# CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICA

# PENTRU ADMITEREA LA

# UNIVERSITATEA „POLITEHNICA” DIN TIMISOARA

## SESIUNEA IULIE 2007

# *PREFAȚĂ*

*Prezenta culegere se adresează deopotrivă elevilor de liceu, în scopul instruirii lor curente, cât şi absolvenților care doresc să se pregătească temeinic în vederea examenului de bacalaureat şi a concursului de admitere în învățământul superior.*

*Având în vedere diversitatea datorată existenței unui mare număr de manuale alternative, ca o consecință a procesului de reformă din învățământ, am căutat să unificăm diferitele maniere de prezentare prin alegerea unor probleme pe care le considerăm indispensabile pentru abordarea cu succes a cursurilor de matematică din ciclul întâi de la toate facultățile Universității „Politehnica”din Timişoara.*

*La alcătuirea problemelor s-a avut în vedere o reprezentare corespunzătoare atât a părții de calcul, cât şi a aspectelor de judecată, respectiv, de raționament matematic. Gradul de dificultate al problemelor nefiind cel al unei olimpiade de matematică, acestea vor putea fi abordate de orice elev sau absolvent cu o pregătire medie a părții teoretice şi care posedă deprinderi de calcul corespunzătoare.*

*Problemele sunt prezentate după modelul „test”, cu şase răspunsuri fiecare, dintre care unul singur este corect.*

*Conştienți de faptul că doar urmărirea rezolvării unor probleme nu duce la formarea deprinderilor de calcul şi a unui raționament matematic riguros, autorii au ales varianta problemelor propuse fără rezolvări. De asemenea, pentru a nu „forța” în rezolvare obținerea unui rezultat dinainte cunoscut, nu se face precizarea care dintre cele şase răspunsuri este adevărat, aceasta rezultând în urma unei rezolvări corecte. Totuşi, pentru problemele cu un grad mai mare de dificultate, autorii au considerat necesar să dea indicații pentru rezolvare.*

*Ținând cont de faptul că prezenta carte va fi folosită şi la întocmirea subiectelor pentru concursul de admitere la Universitatea „Politehnica” din Timişoara, invităm absolvenții de liceu să rezolve testele din acest volum, adăugându-şi astfel cunoştințe noi la cele deja existente şi implicându-se prin aceasta în demersul de evaluare a propriilor competențe.*

*Departamentul de Matematică al UPT*

Această culegere este recomandată pentru admiterea din anul 2007 la Universitatea „Politehica” din Timişoara la următoarele facultăți:

**Facultatea de Arhitectură**

**Facultatea de Automatică şi Calculatoare**

**Facultatea de Electronică şi Telecomunicații**

**Facultatea de Electrotehnică şi Electroenergetică**

## BIBLIOGRAFIE

[1] MANUALE ALTERNATIVE APROBATE DE MedC pentru clasele IX, X, XI, XII.

[2] Leonte A. V., Niculescu C. P., **Culegere de probleme de algebră şi analiză matematică**, Ed. Scrisul Românesc, Craiova, 1981

[3] Năstăsescu C., Brandiburu M., Joiţa D.:
**- Exerciţii şi probleme de Algebră -**, EDP, Bucureşti, 1981

[4] Catedra de matematică:
**- Algebră şi Analiză matematică -** Culegere de teste pentru admitere în învăţământul superior, Universitatea Tehnică din Timişoara, 1991 (reeditată în 1992 – 1996).

[5] Catedra de matematică:
**- Geometrie şi Trigonometrie -** Culegere de teste pentru admitere în învăţământul superior, Universitatea Tehnică din Timişoara, 1991 (reeditată în 1992 – 1996).

[6] Boja N., Bota C., Brăiloiu G., Bînzar T., Găvruţă P., Klepp F., Lipovan O., Matei Şt., Neagu M., Păunescu D. :
**- Teste de matematică –** pentru bacalaureat şi admitere în învăţământul superior, Ed. Mirton, Timişoara, 1993.

[7] Boja N., Bota C., Bânzaru T., Bînzar T., Hossu M., Lugojan S., Năslău P., Orendovici R., Păunescu D., Radu F. :
**- Probleme de Algebră, Geometrie, Trigonometrie şi Analiză matematică –** pentru pregătirea examenului de bacalaureat şi a concursului de admitere în facultăţi.Ed. Mirton, Timişoara, 1996.

[8] Bânzaru T, Boja N, Kovacs A, Lipovan O, Babescu G, Găvruţa P, Mihuţ I, Rendi D, Anghelescu R, Milici C.
**- Probleme de matematică** – pentru absolvenţii de liceu, Ed. Politehnica Timişoara, Ediţia I.1998,Ediţia II-a revăzută 1999, Ediţia a III-a revizuită 2000.

[9] Bânzaru T., Boja N., Kovacs A., Lipovan O., Babescu Gh.,Găvruţa P.,Mihuţ I., Rendi D., Anghelescu R., Milici C.
**- Matematică –** Teste grilă pentru examenele de bacalaureat şi admitere în învăţământul superior Ed. Politehnica, Timişoara, 2001.

# CUPRINS

# CLASA a IX-a

**MATEMATICĂ , clasa a IX - a**
**(simbol AL - IX)**

**AL - IX. 001** Să se determine numerele reale a cu proprietatea

$$\left[a+\frac{1}{2}\right]=\frac{5a-1}{3}$$ , şi să se precizeze intervalul în care se află soluția.

a) $\left[\frac{3}{5},1\right]$ b) $\left[\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right]$ c) $\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)$

d) $\left[\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$ e) $\left[0,\frac{2}{5}\right]$ f) $[1,\infty)$

**AL - IX. 002** Să se determine numărul natural

$$N=\sum_{k=1}^{6}\left[\frac{100}{2^k}\right],$$

unde [·] notează partea întreagă a numărului rațional scris în interior.

a) 70 b) 83 c) 57 d) 91 e) 97 f) 78

**AL - IX. 003** Dacă $[\alpha]$ reprezintă partea întreagă a lui $\alpha\in$ **R**, să se rezolve ecuația :

$$\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{x-1}{2}$$

precizându-se în care din următoarele intervale se află soluția

a) $(2,7)\cup(9,15)$ b) $(-5,-3)\cup(1,3\,]\cup[5,7)$

c) $(-3,2)\cup[3,4\,)\cup(6,14)$ d) $\left[1,\frac{3}{2}\right]\cup(2,4)\cup[5,7)$

e) $(-1,1]\cup[2,3)\cup(5,8)$ f) $[0,2]\cup[4,7]\cup(9,+\infty)$

**AL - IX. 004** Să se rezolve ecuația

$$5[x^2]-3[x]+2=0$$

a) $x\in[1,\sqrt{2})$ b) $x\in(1,\sqrt{2})$ c) $x\in(0,1)$

d) $x \in (0,1]$ e) $x \in \phi$ f) $x \in [\sqrt{2},2)$

**AL - IX. 005** Mulțimea soluțiilor ecuației: $\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$, unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x, este

a) $\left\{\frac{4}{5}\right\}$, b) $\left\{\frac{3}{4}\right\}$, c) $\left\{\frac{7}{15}, \frac{4}{5}\right\}$,

d) $\left\{\frac{7}{15}\right\}$, e) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$, f) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right\}$

**AL - IX. 006** Notând cu S mulțimea soluțiilor ecuației

$$\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{[x]}$$

să se precizeze care din următoarele mulțimi este S

a) $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbf{Z}^*\right\}$ b) $\bigcup_{k \in Z^*} \left[k, k+\frac{1}{k}\right]$ c) $\{n^2; n \in Z \setminus \{-1,1\}\}$

d) {-1,1} e) [-1,1] f) (-1,1)

**AL – IX. 007** Se consideră funcția f: **R**→**R**, $f(x) = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$

şi se notează $f_2 = f \circ f, \ldots, f_n = f_{n-1} \circ f$

Să se determine expresia lui $f_n$

a) $f_n(x) = f(x) + n$; b) $f_n(x) = 2^n f(x)$; c) $f_n(x) = 2^n f(x) + 2^{n-1} + 1$

d) $f_n(x) = f(x)$; e) $f_n(x) = f(x) + 2n + 1$; f) $f_n(x) = 2f(x) + 1$

**AL-IX. 008** Fie ecuația $\left[\frac{x-2}{3}\right] = \left[\frac{x-3}{2}\right]$. Stabiliți care dintre afirmațiile de mai jos este adevărată

a) ecuaţia are 2 soluţii
b) ecuaţia are 3 soluţii
c) ecuaţia are o singură soluţie
d) ecuaţia are o infinitate de soluţii
e) ecuaţia nu are nici o soluţie
f) ecuaţia are numai soluţii negative

**AL - IX. 009** Să se determine unde $m \in Z / \{0\}$ pentru care ecuaţia

$\left[\frac{m^2 x - 1}{2}\right] = \frac{2x+1}{5}$, are soluţii şi apoi să se determine numărul soluţiilor.

a) n =2; b) n =3; c) n =4; d) n =5, e) n =1; f) n =0

**AL - IX. 010** Să se calculeze $f((1,4])$ pentru funcţia de gradul al doilea definită prin
$f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a) $[0,3]$ b) $[-1,0)$ c) $(0,3]$ d) $[-1,3]$ e) $(-1,0)$ f) $(0,3)$

**AL - IX. 011** Dacă funcţiile f,g :**R**→**R** au proprietăţile :
i) $f(g(x)) = x^2-3x+4$, $(\forall)x\in$**R** ;
ii) $g(f(2)) = 2$
să se determine cel puţin o soluţie reală a ecuaţiei f(x) = g(x)
a) x =1
b) x = –2
c) x = 2
d) x = –2
e) x = 4
f) x = 3

**AL – IX. 012** Să se rezolve inecuaţia $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+2} \le \frac{1}{2(x-1)}$.

a) $x \in (-\infty,-1)$ b) $x \in (-\infty,-1) \cup \left[0,\frac{2}{3}\right) \cup (1,2)$ c) $x \in \left(0,\frac{2}{3}\right) \cup [1,2] \cup (3,\infty)$

d) $x \in (1,2) \cup (3,\infty)$ e) $x \in \mathbf{R} \setminus \{1,2\}$ f) $x \in (-\infty,-2) \cup \left[0,\frac{2}{3}\right] \cup (1,2)$

**AL - IX. 013** Să se determine mulțimea valorilor lui $m \in \mathbf{R}$, astfel încât

$$\left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, 3x^2 + mx - 22 = 0\right\} \cap \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, x^2 - (m+4)x + 14 = 0\right\} \neq \varnothing .$$

a) $(-\infty, 5)$ b) $\{-7, 3\}$ c) $\mathbf{R}$ d) $\{-19, 5\}$ e) $\{-17, 8\}$ f) $\{1\}$

**AL - IX. 014** Să se rezolve inecuația $|x| < x^2 - x$.

a) $x \in \mathbf{R}$ b) $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$ c) $x \in (3, +\infty)$

d) $x \in (0, +\infty) \cup (-\infty, -2)$ e) $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ f) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$

**AL - IX. 015** Să se determine valorile parametrului real $m$ astfel încât

$$\left\{x \in \mathbf{R} : (m-1)x^2 - (m+1)x + m + 1 > 0\right\} = \varnothing .$$

a) $m \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$ b) $m \in [1, +\infty)$ c) $m \in (-\infty, -1]$

d) $m \in \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$ e) $m \in \left[-1, \frac{5}{3}\right]$ f) $m \in (-\infty, 1]$

**AL - IX. 016** Să se afle minimul expresiei $E = a^2 + 2b^2 - 3a + 3b$ pentru $a, b \in \mathbf{R}$.

a) $-\frac{9}{4}$ b) 1 c) 0 d) $-\frac{27}{8}$ e) $-1$ f) $-3$

**AL - IX. 017** Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + mx + m - 4$, $m \in \mathbf{R}$. Să se exprime în funcție de $m > 4$, expresia $E = |x_1| \cdot f(x_2 - m) + |x_2| \cdot f(x_1 - m)$, unde $x_1$, $x_2$ sunt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

a) $1 - m$ b) $m^2 + 1$ c) $4m(m-4)$

d) $4(m^2 - 1)$ e) $m(m-4)$ f) $m^2 + 2$

**AL - IX. 018** Să se determine $m \in \mathbf{R}$, astfel ca rădăcinile $x_1$ şi $x_2$ ale ecuației
$x^2 - (2m-3)x + m - 1 = 0$ să satisfacă relația $3x_1 - 5x_1x_2 + 2x_2 = 0$.

a) $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ b) $m_1 = 1$, $m_2 = -1$ c) $m_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7}$

d) $m_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$ e) $m_{1,2} = \pm\sqrt{5}$ f) $m_1 = 2$, $m_2 = -2$

**AL - IX. 019** Fie ecuația $2x^2 - 2mx + m^2 - 2m = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$. Care este mulțimea valorilor pe care le pot lua rădăcinile reale $x_1, x_2$ când $m$ variază ?

a) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ b) $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$ c) $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$
d) $[-1, 1]$ e) $[1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}]$ f) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

**AL - IX. 020** Fie ecuația
$$2x^2-2(m+2)x+m^2+4m+3=0, \quad m \in \mathbf{R}.$$
Dacă ecuația are rădăcinile reale $x_1(m)$, $x_2(m)$, precizați valoarea maximă a expresiei
$$E = |x_1(m) + x_2(m)|.$$
a) 3; b) 4; c) 2; d) $\sqrt{2}$; e) $\sqrt{3}$; f) 1.

