Dacă $f \in C^p(A)$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, atunci f este o funcţie indefinit derivabilă pe A şi notăm $f \in C^\infty(A)$, unde $C^\infty(A) = \bigcap_{p \geq 0} C^p(A)$. Avem $C^\infty(A) \subset \cdots \subset C^p(A) \subset C^{p-1}(A) \subset \cdots \subset C^1(A) \subset C^0(A)$. Pentru orice $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mulţimea $(C^p(A), +, \cdot)$, unde " $+$ " respectiv " $\cdot$ " reprezintă operaţiile de adunare, respectiv de înmulţire a funcţiilor reale definite pe A, este un inel comutativ cu unitate.

Exemplu 4.6.1 *1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = e^{ax+by}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $\dfrac{\partial f}{\partial x} = a\, e^{ax+by}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = b\, e^{ax+by}$,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(b\, e^{ax+by}\right) = abe^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\, e^{ax+by}\right) = abe^{ax+by}.$$

Se observă că f admite derivate parţiale de ordinul al doilea pe $\mathbb{R}^2$ şi acestea sunt egale pe $\mathbb{R}^2$. De asemenea, se constată că $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Se arată uşor prin inducţie că

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^\alpha \partial y^{p-\alpha}} = a^\alpha b^{p-\alpha} e^{ax+by}.$$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x|x|y$. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2|x|y, & \text{dacă} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x|x|, \quad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \begin{cases} -2y, & \text{dacă} \quad x < 0 \quad \text{şi} \quad y \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \\ \text{nu există}, & \text{dacă} \quad x = 0 \quad \text{şi} \quad y \in \mathbb{R}^* \\ 2y, & \text{dacă} \quad x > 0 \quad \text{şi} \quad y \in \mathbb{R} \end{cases},$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2|x|, \quad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$, *iar* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$, $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},$$

dacă $(x,y) \neq (0,0)$ *şi* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0.$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

dacă $(x,y) \neq (0,0)$ *şi* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0;$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1,$$

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$

Se observă că nu întotdeauna derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea sunt egale. În continuare vom enunţa un criteriu care ne va da condiţii suficiente pentru egalitatea derivatelor parţiale mixte de ordinul al doilea.

Teorema 4.6.1 *Fie* $g : S(0,r) \to \mathbb{R}$ *o funcţie definită pe un sferoid* $S(0,r) \subset \mathbb{R}^2$*. Dacă* $g \in C^2(S(0,r))$*, atunci derivatele mixte de ordinul al doilea în origine sunt egale, adică*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(0,0).$$

DEMONSTRAŢIE: Considerăm expresia $E(x,y) = g(x,y) - g(x,0) - g(0,y) + g(0,0)$, $\forall\ (x,y) \in S(0,r)$ şi notăm $\varphi(x,y) = g(x,y) - g(x,0)$, $\forall\ (x,y) \in S(0,r)$, $\varphi \in C^2(S(0,r))$. Atunci E va fi de forma $E(x,y) = \varphi(x,y) - \varphi(0,y) = h(x) - h(0)$, unde $h(x) = \varphi(x,y)$, $\forall\ (x,y) \in S(0,r)$, h de două ori derivabilă şi $h'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,y)$. Aplicând teorema lui Lagrange a creşterilor finite funcţiei h pe intervalul $[0,x]$, obţinem că există $\xi \in (0,x)$ astfel încât

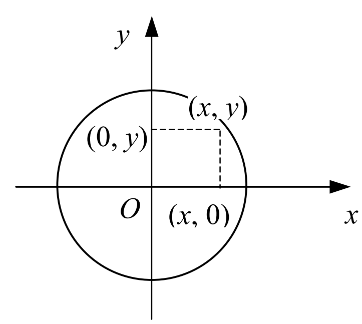

Figura 4.7:

$$E(x,y) = h'(\xi)(x-0) = h'(\xi)x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi,y)x = \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\xi,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(\xi,0)\right]x.$$

Cum $g \in C^2(S(0,r))$, rezultă că $\frac{\partial g}{\partial x} \in C^1(S(0,r))$ şi, aplicând în continuare teorema lui Lagrange a creşterilor finite funcţiei $\frac{\partial g}{\partial x}(\xi,s)$ pe intervalul $[0,y]$, obţinem că există $\eta \in (0,y)$ astfel încât

$$E(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(\xi,\eta)\right)x(y-0) = xy\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(\xi,\eta) \tag{4.21}$$

Acum notăm $\Psi(x,y) = g(x,y) - g(0,y)$, $\forall\ (x,y) \in S(0,r)$, $\Psi \in C^2(S(0,r))$. Atunci E va fi de forma $E(x,y) = \Psi(x,y) - \Psi(x,0)$. Repetând raţionamentul de mai sus obţinem punctele $\bar{\xi} \in (0,x)$ şi $\bar{\eta} \in (0,y)$ astfel încât

$$E(x,y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,\bar{\eta})y = \left[\frac{\partial g}{\partial y}(x,\bar{\eta}) - \frac{\partial g}{\partial y}(0,\bar{\eta})\right]y == xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(\bar{\xi},\bar{\eta}) \tag{4.22}$$

Din (4.21) şi (4.22) rezultă
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(\xi, \eta), \tag{4.23}$$
cu $\xi, \bar{\xi} \in (0, x)$ şi $\eta, \bar{\eta} \in (0, y)$. Când $(x, y) \to (0, 0)$ şi, cum $\xi, \bar{\xi} \in (0, x)$, $\eta, \bar{\eta} \in (0, y)$, rezultă că $(\xi, \eta), (\bar{\xi}, \bar{\eta}) \to (0, 0)$ şi, deoarece $g \in C^2(S(0, r))$, trecând la limită $(x, y) \to (0, 0)$ în relaţia (4.23), obţinem
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Teorema 4.6.2 *Criteriul lui Schwarz (1843 - 1921)*

Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie definită pe mulţimea deschisă $A \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$, atunci derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea sunt egale în orice punct din A, adică
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad \forall\, i, j = \overline{1, n} \quad \text{şi} \quad \forall\, a \in A.$$

Demonstraţie: Fie $a \in A$; $A \subset \mathbb{R}^n$ fiind o mulţime deschisă există $S(a, r) \subseteq A$, $r > 0$. Fie $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ şi presupunem $i < j$ (analog se tratează cazul $i > j$); $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_i + x, \ldots, a_j + y, \ldots, a_n)$, $(x, y) \in S(0, r)$.

Definim funcţia $g : S(0, r) \to A$ $g(x, y) = \bar{a} \in S(a, r)$, $\forall\, (x, y) \in S(0, r)$.

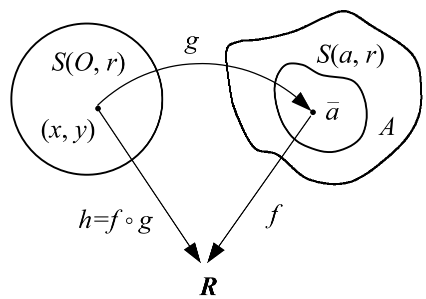

Figura 4.8:

Avem
$$\begin{aligned} d(a, \bar{a}) &= [(a_1 - a_1)^2 + \cdots + (a_i + x - a_i)^2 + \cdots + (a_j + y - a_j)^2 + \cdots + \\ &\quad + (a_n - a_n)^2]^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2} < r, \end{aligned} \tag{4.24}$$
deci funcţia g este bine definită. Fie funcţia $h : S(0, r) \to \mathbb{R}$
$$h(x, y) = (f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = f(\bar{a}) = f(a_1, a_2, \ldots, a_i + x, \ldots, a_j + y, \ldots, a_n).$$
Cum f, g sunt funcţii de clasă C^2 pe domeniile lor de definiţie, rezultă că $h \in C^2(S(0, r))$. Aplicând funcţiei h teorema 4.6.1 obţinem $\frac{\partial h}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial h}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Notăm $a_i + x = x_i$ şi $a_j + y = x_j$. Atunci
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) x_i' = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}), \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{a}) x_j' = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{a}),$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{a})\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}) x_j' = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}),$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{a}) x_i' = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{a}).$$

Când $(x, y) \to (0, 0)$, $\bar{a} \to a$ şi, cum $h \in C^2(S(0, r))$, rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\,.$$

Deoarece $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, iar $a \in A$ a fost ales arbitrar, avem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Corolarul 4.6.1 *Dacă $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n$ şi $f \in C^p(A)$, $p \geq 2$, atunci în calculul $\dfrac{\partial^\alpha f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \partial x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots \partial x_{i_n}^{\alpha_n}}$ nu contează ordinea de derivare parţială, unde $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \alpha$, $2 \leq \alpha \leq p$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.*

Definiţia 4.6.3 *Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie definită pe mulţimea deschisă A, $f \in C^2(A)$, $a \in A$. Forma pătratică $d^2 f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

$$d^2 f(a)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) x_i x_j$$

se numeşte diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei f în punctul a.

Observaţia 4.6.1 *1. Pentru $n = 2$ avem*

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) dy^2;$$

2. $d(dx) = d(dy) = 0$;

3. Dacă introducem operatorul de diferenţiere

$$d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \quad \textit{avem}$$

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f \quad i \quad d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f,$$

unde exponentul 2 înseamnă că se dezvoltă formal suma din paranteză după regula binomului lui Newton şi apoi se înmulţeşte formal cu f.

4. Dacă $f \in C^p(A)$, atunci se defineşte diferenţiala de ordinul p a funcţiei f în punctul $a \in A$ ca fiind

$$d^p f(a)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_p}}(a) x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$$

cu $\{i_1, \ldots, i_p\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

Folosind operatorul de diferenţiere avem

$$d^p f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^p f.$$

Pentru $n = 2$

$$d^p f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^p f.$$

Exemplu 4.6.2 *1. Să se calculeze diferenţiala de ordinul n a funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \sin(ax+by)$, $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Avem*

$$\begin{aligned} d^n f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}} dx^i dy^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} \sin\left(ax+by+\frac{n\pi}{2}\right) dx^i dy^{n-i} = \\ &= \sin\left(ax+by+\frac{n\pi}{2}\right) \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} dx^i dy^{n-i} = \\ &= \sin\left(ax+by+\frac{n\pi}{2}\right)(adx+bdy)^n. \end{aligned}$$

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f(x,y,z) = x^2 + xy - xz^2$. Să calculăm diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei f în punctul $(1,1,0)$. Avem

$$\begin{array}{l} f'_x = 2x + y - z^2, \quad f'_y = x, \quad f'_z = -2xz, \\ f''_{x^2} = 2, \quad f''_{y^2} = 0, \quad f''_{z^2} = -2x, f''_{xz} = -2z, \quad f''_{yz} = 0 \quad f''_{xy} = 1, \\ f''_{x^2}(1,1,0) = 2, \quad f''_{y^2}(1,1,0) = 0, \quad f''_{z^2}(1,1,0) = -2, \quad f''_{xz}(1,1,0) = 0, \\ f''_{yz}(1,1,0) = 0, \quad f''_{xy}(1,1,0) = 1\,. \end{array}$$

Atunci $d^2 f(1,1,0) = 2dx^2 - 2dz^2 + dxdy$.

Definiţia 4.6.4 *Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$ şi $a \in A$. Matricea pătratică simetrică*

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=\overline{1,n}}$$

se numeşte hessiana funcţiei f în punctul a.

4.7 Formula lui Taylor pentru funcţii de o variabilă reală

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de n ori derivabilă în punctul $a \in I$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval. Pentru $x \in I$ definim polinomul $T_{n,a} : I \to \mathbb{R}$

$$T_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

care se numeşte polinomul lui Taylor de gradul n, asociat funcţiei f şi punctului a.

Pentru $x \in I$ definim funcţia $R_n : I \to \mathbb{R}$ $R_n(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$, funcţie numită restul de ordinul n. Avem $f(x) = T_{n,a}(x) + R_n(x)$, adică

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

şi care se numeşte formula lui Taylor de ordin n a funcţiei f în punctul a.

Ne interesează să vedem în ce măsură restul de ordin n se poate exprima cu ajutorul funcţiei f.

Observaţia 4.7.1 *1. Polinomul Taylor $T_{n,a}$ coincide cu funcţia f pe I dacă şi numai dacă f este o funcţie polinomială de grad cel mult n. Într-adevăr, dacă $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, atunci $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$, $f''(0) = 2a_2, \ldots, f^{(n)}(0) = n!a_n$ şi*

$$T_{n,0}(x) = a_0 + a_1x + 2!\frac{a_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n!a_n}{n!}x^n = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Deoarece $T_{n,a}$ este o funcţie polinomială rezultă că $T_{n,a}$ este indefinit derivabilă.

$$T'_{n,a}(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \ldots \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \Rightarrow T'_{n,a}(a) = f'(a)\,,$$

$$T''_{n,a}(x) = f''(a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} \Rightarrow T''_{n,a}(a) = f''(a), \ldots$$

Se obţine că $T^{(k)}_{n,a}(a) = f^{(k)}(a)$, $\forall\ 0 \leq k \leq n$ şi $T^{(k)}_{n,a}(x) = 0$, $\forall\ k \geq n+1$. Deoarece $R_n(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$, rezultă că restul R_n are derivate de ordin k, $\forall\ 0 \leq k \leq n$ şi $R^{(k)}_n(a) = 0$, $\forall\ 0 \leq k \leq n$.
Pentru orice $x \to a$ $R_n(x) \to 0$, adică în vecinătatea punctului a funcţia $f(x)$ se poate aproxima cu polinomul Taylor $T_{n,a}$, eroarea în această aproximare fiind dată de $|R_n(x)| = |f(x) - T_{n,a}(x)|$.

Teorema 4.7.1 *Formula lui Taylor (1685 - 1731) cu restul Peano (1858 - 1932)*
Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie de n ori derivabilă în punctul $a \in I$, atunci există o funcţie $\alpha : I \to \mathbb{R}$ continuă în a cu $\alpha(a) = 0$ astfel încât $\forall\ x \in I$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + \alpha(x)\frac{(x-a)^n}{n!}\ .$$

Demonstraţie: Notăm funcţia $g(x) = (x-a)^n$. Avem $g^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)(x-a)^{n-k}$, $\forall\ 1 \leq k \leq n$ şi deci $g^{(k)}(a) = 0$, $\forall\ 0 \leq k \leq n-1$ şi $g^{(n)}(a) = n!$. Aplicăm în mod repetat teorema lui Cauchy funcţiilor g şi R. Există un punct x, cuprins între a şi x astfel încât:

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R'_n(x_1)}{g'(x_1)}$$

Aplicând din nou teorema lui Cauchy, rezultă că $\exists\ x_2$ cuprins între a şi x_1 astfel încât

$$\frac{R'_n(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{R''_n(x_2)}{g''(x_2)} \ldots.$$

Aplicând de $n-1$ ori teorema lui Cauchy rezultă că există un punct x_{n-1} cuprins între a şi x astfel încât

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R'_n(x_1)}{g'(x_1)} = \cdots = \frac{R^{(n-1)}_n(x_{n-1})}{g^{(n-1)}(x_{n-1})} = \frac{\dfrac{R^{(n-1)}_n(x_{n-1} - R^{(n-1)}_n(a)}{x_{n-1}-a}}{\dfrac{g^{(n-1)}(x_{n-1}) - g^{(n-1)}(a)}{x_{n-1}-a}}.$$

Când $x \to a$ şi $x_{n-1} \to a$, deci

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R^{(n)}_n(a)}{g^{(n)}(a)} = \frac{0}{n!} = 0,$$

adică $\lim_{x\to a}\dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n}=0$.
Definim funcţia $\alpha : I\to\mathbb{R}$ prin

$$\alpha(x)=\begin{cases} n!\dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n}, & x\in I,\ \ x\neq a\\ \\ 0, & x=a\end{cases},$$

$\lim_{x\to a}\alpha(x)=n!\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=0=\alpha(a)\Rightarrow\alpha$ este continuă în a şi $\alpha(a)=0$.

Dacă înlocuim R_n în formula lui Taylor obţinem

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{\alpha(x)}{n!}(x-a)^n.$$

Teorema 4.7.2 *Formula lui Taylor cu restul lui Schömlich (1823 - 1901) - Roche (1470 - 1530)*

Dacă funcţia $f:I\to\mathbb{R}$ este de $n+1$ ori derivabilă pe I, iar $a,x\in I$ sunt două puncte arbitrare, $a\neq x$ şi $p\in\mathbb{N}$, atunci există un punct ξ situat între a şi x astfel încât:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\\ &+\frac{(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}}{n!p}f^{(n+1)}(\xi)\,. \end{aligned}$$

Demonstraţie: Fie α un număr real pentru care are loc egalitatea:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\alpha(x-a)^p.$$

Definim funcţia $\varphi : I\to\mathbb{R}$

$$\varphi(t)=f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n+\alpha(x-t)^p,\quad \forall\, t\in I.$$

Funcţia φ este derivabilă pe I, $\varphi(x)=f(x)$ şi $\varphi(a)=f(x)$. Aplicăm teorema lui Rolle funcţiei φ pe intervalul $[a,x]$ (sau $[x,a]$). Există un punct ξ cuprins între a şi x astfel încât $\varphi'(\xi)=0$.

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t)+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-f'(t)-\\ &- \frac{f''(t)}{1!}(x-t)-\cdots-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-\alpha p(x-t)^{p-1}=\\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\alpha p(x-t)^{p-1}\,, \end{aligned}$$

$$\varphi'(\xi)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n-\alpha p(x-\xi)^{p-1}=0\Rightarrow\alpha=\frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!p}f^{(n+1)}(\xi).$$

Prin urmare, restul R_n are forma:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}}{n!p}f^{(n+1)}(\xi).$$

Observaţia 4.7.2 *1. Dacă $p = 1$ se obţine $R_n(x) = \dfrac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$ numit restul lui Cauchy.*

Dacă $p = n+1$ se obţine $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ numit restul lui Lagrange.

Dacă $n = 1$ din formula lui Taylor cu restul Lagrange, rezultă că există ξ cuprins între a şi x astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(\xi)\,,$$

adică formula creşterilor finite (Lagrange).

2. Punctul ξ cuprins între a şi x depinde atât de a şi x cât şi de n şi p. Prin urmare, punctele ξ din formulele restului sub forma Cauchy, respectiv Lagrange sunt diferite.

3. Cum ξ este cuprins între a şi x, rezultă că există un număr $0 < \theta < 1$ astfel încât $\xi = a + \theta(x-a) = a + \theta h$, unde $h = x - a$. Atunci, formula lui Taylor se poate scrie sub forma:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad \textit{Schlömlich - Roche}$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n}}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \qquad \textit{Cauchy}$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \qquad \textit{Lagrange (1736 - 1813)}$$

4. Un caz particular al formulei lui Taylor cu rest Lagrange este formula lui Mac-Laurin (1698 - 1746).

Dacă $a = 0$, atunci $\forall\, x \in I,\ \exists\, \xi = \theta x$ cu $0 < \theta < 1$ astfel încât

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Teorema 4.7.3 *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie de $n+1$ derivabilă şi $a \in I$ un punct arbitrar, atunci pentru orice $x \in I$, există un punct ξ cuprins între a şi x astfel încât*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) &+ \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ &+ \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \end{aligned} \tag{4.25}$$

(4.25) se numeşte formula lui Taylor cu restul integral de ordin $n, n \geq 0$.

Demonstraţie: Prin inducţie după n.

Pentru $n = 0$ avem de arătat că $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$ ceea ce reprezintă chiar formula Leibniz-Newton.

Presupunem (4.25) adevărată pentru $n-1$ şi arătăm că se verifică şi pentru n, adică

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

E suficient să observăm că are loc următoarea egalitate:

$$\int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt - \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Într-adevăr,

$$\int_a^x f^{(n)}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt - \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt =$$

$$= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{n!}[nf^{(n)}(t) - f^{(n+1)}(t)(x-t)]dt =$$

$$= \int_a^x -\frac{1}{n!}\frac{d}{dt}[(x-t)^n f^{(n)}(t)] = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Exemplu 4.7.1 *1. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ este indefinit derivabilă şi $f^{(n)}(x)=e^x$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$ şi $\forall\ n\geq 0$, $f^{(n)}(0)=1$, $\forall\ n\geq 0$. Formula lui Mac-Laurin asociată funcţiei f ne dă*

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \quad cu \quad 0<\theta<1.$$

Să evaluăm eroarea comisă în aproximarea

$$e \sim 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

Eroarea comisă este

$$|R_n(1)| = \left|\frac{e^\theta}{(n+1)!}\right| < \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!},$$

deci ea este mai mică decât $\frac{3}{(n+1)!}$.

2. Funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\ln(1+x)$ este indefinit derivabilă pe $(-1,\infty)$ şi $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, $\forall\ n\geq 1$; $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$. Atunci $\forall\ x>-1$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

unde $0<\theta<1$.

4.8 Formula lui Taylor pentru funcţii de mai multe variabile

Definiţia 4.8.1 *Fie A o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$ şi $f:A\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^p(A)$, $p\geq 2$. Pentru orice punct $a\in A$, $a=(a_1,\ldots,a_n)$ definim funcţia*

$$T_a(x) = (x_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+(x_2-a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)+\cdots+(x_n-a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

$\forall\ x=(x_1,\ldots,x_n)\in A$.

"Puterea" $[T_a(x)]^{(k)}$, $k=\overline{2,p}$ se obţine prin aplicarea unei formule de tip binomul lui Newton, în care se înlocuieşte ridicarea la putere cu derivarea de ordinul puterii, adică $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^k$, va fi de fapt $\frac{\partial^k f}{\partial x_i}(a)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^k\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right)^l$ va fi $\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x_i^k \partial x_j^l}(a)$, etc, $k+l\le n$.

Polinomul

$$T_{p,a}(x)=f(a)+\frac{1}{1!}T_a(x)+\frac{1}{2!}[T_a(x)]^2+\cdots+\frac{1}{(p-1)!}[T_a(x)]^{p-1}$$

se numeşte polinomul Taylor de grad $p-1$ asociat funcţiei f şi punctului $a\in A$.

Teorema 4.8.1 *Formula lui Taylor*

Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f\in C^p(A)$, $p\ge 2$, unde $A=\mathring{A}\subset\mathbb{R}^n, a\in A$ şi $S(a,r)\subset A$, $r>0$. Atunci pentru orice $x\in S(a,r)$ există un punct ξ situat pe segmentul ce uneşte punctele a şi x astfel încât să avem:

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}T_a(x)+\frac{1}{2!}[T_a(x)]^2+\cdots+\frac{1}{(p-1)!}[T_a(x)]^{p-1}+\frac{1}{p!}[T_\xi(x)]^p \tag{4.26}$$

Demonstraţie: Fie $s\in\mathbb{R}^n$ un versor şi definim funcţia $g:(-r.r)\to\mathbb{R}$, $g(t)=f(a+ts)$. Funcţia f fiind de clasă $C^p(A)$, rezultă că g este de p ori derivabilă pe $(-r,r)$. Aplicând formula lui Mac-Laurin cu rest Lagrange funcţiei g, rezultă că $\forall\ t\in(-r,r)$, $\exists\ \xi_0$ cuprins între 0 şi t astfel încât

$$g(t)=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}t+\frac{g''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{g^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}t^{p-1}+\frac{g^{(p)}(\xi_0)}{p!}t^p \tag{4.27}$$

$g(t)=f(a_1+ts_1,a_2+ts_2,\dots,a_n+ts_n)$ şi dacă notăm $a+ts=x$ avem

$$g'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+ts)s_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a+ts)s_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a+ts)s_n\,,$$

$$g'(0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)s_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)s_n. \tag{4.28}$$

Înmulţind (4.28) cu t obţinem

$$\begin{aligned} tg'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)ts_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)ts_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)ts_n=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1-a_1)+\\ &+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2-a_2)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n-a_n)=T_a(x)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a+ts)s_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a+ts)s_2^2+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a+ts)s_n^2+\\ &+\ 2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a+ts)s_1s_2+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}(a+ts)s_{n-1}s_n\right] \end{aligned} \tag{4.29}$$

Înmulţind (4.29) cu t^2 obţinem

$$\begin{aligned} t^2g''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)(x_1-a_1)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)(x_2-a_2)^2+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a)(x_n-a_n)^2+\\ &+2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a)(x_1-a_1)(x_2-a_2)+\cdots+\right.\\ &+\left.\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}(a)(x_{n-1}-a_{n-1})(x_n-a_n)\right]=[T_a(x)]^2 \end{aligned}$$

şi aşa mai departe $t^k g^k(0) = [T_a(x)]^k \; \forall \; 1 \leq k \leq p-1$ şi $t^p g^{(p)}(\xi_0) = [T_\xi(x)]^p$, unde $\xi = \xi_0 + ts$. Atunci relaţia (4.27) devine

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}T_a(x) + \frac{1}{2!}[T_a(x)]^2 + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}[T_a(x)]^{p-1} + \frac{1}{p!}[T_\xi(x)]^p.$$

Observaţia 4.8.1 *a) Pentru $a = 0 \in \mathbb{R}^n$ se obţine formula lui Mac-Laurin*

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}T_0(x) + \frac{1}{2!}[T_0(x)]^2 + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}[T_0(x)]^{p-1} + \frac{1}{p!}[T_\xi(x)]^p.$$

b) Formula lui Taylor pentru $n = 2$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right] f(a,b) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right]^2 f(a,b) + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right]^{p-1} f(a,b) + \frac{1}{p!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right]^p f(\xi,\eta), \end{aligned}$$

$\forall \; (x,y) \in A$.

Exemplu 4.8.1 *Scriem formula lui Taylor pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = e^{ax+by}$ în punctul (1, -1). Funcţia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ şi avem $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^k \partial y^{p-k}}(x,y) = a^k b^{p-k} e^{ax+by}$, $\forall \; p \geq 1$ şi $\forall \; k = \overline{1,p}$, $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^k \partial y^{p-k}}(1,-1) = a^k b^{p-k} e^{a-b}$.*

Atunci există (ξ_1, ξ_2) situal pe segmentul ce uneşte punctele (1, -1) şi (x,y) astfel încât $\forall \; (x,y) \in \mathbb{R}^2$ să se verifice (4.26), adică

$$\begin{aligned} e^{ax+by} &= e^{a-b}\left[1 + \frac{1}{1!}[a(x-1) + b(y+1)] + \frac{1}{2!}[a(x-1) + b(y-1)]^2 + \right. \\ &+ \left. \cdots + \frac{1}{n!}[a(x-1) + b(y-1)]^n\right] + \frac{e^{a\xi_1 + b\xi_2}}{(n+1)!}[a(x-1) + b(y+1)]^{n+1}. \end{aligned}$$

Aplicaţii ale formulei lui Taylor

1. Calculul limitelor de funcţii

Formula lui Taylor se foloseşte la calculul limitelor de funcţii. Pentru a calcula limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2}{x^3},$$

folosim formula lui Mac-Laurin pentru funcţia $f(x) = \ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2$, $f(0) = 0$.

$$f'(x) = \frac{2}{1+2x} - 2\cos 2x + 4x \Rightarrow f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2} + 4\sin 2x + 4 \Rightarrow f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = \frac{16}{(1+2x)^3} + 8\cos 2x \Rightarrow f'''(0) = 24$$

Atunci

$$f(x) = 24\frac{x^3}{3!} + R_3(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^3 + R_3(x)}{x^3} = 4 + \lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^3} = 4.$$

2. Studiul punctelor de extrem

O condiţie necesară ca un punct de derivabilitate al unei funcţii să fie punct de extrem este ca derivata funcţiei în acest punct să fie zero. Această condiţie este o condiţie necesară dar nu suficientă. Următoarea teoremă ne dă condiţii suficiente pentru ca un punct de derivabilitate al unei funcţii să fie punct de extrem.

Teorema 4.8.2 *Fie o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ de n ori derivabilă într-un punct $a \in I$ astfel încât*

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{şi} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Atunci: 1) Dacă n este par, punctul a este un punct de extrem al lui f şi anume: dacă $f^{(n)}(a) > 0$, rezultă a punct de minim, iar dacă $f^{(n)}(a) < 0$ avem a punct de maxim.

2) Dacă n este impar şi $a \in \overset{\circ}{I}$, atunci a nu este punct de extrem al funcţiei f (doar punct critic).

Demonstraţie: Scriem formula lui Taylor asociată funcţiei f şi punctului a, cu restul Peano:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}\alpha(x), \quad \forall\, x \in I,$$

unde α este o funcţie continuă în punctul a cu $\alpha(a) = 0$. Atunci

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!}[f^{(n)}(a) + \alpha(x)]$$

şi $\lim\limits_{x\to a}[f^{(n)}(a) + \alpha(x)] = f^{(n)}(a)$.

Dacă $f^{(n)}(a) > 0$, atunci $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $f^{(n)}(a) + \alpha(x) > 0$, iar dacă $f^{(n)}(a) < 0$, atunci $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $f^{(n)}(a) + \alpha(x) < 0$, $\forall\, x \in V$. Cum n este par avem $(x-a)^n \geq 0$, $\forall\, x \in I$.

Deci, dacă $f^{(n)} > 0$ şi n este par, $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!}(f^{(n)}(a) + \alpha(x)) > 0 \quad , \quad \forall\, x \in V,$$

de unde $f(x) \geq f(a)$, $\forall\, x \in V$, aşadar, a este punct de minim.

Dacă $f^{(n)} < 0$ şi n par, $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!}(f^{(n)}(a) + \alpha(x)) < 0 \quad , \quad \forall\, x \in V,$$

de unde $f(x) \leq f(a)$, $\forall\, x \in V$, aşadar, a este punct de maxim.

Dacă $a \in \overset{\circ}{I}$ şi n impar, atunci $(x-a)^n < 0$, dacă $x < a$ şi $(x-a)^n > 0$ dacă $x > a$, adică $(x-a)^n$ nu păstrează semn constant în nici o vecinătate a punctului a, deci nici $f(x) - f(a)$ nu păstrează semn constant în nici o vecinătate a punctului a.

Exemplu 4.8.2 *1. Să determinăm punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2\cos x + x^2$. Avem $f'(x) = -2\sin x + 2x$ şi $f'(x) = 0$ pentru $x = 0$. Apoi $f''(x) = -2\cos x + 2$, $f''(0) = 0$, $f'''(x) = 2\sin x$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(x) = 2\cos x$, $f^{(4)}(0) = 2 > 0$, ceea ce implică faptul că $x = 0$ este un punct de minim al funcţiei date.*

2. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$ avem $f'(x) = 3x^2$ şi $f'(x) = 0$ pentru $x = 0$. Apoi $f''(x) = 6x$, $f''(0) = 0$, $f'''(x) = 6 \neq 0$. Ordinul de derivare fiind impar rezultă că $x = 0$ nu este punct de extrem.

4.9 Puncte de extrem

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie reală.

Definiţia 4.9.1 *Un punct $a \in A$ se numeşte punct de extrem local al funcţiei f dacă există un sferoid $S(a,r)$ astfel încât diferenţa $f(x) - f(a)$ păstrează semn constant pentru orice $x \in S(a,r) \cap A$. Dacă $f(x) \geq f(a)$, respectiv $f(x) \leq f(a)$, pentru orice $x \in S(a,r) \cap A$, punctul a se numeşte punct de minim, respectiv maxim local.*

Definiţia 4.9.2 *Un punct $a \in \mathring{A}$ se numeşte punct staţionar sau critic al funcţiei f dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul a şi dacă $df(a) = 0$.*

Observaţia 4.9.1 *Deoarece $df(a) = f'_{x_1}(a)dx_1 + f'_{x_2}dx_2 + \cdots + f'_{x_n}(a)dx_n$, atunci $df(a) = 0 \Leftrightarrow f'_{x_1}(a) = f'_{x_2}(a) = \cdots = f'_{x_n}(a) = 0$.*

Următoarea teoremă, care constituie o generalizare a teoremei lui Fermat pentru funcţii de o variabilă reală, stabileşte condiţii necesare de extrem.

Teorema 4.9.1 *Fermat (1601 - 1665)*

Fie funcţia $f : A \to \mathbb{R}$, unde $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n$. Dacă funcţia f este diferenţiabilă într-un punct $a \in A$, care este punct de extrem local al funcţiei f, atunci a este punct critic.

Demonstraţie. Întrucât a este punct de extrem al funcţiei f, conform definiţiei 4.9.1, există $S(a,r)$ astfel încât diferenţa $f(x) - f(a)$ păstrează semn constant pentru orice $x \in S(a,r) \cap A$. Fie $v \in \mathbb{R}^n$ un versor şi funcţia $g : (-r,r) \to \mathbb{R}$, atunci definită prin $g(t) = f(a+tv)$, pentru orice $|t| < r$. Deoarece f este diferenţiabilă în a, funcţia g este derivabilă în $t = 0$, iar diferenţa $g(t) - g(0) = f(a+tv) - f(a)$ păstrează semn constant pentru orice $t \in (-r,r)$, atunci punctul $t = 0$ este punct de extrem local al funcţiei g. Conform teoremei lui Fermat pentru funcţii de o variabilă reală, rezultă că $g'(0) = 0$, adică $\dfrac{df}{ds}(a) = 0$. Dar, $f(a) = (\nabla f(a), v)$, adică $df(a) = 0$.

Observaţia 4.9.2 *1. Din teorema 4.9.1 şi observaţia 4.9.1 rezultă că punctele de extrem (dacă există) se pot găsi printre soluţiile sistemului*

$$f'_{x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n} \tag{4.30}$$

2. Reciproca teoremei 4.9.1 nu este în general valabilă, după cum se va observa şi din exemplul următor. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - y^2$;

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = x = 0 \\ f'_y(x,y) = -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow a = (0,0) \quad \text{punct critic,}$$

dar $f(x,x) = -\dfrac{x^2}{2} < f(0,0) = 0 < f(x,0) = \dfrac{x^2}{2}$, pentru orice $x \neq 0$. Aşadar, punctul $a = (0,0)$ este doar punct critic nu şi punct de extrem, deşi f este diferenţiabilă în a şi $df(a) = 0$.

3. Funcţia $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ are punctele $x = 1$, respectiv $x = 2$ de minim, respectiv maxim, dar $f'(1) \neq 0, f'(2) \neq 0$. Deci nu orice soluţie a sistemului (4.30) este punct de extrem.

Definiţia 4.9.3 *Punctele critice ale unei funcţii diferenţiabile $f : A \to \mathbb{R}, A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n$, care nu sunt puncte de extrem ale ei se numesc puncte şa.*

În continuare vom stabili condiţii suficiente pentru ca un punct critic să fie punct de extrem.

Lema 4.9.1 *Fie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată unei matrici pătratice simetrice $(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, adică $\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dacă φ este pozitiv definită ($\varphi(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$), atunci există $\alpha > 0$ astfel încât*

$$\varphi(x) \geq \alpha\|x\|^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{4.31}$$

Demonstraţie. Considerăm mulţimea $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ - sfera unitate din $\mathbb{R}^n$, care este închisă şi mărginită, deci compactă.

Funcţia φ fiind continuă pe mulţimea compactă S este mărginită şi îşi atinge marginile, adică, dacă $\alpha = \inf_{x\in S}\varphi(x)$, atunci există $x_0 \in S$ astfel încât $\alpha = \varphi(x_0) \neq 0$, deoarece $0 \notin S$ şi prin urmare $\alpha > 0$. Astfel $\varphi(x) \geq \alpha$ pentru orice $x \in S$.

Fie $y = \dfrac{x}{\|x\|} \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$; atunci $\varphi\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \geq \alpha \Rightarrow \dfrac{1}{\|x\|^2}\varphi(x) \geq \alpha \Rightarrow \varphi(x) \geq \alpha\|x\|^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Cum pentru $x = 0$ avem egalitate, obţinem $\varphi(x) \geq \alpha\|x\|^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

Observaţia 4.9.3 *Dacă forma pătratică φ este negativ definită ($\varphi(x) < 0.\forall\, x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$), atunci există $\alpha > 0$ astfel încât $\varphi(x) \leq -\alpha\|x\|^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 4.9.2 *Fie mulţimea $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n, f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^2(A)$ şi $a \in A$ un punct critic al funcţiei f. Dacă $d^2f(a)$ este pozitiv definită, respectiv negativ definită, atunci a este punct de minim, respectiv maxim local al funcţiei f.*

Demonstraţie. Întrucât $f \in C^2(A)$ putem scrie formula lui Taylor asociată funcţiei f şi punctului a cu restul de ordinul doi. Avem

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; f(a) + \frac{1}{1!}[f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + f'_{x_n}(a)(x_n - a_n)] + \\ &+\frac{1}{2!}[f''_{x_1^2}(\xi)(x_1 - a_1)^2 + 2f''_{x_1x_2}(\xi)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \cdots + \\ &+f''_{x_n^2}(\xi)(x_n - a_n)^2] \end{aligned} \tag{4.32}$$

Cum a este punct critic, rezultă că $f'_{x_i}(a) = 0$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Atunci (4.32) devine

$$\begin{aligned} &f(x) - f(a) = \frac{1}{2!}[f''_{x_1^2}(\xi)(x_1 - a_1)^2 + 2f''_{x_1x_2}(\xi)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \cdots + \\ &+f''_{x_n^2}(\xi)(x_n - a_n)^2] = \frac{1}{2}[f''_{x_1^2}(a)(x_1 - a_1)^2 + 2f''_{x_1x_2}(a)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \cdots + \\ &+f''_{x_n}(a)(x_n - a_n)^2 + (f''_{x_1^2}(\xi) - f''_{x_1^2}(a))(x_1 - a_1)^2 + \\ &+2(f''_{x_1x_2}(\xi) - f''_{x_1x_2}(a))(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \cdots + \\ &+(f''_{x_n^2}(\xi) - f''_{x_n^2}(a)(x_n - a_n)^2] = \frac{1}{2}[d^2f(a)(x - a) + \beta(x)\|x - a\|^2], \end{aligned} \tag{4.33}$$

cu $\lim_{x\to a}\beta(x) = 0$.

Dacă forma pătratică $d^2f(a)$ este pozitiv definită, atunci conform lemei 4.9.1, are loc (4.31), deci există $\alpha > 0$ astfel încât $d^2f(a)(x-a) \geq \alpha\|x-a\|^2$. Atunci (4.33) devine

$$f(x) - f(a) \geq \frac{1}{2}[\alpha\|x-a\|^2 + \beta(x)\|x-a\|^2] = \frac{1}{2}(\alpha + \beta(x))\|x-a\|^2.$$

Deoarece $\lim_{x\to a}\beta(x) = a \Rightarrow\ \exists\, S(a,r)$ astfel încât $\alpha + \beta(x) > 0$, pentru orice $x \in S(a,r)\cap A$, aşadar $f(x) - f(a) > 0$, pentru orice $x \in S(a,r)\cap A$, adică a este punct de minim local al funcţiei f.

Analog se arată şi cazul când $d^2f(a)$ este negativ definită.

Algoritm pentru determinarea punctelor de extrem local

1. Dată fiind funcţia $f: A \to \mathbb{R}, A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n, f \in C^2(A)$ se rezolvă sistemul (4.30), aşadar se determină punctele critice ale funcţiei f.

2. Matricea asociată formei pătratice $d^2f(a)$ este hessiana. Pentru fiecare punct critic a se calculează hessiana corespunzătoare şi, folosind criteriul lui Sylvester, se decide dacă forma pătratică $d^2f(a)$ este pozitiv definită, respectiv negativ definită.

Criteriul lui Sylvester (1814 - 1897): Fie $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată matricii simetrice $(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ şi

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. φ este pozitiv definită, respectiv negativ definită;

2. $\Delta_k > 0$, pentru orice $k = \overline{1,n}$, respectiv $(-1)^k\Delta_k > 0$, pentru orice $k = \overline{1,n}$.

Observaţia 4.9.4 *Dacă $d^2f(a)$ ia şi valori pozitive şi valori negative, atunci a nu este punct de extrem.*

Exemplu: 1. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Avem

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

şi rezolvând acest sistem se obţin punctele critice (0, 0) şi (1, 1). Calculăm hessiana: $f''_{x^2} = 6x, f''_{xy} = -3, f''_{y^2} = 6y$. Pentru punctul $(0,0):\ H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \Delta_1 = 0, \Delta_2 = -9 \Rightarrow$ (0, 0) este punct şa.

Pentru punctul $(1,1):\ H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \Delta_1 = 6 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0 \Rightarrow$ (1, 1) este punct de minim.

4.10 Difeomorfisme. Teorema de inversiune locală

Definiţia 4.10.1 *Fie $D, D_1 \subset \mathbb{R}^n$ mulţimi deschise şi $F : D \to D_1$ o funcţie de clasă $C^1(D)$. Dacă F este bijectivă şi inversa ei $F^{-1} : D_1 \to D$ este o funcţie de clasă $C^1(D_1)$, atunci F se numeşte difeomorfism sau izomorfism diferenţiabil sau transformare regulată.*

Observaţia 4.10.1 *Orice difeomorfism este un homeomorfism.*

Teorema 4.10.1 *de caracterizare a difeomorfismelor.*

Fie $D, D_1 \subset \mathbb{R}^n$ două mulţimi deschise şi $F : D \to D$ o funcţie bijectivă de clasă $C^1(D)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. *F este difeomorfism;*
2. *Pentru orice punct $a \in D, dF(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este un izomorfism de spaţii liniare şi $F^{-1} \in C^0(D_1)$;*
3. *Pentru orice punct $a \in D$, jacobianul funcţiei F în a este nenul şi $F^{-1} \in C^0(D_1)$.*

Demonstraţie: $2 \Leftrightarrow 3$ Matricea asociată aplicaţiei liniare $dF(a)$ în baza canonică din $\mathbb{R}^n$ este matricea jacobiană a funcţiei F în punctul a, $J_F(a)$, adică matricele nesingulare corespund izomorfismelor liniare.

$1 \Rightarrow 2$ F difeomorfism $\Rightarrow F^{-1} \in C^1(D_1), F \in C^1(D)$, adică F^{-1} şi F sunt diferenţiabile pe D_1, respectiv D, $F \circ F^{-1} = 1_{D_1}$ şi $F^{-1} \circ F = 1_D$.

Atunci, conform relaţiei (4.15), $J_{F\circ F^{-1}}(a_1) = U_n$, pentru orice $a_1 \in D_1$ şi $J_{F^{-1}\circ F}(a) = U_n$, pentru orice $a \in D \Rightarrow J_F(F^{-1}(a_1))J_{F^{-1}}(a_1) = U_n$ şi $J_{F^{-1}}(F(a))J_F(a) = U_n$, pentru orice $a \in D$, şi $a_1 \in D_1$, deci matricea $J_F(a)$ este inversabilă şi $J_{F^{-1}}(F(a)) = J^{-1}(F(a))$, pentru orice $a \in D$.

$2 \Rightarrow 1$ Presupunem că pentru orice $a \in D$ $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este un izomorfism liniar şi $F^{-1} \in C^0(D_1)$. Pentru ca F să fie difeomorfism este suficient să arătăm că F^{-1} este diferenţiabilă în orice punct din D_1 şi derivatele parţiale de ordinul I ale lui F^{-1} sunt funcţii continue pe D_1.

Fie $a_1 \in D_1, F^{-1}(a_1) = a \in D$ şi $T = dF(a)$.

Întrucât $F \in C^1(D) \Rightarrow F$ diferenţiabilă pe $D \Rightarrow F$ diferenţiabilă în $a \Rightarrow$ există o funcţie continuă $\alpha : D \to \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$F(x) = F(a) + T(x-a) + \alpha(x)\|x-a\|, \quad \text{cu} \quad \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0_{\mathbb{R}^n};$$

$$T(x-a) = F(x) - F(a) - \alpha(x)\|x-a\| \quad \text{şi aplicând} \quad T^{-1}, \quad \text{se obţine}$$

$$x - a = T^{-1}(y-a_1) - \|x-a\|T^{-1}(\alpha(x)), \quad \text{unde} \quad y = F(x), \tag{4.34}$$

$$F^{-1}(y) - F^{-1}(a_1) - T^{-1}(y-a_1) = -\|x-a\|T^{-1}(\alpha(x)),$$

$$\frac{F^{-1}(y) - F^{-1}(a_1) - T^{-1}(y-a_1)}{\|y-a_1\|} = -\frac{\|x-a\|}{\|y-a_1\|}T^{-1}(\alpha(x)).$$

Arătăm că raportul $\dfrac{\|x-a\|}{\|y-a_1\|}$ este mărginit. Din (4.34) avem

$$\begin{aligned} \|x-a\| &= \|T^{-1}(y-a_1) - \|x-a\|T^{-1}(\alpha(x))\| \leq \\ &\leq \|T^{-1}(y-a_1)\| + \|x-a\| \, \|T^{-1}(\alpha(x))\| \end{aligned} \tag{4.35}$$

T^{-1} fiind aplicaţie liniară şi continuă, conform teoremei 3.8.1, există $m > 0$ astfel încât $\|T^{-1}(y - a_1)\| \leq m\|y - a_1\|$.

Din (4.35) rezultă $\|x - a\| \leq m\|y - a_1\| + \|x - a\|\|T^{-1}(\alpha(x))\| \Rightarrow$

$$\frac{\|x-a\|}{\|y-a_1\|} \leq m + \frac{\|x-a\|}{\|y-a_1\|}\|T^{-1}(\alpha(x))\| \tag{4.36}$$

$y \to a_1 \Leftrightarrow F^{-1}(y) \to F^{-1}(a_1) \quad (F^{-1} \in C^0(D_1))$, deci $x \to a \Leftrightarrow y \to a_1$.

$$\lim_{x\to a} T^{-1}(\alpha(x)) = T^{-1}\left(\lim_{x\to a}\alpha(x)\right) = T^{-1}(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \|T^{-1}(\alpha(x))\| \to 0\,.$$

Aşadar, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $V \in \mathcal{V}_{a_1}$ astfel încât pentru orice $y \in V$ $\|T^{-1}(\varphi(x))\| < \varepsilon$ şi cu (4.36) avem

$$\frac{\|x-a\|}{\|y-a_1\|} \leq m + \frac{\|x-a\|}{\|y-a_1\|}\varepsilon \Rightarrow \frac{\|x-a\|}{\|y-a_1\|} < \frac{m}{1-\varepsilon},$$

adică raportul $\dfrac{\|x-a\|}{\|y-a_1\|}$ este mărginit. Prin urmare,

$$\lim_{y\to a_1} \frac{F^{-1}(y) - F^{-1}(a_1) - T^{-1}(y-a_1)}{\|y-a_1\|} = -\lim_{y\to a_1}\frac{\|x-a\|}{\|y-a_1\|}T^{-1}(\alpha(x)) = 0_{\mathbb{R}^n},$$

deci funcţia F^{-1} este diferenţiabilă în punctul a, şi în plus, $dF^{-1}(a_1) = (dF(a))^{-1}$. Punctul a_1 fiind ales arbitrar din D_1, rezultă că F^{-1} este diferenţiabilă pe D_1. Astfel, funcţia F^{-1} are derivate parţiale de ordinul I în orice punct din D_1. Mai rămâne să arătăm că acestea sunt funcţii continue pe D_1. Datorită faptului că $dF(a)$ este izomorfism liniar, avem $\det J_F(a) \neq 0$, pentru orice $a \in D$, iar din $F \in C^1(D)$ reiese că elementele matricii $J_F(a)$ sunt funcţii continue. Întrucât $J_{F^{-1}}(F(a)) = J_F^{-1}(a)$ elementele matricii $J_F^{-1}(a)$ sunt funcţii continue, rezultă atunci că elementele matricii $J_{F^{-1}}(a_1)$ sunt funcţii continue pentru orice $a_1 \in D_1$, prin urmare, $F^{-1} \in C^1(D_1)$.

Corolarul 4.10.1 *1. Dacă $F : D \to D_1$ şi $G : D_1 \to D_2$ sunt difeomorfisme, unde D, D_1 şi $D_2 \subset \mathbb{R}^n$ sunt mulţimi deschise, atunci $G \circ F : D \to D_2$ este difeomorfism.*

2. Dacă $F : D \to D_1$ este difeomorfism, atunci $F^{-1} : D_1 \to D$ este difeomorfism.

Demonstraţie.

1. F, G difeomorfisme $\Rightarrow$ F, G bijecţii, $F \in C^1(D)$, $G \in C^1(D_1)$, $F^{-1} \in C^0(D_1)$, $G^{-1} \in C^0(D_1)$ şi $J_F(a), J_G(a_1)$ nesingulare pentru orice $a \in D, a \in D_1$. Atunci $G \circ F : D \to D_2$ este bijecţie, $G\circ F \in C^1(D)$, $(G\circ F)^{-1} = F^{-1}\circ G^{-1} \in C^0(D_2)$ şi $J_{G\circ F}(a) = J_G(F(a))J_F(a)$, $J_{G\circ F}(a)$ nesingulară pentru orice $a \in D$ şi, conform teoremei 4.10.1, obţinem că $G \circ F$ este difeomorfism.

2. Rezultă din definiţia 4.10.1.

Corolarul 4.10.2 *Dacă $F : D \to D_1$ este difeomorfism de clasă $C^p(D)$, $p \geq 1$ unde $D, D_1 \subset \mathbb{R}^n$ mulţimi deschise, atunci $F^{-1} : D_1 \to D$ este difeomorfism de clasă $C^p(D_1)$.*

Exemplu 4.10.1 *Dacă $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o aplicaţie liniară, conform teoremei 4.10.1, T este difeomorfism dacă şi numai dacă jacobianul lui T este nenul, adică matricea transformării liniare T este nesingulară.*

În cele ce urmează vom prezenta o teoremă importantă în analiza matematică, care reduce problema bijectivităţii unei funcţii de clasă C^1 la problema bijectivităţii unei aplicaţii liniare.

Teorema 4.10.2 *(teorema funcţiei inverse) Fie* $F : D \to \mathbb{R}^n, D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n$, *o funcţie de clasă* $C^1(D)$ *şi* $a \in D$ *astfel încât* $dF(a)$ *este izomorfism liniar. Atunci există o mulţime deschisă* $D_1 \subset D, a \in D_1$ *astfel ca* $F(D_1) = D_2$ *să fie mulţime deschisă, iar* F *să stabilească un difeomorfism între* D_1 *şi* D_2.

Demonstraţie. Fără a particulariza putem presupune că $a = 0_{\mathbb{R}^n}$ şi $F(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$ (altfel se vor face translaţii de vectori a şi $F(a)$ care sunt difeomorfisme). De asemenea, putem presupune $T = dF(0) = 1_{\mathbb{R}^n}$. Într-adevăr, dacă $T = dF(0) = 1_{\mathbb{R}^n}$, atunci considerăm funcţia $F_1 = T^{-1} \circ F$; $F_1(0) = T^{-1}(F(0)) = T^{-1}(0) = 0$, $dF_1(0) = dT^{-1}(0) \circ dF(0) = T^{-1} \circ T = 1_{\mathbb{R}^n}$.

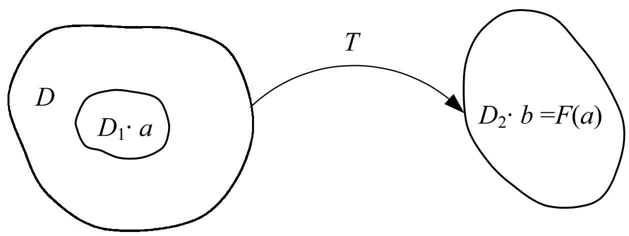

Figura 4.9:

Dacă teorema are loc pentru funcţia F_1, atunci există o mulţime deschisă $D_1' \subset \mathbb{R}$ aşa încât $0 \in D_1' \subset D, F_1(D_1') = D_2' \subset \mathbb{R}^n$ este mulţime deschisă, iar F_1 stabileşte un difeomorfism între D_1' şi D_2'. Întrucât T este difeomorfism se obţine $(T \circ F_1)(D_1') = F(D_1') = D_2 \subset \mathbb{R}^n$ este deschisă şi $F = T \circ F_1$ este un difeomorfism între D_1' şi D_2.

În conformitate cu cele de mai sus vom lucra în ipoteza $a = 0, F(0) = 0$ şi $dF(0) = 1_{\mathbb{R}^n}$.

Fie funcţia $H : D \to \mathbb{R}^n$ definită prin

$$H = F - 1_{\mathbb{R}^n} \tag{4.37}$$

Întrucât $F \in C^1(D)$ rezultă că $H \in C^1(D)$ şi, în plus, $dH(0) = dF(0) - d1_{\mathbb{R}^n}(0) = 1_{\mathbb{R}^n} - 1_{\mathbb{R}^n} = 0$.

Dacă $h_1, h_2, \dots, h_n$ sunt componentele funcţiei H, $H = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, cum $\dfrac{\partial h_i}{\partial x_k} \in C^0(D)$ şi $\dfrac{\partial h_i}{\partial x_k}(0) = 0$, pentru orice $i, k = \overline{1,n}$, există un sferoid $S(0,\delta) \subset D$ astfel ca $\|dh_i(x)\| < \dfrac{1}{n}$ pentru orice $x \in S(0,\delta), \forall\, i = \overline{1,n}$. Aplicând corolarul 4.5.3 avem:

$$|h_i(x) - h_i(y)| < \frac{1}{2n}\|x - y\|, \forall\, x, y \in S(0,r), \forall\, i = \overline{1,n},$$

deci

$$\|H(x) - H(y)\| = \left[\sum_{k=1}^{n}(h_i(x) - h_i(y))^2\right]^{1/2} \le \frac{1}{2}\|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in S(0,\delta) \tag{4.38}$$

Fie $D_2' = S\left(0, \dfrac{\delta}{2}\right)$ şi $D_1' = S(0,\delta) \cap F^{-1}(D_2')$; D_1', D_2' sunt mulţimi deschise în $\mathbb{R}^n$, $0 \in D_1' \subset D$, $F(D_1') \subseteq F(F^{-1}(D_2')) \subseteq D_2'$.

Arătăm că funcţia $F : D_1' \to D_2'$ este injectivă; pentru aceasta fie $a_1, a_2 \in D_1'$ aşa încât $F(a_1) = F(a_2)$. Din (4.37) avem $H(a_1) + a_1 = H(a_2) + a_2$,

$$\|a_1 - a_2\| = \|H(a_2) - H(a_1)\| \le \frac{1}{2}\|a_1 - a_2\| \Rightarrow \|a_1 - a_2\| = 0 \Rightarrow a_1 = a_2,$$

adică funcţia F este injectivă.

Pentru orice $y \in D_2'$ definim funcţia $\varphi_y : \overline{S(0,\delta)} \to \mathbb{R}^n$ $\varphi_y(x) = y - H(x)$, $\forall\, x \in \overline{S(0,\delta)}$ şi arătăm că aceasta este o contracţie pe spaţiul metric complet $\overline{S(0,\delta)}$.

$\forall\, x_1, x_2 \in \overline{S(0,\delta)}$ $\quad \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| = \|H(x_2) - H(x_1)\| \le \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$, adică φ_y este o contracţie cu coeficientul de contracţie $c = \frac{1}{2}$. Conform teoremei de punct fix Banach, funcţia φ_y are un singur punct fix, pe care-l notăm $G(y)$. Aşadar $\varphi_y(G(y)) = G(y)$, adică $y - H(G(y)) = G(y), \forall\, y \in D_2'$. Dacă înlocuim în (4.38) $y = 0$ se obţine $\|H(x)\| \le \frac{1}{2}\|x\|$, pentru orice $x \in S(0,\delta)$ deci $\|H(G(y))\| \le \frac{1}{2}\|G(y)\|$;

$$\|G(y)\| = \|y - H(G(y))\| \le \|y\| + \|H(G(y))\| \le \frac{\delta}{2} + \frac{\|G(y)\|}{2} \Rightarrow \|G(y)\| \le \delta$$

şi, prin urmare,

$$G(y) \in S(0,\delta). \tag{4.39}$$

Pe de altă parte $F(G(y)) = H(G(y)) + G(y) = y$, de unde $G(y) \in F^{-1}(D_2')$, care împreună cu (4.39) ne dă $G(y) \in F^{-1}(D_2') \cap S(0,\delta) = D_1'$.

Astfel s-au definit funcţiile $F : D_1' \to D_2', G : D_2' \to D_1'$ cu următoarele proprietăţi: F este injectivă, $F \circ G = 1_{D_2'}$, de unde obţinem că F este şi surjectivă, deci bijectivă şi $G = F^{-1}$.

Vrem ca $F^{-1} \in C^0(D_2')$. Pentru orice $y_1, y_2 \in D_2'$ avem

$$\begin{aligned}
& \|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y_2)\| = \|y_1 - H(F^{-1}(y_1)) - y_2 + H(F^{-1}(y_2))\| \le \\
\le\ & \|y_1 - y_2\| + \|H(F^{-1}(y_1)) - H(F^{-1}(y_2))\| \le \\
\le\ & \|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2}\|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y_2)\| \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & \|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y_2)\| \le 2\|y_1 - y_2\|
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Astfel, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ aşa încât $\forall\, y_1, y_2 \in D_2'$ cu $\|y_1 - y_2\| < \dfrac{\delta(\varepsilon)}{2} \Rightarrow \|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y_2)\| < \varepsilon$, adică funcţia F^{-1} este uniform continuă pe D_2', deci $F^{-1} \in C^0(D_2')$.

Matricea jacobiană $J_F(0)$ este nesingulară şi, cum ea este alcătuită numai din funţii continue, rezultă că există un deschis $D_1 \subset D_1'$ astfel încât $0 \in D_1$ şi $J_F(x)$ este nesingulară $\forall\, x \in D_1$. Mulţimea $D_2 = F(D_1) \subset \mathbb{R}^n$ este, de asemenea, deschisă, $F : D_1 \to D_2$ bijecţie, $F^{-1} \in C^0(D_2), F \in C^1(D_1)$ şi $J_F(x)$ nesingulară $\forall\, x \in D_1$. În aceste condiţii conform teoremei 4.10.1 se obţine că F stabileşte un difeomorfism între D_1 şi D_2.

Corolarul 4.10.3 *Fie $F : D \to \mathbb{R}^n$ o funcţie de clasă $C^1(D), D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, astfel ca matricea jacobiană $J_F(a)$ să fie nesingulară pentru orice $a \in D$. Atunci funcţia F transformă mulţimi deschise în mulţimi deschise.*

Demonstraţie. Fie $D_1 \subseteq D$ mulţime deschisă şi $a_1 \in F(D_1)$. Atunci există $a \in D_1$ cu $F(a) = a_1$. Conform teoremei 4.10.2 rezultă că există o mulţime deschisă D_2 astfel ca $a \in D_2 \subseteq D$ şi $F(D_2)$ este o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$. Dar $F(a) \in F(D_2) \subseteq F(D_1)$, adică $F(D_1)$ este mulţime deschisă.

Corolarul 4.10.4 *Fie $F : D \to \mathbb{R}^n$ o funcţie de clasă $C^1(D), D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, de componente $f_1, f_2, \ldots, f_n : D \to \mathbb{R}$. Dacă $a \in D$ şi matricea jacobiană $J_F(a)$ este nesingulară, atunci există $V \in \mathcal{V}_{F(a)}$ astfel încât pentru orice $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$ sistemul $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_i$, pentru orice $i = \overline{1,n}$ are soluţie unică $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$, unde $U \in \mathcal{V}_a$.*

Demonstraţie. Conform teoremei 4.10.1 există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $F : U \to F(U)$ este un difeomorfism şi luăm $V = F(U)$.

4.11 Funcţii implicite

Definiţia 4.11.1 *Fie ecuaţia*

$$F(x, y) = 0(1), \tag{4.41}$$

unde $F : D \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, $F_i : D \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. *O funcţie* $y = f(x)$, $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ *astfel încât* $(x, f(x)) \in D$, *se numeşte soluţie în raport cu* y *a ecuaţiei* $F(x, y) = 0$ *pe mulţimea* A *dacă* $F(x, f(x)) = 0$, $\forall\, x \in A$.

Observaţia 4.11.1 *Un sistem de* m *funcţii reale* $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$ *de* n *variabile* $x_1, x_2, \dots, x_n$, $f_i : A \to \mathbb{R}$, *este o soluţie a sistemului de ecuaţii*

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

în raport cu variabilele $y_1, y_2, \dots, y_m$, *pe mulţimea* A, *dacă avem*

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0 \end{cases}$$

$\forall\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$.

Definiţia 4.11.2 *Funcţiile* $y = f(x)$ *definite cu ajutorul ecuaţiilor* $F(x, y) = 0$ *se numesc funcţii implicite.*

Ecuaţiile de forma (4.41) pot avea una sau mai multe soluţii pe o mulţime A sau pot să nu aibă nici o soluţie.

Exemplu 4.11.1

1. *Ecuaţia* $4x - y^2 = 0$ $(n = m = 1)$ *are în raport cu* y *o infinitate de soluţii pe mulţimea* $[0, \infty)$. *Funcţia* $f : [0, \infty) \to \infty$ $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & , \ x \in A_1 \\ -2\sqrt{x} & , \ x \in A_2 \end{cases}$, *unde* $A_1 \cup A_2 = [0, \infty)$, *verifică ecuaţia* $4x - y^2 = 0$.
2. *Ecuaţia* $2x^2 + 5y^2 + 2 = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *nu are nici o soluţie reală.*
3. *Ecuaţia* $x - y^3 = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^3$ *are o singură soluţie pe* $\mathbb{R}$, *funcţia* $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

   Ne punem întrebarea în ce condiţii ecuaţia (4.41) are soluţie, şi dacă această soluţie este unică.

Teorema 4.11.1 *Teorema funcţiilor implicite, Goursat (1858 - 1936)*
Fie $D = D \subset \mathbb{R}^{m+n}, (a, b) \in D$ *şi funcţia* $F : D \to \mathbb{R}^m$, $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, $F \in C^1(D)$. *Dacă* $F(a, b) = 0$ *şi* $\dfrac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}(a, b) \neq 0$, *atunci există* $A \in \mathcal{V}_a, B \in \mathcal{V}_b$ *un* $A \times B \subset D$ *şi o unică funcţie* $f : A \to B$, $f \in C^1(A)$ *astfel încât* $f(a) = b$ *şi* $F(x, f(x)) = 0$, $\forall\, x \in A$.