**AL - IX. 021** Fiind dată ecuația $ax^2+bx+c=0$, ($a \neq 0$), să se exprime în funcție de a, b şi c suma
$$S_3 = x_1^3 + x_2^3,$$
unde $x_1, x_2$ sunt rădăcinile ecuației date.

a) $S_3 = \frac{b^3}{a^3} - 3\frac{bc}{a^2}$ b) $S_3 = \frac{c^3}{a^3} - 3\frac{bc}{a^2}$ c) $S_3 = \frac{b^2}{a^2} - 3\frac{bc}{a^3}$

d) $S_3 = -\frac{b^3}{a^3} + 3\frac{bc}{a^2}$ e) $S_3 = -\frac{c^3}{a^3} + 3\frac{bc}{a^2}$ f) $S_3 = -\frac{b^2}{a^2} + 3\frac{bc}{a^3}$

**AL - IX. 022** Se consideră ecuațiile $x^2-7x+12=0$ și $x^2-3x+m=0$. Să se afle m pentru ca ecuațiile să aibă o rădăcină comună.

a) $m\in\{-4,0\}$, b) $m\in\{-1,0\}$ c) $m\in\{-4,1\}$
d) $m\in\{1,2\}$ e) $m\in\{2,3\}$ f) $m\in\{0,1\}$

**AL - IX. 023** Să se determine parametrii reali m şi n astfel ca ecuațiile
$(5m-52)x^2+(4-m)x+4=0$ şi $(2n+1)x^2-5nx+20=0$
să aibă aceleaşi rădăcini.

a) m = -11, n = 7; b) m = - 7, n = 11 c) m = 9, n = 7
d) m = 11, n = 7 e) m = 7, n = 11 f) m = 9, n = -7

**AL - IX. 024** Fie ecuația $3mx^2+(2m+1)x+m+1=0$, $m\in\mathbf{R}$, ale cărei rădăcini sunt $x_1$ şi $x_2$. Să se determine o relație independentă de m între rădăcinile ecuației.

a) $x_1+x_2=x_1x_2$ b) $x_1^2+x_2^2=2x_1x_2$ c) $x_1^2-x_2^2=2x_1x_2$
d) $x_1+x_2+x_1x_2=-\frac{1}{3}$ e) $x_1^2+x_2^2-3x_1x_2=0$ f) $x_1^2+x_2^2+x_1x_2=0$

**AL - IX. 025** Se consideră ecuațiile $ax^2+bx+c=0,\quad a'x^2+b'x+c'=0$
$a\neq 0, a'\neq 0$ cu rădăcinile $x_1, x_2$ şi respectiv $x_1', x_2'$. Dacă între coeficienții celor două ecuații există relația $ac'+a'c-2bb'=0$, atunci care din următoarele relații este verificată de rădăcinile celor două ecuații?

a) $x_1x_2+x_1'x_2'-2(x_1+x_2)(x_1'+x_2')=0$ b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1'}+\frac{1}{x_2'}$
c) $x_1x_1'+x_2x_2'=x_1+x_1'+x_2+x_2'$ d) $2x_1=x_2-x_2'+2x_1'$
e) $x_1x_2=x_1'x_2'$ f) $x_1x_2+x_1+x_2=\frac{1}{x_1'}+\frac{1}{x_2'}$

**AL - IX. 026** Să se rezolve ecuația irațională $\sqrt{1-x^2}+x=1$.

a) $x_1=0,\ x_2=1$ b) $x_1=-1,\ x_2=1$ c) $x_1=-1,\ x_2=0$
d) $x_1=1,\ x_2=2$ e) $x_1=-1,\ x_2=2$ f) $x_1=0,\ x_2=2$

**AL - IX. 027** Determinați toate valorile lui $x\in\mathbf{Z}$ pentru care are loc inegalitatea $\sqrt{3x-11}-7+\sqrt{x}<0$.

a) $\{1,3,4,5,6,7,8\}$ b) $\{1,2,3,4,5,7,8\}$ c) $\{2,3,4,5,6,7,8\}$
d) $\{4,5,6,7,8\}$ e) $\{2,3,5,6,7\}$ f) $\{2,4,5,6,7,8\}$

**AL - IX. 028** Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{3x-1}{3x^2+1}$. Să se determine *x* pentru care funcția ia cea mai mare valoare.

a) $1-\sqrt{3}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{3}$ c) 1 d) $-1+\sqrt{3}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $1+\sqrt{3}$

**AL - IX. 029** Să se determine toate valorile lui $m\in\mathbf{R}$ pentru care funcția

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\in(-\infty,1)\\ mx-m+1, & x\in[1,\infty)\end{cases}$$

este monotonă.

a) $m\in(-\infty,o)$ b) $m=-4$ c) $m\in\mathbf{R}$
d) $m\in[0,\infty)$ e) $m\in[-2,1)$ f) $m\in\varphi$

**AL - IX. 030** Să se determine valorile lui $m\in\mathbf{R}$ astfel încât funcția

$$f:R\to R,\quad f(x)=\begin{cases}x+m, & x\in(-\infty,3]\\ mx+2, & x\in(3,\infty)\end{cases}$$

să fie surjectivă.

a) $m=-1$ b) $m\in(0,1)$ c) $m\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

d) $m \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e) $m \in \varphi$ f) $m = 1$

**AL - IX. 031** Să se determine mulțimea E astfel încât funcția $f : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
$f(x) = \max\{2x - 5, x - 2\}$
să fie bijecție

a) $E = \mathbf{R}_+$ b) $E = [-\infty, 0]$ c) $E = \mathbf{R}$
d) $E = [0,1]$ e) $E = (-\infty, 3]$ f) $E = [1, \infty)$

**AL - IX. 032** Fie funcția de gradul al doilea $f_m(x) = mx^2 - (2m-1)x + m - 1$, $(m \neq 0)$. Să se determine $m$ astfel încât vârful parabolei asociate acestei funcții să se găsească pe prima bisectoare.

a) $m = \frac{1}{4}$ b) $m = 4$ c) $m = \frac{1}{2}$ d) $m = 2$ e) $m = \frac{1}{6}$ f) $m = 6$

**AL - IX. 033** Determinați valorile parametrului real m astfel încât dreapta de ecuație $y + 1 = x$ să taie parabola de ecuație $y = mx^2 + (m-5)x + m^2 + 2$ în punctele (1,0) și (4,3).

a) $m_1 = -1, m_2 = -3$ b) $m_1 = 3, m_2 = -3$ c) $m = -3$
d) $m = 1$ e) $m = -21$ f) $m = 3$

**AL - IX. 034** Fie familia de funcții de gradul al doilea

$$f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m - 2, \quad m \in \mathbf{R}$$

Să se arate că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe o parabolă a cărei ecuații se cere.

a) $y = x^2$ b) $y = x^2 + x + 1$ c) $y = -x^2 - x + 1$
d) $y = -x^2 + x - 1$ e) $y = 2x^2 - x + 3$ f) $y = x^2 + 1$

**AL - IX. 035** Determinați expresia analitică a funcției de gradul doi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$f(x)=ax^2+4x+c$, ştiind că graficul ei taie axa Oy în punctul 1 şi are abscisa vârfului $-\frac{2}{3}$.

a) $f(x)=2x^2+4x+1$ b) $f(x)=3x^2+4x-1$
c) $f(x)=4x^2+4x+1$ d) $f(x)=3x^2+4x+1$
e) $f(x)=x^2+4x+1$ f) $f(x)=3x^2+4x+3$

**AL - IX. 036** Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât parabolele asociate funcțiilor $f(x)=x^2-2x-4$ şi $g(x)=mx^2-2mx-6$ să aibă acelaşi vârf.

a) m = -1 b) m = 1 c) m = -2
d) m = 2 e) m = 3 f) m = -5

**AL - IX. 037** Fiind dată familia de parabole $f_m(x)=mx^2-2(m+1)x+m+2$, $\forall m \in \mathbf{R}^*$ să se determine valorile lui m pentru care obținem parabole ale căror puncte de intersecție cu axa Ox sunt simetrice față de origine.

a) $m \in \mathbf{R}-\{-1\}$ b) $m=2$ c) $m=1$
d) $m=-1$ e) $m \in \{-1,1,2\}$ f) $m=3$

**AL - IX. 038** Să se determine $p,q \in \mathbf{R}$ dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=-x^2+px+q$ are maximul 4 în punctul x = -1.

a) $p=-2, q=3$ b) $p=-1, q=2$ c) $p=3, q=-2$
d) $p=q=-2$ e) $p=q=1$ f) $p=2, q=-3$

**AL - IX. 039** Presupunem că pentru ecuația $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ avem $\Delta>0$ şi rădăcinile $x_1, x_2$. Să se calculeze $|x_1-x_2|$ în funcție de $\Delta$ şi a.

a) $\frac{\Delta}{2a}$ b) $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ c) $\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$

d) $\sqrt{\Delta}$ e) $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{-a}$ f) $\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

**AL - IX. 040** Fie $f:R\to R,\quad f(x)=x^2+x+a,\ a\in\mathbf{R}$.
Dacă $f(8)=2$, să se determine mulțimea $A=\{x\in Z \mid f(x^2)=f(x)\}$.

a) $A=\{1,2\}$ b) $A=\{0,1\}$ c) $A=\{-1,0\}$
d) $A=\{-1,0,1\}$ e) $A=\{-1,1\}$ f) $A=\{0,2\}$

**AL - IX. 041** Fie o funcție $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, astfel încât $f(1)=5$ şi $\forall x,y\in\mathbf{R}$, $f(x+y)-f(x)=Kxy+2y^2$, unde K este o constantă.
Să se determine valoarea lui K şi funcția f.

a) $K=4;\ f(x)=2x+3$ b) $K=3,\quad f(x)=2x^2-x+4$
c) $K=3;\quad f(x)=x+4$ d) $K=1;\quad f(x)=2x^2-3x+6$
e) $K=4;\quad f(x)=2x^2+3$ f) $K=2;\quad f(x=2x^2-2x+5)$

**AL - IX. 042** Se dă ecuația $4x^2-4(m-1)x-m+3=0$ şi se cer valorile lui $m$ astfel încât să avem $1+4x_1^3+4x_2^3=m$, unde $x_1$ şi $x_2$ sunt rădăcinile ecuației date.

a) $m_1=1$, $m_2=-2$, $m_3=\dfrac{4}{3}$ b) $m_1=1$, $m_2=-2$, $m_3=\dfrac{3}{4}$

c) $m_1=0$, $m_2=-2$, $m_3=\dfrac{3}{4}$ d) $m_1=1$, $m_2=2$, $m_3=-\dfrac{3}{4}$

e) $m_1=1$, $m_2=-2$, $m_3=-\dfrac{3}{4}$ f) $m_1=-1$, $m_2=-2$, $m_3=-\dfrac{3}{4}$

**AL - IX. 043** Care sunt valorile $k$ reale pentru care inecuația

$$x^2-(k-3)x-k+6<0$$ nu are soluții ?

a) $k\in(-5,0)$  b) $k\in[1,5)$  c) $k\in[-3,5]$

d) $k\in[-3,8]$  e) $k\in[-2,3]\cup(4,7)$  f) $k\in[-1,2)\cup(4,5)$

**AL - IX. 044** Pentru ce valori ale parametrului real $m$ inegalitățile

$$-2<\frac{2x^2-mx+2}{x^2-x+1}<6$$ sunt satisfăcute pentru orice $x\in\mathbf{R}$ ?

a) $m\in\mathbf{R}$  b) $m\in(-2,6)$  c) $m\in(6,+\infty)$

d) $m\in(-\infty,-2)$  e) $m\in(-6,6)$  f) $m\in[-2,6]$

**AL - IX. 045** Să se rezolve inecuația $5x^2-20x+26\geq\dfrac{4}{x^2-4x+5}$.

a) $[-1,0)$  b) $\left[\dfrac{4}{5},+\infty\right)$  c) $\{0,1\}$  d) $\mathbf{R}$  e) $\varnothing$  f) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

**AL - IX. 046** Să se determine mulțimea valorilor parametrului real $m$ astfel încât funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{4x^2-6mx+9}{x^2+1}$ să nu ia nici o valoare mai mică decât 3 sau mai mare decât 13.

a) $\left[-\sqrt{\dfrac{2}{3}},\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]$  b) $(-2,2)$  c) $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}},\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$

d) $[-1,1]$  e) $(-1,2]$  f) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

**AL - IX. 047** Să se determine valorile parametrului real $m$ astfel încât

$$\frac{x^2+(m+1)x+m+2}{x^2+x+m}>0 \text{ pentru orice } x\in\mathbf{R}.$$

a) $m\in\left\{1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}\right\}$ b) $m\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)\cup\left[1+2\sqrt{2},+\infty\right)$

c) $m\in(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$ d) $m\in\left(-\infty,1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2},+\infty\right)$

e) $m\in\left(1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}\right)$ f) $m\in\left(\frac{1}{4},1+2\sqrt{2}\right)$

**AL - IX. 048** Să se afle cea mai mică valoare a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-2x\sqrt{1-m^2}+1+m+m^2$, când parametrul real $m$ parcurge toate valorile posibile.

a) $-1$ b) $0$ c) $1$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{8}$ f) $-\frac{1}{4}$

**AL - IX. 049** Să se determine distanța celui mai apropiat vârf al parabolelor $f(x)=x^2+mx+m-4$, $m\in\mathbf{R}$ de axa $Ox$.

a) 0 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 3 e) 4 f) 1

**AL - IX. 050** Să se determine $m\in\mathbf{R}^*$ astfel încât $4mx^2+4(1-2m)x+3(m-1)>0$ pentru orice $x>1$.

a) $m\in(-\infty,0)$ b) $m\in(0,+\infty)$ c) $m\in(1,4]$

d) $m\in(0,1]$ e) $m\in[2,+\infty)$ f) $m\in(-1,1)\setminus\{0\}$

**AL - IX. 051** Pentru ce valori ale lui $m$, mulțimea $A=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,(m-1)x^2-2(m+1)x+m=0\right\}\cap[-1,1]$ are un singur element ?

a) $m \in \mathbf{R}$ b) $m \in (-1,+\infty)$ c) $m \in \left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$

d) $m \in [-2,-1]$ e) $m \in \left(-\frac{1}{4},+\infty\right) \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ f) $m \in \left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$

**AL - IX. 052** Fie ecuația $x^2(1-m)+2x(a-m)+1-am=0$, unde $a \neq 1$ şi $m$ sunt parametri reali. Pentru ce valori ale lui $a$, ecuația admite rădăcini reale oricare ar fi valoarea parametrului $m$ ?

a) $a \in \left(-\infty,-\frac{5}{4}\right]$ b) $a \in \mathbf{R}$ c) $a \in (-1,1)$ d) $a \in (0,1)$ e) $a \in [0,+\infty)$ f) $a \in (1,+\infty)$

**AL - IX. 053** Se consideră ecuația $mx^2 - x + m - 7 = 0$. Căruia din intervalele indicate mai jos trebuie să aparțină parametrul real $m$, astfel ca ecuația dată să aibă o singură rădăcină cuprinsă în intervalul $[2,4]$ ?

a) $(-\infty,-1]$ b) $(2,+\infty)$ c) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ d) $\left[-\frac{1}{2},0\right)$ e) $\left[\frac{11}{17},\frac{9}{5}\right]$ f) $\left(0,\frac{9}{5}\right)$

**AL - IX. 054** Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ astfel încât ecuația $mx^2 - (m-1)x - 1 = 0$ să aibă ambele rădăcini în intervalul $(-\infty,3]$.

a) $m \in \left(-\infty,-\frac{1}{5}\right] \cup (0,+\infty)$ b) $m \in (-1,1] \setminus \{0\}$ c) $m \in \left(-\infty,-\frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{5},+\infty\right)$

d) $m \in (-\infty,0) \cup [2,+\infty)$ e) $m \in \left[-\frac{1}{3},-\frac{1}{5}\right]$ f) $m \in \left(-\infty,-\frac{1}{3}\right] \cup (0,+\infty)$

**AL - IX. 055** Să se determine $\operatorname{Im} f = \{f(x) | x \in \mathbf{R}\}$ pentru funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1}$$

a) $\left[\frac{9-2\sqrt{21}}{3},\frac{9+2\sqrt{21}}{3}\right]$ b) $\left[\frac{9+2\sqrt{21}}{3},\infty\right)$

c) $\left(-\infty,\frac{9-2\sqrt{21}}{3}\right]$ d) $\left(-\infty,\frac{9-2\sqrt{21}}{3}\right]\cup\left[\frac{9+2\sqrt{21}}{3},\infty\right)$

e) $\left(-\infty,\frac{9-3\sqrt{21}}{3}\right]\cup\left[\frac{9+3\sqrt{21}}{3},\infty\right)$ f) $\left(\frac{9-3\sqrt{21}}{3},\frac{9+3\sqrt{21}}{3}\right)$

**AL - IX. 056** Rezolvați în **R** inecuația $|1-x|-|x^2-3x+2|>0$.

a) $x\in(1,3]$ b) $x\in(1,3)$ c) $x\in(2,4)$

d) $x\in(0,2)\cup(3,4)$ e) $x\in[2,4]$ f) $x\in(-1,4]$

**AL - IX. 057** Să se rezolve în **R** ecuația $|x^2-1|+|x^2-4|-1=0$.

a) $x\in(-2,1)$ b) $x\in\mathbf{R}$ c) $x\in[2,+\infty)$ d) $x\in\varnothing$ e) $x\in(-\infty,-2]$ f) $x\in\mathbf{R}\setminus\{1,4\}$

**AL - IX. 058** Precizați care este mulțimea soluțiilor sistemului

$$\begin{cases}3y^2-2xy=160\\ y^2-3xy-2x^2=8\end{cases}.$$

a) $\{(8,2);(-8,-2);(17,-5);(-17,5)\}$ b) $\left\{(2,8);(-2,-8);\left(\frac{17}{2},-5\right);\left(-\frac{17}{2},5\right)\right\}$

c) $\left\{(-2,8);(2,-8);\left(-\frac{17}{2},-\frac{5}{2}\right);\left(\frac{17}{2},\frac{5}{2}\right)\right\}$ d) $\left\{(2,-8);(-2,-8);\left(17,\frac{5}{2}\right);\left(-17,-\frac{5}{2}\right)\right\}$

e) $\left\{(1,-4);(-1,-4);\left(\frac{17}{2},5\right);\left(-\frac{17}{2},-5\right)\right\}$ f) $\left\{(-1,4);(1,-4);\left(\frac{17}{2},5\right);\left(-\frac{17}{2},-5\right)\right\}$

**AL - IX. 059** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

a) $\{(1,3),(3,1)\}$ b) $\{(2,3),(3,2)\}$ c) $\{(1,2),(2,1)\}$
d) $\{(-1,2),(2,-1)\}$ e) $\{(1,1)\}$ f) $\{(2,2)\}$

**AL - IX. 060** Să se determine soluțiile reale ale sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+1} + \dfrac{y}{x+1} = \dfrac{4}{3} \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$$

a) $\{(2,1),(1,2)\}$, b) $\{(1,1)\}$ c) $\{(2,2)\}$
d) $\{(2,3),(3,2)\}$ e) $\{(1,3),(3,1)\}$ f) $\{(2,2),(1,1)\}$

**AL - IX. 061** În care din următoarele mulțimi se află soluțiile sistemului

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 91 \\ x + y + \sqrt{xy} = 13 \end{cases}$$

a) $\begin{matrix} x_1 \in [0,2], y_1 \in \{7,8\} \\ x_2 \in [5,10], y_2 \in (-1,1) \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} x_1 \in (-1,3], y_1 \in [7,9] \\ x_2 \in \{7,8,9\}, y_2 \in [0,3] \end{matrix}$

c) $\begin{matrix} x_1 \in (2,3), y_1 \in (0,7) \\ x_2\{5,7\}, y_2 \in (-1,2) \end{matrix}$ d) $\begin{matrix} x_1 \in (2,\infty), y_1 \in (-\infty,0] \\ x_2 \in \{3,5,7\}, y_2 \in \{0,1,3\} \end{matrix}$

e) $\begin{matrix} x_1 \in [-7,-2], y_1 \in [3,5) \\ x_2 \in (3,6), y_2 \in (3,6) \end{matrix}$ f) $\begin{matrix} x_1 \in (1,5), y_1 \in (7,9) \\ x_2 \in (7,9), y_2 \in (1,5) \end{matrix}$

**AL - IX. 062** Determinați $a, b \in \mathbf{Z}^*$ pentru care soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} + \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = a \\ x + y = b \end{cases}$$

sunt numere întregi

a) a = 2; b = 1 b) a = 2; b = k c) a = 2; b = 2k
d) a = 2; b = -1 e) a = 4; b = 2k f) a = 2k; b = k

**AL - IX. 063** Să se determine soluțiile sistemului

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ y^x = 25 \end{cases}$$

a) $(2,5);\left(2,\frac{1}{5}\right)$ $\left(2,-\frac{1}{5}\right);(-2,-5)$

b) $(2,5);(2,-5)$ $\left(-2,\frac{1}{5}\right);\left(-2,-\frac{1}{5}\right)$

c) $x = 2;$ $y = 5$ este singura soluție

d) $x = 2$ $y = -\frac{1}{5}$ este singura soluție

e) $x = \sqrt{4}$ $x = \frac{1}{5}$ este singura soluție

f) $|x| = 2$ $|y| = 5$ este singura soluție

**AL - IX. 064** Fie $(S):\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = m \end{cases}, m \in \mathbf{R}$. Fie

$A = \{m \in \mathbf{R} | (S)$ admite o soluție reală unică, notată cu $\left(\tilde{x}_m, \tilde{y}_m, \tilde{z}_m\right)$ $\}$

$S_1 = \sum_{m\in A} m$ şi $S_2 = \sum_{m\in A}\left(\tilde{x}_m^{\,2} + \tilde{y}_m^{\,2} + \tilde{z}_m^{\,2}\right)$. Atunci

a) $S_1 = 0; S_2 = \frac{3}{4}$ b) $S_1 = -\frac{1}{2}; S_2 = 25$ c) $S_1 = \frac{1}{2}; S_2 = \frac{3}{4}$

d) $S_1 = -\frac{1}{2}; S_2 = \frac{3}{4}$  e) $S_1 = -5; S_2 = 14$  f) $S_1 \geq 5; S_2 = 25$

**AL - IX. 065** În care din următoarele mulțimi se află soluțiile reale ale sistemului

$$\begin{cases} x^6 - y^3 = 98 \\ x^4 + x^2 y + y^2 = 49 \end{cases} ?$$

a) $x \in (-1,1); y \in \{-1,0,1\}$  b) $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}); y \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

c) $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty); y \in [2, 3\sqrt{3}]$  d) $x \in (-\infty, -7); y \in (7, +\infty)$

e) $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); y \in (-1,1)$  f) $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); y \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

**AL – IX. 066** Să se determine toate tripletele de numere reale (x, y, z) care verifică sistemul neliniar

$x^2 - y = 0$,  $y^2 - xz = 0$ ,  $z^2 - 16y = 0$

a) (0,0,0) ; (2,4,4) ; (–2,4,–8);  b) (0,0,0); (2,4,8); (–2,4,8)
c) (0,0,0) ; (–2,4,–8) ; (2,–4,8) ;  d) (0,0,0) ; (2,4,8) ; (2,4,–8)
e) (0,0,0) ; (2,4,8) ; (–2,4,–8) ;  f) (1,1,4) ; (1,1,1); (–1,1,–1); (1,–1,1)

**AL – IX. 067** Să se determine condițiile pe care trebuie să le verifice parametri reali a,b astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = a(x-y) \\ x^3 + y^3 = b(x+y) \end{cases}$$ să aibă toate soluțiile reale

a) $a,b \in \mathbf{R}$, $a^2 = 3b$  b) $a,b \in \mathbf{R}_+$, $a \leq 3b$, $b \leq 3a$  c) $a,b \in \mathbf{R}_+$, $a \leq 2b$, $b \leq 2a$
d) $a,b \in R$  e) $a,b \in R$, $a = b$  f) $a,b \in R_+$

**AL – IX. 068** Fiind dat sistemul $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}$

să se precizeze numărul soluțiilor reale şi intervalele în care se află aceste soluții

a) n = 3
$(x,y,z) \in [-1,5] \times [-1,5] \times [-1,5]$

b) n = 6
$(x,y,z) \in [0,4] \times [0,4] \times [0,4]$

c) n = 1
$(x,y,z) \in [3,7]\times[3,7]\times[3,7]$

d) n = 6
$(x,y,z) \in [2,9] \times [2,9] \times [2,9]$

e) n = 3
$(x,y,z) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

f) n = 2
$(x,y,z) \in [-1,2] \times [-1,2] \times [-1,2]$

**AL – IX.069** Să se determine în care din intervalele de mai jos se află soluțiile sistemului

$$\frac{xy}{\sqrt{2}y+\sqrt{3}x}=\frac{yz}{\sqrt{3}z+y}=\frac{zx}{x+\sqrt{2}z}=\frac{x^2+y^2+z^2}{6}$$

a) $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right), y \in \left(0,\frac{1}{2}\right], z \in \left(1,\frac{3}{2}\right)$

b) $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right), y \in \left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right), z \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$

c) $x \in \left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right), y \in \left(\frac{1}{2},1\right), z \in \left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d) $x \in (0,1), y \in (1,2), z \in (2,3)$

e) $x \in (1,2), y \in \left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right), z \in (0,1)$

f) $x \in \left(0,\frac{\sqrt{3}}{4}\right), y \in \left(1,\frac{3}{2}\right), z \in \left(1,\sqrt{2}\right)$