Demonstraţie: Considerăm funcţia $G : D \to \mathbb{R}^{n+m}$, $G(x, y) = (x, F(x, y))$, $(x, y) \in D$, $G = (G_1, G_2, \ldots, G_{m+n})$, adică $G_1(x, y) = x_1, G_2(x, y) = x_2, \ldots, G_n(x, y) = x_n, G_{n+1}(x, y) = F_1(x, y)$, $G_{n+m}(x, y) = F_m(x, y)$. Atunci jacobianul funcţiei G în punctul (a, b) este

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a,b) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(a,b) & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a,b) & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a,b) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(a,b) & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a,b) & \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}(a, b) \neq 0$$

Conform teoremei de inversiune locală există o mulţime deschisă U astfel încât $(a, b) \in U \subset D, G(U)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^{n+m}$, iar $G : U \to G(U) = V$ un difeomorfism. Presupunem mulţimea U de forma $U = U_1 \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, cu $B \in \mathcal{V}_b$.

Definim funcţia $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ $\quad H(x) = (x, 0)$ şi fie $A = U_1 \cap H^{-1}(V)$. Întrucât $(a, b) \in U = U_1 \times B$ rezultă $a \in U_1$ şi $H(a) = (a, 0) = (a, F(a, b)) = G(a, b) \in V$, adică $a \in H^{-1}(V)$, deci $a \in A$.

Avem $A \times B \subset U_1 \times B = U \subset D$ şi pentru $\forall\, x \in A$ $H(x) = (x, 0) \in V$. Astfel putem defini funcţia $f : A \times B$ $f = \mathrm{pr}_2 \circ G^{-1} \circ H$, $A \overset{H}{\to} V \overset{G^{-1}}{\to} U \overset{\mathrm{pr}_2}{\to} B$. Cum funcţiile pr_2, G^{-1} şi H sunt funcţii de clasă C^1 rezultă $f \in C^1(A)$.

Fie $G^{-1}(x, 0) = (u, v)$; atunci $G(G^{-1}(x, 0)) = G(u, v)$, deci $(x, 0) = (u, F(u, v))$, de unde $x = u$. Pe de altă parte $v = \mathrm{pr}_2(u, v) = \mathrm{pr}_2(G^{-1}(x, 0)) = (\mathrm{pr}_2 \circ G^{-1}H)(x) = f(x)$. Am obţinut $G^{-1}(x, 0) = (x, f(x))$. Fie $x \in A$; $G(x, f(x)) = G(G^{-1}(x, 0)) = (x, 0)$. Dar $G(x, f(x)) = (x, F(x, f(x)))$, adică $F(x, f(x)) = 0, \forall\, x \in A$.

Observaţia 4.11.2 *1. Dacă $F \in C^p(D)$, atunci $f \in C^p(A)$.*

2. În condiţiile teoremei 4.11.1 au loc următoarele:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(x_i, y_2, \ldots, y_m)}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, x_i)}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}}$$

Dacă pentru $x \in A$ în identităţile

$$\begin{cases} F_1(x, f_1(x), \ldots, f_m(x)) = 0 \\ F_2(x, f_1(x), \ldots, f_m(x)) = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ F_m(x, f_1(x), \ldots, f_m(x)) = 0 \end{cases}$$

derivăm în raport cu x_i obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \cdots + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m}\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \cdots + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0\,. \end{cases}$$

Folosind regula lui Krammer rezultă

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(x_i,y_2,\ldots,y_m)}}{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_m)}},\ldots,\frac{\partial f_m}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{D(F_1,F_2,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_{m-1},x_i)}}{\dfrac{D(F_1,F_2,\ldots,F_m)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_m)}}$$

3. Fie mulţimea $M=\{(x,y)\in D\,|\,F(x,y)=0\}$. Teorema funcţiilor implicite stabileşte că într-o vecinătate $A\times B$ a oricărui punct fixat $(a,b)\in M$, mulţimea M este local graficul unei funcţii. Mulţimea M fiind dată nu poate exista local decât cel mult o funcţie astfel încât M să fie graficul lui f. Astfel, local, funcţia f este unică pe când deschişii A şi B nu sunt unici.

Cazuri particulare ale teoremei funcţiilor implicite

1. Funcţia implicită definită de ecuaţia $F(x,y)=0$

Teorema 4.11.2 *Dacă $F:U\to\mathbb{R}$, $U=\overset{\circ}{U}\subset\mathbb{R}^2$ este o funcţie de clasă $C^1(U),(a,b)\in U$ un punct astfel încât $F(a,b)=0$ şi $F'_y(a,b)\neq 0$, atunci*

1. *Există $A\in\mathcal{V}_a,B\in\mathcal{V}_b,A\times B\subset U$ şi o unică funcţie $f:A\to B$ aşa încât $f(a)=b$ şi $F(x,f(x))=0,\forall\, x\in A$.*
2. *Funcţia $f\in C^1(A)$ şi*
$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)},\quad \forall\, x\in A \tag{4.42}$$
3. *Dacă $F\in C^p(U)$, atunci $f\in C^p(A),p\geq 1$.*

Teorema 4.11.3 *Dacă $F:U\to\mathbb{R},U\ \overset{\circ}{U}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ este o funcţie de clasă $C^1(U),(a,b)\in U$ un punct astfel încât $F(a,b)=0$ şi $F'_y(a,b)\neq 0$, atunci*

1. *Există $A\in\mathcal{V}_a,B\in\mathcal{V}_b,A\times B\subset U$ şi o unică funcţie $f:A\to B$ aşa încât $f(a)=b$ şi $F(x,f(x))=0,\forall\, x\in A$.*
2. *Funcţia $f\in C^1(A)$ şi*
$$f'(x_i)=-\frac{F'_{x_i}(x,y)}{F'_y(x,y)},\quad x\in A \tag{4.43}$$
3. *Dacă $F\in C^p(U)$, atunci $f\in C^p(A),p\geq 1$.*

Observaţia 4.11.3 *1. În ipotezele teoremei 4.11.2, dacă $f\in C^2(U)$ se pot determina punctele de extrem ale funcţiei implicite $y=y(x)$ definită de relaţia $F(x,y)=0$. Întâi se determină din relaţia (4.42) punctele critice rezolvând sistemul $F(x,y)=0$, $F'_x(x,y)=0$, $F'_y(x,y)\neq 0$. Derivând (4.42) în raport cu x se obţine $F''_{x^2}(x,y)+F''_{xy}(x,y)y'(x)+y''(x)F'_y(x,y)+y'(x)$ $(F''_{xy}(x,y)+F''_{y^2}(x,y)y'(x))=0$. Pe urmă se studiază semnul funcţiei $y''(x)=\dfrac{F''_{x^2}(x,y)}{F'_y(x,y)}$ în fiecare punct critic obţinut.*

2. În ipotezele teoremei 4.11.3 pentru $u=2$ şi $F\in C^2(U)$ se pot determina punctele de extrem ale funcţiei implicite $z=z(x,y)$ definită de relaţia $F(x,y,z)=0$. Derivând această ultimâ relaţie în raport cu x şi y se obţine

$$\begin{aligned}F'_x(x,y,z)+F'_z(x,y,z)z'_x(x,y)=0\\ F'_y(x,y,z)+F'_z(x,y,z)z'_y(x,y)=0.\end{aligned} \tag{4.44}$$

Se determină din (4.44) punctele critice rezolvând sistemul $F(x,y,z) = 0, F'_x(x,y,z) = 0, F'_y(x,y,z) = 0$, $F'_z(x,y,z) \neq 0$. *Derivând relaţiile (4.44) în raport cu x şi cu y se obţine derivatele* $z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{y^2}$. *Pentru a determina punctele de extrem se foloseşte criteriul lui Sylvester.*

Exemplu 4.11.2 *1. Pentru funcţia* $y = f(x)$ *să se calculeze* $f'(0)$ *şi* $f''(0)$, *dacă* $f(0) = 1$ *şi* $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$.

Avem $F(x,y) = x^2-xy+2y^2+x-y-1 = 0$, $F \in C^2(U), F(0,1) = 0, F'_y(x,y) = -x+2y-1$, $F'_y(1,0) = 3 \neq 0$, *aşadar condiţiile teoremei (4.11.2) sunt îndeplinite şi după formula (4.42) obţinem*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{2x-y+1}{-x+4y-1},$$

$f'(0) = 0$. *Derivând relaţia de mai sus în raport cu x se obţine*

$$f''(x) = -\frac{(2-y')(-x+4y-1)-(2x-y+1)(-1+4y')}{(-x+4y-1)^2}, \quad f''(0) = -\frac{2}{3}\,.$$

2. *Pentru funcţia* $y = f(x)$ *să se determine punctele de extrem dacă* $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$. *Conform punctului 1 al observaţiei (4.11.3) determinăm punctele critice rezolvând sistemul* $F(x,y) = 0, F'_x(x,y) = 0, F'_y(x,y) \neq 0$, *adică* $\begin{cases} x^3+y^3-3x^2y-3 = 0 \\ 3x^2-6xy = 0 \end{cases}$. *Soluţiile acestui sistem sunt* $x = 0, y(0) = \sqrt[3]{3}$ *şi* $x = -2$, $y(-2) = -1$ *(se observă că* $F'_y(0,\sqrt[3]{3}) \neq 0, F'_y(-2,-1) \neq 0$*). Avem* $f'(x) = \dfrac{-x^2+2xy}{y^2-x^2}$,

$f''(x) = \dfrac{2y^3+2x^2y-2xy^2+2xy'(xy-x^2-y^2)}{(y^2-x^2)^2}$; $f''(0) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} > 0$, *deci* $x = 0$ *este punct de minim, iar* $f''(-2) = -\dfrac{2}{3} < 0$, *deci* $x = -2$ *este punct de maxim.*

3. *Pentru funcţia* $z = f(x,y)$ *definită implicit prin* $F(x,y,z) = (x+y)e^z - xy - z = 0$, *ce satisface condiţia* $f(2,2) = 0$ *să se calculeze* $f'_x(2,2)$ *şi* $f'_y(2,2)$.

Se observă că $F(2,2,0) = 0$, $F'_z(2,2,0) = 3 \neq 0$, *deci sunt îndeplinite condiţiile teoremei 4.11.3. Folosind relaţiile (4.43) obţinem* $f'_x(x,y) = -\dfrac{e^z-y}{(x+y)e^z-1}$, $f'_y(x,y) = -\dfrac{e^z-x}{(x+y)e^z-1}$, *astfel că* $f'_x(2,2) = \dfrac{1}{3}, f'_y(2,2) = \dfrac{1}{3}$.

4. *Funcţiile* $u(x,y)$ *şi* $v(x,y)$ *sunt definite implicit prin* $u+v = x, u-yv = 0$. *Să se calculeze diferenţialele de ordinul întâi ale celor două funcţii.*

Avem $F_1(x,y,u,v) = u+v-x = 0$, $F_2(x,y,u,v) = u-yv = 0$, *şi presupunem* $\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)} =$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{vmatrix} = -y - 1 \neq 0$. *Atunci conform observaţiei 4.11.2 obţinem*

$$u'_x = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(x, v)}}{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -y \end{vmatrix}}{-y-1} = \frac{y}{y+1},$$

$$u'_y = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y, v)}}{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -v & -y \end{vmatrix}}{-y-1} = \frac{v}{y+1},$$

$$v'_x = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, x)}}{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-y-1} = \frac{1}{y+1},$$

$$v'_y = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, y)}}{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -v \end{vmatrix}}{-y-1} = -\frac{v}{y+1},$$

astfel că

$$du = \frac{1}{y+1}(ydx + vdy), \quad dv = \frac{1}{y+1}(dx - vdy).$$

4.12 Extreme cu legături

Fie D o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$ şi funcţiile $f : D \to \mathbb{R}$, $\varphi_k : D \to \mathbb{R}$, $\Psi_i : D \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(D)$, $\varphi_k \in C^1(D)$, $\Psi_i \in C^1(D)$, $k = \overline{1, s}$, $i = \overline{1, t}$.

Cu ajutorul acestor funcţii definim următoarea submulţime a lui D :

$$U = \{x \in D \,|\, \varphi_k(x) = 0, \quad \Psi_i(x) \geq 0, \quad k = \overline{1, s}, \quad i = \overline{1, t}\} \tag{4.45}$$

Considerăm restricţia lui f la U, $f|_U$ şi căutăm punctele de extrem ale acestei restricţii.

Definiţia 4.12.1 *Spunem că $a \in U$ este un punct de extrem pentru f cu legătura U (sau extrem condiţionat) dacă a este punct de extrem local pentru $f|_U$.*

Observaţia 4.12.1 *$a \in U$ este punct de extrem pentru f cu legătura $U \Leftrightarrow \exists\, S(a, r) \subset D$ astfel încât $\forall\, x \in S(a, r) \cap U$ diferenţa $f(x) - f(a)$ are semn constant.*

Definiţia 4.12.2 *Fie $a \in U$. Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ se numeşte vector admisibil în a dacă există un interval de forma $[0, t_0]$ astfel încât $\forall\, t \in [0, t_0]$ $a + tv \in U$.*

Dacă $a \in U$ este un punct de minim, atunci orice vector de descreştere nu este admisibil.

Dacă în punctul $a \in U$, $\Psi_i(a) = 0$, atunci restricţia Ψ_i este activă în a. Notăm $A(a) = \{\{i \in 1, 2, \ldots, t\} \,|\, \Psi_i(a) = 0\}$, adică submulţimea indicilor restricţiilor active în a.

Într-un punct $a \in U$ restricţiile sunt regulate dacă vectorii gradienţi ai restricţiilor de tip egalitate şi vectorii gradienţi ai restricţiilor active sunt liniar independenţi.

Restricţiile de tip egalitate şi cele active sunt numite legături în punctul a. De aceea în loc de denumirea generală extreme cu restricţii vom folosi denumirea extreme cu legături.

Dacă nu avem restricţii egalităţi, iar restricţiile inegalităţi nu există sau nu sunt active în punctele de extrem, atunci extremele se numesc libere.

Exemplu 4.12.1 *Fie* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x-2)^2+(y-1)^2$ *cu restricţiile* $\Psi_1(x, y) = x$, $\Psi_2(x, y) = y$, $\Psi_3(x, y) = y - x^2$ *şi* $\Psi_4(x, y) = -x - y + 2$, *deci* $\Psi_i \geq 0, \forall\ i = \overline{1, 4}$. *Punctele din interiorul şi de pe laturile triunghiului curbiliniu satisfac restricţiile problemei. Căutăm punctele de minim ale funcţiei* $f|_U$, *unde* $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Psi_i(x, y) \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}\}$.

Observăm că $f(x, y) = d((x, y), (2, 1))$, *deci* f *este minim când* $d((x, y), (2, 1))$ *este minimă. Acest minim este atins în punctul* $M(1, 1)$ *obţinut prin rezolvarea sistemului* $\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{cases}$, *adică restricţiile* Ψ_3 *şi* Ψ_4 *sunt active. Cum* $\Psi_1(M) = \Psi_2(M) = 1 > 0$ *avem* $A((1, 1)) = \{3, 4\}$.

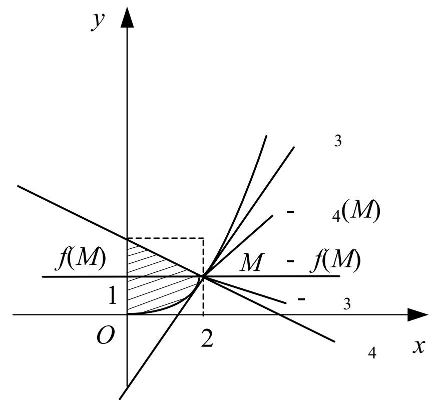

Figura 4.10:

Pentru punctul (1, 1) mulţimea tuturor vectorilor admisibili este cuprinsă între tangenta la parabolă în punctul $M(1, 1)$, $y = 2x - 1$ *şi restricţia activă* $x + y = 2$.

Cum $-\nabla f(M)$ *este vector de descreştere, nici un vector admisibil nu poate forma cu* $-\nabla f(M)$ *un unghi mai mic decât* $90°$, *deoarece dacă ar forma atunci* f *ar descreşte, deci punctul* $M(1, 1)$ *nu ar mai fi punct de minim. Prin urmare* $-\nabla f(M)$ *trebuie să fie situat în conul generat de* $-\nabla\Psi_3(M)$ *şi* $-\nabla\Psi_4(M)$, *adică* $\exists\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ *astfel încât* $-\nabla f(M) = \alpha_1(-\nabla\Psi_1(M)) + \alpha_2(-\nabla\Psi_2(M))$, *adică* $\nabla f(M) = \alpha_1\nabla\Psi_1(M) + \alpha_2\nabla\Psi_2(M)$.

Observaţia 4.12.2 *1. Deoarece* $\min_{x \in S} f(x) = -\max_{x \in S}(-f(x))$ *vom trata doar problema de minim, orice problemă de maxim reducându-se la una de minim.*

2. Inegalităţile de forma $\geq$ *pot fi transformate în inegalităţi de forma* $\leq$ *prin înmulţirea cu (-1).*

3. Inegalităţile de forma $\geq$ *sau* $\leq$ *pot fi transformate în egalităţi prin scăderea sau adăugarea unei variabile nenegative.*

Teorema 4.12.1 *Kuhn - Tucher.*

Dacă $f, \varphi_k, \Psi_i : D \to \mathbb{R}$ *sunt funcţii definite pe un deschis* D *din* $\mathbb{R}^n$, $f, \varphi_k, \Psi_i \in C^1(D)$, *unde* $k = \overline{1, s}$, $i = 1, t$ *şi* $a \in U$ *este punct de minim pentru* $f|_U$, *iar în* a *restricţiile sunt regulate, atunci există numerele* $u_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, s}$ *şi* $v_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, t}$ *astfel încât:*

1. $v_i = 0$ *pentru orice* $i \notin A(a)$;

2. $\nabla f(a) = \sum_{k=1}^{s} u_k\nabla\varphi_k(a) + \sum_{i=1}^{t} v_i\nabla\Psi_i(a)$.

Demonstraţie: Pentru a simplifica demonstraţia putem presupune că punctul a este originea spaţiului $\mathbb{R}^n, a = 0_{\mathbb{R}^n}$, făcând o translaţie a sistemului de referinţă. De asemenea putem presupune $f(a) = 0$, deoarece, dacă $f(a) = \alpha$, atunci lucrăm cu funcţia $g = f - \alpha$, deci facem o translaţie a valorii funcţiei.

Presupunem că restricţiile active în punctul a sunt $\Psi_1(0) = 0$, $\Psi_2(0) = 0, \ldots, \Psi_j(0) = 0$, deci $A(0) = \{1, 2, \ldots, j\}$ şi $\Psi_{j+1}(0) > 0, \Psi_{j+2}(0) > 0, \ldots, \Psi_t(0) > 0$. Cum $\Psi_i \in C^1(D)$, $i = \overline{1,s}$ există $S(0,r)$ cu următoarele proprietăţi: $\forall\, x \in S(0,r)$, $\Psi_{j+1}(x) > 0, \ldots, \Psi_t(x) > 0$ şi $\forall\, x \in S(0,r) \cap U$, $\quad f(x) \geq f(0) = 0$. Arătăm că pentru fiecare $\varepsilon \in (0,r)$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru $\forall\, x$ cu $\|x\| = \varepsilon$ are loc inegalitatea

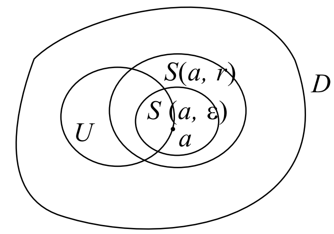

Figura 4.11:

$$f(x) + \|x\|^2 + n_\varepsilon \left[\sum_{k=1}^{s} \varphi_k^2(x) + \sum_{i=1}^{j} \Psi_i^*(x)\right] > 0, \tag{4.46}$$

$$\Psi_i^*(x) = \max(-\Psi_i(x), 0).$$

Presupunem prin absurd că afirmaţia (4.46) este falsă. Atunci $\exists\, \varepsilon_0 \in (0,r)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_m, \|x_m\| = \varepsilon_0$, astfel ca

$$f(x_m) + \|x_m\|^2 + n \left[\sum_{k=1}^{s} \varphi_k^2(x_m) + \sum_{i=1}^{j} {\Psi_i^*}^2(x_m)\right] \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x_m) + \|x_m\|^2 \leq -n \left[\sum_{k=1}^{s} \varphi_k^2(x_m) + \sum_{i=1}^{j} {\Psi_i^*}^2(x_m)\right] \tag{4.47}$$

Deoarece mulţimea $K = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\| = \varepsilon_0\}$ este compactă, fiind închisă şi mărginită, iar şirul $(x_m) \subset K$, există un subşir $(x_{h(m)})$ al său convergent în K, unde $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie strict crescătoare. Deci există $x^* \in K$ astfel ca $x_{h(m)} \to x^*$.

(4.47) se poate scrie

$$\frac{f(x_{h(m)}) + \varepsilon_0^2}{-h(m)} \geq \sum_{k=1}^{s} \varphi_k^2(x_{h(m)}) + \sum_{i=1}^{t} {\Psi_i^*}^2(x_{h(m)}) \tag{4.48}$$

Cum $f, \varphi_k, \Psi_i^* \in C^1(D)$, iar $x_{h(m)} \to x^*$, avem $f(x_{h(m)}) \to f(x^*)$, $\varphi_k(x_{h(m)}) \to \varphi_k(x^*)$, respectiv $\Psi_i(x_{h(m)}) \to \Psi_i^*(x^*)$. Trecând la limită în (4.48) rezultă

$$\sum_{k=1}^{s} \varphi_k^2(x^*) + \sum_{i=1}^{j} {\Psi_i^*}^2(x^*) \leq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{s} \varphi_k^2(x^*) + \sum_{i=1}^{j} {\Psi_i^*}^2(x^*) = 0.$$

Deci $\varphi_k(x^*) = 0, k = \overline{1,s}$ şi $\Psi_i(x^*) = 0$, $i = \overline{1,j} \Rightarrow \Psi_i(x^*) \geq 0, \forall\, i = \overline{1,j}$ şi $\Psi_i(x^*) > 0$, $\forall\, i = \overline{j+1,t}$ pentru că $\{x \,|\, \|x\| = \varepsilon_0\} \subset S(0,r)$.

Astfel, $x^* \in U$ satisface condiţiile (4.45), şi deci $\lim_{m\to\infty} f(x_m) = f(x^*) \geq f(0) = 0$ Dar din (4.47) avem $f(x_{h(m)}) + \|x_{h(m)}\|^2 \leq 0$, adică $f(x_{h(m)}) \leq -\varepsilon \Rightarrow f(x^*) \leq -\varepsilon_0 < 0$, ceea ce este o contradicţie. Aşadar, afirmaţia (4.46) este adevărată.

Pentru fiecare $\varepsilon \in (0,r)$ construim funcţia $F_\varepsilon : D \to \mathbb{R}$

$$F_\varepsilon(x) = f(x) + \|x\|^2 + n_\varepsilon \left[\sum_{k=1}^{s} \varphi_k^2(x) + \sum_{i=1}^{j} {\Psi_i^*}^2(x)\right]$$

cu n_ε din (4.46) şi studiem comportarea acestei funcţii pe $\overline{S(0,\varepsilon)}$. Cum $\overline{S(0,\varepsilon)}$ este un compact pe care F_ε este continuă, rezultă că ea este mărginită şi îşi atinge marginile. Fie $x_\varepsilon \in \overline{S(0,\varepsilon)}$

punctul de minim global al lui F_ε pe $\overline{S(0,\varepsilon)}$, adică $F_\varepsilon(x_\varepsilon)$ este cea mai mică valoare pe $\overline{S(0,\varepsilon)}$. Deoarece $F_\varepsilon(0)=0$ rezultă $F_\varepsilon(x_\varepsilon)\le 0$. Dar din (4.46) avem $F_\varepsilon(x)>0$ pentru $\|x\|=\varepsilon$. Prin urmare, $x_\varepsilon\in S(0,\varepsilon)$ şi din teorema lui Fermat avem $\nabla F_\varepsilon(x_\varepsilon)=0$, adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_l}(x_\varepsilon)+2\,\mathrm{pr}_l x_\varepsilon+\sum_{k=1}^{s}2n_\varepsilon\varphi_k(x_\varepsilon)\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_l}(x_\varepsilon)+\sum_{i=1}^{j}-2\Psi_i^*(x_\varepsilon)\frac{\partial\Psi_i(x_\varepsilon)}{\partial x_l}=0 \tag{4.49}$$

cu $\|x_\varepsilon\|<\varepsilon,\quad l=\overline{1,n}$.

Introducem următoarele notaţii:

$$L_\varepsilon=1+\sum_{k=1}^{s}[2n_\varepsilon\varphi_k(x_\varepsilon)]^2+\sum_{i=1}^{j}[2n_\varepsilon\Psi_i^*(x_\varepsilon)]^2>0,\quad \lambda_0^\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{L_\varepsilon}}>0,$$

$$\lambda_k^\varepsilon=\frac{2n_\varepsilon\varphi_k(x_\varepsilon)}{\sqrt{L_\varepsilon}}\quad \text{i}\quad \mu_i^\varepsilon=\frac{-2n_\varepsilon\varphi_i^*(x_\varepsilon)}{\sqrt{L_\varepsilon}}\le 0,\quad k=\overline{1,s}\quad \text{i}\quad i=\overline{1,j}.$$

Împărţind cele n egalităţi din (4.49) cu $\sqrt{L_\varepsilon}$, obţinem

$$\lambda_0^\varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}(x_\varepsilon)+2\,\mathrm{pr}_l x_\varepsilon\right)+\sum_{k=1}^{s}\lambda_k^\varepsilon\frac{\partial\varphi_k(x_\varepsilon)}{\partial x_l}+\sum_{i=1}^{j}\mu_i^\varepsilon\frac{\partial\Psi_i(x_\varepsilon)}{\partial x_l}=0,\quad \forall\, l=\overline{1,n}. \tag{4.50}$$

Putem pune în evidenţă un versor $(\lambda_0^\varepsilon,\lambda_1^\varepsilon,\dots,\lambda_s^\varepsilon,\mu_1^\varepsilon,\dots,\mu_j^\varepsilon)$. Astfel am găsit că pentru $\forall\ \varepsilon\in(0,r)$, $\exists\ x_\varepsilon$ cu $\|x_\varepsilon\|<\varepsilon$ şi un versor $(\lambda_0^\varepsilon,\lambda_1^\varepsilon,\dots,\lambda_s^\varepsilon,\mu_1^\varepsilon,\dots,\mu_j^\varepsilon)$ cu $\mu_i^\varepsilon<0,\forall\ i=\overline{1,j}$ şi $\lambda_0^\varepsilon>0$ astfel încât să fie satisfăcute egalităţile (4.50).

Considerând $\varepsilon_l=\frac{r}{l}$, obţinem un şir de puncte (x_l) cu $\|x_l\|<\frac{r}{l}\quad (x_l\to 0)$ şi, corespunzător lui, şirul de versori $(v_l), v_l=(\lambda_{0l},\lambda_{1l},\dots,\lambda_{sl},\mu_{1l},\dots,\mu_{jl})$ şi şirul de numere

$$L_l=1+\sum_{k=1}^{s}[2n_l\varphi_k(x_l)]^2+\sum_{i=1}^{j}[2n_l\Psi_i(x_l)]^2.$$

Mulţimea versorilor fiind compactă, şirul (v_l) conţine un subşir convergent către un versor $v=(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_s,\mu_1,\dots,\mu_j)$, $\lambda_0=\lim\limits_{l\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{L_l}}\ge 0$.

Dacă $\lambda_0=0$ din ipoteza regularităţii restricţiilor în 0 rezultă $\lambda_1=\cdots=\lambda_s=\mu_1=\cdots=\mu_j=0$, deci v nu este un versor ceea ce este o contradicţie. Prin urmare $\lambda_0>0$ şi $\mu_i=\lim_{l\to\infty}\mu_{il}\le 0\Rightarrow \mu_i\le 0,\quad i=\overline{1,j}$.

$$\nabla f(0)=\sum_{k=1}^{s}\frac{-\lambda_k}{\lambda_0}\nabla\varphi_k(0)+\sum_{i=1}^{t}\frac{-\mu_i}{\lambda_0}\nabla\Psi_i(0),\quad \text{unde}\quad \mu_{j+1}=\cdots=\mu_t=0.$$

Notând $u_k=\dfrac{-\lambda_k}{\lambda_0}\in\mathbb{R}$ şi $v_i=\dfrac{-\mu_i}{\lambda_0}\ge 0$, $k=\overline{1,s},\ i=\overline{1,t}$ obţinem

$$\nabla f(0)=\sum_{k=1}^{s}u_k\nabla\varphi_k(0)+\sum_{i=1}^{t}u_i\nabla\Psi_i(0)\quad \text{cu}\quad u_k\in\mathbb{R}\quad \text{i}\quad v_i\in\mathbb{R}_+.$$

Observaţia 4.12.3 *1. Cu ajutorul funcţiilor f,φ_k şi Ψ_i construim funcţia $\Phi:D\times\mathbb{R}^{s+2t}\to\mathbb{R}$*

$$\Phi=f-\sum_{k=1}^{s}u_k\varphi_k-\sum_{i=1}^{t}v_i(\Psi_i-w_i^2),$$

unde u_k sunt multiplicatori Lagrange, v_i sunt multiplicatori Kuhn-Tucker, iar w_i sunt variabile de egalizare. Φ este o funcţie de $n+s+2t$ variabile: x_l, v_k, v_i, w_i, unde $l = \overline{1,n}, k = \overline{1,s}, i = \overline{1,t}$.

Teorema lui Kuhn-Tucker afirmă că punctele din minim ale funcţiei f trebuie căutate printre punctele critice ale lui Φ, adică printre soluţiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_l} = 0 \quad , \quad l = 1, n \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_k} = 0 \quad , \quad k = \overline{1,s} \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 0 \quad , \quad i = \overline{1,t} \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial w_i} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} &= \frac{\partial f}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^{s} u_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} - \sum_{i=1}^{t} v_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_l} = 0, \quad l = \overline{1,n} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} &= -\varphi_k = 0, \quad k = \overline{1,s} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} &= -(\Psi_i - w_i^2) = 0, \quad i = \overline{1,t} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial w_i} &= 2 v_i w_i = 0 \end{aligned}$$

Să simpificăm puţin şi să lucrăm numai cu restricţii de tip egalitate. Atunci $\Phi = f - \sum_{k=1}^{s} u_k \varphi_k$ şi căutăm punctele critice ale funcţiei Φ rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_l} = 0, \quad l = \overline{1,n} \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_k} = 0, \quad k = \overline{1,s} \end{cases}$$

2. Presupunem că nu avem restricţii egalităţi, iar restricţiile inegalităţi sunt de forma $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$ şi $\Psi_i(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, $i = \overline{1,t}$. Notăm

$$L = f - \sum_{i=1}^{t} v_i \Psi_i, \quad \text{i} \quad \Phi = L - \sum_{j=1}^{n} v_j x_j + \sum_{j=1}^{t} v_j w_j^2 + \sum_{i=1}^{t} v_i w_i^2$$

Atunci

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} &= \frac{\partial L}{\partial x_j} - v_j = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} &= w_j^2 - x_j = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} &= w_i^2 - \Psi_i = 0 \qquad\qquad j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,t} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial w_j} &= 2 v_j w_j = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial w_i} &= 2 v_i w_i = 0 \end{aligned}$$

Observăm că $x_j = 0 \Leftrightarrow w_j = 0$, iar $\Psi_i = 0 \Leftrightarrow w_i = 0$. Acestea ne permit să eliminăm variabilele ajutătoare w_i, w_j, astfel ca să avem

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = v_j, \quad x_j \geq 0, \quad v_j x_j = 0, \quad \Psi_i \geq 0, \quad v_i \Psi_i = 0.$$

Deci, dacă există minimul funcţiei f cu restricţiile $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, $\Psi_i \geq 0$, $i = 1, t$, atunci sunt satisfăcute următoarele condiţii:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} \geq 0, \quad x_j \geq 0, \quad x_j \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n} \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial v_i} \leq 0, \quad v_i \geq 0, \quad v_i \dfrac{\partial L}{\partial v_i} = 0, \quad i = \overline{1,t}, \end{cases}$$

unde $L = f - \sum_{i=1}^{t} v_i \Psi_i$ se numeşte funcţie Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{t} v_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} \quad \text{i} \quad \frac{\partial L}{\partial v_i} = -\Psi_i, \quad j = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,t}.$$

În continuare stabilim condiţii suficiente pentru existenţa punctelor de minim cu legături.

Teorema 4.12.2 *Presupunem că funcţiile $f, \varphi_k, \Psi_i \in C^2(D), k = \overline{1,s}, i = \overline{1,t}$. Dacă $a \in U$ şi sunt satisfăcute următoarele condiţii:*

1. *Restricţiile sunt regulate în a;*
2. *Există numerele $u_k \in \mathbb{R}$ şi $v_i \in \mathbb{R}_+$ astfel ca $v_i = 0$ pentru $i \notin A(a)$ şi*
$$\nabla f(a) = \sum_{k=1}^{s} u_k \nabla \varphi_k(a) + \sum_{i=1}^{t} v_i \nabla \Psi_i(a);$$
3. *Dacă definim funcţia $\Phi : D \to \mathbb{R}$ prin $\Phi = f - \sum_{k=1}^{s} u_k \varphi_k - \sum_{i=1}^{t} v_i \Psi_i$, iar $d^2\Phi(a)(h) = 0$ pentru $\forall\ h \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ care satisface $\begin{cases} d\varphi_k(a)(h) = 0 \\ d\Psi_i(a)(h) = 0 \end{cases}$, $k = \overline{1,s}$, $i \in A_+(a) = \{i \in A(a) \,|\, v_i > 0\}$, atunci a este punct de minim pentru $f|_U$.*

Demonstraţie: Presupunem că deşi aceste condiţii sunt satisfăcute într-un punct $a \in U$, a nu este punct de minim pentru $f|_U$. Atunci pentru $\forall\ S(a,r)$, $\exists\ x \in S(a,r) \cap U$ astfel încât $f(x) < f(a)$. Dacă $r = \frac{1}{n}$, atunci există un şir (x_m) din $\mathbb{R}^n$ ce verifică proprietăţile $x_m \in U$, $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = a$, $f(x_m) < f(a)$, $\varphi_k(x_m) = 0$ şi $\Psi_i(x_m) \geq 0$, $\forall\ k = \overline{1,s}$, $\forall\ i = \overline{1,t}$.

Notând $h_m = \dfrac{x_m - a}{\|x_m - a\|}$, $h_m \in \overline{S(0,1)}$, care este mulţime compactă, deci şirul (h_m) conţine un subşir convergent; există $h \in \overline{S(0,1)}, h \neq 0$, astfel ca $h_{g(m)} \to h$, unde $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie strict crescătoare.

Pe de altă parte, din ipoteza 2 a teoremei avem:

$$< \nabla f(a), h >= \sum_{k=1}^{s} u_k < \nabla \varphi_k(a), h > + \sum_{i \in A_+(a)} v_i < \nabla \Psi_i(a), h >,$$

adică

$$df(a)(h) = \sum_{k=1}^{s} u_k d\varphi_k(a)(h) + \sum_{i\in A_+(a)} v_i d\Psi_i(a)(h).$$

Deoarece $x_m \in U \Rightarrow \varphi_k(x_m) = 0$ de unde $\varphi_k(a) = 0$.

$$\lim_{x_m\to a} \frac{1}{\|x_m - a\|} [\varphi_k(x_m) - \varphi_k(a) - d\varphi_k(a)(x_m - a)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x_m\to a} d\varphi_k(a)\left(\frac{x_m - a}{\|x_m - a\|}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x_m\to a} d\varphi_k(a)(h_m) = 0 \Rightarrow d\varphi_k(a)(h) = 0,$$

deci h verifică ecuaţia $d\varphi_k(a)(h) = 0$.

$$\lim_{x_m\to a} \frac{1}{\|x_m - a\|} [\Psi_i(x_m) - \Psi_i(a) - d\Psi_i(a)(x_m - a)] = 0$$

Notând

$$\frac{1}{\|x_m - a\|} [\Psi_i(x_m) - \Psi_i(a) - d\Psi_i(a)(x_m - a)] = \alpha(x_m)\,,$$

avem

$$d\Psi_i(a)(x_m - a) + \alpha(x_m)\|x_m - a\| = \Psi_i(x_m) - \Psi_i(a) \geq 0, \tag{4.51}$$

deoarece din $x_m \in U$, rezultă $\Psi_i(x_m) \geq 0$ şi, pentru că $i \in A_+(a)$, $\Psi_i(a) = 0$. Astfel din (4.51) obţinem:

$$\|x_m - a\|[d\Psi_i(a)(h_m) + \alpha(x_m)] \geq 0 \Rightarrow d\Psi_i(a)(h_m) + \alpha(x_m) \geq 0$$

şi trecând la limită, rezultă $d\Psi_i(a)(h) \geq 0, \quad i \in A(a)$.

Presupunem că nu toate $d\Psi_i(a)(h) = 0$ pentru $i \in A_+(a)$. Cum $df(a)(h) = \sum\limits_{i\in A_+(a)} v_i d\Psi_i(a)(h)$, rezultă $df(a)(h) > 0$. Funcţia f fiind diferenţiabilă în a, avem:

$$f(x_m) = f(a) + df(a)(x_m - a) + \|x_m - a\|\beta(x_m) \quad \text{cu} \quad \lim_{x_m\to a} \beta(x_m) = 0,$$

$$f(x_m) - f(a) = \|x_m - a\|[df(a)(h_m) + \beta(x_m)].$$

Cum $\lim\limits_{x_m\to a} \beta(x_m) = 0$, $\exists\ n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall\ m \geq n_1 \quad df(a)(h_m) + \beta(x_m) > 0$, de unde $f(x_m) > f(a)$ ceea ce contrazice alegerea şirului (x_m). Aşadar, $d\Psi_i(a)(h) = 0$. Cum h găsit verifică condiţiile $h \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, $d\varphi_k(a)(h) = 0$ şi $d\Psi_i(a)(h) = 0$, $k = \overline{1,s}$, $i \in A_+(a)$, obţinem din condiţia 3 din ipoteza teoremei $d\Phi(a)(h) = 0$.

Formula lui Taylor aplicată funcţiei Φ ne dă

$$\Phi(x_m) = \Phi(a) + d\Phi(a)(x_m - a) + \frac{1}{2!}d^2\Phi(r_m)(x_m - a), \tag{4.52}$$

unde r_m este cuprins între a şi x_m.

Observăm că $\Phi(a) = f(a)$ şi $f(a) = \sum_{k=1}^{s} u_k d\varphi_k(a) + \sum_{i\in A_+(a)} v_i d\Psi_i(a)$.

Fără a restrânge generalitatea putem presupune $n = 2$, $a = (x_0, y_0)$, $r = (\xi, \eta)$. Atunci

$$\begin{aligned}
&\Phi''_{x^2}(r)(x - x_0)^2 + 2\Phi''_{xy}(r)(x - x_0)(y - y_0) + \Phi''_{y^2}(r)(y - y_0)^2 = \\
&= \Phi''_{x^2}(a)(x - x_0)^2 + 2\Phi''_{xy}(a)(x - x_0)(y - y_0) + \Phi''_{y^2}(a)(y - y_0)^2 + \\
&+[\Phi''_{x^2}(r) - \Phi''_{x^2}(a)](x - x_0)^2 + 2[\Phi''_{xy}(r) - \Phi''_{xy}(a)](x - x_0)(y - y_0) + \\
&+[\Phi''_{y^2}(r) - \Phi''_{y^2}(a)](y - y_0)^2.
\end{aligned}$$

Astfel relaţia (4.52) devine

$$\Phi(x_m) = \Phi(a) + \frac{1}{2!} d^2\Phi(a) \left(\frac{x_m - a}{\|x_m - a\|} \right) \|x_m - a\|^2 + \gamma(x_m)\|x_m - a\|^2,$$

cu $\lim\limits_{x_m \to a} \gamma(x_m) = 0$. Avem

$$\Phi(x_m) = \Phi(a) + \|x_m - a\|^2 \left[\frac{1}{2} d^2\Phi(a)(h_m) + \gamma(x_m) \right],$$

$\lim\limits_{h_m \to h} d^2\Phi(a)(h_m) = d^2\Phi(a)(h) > 0$. Atunci $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall\, m \geq n_2$, $\Phi(x_m) > \Phi(a)$. Dar $f(x_m) \geq \Phi(x_m) > \Phi(a) = f(a)$, ceea ce contravine presupunerii noastre. Astfel, afirmaţia din teoremă este adevărată.

Observaţia 4.12.4 *Problemele de maxim se tratează în mod analog.*

Exemplu 4.12.2 *1. Să se demonstreze următoarea inegalitate:*

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \geq \left[\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right]^2.$$

Căutăm minimul funcţiei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}$ *cu restricţia* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = A$.

Considerăm funcţia Lagrange:

$$\Phi = f - u(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - A) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} - u(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - A).$$

Avem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{n} - u = 0\,, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = A - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 0.$$

Rezultă deci $x_i = \dfrac{u\,n}{2}$, $A - \dfrac{u\,n^2}{2} = 0 \Rightarrow u = \dfrac{2A}{n^2}$, *prin urmare,*

$$\Phi = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} - \frac{2A}{n^2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - A).$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = \frac{2}{n}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad \forall\, i \neq j,$$

de unde $d^2\Phi > 0$, *deci* $x_i = \dfrac{A}{n}$ *este un punct de minim al funcţiei* f, *aşadar,*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq f\left(\frac{A}{n}, \frac{A}{n}, \ldots, \frac{A}{n} \right) = \frac{n \frac{A^2}{n^2}}{n} = \left(\frac{A}{n} \right)^2,$$

adică

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \geq \left[\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right]^2.$$

2. Să se determine minimul funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 2x - 4y$$

cu restricţiile: $\begin{cases} -2x - y + 7 \geq 0 \\ -x - 2y + 5 \geq 0 \\ \quad x \geq 0 \\ \quad y \geq 0 \end{cases}$ *. Considerăm funcţia*

$$L = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 2x - 4y - v_1(-2x - y + 7) - v_2(-x - 2y + 5).$$

Dacă există minimul funcţiei f, acesta verifică următorul sistem de condiţii:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = x - 2 + 2v_1 + v_2 \geq 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = y - 4 + v_1 + 2v_2 \geq 0 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ x\dfrac{\partial L}{\partial x} = x(x - 2 + 2v_1 + v_2) = 0 \\ y\dfrac{\partial L}{\partial y} = y(y - 4 + v_1 + 2v_2) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial v_1} = 2x + y - 7 \leq 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial v_2} = x + 2y - 5 \leq 0 \\ v_1 \geq 0 \quad v_2 \geq 0 \\ v_1\dfrac{\partial L}{\partial v_1} = v_1(2x + y - 7) = 0 \\ v_2\dfrac{\partial L}{\partial v_2} = v_2(x + 2y - 5) = 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, găsim printre alte soluţii şi soluţia: $x = 1, y = 2, v_1 = 0, v_2 = 1$. *Atunci funcţia* Φ *este* $\Phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 2x - 4y - (-x - 2y + 5)$. *Restricţia* $\Psi(x, y) = -x - 2y + 5$ *este activă;* $\nabla f(1, 2) = -\bar{i} - 2\bar{j}$, $\nabla\Psi(1, 2) = -\bar{i} - 2\bar{j}$ *de unde* $\nabla f(1, 2) = \nabla\Psi(1, 2)$.

$$\begin{aligned} & d\Psi(1,2)(h) = 0 \Rightarrow dx + 2dy = 0, \\ & \frac{\partial\Phi}{\partial x} = x - 1 \Rightarrow \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 1, \\ & \frac{\partial\Phi}{\partial y} = y - 2 \Rightarrow \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 1, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned}$$

Atunci $d^2\Phi(1, 2) = dx^2 + dy^2 = 4dy^2 + dy^2 = 5dy^2 > 0$, *deoarece* $dx = -2dy$. *Am obţinut astfel că punctul* $(1, 2)$ *este punct de minim.*

4.13 Metoda celor mai mici pătrate pentru aproximarea unei funcţii

Presupunem că avem dată o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pentru care cunoaştem anumite valori într-un număr finit de puncte, date de următorul tabel:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Considerăm funcţia $\Phi(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$, $x \in [a, b], p < n$. Dacă aproximăm funcţia f prin Φ, atunci erorile obţinute în punctele x_i sunt $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = y_i - \Phi(x_i; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$. Există situaţii când este bine să ştim cât de mult diferă graficul funcţiei f de graficul funcţiei Φ.

Metoda celor mai mici pătrate constă în determinarea parametrilor $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ astfel încât funcţia $E = E(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$, care se numeşte abaterea medie pătratică, să fie minimă. Cea mai întâlnită situaţie este aceea, când Φ este o combinaţie liniară de funcţiile $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, adică $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\Phi(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \dots + \alpha_p\varphi_p(x).$$

Abaterea medie pătratică este

$$E = \sum_{i=1}^n [y_i - \alpha_1\varphi_1(x_i) - \alpha_2\varphi_2(x_i) - \dots - \alpha_p\varphi_p(x_i)]^2.$$

Condiţiile necesare de extrem sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \alpha_j} &= -2\sum_{i=1}^n [y_i - \alpha_1\varphi_1(x_i) - \alpha_2\varphi_2(x_i) - \dots - \alpha_p\varphi_p(x_i)]\varphi_j(x_i) = \\ = \ 2&\left[\alpha_1 \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i)\varphi_j(x_i) + \alpha_2 \sum_{i=1}^n \varphi_2(x_i)\varphi_j(x_i) + \dots + \alpha_p \sum_{i=1}^n \varphi_p(x_i)\varphi_j(x_i) - \right.\\ &\left. - \sum_{i=1}^n y_i\varphi_j(x_i)\right] = 0, \quad j = \overline{1, p}. \end{aligned}$$

Presupunem că acest sistem admite cel puţin o soluţie. Avem

$$\begin{aligned} d^2E &= \sum_{j,k=1}^p \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} d\alpha_j d\alpha_k = 2\sum_{j,k=1}^p \left(\sum_{i=1}^n \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)\right) d\alpha_j d\alpha_k = \\ &= 2\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p \varphi_j(x_i) d\alpha_j\right)^2 > 0, \end{aligned}$$

deci d^2E este pozitiv definită şi, conform teoremei 4.12.2, orice punct critic al funcţiei E este punct de minim.

Exemplu 4.13.1 *Fie funcţia* $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ *pentru care cunoaştem următoarele valori:*

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	1	-1	1

Vrem să aproximăm funcţia f printr-o combinaţie liniară de $\varphi_1(x) = \sin x, \varphi_2(x) = \cos x$. Atunci $\Phi(x; \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x$, iar abaterea medie pătratică este

$$\begin{aligned} E &= (1 - \alpha_1 \sin 0 - \alpha_2 \cos 0)^2 + \left(-1 - \alpha_1 \sin \frac{\pi}{4} - \alpha_2 \cos \frac{\pi}{4}\right)^2 + \\ &+ \left(1 - \alpha_1 \sin \frac{\pi}{2} - \alpha_2 \cos \frac{\pi}{2}\right)^2 = \\ &= (1 - \alpha_2)^2 + \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right]^2 + (1 - \alpha_1)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} &= \sqrt{2}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right] - 2(1 - \alpha_1) = 3\alpha_1 + \alpha_2 - 2 + \sqrt{2} = 0\,, \\ \frac{\partial E}{\partial \alpha_2} &= -2(1 - \alpha_2) + \sqrt{2}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right] = \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2 + \sqrt{2} = 0. \end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem obţinem $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$. Funcţia care aproximează pe f este $\Phi(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)(\sin x + \cos x)$ cu eroarea pătratică $E = \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2}$.

2. Să se aproximeze funcţia $f : [1, 9] \to \mathbb{R}$ printr-o dreaptă, dacă cunoaştem anumite valori ale funcţiei f date în următorul tabel:

x	1	3	4	6	8	9
$f(x)$	1	2	4	4	5	3

Deci $\Phi(x, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 x + \alpha_2$. Abaterea medie pătratică este $E = (1 - \alpha_1 - \alpha_2)^2 + +(2 - 3\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (4 - 4\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (4 - 6\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (5 - 8\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (3 - 9\alpha_1 - \alpha_2)^2$;

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} &= 207\alpha_1 + 31\alpha_2 - 114 = 0\,, \\ \frac{\partial E}{\partial \alpha_2} &= 31\alpha_2 + 6\alpha_2 - 19 = 0 \end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem obţinem $\alpha_1 = \frac{95}{281}, \alpha_2 = \frac{399}{281}$ şi deci $y = \Phi = \frac{19}{281}(5x + 21)$.

Presupunem că $f_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi $\Phi(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p), x \in [a, b]$ o familie de funcţii reale continue ce aproximează pe f. Rezultă atunci că eroarea pătratică (abaterea pătratică) $E = \int_a^b \varepsilon^2 dx$, unde $\varepsilon = \varepsilon(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) = f(x) - \Phi(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ este eroarea rea-
lizată prin aproximare. Vrem să determinăm parametrii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ astfel încât abaterea pătratică să fie minimă. La fel vom presupune că Φ este o combinaţie liniară de funcţiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, adică $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ astfel ca $\Phi(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_p\varphi_p(x)$. Abaterea pătratică este

$$E = \int_a^b [f(x) - \alpha_1\varphi_1(x) - \alpha_2\varphi_2(x) - \cdots - \alpha_p\varphi_p(x)]^2 dx.$$

Condiţiile necesare de extrem sunt date de următorul sistem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \alpha_j} &= 2\left[\alpha_1 \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_j(x)dx + \alpha_2 \int_a^b \varphi_2(x)\varphi_j(x)dx + \cdots + \right.\\ &\left. +\alpha_p \int_a^b \varphi_p(x)\varphi_j(x)dx - \int_a^b f(x)\varphi_j(x)dx\right] = 0, \quad j = \overline{1,p}.\end{aligned}$$

Presupunem că acest sistem admite cel puţin o soluţie. Avem

$$\begin{aligned}d^2E &= \sum_{j,k=1}^{p} \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} d\alpha_j d\alpha_k = 2\sum_{j,k=1}^{p}\left[\int_a^b \varphi_j(x)\varphi_k(x)dx\right] d\alpha_j d\alpha_k = \\ &= 2\int_a^b \left[\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) d\alpha_j\right]^2 dx > 0,\end{aligned}$$

deci d^2E este pozitiv definită şi, conform teoremei 4.12.2, orice punct critic al funcţiei E este punct de minim.

Exemplu 4.13.2 *1. Fie $y = \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Să se aproximeze această funcţie printr-o combinaţie liniară a funcţiilor $\varphi_1(x) = 1$ şi $\varphi_2(x) = x$.*

Avem $\Phi(x; \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x$ şi $E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin x - \alpha_1 - \alpha_2 x]^2 dx$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} &= 2\left[\alpha_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \alpha_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx\right] = \pi\alpha_1 + \frac{\pi^2}{2}\alpha_2 - 2 = 0\\ \frac{\partial E}{\partial \alpha_2} &= 2\left[\alpha_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \alpha_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx\right] = \frac{\pi^2}{4}\alpha_1 + \frac{\pi^3}{12}\alpha_2 - 2 = 0.\end{aligned}$$

Rezolvând sistemul, obţinem $\alpha_1 = \frac{4(6-\pi)}{\pi^2}$, $\alpha_2 = \frac{12(\pi-4)}{\pi^3}$, iar funcţia care aproximează pe y este $\Phi(x) = \frac{4(6-\pi)}{\pi^2} + \frac{12(\pi-4)}{\pi^3}x$.

4.14 Metoda gradientului

Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^1(A), A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n$ şi $a \in A$. Dacă a nu este un punct critic al funcţiei f, atunci cel puţin una dintre derivatele $f'_{x_k}(a) \neq 0$, $k = \overline{1,n}$, adică vectorul $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$. Maximul, respectiv minimul derivatei $\frac{df}{ds} \neq 0$ sunt atinse atunci când s este versorul gradientului lui f în a. Avem

$$\frac{df}{ds}(a) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a) s_i, \quad s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

şi notând $\alpha_i = f'_{x_i}(a)$, $i = \overline{1,n}$ trebuie să determinăm extremele funcţiei $g(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$ cu legătura $s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2 = 1$. Atunci versorul s este coliniar cu vectorul $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$

grad $f(a)$. Dacă notăm $g_a = \dfrac{\operatorname{grad} f(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|}$, atunci $s = \pm g_a$.

$$\max \frac{df}{ds}(a) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a)\frac{f'_{x_i}(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|} = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(a)\|}\sum_{i=1}^{n} f^2_{x_i}(a) = 1,$$
$$\min \frac{df}{ds}(a) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a)\frac{-f'_{x_i}(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|} = -1$$

Definiţia 4.14.1 *Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^1(A)$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$ şi $a \in A$, grad $f(a) \neq 0$. Se numeşte traiectorie de gradient pornind din a orice funcţie $g : I \to A$, $g \in C^1(I)$, unde I este un interval astfel încât $0 \in I, g(0) = a$, $g'(t) =$ grad $f(g(t))$, $\forall\, t \in I$.*

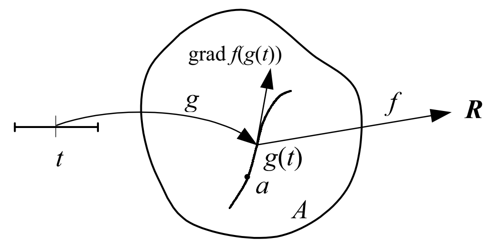

Figura 4.12:

Considerăm $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ o traiectorie de gradient şi $h : I \to \mathbb{R}$ $h(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))$, $\forall\, t \in I$.

Atunci $h \in C^1(I)$ şi

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'_{x_1}(g(t))g'_1(t) + \cdots + f'_{x_n}(g(t))g'_n(t), \\ g'(t) &= (g'_1(t), \ldots, g'_n(t)) = (f'_{x_1}(g(t)), \ldots, f'_{x_n}(g(t))) \\ h'(t) &= f'^2_{x_1}(g(t)) + \cdots + f'^2_{x_n}(g(t)) = \|\operatorname{grad} f(g(t))\|^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Aşadar funcţia h este monoton crescătoare, adică valorile lui f cresc în lungul oricărei traiectorii de gradient şi descresc în cazul când $g'(0) = -\operatorname{grad} f(a)$.

Teorema 4.14.1 *Presupunem intervalul I de forma $I = (t_0, \infty)$ şi că există limita $\lim_{t\to\infty} g(t) = b \in A$. Atunci b este un punct critic al funcţiei f.*

Demonstraţie: Presupunem că b nu este punct critic al funcţiei f, adică grad $f(b) \neq 0$.

Fie $h : I \to \mathbb{R}$ $h(t) = f(g(t))$, $\forall\, t \in I, h \in C^1(I)$. Avem $\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} f(g(t)) = f(b)$ şi $h'(t) = \|\operatorname{grad} f(g(t))\|^2$. Deoarece $f \in C^1(A)$, rezultă că grad $f \in C^0(A)$, prin urmare, $\exists\, m > 0$ şi $V \in \mathcal{V}_b$ astfel încât $\|\operatorname{grad} f(x)\|^2 > m$, $\forall\, x \in V$.

Alegem punctul $t_1 \in I$ astfel ca $g(t) \in A$, $\forall\, t \geq t_1$ şi avem

$$\int_{t_1}^{t} h'(t)dt = h(t) - h(t_1). \tag{4.53}$$

Pe de altă parte

$$\int_{t_1}^{t} h'(t)dt = \int_{t_1}^{t} \|\operatorname{grad} f(g(t))\|^2 dt \geq \int_{t_1}^{t} m^2 dt = m^2(t - t_1) \tag{4.54}$$

Din relaţiile (4.53) şi (4.54) se obţine $h(t) \geq h(t_1) + m^2(t - t_1)$, de unde rezultă $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$ ceea ce contrazice faptul că $\lim_{t\to\infty} h(t) = f(b)$.

Observaţia 4.14.1 *1. Dacă funcţia f este de clasă $C^2(A)$ şi $b \in A$ este un punct de maxim pentru f, atunci există $V \in \mathcal{V}_b$ astfel încât orice traiectorie de gradient care trece printr-un punct din V converge către b.*

2. Fie $x_0 \in A$ un punct fixat şi construim un şir de puncte din $A, (x_n)$, astfel: $x_1 = x_0 - \alpha_1 \, grad \, f(x_0), \ldots, x_n = x_{n-1} - \alpha_{n-1} \, grad \, f(x_{n-1}), \ldots, x \to b$.

Exemplu 4.14.1 *Utilizând metoda gradientului să se determine minimul funcţiei $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$. Observăm că $f(x,y) = (x-1)^2 + (y+2)^2$, astfel că punctul de minim este $x = 1, y = -2$, iar $\min f = 0$. Alegem punctul iniţial $x_1 = 2, y_1 = 4$; $grad \, f(x,y) = 2(x-i)\bar{i} + 2(y+2)\bar{j}$, $grad \, (2,4) = 2\bar{i} + 12\bar{j} \neq 0$. Punem $x_2 = x_1 - \alpha_1 f'_x(x_1,y_1) = 2 - 2\alpha_1$, $y_2 = y_1 - \alpha_1 f'_y(x_1,y_1) = 4(1-3\alpha_1)$; $f(x_2,y_2) = 37(1-2\alpha_1)^2$ are un punct de minim $\alpha_1 = \frac{1}{2}$. Rezultă $x_2 = 1, y_2 = -2$ şi deoarece $grad \, f(1,-2) = 0$, punctul $(1,-2)$ este punct critic al funcţiei f. Pe de altă parte $d^2 f(1,-2) = 2(dx^2 + dy^2) > 0$, deci $(1,-2)$ este punct de minim.*

Capitolul 5

Serii numerice

5.1 Serii numerice

Există cazuri când unui şir (a_n) de numere i se poate atribui o sumă. Pornind de la noţiunile de şiruri, şiruri convergente, operaţii cu şiruri, etc. ne punem problema extinderii acestor noţiuni în cazul sumelor unor mulţimi infinite.

Pe teoria seriilor se bazează diverse metode numerice, de exemplu construirea tabelelor de logaritmi şi de funcţii trigonometrice, precum şi calculul anumitor constante importante ca e şi π.

Definiţia 5.1.1 *Fie (a_n) un şir de numere reale. Perechea de şiruri $((a_n),(s_n))$, unde $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ se numeşte serie de termen general a_n.*

Dacă $((a_n),(s_n))$ este o serie de termen general a_n, atunci vom nota această pereche prin $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sau $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sau $\sum_{n\geq 0} a_n$.

Şirul (s_n) definit mai sus se numeşte şirul sumelor parţiale asociat şirului (a_n).

Observaţia 5.1.1

1. $$\begin{aligned} s_o &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

2. O serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este bine determinată de şirul sumelor parţiale asociat; astfel, studiul seriei se reduce la studiul şirului (s_n). Într-adevăr, dacă se consideră un şir putem forma o serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ ale cărei sume parţiale să fie (s_n) în felul următor:

$$\begin{aligned} a_0 &= s_0 \\ a_1 &= s_1 - s_0 \\ a_2 &= s_2 - s_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= s_n - s_{n-1} \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Definiţia 5.1.2 *Seria de numere reale* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *se numeşte convergentă dacă şirul sumelor parţiale* (s_n) *este convergent. În acest caz, numărul* $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ *se numeşte suma seriei şi se notează* $s = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Dacă şirul (s_n) *al sumelor parţiale nu are limită sau are limita infinită, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *se numeşte divergentă.*

Observaţia 5.1.2 *1. În caz de convergenţă a seriei* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$*, avem:*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

2. Dacă şirul (s_n) *al sumelor parţiale nu are limită atunci spunem că seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este oscilantă.*

Exemplu 5.1.1 *1. Seria* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ *este convergentă şi are suma egală cu 1, deoarece:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1\,.$$

2. Seria $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ *este divergentă, fiindcă:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1 \to \infty.$$

3. Seria $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}$ *este oscilantă, deoarece:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ impar} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ par} \end{cases}, \quad \text{iar } \lim_{n\to\infty} s_n \text{ nu există.}$$

Definiţia 5.1.3 *Prin natura unei serii* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *se înţelege proprietatea ei de a fi convergentă sau divergentă.*

Observaţia 5.1.3 *Fie seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

1. *Dacă se schimbă ordinea unui număr finit de termeni ai seriei se obţine o nouă serie, care are aceeaşi natură cu seria iniţială. În caz de convergenţă, suma seriei obţinute coincide cu suma seriei iniţiale.*

   Dacă se schimbă ordinea unui număr infinit de termeni ai seriei, afirmaţia precedentă nu este, în general, valabilă.