**AL - IX. 070** Să se determine valorile parametrului real *a* astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ 2x-y+z=a^2+3a-\dfrac{13}{2} \end{cases}$$ să aibă o soluție unică reală.

a) $a \in (-\infty,-2)$

b) $a \in \left\{\frac{-3-\sqrt{35}}{2},\frac{-3+\sqrt{35}}{2}\right\}$

c) $a \in \{-1,2\}$

d) $a \in (-1,2)$

e) $a \in \{-4,1\}$

f) $a \in (-4,1)$

**AL - IX. 071** Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât $x^2+y^2-4x-4y+m>0$ pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$ .

a) $m=7$ b) $m\in(-\infty,-1)$ c) $m<3$ d) $m\in(-3,5)$ e) $m\in(8,+\infty)$ f) $m\in[-3,5)$

**AL - IX. 072** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=(m-2)x^2+2(m+1)x+m-3$. Să se afle în care din următoarele intervale se găseşte $m$ astfel încât valoarea minimă a funcției $f$ să fie $-9$.

a) $m\in(-\infty,0)$ b) $m\in(0,1)$ c) $m\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ d) $m\in(4,7)$ e) $m\in[7,9]$ f) $m\in(8,+\infty)$

**AL - IX. 073** Să se determine parametrul $m\in\mathbf{R}_+$ din ecuația $mx^2+(m+1)x-5=0$, astfel încât rădăcinile acesteia să verifice inegalitățile $x_1<-1, x_2>\frac{1}{2}$.

a) $m\in(0,6)$ b) $m\in[0,6]$ c) $m\in\mathbf{R}$

d) $m\in(0,+\infty)$ e) $m\in(-\infty,0)$ f) $m\in\{-1\}\cup(0,5)$

**AL -IX. 074** Să se determine parametrul $m\in\mathbf{Z}\setminus\{2\}$, astfel ca rădăcinile $x_1$ şi $x_2$ ale ecuației $(m-2)x^2-5x+m+1=0$ să satisfacă condițiile: $x_1\in(-\infty,2)$, $x_2\in(3,5)$.

a) $m=1$ b) $m=3$ c) $m=4$ d) $m=5$ e) $m=-3$ f) $m=-2$

**AL - IX. 075** Să se afle mulțimea valorilor funcției $f$ definită prin formula

$$f(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

a) $(-\infty,0)$ b) $(0,+\infty)$ c) $[-1,1]$ d) $[2,+\infty)$ e) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ f) $\{1\}$

**AL - IX. 076** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{3x^2+mx+n}{x^2+1}$. Să se determine $m,n\in\mathbf{R}$ astfel încât $f(\mathbf{R})=[-3,5]$.

a) $m \in \left\{\pm 2\sqrt{3}\right\}; n \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ b) $m \in \left\{\pm 4\sqrt{3}\right\}; n \in \left\{-1\right\}$ c) $m \in \left\{\pm 2\sqrt{3}\right\}; n \in \left\{\pm 1\right\}$

d) $m \in \left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]; n = 0$ e) $m \in \left[-3,5\right]; n \in \left[-1,1\right]$ f) $m \in \left\{\pm 3\sqrt{2}\right\}; n = -1$

**AL - IX. 077** Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 2(m+1)x + n}{x^2 + 2}$. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ pentru care există $n \in \mathbf{R}$ astfel încât $f(\mathbf{R}) \subset [-2,3]$.

a) $m \in (-\infty, 0)$ b) $m \in \left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$ c) $m \in (-1, +\infty)$

d) $m \in \left[1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right]$ e) $m \in \left[-1-2\sqrt{3}, -1+2\sqrt{3}\right]$ f) $m \in \left[\sqrt{2}, +\infty\right)$

**AL - IX. 078** Fie ecuația $x^2 - |x| = mx(x+1)$. Să se determine valorile parametrului real *m* astfel încât această ecuație să aibă trei rădăcini reale diferite.

a) $m \in \mathbf{R}$ b) $m \in (-1,1)$ c) $m \in \varnothing$

d) $m \in (-\infty, 1]$ e) $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}$ f) $m \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$

**AL - IX. 079** Fie $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + (4 - m^2)x - x^2}{m(x^2+1)}}$, $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Să se determine *m* astfel încât *I* să fie un interval mărginit de lungime minimă.

a) $m = 0$ b) $m = -2$ c) $m = \sqrt{2}$ d) $m = 1$ e) $m = 2$ f) $m = 4$

**AL - IX. 080** Numerele $a, b, c \in \mathbf{R}$ satisfac egalitatea $2a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Să se determine valoarea minimă pe care o poate lua expresia $a - 2b + c$.

a) $\sqrt{33}$ b) $\sqrt{\frac{33}{2}}$ c) $-\sqrt{\frac{33}{2}}$ d) $-\sqrt{10}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\sqrt{10}$

**AL - IX. 081** Să se rezolve inecuația $2+3x+\sqrt{5x+4}<0$.

a) $\left[-\frac{4}{5},-\frac{2}{3}\right)$ b) $\left[-\frac{4}{5},-\frac{2}{5}\right]$ c) $\left[-\frac{4}{5},-\frac{7}{9}\right)$ d) $\left[-\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right]$ e) $\left(0,\frac{7}{9}\right)$ f) $\left(-\frac{7}{9},0\right)$

**AL - IX. 082** Să se determine $x\in\mathbf{R}$ pentru care $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=1$.

a) $x\in(-\infty,0)$ b) $x=-1$ c) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $x\in\varnothing$

**AL - IX. 083** Fie inecuația $\sqrt{4-x^2}>1-x$. Care din intervalele de mai jos reprezintă mulțimea soluțiilor inecuației ?

a) $(-\infty,-3)$ b) $\left(\frac{17}{2},20\right)$ c) $(-2,2]$ d) $(22,+\infty)$ e) $[4,5)$ f) $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2},2\right]$

**AL - IX. 084** Să se determine mulțimea $A=\left\{x\in\mathbf{R}\;\middle|\;\sqrt{x^2-5x+6}\geq\sqrt{3-x}\right\}$.

a) $(-\infty,-1]$ b) $[2,+\infty)$ c) $[1,+\infty)$ d) $(-\infty,1]\cup\{3\}$ e) $[1,2)\cup\{3\}$ f) $[3,+\infty)$

**AL - IX. 085** Să se rezolve ecuația $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=1$.

a) $x=1\pm\sqrt{2}$ b) $x=\sqrt{2}\pm1$ c) $x=1-\sqrt{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$

d) $x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}$ e) $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$ f) $x=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)$

**AL - IX. 086** Să se determine domeniul maxim de definiție $D$, al funcției $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde $f(x) = \sqrt[n]{1 - \sqrt[n+1]{x+1}} + \sqrt[n+1]{\sqrt[n]{x} - 1}$, $n \in \mathbf{N}$.

a) $D = \{0\}$ pentru $n = 2k$
$D = [1, +\infty)$ pentru $n = 2k+1$

b) $D = (-\infty, 1]$ pentru $n = 2k$
$D = \mathbf{R}$ pentru $n = 2k+1$

c) $D = [0, +\infty)$ pentru $n = 2k$
$D = \{0, 1\}$ pentru $n = 2k+1$

d) $D = \{1\}$ pentru $n = 2k$
$D = \{0, 1\}$ pentru $n = 2k+1$

e) $D = [1, +\infty)$ pentru $n = 2k$
$D = [-1, +\infty)$ pentru $n = 2k+1$

f) $D = [-1, +\infty)$ pentru $n = 2k$
$D = \{0\}$ pentru $n = 2k+1$

**AL - IX. 087** Se consideră ecuația: $\sqrt{2x+1} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{4+x}$. În care din mulțimile indicate mai jos, ecuația are o singură rădăcină reală ?

a) $(-\infty, -4)$ b) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right)$ c) $(8, +\infty)$ d) $(1,2) \cup [3, +\infty)$ e) $(-2, -1)$ f) $\left(-4, -\frac{1}{2}\right)$

**AL - IX. 088** Precizați care este mulțimea soluțiilor inecuației $\sqrt{15+5x} - \sqrt{13-2x} \le 2$.

a) $A = \left[-\frac{109}{49}, 2\right]$ b) $A = \left[2, \frac{13}{2}\right]$ c) $A = \left[-3, \frac{109}{49}\right]$

d) $A = \left[-3, \frac{13}{2}\right]$ e) $A = [-3, 2]$ f) $A = \left[-\frac{102}{49}, 2\right]$

**AL - IX. 089** Să se afle pentru ce valori ale parametrului $m \in \mathbf{R}$, ecuația $\sqrt{x+8m} + \sqrt{x} = \sqrt{4x+8m+4}$ are soluții reale.

a) $m \in \mathbf{R}$ b) $m \in (-\infty, 0)$ c) $m \in [-1, 1] \setminus \{0\}$

d) $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ e) $m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ f) $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

**AL - IX. 090** Precizați mulțimea A căreia îi aparțin valorile reale ale lui $x$ pentru care are loc egalitatea $\sqrt[3x-1]{\sqrt[8-3x]{(-x)^x}} = \sqrt[5x]{2x}$ .

a) $\mathrm{A} = (0,1)$ b) $\mathrm{A} = (1,2)$ c) $\mathrm{A} = [2,3)$ d) $\mathrm{A} = (2,3)$ e) $\mathrm{A}(2,7)$ f) $\mathrm{A} = [3,+\infty)$

**AL - IX. 091** Să se calculeze valoarea expresiei
$\mathrm{E} = \frac{a^3 + b^3 - 2ab\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} - \frac{a^3 + b^3 - 2ab\sqrt{ab} - ab}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b} + \sqrt{ab}}$ pentru $a = 2 + \sqrt{3}$ şi $b = 2 - \sqrt{3}$ .

a) $\mathrm{E} = 4$ b) $\mathrm{E} = -4$ c) $\mathrm{E} = -2$ d) $\mathrm{E} = 2$ e) $\mathrm{E} = 1$ f) $\mathrm{E} = -1$

**AL - IX. 092** Să se precizeze valoarea numărului real

$$E = \sqrt{26 + 6\sqrt{13 - 4\sqrt{8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}}} + \sqrt{26 - 6\sqrt{13 + 4\sqrt{8 - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}}}$$

a) $E = 6$ b) $E = \frac{2}{3}$ c) $E = \frac{13}{2}$ d) $E = 4$ e) $E = \frac{5}{2}$ f) $E = 1$

**AL - IX. 093** Să se determine valoarea expresiei

$$E = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 0

**AL - IX. 094** Să se determine valoarea expresiei

$$E = \frac{\left(9^n - 9^{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(27^{n-1} - 19 \cdot 27^{n-2}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad , n \in \mathbf{Z}$$

a) $\sqrt[6]{72}$ b) $\sqrt{2} \cdot 3^{n-1}$ c) $\sqrt{2} \cdot 3$ d) $\sqrt{2} \cdot 3^{-\frac{n+3}{2}}$ e) 1 f) 2

**AL - IX. 095** Să se simplifice fracția:

$$F=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2}$$

a) $F=x-y+z$  b) $F=x+y+z$  c) $F=\frac{x+y+z}{2}$

d) $F=x+y+z+1$  e) $F=\frac{x+y+z+3}{2}$  f) $F=\frac{x+y+z+1}{2}$

**AL - IX. 096** Care este mulțimea valorilor reale ale lui *x* pentru care avem

$$\sqrt{1+\sqrt{x(2-x)}}-\sqrt{1-\sqrt{x(2-x)}}=\sqrt{2(2-x)}\ ?$$

a) $x\in\{0,1\}$  b) $x\in\{3,4\}$  c) $x\in[0,1]$  d) $x\in[1,2]$  e) $x\in[2,3]$  f) $x\in[0,2]$

**AL - IX. 097** Pentru $x\neq\pm y$ să se determine valoarea expresiei

$$E=\frac{\left(x^2-y^2\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$$

a) 1  b) $x+y$  c) $x-y$  d) $x^{\frac{2}{3}}$  e) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$  f) $y^{\frac{2}{3}}$