2. *Dacă adăugăm sau suprimăm un număr finit de termeni la o serie dată, atunci seria obţinută are aceeaşi natură cu seria iniţială. În caz de convergenţă, suma seriei obţinute va fi egală cu suma seriei date la care se adună sau scade suma termenilor adăugaţi sau suprimaţi.*

   Într-adevăr, dacă $a_0, a_1, \ldots, a_p$ *sunt termeni suprimaţi, atunci seria obţinută are sumele parţiale* $t_n = s_n - s_p$, $n \geq p+1$, *unde* s_n *sunt sumele parţiale asociate seriei date. Şirul* (t_n) *este convergent* $\Leftrightarrow$ *şirul* (s_n) *este convergent.*

3. *Considerăm seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *construită astfel: se aranjează toţi termenii seriei* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *în grupe, în fiecare grupă aflându-se un număr finit de termeni consecutivi şi se efectuează suma termenilor în fiecare grupă. Seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *este seria acestor sume.*

   Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă, atunci şi seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *este convergentă. Dacă seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă, dar nu oscilantă, atunci la fel este şi seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$*. Dacă seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este oscilantă, atunci nu rezultă neapărat că seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *este şi ea oscilantă. De exemplu, seria* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}$ *este oscilantă, dar seria* $\sum_{n\geq 1} b_n$*, unde* $b_n = a_n + a_{n+1} = 0$*,* $\forall\, n \geq 1$ *este convergentă şi are suma 0.*

Teorema 5.1.1 *Seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$*,* $q \in \mathbb{R}$ *este convergentă şi are suma* $\dfrac{1}{1-q}$ *dacă* $|q| < 1$ *şi este divergentă dacă* $|q| \geq 1$*.*

DEMONSTRAŢIE:
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{dacă } q \neq 1 \\ n+1, & \text{dacă } q = 1 \end{cases}$$

Şirul s_n este convergent $\Leftrightarrow |q| < 1$, în care caz $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$ reprezintă suma seriei.

Definiţia 5.1.4 *Seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$*,* $q \in \mathbb{R}$ *se numeşte seria geometrică de raţie* q*.*

5.2 Proprietăţi ale seriilor numerice şi ale sumelor parţiale

Observaţia 5.2.1 *Dacă seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă, atunci şirul* (s_n) *al sumelor parţiale este mărginit.*

DEMONSTRAŢIE: Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ şirul (s_n) al sumelor parţiale este convergent $\Rightarrow$ şirul (s_n) este mărginit.

Observaţia 5.2.2 *Reciproca observaţiei 5.2.1 este, în general, falsă după cum se observă din următorul exemplu; seria* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}$ *deşi are şirul sumelor parţiale 1, 0, 1, 0 ... mărginit este divergentă.*

Teorema 5.2.1 *Criteriul necesar de convergenţă*

1. *Dacă seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă, atunci* $a_n \to 0$;
2. *Dacă* $a_n \not\to 0$*, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă.*

DEMONSTRAŢIE: 1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ convergentă $\Rightarrow$ şirul (s_n) al sumelor parţiale convergent, $s_n \to s,\ s \in \mathbb{R}$; $a_n = s_{n+1} - s_n \to 0$.

2. Rezultă din 1. şi din $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$.

Observaţia 5.2.3 *Reciproca afirmaţiei 1 a teoremei 5.2.1 este, în general, falsă. Considerând seria armonică* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$*, şirul* $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$*. Aranjăm termenii seriei în grupe finite astfel:*

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \\ &+ \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \ldots, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s_{2^n} &= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) > \\
&> \frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{2^n} > \underbrace{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{n\ ori} = \frac{n}{2},
\end{aligned}
$$

deci şirul (s_{2^n}) are limita ∞. Şirul (s_n) nu poate fi convergent, deoarece conţine subşirul divergent (s_{2^n}). Prin urmare, deşi $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, seria $\sum_{n\ge 1} \dfrac{1}{n}$ este divergentă.

Teorema 5.2.2 *Dacă seriile $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sunt convergente, având sumele s respectiv t, atunci:*

1. *Seriile $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n \pm b_n)$ sunt convergente şi au sumele $s \pm t$;*
2. *Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha\, a_n,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$, este convergentă şi are sumele $\alpha\, s$.*

Demonstraţie: 1. Fie (s_n), (t_n) respectiv (u_n) şirurile sumelor parţiale asociate seriilor $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ respectiv $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n)$.

$$
\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = s_n + t_n,\\
\lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty}(s_n+t_n) = s+t,
\end{aligned}
$$

deci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n)$ este convergentă şi are suma $s+t$. Analog se arată că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n-b_n)$ este convergentă şi are suma $s-t$.

2. Dacă (v_n) este şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha\, a_n$, atunci

$$
\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=0}^{n} \alpha\, a_k = \alpha \sum_{k=0}^{n} a_k = \alpha\, s_n,\\
\lim_{n\to\infty} v_n &= \lim_{n\to\infty} \alpha\, s_n = \alpha \lim_{n\to\infty} s_n = \alpha\, s.
\end{aligned}
$$

Aşadar, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha a_n$ este convergentă şi are suma $\alpha\, s$.

Observaţia 5.2.4 *1. Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n)$, respectiv $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n - b_n)$ este convergentă nu rezultă că seriile $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sunt convergente. Pentru exemplificare considerăm seriile $\sum_{n\ge1}(-1)^{n+1}2^n$ şi $\sum_{n\ge1}(-1)^n 2^n$ care sunt divergente, dar seria $\sum_{n\ge1} 2^n\left[(-1)^{n+1}+(-1)^n\right] = \sum_{n\ge1} 0$ este convergentă.*

2. Dacă seriile $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sunt divergente având sumele $+\infty$ sau $-\infty$, atunci când au sens $s \pm t$, $\alpha\, s$ teorema 5.2.2 rămâne valabilă şi în aceste situaţii. Dacă $s+t$ nu are sens natura seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n)$ poate fi oricum.

De exemplu seriile $\sum_{n\ge1} n$ şi -2 -1 -4 -3 -6 - ... sunt divergente, iar seria suma $\sum_{n\ge1}(-1)^n$ este oscilantă.

5.3 Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare

Atunci când studiem o serie de numere ne interesează două aspecte şi anume: natura seriei, iar în caz de convergenţă suma ei.

Deseori este greu de aflat suma unei serii convergente, aşa că de cele mai multe ori ne rezumăm la aflarea naturii ei. Pentru a găsi suma aproximativă a unei serii convergente adunăm un număr suficient de mare de termeni ai săi pentru a aproxima suma seriei cu o eroare oricât de mică.

Cele mai importante sunt criteriile necesare şi suficiente care stabilesc convergenţa sau divergenţa seriei.

În cele ce urmează stabilim criterii necesare, criterii suficiente şi criterii necesare şi suficiente de convergenţă pentru seriile cu termeni oarecare.

Teorema 5.3.1 *Criteriul general de convergenţă al lui Cauchy*

O serie de numere reale $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\ p \geq 1$ să avem

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

Demonstraţie: Dacă $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ este şirul sumelor parţiale asociat seriei, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ şirul (s_n) este convergent $\Leftrightarrow$ (conform teoremei 2.4.7) şirul (s_n) este şir fundamental $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\ p \geq 1$ avem $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$. Însă

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{k=0}^{n+p} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}.$$

Observaţia 5.3.1 *Condiţia (5.1) se numeşte condiţia Cauchy pentru serii.*

Exemplu 5.3.1 *Seria armonică generalizată $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă pentru $\alpha \leq 1$. Dacă $\alpha \leq 0$, atunci $\frac{1}{n^\alpha} \not\to 0$ şi conform teoremei 5.2.1 seria este divergentă. Fie acum $0 < \alpha \leq 1$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ şi alegem $n\left(\frac{1}{4}\right) = N$ din teorema 5.3.1, $p = N$ şi $n = N$. Atunci:*

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} &= \frac{1}{(N+1)^\alpha} + \frac{1}{(N+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2N)^\alpha} > \\ &> \frac{N}{(2N)^\alpha} \geq \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

aşadar nu putem avea $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p} < \frac{1}{4}$, deci seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă şi pentru $0 < \alpha \leq 1$.

Definiţia 5.3.1 *Fie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ o serie de numere. Se numeşte restul seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ suma seriei (dacă există) $\sum_{p\geq 1} a_{n+p}$ şi se notează $R_n = \sum_{p\geq 1} a_{n+p}$.*

Teorema 5.3.2 *O serie de numere reale $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ şirul (R_n) al resturilor seriei este un şir convergent către zero.*

Demonstraţie: Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ (conform teoremei 5.3.1) $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\ p \geq 1$ $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall\ p \geq 1$ $\left(\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}\right) \to 0$ $n \to \infty \Leftrightarrow R_n \to 0$.

Teorema 5.3.3 *Criteriul Abel (1802 - 1829) - Dirichlet (1805 - 1859)*

Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este o serie de numere astfel încât şirul sumelor parţiale asociat este mărginit, iar (b_n) este un şir de numere monoton descrescător, $b_n \to 0$, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ este convergentă.

Demonstraţie: Pentru orice $p \geq 1$ avem:

$$\begin{aligned}
&|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}| = |b_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + \\
&+ b_{n+2}(s_{n+2} - s_{n+1}) + \cdots + b_{n+p}(s_{n+p} - s_{n+p-1})| = \\
&= | - b_{n+1}s_n + s_{n+1}(b_{n+1} - b_{n+2}) + s_{n+2}(b_{n+2} - b_{n+3}) + \cdots + \\
&+ s_{n+p-1}(b_{n+p-1} - b_{n+p}) + b_{n+p}s_{n+p}| \leq b_{n+1}|s_n| + (b_{n+1} - b_{n+2})|s_{n+1}| + \\
&+ (b_{n+2} - b_{n+3})|s_{n+2}| + \cdots + (b_{n+p-1} - b_{n+p})|s_{n+p-1}| + b_{n+p}|s_{n+p}|
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Deoarece şirul (s_n) este mărginit $\Rightarrow$ $\exists\ M > 0$ astfel încât $|s_n| \leq M$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Atunci inegalitate (5.2) devine:

$$\begin{aligned}
&|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}| \leq M(b_{n+1} + b_{n+1} - b_{n+2} + \\
&+ b_{n+2} - b_{n+3} + \cdots + b_{n+p-1} - b_{n+p} + b_{n+p}) = 2\,M\,b_{n+1}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Întrucât $b_n \to 0$ avem $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $b_n < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ şi atunci din (5.3) rezultă

$$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}| < \varepsilon.$$

Prin urmare, verificându-se condiţia Cauchy pentru seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ obţinem convergenţa acesteia.

Exemplu 5.3.2 *Seria* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos\frac{n\pi}{4}}{n}$ *este convergentă. Într-adevăr, avem*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{4} = \frac{\sin\frac{n\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} \cos\frac{(n+1)\pi}{8}, \quad \forall\ n \geq 1$$

şi $|s_n| \leq \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}$, $\forall\ n \geq 1$, *iar* $b_n = \dfrac{1}{n}$ *converge descrescător către zero.*

5.4 Serii alternate

Se numeşte serie alternată o serie pentru care produsul a doi termeni consecutivi este negativ, adică o serie de numere reale de forma $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ sau $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1} a_n$, unde $a_n > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.4.1 *Leibniz (1646 - 1716)*

Dacă într-o serie alternată $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n b_n$ şirul b_n converge monoton descrescător către zero, $b_n \searrow 0$, atunci seria alternată este convergentă.

Demonstraţie: Aplicăm teorema 5.3.3 pentru $a_n = (-1)^n$ şi b_n din enunţ. Şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, (s_n) este mărginit, deoarece $s_n \in \{0, 1\}$, $\forall\ n \geq 0$.

Exemplu 5.4.1 *Seria armonică generalizată alternată* $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ *este convergentă pentru* $\alpha > 0$, *deoarece atunci* $\frac{1}{n^\alpha} \searrow 0$.

În continuare ne propunem să aproximăm suma unei serii alternate.

Teorema 5.4.2 *Dacă într-o serie alternată* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}a_n$ *în care şirul* (a_n) *converge monoton descrescător către zero, înlocuim suma* s *a seriei cu suma parţială* s_n *a unui număr finit* n *de termeni, obţinem o eroare mai mică decât primul termen neglijat* a_{n+1}. *Eroarea este prin lipsă dacă* n *este par, şi prin adaos dacă* n *este impar.*

DEMONSTRAŢIE: $s_{2n+1} = s_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) < s_{2n-1}$
$s_{2n} = s_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) > s_{2n-2}$

Aşadar, şirul sumelor parţiale impare (s_{2n-1}) este descrescător, iar şirul sumelor parţiale pare (s_{2n}) este crescător, amândouă fiind convergente, deoarece sunt subşiruri ale şirului sumelor parţiale (s_n), care este convergent. Avem

$$s_2 < s_4 < \cdots < s_{2n} < \cdots < s < \cdots < s_{2n+1} < \cdots < s_3 < s_1$$
$$0 < s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \Rightarrow s - s_{2n} < a_{2n+1},$$
$$0 < s_{2n+1} - s_{2n+2} = a_{2n+2} \Rightarrow s_{2n+1} - s < a_{2n+2},$$

adică
$$0 < (-1)^n(s - s_n) < a_{n+1}, \ \ \forall\, n \geq 1.$$

Prin urmare, aproximând suma s a seriei cu suma parţială s_n eroarea absolută este cel mult egală cu a_{n+1}.

Exemplu 5.4.2 *Considerăm seria* $\sum_{n\geq \mathbb{N}}(-1)^n \frac{1}{n^3}$ *căreia îi vom calcula suma cu aproximaţie mai mică decât* 10^{-2}. *Alegem* $n \geq 1$ *minim astfel ca* $a_{n+1} \leq \frac{1}{10^2}$, *adică* $\frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{10^2}.$ *Obţinem* $n = 4$ *şi* $s \simeq s_4 = -1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \frac{1}{64} = -\frac{1549}{1728} \simeq -0,896412$

5.5 Serii absolut convergente

Definiţia 5.5.1 *O serie de numere reale* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *se numeşte absolut convergentă dacă seria modulelor* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ *este convergentă.*

O serie de numere reale $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *care este convergentă, dar pentru care seria modulelor nu este convergentă se numeşte semiconvergentă.*

Teorema 5.5.1 *Orice serie de numere absolut convergentă este convergentă.*

DEMONSTRAŢIE: Fie seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ absolut convergentă. Atunci seria modulelor fiind convergentă are loc condiţia Cauchy pentru aceasta, adică: $\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\ p \geq 1 \quad |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$. Dar $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$, $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\ p \geq 1$. Aşadar, se verifică condiţia Cauchy pentru seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$; rezultă că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă.

Observaţia 5.5.1 *1. Seriile cu termeni numere reale pozitive, convergente sunt absolut convergente.*

2. Reciproca teoremei 5.5.1 nu este, în general, valabilă, după cum se va observa din următorul exemplu.

Exemplu 5.5.1 *1. Seria* $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \dfrac{1}{n^\alpha}$ *pentru* $\alpha > 1$ *este absolut convergentă.*

2. Seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \dfrac{1}{n^\alpha}$ *pentru* $0 < \alpha \leq 1$ *este semiconvergentă, deoarece seria modulelor este seria armonică generalizată, care este divergentă dacă* $\alpha \leq 1$.

Una dintre proprietăţile remarcabile ale seriilor de numere absolut convergente este cea referitoare la schimbarea ordinii termenilor.

Teorema 5.5.2 *Dirichlet (1805 - 1859)*

Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor obţinem tot o serie absolut convergentă şi cu aceeaşi sumă.

Demonstraţie: Fie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ o serie absolut convergentă cu suma s. Considerăm $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o aplicaţie bijectivă (permutare a mulţimii numerelor naturale) şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$ seria obţinută din seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ prin permutarea termenilor săi.

Notăm cu (s_n), respectiv (s'_n) şirurile sumelor parţiale asociate seriilor $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, respectiv $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$. Dacă $\varepsilon > 0$, deoarece seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este absolut convergentă, există $N = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât să avem $|s - s_N| < \frac{\varepsilon}{2}$ şi

$$|a_{N+p}| + |a_{N+p+1}| + \cdots + |a_{N+q}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, p \geq 1 \quad \text{i} \quad \forall\, q > p.$$

Alegem un număr natural $N_1 = n_1(N) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\ m \geq N_1$ s'_m să conţină termenii $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Pe lângă aceşti termeni s'_m va conţine şi alţi termeni pe care-i notăm $a_{N+k_1}, a_{N+k_2}, \ldots, a_{N+k_m}$. Avem

$$|a_{N+k_1} + a_{N+k_2} + \cdots + a_{N+k_m}| \leq |a_{N+k_1}| + |a_{N+k_2}| + \cdots + |a_{N+k_m}| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, m \geq N_1,$$

adică $|s'_m - s_N| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, m \geq N_1$.

Pentru orice $m \geq N_1$ obţinem

$$|s - s'_m| = |s - s_N + s_N - s'_m| \leq |s - s_N| + |s'_m - s_N| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;$$

astfel $\lim_{n\to\infty} s'_n = s$, deci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$ este convergentă şi are aceeaşi sumă s ca şi seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

În continuare se aplică acelaşi raţionament pentru seriile $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_{\sigma(n)}|$.

Observaţia 5.5.2 *1. Seriile absolut convergente au o proprietate asemănătoare cu aceea a sumei unei mulţimi finite, şi anume comutativitatea.*

2. Pentru a efectua suma elementelor unei mulţimi infinite de numere (dacă există), nu are importanţă ordinea în care le adunăm.

3. Pentru seriile numerice semiconvergente această proprietate nu se menţine.

Teorema 5.5.3 *Riemann (1826 - 1866)*

Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este o serie de numere reale semiconvergentă, atunci printr-o permutare a termenilor putem obţine:*

a) o serie convergentă cu suma un număr arbitrar dat;

b) o serie divergentă;

c) o serie oscilantă.

Demonstrație: a) Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ fiind semiconvergentă, rezultă că seria modulelor $\sum_{n\in\mathbb{N}}^{n} |a_n|$ este divergentă.

Notăm $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, cu u_n suma termenilor pozitivi care se află printre primii n termeni ai şirului (a_n), şi cu $-v_n$ suma termenilor negativi care se află printre primii n termeni ai şirului (a_n), $\forall\, n \geq 1$.

Avem $s_n = u_n - v_n$ şi $\sigma_n = u_n + v_n$, $\forall\, n \geq 1$. Atunci $u_n = \dfrac{s_n + \sigma_n}{2}$ şi $v_n = \dfrac{\sigma_n - s_n}{2}$, $\forall\, n \geq 1$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, seriile formate cu termenii pozitivi, respectiv cu termenii negativi ai seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ au sumele ∞, respectiv $-\infty$.

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ un număr dat. Vom construi printr-o schimbare a ordinii termenilor seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ o serie convergentă cu suma α. Pentru aceasta, luăm în ordinea în care apar în seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ cel mai mic număr de termeni pozitivi a căror sumă este mai mare decât α. După aceea vom lua în ordinea în care apar în seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ cel mai mic număr de termeni negativi astfel încât suma termenilor consideraţi de la început să fie mai mică decât α. Continuând acest procedeu aranjăm toţi termenii seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ într-o altă ordine.

Dacă A_n sunt sumele parţiale ale seriei construite şi după primele n operaţii avem m_n termeni pozitivi şi negativi luaţi, atunci:

$$A_1 > \alpha,\ A_3 > \alpha, \ldots,\ A_{m_n} > \alpha, \quad \text{dacă } n \text{ este impar şi}$$

$$A_2 < \alpha,\ A_4 < \alpha, \ldots,\ A_{m_n} < \alpha, \quad \text{dacă } n \text{ este par.}$$

Dacă n este impar, cum m_n este cel mai mic număr de termeni luaţi astfel încât $A_{m_n} > \alpha$, atunci $0 < A_{m_n} - a_{m_n} \leq \alpha$, de unde $0 < A_{m_n} - \alpha \leq a_{m_n}$. Dacă n este par, în mod analog avem $A_{m_n} - a_{m_n} \geq \alpha$, de unde $0 < \alpha - A_{m_n} \leq -a_{m_n}$.

Prin urmare, obţinem:

$$|\alpha - A_{m_n}| \leq |a_{m_n}|, \qquad \forall\, n \geq 1. \tag{5.4}$$

Deoarece seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă, $a_n \to 0$, deci $a_{m_n} \to 0$ când $n \to \infty$. Din (5.4) rezultă că $A_{m_n} \to \alpha$, $n \to \infty$.

După modul de construcţie a noii serii se observă, că orice sumă A_k este situată între două sume A_{m_n} consecutive, una de ordin par, iar cealaltă de ordin impar:

$$A_{m_{2n}} \leq A_k \leq A_{m_{2n+1}},$$

şi, cum $A_{m_{2n}},\ A_{m_{2n+1}} \to \alpha$, $n \to \infty$, şirul (A_n) are limita α.

b) Procedăm în mod analog ca la punctul a. Alegem un număr de termeni pozitivi astfel încât suma lor să fie mai mare decât 1, apoi adăugăm un termen negativ. Alegem în continuare un număr de termeni pozitivi astfel încât suma tuturor termenilor aleşi să fie mai mare decât 2, apoi adăugăm un termen negativ. Continuând procedeul, la al n-lea pas, adăugăm un număr de termeni pozitivi astfel ca suma tuturor termenilor aleşi să fie mai mare decât n şi apoi adăugăm un termen negativ. Seria astfel construită este divergentă.

c) Acum vom construi o serie oscilantă pornind de la seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Alegem un număr de termeni pozitivi având suma mai mare decât 1 şi adăugăm un număr de termeni negativi, astfel ca suma tuturor termenilor aleşi să fie mai mică decât 0. În continuare, adăugăm un număr de termeni astfel ca suma tuturor termenilor aleşi să fie mai mare decât 1, ş.a.m.d. Sumele obţinute formează un şir care nu are limită. Prin urmare, nici şirul sumelor parţiale al seriei nu are limită şi seria astfel construită este oscilantă.

5.6 Serii cu termeni pozitivi

Definiţia 5.6.1 *O serie de numere $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ se numeşte serie cu termeni pozitivi dacă există un rang începând de la care toţi termenii seriei sunt strict pozitivi, adică $\exists\, N \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n > 0$, $\forall\, n \geq \mathbb{N}$.*

Observaţia 5.6.1 *1. Deoarece obiectul studiului nostru la seriile cu termeni pozitivi îl constituie natura acestora şi, cum prin suprimarea unui număr finit de termeni ai unei serii nu se modifică natura ei (ci doar suma în caz de convergenţă), vom considera serii în care toţi termenii sunt strict pozitivi.*

2. Criteriile pe care le vom enunţa pentru seriile cu termeni pozitivi constituie criterii de absolut convergenţă pentru serii cu termeni oarecare.

Teorema 5.6.1 *Criteriul monotoniei*

Dacă şirul sumelor parţiale (s_n) asociat unei serii cu termeni pozitivi $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este mărginit, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă.

Demonstraţie: ¸irul (s_n) este strict crescător, deoarece

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} > s_n\ , \qquad (a_{n+1} > 0)\ , \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

şi, cum din ipoteză (s_n) este mărginit, atunci (s_n) este convergent, deci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă.

Observaţia 5.6.2 *Dacă şirul sumelor parţiale asociat unei serii cu termeni pozitivi este nemărginit, atunci seria este divergentă.*

Exemplu 5.6.1 *Pentru $\alpha > 1$ seria Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă. Scriem şirul sumelor parţiale (s_n) sub forma:*

$$\begin{aligned}
s_{2^n-1} &= \frac{1}{1^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2^{(n-1)\alpha}} + \frac{1}{\left(2^{(n-1)}+1\right)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha}\right) < \\
&< \frac{1}{1^\alpha} + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2}{2^{2\alpha}} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)\alpha}} = \\
&= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{(n-1)(\alpha-1)}} = \\
&= \frac{1 - \frac{1}{2^{n(\alpha-1)}}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

¸irul sumelor parţiale fiind mărginit conform teoremei 5.6.1, rezultă că seria Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$.

Teorema 5.6.2 *Criteriul de comparaţie cu inegalităţi I*

Considerăm seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ şi presupunem că există un număr natural $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n \leq b_n$, $\forall\, n \geq N$.

1. Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă.

2. Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ este divergentă.

Demonstraţie: 1. Putem presupune că $a_n \le b_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, după ce în prealabil am modificat primii $N-1$ termeni (neschimbând în felul acesta natura seriilor).

Fie (s_n), respectiv (t_n) şirurile sumelor parţiale asociate seriilor $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, respectiv $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k = t_n \quad , \quad \forall\, n \ge 1 \tag{5.5}$$

Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ este convergentă, atunci şirul (t_n) este mărginit. Din (5.5) rezultă că şi şirul (s_n) este mărginit şi, conform criteriului monotoniei, obţinem seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ convergentă.

2. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

Exemplu 5.6.2 *1. Seria* $\sum_{n\ge1} \dfrac{1}{n^2\sqrt{n+7}}$ *este convergentă, deoarece* $\dfrac{1}{n^2\sqrt{n+7}} < \dfrac{1}{n^2}, \forall\, n \ge 1$, *iar seria* $\sum_{n\ge1} \dfrac{1}{n^2}$ *este convergentă (seria armonică pentru* $\alpha = 2$.*)*

2. Seria $\sum_{n\ge1} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ *este divergentă, deoarece* $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\forall\, n \ge 2$, *iar seria armonică* $\sum_{n\ge1} \dfrac{1}{n}$ *este divergentă.*

Observaţia 5.6.3 *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *două serii cu termeni pozitivi.*

Dacă $\exists\, N \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $a_n \le b_n$, $\forall\, n \ge N$, *iar seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă (sau seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *este divergentă), nu putem spune nimic, în general, despre natura celeilalte serii.*

Teorema 5.6.3 *Considerăm* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *şi* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *două serii cu termeni pozitivi.*

1. *Dacă* $\overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} < \infty$ *şi seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $0 < \underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ *şi seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *este convergentă.*

3. *Dacă* $0 < \underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} < \infty$ *atunci cele două serii au aceiaşi natură.*

Demonstraţie: 1. Fie $l = \overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} < \infty$ şi $l < \alpha < \infty$ un număr fixat. Din teorema 2.5.2 rezultă că $\exists\, N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{a_n}{b_n} \le \alpha$, $\forall\, n \ge N$, deci $a_n \le \alpha b_n, \quad \forall\, n \ge N$. Conform teoremei 5.6.2 obţinem cerinţa punctului 1.

2. Fie $b = \underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} > 0$ şi $0 < \alpha < l$ un număr fixat. Din teorema 2.5.2 rezultă că $\exists\, N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{a_n}{b_n} \ge \alpha$, $\forall\, n \ge N$, deci $b_n \le \dfrac{1}{\alpha} a_n$. Conform teoremei 5.6.2 obţinem cerinţa punctului 2.

3. Rezultă din 1 şi 2.

Corolarul 5.6.1 *Considerăm că* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *şi* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *sunt două serii cu termeni pozitivi şi presupunem că există limita* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$ *în* $\overline{\mathbb{R}}$.

1. *Dacă* $l = 0$ *şi seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $l = \infty$ *şi seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *este divergentă, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă.*

3. *Dacă* $0 < l < \infty$, *atunci cele două serii au aceeaşi natură.*

Exemplu 5.6.3 *1. Seria* $\sum_{n\geq 1} \sin\dfrac{1}{n^2}$ *este convergentă, deoarece* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, *iar seria* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ *este convergentă.*

2. Seria $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$ *este divergentă, deoarece* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}{\frac{1}{n}} = \infty$ *şi seria* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ *este divergentă.*

3. Seria $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n!}$ *este convergentă, deoarece* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{n^2}} = 0$ *şi seria* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ *este convergentă.*

Teorema 5.6.4 *Criteriul de comparaţie cu inegalităţi II*

Considerăm $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *şi* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *două serii cu termeni pozitivi şi presupunem că există un număr natural* $N \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad , \quad \forall\, n \geq N.$$

1. *Dacă seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie: *Din* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, $\forall\, n \geq N$ *obţinem* $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \dfrac{a_n}{b_n}$, $\forall\, n \geq N$. *Pentru orice* $p \geq 1$ *avem:*

$$\frac{a_{N+p}}{b_{N+p}} \leq \frac{a_{N+p-1}}{b_{N+p-1}} \leq \cdots \leq \frac{a_N}{b_N},$$

$a_{N+p} \leq \alpha\, b_{N+p}$, *unde* $\alpha = \dfrac{a_N}{b_N} > 0$. *Cum* $a_n \leq \alpha\, b_n$, $\forall\, n \geq N$ *aplicând teorema 5.6.2 seriilor* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *şi* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha\, b_n$ *demonstraţia teoremei este încheiată.*

Exemplu 5.6.4 *Seria* $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{e}\right)^n \dfrac{1}{n!}$ *este divergentă. Deoarece pentru orice* $n \geq 1$ $e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ *avem:*

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}} &= \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}},\end{aligned}$$

iar seria $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ *este divergentă, conform teoremei 5.6.4, rezultă că seria este* $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{e}\right)^n \dfrac{1}{n!}$ *divergentă.*

Teorema 5.6.5 *Criteriul de condensare al lui Cauchy*

Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este o serie cu termeni pozitivi pentru care şirul termenilor* (a_n) *este monoton descrescător, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *are aceeaşi natură cu seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$.

Demonstraţie: Fie $k \in \mathbb{N}$, $2^k \le n \le 2^{k+1} - 1$ şi notăm $\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} 2^i a_{2^i}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$.

Presupunem seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ convergentă. Atunci şirul sumelor parţiale asociat acestei serii, (s_n), este mărginit. Avem

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge \\ &\ge (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}) \ge \\ &\ge \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^k a_{2^k}) = \frac{1}{2}\sigma_k, \end{aligned}$$

deoarece şirul termenilor (a_n) este monoton descrescător. Deci $\sigma_k \le 2\, s_n$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ şi $\forall\, 2^k \le n \le 2^{k+1} - 1$. Rezultă că şirul (σ_k) este mărginit şi, conform criteriului monotoniei, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ este convergentă.

Presupunând seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ convergentă, rezultă că şirul (σ_k) este mărginit. Avem

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le \\ &\le a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^k} + a_{2^{k+1}} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\le a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^k a_{2^k} = \sigma_k, \end{aligned}$$

deoarece şirul (a_n) este monoton descrescător. Aşadar $s_n \le \sigma_k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ şi $\forall\, 2^k \le n \le 2^{k+1} - 1$.

Rezultă astfel că şirul (s_n) este mărginit şi, conform criteriului monotoniei, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă.

Exemplu 5.6.5 *1. Aplicăm teorema 5.6.5 seriei* $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Pentru $\alpha > 0$ *seria Riemann* $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *are aceeaşi natură cu seria*

$$\sum_{n\ge 1} 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum_{n\ge 1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n.$$

Ultima serie este convergentă (serie geometrică) $\Leftrightarrow \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, *adică* $\alpha > 1$.

2. Considerăm seria $\sum_{n\ge 2} \frac{1}{n \ln n}$. *Conform criteriului condensării această serie are aceeaşi natură cu seria*

$$\sum_{n\ge 2} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n\ge 2} \frac{1}{n \ln 2},$$

care este divergentă.

Teorema 5.6.6 *Criteriul radical al lui Cauchy*

Considerăm $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

1. *Dacă* $\exists\, q$, $0 < q < 1$ *şi* $\exists\, N \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\sqrt[n]{a_n} \le q$, $\forall\, n \ge N$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă*

2. *Dacă* $\exists\, N \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, $\forall\, n \ge N$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie: 1. $\sqrt[n]{a_n} \le q$, $\forall\, n \ge N \Leftrightarrow a_n \le q^n$, $\forall\, n \ge N$. Cum seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} q^n$ este convergentă ($q \in (0,1)$), atunci, conform teoremei 5.6.2, rezultă că seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ convergentă.

2. Dacă $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, $\forall\, n \ge N \Leftrightarrow a_n \ge 1$, $\forall\, n \ge N$ şi deci $a_n \not\to 0$. Conform teoremei 5.2.1 seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ este divergentă.

O altă formă a criteriului radicalic este dată în următorul corolar.

Corolarul 5.6.2 *Considerăm* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi şi* $l = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

1. *Dacă* $l < 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $l > 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este divergentă.*
3. *Dacă* $l = 1$, *atunci nu se poate spune, în general, care este natura seriei.*

DEMONSTRAŢIE: 1. Din $l = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \ \forall\ l < q < 1, \ \exists\ N = n(q) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt[n]{a_n} \le q, \ \forall\ n \ge N$. Atunci, conform teoremei 5.6.6, seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ este convergentă.

2. Deoarece $l > 1, \ \exists\ N = n(l) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt[n]{a_n} > 1, \forall\ n \ge N$ şi, conform teoremei 5.6.6, seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ este divergentă.

3. Fie $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = 1$, dar seria este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \le 1$.

Corolarul 5.6.3 *Forma practică a criteriului radicalic*

Considerăm $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi şi presupunem că există limita* $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

1. *Dacă* $l < 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $l > 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este divergentă.*
3. *Dacă* $l = 1$ *natura seriei* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *poate fi oricum.*

Exemplu 5.6.6 1. *Fie seria* $\sum_{n\ge 1} \dfrac{1}{\left[\frac{3}{2} + (-1)^n\right]^n}$

Avem

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\frac{3}{2} + (-1)^n} = \begin{cases} 2\,, & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ \frac{2}{5}\,, & \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases}$$

$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2 > 1$, *deci seria dată este divergentă.*

2. *Fie seria* $\sum_{n\ge 1} \left[\dfrac{2 + (-1)^n}{5}\right]^n$.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2 + (-1)^n}{5} = \begin{cases} \frac{1}{5}\,, & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ \frac{3}{5}\,, & \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases}$$

$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{3}{5} < 1$, *deci seria dată este convergentă.*

3. *Fie seria* $\sum_{n\ge 1} a^n \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{np}$, $a > 0$ *şi* $p \in \mathbb{R}$

$$\sqrt[n]{a_n} = a\left(\frac{n+1}{n}\right)^p \to a.$$

Dacă $0 < a < 1$ *seria este convergentă, iar dacă* $a > 1$ *seria este divergentă.*

Pentru $a = 1$, $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{np} \to e^p$, *deci* $a_n \not\to 0$ *şi în acest caz seria este divergentă.*

Teorema 5.6.7 *Criteriul raportului al lui D'Alembert (1717-1783).*
Considerăm $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

1. *Dacă* $\exists\, q,\ \ 0<q<1$ *şi* $\exists\, N\in\mathbb{N}$ *astfel încât* $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q,\ \ \forall\, n\ge\mathbb{N}$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $\exists\, N\in\mathbb{N}$ *astfel încât* $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1,\ \ \forall\, n\ge\mathbb{N}$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie: 1. $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q,\ \forall\, n\ge\mathbb{N}\Leftrightarrow a_{n+1}\le q\,a_n,\ \forall\, n\ge\mathbb{N}$. Avem

$$\begin{array}{rcl} a_{N+1} & \le & q\,a_N \\ a_{N+2} & \le & q\,a_{N+1}\le q^2 a_N \\ \vdots & & \\ a_{N+p} & \le & q\,a_{N+p-1}\le\cdots\le q^p a_N \quad,\quad \forall\, p\ge 1. \end{array}$$

Întrucât $q\in(0,1)$ seria $\sum_{p\ge1} q^p a_N$ este convergentă şi atunci, conform teoremei 5.6.2, rezultă că seria $\sum_{p\ge1} a_{N+p}$ este convergentă, iar din observaţia 5.6.1, obţinem seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ convergentă.

2. $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1,\ \forall\, n\ge N\Leftrightarrow a_{n+1}\ge a_n,\ \forall\, n\ge N$, deci şirul termenilor este un şir de numere pozitive, crescător, prin urmare $a_n\not\to 0$. Conform teoremei 5.2.1 seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ este divergentă.

O altă formă a criteriului raportului este dată în următorul corolar.

Corolarul 5.6.4 *Considerăm* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

1. *Dacă* $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie: Din $l_2=\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ şi teorema 2.5.2 rezultă că $\forall\ l_2<q<1$, $\exists\, N=n(q)\in\mathbb{N}$ astfel încât să avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q \quad,\quad \forall\, n\ge N,$$

şi, conform teoremei 5.6.7, obţinem seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ convergentă.

2. Din $l_1=\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ şi teorema 2.5.2 rezultă că $\exists\, N=n(l_1)\in\mathbb{N}$ astfel încât să avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1 \quad,\quad \forall\, n\ge N,$$

şi, conform teoremei 5.6.7, obţinem seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ divergentă.

Corolarul 5.6.5 *Forma practică a criteriului raportului.*
Considerăm $\sum_{n\in\mathbf{N}}$ *o serie cu termeni pozitivi şi presupunem că există limita* $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1. *Dacă* $l<1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $l>1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este divergentă.*

3. Dacă $l = 1$, natura seriei $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ poate fi oricum.

Exemplu 5.6.7 *1. Fie seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} 2^{(-1)^n-n}$*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{(-1)^{n+1}-n-1-(-1)^n+n} = 2^{2(-1)^{n+1}-1} = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{dacă } n \text{ par} \\ 2, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}$$

Atunci

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 > 1, \quad \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8} < 1,$$

deci criteriul raportului nu dă nici o informaţie asupra naturii seriei. Observăm că

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} 2^{\frac{(-1)^n-n}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

şi, conform criteriului radicalic, seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} 2^{(-1)^n-n}$ este convergentă.

2. Dacă $l = 1$ nu se poate afirma, în general, care este natura seriei. Aplicând criteriul raportului pentru seria armonică generalizată $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \to 1$, însă seria este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \le 1$.

Teorema 5.6.8 *Criteriul lui Kummer (1810 - 1893)*

Considerăm $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1. Dacă există un şir (u_n) de numere pozitive, un număr $\alpha > 0$ şi un număr natural $N \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$u_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \ge \alpha \quad , \quad \forall\, n \ge N,$$

atunci seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ este convergentă.

2. Dacă există un şir (u_n) de numere strict pozitive astfel ca seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{u_n}$ să fie divergentă şi există un număr natural $N \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$u_n\,\frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \le 0 \quad , \quad \forall\, n \ge N,$$

atunci seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ este divergentă.

Demonstraţie: 1. După o eventuală renumerotare a termenilor putem presupune că

$$u_n\,\frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \ge \alpha \quad , \quad \forall\, n \ge 1 \tag{5.6}$$

Din inegalitatea (5.6) avem

$$u_n\, a_n - u_{n+1}a_{n+1} \ge \alpha\, a_{n+1} \quad , \quad \forall\, n \ge 1,$$

adică

$$\begin{aligned} &u_1a_1 - u_2a_2 \ge \alpha\, a_2 \\ &u_2a_2 - u_3a_3 \ge \alpha\, a_3 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &u_na_n - u_{n+1}a_{n+1} \ge \alpha\, a_{n+1} \quad , \quad n \ge 1 \end{aligned}$$

Adunând aceste inegalităţi obţinem:

$$u_1a_1 - u_{n+1}a_{n+1} \ge \alpha\,(a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1}) \quad , \quad \forall\, n \ge 1,$$

$$a_1(u_1+\alpha) - u_{n+1}a_{n+1} \geq \alpha\,(a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}) = \alpha\, s_{n+1} \quad , \quad \forall\, n \geq 1,$$

unde (s_n) este şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$.

Atunci

$$\alpha\, s_{n+1} \leq a_1(u_1+\alpha) - u_{n+1}a_{n+1} < a_1(u+\alpha)\,, s_{n+1} \leq \frac{a_1(u_1+\alpha)}{\alpha}\;, \quad \forall\, n \geq 1,$$

prin urmare, şirul (s_n) este mărginit şi, conform criteriului monotoniei, rezultă seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ convergentă.

2. Din inegalitatea $u_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \leq 0$, $\forall\, n \geq N$ rezultă că

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{u_n}} \quad , \quad \forall\, n \geq N.$$

Din teorema 5.6.4 aplicată seriilor $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ şi $\sum_{n\in\mathbf{N}} \dfrac{1}{u_n}$ obţinem că seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ este divergentă.

Corolarul 5.6.6 *Considerăm $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi.*

1. *Dacă există un şir de numere pozitive astfel încât*

$$l_1 = \underline{\lim}_{n\to\infty}\left(u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1}\right) > 0,$$

atunci seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ este convergentă.

2. *Dacă există un şir (u_n) de numere strict pozitive astfel ca seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} \dfrac{1}{u_n}$ să fie divergentă şi dacă*

$$l_2 = \overline{\lim}_{n\to\infty}\left(u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1}\right) < 0,$$

atunci seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ este divergentă.

DEMONSTRAŢIE: 1. Din $l_1 = \underline{\lim}_{n\to\infty}\left(u_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1}\right) > 0$ şi teorema 2.5.2 avem că pentru orice $0 < \alpha < l_1$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \geq \alpha \quad , \quad \forall\, n \geq N.$$

Atunci, conform teoremei 5.6.8, seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ este convergentă.

2. Din $l_2 = \overline{\lim}_{n\to\infty}\left(u_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1}\right) < 0$ şi teorema 2.5.2 există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \leq 0 \quad , \quad \forall\, n \geq N.$$

Atunci, conform teoremei 5.6.8, seria $\sum a_n$ este divergentă.

Corolarul 5.6.7 *Forma practică a criteriului Kummer*

Considerăm $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi, (u_n) un şir de numere strict pozitive şi presupunem că există limita

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1}\right).$$

1. *Dacă* $l > 0$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $l < 0$ *şi seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{u_n}$ *este divergentă, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este divergentă.*

3. *Dacă* $l = 0$, *atunci natura seriei* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *poate fi oricum.*

Observaţia 5.6.4 *În criteriul lui Kummer luând* $u_n = 1$ *se obţine criteriul raportului D'Alembert.*

Teorema 5.6.9 *Criteriul lui Raabe - Duhamel (1797 - 1872).*
Considerăm $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

1. *Dacă există un număr* $\alpha > 1$ *şi un număr natural* $N \in \mathbb{N}$ *astfel încât*
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \alpha \quad , \quad \forall\, n \geq N,$$
atunci seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă există un număr natural* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca*
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \quad , \quad \forall\, n \geq N,$$
atunci seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie: Criteriul lui Raabe - Duhamel este un caz particular al criteriului Kummer, atunci când $u_n = n$.

Alte forme ale criteriului Raabe Duhamel sunt date de următoarele corolare.

Corolarul 5.6.8 *Considerăm* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

1. *Dacă* $\underline{\lim}_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este divergentă.*

Corolarul 5.6.9 *Forma practică a criteriului Raabe - Duhamel*
Considerăm $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi şi presupunem că există limita* $l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$.

1. *Dacă* $l > 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $l < 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *este divergentă.*

3. *Dacă* $l = 1$, *atunci natura seriei* $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *poate fi oricum.*

Observaţia 5.6.5 *De regulă, criteriul Raabe - Duhamel se aplică atunci când, folosind criteriul raportului D'Alembert nu obţinem informaţii asupra naturii seriei.*

Exemplu 5.6.8 *Fie seria* $\sum_{n\geq 1} a^{\ln n}, \quad a>0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{\ln n+1}}{a^{\ln n}} = a^{\ln n+1-\ln n} = a^{\ln \frac{n+1}{n}} \to 1$$

şi nu putem determina natura seriei cu ajutorul criteriului raportului D'Alambert

$$\begin{aligned} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= n\left(a^{\ln \frac{n}{n+1}}-1\right) = n\frac{a^{\ln \frac{n}{n+1}}-1}{\ln \frac{n}{n+1}} \ln \frac{n}{n+1} = \\ &= \frac{a^{\ln \frac{n}{n+1}}-1}{\ln \frac{n}{n+1}} \ln \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to -\ln a\,. \end{aligned}$$

Dacă $a<e^{-1}$*, atunci seria* $\sum_{n\geq 1} a^{\ln n}$ *este convergentă, iar dacă* $a>e^{-1}$*, atunci seria dată este divergentă.*

Pentru $a=e^{-1}$ *avem* $a_n = a^{\ln n} = e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$ *şi seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *este divergentă.*

5.7 Produsul convolutiv a două serii

Definiţia 5.7.1 *Fie* $\sum_{n\in \mathbf{N}} a_n$ *şi* $\sum_{n\in \mathbf{N}} b_n$ *două serii de numere reale. Se numeşte serie produs sau produs convolutiv al celor două serii, seria* $\sum_{n\in \mathbf{N}} c_n$*, unde* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Există situaţii când seria produs a două serii convergente este divergentă, după cum se va observa în următorul exemplu.

Exemplu 5.7.1 *Seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ *este convergentă (seria armonică generalizată alternată cu* $\alpha = \frac{1}{2}$*), dar nu este absolut convergentă. Fie* c_n *termen general al seriei produs dintre seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ *cu ea însăşi. Avem*

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} (-1)^{n+k} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}$$

Atunci

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} > 1.$$

Rezultă că dacă există limita şirului (c_n) *aceasta este diferită de 0, deci seria* $\sum_{n\geq 1} c_n$ *este divergentă.*

Teorema 5.7.1 *Mertens (1840 - 1927)*

Seria produs a două serii de numere reale $\sum_{n\in \mathbf{N}} a_n$ *şi* $\sum_{n\in \mathbf{N}} b_n$*, dintre care una este convergentă, iar cealaltă absolut convergentă, este convergentă şi suma ei este produsul sumelor seriilor date, adică*

$$\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n\geq 0} a_n\right) \left(\sum_{n\geq 0} b_n\right).$$

Demonstraţie: Presupunem seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ absolut convergentă şi seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} b_n$ convergentă.

Notăm $a = \sum_{n\geq 0} a_n$, $b = \sum_{n\geq 0} b_n$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $r_n = b - t_n$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ şi $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$.

Atunci

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + \cdots + a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0 = \\
&= a_0t_n + a_1t_{n-1} + \ldots a_nt_0 = a_0(b - r_n) + a_1(b - r_{n-1}) + \cdots + a_n(b - r_0) = \\
&= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)b - (a_0r_n + a_1r_{n-1} + \cdots + a_nr_0) = \\
&= s_nb - (a_0r_n + a_1r_{n-1} + \cdots + a_nr_0).
\end{aligned}$$

Avem

$$a\,b - \sigma_n = (a - s_n)b + \sum_{k=0}^{n} r_k a_{n-k} \tag{5.7}$$

Arătăm că, dacă $r_n \to 0$ şi $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ este o serie absolut convergentă de numere reale, atunci $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r_k a_{n-k} = 0$. Pentru aceasta fie $m = \sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n|$ şi $\varepsilon > 0$. Deoarece $r_n \to 0$, există $N = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $|r_n| < \frac{\varepsilon}{2m}$, $\forall\, n \geq N$.

Seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ fiind absolut convergentă, atunci $a_n \to 0$, deci $\exists\, N' \geq N$ astfel încât

$$|a_n| \leq \left(2\sum_{k=0}^{N} |r_k|\right)^{-1} \varepsilon \quad , \quad \forall\, n \geq N'$$

Atunci:

$$\begin{aligned}
&|(r_0a_n + r_1a_{n-1} + \cdots + r_Na_{n-N}) + (r_{N+1}a_{n-N-1} + \cdots + r_na_0)| \leq \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{N} |r_k|\right)\left(2\sum_{k=0}^{N} |r_k|\right)^{-1} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2m} m = \varepsilon \quad , \quad \forall\, n \geq 2N,
\end{aligned}$$

aşadar, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r_k a_{n-k} = 0$.

Revenim la (5.7) şi, trecând la limită, obţinem $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = a\,b$, adică seria produs $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n$ este convergentă şi are suma $a\,b$.

Corolarul 5.7.1 *Cauchy*

Seria produs a două serii de numere reale absolut convergente $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ şi $\sum_{n\in\mathbf{N}} b_n$ este convergentă.

Demonstraţie: Aplicând teorema 5.7.1 seriilor $\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n|$ şi $\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n|$, rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} (\sum_{k=1}^{n} |a_k b_{n-k}|)$ este convergentă. Deoarece

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_k b_{n-k}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_k b_{n-k}|_n \quad , \quad \forall\, n \geq 0$$

din teorema 5.7.1 obţinem că seria $\sum_{n\geq 0} (|\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}|)$ este convergentă, adică seria $\sum_{n\geq 0} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$ absolut convergentă.

Exemplu 5.7.2 *Deoarece seria geometrică* $\sum_{n\geq 0} q^n$ *este absolut convergentă pentru* $|q| < 1$, *rezultă seria produs*

$$\left(\sum_{n\geq 0} q^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} q^n\right)$$

absolut convergentă. Suma seriei geometrice fiind $\frac{1}{1-q}$, *atunci suma seriei produs* $\sum_{n\geq 0}$ *este* $\frac{1}{(1-q)^2}$, *pentru* $|q| < 1$.

Capitolul 6

Şiruri de funcţii. Serii de funcţii. Serii de puteri

6.1 Şiruri de funcţii

Şirurile de funcţii constituie o generalizare naturală a şirurilor de numere.

Definiţia 6.1.1 *Fie $F(X,Y)$ mulţimea funcţiilor definite pe mulţimea X cu valori în mulţimea Y. Orice şir din $F(X,Y)$ se numeşte şir de funcţii definite pe X cu valori în Y.*

În cele ce urmează se consideră şiruri de funcţii cu valori numere reale, deci $Y = \mathbb{R}$.

Fie A o mulţime nevidă, oarecare şi (f_n) un şir de funcţii reale definite pe A, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $\forall\, n \geq 1$. Dacă $a \in A$, atunci valorile funcţiilor şirului (f_n) în punctul a formează un şir de numere $(f_n(a))$.

Definiţia 6.1.2 *Un punct $a \in A$ se numeşte punct de convergenţă al şirului de funcţii (f_n) dacă şirul de numere $(f_n(a))$ este convergent.*

Notăm A_c mulţimea punctelor de convergenţă ale şirului de funcţii (f_n).

$$A_c = \{a \in A \,|\, \textit{şirul } \ (f_n(a)) \ \textit{ este convergent}\}.$$

Definiţia 6.1.3 *Dacă (f_n) este un şir de funcţii reale definite pe mulţimea A (nevidă), iar A_c este mulţimea punctelor de convergenţă corespunzătoare acestui şir, definim funcţia $f : A_c \to \mathbb{R}$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\forall\, x \in A_c$, numită funcţia limită pe mulţimea A_c a şirului de funcţii.*

Definiţia 6.1.4 *Fie A o mulţime nevidă, (f_n) un şir de funcţii reale definite pe A şi $f : A_c \to \mathbb{R}$ funcţia limită corespunzătoare şirului (f_n).*

Şirul de funcţii (f_n) converge simplu (sau punctual) către f pe mulţimea A_c, dacă: $\forall\, x \in A_c$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon, x)$.

Şirul de funcţii (f_n) converge uniform pe A_c către f, dacă: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\, x \in A_c$.

Observaţia 6.1.1 *a) Dacă şirul de funcţii (f_n) converge simplu, respectiv uniform pe A_c către f, atunci notăm $f_n \to f$ pe A_c, respectiv $f_n \stackrel{UC}{\to} f$ pe A_c. Dacă convergenţa are loc pe tot domeniul de definiţie, atunci notăm $f_n \to f$, respectiv $f_n \stackrel{UC}{\to} f$.*

b) În cazul convergenţei uniforme numărul $n(\varepsilon)$ depinde doar de ε, fiind independent de x, pe când în cazul convergenţei simple $n(\varepsilon, x)$ depinde atât de ε cât şi de x.

c) Din punct de vedere geometric semnificaţia convergenţei uniforme este următoarea: date fiind un şir de funcţii f_n, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $\forall\, n \geq 1$ şi funcţia limită corespunzătoare $f : A_c \to \mathbb{R}$, pentru $\varepsilon > 0$, trasăm graficele funcţiilor $f - \varepsilon$, $f + \varepsilon$. Există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ce depinde doar de ε, începând de la care graficele funcţiilor f_n se află în tubul delimitat de graficele funcţiilor $f - \varepsilon$, $f + \varepsilon$.

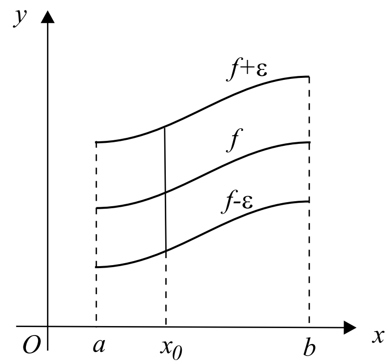

Figura 6.1:

Exemplu 6.1.1 *1. Fie şirul de funcţii $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = x^n$, $\forall\, n \geq 1$. Funcţia limită $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0,1) \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \end{cases},$$

deci $f_n \to f$. Arătăm că (f_n) nu converge uniform pe $[0,1]$ către f. Presupunem că $f_n \overset{UC}{\to} f$ şi alegem $\varepsilon = \frac{1}{3} \Rightarrow \exists\, n\left(\frac{1}{3}\right) \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^n < \frac{1}{3}$, $\forall\, x \in [0,1)$, $\forall\, n \geq n\left(\frac{1}{3}\right)$ ceea ce este fals, prin urmare $f_n \overset{UC}{\not\to} f$.

2. Fie $A = [-1,1]$ şi şirul de funcţii $f_n : A \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n-1}$, $\forall\, n \geq 2$. Avem $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x}{n-1} = 0$, $\forall\, x \in A$, deci $f_n \to f$.

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \frac{|x|}{n-1} \leq \frac{1}{n-1}$$

Fie $\varepsilon > 0$; atunci $\exists\, n(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 2$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$, adică $f_n \overset{UC}{\to} f$.

Observaţia 6.1.2 *Din exemplu 1 se constată că, în general, dacă un şir de funcţii este punctual convergent, atunci acesta nu este în mod obligatoriu uniform convergent.*

Considerăm A o mulţime nevidă; $\mathcal{M}_A$ este un spaţiu vectorial relativ la norma uniformă, adică $\forall\, f \in \mathcal{M}_A$ $\|f\| = \sup_{x\in A} |f(x)|$.

Teorema 6.1.1 *Fie (f_n) un şir de funcţii din $\mathcal{M}_A$ şi $f \in \mathcal{M}_A$.*

a) $f_n \overset{UC}{\to} f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

b) Dacă $f_n \overset{UC}{\to} f$, atunci $f_n \to f$.

Demonstraţie: a) $f_n \overset{UC}{\to} f \Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\, x \in A$ să avem $|f_n(n) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, adică $\|f_n - f\| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon) \Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

b) Dacă $f_n \overset{UC}{\to} f \Rightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\, x \in A$ să avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$, $\forall\, x \in A$, adică $f_n \to f$.

Algoritm pentru studiul convergenţei (punctuale, respectiv uniforme).

1. Dat fiind şirul de funcţii reale $f_n : A \to \mathbb{R}$, $\forall\, n \geq 1$ se determină mulţimea punctelor de convergenţă A_c şi funcţia limită $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\forall\, x \in A_c$. Rezultă că $f_n \to f$ pe A_c.

2. Se calculează $\varepsilon_n = \|f_n - f\| = \sup_{x\in A_c} |f_n(x) - f(x)|$. Dacă $\varepsilon_n \to 0$ atunci $f_n \overset{UC}{\to} f$ pe A_c iar dacă $\varepsilon_n \not\to 0$, atunci $f_n \overset{UC}{\not\to} f$ pe A_c.

Exemplu 6.1.2 *Şirul de funcţii* $f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^2+x^4}$ *este uniform convergent către funcţia* $f(x) = 0$. *Într-adevăr,* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ *şi* $f_n(x) \le f_n(n^2)$, $\forall\, x \in [1,\infty)$. *Atunci* $\varepsilon_n = \sup_{x\ge 1} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{n^4}{n^2+n^8} \to 0$, *adică* $f_n \overset{UC}{\to} 0$.

Deoarece uniform convergenţa implică convergenţa punctuală e suficient să găsim criterii care să stabilească uniform convergenţa şirurilor de funcţii.

Teorema 6.1.2 *Criteriul general de convergenţă al lui Cauchy*

Fie (f_n) *un şir de funcţii reale definite pe mulţimea nevidă* A. *Şirul* (f_n) *converge uniform pe* A *către funcţia* f, $f : A \to \mathbb{R}$, *dacă şi numai dacă* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall\, x \in A$ *şi* $\forall\, n, m \ge n(\varepsilon)$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Demonstraţie: Presupunem că $f_n \overset{UC}{\to} f \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \ge n(\varepsilon)$ şi $\forall\, x \in A$ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Atunci $\forall\, n, m \ge n(\varepsilon)$ şi $\forall\, x \in A$ avem $|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Invers, să presupunem că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n, m \ge n(\varepsilon)$ şi $\forall\, x \in A$ avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \tag{6.1}$$

Din (6.1) rezultă că şirul de numere $(f_n(x))$ este un şir fundamental, pentru fiecare $x \in A$ şi are limita

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in A. \tag{6.2}$$

S-a definit astfel o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărui element x din A numărul $f(x)$ definit prin (6.2). Rămâne de arătat că $f_n \overset{UC}{\to} f$.

Fie $m \ge n(\varepsilon)$. Cum $f_n \to f \Rightarrow f_n - f_m \to f - f_m$. Dacă în (6.1) $n \to \infty$, atunci pentru $\forall\, x \in A$ şi $\forall\, m \ge n(\varepsilon)$ avem $|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, adică $f_n \overset{UC}{\to} f$.

Exemplu 6.1.3 *Şirul de funcţii* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\cos kx}{k(k+1)}$ *este uniform convergent. Conform criteriului lui Cauchy avem,* $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \right.\\
&\left. + \frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)} \right| \le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots +\\
&+ \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots +\\
&+ \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

$\forall\, n \ge n(\varepsilon) = \left[\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1$, *deci şirul* (f_n) *este uniform convergent.*

Teorema 6.1.3 *Criteriul majorării*

Fie (f_n) un şir de funcţii reale definite pe A, o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ şi (a_n) un şir de numere pozitive convergent către zero. Dacă pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}$ şi $\forall\, x \in A$ are loc inegalitatea $|f_n(x) - f(x)| \le a_n$, atunci $f_n \stackrel{UC}{\to} f$.

Demonstraţie: Cum $a_n \to 0 \Rightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \ge n(\varepsilon)$ avem $a_n < \varepsilon$, care împreună cu relaţia din enunţ ne dă că $\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \ge n(\varepsilon)$ şi $\forall\, x \in A\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, adică $f_n \stackrel{UC}{\to} f$.

Exemplu 6.1.4 *Şirul de funcţii $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ f_n(x) = \frac{1}{n}\, arctgx^n$ converge uniform pe $\mathbb{R}$ către funcţia $f(x) = 0$. Într-adevăr $|f_n(x)| = \frac{1}{n}|\, arctgx^n| < \frac{\pi}{2n} \to 0$. Aşadar, conform teoremei 6.1.3, rezultă că $f_n \stackrel{UC}{\to} 0$ pe $\mathbb{R}$.*

6.2 Proprietăţi ale şirurilor de funcţii

O problemă importantă care apare la şirurile de funcţii este următoarea: în ce măsură unele proprietăţi pe care şirul de funcţii le are (de exemplu continuitatea, derivabilitatea, integrabilitatea etc.) sunt transmise funcţiei limită? Rolul primordial pentru rezolvarea acestei probleme îl are proprietatea de convergenţă uniformă a şirurilor de funcţii.

Teorema 6.2.1 *Transferul de continuitate*

Fie A o mulţime nevidă şi (f_n) un şir de funcţii reale definite pe A. Dacă funcţiile f_n sunt continue în punctul $a \in A$, iar şirul de funcţii este uniform convergent pe A, atunci şi funcţia limită este continuă în punctul a.

Demonstraţie: Considerăm $f : A \to \mathbb{R}$ funcţia limită. Arătăm că dacă $x_n \to a$ atunci $f(x_n) \to f(a)$.

Fie $\varepsilon > 0$. Cum $f_n \stackrel{UC}{\to} f \Rightarrow \ \exists\, N = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, m \ge N\ \ |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. În particular avem $|f_N(x_n) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{3}$ şi $|f_N(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Deoarece funcţia f_N este continuă în a rezultă că $f_N(x_n) \to f_N(a)$, deci există $n'(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \ge n'(\varepsilon)$ $|f_N(x_n) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Avem pentru orice $n \ge n'(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
|f(x_n) - f(a)| &= |f(x_n) - f_N(x_n) + f_N(x_n) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)| \le \\
&\le |f_N(x_n) - f(x_n)| + |f_N(x_n) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \to f(a),
\end{aligned}$$

adică funcţia f este continuă în punctul a.

Exemplu 6.2.1 *Funcţia limită f a şirului de funcţii (f_n) de la exemplul 6.1.3 este o funcţie continuă, deoarece funcţiile f_n sunt continue, iar şirul este uniform convergent.*

Teorema 6.2.2 *Dacă X este un spaţiu metric compact, atunci spaţiul $\mathcal{C}^0(X)$ al funcţiilor reale continue definite pe X (cu operaţiile obişnuite) este un spaţiu Banach, relativ la norma sup.*

Demonstraţie: Deoarece X este spaţiu metric compact, atunci rezultă că $C^0(X) \subset \mathcal{M}(X)$. Fie (f_n) un şir fundamental din $C^0(X)$. Atunci (f_n) este un şir fundamental în $\mathcal{M}(X)$. Cum $\mathcal{M}(X)$ este spaţiu metric complet relativ la norma sup, există o funcţie $f \in \mathcal{M}(X)$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, ceea ce este echivalent din teorema 6.1.1 cu faptul că $f_n \stackrel{UC}{\to} f$. Funcţiile f_n fiind continue pe X rezultă, conform teoremei 6.2.1, că f este continuă pe X, deci $f_n \to f$ în $C^0(X)$ relativ la norma sup, adică $C^0(X)$ este un spaţiu complet.

Teorema 6.2.3 *Transferul de integrabilitate sau teorema de trecere la limită sub semnul integralei*

Dacă (f_n) *este un şir de funcţii în* $C^0([a,b])$ *astfel ca* $f_n \stackrel{UC}{\to} f$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

DEMONSTRAŢIE: Notăm $I_n = \displaystyle\int_a^b f_n(x)dx$ şi $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ şi arătăm că $I_n \to I$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq |I_n - I| = \left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_a^b \|f_n - f\|dx = \|f_n - f\|(b-a). \end{aligned}$$

Din ipoteză avem că $f_n \stackrel{UC}{\to} f \Leftrightarrow f_n \to f$ în $\mathcal{M}([a,b])$ relativ la norma sup $\Leftrightarrow \|f_n - f\| \to 0$ de unde avem că $|I_n - I| \to 0 \Rightarrow I_n - I \to 0 \Rightarrow I_n \to I$.