**AL - IX. 098** Să se rezolve ecuația $\frac{1}{x}\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}=0$, cu $a\in\mathbf{R}$, $a>0$, dat, în mulțimea numerelor reale.

a) $x\in\{-a,a\}$  b) $x\in[-a,a]\setminus\{0\}$  c) $x\in[-a,+\infty)\setminus\{0\}$

d) $x\in\{-a\}\cup(0,a]$  e) $x\in(0,+\infty)$  f) $x\in\{-a\}\cup[a,+\infty)$

**AL - IX. 099** Fie ecuația $x^2-(m-1)x+m-1=0$, $m\in\mathbf{R}$. Să se determine *m* astfel încât $\sqrt[3]{x_1 + x_2} + \sqrt[3]{9 - x_1 x_2} = 3$.

a) $m \in \{-1,3\}$ b) $m \in \{5,8\}$ c) $m \in \{1,6\}$ d) $m \in \{-3,8\}$ e) $m \in \{-2,-9\}$ f) $m \in \{2,9\}$

**AL - IX. 100** Să se rezolve ecuația $\sqrt[n]{(x+1)^2} + \sqrt[n]{(x-1)^2} = \frac{5}{2}\sqrt[n]{x^2 - 1}$.

a) $x = \pm \frac{5^n + 1}{5^n - 1}$ b) $x = \pm \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$ c) $x = \pm \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$

d) $x = \pm \frac{5^n - 1}{5^n + 1}$ e) $x = \pm \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n}$ f) $x = \pm \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$

**AL - IX. 101** Să se rezolve inecuația $x\sqrt{x^2 + 2} > x^2 - 1$.

a) $x \in [0,+\infty)$ b) $x \in (-\infty,-1)$ c) $x \in \left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

d) $x \in (-1,1)$ e) $x \in (-1,+\infty)$ f) $x \in (1,+\infty)$

**AL - IX. 102** Să se determine toate soluțiile reale ale ecuației

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1.$$

a) $x \in \{2,5,10\}$ b) $x \in [5,10]$ c) $x \in \{5,10\}$ d) $x \in [1,5]$ e) $x \in (5,+\infty)$ f) $x \in (5,10)$

**AL - IX. 103** Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$\sqrt{2 - x^2} + \sqrt[3]{3 - x^2} = 0.$$

a) o rădăcină reală b) două rădăcini reale c) trei rădăcini reale

d) nici o rădăcină reală e) patru rădăcini reale f) şase rădăcini reale

**AL - IX. 104** Să se determine toate soluțiile reale ale ecuației

$$\sqrt{x^2-1}+x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=0.$$

a) $x\in\{-1,1\}$ b) $x\in\{-2,-1,1\}$ c) $x\in\varnothing$

d) $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ e) $x\in(-\infty,-1]\cup\{1\}$ f) $x\in\{-1,1,0\}$

**AL - IX. 105** Să se calculeze valoarea expresiei $\mathrm{E}=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, pentru $x\in[1,2]$.

a) $\mathrm{E}=1+x$ b) $\mathrm{E}=x^2-3x+4$ c) $\mathrm{E}=2$

d) $\mathrm{E}=3x-x^2$ e) $\mathrm{E}=\sqrt{6x-2x^2}$ f) $\mathrm{E}=2(2-x)$

**AL - IX. 106** Să se determine valorile lui $m\in\mathbf{R}$ pentru care ecuația $\sqrt{mx^2-x+1}+\sqrt{mx^2+x+1}=x$ are soluții în **R** și să se determine aceste soluții.

a) $m=\frac{1}{4};\ x\in[5,7]$ b) $m\in\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right\};\ x\in[2,+\infty)$ c) $m=\frac{1}{4};\ x\in\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2},+\infty\right)$

d) $m=\frac{1}{4};\ x\in[2,+\infty)$ e) $m\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right);\ x\in\{2,3\}$ f) $m=\frac{2}{3};\ x\in\{4,6\}$

**AL - IX. 107** Fiind date funcțiile $f,g:[-1,1]\to[-1,1]$ definite prin

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[-1,0]\\ x, & x\in(0,1]\end{cases}\quad \text{și} \quad g(x)=\begin{cases}x, & x\in[-1,0]\\ x^2, & x\in(0,1]\end{cases}$$

să se determine funcția $\mathrm{h}=\mathrm{g}\circ\mathrm{f}$.

a) $h=f$ b) $h=g$ c) $h=f^2$

d) $h=g^2$ e) $h=fg$ f) $h(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[-1,0]\\ x^4, & x\in(0,1]\end{cases}$

**AL - IX. 108** Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{dacă } x \geq 2 \\ 2x+5, & \text{dacă } x < 2 \end{cases} \quad \text{şi} \quad g(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{dacă } x \leq 0 \\ -x+7, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Atunci $(f \circ g)(x)$ este :

a) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2-2, \ x \in (-\infty, -1] \\ 2x^2+7, \ x \in (-1, 0] \\ -x+4, \ x \in (0, 5] \\ -2x+19 \ x \in (5, \infty) \end{cases}$ b) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2+2, \ x \in (-\infty, 0] \\ 2x-4, \ x \in (0, 5] \\ x-11, \ x \in (5, \infty) \end{cases}$

c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2-2, \ x \in (-\infty, -1] \\ -x-4, \ x \in (-1, 0] \\ 2x-19, \ x \in (0, 8) \end{cases}$ d) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x^2+7, \ x \in (-\infty, 5] \\ -x+4, \ x \in (5, \infty) \end{cases}$

e) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2-2, \ x \in (-\infty, -1] \\ 2x-19, \ x \in (-1, \infty) \end{cases}$ f) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2-2, \ x \in (-\infty, 5] \\ 2x-19, \ x \in (5, \infty) \end{cases}$

**AL - IX. 109** Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \in (-\infty, 2) \\ 2x-3 & x \in [2, +\infty) \end{cases}$

Să se determine inversa acestei funcții.

a) $f^{-1}(x) = x+1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ b) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x+1 & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{2}(x+3) & x \in [1, +\infty) \end{cases}$

c) $f^{-1}(x) = x; \quad \forall x \in \mathbf{R}$ d) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+3) & x \in (-\infty, 1] \\ x+1, & x \in (1, \infty) \end{cases}$

e) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x\in(-\infty,2)\\ \dfrac{1}{2x-3} & x\in[2,+\infty)\end{cases}$  f) funcția nu poate fi inversabilă

**AL - IX. 110** Să se precizeze care din răspunsurile de mai jos este corect pentru funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}2x-4, & x\le 6\\ x+2, & x>6\end{cases}$$

a) f nu este inversabilă;  b) f este inversabilă și $f^{-1}(y)=\begin{cases}\dfrac{y+4}{2}, & y\le 8\\ y-2, & y>8\end{cases}$

c) f este inversabilă și $f^{-1}(y)=y$  d) f este inversabilă și $f^{-1}(y)=y-2$

e) f este inversabilă și $f^{-1}(y)=\dfrac{y+4}{2}$  f) f este inversabilă și

$f^{-1}(y)=\begin{cases}\dfrac{y+4}{2}, y>8\\ y-2, y\le 8\end{cases}$

**AL - IX.111** Determinați valorile lui $a\in\mathbf{R}$ pentru care funcția

$$f(x)=a|x+1|+|x-1|+(2-a)x-a-1$$

este inversabilă și determinați inversa ei.

a) $a=\dfrac{1}{2}$; $f^{-1}(x)=\begin{cases}x & x\le 1\\ \dfrac{x+2}{3} & x>1\end{cases}$  b) $a=0$; $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}; & x<-1\\ x; & -1\le x\le 1\\ \dfrac{x+2}{3}; & x>1\end{cases}$

c) $a < \frac{1}{2}$; $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+2a}{1-2a}; & x < -1 \\ x; & -1 \le x \le 1 \\ \frac{x+2}{3}; & x > 1 \end{cases}$

d) $a < \frac{1}{2}$; $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{1-2a}; & x > 1 \\ x; & -1 \le x \le 1 \\ \frac{x+2}{3}; & x < -1 \end{cases}$

e) $a > \frac{1}{2}$; $f^{-1}(x) \begin{cases} \frac{x+2a}{1-2a}; & x < -1 \\ x; & -1 \le x \le 1 \\ \frac{x+2}{3}; & x > 1 \end{cases}$

f) $a = 1$; $f^{-1}(x) = \begin{cases} -x-2; & x < -1 \\ x; & -1 \le x \le 1 \\ \frac{x+2}{3}; & x > 1 \end{cases}$

**AL - IX.112** Să se aleagă un interval maximal $[a,b) \subset \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ astfel încât pentru $f : [a,b) \to [f(a), \infty)$, $f(x) = x^2 - x - 2$ să existe $f^{-1}$.
Să se precizeze dacă $f^{-1}$ este strict crescătoare sau descrescătoare.

a) $[1,\infty)$; $f^{-1}$ strict descrescătoare;
b) $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$; $f^{-1}$ strict crescătoare
c) $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$; $f^{-1}$ strict descrescătoare
d) $[1,\infty)$; $f^{-1}$ strict crescătoare
e) $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$; $f^{-1}$ strict descrescătoare
f) $\left[\frac{4}{3},\infty\right)$; $f^{-1}$ strict crescătoare

**AL - IX.113** Să se determine $m \in R$ astfel încât funcția
$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 1, & x \le 0 \\ -x + m, & x > 0 \end{cases}$ să fie strict descrescătoare pe **R**.

a) $m \in \phi$
b) $m \in \mathbf{R}$
c) $m \in (-\infty, 0)$
d) $m \in [0,1]$
e) $m \in (1,2)$
f) $m \in [2,\infty)$

# CLASA a X-a

**MATEMATICĂ , clasa a X - a**
**(simbol AL - X)**

**AL - X. 001** Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbf{R}$, graficul funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
$f(x) = me^{x} - (m+1)e^{-x}$, taie axa Ox ?

a) $(-1,0)$ b) $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ c) $(-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$ d) $(-5,+\infty)$ e) $(-\infty,2)$ f) $\mathbf{R}$

**AL - X. 002** Să se rezolve ecuația: $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x} - \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^{x} = \frac{3}{2}$.

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = \dfrac{2\lg 2}{\lg\left(3+2\sqrt{2}\right)}$

d) $x \in \varnothing$ e) $x = \dfrac{2\lg 2}{\lg\left(3-2\sqrt{2}\right)}$ f) $x = 2\lg 2$

**AL - X. 003** Să se rezolve ecuația: $\left(1+\sqrt{2}\right)^{x} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{x} = 2$.

a) $x_1 = 0, x_2 = 1$ b) $x_1 = 0, x_2 = 2$ c) $x_{1,2} = \dfrac{\ln\left(3 \pm \sqrt{5}\right) - \ln 2}{\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)}$

d) $x_{1,2} = \dfrac{\ln\left(3-2\sqrt{2}\right) - \ln 2}{\ln\left(3 \pm \sqrt{5}\right)}$ e) $x_1 = 0, x_2 = \dfrac{\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$ f) $x_1 = 0, x_2 = \dfrac{\ln\left(2\sqrt{2}-3\right)}{\ln 3}$

**AL - X. 004** Determinați valoarea lui x pentru care $e^{x} + e^{-x} = 2$
a) 1 b) –1 c) 2 d) 0 e) –2 f) ln2

**AL - X. 005** În care din următoarele mulțimi se află soluția ecuației

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

a) $(e, e^2)$ b) $(-1,1)$ c) $(3,7]$
d) $(1, \sqrt{3}]$ e) $(0,1)$ f) $(9,11)$

**AL - X. 006** Să se rezolve ecuația $2^x - 3^x = \sqrt{6^x - 9^x}$

a) $x_1 = 0$ este unica soluție
b) $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{1-\log_2 3}$
c) $x_1 = 0$, $x_2 = \log 2$
d) $x_1 = 0$, $x_2 = \log_2 3 + 1$
e) $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{\log_2 3}$
f) $x_1 = 0$, $x_2 = \log_2 3$

**AL - X. 007** Determinați funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, astfel încât $y = f(x)$ să fie soluție a ecuației $e^y - e^{-y} = x$.

a) $f(x) = \ln|x|$ b) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)$
c) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ d) $f(x) = \ln\dfrac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$
e) $f(x) = \ln\dfrac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$ f) $f(x) = \ln\left|\dfrac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}\right|$

**AL - X. 008** Determinați mulțimea A la care aparține soluția ecuației

$$2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1$$

a) $A = (\sqrt{2}, 8)$ b) $A = \left(\dfrac{1}{2}, 16\right]$ c) $(\sqrt[3]{2}, 9)$

d) $A=[-2,0)$ e) $A=\left[0,\frac{1}{2}\right]$ f) $A=(0,1)$

**AL - X. 009** Să se determine valorile lui $m\in\mathbf{R}$ pentru care ecuația

$$(3x-1)(x-m-1)^{|x-1|-1}-(2x+m)^{|x-1|}=(x-m-1)^{|x-1|}$$

cu condițiile $x>m+1$ şi $x>-\frac{m}{2}$ are trei rădăcini reale şi distincte.