Observaţia 6.2.1 *Teorema 6.2.3 este adevărată în condiţii mai generale şi anume, dacă înlocuim ipoteza de continuitate a funcţiilor* f_n *cu ipoteza de integrabilitate.*

Exemplu 6.2.2 *Şirul de funcţii* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = n \times e^{-nx^2}$ *este convergent, dar* $\lim_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx$. *Într-adevăr,* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, *deci* $f(x) = 0, \forall\, x \in [0,1]$;

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2}dx = \left(-\frac{e^{nx^2}}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-n} \to \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Cele două limite diferă datorită faptului că şirul nu este uniform convergent.

Acest exemplu ne arată necesitatea condiţiilor teoremei 6.2.3.

Teorema 6.2.4 *Transfer de derivabilitate*

Fie (f_n) *un şir de funcţii în* $C^1([a,b])$ *şi funcţiile* $f, g \in \mathcal{M}([a,b])$. *Dacă* $f_n \to f$ *şi* $f_n' \stackrel{UC}{\to} g$, *atunci* $f \in C^1([a,b])$, $f' = g$ *şi* $f_n \stackrel{UC}{\to} f$.

DEMONSTRAŢIE: Fie $x \in [a,b]$ un punct arbitrar. Avem conform formulei Leibnitz-Newton că $\displaystyle\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a), \ \forall\, n \geq 1.$. Trecând la limită obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a).$$

Pe de altă parte, deoarece $f_n' \stackrel{UC}{\to} g$ din teorema 6.2.3 avem

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt = \int_a^x g(t)dt = G(x) - G(a),$$

unde $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ este primitivă a funcţiei g, deci $G'(x) = g(x), \ \forall\, x \in [a,b]$.

$G(x) - G(a) = f(x) - f(a) \Rightarrow G'(x) = f'(x),\ \ \forall\, x \in [a,b]$, adică $g = f'$ şi $f'_n \overset{UC}{\to} f'$.

Fie $\varepsilon > 0$, şi $x_0 \in [a,b]$. Atunci din faptul că $f_n \to f$ şi $f'_n \overset{UC}{\to} f'$ rezultă că $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n,m \geq n(\varepsilon)$ să avem $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ şi $|f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ \ \forall\, x \in [a,b]$. Atunci:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) + f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \\ &\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \\ &\leq |x - x_0||f'_n(c) - f'_m(c)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|, \end{aligned}$$

unde c este cuprins între x_0 şi x (am aplicat teorema creşterilor finite funcţiei $f_n(x) - f_m(x)$ pe intervalul închis, având extremităţile în punctele x_0 şi x). Deci

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |x - x_0||f'_n(c) - f'_m(c)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0) < (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$\forall\ n,m \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\ x \in [a,b]$. Conform criteriului general de convergenţă, rezultă că şirul de funcţii (f_n) converge uniform pe $[a,b]$ către funcţia f.

Observaţia 6.2.2 *Intervalul $[a,b]$ poate fi înlocuit în enunţul teoremei 6.2.4 cu orice interval mărginit.*

Exemplu 6.2.3 *Deşi şirul de funcţii de la exemplu 6.1.4 converge uniform pe $\mathbb{R}$, $f'(1) \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(1)$. Funcţia limită este $f(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$. Pe de altă parte $f'_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{1 + x^{2n}}$, $f'_n(1) = \dfrac{1}{2}$, prin urmare, $\lim_{n\to\infty} f'_n(1) = \dfrac{1}{2}$. Cele două limite diferă datorită faptului că şirul derivatelor nu converge uniform către $\dfrac{1}{2}$ pe $\mathbb{R}$.*

Teorema 6.2.5 *Limita g a unui şir uniform convergent (g_n) de funcţii derivate pe un interval I este o funcţie derivată.*

Demonstraţie: Presupunem că I este mărginit şi fie $x_0 \in I$ şi f_n o primitivă a funcţiei $g_n, \forall\ n \in \mathbb{N}, f'_n = g_n$. Putem alege primitivele f_n astfel încât $f_n(x_0) = 0$. Şirul $(f_n(x_0))$ este convergent şi derivatele $f'_n = g_n \overset{UC}{\to} g$. Atunci, conform teoremei 6.2.4, rezultă că $f_n \overset{UC}{\to} f$, funcţia f este derivabilă şi $f' = g$ pe I. Presupunem că intervalul I este nemărginit. Putem atunci construi un şir crescător (I_n) de intervale mărginite astfel încât $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots \subset I$ şi $\bigcup_{n\geq 1} I_n = I$.

Fie $x_0 \in I_1$; atunci $x_0 \in I_n, \forall\ n \geq 1$. Pe fiecare interval mărginit I_n, funcţia g este derivata unei funcţii $f_n : I \to \mathbb{R}$. Putem alege $f_n(x_0) = 0$. Dacă $x \in I_n$ şi $x \in I_m$, $n < m$, atunci $I_n \subset I_m$ şi cum funcţiile f_n şi f_m au pe I_n aceeaşi derivată g rezultă că $f_n(x) - f_m(x) =$const. Dar $f_n(x_0) = f_m(x_0) = 0$, deci $f_n(x) = f_m(x), \forall\, x \in I_n$.

Definim funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ prin $f(x) = f_n(x), \forall\ x \in I_n$. Conform celor arătate mai sus $f(x)$ este independentă de intervalul ales. Arătăm că funcţia f este derivabilă pe I şi $f' = g$. Pentru aceasta fie $x_0 \in I$; există $I_n, x_0 \in I_n$ deci, $f(x_0) = f_n(x_0)$ şi, cum f_n este derivabilă în punctul x_0, $f'_n(x_0) = g(x_0)$. Prin urmare, rezultă funcţia f derivabilă în x_0, şi $f'(x_0) = f'_n(x_0) = g(x_0)$. Cum punctul x_0 a fost ales arbitrar în I, rezultă că f este derivabilă pe I şi $f' = g$.

6.3 Serii de funcţii

În acest paragraf vom studia serii ale căror termeni sunt funcţii de o variabilă reală.

Definiţia 6.3.1 *Fie $A \neq \emptyset$ o mulţime şi (f_n) un şir de funcţii din spaţiul $F(A,\mathbb{R})$ al funcţiilor reale definite pe mulţimea A. Perechea de şiruri $((f_n),(s_n))$, unde $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, se numeşte serie de funcţii de termen general f_n şi se notează $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sau $\sum_{n\geq 1} f_n$. Şirul (s_n) definit mai sus se numeşte şirul sumelor parţiale al seriei $\sum_{n\geq 1} f_n$.*

Observaţia 6.3.1

1.
$$\begin{aligned} s_1 &= f_1 \\ s_2 &= f_1 + f_2 \\ &\vdots \\ s_n &= f_1 + f_2 + \cdots + f_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

2. O serie de funcţii $\sum_{n\geq 1} f_n$ este bine determinată de şirul sumelor parţiale. Astfel studiul seriei $\sum_{n\geq 1} f_n$ se reduce la studiul şirului (s_n).

Exemplu 6.3.1 *1. $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots$ este o serie de funcţii cu termenul genral x^n, $n \geq 0$.*

2. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ este o serie de funcţii cu termenul general $\frac{x^n}{n!}, n \geq 0$.

Pentru orice $x \in A$ seria $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ este o serie de numere alcătuită din valorile şirului (f_n) în punctul $x \in A$. Această serie poate fi convergentă sau divergentă. Definim astfel mulţimea punctelor $x \in A$ pentru care seria $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ este convergentă, adică $A_c = \{x \in A \mid$ seria $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ este convergentă$\}$ şi care se numeşte mulţimea de convergenţă a seriei $\sum_{n\geq 1} f_n$.

Seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este convergentă în punctul $x \in A$ dacă şirul de funcţii (s_n) al sumelor parţiale asociat seriei este convergent în punctul x.

Definiţia 6.3.2 *Fie A o mulţime nevidă, şirul de funcţii (f_n) din $F(A,\mathbb{R})$ şi (s_n) şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n\geq 1} f_n$. Seria de funcţii $\sum_{n\geq 1} f_n$ este convergentă (sau punctual convergentă) pe mulţimea A dacă şirul (s_n) este convergent pe A. În acest caz, $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \forall\, x \in A$ se numeşte suma seriei şi se notează $\sum_{n\geq 1} f_n(x) = f(x)$.*

Seria de funcţii $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă (sau converge uniform) pe mulţimea A către funcţia f dacă şirul (s_n) este uniform convergent pe A către f.

Observaţia 6.3.2

1. *Seria de funcţii $\sum_{n\geq 1} f_n$ este convergentă pe mulţimea A către f dacă $\forall\, \varepsilon > 0$ şi pentru orice $x \in A$ există un număr $n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \geq n(\varepsilon, x)$ să avem $|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sau*
$$|f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
2. *Seria de funcţii $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe mulţimea A către funcţia f dacă $\forall\, \varepsilon > 0$ există un număr $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\, x \in A$ să avem $|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sau*
$$|f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
3. *Din definiţia 6.3.2 rezultă că numărul $n(\varepsilon)$ nu depinde de x în cazul convergenţei uniforme, adică este acelaşi pentru orice $x \in A$.*

4. Noţiunea de convergenţă uniformă a fost introdusă de Karl Weierstrass (1815-1897).

Teorema 6.3.1 *Orice serie de funcţii $\sum_{n\geq 1} f_n$ uniform convergentă este punctual convergentă.*

DEMONSTRAŢIE: În definiţia punctual convergenţei se ia $n(\varepsilon, x) = n(\varepsilon)$, $\forall\, x \in A$.

6.4 Criterii de convergenţă uniformă pentru serii de funcţii

Teorema 6.4.1 *Criteriul general de convegenţă uniformă Cauchy*

O serie de funcţii $\sum_{n\geq 1} f_n$, unde $f_n \in F(A, \mathbb{R})$, $\forall\, n \geq 1$, este uniform convergentă pe A, dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq n(\varepsilon)$, $\forall\, p \geq 1$ şi $\forall\, x \in A$ avem:

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

DEMONSTRAŢIE: Fie (s_n) şirul sumelor parţiale asociat seriei. Pentru orice $p \geq 1$ avem $s_{n+p} - s_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots + f_{n+p}$. Seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe A dacă şi numai dacă şirul (s_n) este uniform convergent pe $A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$, $\forall\, p \geq 1$ şi $\forall\, x \in A$ să avem

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Teorema 6.4.2 *Criteriul majorării*

Fie $\sum_{n\geq 1} f_n$, $\sum_{n\geq 1} \varphi_n$ două serii de funcţii, unde $f_n, \varphi_n \in F(A, \mathbb{R})$, $\forall\, n \geq 1$. Dacă $|f_n(x)| \leq \varphi_n(x)$, $\forall\, n \geq 1$ şi $\forall\, x \in A$ şi dacă seria $\sum_{n\geq 1} \varphi_n$ este uniform convergentă pe A, atunci seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe A.

DEMONSTRAŢIE: Fie $\varepsilon > 0$. Cum seria $\sum_{n\geq 1} \varphi_n$ este uniform convergentă pe A, rezultă din teorema 6.4.1, că $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$, $\forall\, p \geq 1$ şi $\forall\, x \in A$

$$\varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \cdots + \varphi_{n+p}(x) < \varepsilon.$$

Atunci $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$, $\forall\, p \geq 1$ şi $\forall\, x \in A$ avem

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \ldots \varphi_{n+p}(x) < \varepsilon.$$

şi, conform teoremei 6.4.1, rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe A.

Din această teoremă rezultă un corolar (Weierstrass) foarte des utilizat în stabilirea convergenţei uniforme a unor serii de funcţii.

Corolarul 6.4.1 *Weierstrass*

Fie $\sum_{n\geq 1} f_n$ o serie de funcţii, $f_n \in F(A, \mathbb{R})$, $\forall\, n \geq 1$ şi $\sum_{n\geq 1} a_n$ o serie convergentă cu termeni pozitivi. Dacă $\forall\, n \geq 1$ şi $\forall\, x \in A$ avem $|f_n(x)| \leq a_n$, atunci seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe A.

DEMONSTRAŢIE: În teorema 6.4.2 se ia $\varphi_n(x) = a_n$, $\forall\, x \in A$. Seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ fiind convergentă $\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\, p \geq 1$ avem $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$. Atunci $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$, $\forall\, p \geq 1$ şi $\forall\, x \in A$ obţinem $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$, de unde rezultă că seria de funcţii constante $\sum_{n\geq 1} a_n$ este uniform convergentă. Aplicând teorema 6.4.2 şirurilor (f_n) şi (a_n) rezultă cerinţa teoremei.

Exemplu 6.4.1 *1. Seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ *este uniform convergentă* $\forall\ x \in \mathbb{R}$. *Într-adevăr, deoarece* $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, *iar seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *este convergentă, atunci conform criteriului lui Weierstrass, seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ *este uniform convergentă.*

2. Seria $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2 + x^2}$ este uniform convergentă $\forall\ x \in [-1, 1]$. Avem $\left|\frac{x^n}{n^2 + x^2}\right| < \frac{1}{n^2}$, $\forall\ x \in [-1, 1]$ şi aplicăm criteriul lui Weierstrass.

6.5 Proprietăţi ale seriilor de funcţii

Proprietăţile seriilor de funcţii uniform convergente se obţin din proprietăţile şirurilor de funcţii uniform convergente.

Teorema 6.5.1 *Transfer de continuitate*

Fie $\sum_{n\geq 1} f_n$ *o serie de funcţii uniform convergentă pe* A *către funcţia* f. *Dacă funcţiile* f_n *sunt continue în punctul* $a \in A$ *(respectiv pe* A*), atunci şi funcţia* f *(suma seriei) este continuă în punctul* a *(respectiv pe* A*).*

Demonstraţie: Şirul $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ al sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n\geq 1} f_n$ este o sumă de funcţii continue în punctul a (respectiv pe A), deci (s_n) este un şir de funcţii continue în a (respectiv pe A) uniform convergent către funcţia f. Atunci, conform teoremei 6.2.1, funcţia f este continuă în a (respectiv pe A).

Observaţia 6.5.1 *Din teorema 6.5.1 avem* $\lim_{x\to a} \sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(a)$

Teorema 6.5.2 *Transfer de integrabilitate sau teorema de integrare termen cu termen*

Fie $\sum_{n\geq 1} f_n$ *o serie de funcţii, uniform convergentă pe intervalul* $[a, b]$ *către funcţia* f. *Dacă funcţiile* f_n *sunt continue pe* $[a, b]$, *atunci seria integralelor* $\sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)dx$ *este convergentă, funcţia* f *este integrabilă şi* $\sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Demonstraţie: Din teorema 6.2.1, rezultă că funcţia $f \in C^0([a, b])$ şi

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)dx = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx\right] = \\
&= \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)dx
\end{aligned}$$

Teorema 6.5.2 are loc într-un cadru mai general (privind continuitatea funcţiilor f_n) şi anume:

Teorema 6.5.3 *Fie* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *o serie de funcţii, uniform convergentă pe intervalul* $[a, b]$ *către funcţia* f. *Dacă funcţiile* f_n *sunt integrabile pe* $[a, b]$, *atunci seria integralelor* $\sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)dx$ *este convergentă, funcţia* f *este integrabilă şi* $\sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

DEMONSTRAŢIE: Vezi [5] vol. II pag.409

Observaţia 6.5.2 *Condiţia ca şirul de funcţii (f_n) să fie uniform convergent este esenţială, dar nu necesară. Există şiruri de funcţii care nu sunt uniform convergente pe intervalul $[a,b]$, dar care se pot integra termen cu termen.*

Teorema 6.5.4 *Transfer de derivabilitate sau teorema de derivare termen cu termen*
Fie $\sum_{n\geq 1} f_n$ o serie de funcţii, unde $f_n \in C^1([a,b])$. Dacă seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe $[a,b]$ către o funcţie f, iar seria derivatelor $\sum_{n\geq 1} f_n'$ este uniform convergentă pe $[a,b]$ către o funcţie g, atunci funcţia f este derivabilă pe $[a,b]$ şi $f' = g$.

DEMONSTRAŢIE: Şirul (s_n) al sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergent pe $[a,b]$ către funcţia f. Pe de altă parte şirul sumelor parţiale asociat seriei derivatelor $\sum_{n\geq 1} f_n'$ este uniform convergent pe $[a,b]$ către funcţia g. Atunci, conform teoremei 6.2.4, funcţia f este derivabilă şi $f' = g$, adică $f'(x) = \sum_{n\geq 1} f_n'(x)$. Aşadar derivata sumei unei serii (în condiţiile teoremei) este egală cu suma seriei alcătuită din derivatele termenilor săi.

Teorema 6.5.4 are loc în condiţii mai puţin restrictive (privind uniform convergenţa seriei $\sum_{n\geq 1} f_n$).

Teorema 6.5.5 *Fie $\sum_{n\geq 1} f_n$ o serie de funcţii, unde $f_n \in C^1([a,b])$. Dacă seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este convergentă într-un punct $x_0 \in [a,b]$ iar seria derivatelor $\sum_{n\geq 1} f_n'$ este uniform convergentă pe $[a,b]$ către o funcţie g, atunci seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe $[a,b]$ către o funcţie f, funcţia f este derivabilă şi $f' = g$.*

DEMONSTRAŢIE: Vezi [5] vol. II pag.411

Observaţia 6.5.3 *Condiţia ca seria de funcţii $\sum_{n\geq 1} f_n'$ să fie uniform convergentă este esenţială, dar nu necesară.*

Teorema 6.5.6 *Suma unei serii uniform convergente de funcţii derivate pe un interval oarecare I este o funcţie derivată.*

DEMONSTRAŢIE: Şirul (s_n) al sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funcţii derivate pe un interval I este un şir uniform convergent de funcţii derivate pe I. Conform teoremei 6.2.5 limita s a şirului (s_n) este o funcţie derivată.

Operaţii cu serii de funcţii

Teorema 6.5.7 *Fie seriile de funcţii $\sum_{n\geq 1} f_n$ şi $\sum_{n\geq 1} g_n$ având mulţimile de convergenţă A_{c_1} respectiv A_{c_2} şi sumele f respectiv g. Atunci:*
1. *Seria $\sum_{n\geq 1}(f_n + g_n)$ este convergentă pe mulţimea $A_{c_1} \cap A_{c_2}$ şi are suma $f+g$.*
2. *Seria $\sum_{n\geq 1} \alpha f_n$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este convergentă pe mulţimea A_{c_1} şi are suma αf.*

DEMONSTRAŢIE: 1. Fie $x \in A_c$, unde A_c este mulţimea de convergenţă a seriei $\sum_{n\geq 1}(f_n+g_n)$. Seria de numere $\sum_{n\geq 1}(f_n(x)+g_n(x))$ este o serie convergentă $\Leftrightarrow$ seriile $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ şi $\sum_{n\geq 1} g_n(x)$ sunt convergente $\Leftrightarrow x \in A_{c_1} \cap A_{c_2}$.

Dacă $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ şi $t_n = g_1 + g_2 + \cdots + g_n$ atunci $s_n + t_n = f_1 + g_1 + f_2 + g_2 + \cdots + f_n + g_n \to f + g$, deci $f+g$ este suma seriei $\sum_{n\geq 1}(f_n + g_n)$.

2. Seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este convergentă pe mulţimea A_{c_1} şi are suma $f \Leftrightarrow s_n = f_1+f_2+\cdots+f_n \to f$ pe $A_{c_1} \Leftrightarrow \alpha s_n = \alpha f_1 + \alpha f_2 + \cdots + \alpha f_n \to \alpha f$ pe $A_{c_1} \Leftrightarrow$ mulţimea de convergenţă a seriei $\sum_{n\geq 1} \alpha_n f_n$ este A_{c_1}, iar suma este αf.

6.6 Serii de puteri

Seriile de puteri sunt cazuri particulare de serii de funcţii $\sum_{n\geq 0} f_n$ în care funcţiile $f_n(x)$ sunt de forma $a_n x^n$ sau $a_n(x-a)^n$, $x \in \mathbb{R}$. Deci o serie de puteri este de forma $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sau $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$. Caracteristic seriilor de puteri este faptul că sumele parţiale sunt funcţii polinomiale, care sunt cele mai simple funcţii, deci uşor de studiat. Cu ajutorul seriilor de puteri putem introduce funcţii elementare ca funcţii trigonometrice, funcţii exponenţiale, etc.

În continuare vom studia seriile de puteri de forma $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, deoarece cele de forma $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ se reduc la precedentele prin translaţia $y = x - a$.

Mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri este alcătuită din cel puţin un punct, şi anume $x = 0$. Pentru $x = 0$ suma unei serii de puteri este a_0. Se poate ca pentru unele serii acest punct să fie singurul punct de convergenţă, iar alte serii să fie convergente pe $\mathbb{R}$.

În cele ce urmează vom studia mulţimea de convergenţă a seriilor de puteri.

Teorema 6.6.1 *Teorema I a lui Abel*

Pentru orice serie de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ există un număr R, $0 \leq R \leq +\infty$ astfel încât:

1. Seria este absolut convergentă pe intervalul $(-R, R)$.

2. Seria este divergentă pentru orice x, cu $|x| > R$.

Pentru a demonstra această teoremă vom arăta următoarea lemă.

Lema 6.6.1 *Lema lui Abel*

a) Dacă o serie de puteri converge într-un punct $x_0 \neq 0$, atunci ea este absolut convergentă în orice punct x, cu $|x| < |x_0|$.

b) Dacă o serie de puteri este divergentă într-un punct $x_0 \neq 0$, atunci ea este divergentă în orice punct x, cu $|x| > |x_0|$.

Demonstraţie. a) Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri şi $x_0 \neq 0$ un punct de convergenţă al seriei. Atunci, deoarece $a_n x_0^n \to 0$, rezultă că şirul $(a_n x_0^n)$ este mărginit, deci $\exists\ M > 0$ astfel încât $|a_n x_0^n| < M$, $\forall\ n \geq 0$. Dacă x este astfel încât $|x| < |x_0|$, atunci $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$. Cum $|x| < |x_0|$, $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, iar seria $\sum_{n\geq 0} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ este convergentă şi, aplicând teorema 5.6.2, rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ este convergentă în x, adică seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este absolut convergentă în x, cu $|x| < |x_0|$.

b) Fie $x_0 \neq 0$ punct de divergenţă al seriei $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ şi punctul x astfel ca $|x| > |x_0|$. Dacă punctul x ar fi punct de convergenţă, atunci din a) am avea x_0 punct de convergenţă, ceea ce este absurd.

Să demonstrăm în continuare teorema I a lui Abel. Notăm cu $M_c = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este convergentă$\}$ mulţimea de convergenţă a seriei de puteri. $M_c \neq \emptyset$ (deoarece $0 \in M_c$) şi $R = \sup M_c$. Evident $R \geq 0$ şi distingem trei cazuri: i) dacă $R = 0$, ii) dacă $R = \infty$ şi iii) dacă $R > 0$.

i) Dacă $R = 0$, atunci $x = 0$ este singurul punct de convergenţă, de unde rezultă că au loc 1) şi 2).

ii) Dacă $R = \infty$, atunci 2) nu mai are sens. Rezultă că există puncte $x_0 > 0$ oricât de mari pentru care seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este convergentă. Dacă x este astfel încât $|x| < x_0$, atunci din lema lui Abel a) obţinem că x este punct de absolut convergenţă, adică seria de puteri este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$.

iii) Dacă $0 < R < \infty$ fie x un punct astfel încât $|x| < R$. Rezultă din definiţia marginii superioare exacte că există un punct $x_0 \in M_c$ astfel încât $|x| < x_0 < R$, adică x_0 este un punct de convergenţă al seriei de puteri. Din lema I a lui Abel punctul a), rezultă că x este un punct de absolut convergenţă al seriei de puteri.

Dacă $|x| > R$, atunci există un punct x astfel încât $R < x_1 < |x|$. Dacă seria de puteri ar fi convergentă în punctul x, atunci, conform teoremei lui Abel a), am avea că x_1 este punct de convergenţă al seriei date, adică $x_1 \in M_c$ şi $x_1 > R$, ceea ce ar contrazice alegerea lui R şi anume $R = \sup M_c$, deci seria nu este convergentă în punctul x şi astfel teorema este demonstrată.

Definiţia 6.6.1 *Numărul $0 \leq R \leq +\infty$ definit în teorema I a lui Abel se numeşte raza de convergenţă a seriei $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Intervalul $(-R, R)$ se numeşte intervalul de convergenţă al seriei $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.*

Observaţia 6.6.1 *Teorema I a lui Abel nu spune nimic despre comportarea seriei de puteri la capetele intervalului de convergenţă şi asta deoarece comportarea diferă de la o serie la alta. De exemplu, seria $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ are raza de convergenţă $R = 1$, dar este convergentă pentru $x = -1$ şi divergentă pentru $x = 1$. Seria $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ are raza de convergenţă $R = 1$, dar este convergentă la ambele capete ale intervalului de convergenţă.*

Dacă într-unul din punctele $-R$ sau R seria este absolut convergentă, atunci seria este absolut convergentă şi în celălalt punct. Într-adevăr, seria modulelor seriilor $\sum_{n\geq 0} a_n(-R)^n$, respectiv $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ este aceeaşi. Prin urmare, dacă una dintre serii este absolut convergentă la fel este şi cealaltă serie.

Calculul razei de convergenţă

Teorema I a lui Abel este doar o teoremă de existenţă a razei de convergenţă, dar nu şi de calcul. Raza de convergenţă se determină folosind criteriile de convergenţă de la seriile cu termeni pozitivi.

Teorema 6.6.2 *Teorema Cauchy-Hadamard (1865 - 1963)*

Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri şi R raza de convergenţă a seriei. Dacă $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \omega$ atunci:

$$R = \begin{cases} \infty & , \text{ dacă } \omega = 0 \\ \frac{1}{\omega} & , \text{ dacă } 0 < \omega < \infty \\ 0 & , \text{ dacă } \omega = \infty \end{cases}$$

Demonstraţie: Fie x_0 un punct oarecare. Aplicăm corolarul 5.6.2 seriei numerice $\sum_{n\geq 0} |a_n||x_0|^n$. Avem $\sqrt[n]{|a_n||x_0|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}|x_0|$, deci

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x_0|^n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x_0| = \omega|x_0|.$$

Dacă $\omega = 0 \Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x_0|^n} = 0 < 1$ aşadar seria $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ este absolut convergentă $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$, adică $R = \infty$. Dacă $\omega = \infty \Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x_0|^n} = \infty > 1$, prin urmare seria $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ este divergentă $\forall\ x_0 \neq 0$, adică $R = 0$. Dacă $0 < \omega < \infty$, atunci, dacă $\omega|x_0| < 1$, adică $|x_0| < \frac{1}{\omega}$, seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este absolut convergentă în $x_0 \Rightarrow |x_0| < R \Rightarrow R \leq \frac{1}{\omega}$. Dacă $R < \frac{1}{\omega}$ există un punct x_1 astfel încât $R < |x_1| < \frac{1}{\omega}$. Din $R < |x_1| \Rightarrow x_1$ este punct de divergenţă al seriei, iar din $|x_1| < \frac{1}{\omega} \Rightarrow \omega|x_1| < 1 \Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x_1| = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x_1|^n} < 1 \Rightarrow x_1$ este punct de absolut convergenţă al seriei date, ceea ce este absurd.

Dacă $R > \frac{1}{\omega}$ există un punct x_2 astfel încât $R > |x_2| > \frac{1}{\omega} \Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x_2|^n} > 1 \Rightarrow x_2$ este punct de divergenţă. Prin urmare $R = \frac{1}{\omega}$.

Corolarul 6.6.1 *Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri şi R raza sa de convergenţă. Dacă $\omega_1 = \underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ şi $\omega_2 = \overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, atunci $\frac{1}{\omega_2} \leq R \leq \frac{1}{\omega_1}$. Dacă există limita $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \omega$, atunci*

$$R = \begin{cases} \infty & , \ \textit{dacă} \quad \omega = 0 \\ \frac{1}{\omega} & , \ \textit{dacă} \quad 0 < \omega < \infty \\ 0 & , \ \textit{dacă} \quad \omega = \infty \end{cases}$$

Demonstraţie: Într-adevăr,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

deci $\frac{1}{\omega_2} \leq R \leq \frac{1}{\omega_1}$.

Exemplu 6.6.1 *1. Seria de puteri $\sum_{n\geq 0} \frac{nx^n}{2^n}$ are raza de convergenţă $R = 2$. Într-adevăr $a_n = \frac{n}{2^n}$, iar*

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2.$$

2. Seria de puteri $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ ara raza de convergenţă $R = \infty$. Avem $a_n = \frac{1}{n!}$, iar

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = \infty.$$

3. Seria de puteri $\sum_{n\geq 0} n!x^n$ are raza de convergenţă $R = 0$. Avem $a_n = n$, iar

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} n + 1 = \infty \Rightarrow R = 0.$$

4. Fie seria de puteri $\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n} x^n$. Avem $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n}$,

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Deci $R = \frac{1}{e}$, prin urmare seria este absolut convergentă pe $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. Să studiem comportarea seriei la capetele intervalului.

Pentru $x = \frac{1}{e}$ avem $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n} \frac{1}{e^n}$. Cum şirul $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ converge monoton descrescător la e avem

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n} > e^n \Rightarrow a_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n}}{e^n} > 1\,,$$

aşadar $a_n \not\to 0$, *de unde rezultă că seria este divergentă în punctul* $x = \dfrac{1}{e}$.

Pentru $x = -\dfrac{1}{e}$ *avem* $|a_n| = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2+n} \dfrac{1}{e^n} > 1 \Rightarrow a_n \not\to 0$, *prin urmare şi în acest punct seria este divergentă;* $M_c = \left(-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$.

5. Fie seria $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$. *Avem* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, $\omega = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow$ *seria este absolut convergentă pe intervalul* $(-1, 1)$.

Pentru $x = -1$ *obţinem seria* $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1} \dfrac{1}{2n+1}$ *care, conform criteriului lui Leibniz, este o serie convergentă, iar pentru* $x = 1$ *obţinem seria* $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{1}{2n+1}$, *care din aceleaşi considerente este tot o serie convergentă. Aşadar mulţimea de convergenţă este* $M_c = [-1, 1]$.

6.7 Proprietăţi ale seriilor de puteri

Teorema 6.7.1 *Orice serie de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *este uniform convergentă pe orice interval de forma* $[-r, r]$, *unde* $0 < r < R$, *iar* R *este raza de convergenţă a seriei.*

Demonstraţie: Deoarece $0 < r < R$ seria $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ este absolut convergentă (conform teoremei I a lui Abel). Pentru orice punct x cu $|x| \leq r$ avem $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ şi, conform criteriului de convergenţă uniformă al lui Weierstrass, rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este uniform convergentă pentru orice $x \in [-r, r]$.

Corolarul 6.7.1 *Suma* s *a unei serii de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *este o funcţie continuă pe intervalul de convergenţă.*

Demonstraţie: Pentru orice $0 < r < R$ din teorema 6.7.1 seria de puteri este uniform convergentă pe $[-r, r]$ şi, cum toţi termenii seriei sunt funcţii continue atunci, conform teoremei 6.5.1, rezultă că s este o funcţie continuă pe $[-r, r]$, adică s este continuă pe $(-R, R)$.

Corolarul 6.7.2 *Suma* s *a unei serii de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *este uniform continuă pe orice interval închis conţinut în intervalul de convergenţă.*

Demonstraţie: Fie $[a, b] \subset (-R, R)$ un interval închis conţinut în intervalul de convergenţă. Pe intervalul $[a, b]$ funcţia s este continuă conform corolarului 6.7.1; intervalul fiind un compact rezultă din teorema 3.7.1 că funcţia s este uniform continuă pe $[a, b]$.

Observaţia 6.7.1 *Corolarul 6.7.1 nu spune nimic despre continuitatea funcţiei sumă* s *a unei serii de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *în punctele* $x = -R$ *sau* $x = R$.

Teorema 6.7.2 *Teorema a II-a a lui Abel*

Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *o serie de puteri şi* R *raza sa de convergenţă. Dacă seria este convergentă în punctul* $x = R$ *(sau în punctul* $x = -R$*), atunci suma* s *a seriei este o funcţie continuă în acesl punct.*

Demonstraţie. Presupunem că seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este convergentă în punctul $x = R$, adică seria numerică $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ este convergentă. Vom arăta că în această condiţie seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este uniform convergentă pe intervalul $[0, R]$.

Deoarece seria $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ este convergentă $\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\, p \geq 1$ avem $|a_{n+1} R^{n+1} + a_{n+2} R^{n+2} + \cdots + a_{n+p} R^{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Notăm $\sigma_p = s_{n+p} - s_n$, unde (s_n) este şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$; $|\sigma_p| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, p \geq 1$. Avem

$$\begin{aligned} a_{n+1}R^{n+1} &= s_{n+1} - s_n = \sigma_1 \\ a_{n+2}R^{n+2} &= (s_{n+2} - s_n) - (s_{n+1} - s_n) = \sigma_2 - \sigma_1 \\ &\vdots \\ a_{n+p}R^{n+p} &= (s_{n+p} - s_n) - (s_{n+p-1} - s_n) = \sigma_p - \sigma_{p-1}. \end{aligned}$$

Fie acum un punct $x \in [0, R]$ şi notăm $y = \frac{x}{R} \Rightarrow x = y\,R$ şi $0 \leq y \leq 1$. Pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$ avem $a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p} = a_{n+1}R^{n+1}y^{n+1} + a_{n+2}R^{n+2}y^{n+2} + \cdots + a_{n+p}R^{n+p}y^{n+p} = \sigma_1 y^{n+1} + (\sigma_2 - \sigma_1)y^{n+2} + \cdots + (\sigma_p - \sigma_{p-1})y^{n+p} = \sigma_1 y^{n+1}(1-y) + \sigma_2 y^{n+2}(1-y) + \cdots + \sigma_{p-1}y^{n+p-1}(1-y) + \sigma_p y^{n+p} = y^{n+1}(1-y)(\sigma_1 + \sigma_2 y + \cdots + \sigma_{p-1}y^{p-2}) + \sigma_p y^{n+p}$

$|a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p}| \leq |y^{n+1}(1-y)(\sigma_1 + \sigma_2 y + \cdots + \sigma_{p-1}y^{p-2}| + |\sigma_p y^{n+p}| = |y^{n+1}||1-y||\sigma_1 + \sigma_2 y + \cdots + \sigma_{p-1}y^{p-2}| + |\sigma_p||y^{n+p} < (1-y)\frac{\varepsilon}{2}(1 + y + \cdots + y^{p-2}) + \frac{\varepsilon}{2} = (1-y)\frac{\varepsilon}{2}\frac{1-y^{p-1}}{1-y} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}(1-y^{p-1}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Conform criteriului general de convergenţă pentru serii de funcţii, rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[0, R]$. Cum termenii seriei sunt funcţii continue din teorema 6.5.1, rezultă că suma s a seriei este o funcţie continuă pe $[0, R]$, în particular, ea este continuă în punctul $x = R$. Analog se demonstrează în cazul $x = -R$.

Observaţia 6.7.2 *Fie o serie de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ şi R raza de convergenţă a seriei. Dacă seria este convergentă în punctul $x = R$, atunci $s(R) = \lim_{x\to R} s(x)$.*

Exemplu 6.7.1 *Fie seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$. Această serie are raza de convergenţă $R = 1$, deci intervalul de convergenţă este $(-1, 1)$. În punctul $x = -1$ seria este divergentă fiind seria armonică cu semn schimbat, iar în punctul $x = 1$ seria este convergentă conform criteriului lui Leibniz (serie armonică alternată). Vom arăta ulterior că pentru $\forall\, x$ cu $|x| < 1$ $s(x) = \ln(1+x)$ este suma seriei. Atunci $s(1) = \lim_{x\to 1} s(x) = \lim_{x\to 1} \ln(1+x) = \ln 2$, adică suma seriei armonice alternate este* $\ln 2$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Derivarea seriilor de puteri

Fie seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Seria derivatelor este tot o serie de puteri obţinută prin derivarea termen cu termen şi anume $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$.

Teorema 6.7.3 *Seria derivatelor a unei serii de puteri are aceeaşi rază de convergenţă ca şi seria dată.*

DEMONSTRAŢIE:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)a_{n+1}}{n\,a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Teorema 6.7.4 *Sume unei serii de puteri este o funcţie derivabilă pe intervalul de convergenţă şi derivata ei este suma seriei derivatelor.*

Demonstraţie. Fie $|x_0| < R$ şi $0 < r < R$ astfel încât $|x_0| < r$. Pe intervalul $[-r, r]$ seria derivatelor este uniform convergentă către funcţia σ. Cum seria $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ este convergentă $\Rightarrow$ seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-r, r]$, suma s a ei este derivabilă pe $[-r, r]$ şi $s' = \sigma$, deci s este derivabilă în x_0 şi $s(x_0) = \sigma(x_0)$. Cum punctul x_0 a fost ales arbitrar din $(-R, R)$ rezultă că funcţia s este derivabilă pe $(-R, R)$ şi $s' = \sigma$.

Prin raţionament recurent se obţine:

Teorema 6.7.5 *Suma unei serii de puteri este derivabilă de orice ordin pe intervalul de convergenţă şi derivata de ordinul n, $s^{(n)}$, este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul n. Astfel, dacă se cunoaşte suma unei serii, se obţine prin derivare suma seriei derivatelor.*

Exemplu 6.7.2 *1. Să se calculeze suma seriei $t(x) = \sum_{n\geq 1} n\, x^{n-1}$ pe intervalul $(-1, 1)$. Observăm că termenul general al acestei serii provine din derivarea lui x^n. Cum suma seriei $\sum_{n\geq 0} x^n$ este $s(x) = \dfrac{1}{1-x}$, rezultă că $t(x) = s'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $\forall\, x \in (-1, 1)$.*

Integrarea seriilor de puteri

Teorema 6.7.6 *Orice serie de puteri poate fi integrată termen cu termen pe orice interval închis $[a, b] \subset (-R, R)$. Dacă $x \in (-R, R)$ şi s este suma seriei $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pe intervalul de convergenţă, atunci*

$$\int_0^x s(t)dt = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\ldots$$

sau

$$\int_0^x s(t)dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Demonstraţie: Pe intervalul $[a, b]$ suma s a seriei $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este o funcţie continuă. De asemenea pe acest interval seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este uniform convergentă şi funcţiile $a_n x^n$ sunt continue. Avem $\displaystyle\int_0^x a_n t^n dt = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, $\forall\, n \geq 0$. Din teorema 6.5.2 avem

$$\int_0^x s(t)dt = \sum_{n\geq 0} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Teorema 6.7.7 *Seriile $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ şi $\sum_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ au aceeaşi rază de convergenţă.*

Demonstraţie:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Exemplu 6.7.3 *1. Considerăm seria $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n}$ care are raza de convergenţă $R = 1$, deci este convergentă pe $(-1, 1)$. Aplicând teorema 6.7.6, suma seriei $s(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n}$ este $s(x) = \displaystyle\int_0^x \sigma(t)dt$, unde σ este suma seriei $\sum_{n\geq 0} x^n$. Cum $\sigma(t) = \dfrac{1}{1-t} \Rightarrow s(x) = -\ln(1-x)$, adică $\forall\, x \in (-1, 1)$*

$$-\ln(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \ldots.$$

2. Considerăm seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$. *Această serie are mulţimea de convergenţă* $M_c = (-1,1]$. *Din teorema 6.7.6 suma seriei* $s(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ *este* $s(x) = \int_0^x \sigma(t)dt$, *unde* σ *este suma seriei* $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$. *Avem* $\sigma(t) = \frac{1}{1+t} \Rightarrow s(x) = \ln(1+x)$, *adică*

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Suma seriei $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ *se putea obţine şi din punctul 1, dacă înlocuim* x *cu* $-x$ *şi înmulţim cu -1.*

3. Dacă în exemplul 1 înlocuim x *cu* $-x^2$ *obţinem*

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, x \in (-1,1).$$

Dacă integrăm termen cu termen obţinem

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,$$

adică

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in (-1,1)$$

4. Considerăm seria $\sum_{n\geq 1} n^2 x^n$ *şi vrem să-i calculăm suma ei pe intervalul de convergenţă* $(-1,1)$.

Ştim că $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\forall\, x \in (-1,1)$, *de unde prin derivare termen cu termen obţinem* $\sum_{n\geq 1} n\, x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. *Înmulţim această relaţie cu* x *şi iarăşi derivăm termen cu termen. Avem*

$$\sum_{n\geq 1} n\, x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Înmulţind cu x *ultima relaţie obţinem* $\sum_{n\geq 1} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, *adică suma seriei căutate.*

Operaţii cu serii de puteri

Teorema 6.7.8 *Dacă* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *şi* $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ *sunt două serii de puteri având razele de convergenţă* R_1, *respectiv* R_2, *atunci:*

1) Suma (diferenţa) celor două serii este tot o serie de puteri care are raza de convergenţă $R \geq \inf(R_1, R_2)$.

2) Raza de convergenţă a seriei $\alpha \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} \alpha a_n x^n$, *unde* $\alpha \in \mathbb{R}^*$, *este* R_1.

3) Produsul celor două serii de puteri este tot o serie de puteri care are raza de convergenţă $R \geq \inf(R_1, R_2)$.

Demonstraţie: 1) Dacă x este un punct astfel încât $|x| < R_1$ şi $|x| < R_2$, atunci seriile $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ şi $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ sunt absolut convergente, de unde rezultă că şi seria $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$ este absolut convergentă şi deci $R \geq \inf(R_1, R_2)$. Există cazuri când $R > \inf(R_1, R_2)$ şi anume dacă $R_1 < \infty$ şi $b_n = -a_n \Rightarrow R_2 = R_1$ şi $R = \infty$. Dacă s şi t sunt sumele celor două serii, atunci suma seriei $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$, $\sigma(x) = s(x) + t(x)$, $\forall\, x$ cu $|x| < R$.

2) $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha a_{n+1}}{\alpha a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \Rightarrow$ seria $\sum_{n\geq 0}\alpha a_n x^n$ are aceeaşi rază de convergenţă ca seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ şi are suma $\tau(x) = \alpha\, s(x)$, $\forall\, x \in (-R_1, R_1)$.

3) Seria produs a celor două serii este $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) x^n$ care este tot o serie de puteri. Dacă x este un punct astfel încât $|x| < R_1$ şi $|x| < R_2$, atunci seriile $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ şi $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ sunt absolut convergente. Din teorema lui Mertens rezultă că şi seria produs $\sum_{n\geq 0} c_n$ este absolut convergentă, deci $R \geq \inf(R_1, R_2)$. Dacă γ este suma seriei produs avem $\gamma(x) = s(x)t(x)$, $\forall\, |x| < R$.

Exemplu 6.7.4 *1. Să efectuăm produsul seriilor $\sum_{n\geq 0} x^n$ şi $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{3^n}$; $a_n = 1, b_n = \frac{1}{3^n}$, $\forall\, n \geq 0$. Coeficienţii seriei produs sunt*

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i+j=n}\frac{1}{3^j} = \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{3^j} = \frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right).$$

Razele de convergenţă ale seriilor date sunt $R_1 = 1$ respectiv $R_2 = 3$. Raza de convergenţă a seriei produs este $R \geq \min(1,3) = 1$, $R = 1$.

Observaţia 6.7.3 *Dacă seriile $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ şi $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ au razele de convergenţă diferite, de exemplu $R_1 < R_2$, atunci pentru orice x cu $R_1 < |x| < R_2$ seria sumă (la fel şi seria produs) a lor este divergentă, deoarece este suma dintre o serie divergentă şi una convergentă. Prin urmare raza de convergenţă R a seriei sumă (produs) este $R = \min(R_1, R_2)$.*

6.8 Seria Taylor. Dezvoltări în serii

Fie seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ având raza de convergenţă nenulă, $R \neq 0$ şi s suma ei pe intervalul $(-R, R)$. Aplicând în mod succesiv teorema de derivare termen cu termen pe $(-R, R)$, obţinem $s^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}$, $\forall\, |x| < R$ i $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Pentru $x = 0$ rezultă

$$s^{(k)}(0) = k!\, a_k \quad k \in \mathbb{N}, \tag{6.3}$$

adică $a_k = \dfrac{s^{(k)}(0)}{k!}$. Aşadar, coeficienţii unei serii de puteri cu raza de convergenţă $R \neq 0$ sunt determinaţi în mod unic de funcţia suma prin relaţiile (6.3), deci

$$s(x) = s(0) + \frac{s'(0)}{1!}x + \frac{s''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{s^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots, \quad \forall\, |x| < R.$$

Definiţia 6.8.1 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval, o funcţie indefinit derivabilă şi $x_0 \in I$. Perechii (f, x_0) i se poate asocia o serie de puteri centrată în x_0 şi anume $\sum_{n\geq 0}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ numită seria Taylor asociată funcţiei f în punctul x_0.*

Observaţia 6.8.1 *Toate proprietăţile seriilor de puteri se menţin şi în cazul seriei Taylor (deoarece este tot o serie de puteri).*

Problema care apare este dacă seria Taylor asociată unei funcţii indefinit derivabile într-un punct x_0 care aparţine domeniului funcţiei are şi alte puncte de convergenţă în afară de $x = x_0$, adică dacă are raza de convergenţă diferită de zero. De asemenea, ne interesează dacă pe tot intervalul de convergenţă suma seriei Taylor coincide cu funcţia dată f.

Fie funcţia $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in [-a, 0] \\ e^{\frac{1}{x}} & x \in (0, a] \end{cases}$. Funcţia f este indefinit derivabilă în punctul $x_0 = 0$ şi $f(0) = 0$, $\forall\, n \geq 0$. Ar rezulta că seria Taylor are toţi termenii nuli, deci suma funcţia nulă, dar care nu coincide cu funcţia f.

Totuşi în anumite condiţii raza de convergenţă a seriei Taylor este nenulă şi suma ei coincide cu funcţia f.

Definiţia 6.8.2 *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă. Spunem că funcţia are derivate de orice ordin egal mărginite dacă $\exists\, M > 0$ astfel ca $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $\forall\, x \in [a, b]$ şi $\forall\, n \geq 0$.*

Teorema 6.8.1 *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă, cu derivatele de orice ordin egal mărginite pe $[a, b]$. Atunci pentru orice punct $x_0 \in (a, b)$ seria Taylor asociată funcţiei f şi punctului x_0 este uniform convergentă pe $[a, b]$ având ca sumă funcţia f, adică*

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Demonstraţie: Fie (s_n) şirul sumelor parţiale asociat seriei Taylor, adică

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Scriem pentru funcţia f şi punctul $x_0 \in (a, b)$ formula lui Taylor cu rest Lagrange:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

$x \in [a, b]$, unde ξ este cuprins între x_0 şi x. Rezultă că

$$f(x) = s_n(x) + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ \forall\, x \in [a, b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) - s_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ \forall\, x \in [a, b].$$

Din ipoteză ştim că derivatele de orice ordin ale funcţiei f sunt egal mărginite pe $[a, b]$, adică $\exists\, M > 0$ astfel încât $\forall\, x \in [a, b]$ şi $\forall\, n \geq 0$ $|f^{(n)}(x)| \leq M$. Aşadar

$$\begin{aligned} |f(x) - s_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| = \frac{1}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\xi)||x - x_0|^{n+1} \leq \\ &\leq \frac{M}{(n+1)!}(b - a)^{n+1},\ \forall\, x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Seria $\sum_{n \geq 0} \dfrac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ este convergentă (criteriul raportului de la serii numerice), deoarece

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{M(b-a)^{n+2}}{(n+2)!}}{\dfrac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{b - a}{n + 2} = 0 < 1\,.$$

Această serie fiind convergentă, rezultă că termenul ei general tinde la zero, adică $\frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$. Deci $\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\ n \geq n(\varepsilon)\ \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} < \varepsilon \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall\ x \in [a,b]\,|\,s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, adică $s_n \overset{UC}{\to} f$ pe $[a,b]$, prin urmare seria Taylor asociată funcţiei f şi punctului x_0 este uniform convergentă pe $[a,b]$ şi are ca sumă funcţia f.

Definiţia 6.8.3 *Dacă în definiţia 6.8.1 înlocuim x_0 cu 0, iar f este o funcţie indefinit derivabilă în punctul $0 \in I$ obţinem seria Mac-Laurin şi anume* $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Exemple de dezvoltări în serii

1. Funcţii trigonometrice

a) $f : \mathbb{R} \to [-1,1]\ f(x) = \sin x;\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x$ şi se arată uşor, prin inducţie, că $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Cum $|f^{(n)}(x)| \leq 1,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, rezultă că această funcţie este suma seriei Mac-Laurin asociate, adică

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \forall\ x \in \mathbb{R}$$

b) $f : \mathbb{R} \to [-1,1]\ f(x) = \cos x;\ f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x,\ f^{(4)}(x) = \cos x$ şi se arată uşor, prin inducţie, că $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Cum $|f^{(n)}(x)| \leq 1,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, rezultă că această funcţia este suma seriei Mac-Laurin asociate, adică

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Dezvoltarea în serie pentru tgx se obţine prin împărţire $\frac{\sin x}{\cos x}$

2. Funcţii exponenţiale şi hiperbolice

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ f(x) = e^x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Cum pentru $\forall\ a \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in [-a,a]\ e^{-a} \leq f^{(n)}(x) \leq e^a$, unde $f^{(n)}(x) = e^x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ rezultă că e^x este suma seriei Mac-Laurin asociate, adică

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Înlocuind pe x cu $-x$ obţinem

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Pentru funcţiile $sh, ch : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ sh\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ şi $ch\, x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ avem

$$sh\, x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$$ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \forall\ x \in \mathbb{R}$$

3. Seria binomului generalizat

Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = (1+x)^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Aplicăm formula Mac-Laurin acestei funcţii

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \tag{6.4}$$

unde

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n+1-p} f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Avem $f^{(k)}(x) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)(1+x)^{\lambda-k}$ şi $f^{(k)}(0) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)$, $\forall\, k \geq 1$. Atunci (6.4) devine

$$f(x) = 1 + \frac{\lambda}{1!}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

unde $R_n(x) = (1-\theta)^{n+1-p}\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n)x^{n+1}(1+\theta x)^{\lambda-n-1}$.

Luând $p = 1$ obţinem

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{(1-\theta)^n}{n!}\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n)x^{n+1}(1+\theta x)^{\lambda-n-1}, \\ R_n(x) &= u_n(1-\theta)^n(1+\theta x)^{\lambda-n-1}, \end{aligned}$$

unde

$$u_n = \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n)}{n!}x^{n+1}.$$

Pentru $|x| < 1$, conform criteriului raportului D'Alambert, seria $\sum_{n\geq 0} u_n$ este absolut convergentă, deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\lambda-n+1}{n+1}\right||x| = |x| < 1.$$

Aşadar $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Fie

$$v_n = (1-\theta)^n(1+\theta x)^{\lambda-n-1} = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{\lambda-1}.$$

Deoarece $\left|\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right| < 1$, atunci când $|x| < 1$, obţinem $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

Prin urmare, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $|x| < 1$. Astfel, pentru $|x| < 1$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$, obţinem următoarea dezvoltare în serie Mac-Laurin, numită seria binomului generalizat:

$$(1+x)^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1!}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Seria numerică

$$1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + \cdots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!} + \cdots + \tag{6.5}$$

este absolut convergentă dacă $\lambda > 0$. Într-adevăr, conform criteriului Raabe-Duhamel avem:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{n+1}{\lambda-n}\right| - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-n+\lambda}{n-\lambda}\right) = \lambda + 1,$$

deci, dacă $\lambda > 0$, seria (6.5) este absolut convergentă. Obţinem că seria binomului generalizat este convergentă pentru $x = \pm 1$, dacă $\lambda > 0$.

Seria numerică (6.5) este convergentă pentru $\lambda > -1$. Seria (6.5) fiind alternată e suficient ca termenul $\left|\dfrac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1}{n!}\right|$ să tindă către zero.

Scriem termenul general sub forma

$$v_n = (-1)^n \left(1 - \frac{\lambda+1}{1}\right)\left(1 - \frac{\lambda+1}{2}\right)\dots\left(1 - \frac{\lambda+1}{n}\right).$$

Pentru $\lambda + 1 > 0$ rezultă $1 - \dfrac{\lambda+1}{k} < e^{-\frac{\lambda+1}{k}}$, de unde $|v_n| < e^{-(\lambda+1)(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})} \to 0$, deci $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

Seria binomului generalizat este convergentă pentru $x = 1$, dacă $\lambda > -1$.

Capitolul 7

Integrale generalizate

7.1 Integrale generalizate

Conceptul de integrală a fost definit pentru funcţii mărginite pe intervale (mulţimi) compacte. Extinzând acest concept, renunţând la cel puţin una dintre aceste condiţii, obţinem integralele improprii sau generalizate. Punem problema integrabilităţii unei funcţii nemărginite pe un interval nemărginit. Această problemă este un caz particular al unei probleme mai generale şi anume aceea a integrabilităţii unei funcţii pe un interval necompact în situaţia în care funcţia este integrabilă pe orice subinterval compact. Se disting pe dreapta reală opt tipuri de intervale necompacte: $(a, b], [a, b), (a, b), (-\infty, b], [a, \infty), (-\infty, b), (a, \infty)$ şi $(-\infty, \infty)$, unde $a, b \in \mathbf{R} \quad a < b$.

Definiţia 7.1.1 *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie. Funcţia f se numeşte local integrabilă dacă este integrabilă pe orice interval compact inclus în I.*

Definiţia 7.1.2 *Fie $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ o funcţie local integrabilă, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \bar{\mathbf{R}}$ $a < b$. Definim funcţia $F : [a, b) \to \mathbf{R}$ $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, $\forall\ x \in [a, b)$. Perechea (f, F) se numeşte integrala improprie sau integrala generalizată a funcţiei f pe intervalul $[a, b)$ şi se notează $\displaystyle\int_a^{b-a} f(x)dx$ sau $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ sau $\displaystyle\int_a^b fdx$.*

Dacă $\lim\limits_{x \to b} F(x) \in \mathbf{R}$ (există şi este finită) atunci spunem despre integrala improprie $\displaystyle\int_a^b fdx$ că este convergentă. În caz contrar vom spune că integrala improprie $\displaystyle\int_a^b fdx$ este divergentă.

Exemplu 7.1.1 *1. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Avem*

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} t\Big|_0^x = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} x\,,$$
$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} arctgx = \frac{\pi}{2}\,,$$

deci integrala $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2}$ este convergentă pe $[0, \infty)$.

2. Fie $f:[1,\infty)\to\mathbf{R}$ $f(x)=\frac{1}{x}$. *Avem*

$$F(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt=\ln\Big|_1^x=\ln x-\ln 1=\ln x,\qquad \lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty,$$

deci integrala $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ *este divergentă pe* $[1,\infty)$.

3. $f:[0,1)\to\mathbf{R}$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. *Avem*

$$F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\text{arcsin}t\Big|_0^x=\text{arcsin}x-\text{arcsin}0=\text{arcsin}x\,,$$

$$\lim_{x\nearrow 1}F(x)=\lim_{x\nearrow 1}\text{arcsin}x=\frac{\pi}{2}\,,$$

deci integrala $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *este convergentă pe* $[0,1)$.

Definiţia 7.1.3 *Fie* $f:(a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcţie local integrabilă,* $a\in\bar{\mathbf{R}}, b\in\mathbf{R}$, $a<b$. *Definim funcţia* $F(a,b]\to\mathbf{R}$ $F(x)=\int_x^b f(t)dt, \forall\, x\in[a,b]$. *Perechea* (f,F) *se numeşte integrala improprie a funcţiei* f *pe intervalul* $(a,b]$ *şi se notează* $\int_{a+0}^b f(x)dx$ *sau* $\int_a^b f(x)dx$ *sau* $\int_a^b fdx$.

Dacă $\lim_{x\to a}F(x)\in\mathbf{R}$ *(există şi este finită), atunci spunem despre integrala improprie* $\int_a^b fdx$ *că este convergentă. În caz contrar vom spune că integrala improprie* $\int_a^b fdx$ *este divergentă.*

Exemplu 7.1.2 *1.* $f:(0,1]\to\mathbf{R}$ $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ $\alpha\neq 1$.

$$F(x)=\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)}t^{-\alpha+1}\Big|_x^1=\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right).$$

Există şi este finită $\lim_{x\searrow 0}F(x)\Leftrightarrow\alpha<1$. *Aşadar integrala* $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ *este convergentă* $\Leftrightarrow\alpha<1$.

2. $f:(0,1]\to\mathbf{R}$ $f(x)=\ln x$, $F(x)=\int_x^1\ln t dt=(t\ln t-t)\Big|_x^1=x-1-x\ln x$ *şi* $\lim_{x\searrow 0}F(x)=0\Rightarrow\int_0^1\ln x dx$ *este convergentă.*

Fie $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ o funcţie local integrabilă, $a,b\in\bar{\mathbf{R}}$ $a<b$. Atunci există $a<c<b$ astfel încât integralele $\int_a^c f(x)dx$ şi $\int_c^b f(x)dx$ sunt convergente dacă şi numai dacă $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă, în care caz

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Exemplu 7.1.3 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. *Integralele* $\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}$, *respectiv* $\int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2}$ *fiind convergente, rezultă că şi integrala* $\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}$ *este convergentă şi* $\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\pi$.

7.2 Proprietăţi ale integralelor improprii

Teorema 7.2.1 *Dacă $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii local integrabile, $a < b, a \in \mathbb{R}, b \in \bar{\mathbb{R}}$ şi integralele $\int_a^b f dx$ şi $\int_a^b g dx$ sunt convergente, atunci şi integrala $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx$ este convergentă, unde α, β sunt constante reale.*

Demonstraţie. Notăm $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ şi $H(x) = \int_a^x [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt$, $\forall\, x \in [a,b)$. Avem

$$\begin{aligned} \lim_{x\to b} H(x) &= \lim_{x\to b} \int_a^x [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \lim_{x\to b} \left[\alpha \int_a^x f(t)dt + \beta \int_a^x g(t)dt\right] = \\ &= \alpha \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt + \beta \lim_{x\to b} \int_a^x g(t)dt = \alpha \lim_{x\to b} F(x) + \beta \lim_{x\to b} G(x). \end{aligned}$$

Cum $\exists \lim_{x\to b} F(x), \lim_{x\to b} G(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{x\to b} H(x) \in \mathbb{R}$, adică integrala $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx$ este convergentă.

Teorema 7.2.2 *Dacă $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ este o funcţie local integrabilă, $a < b, a \in \mathbb{R}, b \in \bar{\mathbb{R}}$ şi $c \in (a,b)$, atunci integralele $\int_a^b f dx$ şi $\int_c^b f dx$ au aceeaşi natură.*

Demonstraţie. Fie $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $G(x) = \int_c^x f(t)dt$, $\forall\, x \in [a,b)$ şi $I = \int_a^c f(t)dt$. Avem $F(x) = I + G(x)$ de unde $\lim_{x\to b} F(x) = I + \lim_{x\to b} G(x)$. Aşadar $\lim_{x\to b} F(x)$ există şi este finită $\Leftrightarrow \lim_{x\to b} G(x)$ există şi este finită.

7.3 Criterii de convergenţă

Observăm că convergenţa unei integrale improprii se reduce la existenţa şi finititudinea limitei funcţiei F.

Teorema 7.3.1 *Criteriul general de convergenţă al lui Cauchy*

Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă, $a < b$, $a \in \mathbb{R}$ şi $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Integrala $\int_a^b f dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, b_\varepsilon$, $a < b_\varepsilon < b$, astfel încât $\forall\, b_\varepsilon < x < y < b$ să avem $\left|\int_x^y f(t)dt\right| < \varepsilon$.

Demonstraţie: Fie $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Atunci enunţul teoremei se poate reformula astfel: integrala $\int_a^b f dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, b_\varepsilon$, $a < b_\varepsilon < b$ astfel încât $\forall\, b_\varepsilon < x < y < b$ să avem $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$.

Dar integrala $\int_a^b f dx$ este convergentă $\Leftrightarrow \lim_{x\to b} F(x)$ există şi este finită ceea ce este echivalent, conform teoremei Cauchy-Bolzano, cu $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, b_\varepsilon \in [a,b)$ astfel încât $\forall\, b_\varepsilon < x < y < b$ $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$ şi demonstraţia teoremei este încheiată.

Definiţia 7.3.1 *Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă, $a < b$ $a \in \mathbb{R}$ şi $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Integrala $\int_a^b fdx$ este absolut convergentă dacă integrala $\int_a^b |f|dx$ este convergentă.*

Teorema 7.3.2 *Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă, $a < b$, $a \in \mathbb{R}$ şi $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Dacă integrala $\int_a^b fdx$ este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.*

Demonstraţie. Dacă $\int_a^b fdx$ este absolut convergentă, atunci conform criteriului lui Cauchy avem pentru orice $\varepsilon > 0$, $\exists\, b_\varepsilon$, $a < b_\varepsilon < b$ astfel încât $\forall\, b_\varepsilon < x < y < b$ $\left|\int_x^y |f(t)|\,dt\right| < \varepsilon$. Însă $\left|\int_x^y f(t)dt\right| \le \int_x^y |f(t)|\,dt$, deci $\forall\, b_\varepsilon < x < y < b$ avem $\left|\int_x^y f(t)dt\right| < \varepsilon$ şi, aplicând criteriul lui Cauchy, rezultă că integrala $\int_a^b fdx$ este convergentă.

Observaţia 7.3.1 *Din teorema 7.3.2 rezultă că integrabilitatea funcţiei $|f|$ implică integrabilitatea funcţiei f (reciproca nu are loc), deşi ştim că pe un interval compact reciproca este adevărată dar afirmaţia de mai sus nu are loc în general.*

Teorema 7.3.3 *Criteriu de comparaţie cu inegalităţi*

Fie $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ două funcţii local integrabile, $a < b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ şi $g(x) \ge 0$, $\forall\, x \in [a,b)$. Dacă $|f(x)| \le g(x)$, $\forall\, x \in [a,b)$ şi integrala $\int_a^b gdx$ este convergentă, atunci integrala $\int_a^b fdx$ este absolut convergentă.

Demonstraţie: Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\int_a^b gdx$ este convergentă rezultă, conform teoremei 7.3.1, că există b_ε, $a < b_\varepsilon < b$ astfel încât $\forall\, b_\varepsilon < x < y < b$ să avem $\left|\int_x^y g(t)dt\right| < \varepsilon$. Dar, cum $\int_x^y |f(t)|dt \le \int_x^y g(t)dt$, rezultă conform teoremelor 7.3.1 şi 7.3.2 că integrala $\int_a^b fdx$ este absolut convergentă.

Exemplu 7.3.1 *Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = e^{-x^2}$. Conform teoremei 7.2.2 e suficient să studiem natura integralei $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$; $\forall\, x \ge 1$ avem $e^{-x^2} \le e^{-x}$, iar integrala $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ este convergentă, deoarece*

$$F(x) = \int_1^x e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_1^x = e^{-1} - e^{-x} \to \frac{1}{e}, \quad x \to \infty.$$

Aşadar, conform criteriului comparaţiei, integrala $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ este convergentă, de unde rezultă că integrala $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ este convergentă.

Observaţia 7.3.2 *Fie $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ două funcţii local integrabile, $a < b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ şi $g(x) \ge 0$, $\forall\, x \in [a,b)$. Dacă $|f(x)| \le g(x)$, $\forall\, x \in [a,b)$ şi integrala $\int_a^b fdx$ este divergentă, atunci şi integrala $\int_a^b gdx$ este divergentă.*

Teorema 7.3.4 *Criteriu de comparaţie la limită*

Dacă $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ *sunt două funcţii local integrabile,* $a < b$, $a \in \mathbb{R}$ *şi* $b \in \bar{\mathbb{R}}$, $g(x) > 0$, $\forall\, x \in [a, b)$ *şi astfel încât există limita* $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$, *atunci:*

1. Dacă integrala $\displaystyle\int_a^b g dx$ *este convergentă, rezultă că şi integrala* $\displaystyle\int_a^b f dx$ *este absolut convergentă;*

2. Dacă $l \neq 0$, *rezultă că cele două integrale au aceeaşi natură.*

Demonstraţie: 1. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to b} \dfrac{|f(x)|}{g(x)} = |l|$, de unde $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, b_\varepsilon$, $a < b_\varepsilon < b$ astfel încât $\forall\, b_\varepsilon < x < b$ să avem $|l| - \varepsilon < \dfrac{|f(x)|}{g(x)} < |l| + \varepsilon$. Dar, fiindcă $g(x) > 0$, rezultă $|f(x)| < (|l|+\varepsilon)g(x)$ pentru $b_\varepsilon < x < b$. Cum integrala $\displaystyle\int_a^b g dx$ este convergentă pe baza teoremei 7.2.2 rezultă că integrala $\displaystyle\int_{b_\varepsilon}^b g dx$ este convergentă şi din criteriul comparaţiei cu inegalităţi avem absolut convergenţa integralei $\displaystyle\int_{b_\varepsilon}^b f dx$, adică absolut convergenţa integralei $\displaystyle\int_a^b f dx$ (din teorema 7.2.2).

2. $l \neq 0$ atunci $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{l} \Rightarrow \lim\limits_{x\to b} \dfrac{g(x)}{|f(x)|} = \dfrac{1}{|l|}$ şi aplicăm punctul 1 al teoremei.

Un rol important în folosirea criteriilor de comparaţie îl joacă următoarele integrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ şi $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ $(a > 0)$. Pentru $\alpha \neq 1$ avem

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \left.\frac{-(b-t)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_a^x = \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}.$$

Există şi este finită limita $\lim\limits_{x\to b} F(x) = \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Leftrightarrow \alpha < 1$. Pentru $\alpha = 1$ avem $F(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{dt}{b-t} = -\ln(b-t)|_a^x = -\ln(b-x) + \ln(b-a)$ şi $\lim\limits_{x\to b} F(x) = \infty$. Deci integrala $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha < 1$ şi divergentă pentru $\alpha \geq 1$.

În cazul celei de-a doua integrale, pentru $\alpha \neq 1$ avem

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left.\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right|_a^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Există şi este finită limita $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \Leftrightarrow \alpha < 1$. Pentru $\alpha = 1$ avem $F(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{dt}{t} = \ln t|_a^x = \ln x - \ln a \to \infty$, $x \to \infty$. Deci integrala $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Teorema 7.3.5 *Dacă* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *este o funcţie local integrabilă,* $a \in \mathbb{R}$, *astfel încât există limita* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = l$, *atunci:*

1. Dacă $\alpha > 1$ *şi* $0 \leq l < \infty$, *integrala* $\displaystyle\int_a^\infty f dx$ *este absolut convergentă;*

2. Dacă $\alpha \leq 1$ *şi* $0 < l \leq \infty$, *integrala* $\displaystyle\int_a^\infty f dx$ *este divergentă.*

Demonstraţie: 1. Fie $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ şi, cum pentru $\alpha > 1$ integrala $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ este convergentă, aplicăm punctul 1 al criteriului de comparaţie la limită, deci integrala $\displaystyle\int_a^\infty f dx$ este absolut convergentă.

2. Pentru $\alpha \leq 1$ integrala $\displaystyle\int_a^\infty g dx$ este divergentă, iar din punctul 2 al criteriului de comparaţie la limită, avem că integrala $\displaystyle\int_a^\infty f dx$ este divergentă.

Exemplu 7.3.2 *1. Să studiem natura integralei* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^\alpha \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1$ *pentru* $\alpha = 1$ *şi deci integrala este divergentă.*

2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\text{arctg}x}{x^2} dx$; $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\text{arctg}x}{x^2} = \frac{\pi}{2}$ *pentru* $\alpha = 2$, *deci integrala este convergentă.*

Teorema 7.3.6 *Dacă* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *este o funcţie local integrabilă,* $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât există limita* $\lim\limits_{x\nearrow b} (b-x)^\alpha f(x) = l$, *atunci:*

1. *Dacă* $\alpha < 1$ *şi* $0 \leq l < \infty$, *integrala* $\displaystyle\int_a^b f dx$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $\alpha \geq 1$ *şi* $0 < l \leq \infty$, *integrala* $\displaystyle\int_a^b f dx$ *este divergentă.*

Demonstraţie: 1. Fie $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$. Avem $\lim\limits_{x\nearrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ şi, întrucât pentru $\alpha < 1$ integrala $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ este convergentă, aplicând punctul 1 al criteriului de comparaţie la limită, rezultă că integrala $\displaystyle\int_a^b f dx$ este convergentă.

2. Pentru $\alpha \geq 1$ integrala $\displaystyle\int_a^b g dx$ este divergentă şi, din punctul 2 al criteriului de comparaţie la limită, avem că şi integrala $\displaystyle\int_a^b f dx$ este divergentă.

Exemplu 7.3.3 *1.* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\displaystyle\lim_{x\nearrow 1} (1-x)^\alpha \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *pentru* $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, *deci integrala este convergentă.*

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$; $\displaystyle\lim_{x\nearrow 1} (1-x)^\alpha \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}$ *pentru* $\alpha = 1$, *deci integrala este divergentă.*

Teorema 7.3.7 *Dacă* $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie local integrabilă,* $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât există limita* $\lim_{x\to a} (x-a)^\alpha f(x) = l$, *atunci:*

1. *Dacă* $\alpha < 1$ *şi* $0 \leq l < \infty$, *integrala* $\displaystyle\int_a^b f dx$ *este convergentă;*

2. *Dacă $\alpha \geq 1$ şi $0 < l \leq \infty$, integrala $\int_a^b f dx$ este divergentă.*

Teorema 7.3.8 *Criteriul integral al lui Cauchy*

Dacă $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie reală, pozitivă şi descrescătoare pe $[1, \infty)$, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. *şirul (u_n), $u_n = \int_1^n f(x)dx$ este convergent;*
2. *seria numerică $\sum_{n \geq 1} f(n)$ este convergentă;*
3. *integrala $\int_1^\infty f(x)dx$ este convergentă.*

Demonstraţie: $1 \Leftrightarrow 2$ Deoarece f este descrescătoare şi pozitivă, rezultă că $f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x)dx \leq f(n-1) \quad , \forall\, n \geq 2$ şi atunci

$$\sum_{k=1}^n f(k) - f(1) \leq u_n = \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \tag{7.1}$$

Dacă şirul (u_n) este convergent, rezultă că el este mărginit, deci există $M > 0$ astfel încât

$$u_n \leq M, \quad \forall\, n \geq 1 \tag{7.2}$$

Dacă notăm $s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$, şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n \geq 1} f(n)$, atunci din (7.1) şi (7.2) obţinem $s_n \leq f(1) + M, \forall\, n \geq 1$, adică şirul (s_n) al sumelor parţiale este mărginit. Din teorema 5.6.1 rezultă că seria $\sum_{n \geq 1}^n f(n)$ este convergentă.

Presupunând acum, că seria $\sum_{n \geq 1} f(n)$ este convergentă, avem că şirul (s_n) este mărginit, deci există $M_1 > 0$ astfel încât $s_n \leq M_1$, $\forall\, n \geq 1$. Din (7.1) avem $u_n \leq M_1$, $\forall\, n \geq 1$, adică şirul (u_n) este mărginit şi, cum el este şi descrescător, rezultă că (u_n) este convergent.

$1 \Rightarrow 3$ Presupunem şirul (u_n) convergent şi notăm $F : [1, \infty) \to \mathbb{R}$
$F(t) = \int_1^t f(x)dx.$

Întrucât $\forall\, t_1, t_2 \in [1, \infty)$ cu $t_1 \leq t_2$ avem $F(t_1) \leq F(t_2)$ şi cum $[t] \leq t < [t] + 1 = [t+1]$ avem

$$\int_1^t f(x)dx < \int_1^{[t+1]} f(x)dx = \int_1^t f(x)dx + \int_t^{[t+1]} f(x)dx\,,$$

de unde $\forall\, t \in [1, \infty)$ $F(t) < u_{[t+1]}$. Deoarece şirul (u_n) este mărginit (fiind convergent), rezultă că $\exists\, M > 0$ astfel încât $u_n \leq M$, $\forall\, n \geq 1$. Prin urmare, $\forall\, t \in [1, \infty)$ $F(t) < M$, deci $\lim\limits_{t \to \infty} F(t) \in \mathbb{R}$, de unde avem că integrala $\int_1^\infty f(x)dx$ convergentă.

$3 \Rightarrow 1$ Presupunem integrala $\int_1^\infty f dx$ convergentă. Atunci există $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) \in \mathbb{R}$, deci $\forall\, x_n \to \infty$ şirul $(F(x_n))$ este convergent. Alegând $x_n = n$ obţinem $F(n) = u_n$, adică şirul (u_n) convergent.

Exemplu 7.3.4 *1. Pentru a afla natura integralei $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ folosim criteriul integral al lui Cauchy. Considerăm funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbf{R}_+$ $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Seria armonică generalizată*

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ *este convergentă pentru* $\alpha > 1$ *şi divergentă pentru* $\alpha \leq 1$. *Aşadar integrala* $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ *este convergentă pentru* $\alpha > 1$ *şi divergentă pentru* $\alpha \leq 1$.

2. *Seria* $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ *are aceeaşi natură cu integrala* $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$, *convergentă pentru* $\alpha > 1$ *şi divergentă pentru* $\alpha \leq 1$.

Teorema 7.3.9 *Criteriul lui Abel*

Dacă $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ *sunt două funcţii de clasă* $C^1[a,\infty)$ *astfel ca* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ *şi* $\int_a^\infty f' dx$ *să fie absolut convergentă,* g *continuă, iar funcţia* $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ *mărginită pe* $[a,\infty)$, *atunci* $\int_a^\infty fg dx$ *este convergentă.*

Demonstraţie: G mărginită $\Rightarrow\ \exists\, M > 0$ astfel încât $|G(x)| \leq M$ pentru orice $x \in [a,\infty)$.

$$\begin{aligned}
&\int_a^x (fg)(t)dt = (fG)(t)|_a^x - \int_a^x (f'G)(t)dt,\ \ \forall\, x \in [a,\infty),\\
&\int_a^x (fg)(t)dt = f(x)G(x) - \int_a^x (f'G)(t)dt \leq f(x)G(x) - M\int_a^x f'(t)dt,\\
&|(f'G)(t)| \leq M|f'(t)|\,, \quad \forall\, t \in [a,\infty)\,.
\end{aligned}$$

Fiindcă există şi este finită limita $\lim_{x\to\infty}[f(x)G(x) - M\int_a^x f'(t)dt]$, atunci există şi este finită limita $\lim_{x\to\infty}\int_a^x (fg)(t)dt$, prin urmare integrala $\int_a^x fg dx$ este convergentă.

Exemplu 7.3.5 *Integrala* $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$ *este absolut convergentă.*

$$f(x) = \frac{1}{x},\ \ f \in C^1(1,\infty),\ \ \int_1^\infty |f'|dx = \int_1^\infty \left|-\frac{1}{x^2}\right| dx;\quad \lim_{x\to\infty}\left(\left.\frac{-1}{t}\right|_1^x\right) = 1,$$

deci integrala $\int_1^\infty f' dx$ *este absolut convergentă.*

$g(x) = \sin x$ *este continuă,* $G(x) = \int_1^x \sin t dt = -\cos t|_1^x = \cos 1 - \cos x$ *este mărginită. Atunci, conform criteriului lui Abel, integrala* $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ *este convergentă.*

Capitolul 8

Integrale curbilinii

8.1 Drumuri. Curbe

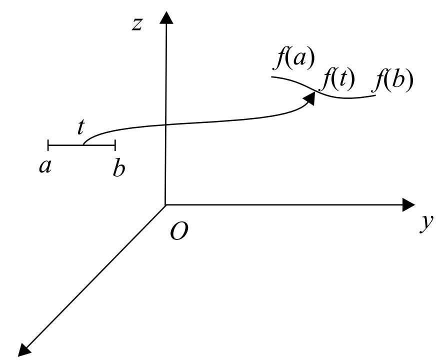

Figura 8.1:

Definiţia 8.1.1 *Fie $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un interval. Orice funcţie continuă $F:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ se numeşte drum în $\mathbb{R}^n$.*

$\mathrm{Im}\, F = F[a,b]$ se numeşte urma drumului (sau traiectoria sau holograful drumului).

Dacă $F = (f_2, f_2, \ldots, f_n)$ cu $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^0[a,b]$, atunci

$$d : \begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ x_2 = f_2(t) \\ \vdots \\ x_n = f_n(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

se numeşte reprezentarea parametrică a drumului F.

Exemplu 8.1.1 1. *$F:[0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ $F(t) = (\cos t, \sin t)$ este drum în $\mathbb{R}^2$. Reprezentarea parametrică a acestui drum este $d_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \ t \in [0,\pi]$.*

2. *$F:[-1,1] \to \mathbb{R}^2$ $F(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ este drum în $\mathbb{R}^2$, care are aceeaşi traiectorie ca şi drumul d_1, dar parcursă în sens contrar şi reprezentarea parametrică $d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, \ t \in$ $[-1,1]$.*

Definiţia 8.1.2 *Dacă $F : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ este un drum în $\mathbb{R}^n$, atunci $F(a)$ şi $F(b)$ se numesc extremităţile drumului. Dacă $F(a) = F(b)$, atunci drumul se numeşte drum închis.*

În drumul d_1 (exemplul 8.1.1), dacă $t \in [0, 2\pi]$, atunci acesta este închis.

Definiţia 8.1.3 *Dacă pentru un drum $F : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $F \in C^1([a,b])$ şi $F'(t) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, pentru orice $t \in [a,b]$ (adică $f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + \cdots + f_n'^2(t) > 0$ pentru orice $t \in [a,b]$), atunci acesta se numeşte drum neted.*

Drumurile $F:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ şi $G:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ se numesc juxtapozabile, dacă $b=c$ şi $F(b)=G(c)$. În acest caz drumul $H:[a,d]\to\mathbb{R}^n$, definit prin $H(t)=\begin{cases}F(t), & t\in[a,b]\\ G(t), & t\in[b,d]\end{cases}$ se numeşte juxtapunerea (sau concatenarea) drumurilor F şi G şi se notează $H=F\cup G$.

În figura 2 avem un exemplu de drumuri juxtapozabile în $\mathbb{R}^3$.

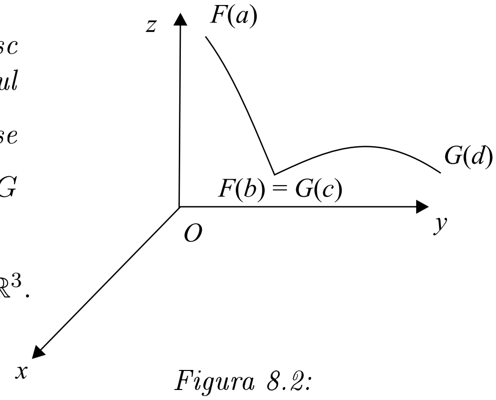

Figura 8.2:

Definiţia 8.1.4 *Un drum $F:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ se numeşte neted pe porţiuni dacă el este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.*

În continuare vom presupune că F este un drum în spaţiu tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Fie $F:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ un drum în $\mathbb{R}^3$ având reprezentarea parametrică

$$d:\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\\ z=h(t)\end{cases},\ t\in[a,b],\ f,g,h\in C^0[a,b] \quad (8.1)$$

şi $\Delta: a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$. Punctele $M_0(f(t_0),g(t_0),h(t_0))$, $M_1(f(t_1),\ g(t_1),h(t_1)),\ldots,\ M_n(f(t_n),g(t_n),\ h(t_n))$ determină o linie poligonală ce are vârfurile situate pe ImF, iar M_0 şi M_n reprezintă extremităţile drumului F.

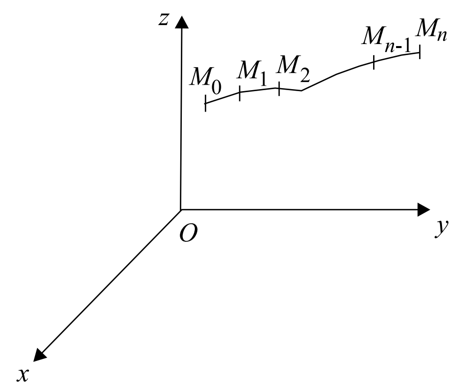

Figura 8.3:

Lungimea acestei linii poligonale, l_Δ, este

$$l_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}\left[(f(t_{i+1})-f(t_i))^2+(g(t_{i+1})-g(t_i))^2+(h(t_{i+1})-h(t_i))^2\right]^{1/2} \quad (8.2)$$

Se observă că, dacă se înlocuieşte diviziunea Δ cu o diviziune mai fină, l_Δ creşte.

Definiţia 8.1.5 *Un drum $F:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ se numeşte rectificabil dacă mulţimea $\{l_\Delta\}$ este majorată. Marginea superioară a acestei mulţimi se numeşte lungimea drumului F şi se notează $l(d)=\sup_{\Delta\in\mathcal{D}} l_\Delta$, unde $\mathcal{D}$ = mulţimea tuturor diviziunilor intervalului $[a,b]$.*

Definiţia 8.1.6 *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie şi $\Delta=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ o diviziune a intervalului $[a,b]$. Numărul real pozitiv*

$$V_\Delta=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

se numeşte variaţia funcţiei f relativă la diviziunea Δ.

Funcţia f se numeşte cu variaţie mărginită pe intervalul $[a,b]$ dacă există un număr $M>0$ astfel încât $V_\Delta\le M$, $\forall\ \Delta\in\mathcal{D}$.

Teorema 8.1.1 *Criteriu de rectificabilitate al lui Jordan*

Drumul d având reprezentarea parametrică (8.1) este rectificabil dacă şi numai dacă funcţiile f,g,h sunt cu variaţie mărginită.

Demonstraţie. Sumele

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|,\ \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|,\ \sum_{i=0}^{n-1} |h(t_{i+1}) - h(t_i)| \tag{8.3}$$

sunt mai mici decât

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2 + (h(t_{i+1}) - h(t_i))^2\right]^{1/2} \tag{8.4}$$

Dacă drumul d este rectificabil, atunci suma (8.4) este majorată, deci sunt majorate şi sumele (8.3), adică funcţiile f, g, h sunt cu variaţie mărginită.

Invers, presupunem funcţiile f, g, h cu variaţie mărginită. Cum

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + g(t_{i+1}) - g(t_i))^2 + (h(t_{i+1}) - h(t_i))^2\right]^{1/2} \leq$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i) + |g(t_{i+1}) - g(t_i)| + |h(t_{i+1}) - h(t_i)|\,,$$

iar suma din dreapta este majorată (f, g, h cu variaţie mărginită), atunci $\{l_\Delta\}$ este majorată, adică drumul d este rectificabil.

Teorema 8.1.2 *Orice drum neted d de forma (8.1) este rectificabil şi lungimea drumului este* $l(d) = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}dt.$

Demonstraţie. Întrucât $f, g, h \in C^1[a, b]$, rezultă că ele sunt cu variaţie mărginită şi conform teoremei 8.1.1 drumul d este rectificabil.

Fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$.

Aplicând teorema creşterilor finite a lui Lagrange pe fiecare subinterval $[t_i, t_{i+1}] \subset [a, b]$ se obţin punctele $t_i < \xi_i, \eta_i, \zeta_i < t_{i+1}$ astfel încât

$$\begin{aligned} f(t_{i+1}) - f(t_i) &= f'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) \\ g(t_{i+1}) - g(t_i) &= g'(\eta_i)(t_{i+1} - t_i) \\ h(t_{i+1}) - h(t_i) &= h'(\zeta_i)(t_{i+1} - t_i)\,. \end{aligned}$$

Atunci relaţia (8.2) devine

$$\begin{aligned} l_\Delta &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\eta_i) + h'^2(\zeta_i)}(t_{i+1} - t_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f'^2(\tau_i) + g'^2(\tau_i) + h'^2(\tau_i)}(t_{i+1} - t_i) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\eta_i) + h'^2(\zeta_i)} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{f'^2(\tau_i) + g'^2(\tau_i) + h'^2(\tau_i)}\right](t_{i+1} - t_i), \end{aligned} \tag{8.5}$$

pentru orice $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Considerăm funcţia $G : [a,b] \times [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$, unde

$$G(x,y,z) = \sqrt{f'^2(x) + g'^2(y) + h'^2(z)}, \quad \forall\, x,y,z \in [a,b].$$

Funcţia G este continuă pe mulţimea $D = [a,b] \times [a,b] \times [a,b]$, deci uniform continuă pe D. Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $(x,y,z), (x',y',z') \in D$ cu $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$, $|y - y'| < \delta(\varepsilon)$ şi $|z - z'| < \delta(\varepsilon)$ avem $|G(x,y,z) - G(x',y',z')| < \varepsilon$.

Alegem diviziunea Δ a intervalului $[a,b]$ astfel încât $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$, iar $(x,y,z) = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $(x',y',z') = (\tau_i, \tau_i, \tau_i)$.

Atunci pentru a doua sumă din (8.5) obţinem

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} [G(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) - G(\tau_i, \tau_i, \tau_i)](t_{i+1} - t_i)\right| \le$$
$$\le \sum_{i=0}^{n-1} |G(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) - G(\tau_i, \tau_i, \tau_i)|(t_{i+1} - t_i) < \varepsilon(b - a).$$

Prima sumă din (8.5) $\sum_{i=0}^{n-1} G(\tau_i, \tau_i, \tau_i)(t_{i+1} - t_i)$, reprezintă o sumă Riemann corespunzătoare funcţiei $\sqrt{f'^2 + g'^2 + h'^2}$, diviziunii Δ şi punctelor intermediare τ_i. Funcţia $\sqrt{f'^2 + g'^2 + h'^2}$ fiind continuă pe $[a,b]$ este integrabilă pe acest interval.

Dacă (Δ_n) este un şir de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ cu norma $\nu(\Delta_n) \to 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} l_{\Delta_n} = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}dt.$$

Definiţia 8.1.7 *Două drumuri* $F : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ *şi* $G : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ *se numesc echivalente şi se notează* $F \sim G$ *(sau* $d \sim d'$ *unde* d, d' *sunt reprezentările parametrice ale lui* F *şi* G*) dacă există o funcţie* $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ *continuă, strict crescătoare cu* $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$ *şi astfel ca* $F(t) = G(\varphi(t))$, *pentru orice* $t \in [a,b]$.

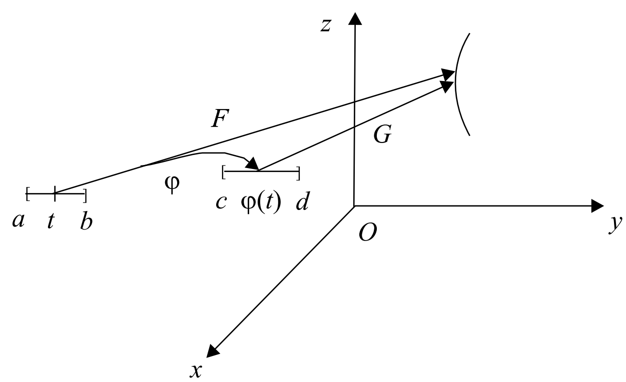

Figura 8.4:

Observaţia 8.1.1 *Deoarece* $\varphi([a,b]) = [c,d]$, *rezultă că două drumuri echivalente au aceeaşi imagine.*

Teorema 8.1.3 *Orice drum echivalent cu un drum rectificabil este rectificabil.*

Demonstraţie. Fie drumurile echivalente $d_1 : \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \\ z = h_1(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$ şi $d_2 : \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \\ z = h_2(t) \end{cases}$, $t \in [c,d]$.

Deoarece $d_1 \sim d_2$, rezultă existenţa funcţiei $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ continuă, strict crescătoare cu $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$, $f_1(t) = f_2(\varphi(t))$, $g_1(t) = g_2(\varphi(t))$ şi $h_1(t) = h_2(\varphi(t))$, pentru orice $t \in [a,b]$.

Orice diviziune $\Delta_2 : c = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_n = d$ a intervalului $[c, d]$ este imaginea prin φ a unei diviziuni $\Delta_1 : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ a intervalului $[a, b]$. Reciproc, oricărei diviziuni Δ_1 a intervalului $[a, b]$ îi corespunde o diviziune Δ_2 a intervalului $[c, d]$. Deci

$$l_{\Delta_1} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[(f_1(t_{i+1}) - f_1(t_i))^2 + (g_1(t_{i+1}) - g_1(t_i))^2 + (h_1(t_{i+1}) - h_1(t_i))^2\right]^{1/2}$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left[(f_2(t'_{i+1}) - f_2(t'_i))^2 + (g_2(t'_{i+1}) - g_2(t'_i))^2 + (h_2(t'_{i+1}) - h_2(t'_i))^2\right]^{1/2} = l_{\Delta_2}.$$

Dacă d_2 este drum rectificabil, atunci mulţimea $\{l_{\Delta_2}\}$ este majorată. Cum mulţimile $\{l_{\Delta_1}\}, \{l_{\Delta_2}\}$ coincid, rezultă că şi $\{l_{\Delta_1}\}$ este majorată, prin urmare drumul d_1 este rectificabil.

Mai mult, două drumuri rectificabile şi echivalente au aceeaşi lungime.

Teorema 8.1.4 *Relaţia " $\sim$ " din definiţia 8.1.7 este o relaţie de echivalenţă.*

Demonstraţie. Relaţia " $\sim$ " este reflexivă, deoarece luând $\varphi = 1_{[a,b]}$, pentru orice drum F avem $F \sim F$.

Dacă $F_1 \sim F_2$, $F_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $F_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^3$, atunci există funcţia $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ continuă, strict crescătoare cu $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$ şi $F_1(t) = F_2(\varphi(t))$, pentru orice $t \in [a, b]$. Funcţia φ fiind bijectivă, φ^{-1} este continuă, strict crescătoare, $\varphi^{-1}(c) = a, \varphi^{-1}(d) = b$ şi $F_2(t) = F_1(\varphi^{-1}(t))$, pentru orice $t \in [a, b]$, adică $F_2 \sim F_1$.

Dacă $F_1 \sim F_2$ şi $F_2 \sim F_3$, $F_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $F_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^3$, $F_3 : [e, f] \to \mathbb{R}^3$, atunci există funcţiile $\varphi : [a, b] \to [c, d]$, $\psi : [c, d] \to [e, f]$ continue, strict crescătoare cu $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$, $\psi(c) = e, \psi(d) = f$ şi astfel ca $F_1(t) = F_2(\varphi(t))$, $F_2(t) = F_3(\psi(t))$. Funcţia $\psi \circ \varphi : [a, b] \to [e, f]$ este continuă, strict crescătoare, $(\psi \circ \varphi)(a) = \psi(\varphi(a)) = \psi(c) = e$, $(\psi \circ \varphi)(b) = \psi(\varphi(b)) = \psi(d) = f$ şi astfel ca $F_1(t) = F_2(\varphi(t)) = F_3(\psi(\varphi(t))) = F_3(\psi \circ \varphi)(t))$, pentru orice $t \in [a, b]$ adică $F_1 \sim F_3$.

Observaţia 8.1.2 *Relaţia de echivalenţă împarte mulţimea tuturor drumurilor în clase de echivalenţă disjuncte. Deci două drumuri sunt echivalente dacă şi numai dacă aparţin aceleiaşi clase.*

Definiţia 8.1.8 *Se numeşte curbă o clasă de drumuri echivalente.*

Imaginea curbei este imaginea unui drum conţinut de curbă. Curba închisă este curba care conţine cel puţin un drum închis (orice drum echivalent cu un drum închis este, de asemenea, închis). Curbă rectificabilă este curba care conţine cel puţin un drum rectificabil. Lungimea unei curbe rectificabile este lungimea comună a drumurilor ce alcătuiesc această curbă. Curba netedă este curba ce conţine cel puţin un drum neted. Curbe juxtapozabile sunt două curbe C_1 şi C_2 pentru care există un drum $d_1 \in C_1$ şi un drum $d_2 \in C_2$ astfel ca d_1 şi d_2 să fie juxtapozabile. Clasa de echivalenţă a drumului $d = d_1 \cup d_2$ se numeşte juxtapunerea curbelor C_1 şi C_2 şi se notează $C = C_1 \cup C_2$. O curbă C se numeşte netedă pe porţiuni dacă este juxtapunerea unui număr finit de curbe netede $C_i, i = \overline{1, n}$, adică dacă $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Orice curbă netedă pe porţiuni este rectificabilă. Dacă $l(C)$ este lungimea unei curbe rectificabile, atunci pentru o curbă netedă pe porţiuni avem $l(C) = \sum_{i=1}^{n} l(C_i)$.

În cele ce urmează vom nota prin reprezentări parametrice de tipul (8.1), atât drumurile cât şi curbele, fără a exista nici un pericol de confuzie după cele prezentate anterior.

Observaţia 8.1.3 *1. Toate noţiunile şi proprietăţile expuse, care s-au referit la drumuri şi curbe în spaţiu, se transpun fără nici o problemă la drumuri şi curbe în plan. De exemplu, lungimea unui drum neted în plan este* $l(d) = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}dt$.

2. Fie $d : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *un drum definit de:*

$$d : \begin{cases} x = \varphi(t)\cos t \\ y = \varphi(t)\sin t \end{cases}, \quad t \in [a, b], \tag{8.6}$$

unde t *se numeşte unghi polar, iar* φ *este o funcţie continuă* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Dacă* φ *este o funcţie de clasă* $C^1[a, b]$, *atunci drumul (8.6) este rectificabil şi lungimea lui este*

$$l(d) = \int_a^b \sqrt{\varphi^2(t) + \varphi'^2(t)}dt \tag{8.7}$$

Într-adevăr, avem $x = f(t), y = g(t)$, *unde* $f(t) = \varphi(t)\cos t, g(t) = \varphi(t)\sin t$, *pentru orice* $t \in [a, b]$, $f, g \in C^1[a, b]$. *Conform teoremei 8.1.2 drumul (8.6) este rectificabil şi*

$$l(d) = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}dt. \tag{8.8}$$

Însă, $f'(t) = \varphi'(t)\cos t - \varphi(t)\sin t$ *şi* $g'(t) = \varphi'(t)\sin t + \varphi(t)\cos t$,

$$\begin{aligned} &f'^2(t) + g'^2(t) = \varphi'^2(t)\cos^2 t - 2\varphi(t)\varphi'(t)\cos t\sin t + \varphi^2(t)\sin^2 t + \\ &+\varphi'^2(t)\sin^2 t + 2\varphi(t)\varphi'(t)\cos t\sin t + \varphi^2(t)\cos^2 t = \varphi'^2(t) + \varphi^2(t) \end{aligned}$$

şi înlocuind în (8.8) se obţine relaţia (8.7).

Exemplu 8.1.2 *1. Să se calculeze lungimea curbei plane* C *definită prin reprezentarea parametrică* $C : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi], a > 0$. *Avem* $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a\sin t$,

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a\,. \end{aligned}$$

2. Să se calculeze lungimea curbei C *(elicea circulară) definită prin reprezentarea parametrică*
$C : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi],\ a, b > 0.$

$$l(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Integrale curbilinii

Integrala curbilinie este o extindere a integralei definite, unde intervalul de integrare $[a, b]$ se înlocuieşte cu un arc de curbă.

Problemele care conduc la introducerea integralelor curbilinii provin din fizică: problema determinării masei unui fir material, problema determinării sarcinii electrice totale a unui fir material atunci când se cunoaşte densitatea de repartiţie în fiecare punct al firului, problema lucrului mecanic efectuat de o forţă de-a lungul unui arc de curbă, etc.

8.2 Integrala curbilinie în raport cu lungimea arcului

Considerăm un fir material având grosimea neglijată. Întrucât firul material are lungime vom presupune că el este imaginea unei curbe rectificabile C, dată de ecuaţiile parametrice:

$$C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b], \quad f,g,h \in C^0[a,b] \tag{8.9}$$

Pe firul material presupunem distribuită o masă de densitate $\rho(x,y,z)$, pentru orice $(x,y,z) \in I(C)$. Problema determinării masei unui fir material conduce la noţiunea de integrală curbilinie în raport cu lungimea arcului (sau de speţa întâi).

Pentru fiecare $t \in [a,b]$ notăm C_t curba rectificabilă dată de reprezentarea parametrică

$$C_t: \begin{cases} x = f(t') \\ y = g(t') \\ z = h(t') \end{cases}, \quad t' \in [a,t]$$

şi cu $l(t)$ lungimea acestei curbe, care este o funcţie strict crescătoare pe intervalul $[a,b]$.

Fie $\Delta: \ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$. Masa firului material poate fi aproximată prin suma $\sum_{i=0}^{n-1} \rho(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))(l_{t_{i+1}} - l_{t_i})$, unde $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$.

Definiţia 8.2.1 *Fie $F: D \to \mathbb{R}$ o funcţie reală, unde $D \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu (mulţime deschisă şi conexă) ce conţine imaginea curbei rectificabile C dată de (8.9). Dacă integrala Stieltjes*

$$\int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) dl(t) \tag{8.10}$$

există, atunci ea se notează $\displaystyle\int_C F(x,y,z)dl$ şi se numeşte integrala curbilinie a funcţiei F de-a lungul curbei C, iar funcţia F se spune că este integrabilă în raport cu lungimea l, de-a lungul curbei C.

Observaţia 8.2.1 *Fie $\Delta \ : \ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ şi $\Delta' \ : \ M_0(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$, $M_1(f(t_1), g(t_1), h(t_1)), \ldots,$ $M_n(f(t_n), g(t_n), h(t_n))$ o diviziune a curbei C corespunzătoare diviziunii Δ, cu $\nu(\Delta') = \max_{i=\overline{0,n-1}} l(\overset{\frown}{M_i M_{i+1}})$ norma diviziunii Δ', iar $N_i(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i)) \in \overset{\frown}{M_i M_{i+1}}$, $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}], i = \overline{0, n-1}$ puncte situate pe arcul $\overset{\frown}{M_i M_{i+1}}$. Considerăm suma $\sigma_{\Delta', F} = \sum_{i=0}^{n-1} F(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i)) \ l(\overset{\frown}{M_i M_{i+1}})$.*

Funcţia F este integrabilă în raport cu lungimea l, de-a lungul curbei C, dacă pentru orice şir de diviziuni (Δ'_n) ale curbei C cu norma $\nu(\Delta'_n) \to 0$, şirul corespunzător $(\sigma_{\Delta'_n, F})$ are limită finită, care este $\displaystyle\int_C F(x,y,z)dl$.

Teorema 8.2.1 *Existenţa şi valoarea integralei curbilinii (8.10) nu depind de alegerea drumului ei ci doar de curba C.*

Demonstraţie. Fie d_1, d_2 două drumuri rectificabile, $d_1 \sim d_2$, având reprezentările parametrice:

$$d_1 : \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \\ z = h_1(t) \end{cases}, \quad t \in [a_1, b_1], \quad d_2 : \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \\ z = h_2(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b],$$

$f_1, g_1, h_1 \in C^0[a_1, b_1]$, $f_2, g_2, h_2 \in C^0[a_2, b_2]$ şi presupunem că există integrala curbilinie $\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} F(f_1(t), g_1(t), h_1(t))dl_1(t)$.

Considerăm $\Delta : a_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b_1$ o diviziune a intervalului $[a_1, b_1]$. Deoarece $d_1 \sim d_2$, rezultă că există o funcţie continuă, strict crescătoare $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ astfel ca $\varphi(a_1) = a_2$, $\varphi(b_1) = b_2$ şi $f_1(t) = f_2(\varphi(t))$, $g_1(t) = g_2(\varphi(t))$, $h_1(t) = h_2(\varphi(t))$, pentru orice $t \in [a_1, b_1]$ şi $\Delta' : a_2 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = b_2$, unde $\tau_i = \varphi(t_i)$, $i = \overline{0, n}$ este o diviziune a intervalului $[a_2, b_2]$.

Fie $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$, pentru orice $i = \overline{0, n-1}$. Atunci există punctele $\eta_i = \varphi(\xi_i) \in [\tau_i, \tau_{i+1}], i = \overline{0, n-1}$. Din echivalenţa drumurilor d_1 şi d_2 avem $l_1(t) = l_2(\tau)$. Atunci

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta,F} &= \sum_{i=0}^{n-1} F(f_1(\xi_i), g_1(\xi_i), h_1(\xi_i))(l_1(t_{i+1}) - l_1(t_i)) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} F(f_2(\eta_i), g_2(\eta_i), h_2(\eta_i))(l_2(\tau_{i+1}) - l_2(\tau_i)) = \sigma_{\Delta',F} \end{aligned} \tag{8.11}$$

Aşadar, pentru orice şir de diviziuni (Δ_n) ale intervalului $[a_1, b_1]$ cu norma $\nu(\Delta_n) \to 0$, şirul corespunzător prin funcţia uniform continuă $\varphi, (\Delta'_n)$, de diviziuni ale intervalului $[a_2, b_2]$ are norma $\nu(\Delta'_n) \to 0$, iar şirul corespunzător $(\sigma_{\Delta'_n,F})$ are limită finită, conform relaţiei (8.11) şi observaţiei 8.2.1, deci există integrala curbilinie $\displaystyle\int_{a_2}^{b_2} F(f_2(\tau), g_2(\tau), h_2(\tau))dl_2(\tau)$ şi în plus,

$$\int_{a_1}^{b_1} F(f_1(t), g_1(t), h_1(t))dl_1(t) = \int_{a_2}^{b_2} F(f_2(\tau), g_2(\tau), h_2(\tau))dl_2(\tau).$$

8.3 Calculul integralei curbilinii în raport cu lungimea arcului

Teorema 8.3.1 *Dacă curba C dată de reprezentarea parametrică (8.9) este netedă, iar funcţia $F : \Delta \to \mathbb{R}$ este continuă, unde $D \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu ce conţine imaginea curbei C, atunci:*

$$\int_C F(x, y, z)dl = \int_a^b F(f(t), g(t), h(t))\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}dt$$

Demonstraţie. Conform teoremei (8.1.2), pentru orice $t \in [a, b]$
$l(t) = \displaystyle\int_a^t \sqrt{f'^2(u) + g'^2(u) + h'^2(u)}du$. Este suficient să arătăm că $l(t)$ este cu derivata continuă pe $[a, b]$ pentru a putea aplica teorema de reducere a unei integrale Stieltjes la o integrală Riemann (vezi [10], vol. II, pag. 24). Întrucât funcţia $\sqrt{f'^2(u) + g'^2(u) + h'^2(u)}$ este continuă pe $[a, b]$, rezultă că l este derivabilă şi $l'(t) = \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}$. Atunci

$$\begin{aligned} \int_C F(x, y, z)dl &= \int_a^b F(f(t), g(t), h(t))l'(t)dt = \\ &= \int_a^b F(f(t), g(t), h(t))\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}dt \end{aligned}$$

Observaţia 8.3.1 *1. În condiţiile teoremei 8.3.1 forma diferenţială*

$$dl = \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}dt$$

se numeşte element de arc.

2. *Fie C o curbă rectificabilă în plan având reprezentarea parametrică* $C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$. *Similar se defineşte integrala curbilinie a unei funcţii F definită pe un domeniu D din plan ce conţine imaginea curbei C. Dacă, în plus, curba C este netedă, iar funcţia F este continuă pe domeniul D, atunci*

$$\int_C F(x, y)dl = \int_a^b F(f(t), g(t))\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}dt$$

3. *Dacă curba C din plan este dată sub forma $y = f(x), x \in [a, b]$, $f \in C^1[a, b]$, atunci elementul de arc se scrie sub forma $dl = \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$.*

Exemplu 8.3.1 *1. Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int_C xydl$, unde*

$C : y = x^2$, $x \in [-1, 1]$. $dl = \sqrt{1 + 4x^2}dx \Rightarrow I = \int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1 + 4x^2}dx = 0$, *deoarece funcţia* $x^3\sqrt{1 + 4x^2}$ *este impară.*

2. *Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int_C \sqrt{y(2 - y)}dl$, unde*

$C : \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}dt = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}dt = \sqrt{2 - 2\cos t}dt; \\ I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}\sqrt{2 - 2\cos t}dt = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{1 - \cos t}dt \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt = \frac{8}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

3. *Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int_C xyzdl$, unde* $C : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$,

$t \in [0, 2\pi]$; $dl = \sqrt{a^2 + b^2}dt$,

$$I = \int_0^{2\pi} a^2bt\sin t\cos t\sqrt{a^2 + b^2}dt = \frac{1}{2}a^2b\sqrt{a^2 + b^2}\int_0^{2\pi} t\sin 2tdt =$$

$$= -\frac{1}{4}a^2b\sqrt{a^2 + b^2}t\cos 2t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}a^2b\sqrt{a^2 + b^2}\int_0^{2\pi}\cos 2tdt = -\frac{\pi}{2}a^2b\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Observaţia 8.3.2 *Dacă curba C din spaţiu este netedă pe porţiuni, adică $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ şi funcţia F este integrabilă în raport cu lungimea fiecărei curbe C_i, atunci*

$$\int_C F(x, y, z)dl = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} F(x, y, z)dl.$$

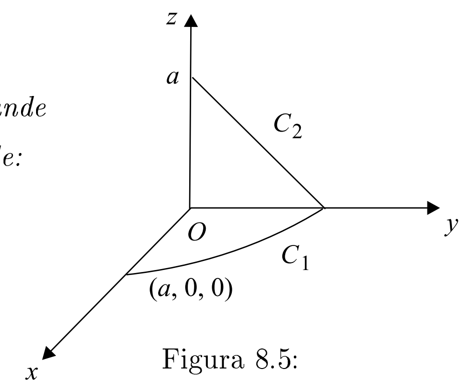

Figura 8.5:

Exemplu 8.3.2 *Să se calculeze integrala $I = \int_C (x+y+z)dl$, unde $C = C_1 \cup C_2$, iar curbele C_1 şi C_2 sunt definite de reprezentările:*

$$C_1 : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = a - t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in [0, a].$$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_1} (x + y + z)dl + \int_{C_2} (x + y + z)dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(\cos t + \sin t)dt + \int_0^a a\sqrt{2}dt \\ &= 2a^2 + a^2\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})a^2 \end{aligned}$$

8.4 Integrala curbilinie în raport cu coordonatele

Extindem conceptul de integrală Riemann a unei funcţii mărginite definite pe un interval $[a, b]$ la funcţii vectoriale definite pe lungimea unei curbe.

După cum se ştie din fizică, lucrul mecanic efectuat de o forţă constantă F ce se deplasează rectiliniu pe un segment AB este produsul scalar $L = (\bar{F}, \overline{AB}) = \|\bar{F}\| \, \|\overline{AB}\| \cos\theta$, unde θ este unghiul pe care-l face forţa F cu direcţia $\overline{AB}$. Dacă forţa $\bar{F}$ este de componente P, Q şi R, $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$, iar punctele A şi B de coordonate $A(x_1, y_1, z_1)$, respectiv $B(x_2, y_2, z_2)$, atunci $L = P(x_2 - x_1) + Q(y_2 - y_1) + R(z_2 - z_1)$. Considerăm o curbă rectificabilă şi netedă dată de reprezentarea parametrică

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b] \quad f, g, h \in C^1[a, b] \tag{8.12}$$

şi $F : D \to \mathbb{R}^3$ $F = (P, Q, R)$ o funcţie vectorială definită pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ ce conţine imaginea curbei C. Ne propunem să calculăm lucrul mecanic efectuat de forţa F de-a lungul curbei $C = \overset{\frown}{AB}$, unde $A(f(a), g(a), h(a))$, respectiv $B(f(b), g(b), h(b))$. Fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ căreia îi corespunde o diviziune $\Delta' : A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$ a curbei $\overset{\frown}{AB}$, unde $M_i(f(t_i), g(t_i), h(t_i))$, $i = \overline{0, n}$. Are loc şi reciproca, dacă $\Delta' : A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$ este o diviziune a curbei $\overset{\frown}{AB}$, unde $M_i(f(t_i), g(t_i), h(t_i))$, $i = \overline{0, n}$, atunci $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ este o diviziune a intervalului $[a, b]$.

Alegem punctele intermediare $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ ale diviziunii Δ, cărora le corespund punctele $N_i(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i)) \in \overset{\frown}{M_i M_{i+1}}$, $i = \overline{0, n-1}$.

Lucrul mecanic efectuat de forţa $\bar{F}$ de-a lungul curbei C îl vom aproxima cu suma

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\bar{F}(N_i), \overline{M_i M_{i+1}}),$$

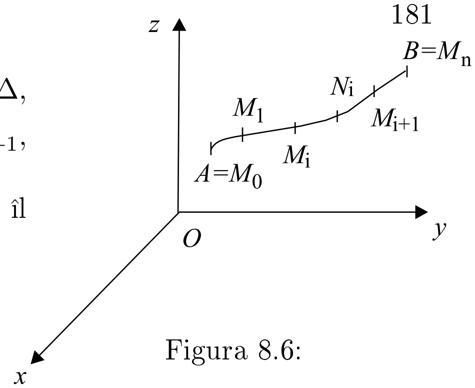

Figura 8.6:

adică cu suma lucrurilor mecanice efectuate de forţele constante $\bar{F}(N_i)$ pe segmenetele $M_i M_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$. Atunci

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))(f(t_{i+1}) - f(t_i)) + Q(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))(g(t_{i+1}) - \\ &- g(t_i)) + R(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))(h(t_{i+1}) - h(t_i)). \end{aligned}$$

Definiţia 8.4.1 *Dacă pentru orice şir de diviziuni ale curbei C, (Δ'_n), cu norma $\nu(\Delta'_n) \to 0$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $\xi_i^n \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ ale diviziunilor (Δ_n) ce corespund diviziunilor (Δ'_n) suma*

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n_1} P(f(\xi_i^n), g(\xi_i^n), h(\xi_i^n))(f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)) + R(f(\xi_i^n), g(\xi_i^n), h(\xi_i^n))(g(t_{i+1}^n) - \\ &- g(t_i^n)) + R(f(\xi_i^n), g(\xi_i^n), h(\xi_i^n))(h(t_{i+1}^n) - h(t_i^n)) \end{aligned} \tag{8.13}$$

are limită finită, atunci această limită se numeşte integrala curbilinie a funcţiei F în raport cu coordonatele sau integrala curbilinie de speţa a doua. Limita sumei (8.13) se notează

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \tag{8.14}$$

Observaţia 8.4.1

1. $$\begin{aligned} \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz &= \int_a^b P(f(t), g(t), g(t))df(t) + \\ + \int_a^b Q(f(t), g(t), h(t))dg(t) &+ \int_a^b R(f(t), g(t), h(t))dh(t) \end{aligned}$$

2. Integrala curbilinie în raport cu coordonatele în plan se defineşte în mod similar.

8.5 Calculul integralei curbilinii în raport cu coordonatele

Teorema 8.5.1 *Fie $C = \overset{\frown}{AB}$ o curbă netedă în spaţiu dată de (8.12) şi $F : D \to \mathbb{R}^3$, $F = (P, Q, R)$ o funcţie vectorială definită şi continuă pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ ce conţine imaginea curbei $\overset{\frown}{AB}$. Atunci*

$$\begin{aligned} \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz &= \int_a^b [P(f(t), g(t), h(t))f'(t) + \\ + Q(f(t), g(t), h(t))g'(t) &+ R(f(t), g(t), h(t))h'(t)]dt. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, căreia îi corespunde diviziunea $\Delta' : A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$ a curbei $\overset{\frown}{AB}$, $M_i(f(t_i), g(t_i), h(t_i))$, $i = \overline{0, n}$ şi punctele $N_i \in \overset{\frown}{M_i M_{i+1}}$, $N_i(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))$, unde $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ şi considerăm suma

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))(f(t_{i+1}) - f(t_i)). \tag{8.15}$$

Curba $\overset{\frown}{AB}$ fiind netedă, funcţiile $f, g, h \in C^1[a, b]$. Avem, conform teoremei creşterilor finite a lui Lagrange,

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = f'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i), \quad \tau_i \in (t_i, t_{i+1}), \quad i = \overline{0, n}.$$

Suma (8.15) devine astfel

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i)) f'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i)) f'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) + \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))(f'(\tau_i) - f'(\xi_i))(t_{i+1} - t_i).
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Deoarece $f \in C^1[a, b] \Rightarrow f' \in C^0[a, b] \Rightarrow f'$ este uniform continuă pe $[a, b] \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru orice ξ_i, $\tau_i \in [a, b]$ cu $|\xi_i - \tau_i| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(\xi_i) - f(\tau_i)| < \varepsilon$.

Funcţia $P \in C^0(\overset{\frown}{AB}) \Rightarrow P$ este mărginită pe $\overset{\frown}{AB} \Rightarrow\ \exists\ m > 0$ astfel ca $|P(x, y, z)| \leq m$, pentru orice $(x, y, z) \in \overset{\frown}{AB}$.

Alegem diviziunea Δ a intervalului $[a, b]$ aşa încât $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$. Atunci

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))(f'(\tau_i) - f'(\xi_i))(t_{i+1} - t_i) \right| < m\varepsilon(b - a).$$

Dacă pentru orice şir de diviziuni (Δ_n) ale intervalului $[a, b]$ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $\xi_i^n \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ trecem la limită în (8.16) obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i^n), g(\xi_i^n), h(\xi_i^n))(f(t_{i+1}) - f(t_i)) = \int_a^b P(f(t), g(t), h(t)) f'(t) dt.$$

Analog se obţin şi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} Q(f(\xi_i^n), g(\xi_i^n), h(\xi_i^n))(g(t_{i+1}) - g(t_i)) = \int_a^b Q(f(t), g(t), h(t)) g'(t) dt$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} R(f(\xi_i^n), g(\xi_i^n), h(\xi_i^n))(h(t_{i+1}) - h(t_i)) = \int_a^b R(f(t), g(t), h(t)) h'(t) dt.$$

Observaţia 8.5.1 *1. Dacă C este o curbă netedă în plan dată de reprezentarea C : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, $f, g \in C^1[a, b]$, atunci*

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(f(t), g(t))f'(t) + Q(f(t), g(t))g'(t)]dt.$$

2. Dacă $\bar{F}(x, y, z) = \bar{i}P(x, y, z) + \bar{j}Q(x, y, z) + \bar{k}R(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \overset{\frown}{AB}$ iar $\bar{r}(t) = \bar{i}f(t) + \bar{j}g(t) + \bar{k}h(t)$, $t \in [a, b]$, atunci

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{AB} \bar{F} \cdot d\bar{r},$$

unde $\bar{F} \cdot d\bar{r}$ reprezintă produsul scalar între vectorul forţă $\bar{F}$ şi vectorul deplasare $d\bar{r}$.

3. Dacă curba $\overset{\frown}{AB} = C$ este închisă, atunci integrala (8.14) se notează

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r}.$$

Teorema 8.5.2 *Valoarea integralei curbilinii (8.14) nu depinde de reprezentarea parametrică a curbei $\overset{\frown}{AB}$.*

Demonstraţie. Fie $d, d_1 \in \overset{\frown}{AB}$ definite de d : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$ şi d_1 : $\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \\ z = h_1(t) \end{cases}$, $t \in [c, e]$, $f, g, h \in C^1[a, b], f_1, g_1, h_1 \in C^1[c, e]$.

Întrucât $d \sim d_1$, rezultă că există o funcţie continuă, strict crescătoare $\varphi : [a, b] \to [c, e]$ astfel ca $\varphi(a) = c, \varphi(b) = e$ şi $f(t) = f_1(\varphi(t))$, $g(t) = g_1(\varphi(t))$, $h(t) = h_1(\varphi(t)), t \in [a, b]$. Conform teoremei 8.5.1, faţă de drumul d avem

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx = \int_a^b P(f(t), g(t), h(t))f'(t)dt, \tag{8.17}$$

iar faţă de drumul d_1 avem

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx = \int_c^e P(f_1(t), g_1(t), h_1(t))f_1'(t)dt. \tag{8.18}$$

Dacă în (8.18) facem schimbarea de variabilă $t = \varphi(u), u \in [a, b]$ se obţine

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z)dx &= \int_a^b P(f_1(\varphi(u)), g_1(\varphi(u)), h_1(\varphi(u)))f_1'(\varphi(u))\varphi'(u)du = \\ &= \int_a^b P(f(u), g(u), h(u))f'(u)du. \end{aligned}$$

Observaţia 8.5.2 *Dacă curba $C = \overset{\frown}{AB}$ este netedă pe porţiuni şi $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$, atunci*

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \sum_{i=1}^n \int_{C_i} P(x, y, z)dx + \\ &+ Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \end{aligned}$$

Exemplu 8.5.1 *1. Să se calculeze integrala curbilinie* $I = \int_C (2a-y)dx + xdy$, *curba* C *fiind dată de reprezentarea* $C : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$

$$I = a^2 \int_0^{2\pi} [(1+\cos t)(1-\cos t) + (t - \sin t)\sin t]dt = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = -2\pi a^2.$$

2. Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int_C xdx + ydy + zdz$, *curba* C *fiind dată de reprezentarea* $C : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b \sin t \\ z = ct \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^2 \cos t \sin t + b^2 \sin t \cos t + c^2 t)dt = -\frac{a^2-b^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt + \\ &+ \frac{c^2\pi^2}{8} = \frac{a^2-b^2}{4}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{c^2\pi^2}{8} = \frac{1}{8}(4b^2 - 4a^2 + c^2\pi^2). \end{aligned}$$

8.6 Proprietăţile integralei curbilinii

Dacă ţinem seama de teorema 8.5.1 şi de proprietăţile integralei Riemann, rezultă imediat următoarele proprietăţi ale integralei curbilinii în raport cu coordonatele.

1. Dacă funcţia vectorială $\bar{F}$ este integrabilă pe curba $\overset{\frown}{AB}$, atunci
$$\int_{AB} \bar{F}\cdot d\bar{r} = -\int_{BA} \bar{F}\cdot d\bar{r}.$$

2. Dacă funcţiile vectoriale $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$ sunt integrabile pe curba $\overset{\frown}{AB}$, atunci şi funcţia $\bar{F}_1 + \bar{F}_2$ este integrabilă pe curba $\overset{\frown}{AB}$ şi
$$\int_{AB} (\bar{F}_1 + \bar{F}_2)\cdot d\bar{r} = \int_{AB} \bar{F}_1 \cdot d\bar{r} + \int_{AB} \bar{F}_2 \cdot d\bar{r}\,.$$

3. Dacă funcţia vectorială $\bar{F}$ este integrabilă pe curba $\overset{\frown}{AB}$, atunci şi funcţia $\lambda\bar{F}, \lambda \in \mathbb{R}$, este integrabilă pe curba $\overset{\frown}{AB}$ şi
$$\int_{AB} \lambda\bar{F}\cdot d\bar{r} = \lambda\int_{AB} \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

8.7 Independenţa de drum a integralei curbilinii în raport cu coordonatele

După cum s-a putut constata integrala curbilinie (8.14) depinde de funcţiile P, Q, R de curba netedă C şi de sensul parcurs pe această curbă. Problema independenţei de drum este o problemă importantă atât în fizică (de exemplu lucrul mecanic al forţei gravitaţionale nu depinde de drum) cât şi în matematică, deoarece este mai uşor de calculat atunci când se cunosc numai extremităţile curbei C.

Teorema 8.7.1 *Fie funcţiile P, Q şi R definite şi continue pe un domeniu D din spaţiu. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca integrala curbilinie (8.14) să nu depindă de drum în D este ca să existe o funcţie F definită şi diferenţiabilă în D, astfel încât să avem*

$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz, \quad (x,y,z) \in D \tag{8.19}$$

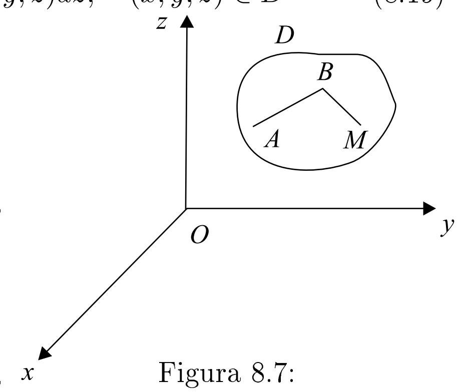

Figura 8.7:

Demonstraţie. $\Rightarrow$ Presupunem că integrala curbilinie (8.14) nu depinde de drum. Fie $A(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat în D şi $B(x,y,z)$ un punct variabil în D. Conform ipotezei integrala curbilinie calculată de la A la B depinde doar de P, Q, R şi coordonatele lui B, adică există o funcţie F definită în D aşa încât

$$F(x,y,z) = \int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Considerăm în D punctul $M(x+h, y, z)$ şi calculăm diferenţa

$$F(x+h,y,z) - F(x,y,z) = \int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz -$$
$$- \int_{AM} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{BM} P(x,y,z)dx +$$
$$+ Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_x^{x+h} P(x,y,z)dx, \quad (dy = dz = 0).$$

Deoarece P este continuă în D, conform teoremei de medie de la integrala Riemann, există $\theta \in (0,1)$ astfel ca $F(x+h,y,z) - F(x,y,z) = hP(x+\theta h, y, z)$. Atunci

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h,y,z) - F(x,y,z)}{h} = \lim_{h \to 0} P(x+\theta h, y, z) = P(x,y,z),$$

adică $F'_x(x,y,z) = P(x,y,z), (x,y,z) \in D$. Analog se obţine $F'_y(x,y,z) = Q(x,y,z)$ şi $F'_z(x,y,z) = R(x,y,z), (x,y,z) \in D$. Astfel $F \in C^1(D)$, deci F este diferenţiabilă şi

$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz, \quad (x,y,z) \in D.$$

$\Leftarrow$ Presupunem că există funcţia diferenţiabilă F în D astfel încât să se verifice relaţia (8.19). Atunci $F'_x(x,y,z) = P(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z) = Q(x,y,z)$ şi $F'_z(x,y,z) = R(x,y,z), \quad (x,y,z) \in D$.

Fie curba C dată de parametrizarea $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$, $f, g, h \in C[a,b]$, iar $A(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$, $B(f(t_1), g(t_1), h(t_1)) \in C$, $t_0, t_1 \in [a,b]$. Atunci

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int_{AB} F'_x(x,y,z)dx + F'_y(x,y,z)dy + F'_z(x,y,z)dz =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} [F'_x(f(t),g(t),h(t))f'(t) + F'_y(f(t),g(t),h(t))g'(t) +$$
$$+ F'_z(f(t),g(t),h(t))h'(t)]dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF}{dt}(f(t),g(t),h(t))dt =$$
$$= F(f(t_1),g(t_1),h(t_1)) - F(f(t_0),g(t_0),h(t_0)) = F(B) - F(A),$$

adică integrala curbilinie (8.14) nu depinde decât de A şi B.

Teorema 8.7.2 *Fie funcţiile P, Q şi R definite pe un domeniu D din spaţiu, pentru care există şi sunt continue în D derivatele parţiale $P'_y, P'_z, Q'_x, Q'_z, R'_x, R'_y$. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca integrala curbilinie (8.14) să nu depindă de drum în D este ca*

$$P'_y = Q'_x, \quad P'_z = R'_x, \quad Q'_z = R'_y \tag{8.20}$$

Demonstraţie. $\Rightarrow$ Presupunem că integrala (8.14) nu depinde de drum. Atunci, conform teoremei 8.7.1, există o funcţie F diferenţiabilă în D astfel ca $F'_x(x,y,z) = P(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z) = Q(x,y,z)$ şi $F'_z(x,y,z) = R(x,y,z), (x,y,z) \in D$. Conform ipotezei, există derivatele parţiale de ordinul al doilea mixte ale funcţiei F continue în D, $F''_{xy} = P'_y, F''_{yx} = Q'_x, F''_{xz} = P'_z, F''_{zx} = R'_x$, $F''_{yz} = Q'_z$ şi $F''_{zy} = R'_y$. Aplicând comutativitatea derivatelor parţiale mixte (teorema lui Schwarz) rezultă relaţiile (8.20).