a) $m\in\phi$ b) $m\in\mathbf{R}$ c) $m\in\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\}$

d) $m\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ e) $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ f) $m\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$

**AL - X. 010** Să se rezolve inecuația: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}}>3^{-x}$.

a) $(4,+\infty)$ b) $[-2,1)$ c) $(0,10)$ d) $(1,+\infty)$ e) $(2,+\infty)$ f) $(-1,1)$

**AL - X. 011** Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât inegalitatea $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}-m\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+1>0$ să fie adevărată pentru orice $x<0$.

a) $m\in\phi$ b) $m\in(-2,2)$ c) $m\in[-2,2]$ d) $m\in[-2,+\infty)$ e) $m<-2$ f) $m\leq 2$

**AL - X. 012** Care este soluția sistemului de inecuații: $\frac{1}{3}\leq\frac{3^x+1}{9^x+1}\leq\frac{1}{2}$ ?

a) $\left[\log_3 2,\log_3\left(3+\sqrt{17}\right)\right]$ b) $\left[\log_3\left(1+\sqrt{2}\right),\log_3\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$ c) $(3,+\infty)$

d) $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ e) $\left[\log_3\left(1-\sqrt{2}\right),\log_3\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right]$ f) $\left[1,\log_3 5\right]$

**AL - X. 013** Să se rezolve inecuația: $\dfrac{2\cdot 2^{x-1}}{3^x-2^x}>1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

a) $x\in\left(0,\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ b) $x\in\left(0,\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ c) $x\in(0,1)$

d) $x\in\left(0,\log_{\frac{2}{3}}(\sqrt{5}-1)\right)$ e) $x\in\left(0,\log_{\frac{2}{3}}(\sqrt{5}+1)\right)$ f) $x\in(-1,1)$

**AL - X. 014** Să se rezolve inecuația: $x^{\sqrt{x}}<\left(\sqrt{x}\right)^x$.

a) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ b) $(0,1)\cup(4,+\infty)$ c) $(0,2)$

d) $(0,3)$ e) $(0,2)\cup(6,+\infty)$ f) $(0,3)\cup(5,+\infty)$

**AL - X. 015** Să se rezolve ecuația: $\dfrac{\log_2(2x-5)}{\log_2\left(x^2-8\right)}=\dfrac{1}{2}$.

a) $x_1=\dfrac{11}{3},\ x_2=3$ b) $x_1=\dfrac{11}{3},\ x_2=-3$ c) $x_1=\dfrac{11}{3}$

d) $x_1=3$ e) $x_1=-\dfrac{11}{3},\ x_2=-3$ f) $x_1=9$

**AL - X. 016** Care este soluția ecuației: $\left|2+\log_{\frac{1}{3}}x\right|+3=\left|1-\log_{\frac{1}{3}}x\right|$ ?

a) $x\in\phi$ b) $x=3$ c) $x=\dfrac{1}{3}$ d) $x\in[9,+\infty)$ e) $x=(0,9)$ f) $x\in\left(\dfrac{1}{3},9\right)$

**AL - X. 017** Să se precizeze domeniul maxim de definiție al funcției:

$$f(x)=\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}}\ .$$

a) $(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ b) $(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$ c) $[2,+\infty)$

d) $(1,+\infty)$ e) $(0,2]\cup(4,\infty)$ f) $(-\infty,0]\cup[2,\infty)$

**AL - X. 018** Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției:

$$f(x)=\sqrt{\frac{\ln\left(-2x^2-x+1\right)}{-4x^2-x}}\ .$$

a) $\left(-\frac{1}{4},0\right)\cup\left[\frac{1}{2},2\right)\cup(3,\infty)$ b) $\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup(2,4)$

c) $(-1,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,\infty)$ d d) $\left(-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left(-\frac{1}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$

e) $\mathbf{R}\setminus\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ f) $\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$

**AL -X. 019** Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției

$$f(x)=\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x\ .$$

a) $(0,+\infty)$ b) $(1,+\infty)$ c) $\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup(1,+\infty)$

d) $\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right)$ e) $(0,1)\cup(2,+\infty)$ f) $(1,2)$

**AL - X. 020** Fie $x_1,x_2,x_3$ trei numere din intervalul (0,1) sau din intervalul $(1,+\infty)$. Precizați care este valoarea minimă a expresiei

$$\mathrm{E}=\log_{x_1}x_2x_3+\log_{x_2}x_1x_3+\log_{x_3}x_1x_2\ .$$

a) 1 b) 0 c) 3 d) 6 e) – 3 f) – 6

**AL - X. 021** Ştiind că $\log_{40}100=a$, să se afle $\log_{16}25$ în funcție de $a$.

a) $\frac{3a+2}{2a+4}$ b) $\frac{3a+1}{a+2}$ c) $\frac{3a-1}{2a+3}$ d) $\frac{3a-2}{4-2a}$ e) $\frac{3a-4}{a+2}$ f) $\frac{3a+4}{a-2}$

**AL - X. 022** Dacă $a = \log_{30} 3$ şi $b = \log_{30} 5$, să se calculeze $\log_{30} 16$ în funcție de $a$ şi $b$.

a) $4(1-a-b)$ b) $4(1+a-b)$ c) $2(1-a+b)$
d) $2a-b+1$ e) $2(a-2b-1)$ f) $2(a+2b+1)$

**AL - X. 023** Să se rezolve ecuația logaritmică:

$$20\log_{ax}\sqrt{x} + 7\log_{a^2x} x^3 = 3\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x^2,\ a>0.$$

a) $a^{-\frac{1}{2}};\ a^2\ ;1$ b) $a^2;\ a^3\ ;1$ c) $1;\ a;\ a^{-\frac{13}{10}}$

d) $a^{\frac{1}{34}};\ a^1\ ;1$ e) $a^{-1};\ a^{-2}\ ;1$ f) $1;\ a^{\frac{4}{3}};\ a^{\frac{5}{3}}$

**AL - X. 024** Să se rezolve ecuația: $\log_{x^2}(x+2) + \log_x\left(x^2+2x\right) = 4$.

a) $x=1$ b) $x=-1$ c) $x=3$ d) $x=4$ e) $x=2$ f) $x=8$

**AL - X. 025** Să se rezolve ecuația: $a^{\log_6 x} - 5x^{\log_6 a} + 6 = 0$, $a>0,\ a\neq 1$.

a) $x_1 = \log_a 3,\ x_2 = \log_a 2$ b) $x_1 = 6^{\log_a 3},\ x_2 = 6^{\log_a 2}$ c) $x = 6^{\log_a \frac{2}{3}}$

d) $x_1 = -\log_a 3,\ x_2 = -\log_a 2$ e) $x = 6^{\log_a \frac{3}{2}}$ f) $x_1 = a\log_6 3,\ x_2 = a\log_6 2$

**AL - X. 026** Să se rezolve ecuația: $\log_2 3 + 2\log_4 x = \left(x^{\log_9 16}\right)^{\frac{1}{\log_3 x}}$.

a) $x=3$ b) $x=1$ c) $x=\frac{16}{3}$ d) $x=\frac{3}{16}$ e) $x=\frac{1}{3}$ f) $x=3$

**AL - X. 027** Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuația $\frac{m+\lg x}{\lg(x+1)}=2$ să aibă o singură soluție reală.

a) $m \in \phi$ b) $m<0$ c) $m=1$ d) $m=\lg 2$ e) $m=\lg 4$ f) $m=\lg 6$

**AL - X. 028** Să se determine valoarea parametrului întreg *m* astfel încât ecuația $\left(\log_{\frac{1}{3}} m-3\right)x^2-2\left(3\log_{\frac{1}{3}} m-4\right)x+7\log_{\frac{1}{3}} m-6=0$ să aibă o rădăcină dublă.

a) $m=1$ b) $m=-2$ c) $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $m=4$ e) $m=9$ f) $m=-9$

**AL - X. 029** Rezolvând ecuația: $\log_3\left[\log_2\left(\log_4 x\right)\right]=2\log_9\left[\frac{1}{\log_4\left(\log_2 x\right)}\right]$,

să se stabilească în care din următoarele intervale se află soluția acesteia.

a) $\left(1,\sqrt{2}\right]$ b) $[2,3]$ c) $\left[2\sqrt{3},4\right)$ d) $[4,5)$ e) $[5,18]$ f) $(18,+\infty)$

**AL - X. 030** Să se determine valorile lui $m>0$ pentru care funcția

$$f(x)=\sqrt{x^2\log_m\frac{1}{2}-x\log_{\frac{1}{2}} m+3\log_{\frac{1}{2}} m-4}$$ este definită pe $\mathbf{R}$ .

a) $m=4$ b) $m\in\left(\frac{1}{2},5\right)$ c) $m\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ d) $m\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ e) $m=\frac{1}{4}$ f) $m\in\phi$

**AL - X. 031** Fiind dată expresia:

$$E=\sqrt{(\log_x 2+\log_2 x-2)\log_2 x}+\sqrt{(\log_x 2+\log_2 x+2)\log_2 x}\ ,$$
să se determine toate valorile lui $x\in\mathbf{R}$ pentru care $E=2$.

a) $[1,+\infty)$ b) $[1,2]\cup\{3\}$ c) $\left[\frac{1}{2},2\right]$

d) $\left[\frac{1}{2},2\right]\setminus\{1\}$ e) $[1,2]\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$ f) $(1,2)\cup(3,+\infty)$

**AL - X. 032** Să se rezolve ecuația
$$\lg x^2+2\lg x=2^3\ .$$

a) x=10 b) x=100 c) x= 1000 d) x=1 e) x=2 f) x=3

**AL - X. 033** Fie $f:\left[\frac{1}{2},+\infty\right)\to[0,+\infty),\ f(x)=\log_a\left(\sqrt{2x-1}+1\right),\ a>1$

Să se rezolve inecuația $f^{-1}(x)\le 5$, unde $f^{-1}$ este inversa funcției $f$.

a) $x\in[2,4]$ b) $x\in[0,\log_a 2]$ c) $x\in[0,\log_a 4]$

d) $x\in[0,1]$ e) $x\in[1,\log_a 3]$ f) $x\in[5,8]$

**AL - X. 034** Fiind date funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\in(-\infty,0]\\ -x^2+x, & x\in(0,\infty)\end{cases}$

și $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=\begin{cases}e^{x^2} & ,x\in(-\infty,-1)\\ \arcsin x, & x\in[-1,1]\\ \ln x & ,x\in(1,\infty)\end{cases}$ , să se determine

soluția din intervalul $(-1,0]$ a ecuației $(g\circ f)(x)=0$.

a) $x=-1$ b) $x=0$ c) $x=-\frac{1}{2}$

d) $x=-\frac{2}{3}$ e) $x=-\frac{1}{4}$ şi $x=-\frac{1}{2}$ f) Nu există.

**AL - X. 035** Se consideră inecuația: $\log_a x-\log_{a^2} x+\log_{a^4} x\geq\frac{3}{4}, a>0, a\neq 1$ şi se notează cu $M_a$ mulțimea tuturor soluțiilor sale. Care dintre următoarele afirmații este adevărată ?

a) $M_{\frac{1}{2}}=\left(0,\frac{1}{2}\right]$ b) $M_{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ c) $M_{\frac{1}{2}}=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

d) $M_{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{4},\infty\right)$ e) $M_{\frac{1}{10}}=(-5,+\infty)$ f) $M_2=(2,10)$

**AL - X. 036** Să se rezolve inecuația: $\left|\log_3|x|\right|<1$.

a) $x\in(0,1)$ b) $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ c) $x\in\left(-3,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},3\right)$

d) $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ e) $x\in(3,+\infty)$ f) $x\in(-3,3)$

**AL - X. 037** Fie $P(x)=x^2-x\log_a y+3\log_a y-8$, $y>0$, $a\in(0,1)$. Să se determine toate valorile lui $y$ astfel încât $P(x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

a) $y\in\left(a^4,a^8\right)$ b) $y\in\left(a^8,a^4\right)$ c) $y\in\left[a^8,a\right]$

d) $y\in(a,2)$ e) $y\in\left(a^3,a\right)$ f) $y\in\left[a^2,a\right]$

**AL - X. 038** Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x^{\lg x}+y^{\lg y}=m+101 \\ \dfrac{\log_y 10}{\log_x 10}+\dfrac{\log_x 10}{\log_y 10}=\dfrac{2}{\lg x\lg y}\end{cases}$$

, să admită soluții reale.

a) $m \in [0,10]$ b) $m \in (-99,0)$ c) $m \in [-81,0)$
d) $m \in (10,100)$ e) $m \in (-\infty,-100)$ f) $m \in \phi$

**AL - X. 039** Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to (-1,+\infty)$, $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

Calculați inversa sa, $f^{-1}$.

a) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(x+1), \ x \in (-1,0) \\ x^2, \ x \in [0,+\infty) \end{cases}$ b) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(x-1), \ x \in (-1,0) \\ 2x, \ x \in [0,+\infty) \end{cases}$

c) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln x, \ x \in (-1,0) \\ x, \ x \in [0,+\infty) \end{cases}$ d) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1), \ x \in (-1,0) \\ x^2 - 1, \ x \in [0,+\infty) \end{cases}$

e) $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2\ln(x+1), \ x \in (-1,0) \\ -x^2, \ x \in [0,+\infty) \end{cases}$ f) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln x^2, \ x \in (-1,0) \\ x^2 + 1, \ x \in [0,+\infty) \end{cases}$

**AL - X. 040** Să se rezolve inecuația: $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > \log_{4x}^2 2$.

a) $x \in \left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{2}\right) \cup (1,+\infty)$ b) $x \in (-2,-1)$ c) $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \cup (1,\infty)$

d) $x \in (-1,+\infty)$ e) $x \in \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \cup (1,\infty)$ f) $x \in (0,1)$

**AL - X. 041** Se consideră expresia $E(x) = \log_4 x + \log_x 4$. Determinați valorile lui $x \in \mathbf{R}$ astfel încât $E(x) < \frac{5}{2}$.

a) $x \in (1,2)$ b) $x \in (0,1) \cup (2,16)$ c) $x \in [1,2] \cup [16,32]$

d) $x \in (16,+\infty)$ e) $x \in (1,2) \cup (20,+\infty)$ f) $x \in (1,10) \cup (20,+\infty)$

**AL - X. 042** Ştiind că $a \in (0,1)$ să se determine mulţimea:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid \log_a x - 2\log_x a \geq 1\right\}.$$

a) $\left[\frac{1}{a},1\right) \cup \left[a^2,+\infty\right)$ b) $\left[\frac{1}{a},a^2\right] \cup \left(0,a^3\right)$ c) $\left(0,a^2\right] \cup \left(1,\frac{1}{a}\right]$

d) $\left[1,\frac{1}{a}\right]$ e) $\left(0,\frac{1}{a}\right] \cup \left[a^2,+\infty\right)$ f) $\left(a,\frac{1}{a}\right) \cup \left[0,a^2\right)$

**AL - X. 043** Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} \left(\log_2 x\right)^3 + \left(\log_2 y\right)^3 = 9 \\ x^{\left(\log_2 x\right)^2} + y^{\left(\log_2 y\right)^2} = 258 \end{cases}$.

a) $x = 2,\ y = 2$ b) $x = 4,\ y = 4$ c) $x = 3,\ y = 9$; $x = 9,\ y = 3$

d) $x = 2,\ y = 4$; $x = 4,\ y = 2$ e) $x = 2,\ y = 3$; $x = 3,\ y = 2$ f) $x = 1,\ y = 9$; $x = 9,\ y = 1$

**AL - X. 044** Să se rezolve în **R** sistemul: $\begin{cases} x^{\lg y} \cdot y^{\lg z} \cdot z^{\lg x} = 10 \\ x^{\lg y \lg z} \cdot y^{\lg x \lg z} \cdot z^{\lg x \lg y} = 1000 \\ xyz = 10 \end{cases}$.

a) $x = 10,\ y = z = 1$ b) $x = y = 10,\ z = 1$ c) $x = y = z = 10$

d) $x = y = z = 10^{-1}$ e) Sistemul nu are soluţii în **R** f) $x = 1,\ y = 5,\ z = 2$

**AL - X. 045** Să se determine mulţimea tuturor numerelor naturale pentru care inegalitatea: $2^n > n^3$ este adevărată.

a) N b) $\phi$ c) $\{0,1\}$

d) $\{0,1\} \cup \{n \in \mathbf{N};\ n \geq 10\}$ e) $\{n \in \mathrm{N};\ n \geq 10\} \setminus \{12\}$

f) $\{n \in \mathrm{N};\ n \geq 5\} \cup \{0,1\}$

**AL – X. 046** Să se determine mulțimea tuturor numerelor naturale pentru care următoarea inegalitate

$\sqrt[1\cdot 5]{a}\cdot\sqrt[3\cdot 7]{a}\cdot\sqrt[5\cdot 9]{a}\ldots\sqrt[(2n-1)(2n+3)]{a}<a^n,\quad a>1,\quad n\in\mathbf{N}^*$ , este adevărată.

a) $\{n\in\mathbf{N},n\geq 3\}$ b) $n\in\mathbf{N}^*$ c) $n\in\mathbf{N}\setminus\{3,4,5\}$
d) $\{n\in\mathbf{N}:n=2k\}$ e) $n\in\phi$ f) $\{n\in\mathbf{N}:n=2k+1\}$

**AL - X. 047** Să se determine numărul de elemente ale mulțimii

$$E=\left\{n\in\mathbf{N}\left|\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!}<\frac{15}{(n-1)!}\right.\right\}$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

**AL – X. 048** Într-o discotecă, dintr-un grup de 7 fete şi 8 băieți, la un anumit dans, trebuie să se formeze 4 perechi din câte o fată şi un băiat. În câte moduri se pot forma cele patru perechi ?

a) 105; b) 210; c) 14700; d) 58800; e)2450; f) 420.

**AL - X. 049** La o reuniune de 12 persoane, fiecare a dat mâna cu fiecare dintre ceilalți participanți. Câte strângeri de mână au fost?

a) 132 b) 66 c) 12! d) 12 e) 33 f) 144

**AL - X. 050** În câte moduri se poate face un buchet cu două garoafe albe şi cinci garoafe roşii având la dispoziție 20 garoafe albe şi 9 garoafe roşii ?

a) 180 b) 18.000 c) 90.000
d) 22.400 e) 23.940 f) 24.140

**AL - X. 051** Care este domeniul maxim de definiție *D* al funcției:

$$f:D\to\mathbf{R},\ f(x)=C_{7x}^{x^2+10}+C_{5x+4}^{x^2+3x-4}\ ?$$

a) $D=\{1,9,11\}$ b) $D=\{2,3,4\}$ c) $D=(-\infty,-1]\cap \mathbf{Z}$
d) $D=[7,+\infty)\cap \mathbf{N}$ e) $D=\{2,3,4,5\}$ f) $D=[1,6]\cap \mathbf{N}$

**AL - X. 052** Să se precizeze în care din mulțimile de mai jos se află toate numerele naturale $n$ care verifică relația: $C_{3n-2}^{n}=A_{2n-1}^{n-1}$.

a) $A_1 = N \setminus \{1,2,3,4,7,9\}$ b) $A_1 = N \setminus \{2,3,4,5,6,9,30\}$ c) $A_3=(9,30)$

d) $A_4=\{2k+1, k\in \mathbf{N}\}$ e) $A_6=\mathbf{N}\setminus\{2,3,5,7,9,30\}$ f) $A_5=\{3k \mid k\in \mathbf{N}\}$

**AL - X. 053** Să se rezolve ecuația

$$C_{3n+4}^{n^2+2n-4}=210,\quad n\in \mathbf{N}.$$

a) n=4 b) n=3 c) n=2 d) n=1 e) n=5 f) n=6

**AL – X. 054** Soluția ecuației

$$C_{x+8}^{x+3}=5(x+6)(x+5)(x+4)$$

se află în intervalul :

a) (14,19); b) (-8,-3); c) (-6,-4); d) (20,24) e) (21,27); f) (19,20).

**AL – X.055** Să se precizeze în ce interval se află soluția ecuației

$$C_{x+1}^{x-4}=\frac{7}{15}x(x+1)(x-1)$$

a) (8,12) b) (10,12) c) (-1,4) d) (7,9] e) (11,17) f) (-1,1).

**AL - X. 056** Să se rezolve ecuația

$$3C_{x+1}^{2}+x\cdot P_2=4A_x^2.$$

a) x=3 b) x=4 c) x=5
d) x=2 e) x=7 f) x=10

**AL - X. 057** Să se calculeze suma:

$$S_n = 1\cdot C_1^1 + 2\left(C_2^1 + C_2^2\right) + 3\left(C_3^1 + C_3^2 + C_3^3\right) + \ldots + n\left(C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n\right).$$

a) $S_n = n\cdot 2^n - \dfrac{n(n+1)}{2}$ b) $S_n = \dfrac{(n+1)\cdot 2^n - n}{2}$

c) $S_n = (n-1)\cdot 2^{n+1} + 2 - \dfrac{n(n+1)}{2}$ d) $S_n = (n+1)\cdot 2^{n-1} - \dfrac{n(n+1)}{2}$

e) $S_n = (n-1)2^n + 2 - \dfrac{n(n+1)}{2}$ f) $S_n = n\cdot 2^n + n(n+1)$

**AL - X. 058** Să se calculeze suma:

$$E = C_n^k + C_{n-1}^k + \ldots + C_{k+1}^k + C_k^k\ , \text{ unde } n,k \in \mathbf{N},\ n \geq k\ .$$

a) $E = C_{n+1}^{k-1}$ b) $E = C_{n+1}^{k+1}$ c) $E = C_{n+1}^{k+2}$ d) $E = C_{n+1}^{k-2}$ e) $E = C_{n+2}^{k+1}$ f) $E = C_{n+2}^{k+2}$

**AL - X. 059** Să se calculeze expresia:

$$E = \frac{C_n^k - C_{n-2}^k - C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-2}^{k-1}},\quad n \geq 3,\ k \geq 2,\ n \geq k+2\ .$$

a) $E = 1$ b) $E = 2$ c) $E = 3$ d) $E = \dfrac{1}{2}$ e) $E = \dfrac{1}{3}$ f) $E = -1$

**AL - X. 060** Determinați mulțimea $A$ a valorilor lui $x \in \mathbf{R}$ pentru care: $C_{10}^{x-1} > 2C_{10}^{x}$.

a) $A = (-\infty,-3) \cup (-1,1]$ b) $A = \{5,6,7\}$ c) $A = [1,7]$

d) $A = \{8,9,10\}$ e) $A = [-3,-2] \cup \{1,2\}$ f) $A = \{1,2,3,4\}$

**AL - X. 061** Să se rezolve inecuația: $C_{3x}^1 + C_{6x}^3 \leq 24$, precizându-se care din următoarele intervale conține soluția.

a) $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ b) $\left(\frac{1}{2},1\right]$ c) $\left[\frac{3}{4},1\right]$ d) $\left(\frac{5}{6},1\right]$ e) $[7,14]$ f) $[14,+\infty)$

**AL - X. 062** Să se precizeze soluția sistemului : $\begin{cases} A_x^y = 10A_x^{y-1} \\ C_x^y = \frac{5}{3}C_x^{y+1} \end{cases}$.

a) $x = 23,\ y = 14$ b) $x = 20,\ y = 5$ c) $x = 17,\ x = 8$

d) $x = 12,\ y = 3$ e) $x = 10,\ y = 2$ f) $x = 8,\ x = 5$

**AL – X. 063** Să se determine numerele naturale x şi y , astfel încât numerele $C_{x-1}^{y-1}, C_{x-1}^{y}, C_x^y$ să fie în progresie aritmetică, iar numerele $A_x^y$, $A_x^{y+1}, A_{x+1}^{y+1}$ să fie în progresie geometrică.

a) x = 1, y = 3; b) x=3, y = 1; c) x = y = 3;

d) x = 3, y = $\frac{1}{2}$; e) x $\in \mathbf{N}^*$, y = 1; f) x = 4, y = 2

**AL - X. 064** Să se determine al patrulea termen din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, în ipoteza că $2^{2n}-2^n-240=0,\ n\in\mathbf{N}$.

a) $\frac{4}{\sqrt{x}}$ b) $4\sqrt{x}$ c) $6\sqrt[3]{x}$ d) $\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$ e) 4 f) $2x^2$

**AL - X. 065** Să se precizeze termenul care nu conține pe *x* din dezvoltarea binomului

$$\left(ax^{-\frac{1}{2}}+xa^{-\frac{1}{2}}\right)^{30},\ a,x\in\mathbf{R}_+^*.$$

a) $C_{30}^{10}a^{15}$ b) $C_{30}^{5}a^{7}$ c) $C_{30}^{7}a^{5}$ d) $C_{30}^{4}a^{12}$ e) $C_{30}^{15}a^{14}$ f) $C_{30}^{8}a^{8}$

**AL – X. 066** În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$, $n\in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $x\in \mathbf{R}_+^*$, coeficienții primilor 3 termeni formează o progresie aritmetică. Să se determine termenii raționali ai dezvoltării.

a) $T_1$; $T_7$; $T_9$; b) $T_1$; $T_5$; $T_9$; c) $T_2$; $T_4$, $T_8$;

d) $T_1$; $T_3$; $T_7$; e) $T_2$; $T_6$; $T_8$; f) $T_1$; $T_3$; $T_5$.