$\Leftarrow$ Fie funcţia F definită în D dată de relaţia

$$F(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt, \tag{8.21}$$

unde (x_0, y_0, z_0) este un punct fixat din D, iar $(x,y,z) \in D$.

Deoarece P, Q şi R sunt funcţii continue şi cu derivate parţiale continue în D, din (8.20) avem

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,z) &= P(x,y_0,z_0) + \int_{y_0}^{y} Q'_x(x,t,z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R'_x(x,y,t)dt = \\ &= P(x,y_0,z_0) + \int_{y_0}^{y} P'_y(x,t,z_0)dt + \int_{z_0}^{z} P'_z(x,y,t)dt = P(x,y_0,z_0) + \\ &\quad + P(x,y,z_0) - P(x,y_0,z_0) + P(x,y,z) - P(x,y,z_0) = P(x,y,z). \end{aligned}$$

Derivând (8.21) în raport cu y se obţine:

$$\begin{aligned} F'_y(x,y,z) &= Q(x,y,z_0) + \int_{z_0}^{z} R'_y(x,y,t)dt = Q(x,y,z_0) + \int_{z_0}^{z} Q'_z(x,y,t) = \\ &= Q(x,y,z_0) + Q(x,y,z) - Q(x,y,z_0) = Q(x,y,z), \end{aligned}$$

şi derivând (8.21) în raport cu z rezultă $F'_z(x,y,z) = R(x,y,z)$.

În calculele de mai sus am aplicat formula Leibniz-Newton, şi teorema de derivare a unei integrale în raport cu un parametru.

Deoarece $P, Q, R \in C^0(D) \Rightarrow F \in C^1(D) \Rightarrow F$ diferenţiabilă pe D şi

$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

care, conform teoremei 8.7.1, ne dă independenţa de drum a integralei (8.14).

Pentru integrale curbilinii (8.14) în plan care nu depind de drum se obţin rezultate asemănătoare.

Teorema 8.7.3 *Fie funcţiile P şi Q definite şi continue pe un domeniu plan D. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca integrala curbilinie de speţa a doua să nu depindă de drum în D este ca să existe o funcţie F definită şi diferenţiabilă în D, astfel încât să avem*

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \quad (x,y) \in D.$$

Teorema 8.7.4 *Fie funcţiile P şi Q definite şi continue pe un domeniu plan D pentru care există şi sunt continue în D derivatele parţiale P'_y şi Q'_x. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca integrala curbilinie de speţa a doua să nu depindă de drum în D este ca*

$$P'_y = Q'_x \tag{8.22}$$

În plus, funcţia F din teorema 8.7.3 este dată de următoarea relaţie

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt, \tag{8.23}$$

unde (x_0, y_0) este un punct fix din D, iar $(x,y) \in D$.

Exemplu 8.7.1 *1. Să se arate că integala $I = \int_{AB} y^2e^x dx + 2ye^x dy$ este independentă de drum şi să se calculeze dacă $A(0,2)$ şi $B(2,0)$.*

$$P(x,y) = y^2e^x, \quad Q(x,y) = 2ye^x \quad i \quad P'_y = Q'_x = 2ye^x,$$

deci este verificată condiţia (8.22). Conform relaţiei (8.23), rezultă

$$I = F(2,0) = \int_0^2 4e^t dt + \int_2^0 2e^2 t dt = 4e^t \,|_0^2 + e^2t^2 \,|_0^2 = -4.$$

2. Să se arate că integrala $I = \int_{AB} \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz$, luată pe o curbă ce nu intersectează planul $z = 0$ este independentă de drum şi să se calculeze dacă $A(-1,3,1)$ şi $B(2,6,3)$.

$$\begin{aligned} &P(x,y,z) = \frac{y}{z}, \quad Q(x,y,z) = \frac{x}{z}, \quad R(x,y,z) = \frac{-xy}{z^2} \quad i \\ &P'_y = Q'_x = \frac{1}{z}, \quad P'_z = R'_x = -\frac{y}{z^2}, \quad Q'_z = R'_y = -\frac{x}{z^2}, \end{aligned}$$

deci este verificată condiţia (8.20). Conform relaţiei (8.21), rezultă

$$I = F(2,6,3) = \int_{-1}^{2} 3dt + \int_3^6 2dt - \int_1^3 \frac{18}{t^2}dt = 15 + 18\frac{1}{t} \,|_1^3 = 3.$$

8.8 Aplicaţii ale integralelor curbilinii

1. Masa şi centrul de greutate ale unui fir material.

Revenim la problema determinării masei unui fir material. Dacă $\rho(x,y,z)$ este densitatea distribuită în fiecare punct al curbei rectificabile C, $(x,y,z) \in I(C)$, atunci masa M şi coordonatele centrului de greutate (x_G, y_G, z_G) ale firului sunt date de următoarele relaţii:

$$\begin{aligned} &M = \int_C \rho(x,y,z)dl, \qquad x_G = \frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y,z)dl, \\ &y_G = \frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y,z)dl, \qquad z_G = \frac{1}{M}\int_C z\rho(x,y,z)dl. \end{aligned}$$

Fie curba $C = \widehat{AB}$ şi $\Delta : A = N_0, N_1, \ldots, N_n = B$ o diviziune a curbei, $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ centrul de greutate al segmentului N_iN_{i+1} de masă $m_i = \rho_i N_iN_{i+1}$, unde ρ_i este densitatea pe N_iN_{i+1}, $i = \overline{0, n-1}$.

Centrul de greutate al firului îl vom aproxima cu centrul de greutate al liniei poligonale $N_0, N_1, \ldots, N_n$ şi care este dat de relaţiile

$$\begin{aligned} x_{G_n} &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \rho_i l_i\right) / \left(\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i l_i\right) \\ y_{G_n} &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \rho_i l_i\right) / \left(\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i l_i\right) \\ z_{G_n} &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i \rho_i l_i\right) / \left(\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i l_i\right). \end{aligned}$$

Pentru orice şir de diviziuni (Δ_n) ale curbei $\widehat{AB}$ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ avem

$$\begin{aligned} x_G &= \lim_{n\to\infty} x_{G_n} = \frac{1}{M} \int_C x\rho(x,y,z)dl \\ y_G &= \lim_{n\to\infty} y_{G_n} = \frac{1}{M} \int_C y\rho(x,y,z)dl \\ z_G &= \lim_{n\to\infty} z_{G_n} = \frac{1}{M} \int_C z\rho(x,y,z)dl\,. \end{aligned}$$

Dacă firul material este omogen, atunci densitatea $\rho(x,y,z) = \rho$ este constantă pentru orice $(x,y,z) \in I(C)$, iar masa şi coordonatele centrului de greutate ale firului sunt date de următoarele relaţii:

$$M = \rho l(C), \qquad x_G = \frac{1}{l(C)} \int_C x dl, \qquad y_G = \frac{1}{l(C)} \int_C y dl, \qquad z_G = \frac{1}{l(C)} \int_C z dl.$$

Exemplu 8.8.1 *Să se calculeze masa şi coordonatele centrului de greutate G al firului material având densitatea $\rho(x,y,z) = 1$ şi reprezentarea $C : x = (\pi^2 - t^2)^{1/2}\cos t$, $y = (\pi^2 - t^2)^{1/2}\sin t$, $z = (4\pi^2 - 1)^{1/2}(\pi^2 - t^2)^{1/2}$, $t \in [-\pi, \pi]$. Deoarece $dl = (\pi^2 + t^2)(\pi^2 - t^2)^{-1/2}dt$ obţinem*

$$M = \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2)(\pi^2 - t^2)^{-1/2} dt = \pi^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos^2 u) du = \frac{3\pi^3}{2}\,,$$

unde $t = \pi \cos u$.

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{2}{3\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2)\cos t dt = -\frac{8}{3\pi^2}\,, \\ y_G &= \frac{2}{3\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2)\sin t dt = 0\,, \\ z_G &= \frac{2}{3\pi^3}(4\pi^2 - 1)^{1/2} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2) dt = \frac{16}{9}(4\pi^2 - 1)^{1/2}. \end{aligned}$$

Capitolul 9

Integrale duble

În acest capitol vom extinde noţiunea de integrală, înlocuind intervalul de integrare $[a, b]$ cu un domeniu plan închis şi mărginit. Vom considera numai acele domenii care au arie (sunt măsurabile Jordan), iar dintre acestea (pentru uşurinţă) pe acelea a căror frontieră este o curbă netedă pe porţiuni.

9.1 Mulţimi măsurabile Jordan

Definiţia 9.1.1 *Fie E o mulţime. O clasă $\mathcal{K}$ de părţi ale lui E se numeşte clan dacă are următoarele proprietăţi:*
1. $A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n \in \mathcal{K}, \forall\, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{K}$;
2. $A_1 - A_2 \in \mathcal{K}, \forall\, A_1, A_2 \in \mathcal{K}$.

Observaţia 9.1.1 *1. Dacă $A_1, A_2 \in \mathcal{K}$ atunci $A_1 \cap A_2 = A_1 - (A_1 - A_2) \in \mathcal{K}$.*
2. Dacă $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{K}$ atunci $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{K}$.

Definiţia 9.1.2 *O funcţie $m : \mathcal{K} \to V$, unde $\mathcal{K}$ este un clan, iar V un spaţiu vectorial se numeşte măsură dacă $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$, $\forall\, A_1, A_2 \in \mathcal{K}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.*

O măsură $m : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ se numeşte măsură reală. O măsură reală m pentru care $m(A) \geq 0, \forall\, A \in \mathcal{K}$ se numeşte măsură pozitivă.

Proprietăţi:

1. $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$, $\forall\, A_i \in \mathcal{K}$, $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall\, i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$;

2. $m(A_1 - A_2) = m(A_1) - m(A_2)$, $\forall\, A_1, A_2 \in \mathcal{K}$, $A_2 \subset A_1$ (m este substractivă);

3. Dacă m este măsură pozitivă, atunci
   $m(A_2) \leq m(A_1), \forall\, A_1, A_2 \in \mathcal{K}, A_2 \subset A_1$ (m este crescătoare),
   $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$, $\forall\, A_i \in \mathcal{K}, i = \overline{1, n}$ (m este subaditivă).

După cum se ştie, un poligon este domeniul plan mărginit de o linie poligonală închisă, fără puncte multiple. Fiecărui poligon P i se ataşează un număr $a(P)$ numit aria poligonului. (Calculul ariei poligoanelor ne propunem a fi cunoscut). Clasa poligonaleor formează un clan.

Funcţia $a : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ $a(P)$ =aria poligonului $P, P \in \mathcal{P}$, este a este o măsură pozitivă pe clanul poligoanelor $\mathcal{P}$.

Fie A o mulţime plană mărginită. Atunci există poligoanele $P, Q \in \mathcal{P}$ astfel ca $P \subset A \subset Q$. Poligonul P se numeşte poligon interior, iar Q poligon exterior.

$a(P) \leq a(Q)$, $\forall$ $P, Q \in \mathcal{P}$, P poligon interior, iar Q poligon exterior.

Notăm $a_i(A) = \sup_{P\subset A} a(P)$ şi $a_e(A) = \inf_{A\subset Q} a(Q)$. Numerele $a_i(A)$ şi $a_e(A)$ se numesc aria interioară a mulţimii A, respectiv aria exterioară în sensul Jordan a lui A şi avem $a(P) \leq a_i(A) \leq a_e(A) \leq a(Q), \forall$ $P, Q \in \mathcal{P}, P \subset A \subset Q$.

Definiţia 9.1.3 *Mulţimea mărginită A din plan are arie (sau este măsurabilă Jordan) dacă $a_i(A) = a_e(A)$.*

Dacă mulţimea A este măsurabilă Jordan, atunci valoarea $a(A) = a_i(A) = a_e(A)$ se numeşte aria mulţimii A.

Observaţia 9.1.2 *Dacă mulţimea A este măsurabilă în sens Jordan, atunci $\forall$ $P, Q \in \mathcal{P}$ $P \subset A \subset Q$ avem $a(P) \leq a(A) \leq a(Q)$.*

Criterii de măsurabilitate

Teorema 9.1.1 *Criteriul lui Darboux*

O mulţime plană A este măsurabilă dacă şi numai dacă $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ poligonale $P_\varepsilon, Q_\varepsilon$, $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$ aşa încât

$$a(Q_\varepsilon) - a(P_\varepsilon) < \varepsilon \tag{9.1}$$

DEMONSTRAŢIE: $\Rightarrow$ Presupunem mulţimea A măsurabilă. Atunci

$$a_i(A) = \sup_{P\subset A} a(P) = a(A) = \inf_{A\subset Q} a(Q) = a_e(A).$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există poligoanele $P_\varepsilon, Q_\varepsilon$, $P_\varepsilon \subset A \subset Q$ astfel ca

$$a(A) < a(P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad a(Q_\varepsilon) < a(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci, adunând cele două inegalităţi, se obţine

$$a(Q_\varepsilon) - a(P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Presupunem că $\forall$ $\varepsilon > 0$, $\exists$ $P_\varepsilon, Q_\varepsilon \in \mathcal{P}$, $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$ astfel încât are loc (9.1). Avem

$$\begin{aligned} &a(P_\varepsilon) \leq a_i(A) \leq a_e(A) \leq a(Q_\varepsilon), \\ &a_e(A) - a_i(A) \leq a(Q_\varepsilon) - a(P_\varepsilon) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Prin urmare, $a_e(A) - a_i(A) < \varepsilon, \forall$ $\varepsilon > 0$, adică $a_e(A) = a_i(A)$, deci mulţimea A este măsurabilă.

Teorema 9.1.2 *O mulţime A este măsurabilă Jordan dacă şi numai dacă există un şir de poligoane interioare (P_n) şi unul de poligoane exterioare (Q_n) astfel ca şirurile ariilor lor $(a(P_n)), (a(Q_n))$ au aceeaşi limită. Mai mult*

$$\lim_{n\to\infty} a(P_n) = \lim_{n\to\infty} a(Q_n) = a(A). \tag{9.2}$$

Demonstraţie: $\Rightarrow$ Presupunem mulţimea A măsurabilă. Atunci, conform teoremei 9.1.1, pentru $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \geq 1$, există poligoanele P_n, Q_n, $P_n \subset A \subset Q_n$, $n \geq 1$ aşa încât $a(Q_n) - a(P_n) < \frac{1}{n}$. Avem

$$\begin{aligned} & a(A) - a(P_n) \leq a(Q_n) - a(P_n) < \frac{1}{n} \quad \text{i} \\ & a(Q_n) - a(A) \leq a(Q_n) - a(P_n) < \frac{1}{n}, \quad \text{deci} \\ & \lim_{n\to\infty} a(P_n) = \lim_{n\to\infty} a(Q_n) = a(A). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Presupunem că există şirurile de poligoane interioare, respectiv exterioare mulţimii $A, (P_n)$ şi (Q_n) astfel ca $\lim_{n\to\infty} a(P_n) = \lim_{n\to\infty} a(Q_n)$. Deoarece $a(P_n) \leq a_i(A) \leq a_e(A) \leq a(Q_n)$, $\forall\ n \geq 1$ trecând la limită obţinem $\lim_{n\to\infty} a(Q_n) = a_i(A) = a_e(A) = \lim_{n\to\infty} a(P_n)$, adică mulţimea A este măsurabilă şi aria sa este dată de (9.2).

Lema 9.1.1 *Imaginea unei curbe netede are arie nulă.*

Demonstraţie: Fie funcţiile $f, g \in C^1[a,b]$ şi curba $C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, $a \leq t \leq b$. Arătăm că $\operatorname{Im} C$ are arie nulă. Pentru aceasta fie $\varepsilon > 0$ şi $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ cu norma $\nu(\Delta) < \varepsilon$. Conform teoremei creşterilor finite pentru $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$ există punctele $\xi_i, \eta_i \in [t-i, t]$ astfel încât să avem $f(t) - f(t_i) = f'(\xi_i)(t - t_i)$, $g(t) - g(t_i) = g'(\xi_i)(t - t_i)$. Deoarece $f', g' \in C^0[a,b]$, atunci ele sunt mărginite pe $[a,b]$, deci există un număr $M > 0$ astfel încât $|f'(\xi_i)| \leq M$, $g'(\eta_i)| \leq M$. Astfel $|f(t) - f(t_i)| \leq M(t - t_i) \leq M(t_{i+1} - t_i)$ şi $|g(t) - g(t_i)| \leq M(t - t_i) \leq M(t_{i+1} - t_i)$ pentru $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$.

Fie Q_i domeniul definit de pătratul cu centrul în punctul $(f(t_i), g(t_i))$ şi având latura de lungime $2M(t_{i+1} - t_i)$. Avem $\operatorname{Im}(C) \subset \bigcup_{i=\overline{0,n-1}} Q_i$ şi notăm $a_e(C) =$ aria exterioară $a\operatorname{Im}(C)$. Atunci

$$\begin{aligned} a_e(C) &< \sum_{i=0}^{n-1} a(Q_i) = \sum_{i=0}^{n-1} 4M^2 (t_{i+1} - t_i)^2 < \\ &< \sum_{i=0}^{n-1} 4M^2 \varepsilon (t_{i+1} - t_i) = 4M^2 \varepsilon (b - a). \end{aligned}$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că $a_e(C) = 0$. Dacă notăm cu $a_i(C)$ =aria interioară $a\operatorname{Im}(C)$, atunci $0 \leq a_i(C) \leq a_e(C)$, de unde $a_i(C) = a_e(C) = 0$, adică imaginea curbei C are arie nulă.

Teorema 9.1.3 *Dacă domeniul mărginit A este împărţit în două domenii A_1 şi A_2, cu ajutorul unei curbe netede pe porţiuni, atunci $a(A) = a(A_1) + a(A_2)$.*

Demonstraţie: Fie $C_1 = A \cap C$. Din lema 9.1.1 rezultă $a(C) = 0$, deci $a(C_1) = 0$. Atunci

$$a(A) = a(A_1) + a(A_2) + a(A \cap C) = a(A_1) + a(A_2).$$

9.2 Integrala dublă. Noţiuni introductive

Definiţia 9.2.1 *Un domeniu închis şi mărginit se numeşte domeniu compact.*

Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ mărginită pe domeniul compact D. Presupunem că $f(x,y) \geq 0$, pentru orice $(x,y) \in D$ şi vrem să calculăm volumul corpului mărginit de suprafaţa S, unde S este suprafaţa dată de $z = f(x,y), (x,y) \in D$, planul xOy ($D = \text{pr}_{xOy}S$) şi cilindrul cu generatoarele paralele cu axa OZ.

Pentru a putea calcula acest volum avem nevoie de câteva noţiuni. Domeniul D fiind mărginit el este interior unui interval $[a,b] \times [c,d]$.

Fie $\begin{array}{l} \delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \\ \bar{\delta} : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d \end{array}$
diviziuni ale intervalelor $[a,b]$ respectiv $[c,d]$.

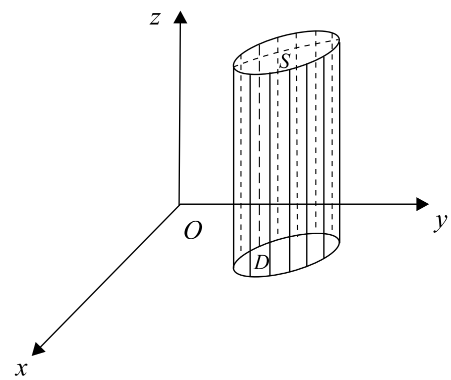

Figura 9.1:

Paralele prin punctele celor două diviziuni la axele de coordonate împart $[a,b] \times [c,d]$ în $m \times n$ dreptunghiuri $\delta_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, m-1}$. Notăm $\mathcal{D} = \{\delta_{ij} \quad \delta_{ij} \subset D$ sau δ_{ij} conţine şi puncte ale lui D şi ale lui $I - D\}$.

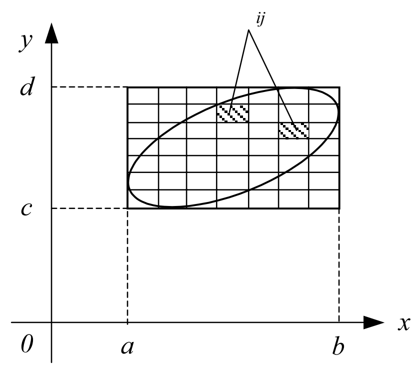

Figura 9.2:

Definiţia 9.2.2 *Se numeşte diviziune a domeniului compact D mulţimea dreptunghiurilor $\delta_{ij} \in \mathcal{D}$, notată prin $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$. Numărul real pozitiv*

$$\nu(\Delta) = \max_{\substack{i=\overline{0,n-1} \\ j=\overline{0,m-1}}} (x_{i+1} - x_i, y_{j+1} - y_j) \leq (\nu(\delta), \nu(\bar{\delta}))$$

se numeşte norma diviziunii Δ.

Dacă diviziunile δ' şi $\bar{\delta}'$ ale intervalelor $[a,b]$, respectiv $[c,d]$ sunt mai fine decât δ şi $\bar{\delta}$ ($\delta \subset \delta'$ şi $\bar{\delta} \subset \bar{\delta}'$), atunci vom spune că diviziunea Δ' a domeniului D (determinată de δ' şi $\bar{\delta}'$) este mai fină decât diviziunea Δ şi vom scrie $\Delta \subset \Delta'$, iar

$$\delta(\Delta') \leq \max(\nu(\delta'), \nu(\bar{\delta}')) \leq \max(\nu(\delta), \nu(\bar{\delta})).$$

Dacă Δ şi Δ' sunt diviziuni ale domeniului D şi dacă $\nu(\Delta') \leq \nu(\Delta)$ nu rezultă că Δ' este mai fină decât Δ.

Fie $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$ o diviziune a domeniului compact Δ. Vom nota cu

$$m_k = \inf_{(x,y)\in\delta_k} f(x,y), \quad M_k = \sup_{(x,y)\in\delta_k} f(x,y), a_k = \text{ aria } \delta_k, \quad k = \overline{1,p}$$

şi considerăm sumele $s_\Delta = \sum_{k=1}^{p} m_k a_k$, $S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{p} M_k a_k$. Sumele $s_\Delta(f)$ şi $S_\Delta(f)$ se numesc suma Darboux inferioară, respectiv superioară a funcţiei f corespunzătoare diviziunii Δ. Dacă $(\xi_k, \mu_k) \in \delta_k, k = \overline{1,p}$ suma $\sigma_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) a_k$ se numeşte suma Riemann a funcţiei f corespunzătoare diviziunii D şi punctelor intermediare $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$.

9.3 Proprietăţi ale sumelor Darboux şi Riemann

1. $ma(D) \leq s_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f) \leq S_\Delta(f) \leq Ma(D)$, unde $m = \inf_{(x,y)\in D} f(x,y)$, $M = \sup_{(x,y)\in D} f(x,y)$, iar $a(D)$ este aria domeniului D;

2. $s_\Delta(f) = \inf\limits_{(\xi_k,\eta_k)\in\delta_k} \sigma_\Delta(f), \quad S_\Delta(f) = \sup\limits_{(\xi_k,\eta_k)\in\delta_k} \sigma_\Delta(f)$

Întradevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$, deoarece $m_k = \inf_{(x,y)\in\delta_k} f(x,y)$, există $(\xi_k,\eta_k) \in \delta_k$ astfel încât

$$f(\xi_k,\eta_k) - m_k < \frac{\varepsilon}{a(D)}, \quad k = \overline{1,p}.$$

Atunci

$$\sigma_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sup_{k=\overline{1,p}} (f(\xi_k,\eta_k) - m_k) < \sum_{k=1}^{p} \frac{\varepsilon}{a(D)} a(\delta_k) = \varepsilon,$$

deci $\sigma_\Delta(f) - \varepsilon < s_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f)$, adică $s_\Delta(f) = \inf_{(\xi_k,\eta_k)\in\delta_k} \sigma_\Delta(f)$. Analog se arată şi cealaltă egalitate.

3. Dacă Δ şi Δ' sunt diviziuni ale domeniului D, Δ' mai fină decât Δ, atunci

$$s_\Delta(f) \leq s_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta'}(f) \leq S_\Delta(f).$$

Presupunem că $\delta_k = \delta'_{k_1} \cup \delta'_{k_2}$, unde $\delta'_{k_1}, \delta'_{k_2} \in \Delta'$, iar

$$m'_k = \inf_{(x,y)\in\delta'_{k_1}} f(x,y), \quad m''_k = \inf_{(x,y)\in\delta'_{k_2}} f(x,y), \quad m_k \leq m'_k, \quad m_k \leq m''_k, \quad k = \overline{1,p}.$$

Atunci $m_k a(\delta'_{k_1}) \leq m'_k a(\delta'_{k_1})$, $m_k a(\delta'_{k_2}) \leq m''_k a(\delta'_{k_2})$, care prin adunare ne conduc la $m_k a(\delta_k) \leq m'_k a(\delta'_{k_1}) + m''_{k_1} a(\delta'_{k_2})$. Dacă δ_k este o reuniune finită de dreptunghiuri din Δ' se obţine o inegalitate corespunzătoare şi însumând după $k = \overline{1,p}$ rezultă $s_\Delta(f) \leq s_{\Delta'}(f)$.

Analog se arată că $S_{\Delta'}(f) \leq S_\Delta(f)$.

4. Oricare ar fi diviziunile Δ şi Δ' ale domeniului D avem

$$s_\Delta(f) \leq S_{\Delta'}(f).$$

5. Dacă $\Delta^* = \{\Delta \,|\, \Delta \text{ diviziune a domeniului } D\}$ atunci

$$\sup_{\Delta\in\Delta^*} s_\Delta(f) \leq \inf_{\Delta\in\Delta^*} S_\Delta(f),$$

(s_Δ) este mărginită superior, iar (S_Δ) este mărginită inferior. Într-adevăr, dacă $\Delta' \in \Delta^*$, atunci, conform proprietăţii 4 $s_\Delta \leq S_{\Delta'}$, pentru orice $\Delta \in \Delta^*$, adică (s_Δ) este majorată de $S_{\Delta'}$, iar dacă $\Delta'' \in \Delta^*$, atunci $s_{\Delta''} \leq S_\Delta$, pentru orice $\Delta \in \Delta^*$, adică (S_Δ) este minorată de $s_{\Delta''}$.

6. Fie $f(x,y) \geq 0, (x,y) \in D$. Suma Darboux inferioară respectiv superioară reprezintă volumele corpurilor alcătuite din reuniunea a p paralelipipede având ca bază dreptunghiurile şi înălţimile corespunzătoare m_k, respectiv M_k, $k = \overline{1,p}$. Suma Riemann reprezintă volumul corpului alcătuit din reuniunea a p paralelilipede având ca bază dreptunghiurile δ_k şi înălţimile corespunzătoare $f(\xi_k,\eta_k)$, $(\xi_k,\eta_k) \in \delta_k$, $k = \overline{1,p}$.

Definiţia 9.3.1 *Fie $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ o funcţie definită şi mărginită pe domeniul compact D, Funcţia f este integrabilă Riemann pe D. dacă există un număr real I ce verifică proprietatea:*

pentru orice $\varepsilon > 0$, *există* $\delta(\varepsilon) > 0$ *astfel ca pentru orice* $\Delta \in \Delta^*$ *cu* $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ *şi pentru orice* $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$ *să avem* $|\sigma_\Delta(f) - I| < \varepsilon$.

Numărul real I *se numeşte integrala Riemann a funcţiei* f *pe domeniul* D *sau integrala dublă a funcţiei* f *pe* D *şi se notează*

$$I = \iint_D f(x, y) dxdy = \lim_{\nu(\Delta) \to 0} \sigma_\Delta(f).$$

Observaţia 9.3.1 *1. Expresia* $dxdy$ *se numeşte element de arie în coordonate carteziene.*

2. Dacă $f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$ *şi* f *integrabilă pe* D, *atunci* $\iint_D f(x, y) dxdy$ *reprezintă volumul corpului mărginit de suprafaţa* $S : z = f(x, y), (x, y) \in D (D = pr_{xOy} S)$, *planul* xOy *şi cilindrul proiectant al conturului lui* S *pe conturul lui* D.

Teorema 9.3.1 *Criteriul de integrabilitate al lui Darboux.*

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcţie definită şi mărginită pe domeniul compact* D *din plan. Funcţia* f *este integrabilă pe* D *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $\delta(\varepsilon) > 0$ *astfel ca pentru orice* $\Delta \in \Delta^*$ *cu* $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ *să avem* $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

DEMONSTRAŢIE. $\Rightarrow$ Presupunem funcţia f mărginită şi integrabilă pe D. Atunci conform definiţiei 9.3.1 există $I = \iint_D f(x, y) dxdy \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $\Delta \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$ să avem $|\sigma_k(f) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Conform proprietăţii 2 avem $I - \frac{\varepsilon}{2} < s_\Delta(f) \leq S_\Delta(f) < I + \frac{\varepsilon}{2}$, deci $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < I + \frac{\varepsilon}{2} - (I - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Presupunem că este îndeplinită condiţia din enunţul teoremei. Pentru orice $\Delta \in \Delta^*$ avem $s_\Delta(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_\Delta(f)$, unde $\underline{I} = \sup_{\Delta \in \Delta^*} s_\Delta$, iar $\bar{I} = \inf_{\Delta \in \Delta^*} S_\Delta$.

Dacă $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$, atunci $\bar{I} - \underline{I} \leq S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$. Cum $\varepsilon > 0$ este ales arbitrar, rezultă $\underline{I} = \bar{I}$. Notând $\underline{I} = \bar{I} = I$ avem

$$s_\Delta(f) \leq I \leq S_\Delta(f), \qquad s_\Delta(f) - S_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f) - I \leq S_\Delta(f) - s_\Delta(f),$$

deci $|\sigma_\Delta(f) - I| < \varepsilon$ pentru orice $\Delta \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$, adică f este integrabilă şi $I = \iint_D f(x, y) dxdy$.

Definiţia 9.3.2 *O funcţie* $f : D \to \mathbb{R}$ *definită şi mărginită pe domeniul compact* D *plan este integrabilă pe* D *dacă pentru orice şir de diviziuni* (Δ_n) *ale domeniului* D *cu* $\nu(\Delta_n) \to 0$ *şirurile sumelor Darboux* (s_{Δ_n}) *şi* (S_{Δ_n}) *au o limită comună finită. În acest caz*

$$\lim_{n \to \infty} s_{\Delta_n} = \lim_{n \to \infty} S_{\Delta_n} = \iint_D f(x, y) dxdy$$

Teorema 9.3.2 *Orice funcţie* $f : D \to \mathbb{R}$ *definită şi continuă pe domeniul compact* D *plan este integrabilă pe* D.

DEMONSTRAŢIE. Fie $\Delta \in \Delta^*, \Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$. Funcţia f fiind continuă pe D ea este continuă pe mulţimile compacte $\delta_k, k = \overline{1, p}$, deci f este mărginită şi îşi atinge marginile pe

$\delta_k, k = \overline{1,p}$. Astfel, există punctele (x'_k, y'_k), $(x''_k, y''_k) \in \delta_k$ încât $f(x'_k, y'_k) = m_k$, $f(x''_k, y''_k) = M_k$. Avem

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{p}(M_k - m_k)a(\delta_k) = \sum_{k=1}^{p}(f(x''_k, y''_k) - f(x'_k, y'_k))a(\delta_k).$$

Pe de altă parte, funcţia f este uniform continuă pe D, deoarece ea este continuă pe domeniul compact D, deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $(x, y), (x', y') \in D$ cu $|x - x'| < \delta(\varepsilon), |y - y'| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x, y) - f(x', y')| < \dfrac{\varepsilon}{a(\Delta)}$.

Deoarece pentru orice diviziune Δ, cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ avem $|x'_k - x''_k| < \delta(\varepsilon)$, $|y'_k - y''_k| < \delta(\varepsilon)$ rezultă

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \le \frac{\varepsilon}{a(D)} \sum_{k=1}^{n} a(\delta_k) = \varepsilon\,,$$

adică f este integrabilă pe D.

Teorema 9.3.3 *Dacă mulţimea T a punctelor de discontinuitate a unei funcţii mărginite f definită pe un domeniu închis şi mărginit $D(T \subset D)$ este formată dintr-un număr finit de arce netede, atunci funcţia f este integrabilă pe domeniul D.*

Demonstraţie: Deoarece funcţia f este mărginită, rezultă că există un număr $M > 0$ astfel încât $|f(x, y)| \le M, \forall\ (x, y) \in D$.

Fie D_1 mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei f. Mulţimea D_1 fiind mărginită există un poligon Q astfel încât $D_1 \subset Q$ şi $a(Q) < \frac{\varepsilon}{4M}$.

Fie $D_2 = D - \overset{\circ}{Q}$. Mulţimea D_2 este închisă şi mărginită şi, cum f este continuă pe D_2, rezultă că f este uniform continuă pe D_2.

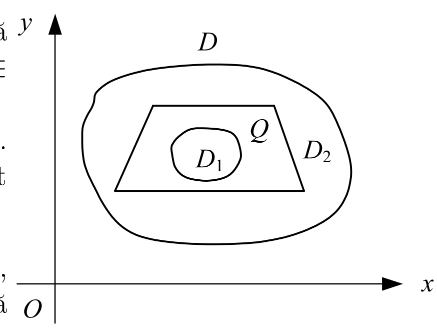

Figura 9.3:

Alegem $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$ o diviziune a mulţimii D_2 astfel încât $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{2a(D)}$, unde $M_i = \sup_{(x,y)\in\delta_i} f(x, y)$, $m_i = \inf_{(x,y)\in\delta_i} f(x, y)$, $i = \overline{1, n}$.

La această partiţie se adaugă Q.

$$\begin{aligned} S_\Delta - s_\Delta &= M'a(Q) - m'a(Q) + \sum_{i=1}^{p}(M_i - m_i)a(\delta_i) \le \\ &\le (M' - m')\frac{\varepsilon}{4M} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\varepsilon}{2a(D)}a(\delta_i) < 2M\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2a(D)}a(D) = \varepsilon, \end{aligned}$$

unde $m' = \inf_{(x,y)\in Q} f(x, y), M' = \sup_{(x,y)\in Q} f(x, y)$.

9.4 Proprietăţile integralei duble

1. Proprietatea de linearitate a integralei duble.

   Dacă f, g sunt integrabile pe D, atunci $f + g$ este integrabilă pe D şi

$$\iint_D (f(x, y) + g(x, y))dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy + \iint_D g(x, y)dxdy.$$

2. Proprietatea de omogenitate a integralei duble.

   Dacă f este integrabilă pe D şi $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci λf este integrabilă pe D şi

$$\iint_D \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)dxdy.$$

3. Proprietatea de aditivitate a integralei duble (funcţie de domeniu).

   Dacă f este integrabilă pe D, iar domeniul $D = D_1 \cup D_2$, unde D_1 şi D_2 sunt domenii compacte şi curba C are arie nulă, atunci f este integrabilă pe D_1 şi pe D_2 şi

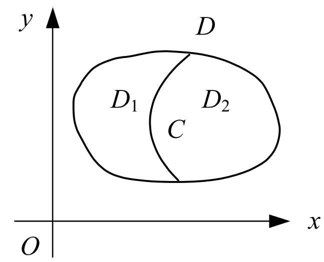

Figura 9.4:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

4. Dacă f este integrabilă pe D şi $f(x,y) \geq 0$, pentru orice $(x,y) \in D$, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$

5. Proprietatea de monotonie a integralei duble.

   Dacă f şi g sunt integrabile pe D şi $f(x,y) \geq g(x,y)$, pentru orice $(x,y) \in D$, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D g(x,y)dxdy.$$

6. Dacă f este integrabilă pe D, atunci şi $|f|$ este integrabilă pe D şi

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy.$$

7. $\displaystyle\iint_D dxdy = a(D).$

   Formule de medie pentru integrala dublă.

8. Dacă f este mărginită şi integrabilă pe D, $m \leq f(x,y) \leq M$, $(x,y) \in D$, atunci există un număr $\mu \in [m, M]$ astfel încât să avem

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \mu a(D).$$

9. Dacă f este continuă pe D, atunci există un punct $(\xi, \eta) \in D$ astfel încât

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)a(D).$$

10. Existenţa şi valoarea unei integrale duble nu depinde de valorile funcţiei de-a lungul unui număr finit de curbe netede.

9.5 Calculul integralelor duble

1. Considerăm cazul în care domeniul compact D este dreptunghiul $[a,b]\times[c,d]$.

Teorema 9.5.1 *Fie funcţia f definită, mărginită şi integrabilă pe dreptunghiul $D=[a,b]\times[c,d]$. Dacă pentru orice $x\in[a,b]$ există integrala $F(x)=\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$, atunci există şi integrala $\displaystyle\int_a^b F(x)dx$ şi*

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

Demonstraţie. Fie $\delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ şi $\bar{\delta}: c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$ diviziuni ale intervalelor $[a,b]$ şi $[c,d]$, iar Δ diviziunea corespunzătoare domeniului D.

Notăm $\delta_{ij}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}],\quad \delta_{ij}\in\Delta$,

$$m_{ij}=\inf_{(x,y)\in\delta_{ij}} f(x,y),\quad M_{ij}=\sup_{(x,y)\in\delta_{ij}} f(x,y),\quad i=\overline{0,n-1},\ j=\overline{0,m-1}.$$

Considerăm punctele intermediare $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}],\ i=\overline{0,n-1}$ şi suma Riemann

$$\sigma_\delta(F)=\sum_{i=0}^{n-1}F(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) \tag{9.3}$$

Avem $F(\xi_i)=\displaystyle\int_c^d f(\xi_i,y)dy=\sum_{j=0}^{m-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}f(\xi_i,y)dy$ şi aplicând teorema de medie, rezultă că există un punct $\mu_{ij}\in[m_{ij},M_{ij}]$ aşa încât

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}}f(\xi_i,y)dy=\mu_{ij}(y_{j+1}-y_j),\quad i=\overline{0,n-1},\ j=\overline{0,m-1}.$$

Atunci, (9.3) devine

$$\sigma_\delta(F)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\mu_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j).$$

Sumele Darboux ale funcţiei f corespunzătoare diviziunii Δ sunt date de

$$s_\Delta(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}m_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j),$$
$$S_\Delta(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}M_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j),\quad \text{iar}$$

$$s_\Delta(f)\le\sigma_\delta(F)\le S_\Delta(f). \tag{9.4}$$

Fie (δ_n) şi $(\bar{\delta}_n)$ şiruri de diviziuni ale intervalelor $[a,b]$ şi $[c,d]$ cu $\nu(\delta_n)\to 0,\nu(\bar{\delta}_n)\to 0$, (Δ_n) şirul corespunzător de diviziuni al lui D (evident şi $\nu(\Delta_n)\to 0$), iar (ξ_i^n) şir de puncte intermediare ale şirului (δ_n). Conform relaţiei (9.4) avem

$$s_{\Delta_n}(f)\le\sigma_{\delta_n}(F)\le S_{\Delta_n}(f). \tag{9.5}$$

Funcţia f fiind integrabilă pe D avem

$$\lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n}(f) = \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}(f) = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Trecând la limită în (9.5) obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\delta_n}(F) = \iint_D f(x,y)dxdy,$$

deci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx.$$

Teorema 9.5.2 *Fie funcţia f definită, mărginită şi integrabilă pe dreptunghiul $D=[a,b]\times[c,d]$. Dacă pentru orice $y\in[c,d]$ există integrala $G(y)=\int_a^b f(x,y)dx$, atunci există şi integrala $\int_c^d G(y)dy$ şi*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$

Observaţia 9.5.1 *Dacă $f(x,y)=g(x)h(y)$, $(x,y)\in D=[a,b]\times[c,d]$ şi sunt îndeplinite condiţiile teoremei 9.5.1 sau teoremei 9.5.2, atunci*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right).$$

Exemplu 9.5.1 *1. Să se calculeze integrala $I=\iint_D (1-x)(1-xy)dxdy$, domeniul D fiind* $1\le x\le 3, 0\le y\le 1$.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \left(\int_0^1 (1-x)(1-xy)dy\right) dx = \int_1^3 (1-x)\left(y-\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 (1-x)(2-x)dx = \frac{1}{2}\left(2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. Fie domeniul compact D mărginit de curba C netedă pe porţiuni şi presupunem că orice paralelă la axa Oy taie curba închisă C numai în două puncte.

$$D=\{(x,y)\,|\,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\quad x\in[a,b]\},\qquad (9.6)$$

unde $y=\varphi_1(x), x\in[a,b]$ este ecuaţia arcului AEB, iar $y=\varphi_2(x), x\in[a,b]$ este ecuaţia arcului $CFG, \varphi_1\in C^1[a,b]$, $\varphi_2\in C^1[c,d]$. Un astfel de domeniu se numeşte simplu în raport cu axa Oy.

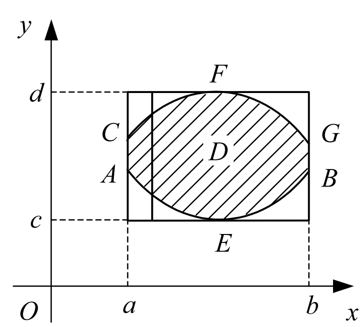

Figura 9.5:

Teorema 9.5.3 *Fie funcţia f definită, mărginită şi integrabilă pe domeniul compact D dat de (9.6) şi presupunem că există integrala $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, $\forall\ x \in [a,b]$. Atunci există şi integrala $\int_a^b F(x)dx$ şi are loc egalitatea*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Demonstraţie. *Fie $I = [a,b] \times [c,d]$ şi funcţia $\bar{f} : I \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{dacă} \quad (x,y) \in D \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) \in I - D\,. \end{cases}$$

$I = D \cup D_1 \cup D_2$, unde domeniile D_1 şi D_2 sunt definite prin

$$D_1 : \quad \begin{array}{c} c \le y \le \varphi_1(x) \\ x \in [a,b] \end{array} \qquad i \quad D_2 : \quad \begin{array}{c} \varphi_2(x) \le y \le d \\ x \in [a,b] \end{array} \,.$$

Deoarece $\varphi_1, \varphi_2 \in C^0[a,b]$, conform lemei 9.1.1, frintiera fiecăruia dintre domeniile D, D_1 şi D_2 este de arie nulă.

Funcţia $\bar{f}$ este integrabilă pe I, deoarece f este integrabilă pe D, iar eventualele puncte de discontinuitate ale funcţiei $\bar{f}$ în plus faţă de f sunt situate pe una dintre frontierele domeniilor D, D_1, D_2.

Atunci conform proprietăţii de aditivitate a integralei duble avem

$$\iint_I \bar{f}(x,y)dxdy = \iint_{D_1} \bar{f}(x,y)dxdy + \iint_D \bar{f}(x,y)dxdy + \iint_{D_2} \bar{f}(x,y)dxdy.$$

Dar

$$\iint_{D_1} \bar{f}(x,y)dxdy = 0 \qquad \iint_{D_2} \bar{f}(x,y)dxdy = 0$$

Deci are loc egalitatea

$$\iint_I \bar{f}(x,y)dxdy = \iint_D \bar{f}(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy. \tag{9.7}$$

Deoarece există integrala $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2 x} f(x,y)dy$, atunci există şi integrala $\int_c^d \bar{f}(x,y)dy$ şi are loc relaţia

$$\begin{aligned} \int_c^d \bar{f}(x,y)dy \quad &= \quad \int_c^{\varphi_1(x)} \bar{f}(x,y)dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \bar{f}(x,y)dy + \int_{\varphi_2(x)}^d \bar{f}(x,y)dy = \\ &= \quad \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \end{aligned} \tag{9.8}$$

Aplicând teorema 9.5.1 funcţiei $\bar{f}$ şi domeniului I se obţine că există integrala $\int_a^b F(x)dx$ şi

$$\iint_I \bar{f}(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d \bar{f}(x,y)dy \right) dx\,,$$

care împreună cu relaţiile (9.7) şi (9.8) ne dau

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Fie domeniul compact D mărginit de curba închisă C netedă pe porţiuni şi presupunem că orice paralelă la axa Ox taie curba C numai în două puncte.

$$D = \{(x,y) \,|\, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad y \in [c,d]\}\,, \tag{9.9}$$

unde $x = \psi_1(y), y \in [a,b]$ este ecuaţia arcului CEG, iar $x = \psi_2(y), y \in [a,b]$ este ecuaţia arcului $AFB, \psi_1 \in C^1[c,d]$, $\psi_2 \in C^1[c,d]$. Un astfel de domeniu se numeşte simplu în raport cu axa Ox.

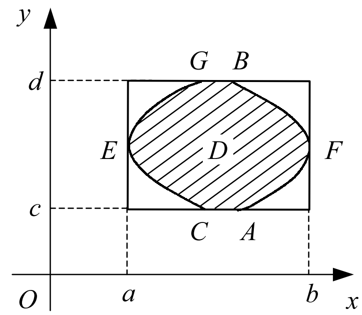

Figura 9.6:

Teorema 9.5.4 *Fie funcţia f definită, mărginită şi integrabilă pe domeniul compact D dat de (9.9) şi presupunem că există integrala $G(y) = \displaystyle\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$, pentru orice $y \in [c,d]$. Atunci există şi integrala $\displaystyle\int_c^d G(y)dy$ şi are loc egalitatea*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Observaţia 9.5.2 *1. Dacă domeniul compact D nu este într-una dintre situaţiile (9.6) sau (9.9), atunci se descompune D într-un număr finit de subdomenii $D_1, D_2, \ldots, D_n$ cu $\bigcup_{k=1}^{n} D_k = D$ prin arce de curbă de arie nulă şi fiecare D_i să fie într-una din situaţiile (9.6) sau (9.9).*

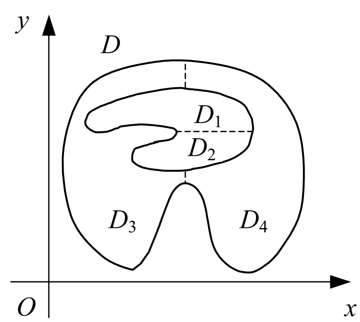

Figura 9.7:

Folosind proprietatea 3 se obţine

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{D_k} f(x,y)dxdy$$

2. Dacă funcţia f este continuă pe domeniul D, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Exemplu 9.5.2 *1. Să se calculeze integrala $I = \displaystyle\iint_D xydxdx$,, domeniul D fiind limitat de $y = x^2$ şi $y = 2x + 3$ (vezi fig.9.8).*

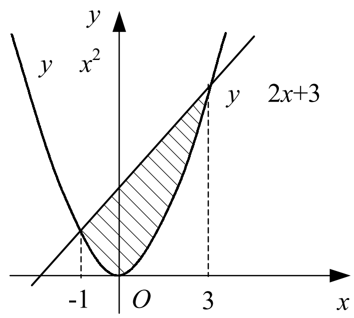

Figura 9.8:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{3}\left(\int_{x^2}^{2x+3} xydy\right)dx = \int_{-1}^{3} \frac{xy^2}{2}\Big|_{x^2}^{2x+3} = \\
&= \frac{1}{2}\int_{1}^{3} x[(2x+3)^2 - x^4]dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3}(4x^3+12x^2+9x-x^5)dx = \\
&= \frac{1}{2}\left(x^4+4x^2+\frac{9x^2}{2}-\frac{x^6}{6}\right)\Big|_{-1}^{3} = \frac{160}{3}
\end{aligned}$$

2. Să se calculeze integrala $I = \iint_D \cos(x+y)dxdy$*, domeniul* D *fiind limitat de* $x=0, y=\pi$ *şi* $y=x$ *(vezi fig.9.9).*

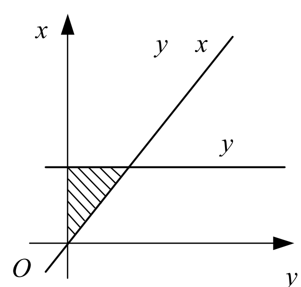

Figura 9.9:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{0}^{\pi}\left(\int_{0}^{y}\cos(x+y)dx\right)dy = \int_{0}^{\pi}(\sin(x+y)\Big|_{0}^{y})dy = \\
&= \int_{0}^{\pi}(\sin 2y - \sin y)dy = \left(-\frac{\cos 2y}{2}+\cos y\right)\Big|_{0}^{\pi} = -2
\end{aligned}$$

9.6 Formula lui Green

Fie D un domeniu compact, mărginit de curba închisă C netedă pe porţiuni şi presupunem că paralelele la axele Ox şi Oy taie curba C numai în două puncte.

Teorema 9.6.1 *Formula lui Green (1793 - 1841)*
Fie P *şi* Q *două funcţii definite şi continue pe* D*, derivabile parţial şi cu derivatele parţiale* P'_y *şi* Q'_x *continue pe* D*. Atunci are loc următoarea egalitate:*

$$\iint_D (Q'_x(x,y) - P'_y(x,y))dxdy = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Demonstraţie. Fie domeniul D din figura 9.10, curba C de forma $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ orientată direct.

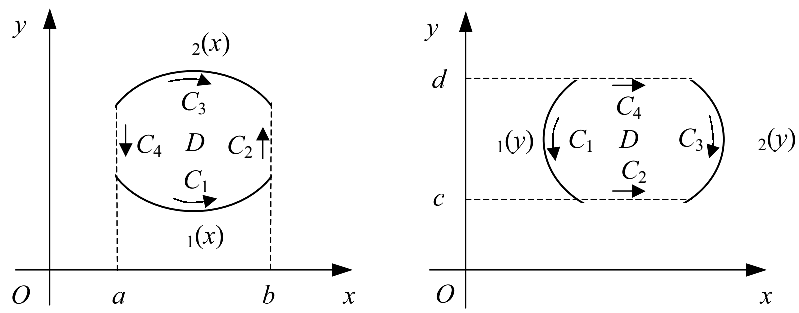

Figura 9.10:

$$\iint_D P'_y(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} P'_y(x,y)dy \right) dx = \int_a^b P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx =$$

$$= \int_a^b \left(P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x)) \right) dx \tag{9.10}$$

Curba C_1 fiind definită de reprezentarea $\begin{cases} x = t \\ y = \varphi_1(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$ avem

$$\int_{C_1} P(x,y)dx = \int_a^b P(t,\varphi_1(t))dt \tag{9.11}$$

Curba C_3 fiind definită de reprezentarea $\begin{cases} x = t \\ y = \varphi_2(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$ avem

$$\int_{C_3} P(x,y)dx = \int_a^b P(t,\varphi_2(t))dt \tag{9.12}$$

Deoarece pentru curbele C_2 şi C_4 avem $x = a$, respectiv $x = b$ se obţine

$$\int_{C_2} P(x,y)dx = 0 \quad \text{i} \quad \int_{C_4} P(x,y)dx = 0 \tag{9.13}$$

$$\oint_C P(x,y)dx = \int_{C_1} P(x,y)dx + \int_{C_2} P(x,y)dx + \int_{C_3} P(x,y)dx + \int_{C_4} P(x,y)dx \tag{9.14}$$

Din (9.10), (9.11), (9.12), (9.13) şi (9.14) rezultă

$$\iint_D P'_y(x,y)dxdy = -\int_{C_1} P(x,y)dx - \int_{C_3} P(x,y)dx = -\oint_C P(x,y)dx \tag{9.15}$$

Fie domeniul D din figura 9.10, curba C de forma $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$.

$$\iint_D Q'_x(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} Q'_x(x,y)dx \right) dy = \int_c^d Q(x,y)\Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy =$$

$$= \int_c^d (Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y))dy \tag{9.16}$$

Curba C_1 fiind definită de prezentarea $\begin{cases} x=\psi_1(t) \\ y=t \end{cases}$, $t\in[c,d]$ avem

$$\int_{C_1} Q(x,y)dy = \int_c^d Q(\psi_1(t),t)dt \tag{9.17}$$

Curba C_3 fiind definită de reprezentarea avem $\begin{cases} x=\psi_2(t) \\ y=t \end{cases}$, $t\in[c,d]$ avem

$$\int_{C_3} Q(x,y)dy = \int_c^d Q(\psi_2(t),t)dt \tag{9.18}$$

Deoarece pentru curbele C_2 şi C_4 avem $y=c$, respectiv $y=b$ se obţine

$$\int_{C_2} Q(x,y)dx = 0 \quad \text{i} \quad \int_{C_4} Q(x,y)dx = 0 \tag{9.19}$$

$$\oint_C Q(x,y)dx = \int_{C_1} Q(x,y)dx + \int_{C_2} Q(x,y)dx + \int_{C_3} Q(x,y)dx + \int_{C_4} Q(x,y)dx \tag{9.20}$$

Din (9.16), (9.17), (9.18), (9.19) şi (9.20) rezultă

$$\iint_D Q'_x(x,y)dxdy = \int_{C_1} Q(x,y)dy + \int_{C_3} Q(x,y)dy = \oint_C Q(x,y)dy \tag{9.21}$$

Scăzând relaţia (9.15) din (9.21) se obţine:

$$\iint_D (Q'_x(x,y) - P'_y(x,y))dxdy = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Dacă domeniul D nu îndeplineşte condiţia ca paralelele la axele Ox şi Oy să taie curba C numai în două puncte, împărţim domeniul D prin arce de curbă de arie nulă într-un număr finit de subdomenii $D_1, D_2, \ldots, D_n$ mărginite de curbele $C_1, C_2, \ldots, C_n$ care îndeplinesc condiţia de mai sus.

Aplicând pentru fiecare subdomeniu D_k mărginit de curba C_k teorema 9.6.1, avem

$$\iint_{D_k} (Q'_x(x,y) - P'_y(x,y))dxdy = \oint_{C_k} P(x,y)dx + Q(x,y)dx, \quad k=\overline{1,n} \tag{9.22}$$

Orientarea pozitivă a subdomeniilor $D_1, D_2, \ldots, D_n$ induce pe curba C un sens bine determinat pe care-l vom numi sensul pozitiv. Astfel vom spune despre domeniul D că a fost orientat pozitiv (vezi fig.9.11). Deoarece $D=\bigcup_{k=1}^n D_k, C=\bigcup_{k=1}^n C_k$, adunând cele n relaţii din (9.22) şi aplicând proprietatea de aditivitate a integralei duble (ca funcţie de domeniu) avem

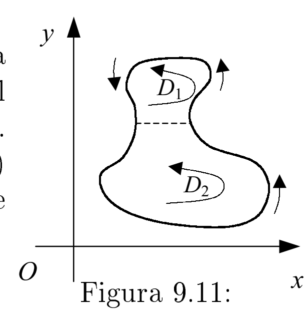

Figura 9.11:

$$\iint_D (Q'_x(x,y) - P'_y(x,y))dxdy = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Teorema 9.6.2 *Fie P şi Q două funcţii definite şi continue pe domeniul compact D mărginit de curba C simplă, închisă şi rectificabilă şi presupunem că derivatele parţiale P'_y şi Q'_y există şi sunt continue pe D. Atunci are loc următoarea egalitate*

$$\iint_D (Q'_x(x,y) - P'_y(x,y))dxdy = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Demonstraţie. vezi [10] vol.II pag. 190.

Exemplu 9.6.1 *Să se calculeze integrala curbilinie $I = \oint_C -xy^2dx + x^2ydy$, folosind formula lui Green, unde $C : x^2 + y^2 = a^2, a > 0$.*

Curba C este netedă şi închisă şi ea mărgineşte domeniul $D : x^2+y^2 \leq a^2$. Funcţiile $P(x,y) = -xy^2$ şi $Q(x,y) = x^2y$ sunt de clasă $C^1(D)$ şi deci se poate aplica formula lui Green.

Avem

$$I = \iint_D 4xydxdy = 4\int_{-a}^{a}\left(x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} ydy\right)dx = 0.$$

9.7 Exprimarea ariei unui domeniu cu ajutorul unei integrale curbilinii

Fie D un domeniu pentru care se poate aplica formula lui Green şi care are arie.

$a(D) = \iint_D dxdy$ şi aplicând formula lui Green observăm că funcţiile P şi Q trebuie alese astfel ca $Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) = 1$.

Atunci aria domeniului D este

$$a(D) = \oint xdy, \tag{9.23}$$

unde am considerat $P(x,y) = 0$ şi $Q(x,y) = x$, pentru orice $(x,y) \in D$.

Exemplu 9.7.1 *Să se calculeze aria domeniului D limitat de $y = x^2$ şi $y = x$ (vezi fig.9.12).*

Avem

$$a(D) = \iint_D dxdy = \oint_C xdy = \int_{C_1} xdy + \int_{C_2} xdy,$$

unde $C_1 : y = x^2, x \in [0,1], C_2 : y = 1 - x, x \in [0,1]$, deci

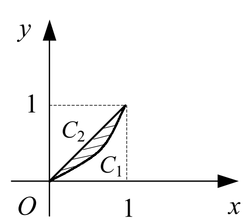

Figura 9.12:

$$a(D) = \int_0^1 2x^2dx - \int_0^1 xdx = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

9.8 Schimbarea de variabilă la integrala dublă

În planul xOy considerăm domeniul compact D mărginit de o curbă C închisă, netedă pe porţiuni, iar în planul uOv domeniul compact D' mărginit de o curbă C' închisă şi netedă pe porţiuni. Fie transformarea regulată a domeniului D' în D dată de

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}, \qquad (u,v) \in D,\ \varphi, \psi \in C^1(D'), \tag{9.24}$$

bijective şi cu derivatele parţiale de ordinul al doilea mixte continue pe D'.

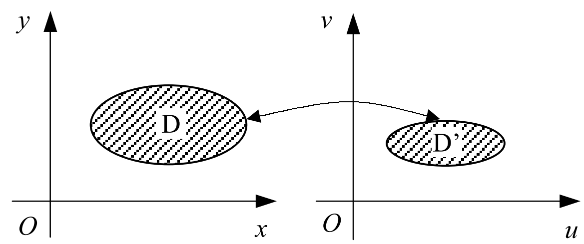

Figura 9.13:

Se defineşte corespondenţa dintre domeniile D' şi D ca fiind directă, respectiv inversă, dacă atunci când un punct parcurge curba C' în sens direct, punctul corespunzător, prin transformarea (9.24), de pe curba C se deplasează în sens direct respectiv invers.

Teorema 9.8.1 *Dacă determinantul funcţional* $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$, $(u,v) \in D'$, *este pozitiv respectiv negativ, atunci transformarea domeniului* D' *în domeniul* D *este directă, respectiv inversă şi există un punct* $(u_0, v_0) \in D'$ *astfel încât*

$$a(D) = \left| \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u_0,v_0) \right| a(D').$$

Demonstraţie. Din (9.23) aria domeniului D este $a(D) = \oint_C xdy$. Fie transformarea regulată (9.24) a domeniului D' în D. Atunci

$$\begin{aligned} a(D) &= \oint_{C'} \varphi(u,v)[\psi'_u(u,v)du + \psi'_v(u,v)dv] = \\ &= \int_{C'} \varphi(u,v)\psi'_u(u,v)du + \varphi(u,v)\psi'_v(u,v)dv \end{aligned} \tag{9.25}$$

Deoarece există derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea ale funcţiilor φ şi ψ' continue pe D', avem:

$$\begin{aligned} &P(u,v) = \varphi(u,v)\psi'_u(u,v), \qquad Q(u,v) = \varphi(u,v)\psi'_v(u,v), \\ &P'_v(u,v) = \varphi'_v(u,v)\psi'_u(u,v) + \varphi(u,v)\psi''_{uv}(u,v) \quad \text{i} \\ &Q'_u(u,v) = \varphi'_u(u,v)\psi'_v(u,v) + \varphi(u,v)\psi''_{vu}(u,v)\,. \end{aligned}$$

Aplicând formula lui Green integralei (9.25) se obţine

$$\begin{aligned} a(D) &= \oint_{C'} P(u,v)du + Q(u,v)dv = \iint_{D'} (Q'_u(u,v) - P'_v(u,v))dudv = \\ &= \iint_{D'} (\varphi'_u(u,v)\psi'_v(u,v) - \varphi'_v(u,v)\psi'_u(u,v))dudv = \\ &= \iint_{D'} \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} dudv. \end{aligned} \tag{9.26}$$

Întrucât $a(D) > 0$, dacă $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} > 0$, curba C' este parcursă în sens direct şi din (9.26) avem $a(D) = \iint_{D'} \dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} dudv$, iar dacă $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} < 0$, atunci curba C' este parcursă în sens invers şi din (9.26) rezultă $a(D) = \iint_{D'} \dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} dudv$, adică $a(D) = \iint_{D'} \left| \dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,,v)} \right| dudv$.

Aplicând formula de medie ultimei relaţii, rezultă că există un punct $(u_0,v_0) \in D'$ astfel încât

$$a(D) = \left| \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u_0,v_0) \right| a(D')$$

Teorema 9.8.2 *Fie domeniile compacte D' şi D în corespondenţă prin transformarea regulată (9.24). Dacă f este o funcţie continuă pe domeniul D, atunci are loc următoarea egalitate*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v)\psi(u,v)) \left| \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \right| dudv, \tag{9.27}$$

numită formula schimbării de variabilă la integrala dublă.

Demonstraţie. Considerăm, $\Delta' = (\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_p)$ o diviziune a domeniului D'. Prin transformarea (9.24) acestei diviziuni îi corespunde diviziunea $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$ a domeniului D. Dacă $a(\delta_k), a(\delta'_k)$ sunt ariile dreptunghiurilor δ_k respectiv $\delta'_k, k = \overline{1,p}$, atunci conform teoremei 9.8.1 există punctele $(u_k,v_k) \in \delta'_k$ astfel încât să avem

$$a(\delta_k) = \left| \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u_k,v_k) \right| a(\delta'_k).$$

Fie $x_k = \varphi(u_k,v_k), y_k = \varphi(u_k,v_k), k = \overline{1,n},\ (u_k,v_k) \in \delta'_k$. Atunci

$$\begin{aligned} \sigma_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^{p} f(x_k,y_k)a(\delta_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{p} f(\varphi(u_k,v_k),\psi(u_k,v_k)) \left| \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u_k,v_k) \right| a(\delta'_k) = \\ &= \sigma_{\Delta'}\left(f(\varphi,\psi) \left| \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \right| \right) \end{aligned}$$

Dacă (Δ'_n) este un şir de diviziuni ale domeniului D' cu $\nu(\Delta'_n) \to 0$, atunci şirul corespunzător de diviziuni ale domeniului D, prin transformarea (9.24), (Δ_n) are $\nu(\Delta_n) \to 0$. Avem

$$\sigma_{\Delta_n}(f) = \sigma_{\Delta'_n}\left(f(\varphi,\psi) \left| \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \right| \right) \tag{9.28}$$

şi trecând la limită în (9.28), rezultă

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \left| \frac{D(\varphi,\psi}{D(u,v)} \right| dudv.$$

Exemplu 9.8.1 *1. Să se calculeze integrala* $I = \iint_D (x^2+y^2)dxdy$, *domeniul* D *fiind* $x^2 + y^2 \leq 2ax,\ a > 0$. *Domeniul* D *este mărginit de cercul* $(x-a)^2 + y^2 = a^2$. *Trecând la coordonatele polare* $\begin{cases} x = a + r\cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$, *rezultă* $t \in [0, 2\pi], r \in [0, a]$, *deci domeniul* D' *este dreptunghiul* $[0, 2\pi] \times [0, a]$ *(vezi fig.9.14).*

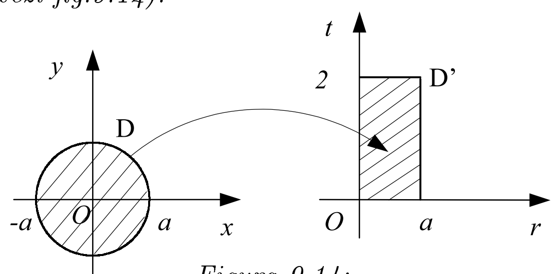

Figura 9.14:

Cu ajutorul formulei (9.27) se obţine

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a (a^2 + 2ar\cos t + r^2) r dr \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}a^2r^2 + \frac{2}{3}ar^3\cos t + \frac{1}{4}r^4 \right) \Big|_0^a dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4}a^4 + \frac{2}{3}a^4 \cos t \right) dt = \left(\frac{3}{4}a^4 + \frac{2}{3}a^4 \sin t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}a^4 \end{aligned}$$

2. Să se calculeze integrala $I = \iint_D x dxdy$, *domeniul* D *fiind dat de* $1 \leq xy \leq 2,\ 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2, x > 0$.

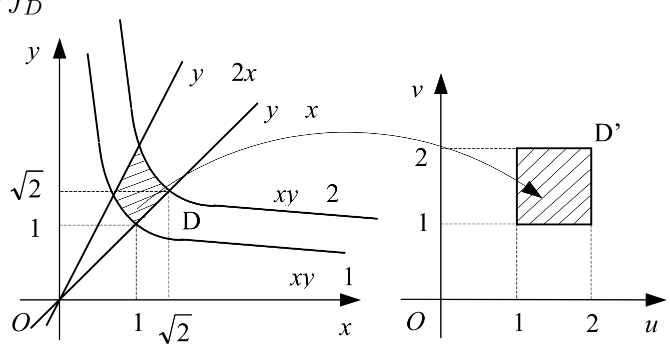

Figura 9.15:

Folosim transformarea regulată $u = xy, v = \frac{y}{x}, u \in [1,2], v \in [1,2]$, *care transformă domeniul* D *în domeniul* D' *(vezi fig.9.15).*

Inversa acestei transformări este $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$, *iar*

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}v^{-1} \neq 0$$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}}dv \right) du = -\int_1^2 \left(u^{\frac{1}{2}}\ v^{-\frac{1}{2}} \right)\Big|_1^2 du = \\ &= \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{5\sqrt{2}-6}{3} \end{aligned}$$

9.9 Aplicaţii ale integralei duble

Dacă D este o placă materială de grosime neglijabilă, $D \subset xOy$ şi funcţia $\rho(x,y)$ definită şi continuă pe D reprezintă densitatea plăcii, atunci masa plăcii D este dată de relaţia

$$M(D) = \iint_D \rho(x,y)dxdy,$$

iar coordonatele centrului de greutate G al plăcii sunt date de relaţiile

$$x_G = \frac{1}{M(D)} \iint_D x\rho(x,y)dxdy, \qquad y_G = \frac{1}{M(D)} \iint_D y\rho(x,y)dxdy.$$

Dacă placa D este omogenă atunci

$$x_G = \frac{1}{a(D)} \iint_D xdxdy, \qquad y_G = \frac{1}{a(D)} \iint_D ydxdy.$$

Momentele de inerţie ale plăcii sunt date de relaţiile

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy \quad \text{(faţă de originea O)} \\ I_x &= \iint_D y^2\rho(x,y)dxdy, \qquad I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)dxdy \end{aligned}$$

(faţă de axele de coordonate Ox şi Oy)

Exemplu 9.9.1 *1. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale plăcii omogene mărginită de curbele* $y^2 = 4x + 4$ *şi* $y^2 = -2x + 4$ *(vezi figura 9.16)*

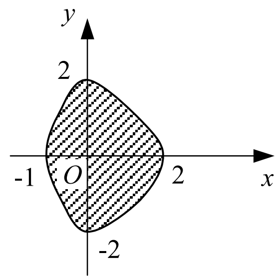

Figura 9.16:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \geq 4x + 4 \quad i \quad y^2 \leq -2x + 4\}$$

$$a(D) = \int_{-2}^{2} \left(\int_{\frac{4-y^2}{2}}^{\frac{y^2-4}{4}} dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} (3y^2 - 12) dy = -8,$$

$$\iint_D x dx dy = \int_{-2}^{2} \int_{\frac{4-y^2}{2}}^{\frac{y^2-4}{4}} x dx = \frac{1}{16} \int_{0}^{2} (-3y^4 + 24y^2 - 48) dy = -\frac{16}{5}$$

$$\iint_D y dx dy = \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} (3y^3 - 12y) dy = 0$$

Deci $x_G = \frac{2}{5}$, *iar* $y_G = 0$.

2. *Să se calculeze momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate ale plăcii omogene* $(\rho = 1)$ *mărginite de curbele* $y = x^2$ *şi* $x = y^2$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \quad i \quad y^2 \leq x\}.$$

Avem

$$I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_{0}^{1} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2 dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_{0}^{1} \left(x\sqrt{x} - x^6 \right) dx = \frac{3}{35},$$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_{0}^{1} \left(x^2 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right) dx = \int_{0}^{1} \left(x^2\sqrt{x} - x^4 \right) dx = \frac{3}{35}.$$

Capitolul 10

Integrale de suprafaţă

10.1 Pânze parametrizate. Suprafeţe

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu plan şi $r : D \to \mathbb{R}^3$ o funcţie de clasă $C^1(D)$, $r(u,v) = (x,y,z)$, unde

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}, \quad (u,v) \in D\,. \tag{10.1}$$

Definiţia 10.1.1 *Perechea $(r,D) \stackrel{not}{=} r$ se numeşte pânză parametrizată în $\mathbb{R}^3$. Mulţimea $Im\,(r) = r(D)$ se numeşte imaginea sau urma pânzei.*

Funcţia $\bar{r} = \bar{r}(u,v) = f(u,v)\bar{i} + g(u,v)\bar{i} + h(u,v)\bar{j}$, $(u,v) \in D$ se numeşte reprezentarea vectorială a pânzei. Ecuaţiile (10.1) se numesc ecuaţiile parametrice ale pânzei.

Definiţia 10.1.2 *Două pânze parametrizate (r,D) şi (r_1,D_1) se numesc pânze parametrizate echivalente dacă există un difeomorfism $\Phi : D \to D_1$ astfel încât $r_1 \circ \Phi = r$.*

Dacă pânzele (r,D) şi (r_1,D_1) sunt echivalente vom nota $r \sim r_1$.

Teorema 10.1.1 *Două pânze parametrizate echivalente au acelaşi urmă.*

Demonstraţie. Fie $r \sim r_1$ şi $\Phi : D \to D_1$ un difeomorfism astfel ca $r_1 \circ \Phi = r$. Deoarece Φ este bijecţie, obţinem $r(D) = r(D_1)$.

Observaţia 10.1.1 *Dacă două pânze parametrizate au aceeaşi urmă, nu rezultă că ele sunt echivalente.*

Teorema 10.1.2 *Relaţia " $\sim$ " este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea pânzelor parametrizate.*

Demonstraţie. Se arată la fel ca şi la drumuri.

Observaţia 10.1.2 *Relaţia de echivalenţă " $\sim$ " împarte mulţimea tuturor pânzelor parametrizate în clase de echivalenţă disjuncte. Două pânze parametrizate sunt echivalente dacă şi numai dacă aparţin aceleiaşi clase.*

Definiţia 10.1.3 *Se numeşte suprafaţă o clasă de echivalenţă de pânze parametrizate.*

Pânza (r,D) din această clasă se numeşte parametrizare locală a suprafeţei şi o vom nota $S = (r,D)$.

Definiţia 10.1.4 *Suprafaţa S se numeşte suprafaţa simplă dacă există o parametrizare locală $S = (r, D)$ injectivă.*

Mulţimea

$$S = \{(x, y, z) \,|\, z = z(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\} \tag{10.2}$$

este o suprafaţă simplă deoarece $S = r(D)$, unde $r : D \to \mathbb{R}^3$ $r(u, v) = (u, v, z(u, v))$ este o pânză parametrizată ($x = u, y = v$). Astfel (10.2) reprezintă forma explicită a suprafeţei S, iar ecuaţia $z = f(x, y), (x, y) \in D$ se numeşte ecuaţia carteziană explicită a suprafeţei S.

Mulţimea $S = \{(x, y, z) \,|\, F(x, y, z) = 0,\ (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3\}$, unde $F \in C^1(D)$, iar $F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 \neq 0$ reprezintă o suprafaţă simplă. Ecuaţia $F(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in D$ se numeşte ecuaţia carteziană implicită a suprafeţei S.

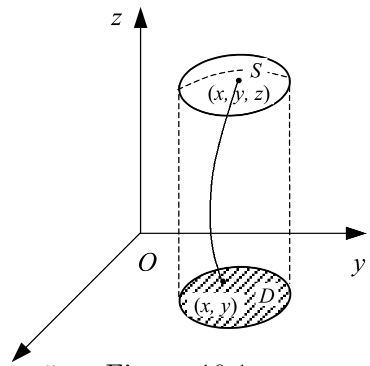

Figura 10.1:

Fie S o suprafaţă de parametrizare locală $S = (r, D), r$ dată de (10.1). Dacă în (10.1) fixăm valoarea parametrului u, $u = u_0$, atunci se obţin ecuaţiile unei curbe în spaţiu $x = f(u_0, v), y = g(u_0, v), z = h(u_0, v)$, ale cărei puncte se află pe suprafaţa S. Dacă u_0 ia diferite valori, atunci se obţine pe suprafaţa S o familie de curbe. Similar, dacă în (10.1) fixăm valoarea parametrului v, $v = v_0$, atunci se obţin ecuaţiile unei curbe în spaţiu $x = f(u, v_0), y = g(u, v_0), z = h(u, v_0)$ pe suprafaţa S. Dacă v_0 ia diferite valori, atunci se obţine pe suprafaţa S o familie de curbe. Aceste curbe care se obţin pe suprafaţa S se numesc curbe coordonate pe suprafaţa S sau curbele reţelei lui Gauss.

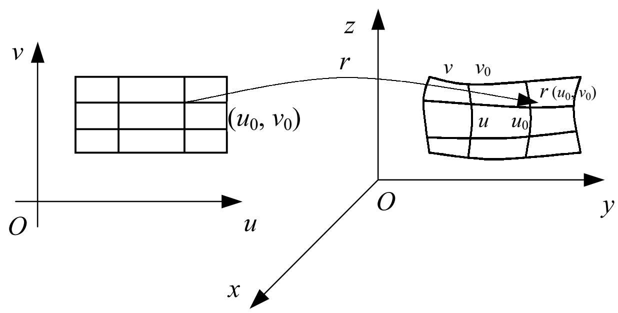

Figura 10.2:

Prin fiecare punct $M \in S$ ce aparţine porţiunii simple a suprafeţei S trece o curbă şi numai una din fiecare familie de curbe coordonate ($u = u_k, v = v_k$) şi anume curbele $u = u_0$ şi $v = v_0$; u_0, v_0 se numesc coordonate curbilinii ale punctului M corespunzător punctului $(u_0, v_0) \in D$.

Fie S o suprafaţă şi $M \in S$. Un vector $\bar{h}$ aplicat în M, $\bar{h} \in \mathcal{V}_3(M)$ se numeşte vector tangent la S în punctul M dacă există un drum de clasă C^1 ($I, d = d(t)$) situat pe S şi un punct $t_0 \in I$ astfel încât $d(t_0) = M$ şi $d'(t_0) = \bar{h}$, deci $\bar{h}$ este vector viteză la un drum ce trece prin M şi este situat pe S.

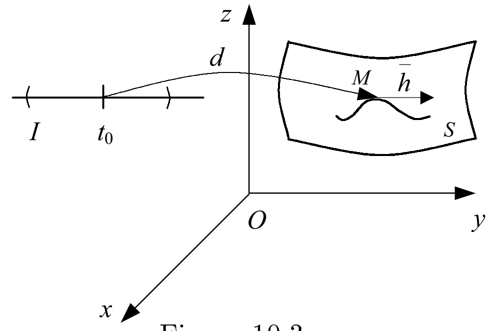

Figura 10.3:

Dacă S este o suprafaţă de parametrizare locală $S = (r, D)$ şi $(u_0, v_0) \in D$, atunci vectorul viteză în u_0 la curba de coordonate $v = v_0$ se notează $\bar{r}_u(u_0, v_0)$, iar vectorul viteză în v_0 la curba de coordonate $u = u_0$ se notează $\bar{r}_v(u_0, v_0)$. Vectorii $\bar{r}_u(u_0, v_0), \bar{r}_v(u_0, v_0)$ se numesc viteze parţiale ale lui r în (u_0, v_0). Astfel funcţiile $\bar{r}_u : D \to \mathbb{R}^3, \bar{r}_v : D \to \mathbb{R}^3$ în fiecare punct $(u_0, v_0) \in D$ sunt vectori tangenţi la S în $r(u_0, v_0)$.

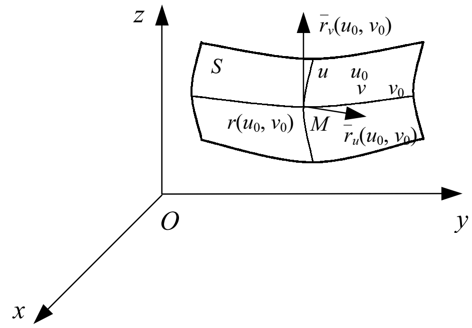

Figura 10.4:

O suprafaţă S dată parametric prin (10.1) se numeşte netedă dacă $\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\| \neq 0$ pentru orice $(u, v) \in D$.

Dacă suprafaţa simplă şi netedă S este dată de parametrizarea (10.1), atunci vectorii tangenţi în punctul $M(r(u_0, v_0)), \bar{r}_u(u_0, v_0)$ şi $\bar{r}_v(u_0, v_0)$ sunt daţi de $\bar{r}_u(u_0, v_0) = (f'_u(u_0, v_0), g'_u(u_0, v_0), h'_u(u_0, v_0)), \bar{r}_v(u_0, v_0) = (f'_v(u_0, v_0), g'_u(u_0, v_0), h'_v(u_0, v_0))$.

Cosinusurile directoare ale vectorilor $\bar{r}_u, \bar{r}_v$ în punctul $M(\bar{r}(u_0, v_0))$ sunt

$$\frac{f'_u(u_0, v_0)}{\pm\sqrt{E}}, \quad \frac{g'_u(u_0, v_0)}{\pm\sqrt{E}}, \quad \frac{h'_u(u_0, v_0)}{\pm\sqrt{E}},$$

respectiv

$$\frac{f'_v(u_0, v_0)}{\pm\sqrt{G}}, \quad \frac{g'_v(u_0, v_0)}{\pm\sqrt{G}}, \quad \frac{h'_v(u_0, v_0)}{\pm\sqrt{G}},$$

unde

$$\begin{aligned} E &= f'^2_u(u_0, v_0) + g'^2_u(u_0, v_0) + h'^2_u(u_0, v_0), \\ G &= f'^2_v(u_0, v_0) + g'^2_v(u_0, v_0) + h'^2_v(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Alegerea semnului din faţa radicalului corespunde alegerii unui sens de tangentă.

Unghiul dintre două curbe se defineşte ca fiind unghiul dintre tangentele la aceste curbe. Dacă θ este unghiul dintre curbele $u = u_0$ şi $v = v_0$, atunci

$$\cos\theta = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v)}{\|\bar{r}_u\|\|\bar{r}_v\|} = \pm\frac{F}{\sqrt{EG}},$$

unde

$$(\bar{r}_u, \bar{r}_v) \overset{not}{=} F = f'_u(u_0, v_0)f'_v(u_0, v_0) + g'_u(u_0, v_0)g'_v(u_0, v_0) + h'_u(u_0, v_0)h'_v(u_0, v_0).$$

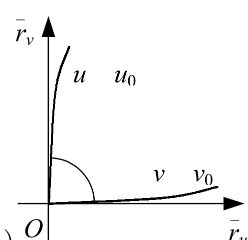

Figura 10.5:

Expresiile E, F, G se numesc coeficienţii Gauss ai suprafeţei.

Normala la planul tangent la suprafaţa S în punctul M se numeşte normala la suprafaţa M.

Dacă α, β, γ sunt cosinusurile directoare ale normalei $\bar{n}$ la suprafaţa S în punctul $\bar{r}(u_0, v_0)$ atunci $\bar{n} \perp \bar{r}_u$ şi $\bar{n} \perp \bar{r}_v$, aşadar avem

$$\begin{cases} \alpha f'_u + \beta g'_u + \gamma h'_u = 0 \\ \alpha f'_v + \beta g'_v + \gamma h'_v = 0 \end{cases}$$

Întrucât, rangul matricii $\begin{pmatrix} f'_u & g'_u & h'_u \\ f'_v & g'_v & h'_v \end{pmatrix}$ este doi, atunci $\alpha = \lambda A, \beta = \lambda B, \gamma = \lambda C$, unde

$$A = \frac{D(g, h)}{D(u, v)}, \quad B = \frac{D(h, f)}{D(u, v)}, \quad C = \frac{D(f, g)}{D(u, v)}.$$

Cum $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, rezultă

$$\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\quad \beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\quad \gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

Se arată folosind identitatea lui Lagrange

$$(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2+(ab'-a'b)^2=(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2$$

că

$$\|\bar{r}_u\times\bar{r}_v\|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{EG-F^2} \tag{10.3}$$

10.2 Aria unei suprafeţe

Considerăm suprafaţa simplă şi netedă care nu este închisă S definită de parametrizarea $x=f(u,v), y=g(u,v), z=h(u,v), (u,v)\in D$, unde D este un domeniu compact, $D\subseteq[a,b]\times[c,d]$.

Fie $\Delta=(\delta_1,\delta_1,\ldots,\delta_p)$ o diviziune a domeniului D. Dreptelor $u=u_i, v=v_j, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$, ce alcătuiesc diviziunea Δ, le corespund pe suprafaţa S o reţea de curbe de coordonate care determină o diviziune $\bar{\Delta}=(s_1,s_2,\ldots,s_p)$ suprafeţei S. Are loc şi reciproca, unei diviziuni $\bar{\Delta}$ a suprafeţei S alcătuită dintr-o reţea de curbe de coordonate îi corespunde pe domeniul D o diviziune Δ formată din paralele la axele de coordonate Ou şi Ov.

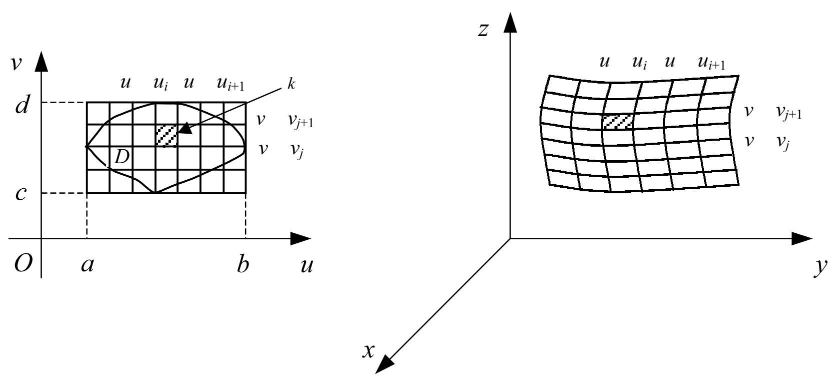

Figura 10.6:

Pentru fiecare parte de suprafaţă s_k a diviziunii Δ a suprafeţei S se consideră cea mai mică sferă ce conţine s_k. Fie d_k diametrul acestei sfere şi definim norma diviziunii Δ ca fiind $\nu(\Delta)=\max_{k=\overline{1,p}}(d_k)$.

Fie $\delta_k\in\Delta, \delta_k=[u_i,u_{i+1}]\times[v_j,v_{k+1}]$. Dreptunghiului δ_k îi corepunde pe suprafaţa S partea de suprafaţă s_k mărginită de curbele parametrice $u=u_i, u=u_{i+1}, v=v_j, v=v_{j+1}$.

În planul tangent la suprafaţă în punctul $M(r(u_i, v_j)) \in S$ se consideră paralelogramul având unul dintre vârfuri în punctul M, laturile dirijate după vectorii $\bar{r}_u(u_i, v_j)$, $\bar{r}_v(u_i, v_j)$ de lungimi $\|\bar{r}_u(u_i, v_j)\|(u_{i+1} - u_i), \|\bar{r}_v(u_i, v_j)\|(v_{j+1} - v_j)$. Aria părţii de suprafaţă se aproximează prin aria σ_k a acestui paralelogram.

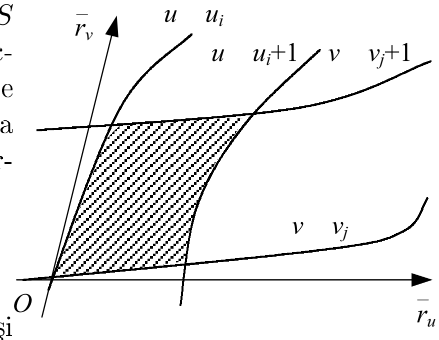

Figura 10.7:

$$\sigma_k = \|\bar{r}_u(u_i, v_j)\|(u_{i+1} - u_i)\|\bar{r}_v(u_i, v_j)\|(v_{j+1} - v_j)\sin\theta,$$

unde θ este unghiul format de curbele de coordonate $u = u_i$ şi $v = v_j$.

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}},$$

$$\begin{aligned}\sigma_k &= \sqrt{E}\Big|_{(u_i,v_j)}(u_{i+1} - u_i)\sqrt{G}\Big|_{(u_i,v_j)}(v_{j+1} - v_j)\sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}\Bigg|_{(u_i,v_j)} = \\ &= \sqrt{EG - F^2}\Big|_{(u_i,v_j)}(u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j).\end{aligned}$$

Astfel, aria suprafeţei S o vom aproxima prin suma

$$a(S) \simeq a_\Delta = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k = \sum_{\delta_k} \sqrt{EG - F^2}\Big|_{(u_i,v_j)}(u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j) \tag{10.4}$$

Fie $(\bar{\Delta}_n)$ un şir de diviziuni ale suprafeţei S cu norma $\nu(\bar{\Delta}_n) \to 0$. Acestui şir de diviziuni îi corespunde un şir de diviziuni (Δ_n) al domeniului D cu $\nu(\Delta_n) \to 0$. Sumele a_{Δ_n} date de (10.4) reprezintă suma Riemann corespunzătoare funcţiei $\sqrt{EG - F^2}$, şirului de diviziuni (Δ_n) şi punctelor $(u_i^n, v_j^n) \in \delta_k^n$. Întrucât, suprafaţa S este netedă, iar funcţiile f, g, h sunt de clasă $C^1(D)$, rezultă că funcţia $\sqrt{EG - F^2}$ este continuă pe D.

Aşadar, atunci când $\nu(\Delta'_n) \to 0$ $\lim_{n\to\infty} a_{\Delta_n} = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv$.

Definiţia 10.2.1 *Suprafaţa simplă şi netedă S are arie dacă există şi este finită integrala $\iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv$. Numărul real $a(S) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv$ reprezintă aria suprafeţei S.*

Observaţia 10.2.1 *1. Folosind egalitatea (10.3) avem*

$$a(S) = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv = \iint_D \|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\| dudv.$$

2. Dacă suprafaţa S este dată prin ecuaţia carteziană explicită $z = f(x, y), (x, y) \in D$, iar $p = f'_x$ şi $q' = f'_y$ (notaţiile Monge), atunci $E = 1 + p^2, G = 1 + q^2, F = pq$ şi

$$a(S) = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dudv.$$

3. Expresia $d\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv$ se numeşte element de arie în coordonate curbilinii.

4. Dacă suprafaţa simplă S este netedă pe porţiuni, atunci vom considera ca arie a ei suma ariilor diferitelor porţiuni.

Teorema 10.2.1 *Aria unei suprafeţe netede şi simple nu depinde de reprezentarea parametrică a suprafeţei.*

Demonstraţie. Presupunem că suprafaţa simplă şi netedă S este dată de reprezentarea parametrică $x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v), (u,v) \in D$. Orice altă reprezentare parametrică a suprafeţei S se obţine printr-o transformare regulată a unui domeniu compact D' în domeniul compact D,

$$u = \varphi(s,t), \quad v = \psi(s,t)\,, \quad (s,t) \in D'. \tag{10.5}$$

Obţinem prin transformarea regulată (10.5) următoarea reprezentare parametrică:

$$\begin{cases} x = f(\varphi(s,t), \psi(s,t)) = f_1(s,t) \\ y = g(\varphi(s,t), \psi(s,t)) = g_1(s,t) \\ z = h(\varphi(s,t), \psi(s,t)) = h_1(s,t)\,. \end{cases}$$

Dacă notăm

$$A_1 = \frac{D(g_1,h_1)}{D(s,t)}, \quad B_1 = \frac{D(h_1,f_1)}{D(s,t)}, \quad C_1 = \frac{D(f_1,g_1)}{D(s,t)},$$

avem

$$A_1 = \frac{D(g,h)}{D(u,v)}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(s,t)}, \quad B_1 = \frac{D(h,f)}{D(u,v)}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(s,t)}, \quad C_1 = \frac{D(f,g)}{D(u,v)}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(s,t)},$$

deci

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2} : \left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(s,t)}\right|$$

Atunci

$$\begin{aligned} a(S) &= \iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv = \\ &= \iint_{D'} \left(\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2} : \left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(s,t)}\right|\right) \left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(s,t)}\right| dsdt \\ &= \iint_{D'} \sqrt{A^2+B^2+C^2}dsdt \end{aligned} \tag{10.6}$$

În (10.6) am folosit formula de schimbare de variabilă de la integrala dublă.

Exemplu 10.2.1 *Să se calculeze aria porţiunii din paraboloidul $x^2 + y^2 = 2z$, mărginită de planul $z = 2$; $pr_{xOy}S = D$, $D : x^2+y^2 \le 4$, $S : z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$, $(x,y) \in D$, $p = z'_x = x$, $q = z'_y = y$. Atunci*

$$\begin{aligned} a(S) &= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r\sqrt{1+r^2}dr\right) dt = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-1), \end{aligned}$$

unde $x = r\cos t, y = r\sin t$.

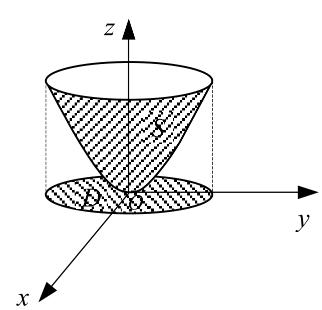

Figura 10.8:

10.3 Integrale de suprafaţă

Integralele de suprafaţă de primul tip constituie o generalizare a integralelor duble.

Fie S o suprafaţă netedă sau netedă pe porţiuni dată de reprezentarea

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}, \quad (u,v) \in D \tag{10.7}$$

unde f, g, h sunt funcţii definite şi de clasă C^1 pe domeniul compact D din planul uOv.

Considerăm funcţia F definită şi mărginită pe un domeniu din $\mathbb{R}^3$ ce conţine imaginea suprafeţei S. Fie $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$ o diviziune a domeniului D căreia îi corespunde prin (10.7) o diviziune $\bar{\Delta} = (s_1, s_2, \ldots, s_p)$ a suprafeţei S.

Fie suma $\sigma_\Delta(F) = \sum_{k=1}^{p} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) a(s_k)$, unde $\xi_k = f(u_k, v_k), \eta_k = g(u_k, v_k), \zeta_k = h(u_k, v_k)$, $(u_k, v_k) \in \delta_k, k = \overline{1,p}$, iar $a(s_k)$ reprezintă aria părţii de suprafaţă s_k.

Definiţia 10.3.1 *Funcţia F este integrabilă pe suprafaţa netedă S dacă există un număr real I cu proprietate ca pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $\Delta \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ şi pentru orice alegere a punctelor $(u_k, v_k) \in \delta_k$ să avem:*

$$|\sigma_\Delta(F) - I| < \varepsilon.$$

Numărul real I

$$I = \iint_S F(x,y,z) d\sigma \tag{10.8}$$

se numeşte integrala de suprafaţă a funcţiei F de primul tip sau în raport cu aria.

Observaţia 10.3.1 *Interpretarea fizică a integralei de suprafaţă de primul tip. Dacă S este o suprafaţă materială, iar $F(x,y,z)$ reprezintă densitatea suprafeţei în punctul (x,y,z), atunci, dacă există integrala (10.8), ea este masa suprafeţei S. Dacă $F(x,y,z)$ reprezintă densitatea de repartiţie a unei sarcini electrice, atunci dacă există integrala (10.8) ea este sarcina totală distribuită pe suprafaţa S.*

Teorema 10.3.1 *Fie S o suprafaţă netedă dată de (10.7) şi funcţia F definită şi mărginită pe un domeniu din $\mathbb{R}^3$ ce conţine imaginea suprafeţei S. Dacă există integrala (10.8) şi integrala*

$$\iint_D F(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv,$$

atunci

$$\iint_S F(x,y,z) d\sigma = \iint_D F(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv \tag{10.9}$$

Demonstraţie. Suprafaţa S fiind netedă, conform definiţiei 10.2.1, avem

$$a(s_k) = \iint_{\delta_k} \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)} dudv, \quad k = \overline{1,n}.$$

Aplicând teorema de medie de la integrala dublă, există un punct $(u_k, v_k) \in \delta_k$ astfel încât să avem:

$$a(s_k) = \sqrt{A^2(u_k,v_k) + B^2(u_k,v_k) + C^2(u_k,v_k)} a(\delta_k) \quad k = \overline{1,p}.$$

Deoarece $(u_k, v_k) \in \delta_k$, există un punct pe partea de suprafaţă s_k, $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in s_k$ cu $\xi_k = f(u_k, v_k)$, $\eta_k = g(u_k, v_k), \zeta_k = h(u_k, v_k)$.

Obţinem pentru suma Riemann asociată funcţiei F, diviziunii $\bar{\Delta}$ şi punctelor intermediare (ξ_k, η_k, ζ_k), $k = \overline{1,p}$ următoarea expresie

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\bar{\Delta}}(F, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) a(s_k) = \sum_{k=1}^{p} F(f(u_k, v_k), g(u_k, v_k),\\
&h(u_k, v_k))\sqrt{A^2(u_k, v_k) + B^2(u_k, v_k) + C^2(u_k, v_k)}a(\delta_k) = \\
&= \sigma_{\Delta}(F\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, u_k, v_k)
\end{aligned} \tag{10.10}$$

Ultima sumă obţinută în (10.10) reprezintă suma Riemann asociată funcţiei F, diviziunii Δ şi punctelor intermediare (u_k, v_k). Astfel, dacă (Δ_n) este un şir de diviziuni ale domeniului Δ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$, atunci şirul diviziunilor corespunzătoare $(\bar{\Delta}_n)$ ale suprafeţei S va avea norma $\nu(\Delta_n) \to 0$.

Trecând la limită în (10.10), rezultă egalitatea (10.9), care reprezintă formula de calcul a integralei de suprafaţă în raport cu aria.

Observaţia 10.3.2 *1. În ipotezele teoremei 10.3.1*
$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(f(u, v), g(u, v), h(u, v))\sqrt{EG - F^2} dudv.$$

2. Dacă suprafaţa simplă şi netedă S este dată de reprezentarea $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, atunci

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy. \tag{10.11}$$

3. Aria unei suprafeţe S este

$$a(S) = \iint_S d\sigma$$

4. Dacă există integrala $\iint_S F(x, y, z) d\sigma$, ea este independentă de reprezentarea parametrică a suprafeţei S.

5. Proprietatea de aditivitate a integralei de suprafaţă de primul tip ca funcţie de domeniu. Dacă suprafaţa simplă S este netedă pe porţiuni, $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$, atunci

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} F(x, y, z) d\sigma.$$

Exemplu 10.3.1 *1. Să se calculeze integrala $I = \iint_S (x + y + z) d\sigma$, unde suprafaţa S este semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.*

Pentru suprafaţa S avem reprezentarea parametrică $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = a\sin\theta\cos\varphi$, $z = a\sin\varphi, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $d\sigma = a^2\cos\varphi d\theta d\varphi$. Obţinem

$$\begin{aligned}
I &= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} (\cos\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\sin^2\varphi + \cos\varphi\sin\varphi) d\theta\right] d\varphi = \\
&= \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \pi a^3
\end{aligned}$$

2. Să se calculeze integrala $I = \iint_S z d\sigma$, *unde suprafaţa* S *este porţiunea din paraboloidul* $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, *decupată de cilindrul* $x^2 + y^2 = 8$; $pr_{xOy} S = D$, $D : x^2 + y^2 \le 8$, $S : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), (x, y) \in D$. *Conform relaţiei (10.11) avem*

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi} r^3\sqrt{1+r^2}dt\right)dr \\ &= \pi\left[\frac{1}{3}r^2(1+r^2)^{3/2}\Big|_0^{2\sqrt{2}} - \frac{2}{15}(1+r^2)^{5/2}\Big|_0^{2\sqrt{2}}\right] = \frac{596\pi}{15}. \end{aligned}$$

10.4 Integrala de suprafaţă în raport cu coordonatele

Definiţia 10.4.1 *Mulţimea* $T_a S$ *a tuturor vectorilor tangenţi la* S *în* a *se numeşte spaţiul tangent la* S *în* a.

Definiţia 10.4.2 *Se numeşte orientare a unei suprafeţe* S *alegerea unei orientări în fiecare spaţiu* $T_a S, a \in S$, *adică alegerea a câte unui versor normal* $\bar{n}(a), \bar{n}(a) \perp T_a S$ *astfel încât aplicaţia* $c : S \to V_3, c(a) = \varepsilon_a \bar{n}(a)$ *să fie continuă, cu* $\varepsilon_a = \pm 1$.

O suprafaţă S *care admite orientare se numeşte orientabilă sau cu două feţe.*

Dacă orientarea este fixată, atunci suprafaţa S *se numeşte orientată.*

Dacă suprafaţa S este convexă, atunci cum funcţia $\bar{c} : S \to \{\pm 1\}$ $\bar{c}(a) = \varepsilon_a$ este continuă rezultă că ea este constantă, adică fie $\varepsilon_a = 1$ pentru orice $a \in S$ şi atunci funcţia c defineşte orientarea pozitivă $c(a) = \bar{n}(a)$, fie $\varepsilon_a = -1$, pentru orice $a \in S$ şi atunci funcţia c defineşte orientarea negativă $c(a) = -\bar{n}(a)$.

Integrala de suprafaţă de tipul al doilea se construieşte în mod asemănător ca şi integrala curbilinie de tipul al doilea.

Fie suprafaţa simplă şi netedă dată de reprezentarea (10.7). În fiecare punct $M(x, y, z)$ al suprafeţei S putem considera doi vectori normali la suprafaţă $\bar{n}_i, \bar{n}_s$ de sensuri opuse.

Definiţia 10.4.3 *Se numeşte faţa superioară (inferioară) a suprafeţei* S *relativ la planul* xOy *acea faţă a suprafeţei pentru care vectorul normal face un unghi ascuţit (obtuz) cu axa* Oz.

În cazul unei sfere faţa superioară are ca vector normal, vectorul normal exterior la sferă. Faţa inferioară are ca vector normal, vectorul normal interior la sferă.

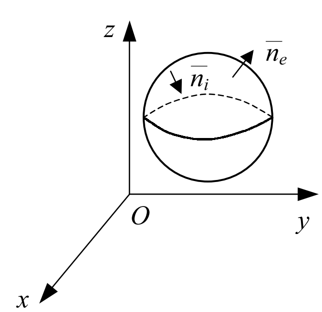

Figura 10.9:

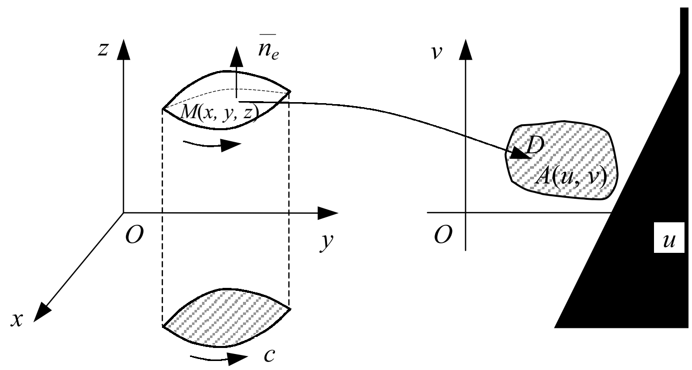

Figura 10.10:

Fie $\Delta = \mathrm{pr}_{xOy}S$, Γ conturul suprafeţei S, $C = \mathrm{pr}_{xOy}\Gamma$.

Pe conturul Γ se pot defini două sensuri. Sensul asociat feţei superioare este cel care corespunde sensului direct pe C. Sensul asociat feţei inferioare este cel care corespunde sensului invers pe C. Vom spune că suprafaţa S este orientată faţă de planul xOy, de asemenea, fiind orientate atât domeniul Δ cât şi domeniul D.

Se observă că o suprafaţă S este orientată, dacă prin deplasarea continuă a unui punct de pe Γ revenim în punctul iniţial cu aceeaşi orientare pentru normala la S. În caz contrar suprafaţa S nu este orientată. Un exemplu de suprafaţă care nu este orientată îl reprezintă banda lui Möbius care se obţine prin îndoirea unei foi dreptunghiulare $ABCD$ astfel încât vârful A coincide cu C, iar vârful B coincide cu D. Însă o porţiune a acesteia poate fi orientabilă.

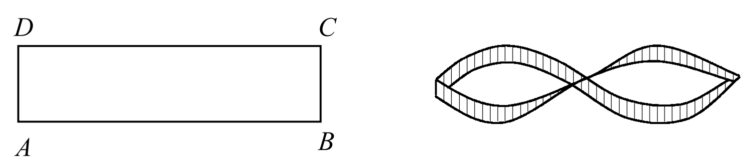

Figura 10.11:

Procedeul folosit pentru orientarea suprafeţei S şi de asociere acestei orientări orientarea domeniului Δ poate fi extins şi la celelalte plane de coordonate.

Fie P, Q, R trei funcţii definite şi continue pe un domeniu $V \subset \mathbb{R}^3$, domeniu ce conţine suprafaţa netedă şi orientată S. Avem

$$\bar{n} = \pm\frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\|\bar{r}_n \times \bar{r}_v\|} = \pm(\alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + \gamma\bar{k}),$$

unde α, β şi γ reprezintă cosinusurile unghiurilor pe care le face normala la suprafaţa orientată S cu axele de coordonate.

Definiţia 10.4.4 *Integrala de suprafaţă a funcţiei $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ sau integrala de suprafaţă de speţa a doua se notează*

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy \tag{10.12}$$

şi se defineşte prin egalitatea

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint_S (P(x,y,z)\alpha + Q(x,y,z)\beta dx + R(x,y,z)\gamma)d\sigma \tag{10.13}$$

Având în vedere regula de calcul a integralei de suprafaţă de speţa întâi şi faptul că

$$\bar{n} = \pm\left(\frac{D(g,h)}{D(u,v)}\bar{i} + \frac{D(h,f)}{D(u,v)}\bar{j} + \frac{D(f,g)}{D(u,v)}\bar{k}\right)\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}$$

obţinem

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z) = \tag{10.14}$$
$$= \pm\iint_S \left[P(x,y,z)\frac{D(g,h)}{D(u,v)} + Q(x,y,z)\frac{D(h,f)}{D(u,v)} + R(x,y,z)\frac{D(f,g)}{D(u,v)}\right]dudv$$

cu semnul " $+$ " dacă domeniul D are aceeaşi orientare cu domeniul Δ şi cu semnul " $-$ " dacă domeniul D are orientare inversă faţă de domeniul Δ.

Observaţia 10.4.1 *1. Dacă $\bar{V}(x,y,z) = O(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$, $(x,y,z) \in V \subset \mathbb{R}^3$, iar domeniul V conţine suprafaţa S, atunci integrala de suprafaţă de speţa a doua se poate scrie ca*

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint_S (\bar{F},\bar{n})d\sigma = \iint_D (\bar{V},\bar{r}_u,\bar{r}_v)dudv, \tag{10.15}$$

unde produsul mixt este

$$(\bar{v},\bar{r}_u,\bar{r}_v) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

2. Dacă suprafaţa S este netedă pe porţiuni, $S = \bigcup_{k=1}^n S_k$, unde S_k sunt suprafeţe netede $k = \overline{1,n}$, atunci integrala de suprafaţă (10.12) se calculează prin

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \sum_{k=1}^n \iint_{S_k} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

3. Presupunem că $\bar{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$, $(x,y,z) \in V \subset \mathbb{R}^3$ este câmpul vectorial al vitezelor particulelor de fluid ale unui fluid în mişcare având masa specifică egală cu unitatea. Cantitatea de fluid care trece prin elementul de suprafaţă $d\sigma$ al suprafeţei orientate $S \subset V$ în unitatea de timp este produsul $(\bar{V},\bar{n})d\sigma$ şi se numeşte fluxul elementar al câmpului de viteze $\bar{V}$ prin elementul $d\sigma$. Integrala de suprafaţă $\iint_S (\bar{V},\bar{n})d\sigma$ reprezintă fluxul total al câmpului de viteze $\bar{V}$ prin suprafaţa orientată S.

Exemplu 10.4.1 *1. Să se calculeze integrala de speţa a doua* $I = \iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, *unde* S *este faţa exterioară a sferei* $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$.

Versorul normalei $\bar{n}$ *al feţei exterioare este* $\bar{n} = \dfrac{grad\,\varphi}{\|\,grad\,\varphi\|} = \left(\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{a}, \dfrac{z}{a}\right)$. *Cu ajutorul formulei (10.13) integrala* I *devine*

$$I = \iint_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} d\sigma = a \iint_S d\sigma = 4\pi a^3.$$

2. Să se calculeze integrala de speţa a doua $I = \iint_S (y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dxdy$, *unde* S *este faţa exterioară închisă a conului* $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le h$.
$S = S_1 \cup S_2$, *unde* S_1 *este secţiunea suprafeţei* S *cu planul* $z = h$, *iar* S_2 *este faţa laterală a conului;* $I = I_1 + I_2$, *unde* $I_1 = \iint_{S_1} (y - z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dxdy$, *iar* $I_2 = \iint_{S_2} (y-z)dydx + (z-x)dxdz + (x-y)dxdy$.

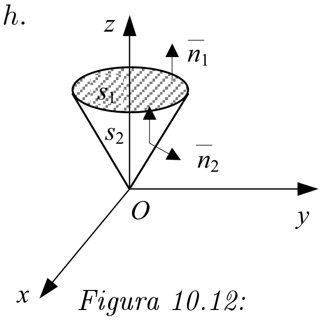

Figura 10.12:

Versorul normalei $\bar{n}_1$ *al feţei exterioare a suprafeţei* S_1 *este* $\bar{n}_1 = (0,0,1)$. *Conform relaţiei (10.13)* I_1 *devine* $I_1 = \iint_{S_2} (x-y)d\sigma = \iint_D (x-y)dxdy$, *unde* $D = pr_{xOy} S_1$, $D : x^2 + y^2 \le h^2$.

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^h r^2(\cos t - \sin t)dr \right) dt = 0, \text{ unde } x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ r \in [0,h], t \in [0,2\pi].$$

Versorul normalei $\bar{n}_2$ *al feţei exterioare a suprafeţei* S_2 *este* $\bar{n}_2 = -\dfrac{grad\,\varphi}{\|\,grad\,\varphi\|}$, *unde* $\varphi(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2} = 0$, *iar unghiul pe care* $\bar{n}_2$ *îl face cu axa* Oz *este obtuz;* $\bar{n}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{x^2+y^2}, -1\right)$. *Conform relaţiei (10.13)* I_2 *devine*

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{S_2} \left[\frac{x(y-z) + y(z-x)}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x-y) \right] d\sigma = \sqrt{2} \iint_{S_2} (y-x) d\sigma = \\ &= 2 \iint_D (y-x)dxdy = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^h r^2(\sin t - \cos t)dr \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Aşadar $I = 0$.

10.5 Formula lui Stokes

Legătura dintre integrala curbilinie în spaţiu şi integrala de suprafaţă este stabilită prin formula lui Stokes, care constituie generalizarea formulei lui Green.

Fie S o suprafaţă orientată, netedă şi simplă dată prin reprezentarea vectorială

$$\bar{r}(u,v) = f(u,v)\bar{i} + g(u,v)\bar{j} + h(u,v)\bar{k}, \quad (u,v) \in D,$$

unde D este un domeniu compact ce are arie, iar $f, g, h \in C^2(D)$. Fie C curba ce mărgineşte suprafaţa S, curbă închisă şi netedă. Pe curba C se defineşte o orientare compatibilă cu orientarea pe suprafaţa S, în sensul că se alege faţa suprafeţei S astfel ca un observator situat pe această faţă să vadă conturul C parcurs în sens direct.

Teorema 10.5.1 *Fie suprafaţa S şi curba C care satisfac condiţiile de mai sus. Dacă P, Q şi R sunt trei funcţii definite şi de clasă $C^1(V)$, unde domeniul $V \subset \mathbb{R}^3$ conţine suprafaţa S, atunci are loc egalitatea*

$$\oint_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \iint_S (R'_y - Q'_z)dydz + \\ +(P'_z - R'_x)dzdx + (Q'_x - P'_y)dzdy$$

numită formula integrală a lui Stokes.

Demonstraţie: Fie Γ curba ce mărgineşte domeniul D.

$$\begin{aligned} \int_C P(x,y,z)dx &= \int_\Gamma P(f(u,v),g(u,v),h(u,v))(f'_u du + f'_v dv) = \\ &= \int_\Gamma P(f(u,v),g(u,v),h(u,v))f'_v(dv) + \\ &\quad + P(f(u,v),g(u,v),h(u,v))f'_v du \end{aligned} \tag{10.16}$$

Aplicăm formula lui Green membrului drept al egalităţii (10.16)

$$\int_C P(x,y,z)dx = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}(Pf'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(Pf'_u)\right] dudv \tag{10.17}$$

Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}(Pf'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(Pf'_u) &= P'_x f'_u f'_v + P'_y g'_u f'_v + P'_z h'_u f'_v + Pf''_{vu} - P'_x f'_v f'_u - \\ &\quad - P'_y g'_v f'_u - P'_z h'_v f'_u - Pf''_{uv} = P'_z(h'_u f'_v - h'_v f'_u) - \\ &\quad - P'_y(f'_u g'_v - g'_u f'_v) = P'_z B - P'_y C \end{aligned} \tag{10.18}$$

Cu relaţia (10.18), (10.17) devine

$$\int_C P(x,y,z)dx = \iint_D (P'_z B - P'_y C)dudv = \iint_S P'_z dzdx - P'_y dxdy \tag{10.19}$$

Anlog obţinem încă două relaţii şi anume

$$\int_C Q(x,y,z)dy = \iint_S Q'_x dxdy - Q'_z dydz \tag{10.20}$$

$$\int_C R(z,y,z)dz = \iint_S R'_y dydz - R'_z dzdx \tag{10.21}$$

Adunând egalităţile (10.19), (10.20) şi (10.21) obţinem

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dzdx + (Q'_x - P'_y)dxdy \tag{10.22}$$

Observaţia 10.5.1 *1. Formula lui Green rezultă din formula integrală a lui Stokes dacă C şi $S \subset \mathbb{R}^2$, adică $z = 0$ şi $dz = 0$. Atunci înlocuind în (10.22) $dz = 0$ avem*

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_S (Q'_x - P'_y)dxdy.$$

2. *Dacă α, β, γ sunt cosinusurile directoare ale normalei $\bar{n}$ la suprafaţa orientată S formula (10.22) devine*

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint \left[(R'_y - Q'_z)\alpha + (P'_z - R'_x)\beta + (Q'_x - P'_y)\gamma\right] d\sigma.$$

Exemplu 10.5.1 *Cu ajutorul formulei lui Stokes să se calculeze următoarea integrală curbilinie* $I = \oint_C ydx + zdy + xdz$, *unde curba C este dată prin* $C : \begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin 2t \\ z = a\sin^2 t \end{cases}$. *Se observă că* $C : x + z = a$ *şi* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ *şi luăm suprafaţa S ca fiind porţiunea din planul $x + z = a$ decupată de cercul $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ şi versorul normalei la S* $\bar{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Conform formulei (10.22) integrala I devine

$$I = -\iint_S \sqrt{2}d\sigma = -2\iint_D dxdy = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}a^2,$$

unde $D = pr_{xOy}\, int C$, $D : 2x^2 + y^2 - 2ax \leq 0$.

Capitolul 11

Integrala triplă

11.1 Mulţimi din spaţiu măsurabile Jordan

Se numeşte poliedru o figură mărginită de feţe plane. Măsura mulţimii de puncte interioare unei suprafeţe poliedrale S este volumul poliedrului mărginit de S.

Clasa poliedrelor este un clan. Fiecărui poliedru $P \in \mathcal{P}$ i se ataşează un număr real pozitiv $v(P)$, volumul său.

Funcţia reală $v : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ are următoarele proprietăţi:

1. $v(P) \geq 0, \forall\ P \in \mathcal{P}$
2. $v(P \cup Q) = v(P) + v(Q)$, dacă $P \cap Q = \emptyset$;
3. $v(Q - P) = v(Q) - v(P)$, dacă $P \subset Q$;
4. $v(P) \leq v(Q)$, dacă $P \subset Q$;
5. $v(P \cup Q) \leq v(P) + v(Q)$.

Fie A o mulţime mărginită din $\mathbb{R}^3$. Există întotdeauna două poliedre P şi Q numite poliedru interior, respectiv exterior astfel încât $P \subset A \subset Q$. Oricare ar fi poliedrul interior P şi poliedrul exterior Q avem $v(P) \leq v(Q)$.

Notăm $v_i(A) = \sup_{P \subset A} v(P)$ şi $v_e(A) = \inf_{A \subset Q} v(Q)$.

Numerele $v_i(A)$ şi $v_e(A)$ se numesc volumul interior, respectiv volumul exterior în sensul Jordan al lui A şi avem $v(P) \leq v_i(A) \leq v_e(A) \leq v(Q), \forall\ P$ şi Q astfel încât $P \subset A \subset Q$.

Definiţia 11.1.1 *Vom spune că mulţimea mărginită din $\mathbb{R}^3$ are volum sau este măsurabilă Jordan dacă $v_i(A) = v_e(A)$. Dacă mulţimea A are volum, atunci valoarea comună a volumului interior şi a celui exterior se numeşte volumul mulţimii A şi se notează $v(A)$, $v(A) = v_i(A) = v_e(A)$.*

Observaţia 11.1.1 *Dacă mulţimea A este măsurabilă în sens Jordan, atunci $\forall\ P, Q \in \mathcal{P}$ $P \subset A \subset Q$ avem $v(P) \leq v(A) \leq v(Q)$, deci $v(A) \geq 0$.*

Criterii de măsurabilitate

Teorema 11.1.1 *O mulţime A din spaţiu are volum dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un poliedru interior $P_\varepsilon \subset A$ şi un poliedru exterior $A \subset Q_\varepsilon$ astfel ca $v(Q_\varepsilon) - v(P_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Teorema 11.1.2 *O mulţime A din spaţiu are volum dacă şi numai dacă există un şir de poliedre interioare (P_n) şi unul de poliedre exterioare (Q_n) astfel încât şirurile volumelor $(v(P_n))$, respectiv $(v(Q)n))$ au aceeaşi limită,*

$$\lim_{n\to\infty} v(P_n) = \lim_{n\to\infty} v(Q_n) = v(A).$$

Demonstraţiile teoremelor 11.1.1 şi 11.1.2 sunt similare cu cele ale teoremelor 9.1.1 şi 9.1.2.

11.2 Integrala triplă

Integrala triplă este o extindere a integralei Riemann la un domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$ mărginit de o suprafaţă netedă pe porţiuni.

Fie funcţia f definită şi mărginită pe domeniul compact V, $V \subseteq [a,b] \times [c,d] \times [e,g] = I$. Considerăm

$$\begin{aligned} \delta &: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \\ \bar{\delta} &: c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d \\ \delta^* &: e = z_0 < z_1 < \cdots < z_q = g \end{aligned} \tag{11.1}$$

diviziuni ale intervalelor $[a,b], [c,d]$, respectiv $[e,g]$.

Planele duse prin punctele diviziunilor $\delta, \bar{\delta}, \delta^*$ paralele cu planele yOz, zOx, respectiv xOy împart paralelipipedul I în mnq paralelipipede notate $\delta_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$, $i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, m-1}, k = \overline{0, q-1}$. Notăm $\mathcal{D} = \{\delta_{ijk} \mid \delta_{ijk} \subset V$ sau δ_{ijk} are puncte atât din V cât şi din $I - V$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$, $k = \overline{0, q-1}\}$.

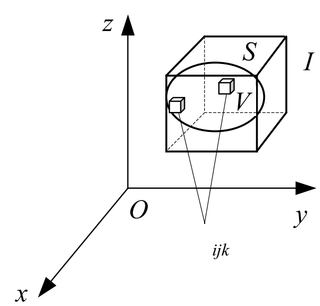

Figura 11.1:

Definiţia 11.2.1 *Se numeşte diviziune a domeniului compact V mulţima paralelipipedelor δ_{ijk} din $\mathcal{D}$. După o renumerotare vom nota $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$ diviziune a lui V.*

Numărul real pozitiv

$$\nu(\Delta) = \max_{\substack{i=\overline{0,n-1} \\ j=\overline{0,m-1} \\ k=\overline{0,q-1}}} (x_{i+1} - x_i, y_{j+1} - y_j, z_{k+1} - z_k) \leq \max(\nu(\delta), \nu(\bar{\delta}), \nu(\delta^*))$$

se numeşte norma diviziunii Δ.

Fie diviziunile $\delta', \bar{\delta}', \delta^{*'}$ ale intervalelor $[a,b], [c,d]$ respeciv $[e,g]$ şi Δ' diviziunea corespunzătoare a domeniului V. Dacă $\delta' \supset \delta$, $\bar{\delta}' \supset \bar{\delta}$, $\delta^{*'} \supset \delta^*$ atunci vom spune că diviziunea Δ' este mai fină decât Δ şi vom nota $\Delta' \supset \Delta$, iar

$$\nu(\Delta') \leq \max(\nu(\delta'), \nu(\bar{\delta}'), \nu(\delta^{*'})) \leq \max(\nu(\delta), \nu(\bar{\delta}), \nu(\delta^*))$$

Dacă Δ şi Δ' sunt diviziuni ale domeniului V şi dacă $\nu(\Delta') \leq \nu(\Delta)$ nu rezultă că diviziunea Δ' este mai fină decât Δ.

Fie $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$ o diviziune a domeniului compact $V \subset \mathbb{R}^3$. Notăm $m_k = \inf\limits_{(x,y,z)\in\delta_k} f(x,y,z)$, $M_k = \sup\limits_{(x,y,z)\in\delta_k} f(x,y,z)$, $m = \inf\limits_{(x,y,z)\in V} f(x,y,z)$, $M = \sup_{(x,y,z)\in V} f(x,y,z)$, $v_k =$ volumul δ_k şi $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k$, $k = \overline{1,p}$.

Considerăm sumele $s_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{p} m_k v_k$, $S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{p} M_k v_k$ şi $\sigma_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{p} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k$ numite suma Darboux inferioară, superioară, respectiv suma Riemann.

În continuare dăm câteva dintre proprietăţile sumelor Darboux şi Riemann, care se demonstrează în mod similar cu proprietăţile sumelor Darboux şi Riemann de la integrala dublă.

1. $mv \le s_\Delta(f) \le S_\Delta(f) \le Mv$, unde prin v am notat volumul domeniului V, $\Delta \in \Delta^*$.

2. $s_\Delta(f) = \inf \sigma_\Delta(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, $S_\Delta(f) = \sup \sigma_\Delta(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k$.

3. Dacă $\Delta, \Delta' \in \Delta^*$, $\Delta' \supset \Delta$ atunci $s_\Delta(f) \le s_{\Delta'}(f) \le S_{\Delta'}(f) \le S_\Delta(f)$.

4. Pentru orice $\Delta, \Delta' \in \Delta^*$ avem $s_\Delta(f) \le S_{\Delta'}(f)$.

5. Dacă $\Delta \in \Delta^*$, atunci $\sup_{\Delta \in \Delta^*} s_\Delta(f) \le \inf_{\Delta \in \Delta^*} S_\Delta(f)$, şi mulţimea $(s_\Delta(f))_{\Delta \in \Delta^*}$ este mărginită superior, iar mulţimea $(S_\Delta(f))_{\Delta \in \Delta^*}$ este mărginită inferior.

6. $s_\Delta(f) \le \sigma_\Delta(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) \le S_\Delta(f)$, $\forall\, \Delta \in \Delta^*$ şi pentru orice punct $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k$.

Definiţia 11.2.2 *Fie f o funcţie definită şi mărginită pe un domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$. Funcţia f este integrabilă Riemann pe V dacă există un număr real I cu proprietatea că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ aşa încât $\forall\, \Delta \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k$ să avem*

$$|\sigma_\Delta(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) - I| < \varepsilon.$$

Numărul real I se numeşte integrala funcţiei f pe domeniul V sau integrala triplă a funcţiei f şi se notează $I = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$.

Definiţia 11.2.3 *Fie f o funcţie definită şi mărginită pe un domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$. Funcţia f este integrabilă Riemann pe V, dacă pentru orice şir de diviziuni (Δ_n), $\Delta_n \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ şirurile sumelor Darboux $(s_{\Delta_n}(f))$ şi $(S_{\Delta_n}(f))$ au limită comună finită.*

Observaţia 11.2.1 *1. Dacă funcţia f este integrabilă pe domeniul V, atunci $I = \lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n}(f) = \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}(f)$.*

2. Dacă funcţia f este integrabilă pe V şi $f(x,y,z) \ge 0$, $(x,y,z) \in V$, atunci integrala I reprezintă masa unui corp de volum V, neomogen şi de densitate $f(x,y,z)$.

3. Domeniul V se numeşte domeniu de integrare.

4. Expresia $dxdydz$ se numeşte elementul de volum în coordonate carteziene.

Definiţia 11.2.4 *Fie f o funcţie definită şi mărginită pe un domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$. Funcţia f este integrabilă Riemann pe V dacă pentru orice şir de diviziuni (Δ_n), $\Delta_n \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $(\xi_k^n, \eta_k^n, \zeta_k^n) \in \delta_k^n$, şirurile Riemann corespunzătoare $(\sigma_{\Delta_n}(f))$ au limită comună finită.*

11.3 Criterii de integrabilitate

Teorema 11.3.1 *Criteriul lui Darboux*

Fie f o funcţie definită şi mărginită pe un domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$. Funcţia f este integrabilă pe V dacă şi numai dacă pentru $\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ aşa încât $\forall\ \Delta \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ să avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

Teorema 11.3.2 *Orice funcţie f definită şi continuă pe un domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$ este integrabilă pe V.*

Teorema 11.3.3 *Fie f o funcţie definită şi mărginită pe un domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$. Funcţia f este integrabilă pe D dacă şi numai dacă mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f este o suprafaţă netedă pe porţiuni.*

Demonstraţie: vezi [10]
Teoremele 11.3.1 şi 11.3.2 se demonstrează la fel ca la integrala dublă.

Proprietăţi ale integralelor triple

Demonstraţia următoarelor proprietăţi ale integralelor triple este similară cu cea a integralelor simple.

1. Proprietatea de linearitate a integralei duble.

   Dacă funcţiile f şi g sunt integrabile pe $V \subset \mathbb{R}^3$, atunci şi funcţiile $f \pm g$ sunt integrabile pe V şi

$$\begin{aligned}\iiint_V (f(x,y,z) \pm g(x,y,z))dxdydz &= \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \pm \\ &\pm \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.\end{aligned}$$

2. Proprietatea de omogenitate a integralei triple.

   Dacă funcţia f este integrabilă pe V şi $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci şi funcţia λf este integrabilă pe V şi

$$\iiint_V \lambda f(x,y,z)dxdydz = \lambda \iiint_V f(x,y,z)dxdydz.$$

3. Proprietatea de aditivitate a integralei triple ca funcţie de domeniu.

   Dacă funcţia f este integrabilă pe V, iar volumul V este neted pe porţiuni, $V = \bigcup_{k=1}^n V_k$, atunci funcţia f este integrabilă pe $V_k, k = \overline{1,n}$ şi

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \sum_{k=1}^n \iiint_{V_k} f(x,y,z)dxdydz.$$

4. Dacă funcţia f este integrabilă pe V şi $f(x,y,z) \geq 0$, $\forall\ (x,y,z) \in V$, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$

5. Proprietatea de monotonie a integralei triple.

   Dacă funcţiile f şi g sunt integrabile pe V şi $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$, $\forall\ (x,y,z) \in V$, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.$$

6. Dacă funcţia f este integrabilă pe V, atunci şi funcţia $|f|$ este integrabilă pe V şi

$$\left|\iiint_V f(x,y,z)dxdydz\right| \leq \iiint_V |f(x,y,z)|dxdydz.$$

7. Formula de medie pentru integrala triplă.

   Dacă funcţia f este continuă pe domeniul compact V, atunci există un punct $(\xi,\eta,\zeta) \in V$ aşa încât să avem

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = f(\xi,\eta,\zeta)v,$$

   unde v reprezintă volumul domeniului V.

8. Dacă funcţia f este mărginită şi integrabilă pe V, $m \leq f(x,y,z) \leq M$, $(x,y,z) \in V$, atunci există un număr $\mu \in [m,M]$ astfel încât să avem

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \mu v.$$

9. $\displaystyle\iiint_V dxdydz = v.$

11.4 Calculul integralei triple

1. Să presupunem că domeniul V este $I = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$.

Teorema 11.4.1 *Dacă f este o funcţie definită, mărginită şi integrabilă pe I aşa încât $\forall\ (x,y) \in D = [a,b] \times [c,d]$ există integrala $F(x,y) = \displaystyle\int_e^g f(x,y,z)dz$, atunci există şi integrala $\displaystyle\iint_D F(x,y)dxdy$ şi are loc egalitatea*

$$\iiint_I f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_e^g f(x,y,z)dz\right) dxdy$$

Demonstraţie: Fie $\delta, \bar{\delta}, \delta^*$ diviziuni ale intervalelor $[a,b]$, $[c,d]$, respectiv $[e,g]$ date de (11.1) şi $\delta_{ijk} = [x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]\times[z_k,z_{k+1}]$, $\delta_{ij} = [x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$, $i = \overline{0,n-1}, j = \overline{0,m-1}, k = \overline{0,q-1}$.

$\Delta = (\delta_{ijk} \,|\, i = \overline{0,n-1}, j = \overline{0,m-1}, k = \overline{0,q-1})$ este o diviziune a lui I, iar $\Delta' = (\delta_{ij} \,|\, i = \overline{0,n-1}, j = \overline{0,m-1})$ o diviziune a lui D. Notăm

$$m_{ijk} = \inf_{(x,y,z)\in\delta_{ijk}} f(x,y,z), \quad M_{ijk} = \sup_{(x,y,z)\in\delta_{ijk}} f(x,y,z)\,.$$

Considerăm suma Riemann a funcţiei F corespunzătoare diviziunii Δ' şi punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_j) \in \delta_{ij}$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\Delta'}(F; \xi_i, \eta_j) &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} F(\xi_i, \eta_j)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_e^g f(\xi_i, \eta_j, z)dz\right)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{q-1}\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i, \eta_j, z)dz(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) \qquad (11.2)
\end{aligned}$$

Aplicând funcţiei $f(\xi_i, \eta_j, z)$ formula de medie pentru integrala Riemann pe intervalul $[z_k, z_{k+1}]$, rezultă existenţa unui punct

$$m_{ijk} \le \mu_{ijk} \le M_{ijk} \qquad (11.3)$$

astfel ca

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i, \eta_j, z)dz = \mu_{ijk}(z_{k+1}-z_k)\,.$$

Cu aceasta (11.2) devine

$$\sigma_{\Delta'}(F, \xi_i, \eta_j) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{q-1}\mu_{ijk}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)(z_{k+1}-z_k) \qquad (11.4)$$

Din (11.3) şi (11.4) obţinem

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{q-1} m_{ijk}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)(z_{k+1}-z_k) \le \sigma_{\Delta'}(F, \xi_i, \eta_j) \le \\
\le\ &\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{q-1} M_{ijk}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)(z_{k+1}-z_k),
\end{aligned}$$

adică $s_\Delta(f) \le \sigma_{\Delta'}(F, \xi_i, \eta_j) \le S\Delta(f)$.

Fie $(\delta_n), (\bar{\delta}_n)$ şi (δ_n^*) şiruri de diviziuni ale intervalelor $[a, b], [c, d]$, respectiv $[e, g]$ iar (Δ_n) şi (Δ'_n) şirurile corespunzătoare de diviziuni ale lui I respectiv D. Dacă pentru $(\delta_n), (\bar{\delta}_n)$, (δ_n^*) normele $\nu(\delta_n) \to 0$, $\nu(\bar{\delta}_n) \to 0$, $\nu(\delta_n^*) \to 0$, atunci şi $\nu(\Delta_n) \to 0, \nu(\Delta'_n) \to 0$ şi avem

$$s_{\Delta_n}(f) \le \sigma_{\Delta'_n}(F) \le S_{\Delta_n}(f)\,. \qquad (11.5)$$

Trecând la limită în (11.5) şi având în vedere faptul că f este integrabilă pe I, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n}(f) = \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta'_n}(F)$$

ceea ce înseamnă că funcţia F este integrabilă pe D şi în plus

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iint_D F(x, y)dxdy = \iint_D\left(\int_e^g f(x, y, z)dz\right)dxdy \qquad (11.6)$$

Observaţia 11.4.1 *1. Egalitatea (11.6) se mai poate scrie şi sub forma*

$$\iiint_V F(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^g f(x,y,z)dz\right) dy\right) dx \tag{11.7}$$

şi sub încă alte 5 forme permutând ordinea de integrare.

2. Dacă funcţia f este continuă pe I, atunci are loc egalitatea (11.6).

Exemplu 11.4.1 *1. Să se calculeze integrala $I = \iiint_V (x+y+z)dzdydz$, unde V este $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 1$. Conform formulei (11.7) se obţine*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_0^1 (x+y+z)dz\right) dy\right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1 dy\right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(x+y+\frac{1}{2}\right) dy\right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(xy+\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}\right)\Big|_1^2 dx = \int_0^1 (x+2)dx = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

2. Să presupunem că $V = D \times [e,g]$ este un cilindru, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact mărginit de curba C netedă pe porţiuni şi $V \subset I = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$. Avem $D = pr_{xOy}V$, $D' = pr_{xOy}I$. Definim funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ prin $\bar{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & , (x,y,z) \in V \\ 0 & , (x,y,z) \in I - V \end{cases}$.

Funcţia f este integrabilă pe I (frontiera fiecărui domeniu din $I - V$ este de volum nul) şi

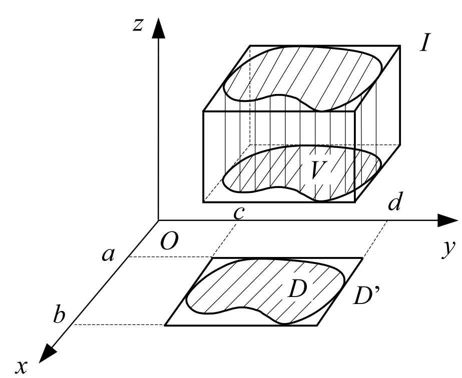

Figura 11.2:

$$\begin{aligned} \iiint_I \bar{f}(x,y,z)dxdydz &= \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \\ \iiint_I \bar{f}(x,y,z)dxdydz &= \iint_{D'} \left(\int_e^g \bar{f}(x,y,z)dz\right) dxdy = \\ &= \iint_D \left(\int_e^g f(x,y,z)dz\right) dxdy \end{aligned}$$

3. *Fie domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ mărginit de suprafaţa S netedă pe porţiuni. Presupunem că orice paralelă la axa Oz taie suprafaţa S în două puncte şi domeniul V este cuprins între planele paralele $z = e$ şi $z = g$ $(e < g)$. Considerăm cilindrul proiectant al volumului V pe planul xOy cu generatoarele paralele cu axa Oz şi $D = pr_{xOy}V$, C curba ce mărgineşte domeniul plan D. Acest cilindru este tangent suprafeţei S după curba Γ, curbă ce împarte suprafaţa S în două suprafeţe, una de ecuaţie $z = \psi_1(x,y)$, $(x,y) \in D$, iar a doua de ecuaţie $z = \psi_2(x,y)$, $(x,y) \in D$. Dacă pentru un domeniu compact V se verifică cele prezentate anterior vom numi acest domeniu simplu în raport cu Oz.*

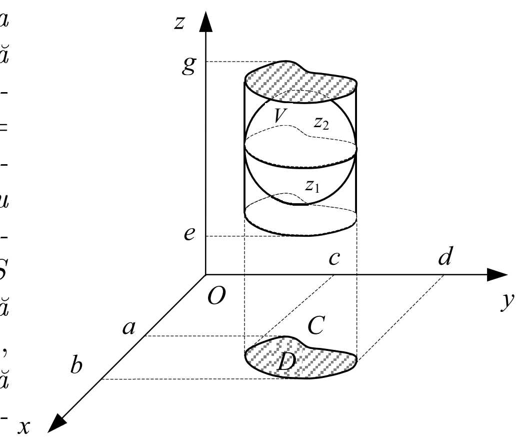

Figura 11.3:

Teorema 11.4.2 *Fie f o funcţie definită, mărginită şi integrabilă pe domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^2$ simplu în raport cu Oz. Dacă există integrala $F(x,y) = \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, $\forall\ (x,y) \in D$, atunci există şi integrala $\iint_D F(x,y)dxdy$ şi are loc egalitatea*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy\,. \tag{11.8}$$

Demonstraţie: Fie domeniul $D \subset [a,b] \times [c,d]$ şi $V' = D \times [e,g]$. Definim funcţia $\bar{f} : I \to \mathbb{R}$ prin $\bar{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & , \quad (x,y,z) \in V \\ 0 & , \quad (x,y,z) \in V' - V \end{cases}$. Funcţia $\bar{f}$ este integrabilă pe V' (frontiera fiecărui domeniu din $V' - V$ este de volum nul). Atunci avem

$$\iiint_{V'} \bar{f}(x,y,z)dxdydz = \iiint_V \bar{f}(x,y,z)dxdydz + \\ + \iiint_{V'-V} \bar{f}(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz\,.$$

Întrucât

$$\begin{aligned} \int_e^g \bar{f}(x,y,z)dz &= \int_e^{\psi_1(x,y)} \bar{f}(x,y,z)dz + \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \bar{f}(x,y,z)dz + \\ &+ \int_{\psi_2(x,y)}^g \bar{f}(x,y,z)dz = \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} (x,y,z)dz. \end{aligned}$$

Acum putem aplica 2 pentru funcţia $\bar{f}$ şi domeniul V'

$$\begin{aligned} \iiint_{V'} \bar{f}(x,y,z)dxdydz &= \iint_D \left(\int_e^g \bar{f}(x,y,z)dz \right) dxdy = \\ &= \iint_D \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy, \end{aligned}$$

deci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy\,.$$

Observaţia 11.4.2 *1. Teoreme asemănătoare se obţin dacă domeniul V este simplu în raport cu Ox sau cu Oy.*

2. Dacă domeniul V nu este simplu în raport cu axele de coordonate, atunci prin plane paralele la planele de coordonate împărţim domeniul V într-un număr finit de domenii simple, în raport cu una dintre axele de coordonate, V_i, $V = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$. Atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \sum_{k=1}^{n} \iiint_{V_k} f(x,y,z)dxdydz.$$

3. Dacă funcţia f este continuă pe domeniul simplu V (în raport cu una din axele de coordonate) atunci are loc egalitatea 11.8.

Exemplu 11.4.2 *1. Să se calculeze integrala $I = \iiint_V zdxdydz$, unde domeniul V este semielipsoidul $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leq 0$, $z \geq 0$. Domeniul V este cuprins între planele $z = 0$ şi $z = c$, iar secţiunea cu planul $z =$ct. este elipsa $D : \frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} \leq 1$.*

Atunci

$$\begin{aligned} I = \int_0^c \left(\iint_D zdxdy\right) dz &= \int_0^c \pi zab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \\ &= \pi ab\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4c^2}\right)\Big|_0^c = \frac{\pi abc^2}{4} \end{aligned}$$

2. Să se calculeze integrala triplă $I = \iiint_V (x^2 + y^2)dxdydz$, unde

$V : x^2 + y^2 \leq 2z$, $0 \leq z \leq 2$. Secţiunea domeniului V cu planul $z =$ct. este discul $D : x^2 + y^2 \leq 2z$. Atunci

$$I = \int_0^2 \left(\iint_D (x^2 + y^2)dxdy\right) dz = \int_0^2 2z \iint_D dxdy = \int_0^2 4\pi z^2 dz = \frac{32\pi}{3}.$$

11.5 Formula lui Gauss - Ostrogradsky

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact mărginit de suprafaţa S, simplă, închisă şi netedă pe porţiuni. Presupunem că domeniul V este descompus într-un număr finit de domenii simple în raport cu axele de coordonate, în particular cu Oz.

Teorema 11.5.1 *Fie P, Q, R trei funcţii definite şi continue pe V, cu derivatele parţiale P'_x, Q'_y, R'_z continue pe V. Atunci, pentru faţa exterioară a suprafeţei S, are loc egalitatea*

$$\begin{aligned} &\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \\ &= \iiint_V \left[P'_x(x,y,z) + Q'_y(x,y,z) + R'_z(x,y,z)\right] dxdydz\,, \end{aligned} \tag{11.9}$$

numită formula integrală a lui Gauss (1777 - 1855) - Ostrogradsky (1801 - 1861).

DEMONSTRAŢIE: Întrucât domeniul V este simplu în raport cu Oz, cilindrul proiectant al domeniului V pe planul xOy cu generatoarele paralele cu axa Oz este tangent suprafeţei S după curba Γ, curbă ce împarte suprafaţa S în două suprafeţe S_1 şi S_2 de ecuaţii $z_1 = \psi_1(x,y)$, respectiv $z_2 = \psi_2(x,y)$, $(x,y) \in D = \mathrm{pr}_{xOy}V$.

Conform relaţiei (11.8) avem

$$\begin{aligned} \iiint_V R'_z(x,y,z)dxdydz &= \iint_D \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} R'_z(x,y,z)dz \right) dxdy = \\ &= \iint_D R(x,y,z)\Big|_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} dxdy = \\ &= \iint_D [R(x,y,\psi_2(x,y)) - R(x,y,\psi_1(x,y))]dxdy \end{aligned} \tag{11.10}$$

Dar

$$\iint_D R(x,y,\psi_2(x,y))dxdy = \iint_{S_2} R(x,y,z)dxdy \tag{11.11}$$

şi

$$-\iint_D R(x,y,\psi_1(x,y))dxdy = \iint_{S_1} R(x,y,z)dxdy, \tag{11.12}$$

unde pentru S_2 s-a luat faţa superioară care coincide cu faţa exterioară a suprafeţei S, iar pentru S_1 s-a luat faţa inferioară care coincide cu faţa exterioară a suprafeţei S.

Din egalităţile (11.10), (11.11) şi (11.12) se obţine

$$\iint_V R'_z(x,y,z)dxdydz = \iint_S R(x,y,z)dxdy, \tag{11.13}$$

integrala de suprafaţă fiind luată pe faţa exterioară a suprafeţei S. Considerând acum domeniul V simplu în raport cu Ox, respectiv Oy, în mod analog se obţin egalităţile:

$$\iiint_V P'_x(x,y,z)dxdydz = \iint_S P(x,y,z)dydz \tag{11.14}$$

$$\iiint_V Q'_y(x,y,z)dxdydz = \iint_S Q(x,y,z)dydx \tag{11.15}$$

Adunând egalităţile (11.14), (11.15), (11.16) rezultă egalitatea (11.9).

Teorema 11.5.2 *Fie P, Q, R trei funcţii definite şi continue pe V cu derivatele parţiale P'_x, Q'_y, R'_z continue pe V. Atunci, pentru faţa interioară a suprafeţei S are loc egalitatea*

$$\begin{aligned} &\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \\ &-\iiint_V [P'_x(x,y,z) + Q'_y(x,y,z) + R'_z(x,y,z)]dxdydz. \end{aligned}$$

Observaţia 11.5.1 *1. Teorema 11.5.1 poate fi reformulată astfel:*

Fie $\bar{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe domeniul compact V. Atunci fluxul lui $\bar{F}$ prin suprafaţa închisă S este egal cu integrala divergenţei lui $\bar{F}$ pe domeniul V, adică

$$\iint_S (\bar{F}, \bar{n})d\sigma = \iiint_V \mathit{div}\,\bar{F}dxdydz \tag{11.16}$$

(formula flux-divergenţă).

2. *Formula flux-divergenţă se foloseşte la calculul integralelor de suprafaţă de speţa a doua, dacă suprafaţa este închisă.*

3. *Dacă F este un câmp scalar de clasă C^1 pe domeniul compact V, atunci egalitatea (11.16) devine*
$$\iint_S F\bar{n}d\sigma = \iiint_V grad\, F dxdydz$$
(formula gradientului).

4. *Dacă $\bar{F} = \bar{w} \times \bar{a}$, unde a este un vector arbitrar, atunci $div\, \bar{F} = (\bar{a}, rot\, \bar{w})$ şi egalitatea (11.16) devine*
$$\iint_S (\bar{n} \times \bar{w})d\sigma = \iiint_V rot\, \bar{w} dxdydz$$
(formula rotorului).

5. *Dacă în formula (11.9) considerăm $P(x,y,z) = 0$, $Q(x,y,z) = 0$ şi $P(x,y,z) = z$ obţinem $v = \iint_S zdxdy$, unde v este volumul domeniului V.*

Exemplu 11.5.1 *Cu ajutorul formulei Gauss - Ostrogradski să se calculeze integrala de suprafaţă $I = \iint_S x^3dydz + x^2ydzdx + x^2zdxdy$, S fiind faţa exterioară a suprafeţei închise a cilindrului $x^2+y^2 = a^2$, $0 \le z \le b$. Domeniul V mărginit de suprafaţa S este $V : x^2+y^2 \le a^2$, $0 \le z \le b$. Conform formulei (11.9) se obţine*

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V 5x^2dxdydz = 5\int_0^b \left(\iint_{x^2+y^2\le a^2} x^2dxdy\right)dz = \\ &= 5\int_0^b \left(\int_0^a \left(\int_0^{2\pi} r^3\cos^2 t dt\right)dr\right)dz = 5\int_0^b\left(\int_0^a \pi r^3 dr\right)dz = \frac{5\pi a^3 b}{4}. \end{aligned}$$

11.6 Schimbarea de variabilă la integrala triplă

Considerăm în spaţiul $Oxyz$ domeniul compact V mărginit de suprafaţa S netedă pe porţiuni, iar în spaţiul $Ouvw$ domeniul compact V' mărginit de suprafaţa S' netedă pe porţiuni. Fie transformarea regulată a domeniului V' în V dată de

$$\begin{cases} x = f(u,v,w) \\ y = g(u,v,w) \\ z = h(u,v,w) \end{cases} , \quad (u,v,w) \in V' \tag{11.17}$$

cu f, g, h având derivate parţiale mixte de ordinul al doilea funcţii continue pe V'.

Dacă se ia în domeniul V' o suprafaţă netedă pe porţiuni dată de reprezentarea

$$u = u(s,t), \quad v = v(s,t), \quad w = w(s,t), \quad (s,t) \in D$$

atunci (11.17) transformă această suprafaţă într-o suprafaţă netedă pe porţiuni din domeniul V având ecuaţiile

$$\begin{cases} x = f(u(s,t), v(s,t), w(s,t)) \\ y = g(u(s,t), v(s,t), w(s,t)) \\ z = h(u(s,t), v(s,t), w(s,t)) \end{cases} , \quad (s,t) \in D.$$

Teorema 11.6.1 *Dacă determinantul funcţional* $\dfrac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}$, $(u,v,w) \in D'$, *este pozitiv, respectiv negativ, atunci suprafeţele* S *şi* S' *au aceeaşi orientare, respectiv au orientări inverse şi există un punct* $(u_0, v_0, w_0) \in V'$ *astfel încât*

$$v = \left| \frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}(u_0, v_0, w_0) \right| v' .$$

Demonstraţie: Volumul domeniului compact V exprimat cu ajutorul integralei de suprafaţă pe faţa exterioară a suprafeţei S este

$$v = \iint_S z dxdy = \pm \iint_D z \frac{D(x,y)}{D(s,t)} dsdt \tag{11.18}$$

Integrala se ia cu semnul " $+$ " dacă domeniul D are aceeaşi orientare cu suprafaţa S şi cu semnul " $-$ " dacă domeniul D are orientare inversă faţă de suprafaţa S. Dar

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \frac{D(f,g)}{D(u,v)} \frac{D(u,v)}{D(s,t)} + \frac{D(f,g)}{D(v,w)} \frac{D(v,w)}{D(s,t)} + \frac{D(f,g)}{D(w,u)} \frac{D(w,u)}{D(s,t)}$$

Înlocuind expresia determinantului $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ în relaţia (11.18) se obţine

$$\begin{aligned} v &= \pm \iint_D z \left[\frac{D(f,g)}{D(u,v)} \frac{D(u,v)}{D(s,t)} + \frac{D(f,g)}{D(v,w)} \frac{D(v,w)}{D(s,t)} + \frac{D(f,g)}{D(w,u)} \frac{D(w,u)}{D(s,t)} \right] dsdt = \\ &= \pm \iint_{S'} z \left[\frac{D(f,g)}{D(u,v)} dudv + \frac{D(f,g)}{D(v,w)} dvdw + \frac{D(f,g)}{D(w,u)} dwdu \right] \end{aligned} \tag{11.19}$$

Cu ajutorul formulei Gauss - Ostrogradski aplicată pentru integrala din membrul drept al egalităţii (11.19) avem

$$v = \pm \iiint_{V'} \left[\frac{\partial}{\partial w} \left(z \frac{D(f,g)}{D(u,v)} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(z \frac{D(f,g)}{D(v,w)} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(z \frac{D(f,g)}{D(w,u)} \right) \right] dudvdw \tag{11.20}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial w} \left(z \frac{D(f,g)}{D(u,v)} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(z \frac{D(f,g)}{D(u,w)} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(z \frac{D(f,g)}{D(w,u)} \right) = \frac{\partial h}{\partial w} \frac{D(f,g)}{D(u,v)} + \\ + & \frac{\partial h}{\partial u} \frac{D(f,g)}{D(v,w)} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{D(f,g)}{D(w,u)} + z \left[\frac{\partial}{\partial w} \frac{D(f,g)}{D(u,v)} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{D(f,g)}{D(v,w)} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{D(f,g)}{D(w,u)} \right] = \\ = & \frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)} + z \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial w} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial w} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial g}{\partial w} + \right. \\ + & \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 g}{\partial w \partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \\ - & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 g}{\partial w \partial v} \right] = \frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)} \end{aligned}$$

Înlocuind relaţia obţinută în (11.20) ajungem la formula

$$v = \pm \iiint_{V'} \frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)} dudvdw = \iiint_{V'} \left| \frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)} \right| dudvdw .$$

Aplicând formula de medie ultimei relaţii, rezultă existenţa unui punct $(u_0, v_0, w_0) \in V'$ astfel încât

$$v = \left| \frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}(u_0, v_0, w_0) \right| v'$$

Teorema 11.6.2 *Fie domeniile compacte V' şi V în corespondenţă prin transformarea regulată (11.17). Dacă F este o funcţie continuă pe domeniul V, atunci are loc următoarea egalitate*

$$\begin{aligned}\iiint_V F(x,y,z)dxdydz &= \iiint_{V'} F(f(u,v,w),g(u,v,w),h(u,v,w))\\ &\left|\frac{D)f,g,h)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw\,, \qquad (11.21)\end{aligned}$$

numită formula schimbării de variabilă la integrala triplă.

Demonstraţie: Considerăm $\Delta' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_p)$ o diviziune a domeniului V'. Prin transformarea (11.17) acestei diviziuni îi corespunde diviziunea $\Delta = (s_1, s_2, \ldots, s_p)$ a domeniului V. Dacă $v(s_k), v(s'_k)$ sunt volumele paralelipipedelor s_k, respectiv $s'_k, k = \overline{1,p}$, atunci conform teoremei 11.6.1 există punctele $(u_k, v_k, w_k) \in s'_k$ astfel încât să avem

$$v(s_k) = \left|\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}(u_k,v_k,w_k)\right| v(s'_k).$$

Fie $x_k = f(u_k,v_k,w_k)$, $y_k = g(u_k,v_k,w_k)$, $z_k = h(u_k,v_k,w_k)$, $k = \overline{1,p}$, $(u_k,v_k,w_k) \in s'_k$, $(x_k,y_k,z_k) \in s_k$. Atunci

$$\begin{aligned}&\sigma_\Delta(F;(x_k,y_k,z_k)) = \sum_{k=1}^{p} F(x_k,y_k,z_k)v(s_k) =\\ =\;& \sum_{k=1}^{p} F(f(u_k,v_k,w_k),g(u_k,v_k,w_k),h(u_k,v_k,w_k)\left|\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}(u_k,v_k,w_k)\right| v(s'_k)\\ =\;& \sigma_{\Delta'}\left(F(f,g,h)\left|\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}\right|\right).\end{aligned}$$

Dacă (Δ'_n) este un şir de diviziuni ale domeniului V' cu $\nu(\Delta'_n) \to 0$, atunci şirul corespunzător de diviziuni ale domeniului V, prin transformarea (11.17), (Δ_n), are $\nu(\Delta_n) \to 0$. Avem

$$\sigma_{\Delta_n}(F) = \sigma_{\Delta'_n}\left(F(f,g,h)\left|\frac{D(f,g,h}{D(u,v,w)}\right|\right)$$

şi trecând la limită rezultă

$$\begin{aligned}\iiint_V F(x,y,z)dxdydx &= \iiint_{V'} F(f(u,v,w),g(u,v,w),h(u,v,w))\\ &\left|\frac{D(f,g,h)}{D(u,v)}\right| dudvdw.\end{aligned}$$

Exemplu 11.6.1 *1. Pentru calculul integralei $I = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, unde V : $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ folosim coordonatele sferice $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$; $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\cos\varphi$. Cu ajutorul formulei (11.21) se obţine*

$$I = \int_0^a \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos\varphi d\varphi\right) d\theta\right) dr = 4\pi\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^a = \frac{4\pi a^5}{5}.$$

2. Pentru calculul integralei $= \iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$, *unde* $V : x^2+y^2-2x \leq 0,\ y \geq 0,$ $0 \leq z \leq 1$ *folosim coordonatele cilindrice:* $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z, \theta \in [0,\pi],$ $r \in [0, 2\sin\theta],\ z \in [0,1];\ \dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = r$. *Cu ajutorul formulei (11.21) se obţine*

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\sin\theta}\left(\int_0^1 r^3 dz\right) dr\right) d\theta = \int_0^{\pi} \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{2\sin\theta} d\theta = \\
&= 4\int_0^{\pi} \sin^4\theta d\theta = \frac{3\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

11.7 Aplicaţii ale integralelor triple

1. Volumul corpurilor

Volumul v al unui domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$ (care are volum) este

$$v = \iiint_V dxdydz \tag{11.22}$$

2. Masa corpurilor

Masa unui corp material care ocupă domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ şi are densitatea $\rho(x,y,z)$ cu ρ funcţie continuă este

$$m = \iiint_V \rho(x,y,z)dzdydz \tag{11.23}$$

3. Coordonatele centrului de greutate x_G, y_G, z_G al unui corp material care ocupă domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ şi cu densitatea $\rho(x,y,z)$ sunt:

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{m}\iiint_V x\rho(x,y,z)dxdydz \\
y_G &= \frac{1}{m}\iiint_V y\rho(x,y,z)dxdydz \\
z_G &= \frac{1}{m}\iiint_V z\rho(x,y,z)dxdydz\,.
\end{aligned}
\tag{11.24}
$$

Dacă corpul material este omogen, atunci coordonatele centrului de greutate sunt

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{v}\iiint_V xdxdydz \\
y_G &= \frac{1}{v}\iiint_V ydxdydz \\
z_G &= \frac{1}{v}\iiint_V zdxdydz\,.
\end{aligned}
$$

Exemplu 11.7.1 *Să se determine coordonatele centrului de greutate al corpului* $V : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1,\ z \geq 0$ *cu densitatea de masă* $\rho(x,y,z) = 1$.

$$v = \iiint_V dxdydz = \frac{2\pi abc}{3}\,.$$

Pentru calculul integralelor $\iiint_V x dxdydz, \iiint_V y dxdydz$ *folosim coordonatele sferice* $x = ar\cos\theta\cos\varphi,\ y = br\sin\theta\cos\varphi,\ z = cr\sin\varphi,\ r \in [0,1],\ \theta \in [0, 2\pi],\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];\ \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = abcr^2\cos\varphi$. *Atunci* $\iiint_V x dxdydz = 0, \iiint_V y dxdydz = 0$. *Din exemplul 11.4.2 avem* $\iiint_V z dxdydz = \frac{\pi abc^2}{4}$.

4. Fie K un corp material care ocupă domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ şi are densitatea $\rho(x,y,z)$. Momentul de inerţie ale lui K faţă de originea axelor este
$I = \iiint_V \rho(x,y,z)(x^2+y^2+z^2)dxdydz.$
Momentele de inerţie ale lui K faţă de axele de coordonate Ox, Oy şi Oz sunt

$$\begin{aligned} I_{Ox} &= \iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz \\ I_{Oy} &= \iiint_V (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz \\ I_{Oz} &= \iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz\,. \end{aligned}$$

Momentele de inerţie ale lui k faţă de planele de coordonate Oyz, Ozx şi Oxy sunt

$$\begin{aligned} I_{Oyz} &= \iiint_V x^2\rho(x,y,z)dxdydz \\ I_{Ozx} &= \iiint_V y^2\rho(x,y,z)dxdydz \\ I_{Oxy} &= \iiint_V z^2\rho(x,y,z)dxdydz\,. \end{aligned}$$

5. Fie un punct material $P(x_0, y_0, z_0)$ de masă m şi un corp material care ocupă domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ şi are densitatea $\rho(x,y,z)$. Proiecţiile pe axele de coordonate ale forţei $\bar{F}$ cu care punctul P este atras de corpul material sunt

$$\begin{aligned} F_x &= \lambda m \iiint_V \frac{\rho(x,y,z)}{r^3}(x-x_0)dxdydz \\ F_y &= \lambda m \iiint_V \frac{\rho(x,y,z)}{r^3}(y-y_0)dxdydz \\ F_z &= \lambda m \iiint_V \frac{\rho(x,y,z)}{r^3}(z-z_0)dxdydz\,, \end{aligned}$$

unde $\lambda =$const., iar $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2, (x,y,z) \in V$.

Exemplu 11.7.2 *Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu originea, pentru porţiunea de sferă* $(V): x^2+y^2+z^2 \le a^2, x \ge 0,\ y \ge 0, z \ge 0$, *densitatea de masă fiind* $\rho(x,y,z) = z$. *Momentul de inerţie în raport cu originea este*

$$I_0 = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)z dxdydz.$$

Folosind coordonatele sferice, domeniul V *se transformă în domeniul* $V' : 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, *deci*

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a r^5 \sin\varphi \cos\varphi dr \right) d\varphi \right) d\theta = \frac{\pi a^6}{24}\,.$$

Capitolul 12

Serii Fourier

12.1 Serii Fourier

Bazele teoriei seriilor trigonometrice au fost puse de către matematicianul J. de Fourier (1768 -1830). Seriile trigonometrice sunt de mare importanţă pentru matematică, fizică, ele folosindu-se la cercetarea mişcărilor periodice în acustică, electrodinamică, optică, termodinamică, în radiotehnică, în mecanica undelor. Cu ajutorul seriilor Fourier pot fi rezolvate probleme de comportare a frecvenţelor şi propagarea impulsului. De asemenea seriile trigonometrice se folosesc şi în prognoza mareelor.

Ideea care stă la baza acestor serii este reprezentarea funcţiilor periodice prin serii de funcţii periodice trigonometrice.

Definiţia 12.1.1 *Seria de funcţii* $\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, *unde* $a_n, b_m \in \mathbb{R}$, $n\geq 0, m\geq 1$ *se numeşte serie trigonometrică cu coeficienţi* a_n, b_m.

Dacă $s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, $n\geq 1$, *sunt sumele parţiale ale unei astfel de serii, atunci ele se numesc polinoame trigonometrice de ordin* n.

Observaţia 12.1.1 *Seriile trigonometrice fiind serii de funcţii de perioadă principală* 2π, *este suficient de studiat comportarea acestora pe un interval de lungime* 2π.

Teorema 12.1.1 *Fie*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{12.1}$$

o serie trigonometrică convergentă pe intervalul $[-\pi,\pi]$ *şi* $f(x)$ *suma acestei serii. Atunci:*

1. *Funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *este periodică, de perioadă principală* 2π.

2. *Dacă seria trigonometrică (12.1) este uniform convergentă pe* $[-\pi,\pi]$, *atunci funcţia* f *este continuă pe* $[-\pi,\pi]$, *iar coeficienţii serie (12.1) sunt daţi de formulele*

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx, \quad n\geq 0 \tag{12.2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx, \quad n\geq 1 \tag{12.3}$$

numite formulele lui Euler - Fourier.

Demonstraţie: 1. Fie $s_0 = \frac{a_0}{2}$, $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $n \geq 1$ şirul sumelor parţiale asociat seriei (12.1). Avem $s_n \to f$, şi cum $s_n, n \geq 1$, sunt funcţii periodice de perioadă 2π, rezultă că şi f are aceeaşi proprietate.

2. Întrucât $s_n \overset{UC}{\to} f$, iar s_n sunt funcţii continue rezultă că şi f este continuă.

Deoarece o serie de funcţii uniform convergentă se poate integra termen cu termen, integrând seria (12.1) obţinem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n\geq 1}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0, \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Înmulţind relaţia $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ cu funcţiile mărginite $\cos mx$, respectiv $\sin mx$, convergenţa uniformă şi continuitatea factorilor pe intervalul $[-\pi, \pi]$ se păstrează şi putem integra termen cu termen.

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mxdx + \sum_{n\geq 1}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx + \right.$$
$$\left. + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mxdx\right]$$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = \pi a_m$, de unde obţinem (12.2).

$$f(x)\sin mx = \frac{a_0}{2}\sin mx + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mxdx + \sum_{n\geq 1}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mxdx + \right.$$
$$\left. + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mxdx\right]$$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx = \pi b_m$, de unde obţinem (12.3).

Observaţia 12.1.2 *Pentru serii trigonometrice de perioadă $2l$ seria (12.1) va fi înlocuită cu seria*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n \cos \frac{\pi n}{l}x + b_n \sin \frac{\pi n}{l}x\right),$$

iar intervalul $[-\pi, \pi]$ va fi înlocuit cu intervalul $[-l, l]$. Coeficienţii $a_n, b_n, n \geq 0, m \geq 1$ sunt daţi de relaţiile

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n \geq 1 \end{aligned} \tag{12.4}$$

Definiţia 12.1.2 *Fie f o funcţie integrabilă şi periodică de perioadă 2π şi*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Seria trigonometrică asociată

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{12.5}$$

se numeşte seria Fourier a funcţiei f, iar coeficienţii a_n, b_n se numesc coeficienţi Fourier a lui f. Faptul că seria (12.5) este generată de funcţia f se notează astfel $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Observaţia 12.1.3 *1. Dacă f este o funcţie pară, atunci*

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n \geq 0 \quad i \quad b_n = 0, \quad n \geq 1,$$

iar dacă f este impară, atunci

$$a_n = 0, \quad n \geq 0 \quad i \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n \geq 1.$$

2. Coeficienţii Fourier sunt ataşaţi unei funcţii integrabile şi nu unei serii trigonometrice. Fiecărei funcţii integrabile pe $[-\pi, \pi]$ îi corespunde un şir infinit de coeficienţi Fourier daţi de (12.2) şi (12.3).

Considerăm o funcţie f integrabilă pe intervalul $[-\pi, \pi]$. Cu coeficienţii Fourier daţi de (12.2) şi (12.3) putem construi seria Fourier asociată funcţiei f. Asupra unei serii Fourier se ridică mai multe probleme. O serie Fourier este întotdeauna convergentă? În ce condiţii o serie Fourier este uniform convergentă? Dacă o serie Fourier este convergentă, atunci suma ei este funcţia f? Este posibil ca două funcţii diferite f şi g integrabile pe $[-\pi, \pi]$ să admită aceeaşi serie Fourier? Dată fiind o serie trigonometrică, există o funcţie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ care să admită seria dată ca serie Fourier?

Teorema 12.1.1 afirmă că o serie trigonometrică uniform convergentă pe $[-\pi, \pi]$ este seria Fourier a sumei sale. Deci orice serie trigonometrică uniform convergentă este o serie Fourier.

Teorema 12.1.2 *Inegalitatea lui Bessel (1784 - 1846)*

Fie f o funcţie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$,

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

polinomul Fourier asociat funcţiei f şi

$$p_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

polinom trigonometric de grad n, arbitrar. Atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - p_n(x)]^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - s_n(x)]^2 dx.$$

DEMONSTRAŢIE:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-p_n(x)]^2dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)p_n(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi}p_n^2(x)dx\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)p_n(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\alpha_0}{2}dx + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx + \right.$$

$$\left. +\ \beta_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx\right] = \frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k) \tag{12.6}$$

Deoarece $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx = \begin{cases} 0 & , \ n \neq m \\ \pi & , \ n = m \end{cases}$ $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx = \begin{cases} 0 & , \ n \neq m \\ \pi & , \ n = m, \end{cases}$ $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx = \pi$ şi $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx = \pi$ avem

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p_n^2(x)dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\cos^2 kx + \beta_k^2\sin^2 kx\right]dx = \\ &= \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\end{aligned} \tag{12.7}$$

Din relaţiile (12.6) şi (12.7) rezultă

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-p_n(x)]^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx - 2\left[\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k)\right] + \\ &+\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx + \frac{\alpha_0^2 - 2\alpha_0 a_0}{2} + \\ &+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 - 2\alpha_k a_k + \beta_k^2 - 2\beta_k b_k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx + \\ &+\frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2] - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\end{aligned} \tag{12.8}$$

Expresia din membrul drept al egalităţii (12.8) este minimă atunci când $\alpha_0 - a_0 = \alpha_k - a_k = \beta_k - b_k = 0$, adică, atunci când polinomul trigonometric $p_n(x)$ este chiar $s_n(x)$. Obţinem astfel

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-p_n(x)]^2dx \geq \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-s_n(x)]^2dx.$$

Observaţia 12.1.4

1. $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-s_n(x)]^2dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx \tag{12.9}$$

inegalitatea lui Bessel. Deoarece inegalitatea (12.9) are loc pentru orice număr natural n, avem

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.$$

Seria cu termenul general $a_n^2 + b_n^2$ *este convergentă, deci* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

2. Dacă f *este o funcţie continuă pe intervalul* $[-\pi, \pi]$, *iar* $a_n, b_m, n \geq 0$ *şi* $m \geq 1$ *sunt coneficienţii Fourier ai funcţiei* f, *atunci are loc egalitatea:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx,$$

numită egalitatea Parseval-Leapunov.

Definiţia 12.1.3 *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *şi pentru orice* $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2\pi \sin\frac{x}{2}} \tag{12.10}$$

se numeşte nucleul lui Dirichlet.

Teorema 12.1.3 *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este o funcţie absolut integrabilă şi periodică de perioadă* 2π, *iar* s_n *este suma parţială a seriei Fourier asociate lui* f, *atunci*

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt$$

DEMONSTRAŢIE: Se ştie că

$$1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \cdots + 2\cos nx = \frac{\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}.$$

Din (12.10) rezultă

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos kx\right], \quad \forall\, x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ este seria Fourier asociată funcţiei f, atunci

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt)dt = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right]dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt, \quad \forall\, n \geq 0
\end{aligned}$$

numită integrala lui Dirichlet.

Lema 12.1.1 *(lema lui Riemann)*

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie absolut integrabilă pe intervalul* $[a, b]$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx dx = 0. \tag{12.11}$$

Demonstraţie: Presupunem funcţia f integrabilă pe $[a,b]$ şi fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$.

$$\int_a^b f(t)\sin ntdt = \sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\sin ntdt \tag{12.12}$$

Notăm $m_i = \inf_{t\in[t_i,t_{i+1}]} f(t)$. Atunci integrala (12.12) devine

$$\int_a^b f(t)\sin ntdt = \sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(t)-m_i)\sin ntdt + \sum_{i=0}^{m-1} m_i\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin ntdt.$$

Fie ε_i oscilaţia funcţiei f în intervalul $[t_i,t_{i+1}]$, $f(t)-m_i \le \varepsilon_i$. Avem

$$\left|\int_a^b f(t)\sin ntdt\right| \le \sum_{i=0}^{m-1}\varepsilon_i(t_{i+1}-t_i) + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{m-1}|m_i|.$$

Întrucât funcţia f este integrabilă, pentru $\varepsilon > 0$ alegem diviziunea Δ astfel încât

$$\sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i(t_{i+1}-t_i) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad n > \frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{m-1}|m_i|.$$

Pentru aceste valori ale lui n se obţine $\left|\int_a^b f(t)\sin ntdt\right| < \varepsilon$, adică $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\sin ntdt = 0$.

În mod similar se arată că $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\cos ntdt = 0$. Să presupunem că funcţia f este absolut integrabilă pe $[a,b]$ şi b este un punct singular (altfel s-ar descompune intervalul $[a,b]$ într-un număr finit de intervale ce conţin un singur punct singular).

Fie $0 < c < b-a$;

$$\int_a^b f(t)\sin ntdt = \int_a^{b-c} f(t)\sin ntdt + \int_{b-c}^b f(t)\sin ntdt$$
$$\left|\int_{b-c}^b f(t)\sin ntdt\right| \le \int_{b-c}^b |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, \varepsilon > 0,$$

deoarece funcţia f este absolut integrabilă pe $[a,b]$.

Pe intervalul $[a,b-c]$ funcţia f este integrabilă şi pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $\left|\int_a^{b-c} f(t)\sin nt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, conform celor demonstrate mai sus.

Astfel $\forall\, \varepsilon > 0$ $\left|\int_a^b f(t)\sin ntdt\right| < \varepsilon$, adică $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\sin nt = 0$.

Observaţia 12.1.5 1. *Dacă a_n, b_n sunt coeficienţii Fourier ai unei funcţii absolut integrabile, atunci $a_n, b_n \to 0$.*

2. *Dacă funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe porţiuni pe intervalul $[a,b]$, atunci au loc relaţiile (12.11).*

Teorema 12.1.4 *Teorema lui Dirichlet*

Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe porţiuni, cu limite laterale finite în orice punct, de perioadă 2π şi derivabilă pe porţiuni, cu derivate laterale în orice punct, atunci seria Fourier a lui f converge către $f(x)$ dacă x este punct de continuitate al funcţiei şi către $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ dacă x este punct de discontinuitate al funcţiei.

Demonstraţie. Notăm $s=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ şi evaluăm produsul de convoluţie $D_n*(f-s)$.

$$\begin{aligned}[D_n*(f-s)](x) &= \int_{-\pi}^{\pi}[f(x-t)-s]D_n(t)dt=\int_{\pi}^{-\delta}[f(x-t)-s]D_n(t)dt+\\ &\quad+\int_{-\delta}^{\delta}[f(x-t)-s]D_n(t)dt+\int_{\delta}^{\pi}[f(x-t)-s]D_n(t)dt=\\ &= I_1+I_2+I_3,\quad \forall\, x\in\mathbb{R},\forall\, 0<\delta<\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{-\pi}^{-\delta}[f(x-t)-s]D_n(t)dt=\int_{-\pi}^{-\delta}\frac{f(x-t)-s}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\sin\left(nt+\frac{t}{2}\right)dt=\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\left[(f(x-t)-s)\frac{\cos t}{\sin\frac{t}{2}}\right]\sin nt dt+\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\left[(f(x-t)-s)\cos\frac{t}{2}\right]\cos nt dt.\end{aligned}$$

Deoarece funcţiile $(f(x-t)-s)\dfrac{1}{\sin\frac{t}{2}}$ şi $(f(x-t)-s)\cos\dfrac{t}{2}$ sunt continue pe porţiuni rezultă că $\lim_{n\to\infty}I_1=0$.

În mod analog se arată că $\lim_{n\to\infty}I_3=0$.

Din ipoteză avem existenţa unui număr $c>0$ astfel ca

$$\begin{aligned}|f(t)-f(x-0)|&\le c|t-x|\quad \text{i}\\ |f(t)-f(x+0)|&\le c|t-x|\end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned}|I_2| &\le \int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t)-s|\frac{\left|\sin\left(nt+\frac{t}{2}\right)\right|}{2\pi\sin\frac{t}{2}}dt\le\\ &\le \int_{-\delta}^{\delta}\left|f(x-t)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right|\frac{1}{2\pi\sin\frac{t}{2}}dt=\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{|f(x-t)-f(x-0)+f(x-t)-f(x+0)|}{2\sin\frac{t}{2}}dt\le\\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{c|t|}{\sin\frac{t}{2}}dt=\frac{c}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{|t|}{\sin\frac{t}{2}}dt.\end{aligned}$$

Fie $m=\sup_{|t|\le\delta}\dfrac{|t|}{sin\frac{t}{2}}$. Astfel $|I_2|\le\frac{mc\delta}{\pi}$.

Pentru $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ astfel încât $\forall\ n\ge n(\varepsilon)$ $\frac{mc\delta}{\pi}<\varepsilon$, ceea ce înseamnă că $\lim_{n\to\infty}I_2=0$, adică

$$\lim_{n\to\infty}[D_n*(f-s)](x)=0,\forall\, x\in\mathbb{R} \tag{12.13}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}[D_n*(f-s)](x) &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)[f(x-t)-s]dt = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x-t)dt - \\ &- s\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = (D_n*f)(x) - s\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}(1+ \\ &+ 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx)dx = (D_n*f)(x) - s = s_n(x) - s.\end{aligned}$$

Din (12.13) obţinem că $s_n \to s$.

Corolarul 12.1.1 *Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie periodică de perioadă 2π, continuă, derivabilă pe porţiuni, atunci seria Fourier a lui f converge punctual având ca sumă pe f.*

Teorema 12.1.5 *Criteriul Dirichlet - Jordan*
Seria Fourier a funcţiei absolut integrabile, periodice cu perioada 2π, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, converge către suma $s(x)$ în punctul x, dacă în orice interval $[x_0-h, x_0+h]$, funcţia are valori mărginite.

Demonstraţie. vezi [5] vol. III.

Observaţia 12.1.6 *Condiţiile din criteriul Dirichlet au un caracter mai particular decât cele din criteriul Dirichlet-Jordan.*

Exemplu 12.1.1 *1. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ în intervalul $(0,2\pi)$ şi apoi să se deducă suma seriei $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.*

Funcţia $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ satisface ipoteza teoremei lui Dirichlet. Coeficienţii dezvoltării în serie Fourier sunt:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi x - \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx dx = \frac{1}{2\pi}\left.(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{2\pi} + \\ &+ \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx dx = -\frac{1}{2\pi}\left.(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\right|_0^{2\pi} - \\ &- \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx dx = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Deci seria Fourier corespunzătoare este

$$\frac{\pi-x}{2} = \sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n}, \quad x\in(0,2\pi) \tag{12.14}$$

Pentru $x=0$ sau $x=2\pi$ suma seriei este $s(0)=s(2\pi)=\dfrac{f(0+0)+f(2\pi-0)}{2}=0$. Luând $x=\frac{\pi}{2}$ în (12.14) avem $\frac{\pi}{4}=\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

2. *Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = 10 - x$ în intervalul (5, 15).*

   În acest caz folosim formula (12.4) pentru $l = 5$. Avem

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{1}{n\pi}(10-x)\sin\frac{n\pi x}{5}\Big|_5^{15} + \\ &\quad + \frac{1}{n\pi}\int_5^{15}\sin\frac{n\pi x}{5}dx = 0, \\ b_n &= \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx = -\frac{1}{n\pi}(10-x)\cos\frac{n\pi x}{5}\Big|_5^{15} - \\ &\quad - \frac{1}{n\pi}\int_5^{15}\cos\frac{n\pi x}{5}dx = (-1)^n\frac{10}{n\pi} \end{aligned} \tag{12.15}$$

   Deci

$$10 - x = \frac{10}{\pi}\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}, \quad x \in (5, 15).$$

3. *Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = |x|$ în intervalul $[-\pi, \pi]$. Funcţia $f(x) = |x|$ satisface ipoteza teoremei lui Dirichlet.*

   Deoarece funcţia f este pară avem $b_n = 0$ şi

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{x^2}{\pi}\Big|_0^{\pi} = \pi, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right) = \\ &= \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1], \quad \forall\, n \geq 1. \end{aligned}$$

   Seria Fourier corespunzătoare este:

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad x \in (-\pi, \pi) \\ s(-\pi) &= s(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \pi. \end{aligned}$$

12.2 Operaţii cu serii Fourier

Integrarea seriilor Fourier

Teorema 12.2.1 *Fie funcţia f integrabilă pe intervalul $[-\pi, \pi]$ şi seria Fourier asociată funcţiei f,*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos nx + b_n\sin nx.$$

Seria Fourier asociată funcţiei f este integrabilă şi integrala funcţiei $f(x)$ se obţine prin integrarea termen cu termen a seriei Fourier asociate.

Demonstraţie. Considerăm funcţia

$$F(x) = \int_0^x \left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right) dx, \tag{12.16}$$

$x \in [-\pi, \pi]$ care este o funcţie continuă şi cu variaţie mărginită şi de perioadă 2π, deoarece

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \pi a_0 = 0.$$

Conform teoremei Dirichlet-Jordan, funcţia $F(x)$ se dezvoltă în serie Fourier pentru $\forall\ x \in [-\pi, \pi]$,

$$F(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \tag{12.17}$$

şi seria Fourier corespunzătoare funcţiei F converge uniform pe intervalul $[-\pi, \pi]$ către F. Avem:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx dx = \frac{1}{n\pi} F(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \\
&= -\frac{b_n}{n}, \quad \alpha_n = -\frac{b_n}{n},\ n \geq 1; && (12.18)\\
\beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx dx = -\frac{1}{n\pi} F(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \\
&= \frac{a_n}{n}, \quad \beta_n = \frac{a_n}{n},\ n \geq 1. && (12.19)
\end{aligned}$$

Dacă în (12.17) $x = 0$ atunci se obţine

$$\frac{\alpha_0}{2} = -\sum_{n\geq 1} \alpha_n = \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n} \tag{12.20}$$

Înlocuind în (12.17) α_n, β_n şi α_0 din (12.18), (12.19) şi (12.20) avem

$$F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n \sin nx + b_n(1 - \cos x)}{n}$$

care împreună cu (12.16) ne dă

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n\geq 1} \int_0^x (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

Pentru orice $x_1, x_2 \in [-\pi, \pi], x_1 < x_2$ se obţine

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n\geq 1} \int_{x_1}^{x_2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

Exemplu 12.2.1 *Considerăm dezvoltarea* $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},\ x \in (0, 2\pi)$. *Integrând pe intervalul* $[0, x]$ *obţinem*

$$\int_0^x \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nt}{n} dt = \int_0^x \frac{\pi - t}{2} dt,$$

adică

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1-\cos nx}{n^2} = \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2,$$

de unde rezultă că

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + c,$$

unde

$$c = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Astfel am obţinut

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}$$

Derivarea termen cu termen a seriei Fourier

Fie funcţie f continuă pe intervalul $[-\pi, \pi]$ şi presupunem că în afara unui număr finit de puncte izolate există derivata funcţiei f şi că f' este absolut integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

Atunci seria Fourier a funcţiei f se obţine din seria Fourier a funcţiei f',

$$f'(x) \sim \sum_{n\geq 1} a_n' \cos nx + b_n' \sin nx, \tag{12.21}$$

prin integrare termen cu termen. Termenul liber a_0' al seriei (12.21) este zero. Într-adevăr,

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = 0.$$

Are loc şi reciprocea. Seria (12.21) a derivatei $f'(x)$ se poate obţine din seria Fourier corespunzătoare funcţiei f prin derivare termen cu termen.

Bibliografie

[1] CÂMPIAN, V., *Analiză matematică*, curs litografiat, I.P. Cluj-Napoca, 1992.

[2] COLOJOARĂ, I., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[3] CRAIU, M. şi VASILE, V., *Analiză matematică*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1980.

[4] DRĂGUŞIN, C., DRĂGUŞIN LUCIA, CÎŞLARU, C., *Analiză matematică*, Editura Teora, Bucureşti, 1993.

[5] FIHTENHOLŢ, G.M., *Curs de calcul diferenţial şi integral*, vol. I, II, III, Editura Tehnică, Bucureşti, 1965.

[6] FLONDOR, P., STĂNĂŞILĂ, O., *Lecţii de analiză matematică şi exerciţii rezolvate*, Editura All, Bucureşti, 1998.

[7] MEGHEA, C., *Bazele analizei matematice*, Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1977.

[8] MEGHEA, C., MEGHEA IRINA, *Tratat de calcul diferenţial şi calcul integral pentru Învăţământul Politehnic*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1997.

[9] NICOLESCU, M., *Analiză matematică*, vol. I, II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

[10] NICOLESCU, M., SOLOMON, M., Ş.A., *Manual de analiză matematică*, vol. I, II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962, 1964.

[11] PRECUPANU ANCA, *Bazele analizei matematice*, Polirom, Iaşi, 1998.

[12] RADU, I.C., *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura All, Bucureşti, 1996.

[13] ROŞCULEŢ, M., *Analiză matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1996.

[14] RUS, I.A., *Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

[15] SIREŢCHI, GH., *Calcul diferenţial şi integral*, vol.I, Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[16] STĂNĂŞILĂ, O., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[17] UDRIŞTE, C., TĂNĂSESCU ELENA, *Minime şi maxime ale funcţiilor reale de variabile reale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

[18] VALTER, O., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

Glosar

acoperire, 50
  finită, 50
aderenţa unei mulţimi, 28
aplicaţie liniară, 57
aria
  exterioară a unei mulţimi, 190
  interioară a unei mulţimi, 190
  unei mulţimi, 190
  unei suprafeţe, 215
axioma Cantor - Dedekind, 8

banda lui Möbius, 220

cardinal, 14
cel mai mare element, 7
cel mai mic element, 7
clan, 189
coeficienţi Fourier, 243
coeficientul unei contracţiei, 35
contracţie, 35
convergenţă punctuală, 141, 147
convergenţă uniformă, 141, 147
criteriu
  de comparaţie la limită, 167
  de rectificabilitate al lui Jordan, 172
  general de convergenţă al lui Cauchy, 143, 148, 165
criteriu general de convergenţă al lui Cauchy, 123
criteriu necesar de convergenţă, 121
criteriul
  Raabe - Duhamel, 136
  Abel - Dirichlet, 124
  de comparaţie, 166
  de comparaţie cu inegalităţi I, 128
  de comparaţie cu inegalităţi II, 130
  de condensare al lui Cauchy, 130
  de integrabilitate al lui Darboux, 194
  Dirichlet-Jordan, 248
  integral al lui Cauchy, 169
  lui Abel, 170
  lui Darboux, 190, 228
  lui Kummer, 134
  lui Schwarz, 84
  majorării, 144, 148
  monotoniei, 128
  radical al lui Cauchy, 131
  raportului al lui D'Alembert, 133
  Sylvester, 96
curbă, 175
  închisă, 175
  netedă, 175
  netedă pe porţiuni, 175
  rectificabilă, 175
curbe juxtapozabile, 175
curbele reţelei lui Gauss, 212
cvasinormă, 23

derivarea funcţiilor compuse, 75
derivată parţială, 65
derivata după o direcţie, 71
derivata unei mulţimi, 28
difeomorfism, 97
diferenţiala unei funcţii, 64
distanţă, 17
distanţa
  uniformă, 21
distanţa Hamming, 21
diviziune, 192, 226
domeniu, 56
  compact, 192
  simplu, 198, 200
drum, 171
  închis, 171
  neted, 171
  neted pe porţiuni, 172
  rectificabil, 172
drumuri
  echivalente, 174
  juxtapozabile, 172

ecuaţiile parametrizate ale pânzei, 211

egalitatea Parseval-Leapunov, 245
element
  de arc, 179
  de arie, 194, 215
  de volum, 227
exteriorul unei mulţimi, 28
extremităţile unui drum, 171

faţa inferioară a unei suprafeţe, 219
faţa superioară a unei suprafeţe, 219
formula
  Gauss - Ostrogradsky, 233
  lui Green, 201
  lui Mac-Laurin, 89, 92
  lui Stokes, 222
  lui Taylor, 86, 91
formula lui Taylor
  cu rest integral, 89
  cu rest Cauchy, 89
  cu rest Lagrange, 89
  cu rest Peano, 87
  cu rest Schömlich-Roche, 88
formulele lui Euler-Fourier, 241
frontiera unei mulţimi, 28
funcţie
  continuă, 43
  cu variaţie mărginită, 172
  derivabilă parţial, 65
  diferenţiabilă, 63
  local integrabilă, 163
  uniform continuă, 56
funcţii implicite, 101

gradient, 67

imaginea unei curbe, 175
imaginea unei pânze, 211
independenţa de drum, 184
inegalitatea
  Cauchy-Buniakovski-Schwarz, 24
  lui Bessel, 243
  lui Hölder, 19
  lui Lagrange, 75
  lui Minkowski, 20
infimum, 7
integrala
  convergentă, 163
  curbilinie în raport cu coordonatele, 180
  curbilinie în raport cu lungimea unui arc, 177
  de suprafaţă în raport cu aria, 217
  de suprafaţă în raport cu coordonatele, 220
  divergentă, 163
  dublă, 194
  generalizată, 163
  improprie, 163
  lui Dirichlet, 245
  triplă, 227
interiorul unei mulţimi, 28
interval, 55
închiderea unei mulţimi, 28
izomorfism diferenţiabil, 97

lema
  intervalelor închise incluse, 12
  lui Abel, 151
  lui Cesaró, 13
  lui Riemann, 245
limită iterată, 49
limita
  inferioară, 41
  superioară, 41
  unei funcţii într-un punct, 47
linie poligonală, 56
lungimea unei curbe, 175
lungimea unui drum, 172

măsură, 189
  pozitivă, 189
  reală, 189
majorant, 7
matricea jacobiană, 66
metoda
  celor mai mici pătrate, 114
  gradientului, 116
metrică, 17
metrica
  Cebâşev, 22
  discretă, 20
  euclidiană, 18
  Manhattan, 18
  Minkowski, 19
minorant, 7
mulţime
  închisă, 26
  cel mult numărabilă, 14

compactă, 50
conexă, 54
densă, 12, 32
deschisă, 26
finită, 14
inductivă, 9
infinită, 14
mărginită, 50
majorată, 7
minorată, 7
neconexă, 54
nenumărabilă, 14
numărabilă, 14
ordonată, 7
mulţimea numerelor reale, 9
mulţimi echipotente, 13

natura unei serii, 120
normă, 23
nucleul lui Dirichlet, 245

operator liniar, 57
operatorul
de diferenţiere, 85
Hamilton, 67
orientare a unei suprafeţe, 219

pânză parametrizată, 211
pânze parametrizate echivalente, 211
poligon
exterior, 190
interior, 190
polinom Fourier, 243
polinom trigonometric, 241
polinomul lui Taylor, 86
produs
convolutiv, 137
produs scalar, 24
proiecţie stereografică, 21
proprietatea lui Arhimede, 11
punct
şa, 95
aderent, 28
critic, 94
de acumulare, 28
de extrem condiţionat, 105
de extrem cu legături, 105
de extrem local, 94
exterior, 28
fix, 35
frontieră, 28
interior, 28
izolat, 28
staţionar, 94

raza de convergenţă, 152
relaţie
binară, 7
de echipotenţă, 13
de ordine, 7
de ordine totală, 7
reprezentarea parametrică a unui drum, 171
restul seriei, 123

semidistanţă, 17
semimetrică, 17
seria
binomului generalizat, 160
geometrică, 121
Mac-Laurin, 160
Taylor, 158
serie
absolut convergentă, 125
alternată, 124
convergentă, 120, 147
cu termeni pozitivi, 128
de funcţii, 147
de numere, 119
divergentă, 120
Fourier, 243
produs, 137
semiconvergentă, 125
trigonometrică, 241
uniform convergentă, 147
serii de puteri, 151
sferoid deschis, 25
spaţiu
Banach, 35
metric, 17
metric complet, 34
prehilbertian, 24
tangent, 219
topologic, 27
vectorial, 22
vectorial normat, 24
subşir, 30
subacoperire, 50
suma

Riemann, 192
suma Darboux, 192
suprafaţă, 211
netedă, 213
orientabilă, 219
simplă, 212
supremum, 7
şir, 30
convergent, 30
fundamental, 32
mărginit, 32
şir de funcţii, 141

teorema
a II-a a lui Abel, 154
Cauchy-Bolzano, 47
Cauchy-Hadamard, 152
Darboux-Bolzano, 46
funcţiei inverse, 99
funcţiilor implicite, Goursat, 101
Heine, 57
Heine - Borel, 52
I a lui Abel, 151
Kuhn - Tucher, 106
lui Banach, 35
lui Dirichlet, 126, 247
lui Fermat, 94
lui Leibniz, 124
Mertens, 137
Riemann, 126
traiectorie de gradient, 117
transformare regulată, 97

urma pânzei, 211
urma unui drum, 171

vecinătate, 25
vector admisibil, 105
volum, 225

Weierstrass, 148