**AL – X. 067** Determinați x din expresia

$$\left(x^{\log_a \sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)^n, \ (a > 0,\ a \neq 1)$$

știind că suma coeficienților binomiali ai dezvoltării este 128, iar al șaselea termen al dezvoltării este egal cu $\dfrac{21}{a^4}$.

a) $x_1 = 3a$, $x_2 = a^2$ b) $x_1= 2a$, $x_2 = a^3$ c) $x_1 = 2a^{-1}$, $x_2 = a^{-3}$
d) $x_1 = 3a$, $x_2 = a^{-2}$ e) $x_1 = a$, $x_2 = a^4$ f) $x_1 = a^{-1}$, $x_2 = a^{-4}$

**AL - X. 068** Câți termeni care nu conțin radicali sunt în dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}\right)^{16}$ ?

a) Un termen b) Doi termeni c) Trei termeni
d) Nici unul e) Șase termeni f) Patru termeni

**AL - X. 069** Care este expresia termenului din dezvoltarea binomului $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{3}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$, care conține pe $a^4$ ?

a) $187\dfrac{a^4}{3^7}$ b) $286\dfrac{a^4}{3^7}$ c) $107\dfrac{a^4}{3^5}$ d) $286\dfrac{a^4}{3^3}$ e) $202\dfrac{a^4}{3^7}$ f) $200\dfrac{a^4}{3^4}$

**AL - X. 070** Care este termenul din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}}+\sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}$,

în care exponenții lui *x* şi *y* sunt egali ?

a) $T_{13}$ b) $T_{10}$ c) $T_6$ d) $T_8$ e) $T_{15}$ f) $T_{11}$

**AL - X. 071** În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{1-x}}\right)^n$, suma coeficienților binomiali ai ultimilor trei termeni este egală cu 22. Să se afle valorile lui *x* pentru care suma dintre termenul al treilea şi termenul al cincilea este egală cu 135.

a) $x_1=1, x_2=2$ b) $x=2$ c) $x_1=-1, x_2=2$

d) $x_1=-1, x_2=-2$ e) $x=1$ f) $x_1=1, x_2=-1$

**AL - X. 072** În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, suma coeficienților binomiali este cu 504 mai mică decât suma coeficienților binomiali din dezvoltarea binomului $(a+b)^{3n}$. Să se afle termenul al doilea al primei dezvoltări.

a) $3x$ b) $3\sqrt[3]{x}$ c) $3\sqrt[3]{1/x}$ d) $3\sqrt[3]{x^2}$ e) 3 f) $3x^2$

**AL - X. 073** Să se determine termenul ce nu conține pe a din dezvoltarea binomului

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}, \quad a\neq 0$$

a) $T_9=C_{17}^8=24.310$ b) $T_7=C_{17}^6=12376$

c) $T_6=C_{17}^5=6188$ d) $T_2=C_{17}^1=17$

e) $T_3=C_{17}^2=136$ f) $T_4=C_{17}^3=680$

**AL - X. 074** Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltarea $\left(1+0{,}1\right)^{100}$ .

a) 9 b) 10 c) 11 d) 20 e) 30 f) 22

**AL - X. 075** Determinați valoarea celui mai mare coeficient binomial al dezvoltării binomului $\left(a+b\right)^{n}$ , dacă suma tuturor coeficienților binomiali este egală cu 256.

a) 1 b) 8 c) 60 d) 70 e) 28 f) 7

**AL – X. 076** Să se determine coeficientul lui $x^{23}$ din dezvoltarea lui $(x^2 + x + 1)^{13}$ .

a) 0 b) 13 c) 21 d) 442 e) 884 f)169

**AL – X.077** Să se afle coeficientul lui $x^{12}$ din dezvoltarea

$(10x^2 +15x - 12)(x+1)^{15}$ .

a) $13C_{15}^{5}$ b) $14C_{15}^{5}$ c) $15C_{15}^{5}$
d) $20C_{15}^{5}$ e) $25C_{15}^{5}$ f) $30C_{15}^{5}$

**AL - X. 078** Știind că suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $(1+x)^n + (1+x)^{n+1}$ este 1536, să se calculeze coeficientul lui $x^6$ din această dezvoltare.
a) 295 b) 294 c) 320 d) 293 e) 128 f) 200

**AL - X. 079** Să se calculeze

$$E = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots + (-1)^k C_n^{2k} + \ldots$$

a) $E = 2\cos\dfrac{n\pi}{4}$ b) $E = \sqrt{2^n}\cos\dfrac{n\pi}{6}$ c) $E = \sqrt{2^n}\cos\dfrac{n\pi}{4}$

d) $E = 2\sin\dfrac{n\pi}{4}$ e) $E = \sqrt{2^n}\sin\dfrac{n\pi}{6}$ f) $E = \sqrt{2^n}\sin\dfrac{n\pi}{4}$

**AL – X. 080** Dacă $\sqrt{a} = tg\alpha, \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze suma

$$C_n^1 - aC_n^3 + a^2C_n^5 - a^3C_n^7 + ...$$

a) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin n\alpha \cos^{n-1}\alpha}$ b) $\dfrac{\sin n\alpha}{\sin\alpha \cos n\alpha}$ c) $\dfrac{\sin n\alpha}{\sin\alpha \cos^{n-1}\alpha}$

d) $\dfrac{\sin n\alpha}{\cos\alpha \sin^n\alpha}$ e) $\dfrac{\sin n\alpha}{\cos^n\alpha \sin\alpha}$ f) $\dfrac{\sin n\alpha}{\sin^n\alpha \cos^n\alpha}$

**AL - X. 081** Care este cel de-al 10-lea termen al şirului 1,3,5,7,...?

a) 10 b) 11 c) 15 d) 20 e) 19 f) 17

**AL - X. 082** Să se găsească primul termen $a_1$ şi raţia $r$ ai unei progresii aritmetice

$$\left(a_n\right)_{n\geq 1} \text{ dacă : } \begin{cases} a_2 - a_6 + a_4 = -7 \\ a_8 - a_7 = 2a_4 \end{cases}.$$

a) $a_1 = -4, r = 3$ b) $a_1 = -4, r = 4$ c) $a_1 = -3, r = 1$

d) $a_1 = -5, r = 2$ e) $a_1 = -2, r = 2$ f) $a_1 = 1, r = 1$

**AL - X. 083** Să se determine suma primilor 100 de termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)$, dacă $a_1=2$, $a_5=14$.

a) 10100 b) 7950 c) 15050

d) 16500 e) 50100 f) 350

**AL - X. 084** Pentru o progresie aritmetică suma primilor $n$ termeni ai ei este $S_n = 5n^2 + 6n$. Să se determine primul termen $a_1$ şi raţia $r$.

a) $a_1 = 11, r = 9$ b) $a_1 = 11, r = 10$ c) $a_1 = 11, r = 11$

d) $a_1 = 10, r = 11$ e) $a_1 = 10, r = 10$ f) $a_1 = 9, r = 9$

**AL - X. 085** Să se determine rația și primul termen ale unei progresii aritmetice pentru care $a_5 = 18$, iar $S_n = \frac{1}{4} S_{2n}$, unde $S_n$ este suma primilor *n* termeni ai progresiei.

a) $a_1 = 6, r = 3$ b) $a_1 = 14, r = 1$ c) $a_1 = 2, r = 4$

d) $a_1 = -2, r = 5$ e) $a_1 = 8, r = \frac{5}{2}$ f) $a_1 = 1, r = 1$

**AL - X. 086** Într-o progresie aritmetică termenul al nouălea şi al unsprezecelea sunt dați , respectiv , de cea mai mare şi cea mai mică rădăcină a ecuației :

$$\frac{1}{2}\lg 2 + \lg\sqrt{x^2 + 4x + 5} = \frac{1}{2}\left[\lg\left(x^2 - 4x + 5\right) + 1\right].$$

Se cere suma primilor 20 termeni ai progresiei.

a) 15 b) 18 c) 22 d) 30 e) 40 f) 100

**AL - X. 087** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir având suma primilor n termeni $S_n = n^2 + an + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, pentru orice $n \geq 1$. Să se determine a şi b astfel încât şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ să fie progresie aritmetică cu primul termen egal cu 2.

a) $a = 2, b = 3$ b) $a \in \mathbf{R}, b \in (1,2)$ c) $a = 1, b = 0$

d) $a = 2, b = 0$ e) $a = 2, b = 1$ f) $a = 1, b = 2$

**AL - X. 088** Fie $p, q \in \mathbf{N}^*, p \neq q$. Să se determine rația unei progresii aritmetice în care primul termen este 3, iar raportul între suma primilor p termeni şi suma primilor q termeni este $\frac{p^2}{q^2}$.

a) 1 b) 2 c) 6 d) 5 e) 4 f) 3

**AL - X. 089** Fie $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ termenii unei progresii aritmetice cu rația $r \neq 0$. În funcție de $a_1, n$ și $r$ să se calculeze suma:

$$S_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + ... + \frac{1}{a_{n-1} a_n}.$$

a) $\frac{n}{a_1(a_1 + n)}$ b) $\frac{n+1}{a_1^2 + n a_1 r}$ c) $\frac{n-1}{a_1[a_1 + (n-1)r]}$

d) $\frac{n-1}{a_1(a_1 - nr)}$ e) $\frac{n}{(a_1 + r)n}$ f) $\frac{n+2}{a_1 + (n-1)r}$

**AL – X. 090** Fie $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, n+1$ numere reale în progresie aritmetică de rație r. Să se calculeze suma: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a_{k+1}$.

a) r b $a_1$ c) 1 d) 0 e) n f) $2^n$

**AL – X. 091** Să se determine numărul termenilor unei progresii aritmetice descrescătoare dacă simultan sunt îndeplinite condițiile :

(i) Rația satisface ecuația $\sqrt[3]{9^{x^2 - x - \frac{3}{2}}} = 27$

(ii)Primul termen satisface ecuația :

$$\lg 2 + \lg(y+1) = \lg(5y+7) - \lg 3$$

(iii) Suma progresiei este cu 9 mai mică decât exponentul p al binomului $\left(\sqrt[3]{b^2} + b^{-\frac{1}{3}}\right)^p$ în a cărui dezvoltare termenul al patrulea conține pe b la puterea întâi.

a) n = 5 b) n = 3 c) n = 6 d) n = 10 e) n = 4 f) n=8

**AL - X. 092** Să se determine primul termen $a_1$ şi raţia $q$ pentru progresia geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă : $\begin{cases} a_5 - a_1 = 15 \\ a_4 - a_2 = 6 \end{cases}$.

a) $a_1 = 0, q = 1$  b) $a_1 = 1, q = 2$  c) $a_1 = -16, q = \frac{1}{2}$

d) $\begin{cases} a_1 = -16 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ sau $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$  e) $a_1 = 1, q = -1$  f) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 4 \end{cases}$

**AL - X. 093** Suma a trei numere în progresie aritmetică este egală cu 12. Dacă se adaugă acestora, respectiv numerele 1, 2, 11, progresia devine geometrică . Să se afle aceste numere.

a) 5,4,7 şi 15,14,13  b) 1,4,7 şi 17,4,-9  c) 6,8,10
d) 1,3,5 şi 17,15,13  e) 5,9,13 şi 18,14,10  f) 2,4,6 şi –1,4,9

**AL – X. 094** Trei numere sunt în progresie geometrică. Dacă se măreşte al doilea cu 32, progresia devine aritmetică, iar dacă se măreşte apoi şi al treilea cu 576, progresia devine din nou geometrică. Care sunt cele trei numere ?

a) 4,20,100 sau 1,-7,49 ;  b) 4,100,20 sau -7,1,49 ;
c) 100,4,20 sau 1,49,-7 ;  d) 2,4,6 sau 6,4,2 ;
e) 8,10,12 sau -3,-1,0 ;  f) 1,2,3 sau 49,50,51

**AL – X. 095** Pot fi numerele 7,8,9 elemente ale unei progresii geometrice ?

a) Da în ordinea 7,8,9 cu o raţie q<1
b) Da în ordinea 9,8,7 cu o raţie q<1
c) Da în ordinea 7,9,8 cu o raţie q<1
d) Da în ordinea 8,9,7 cu o raţie q<1
e) Nu pot fi.
f) Da în ordinea 7,9,8 cu o raţie q>1

**AL – X. 096** Calculați produsul primilor şapte termeni ai unei progresii geometrice, cu $a_2 > 0$ cunoscând suma lor $S_1 = a_1 + a_2 + ... + a_7 = \frac{1093}{9}$ şi suma inverselor lor $S_2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_7} = \frac{1093}{81}$.

a) 2186 ; b) 2187 ; c) 9837 ; d) $\frac{2186}{3}$ ; e) $\frac{3279}{2}$ ; f) $\frac{4372}{3}$

**AL – X. 097** Să se calculeze suma

$$S_n = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{11...1}_{n-cifre} .$$

a) $\frac{1}{81}\left[10^n - 10 - 9n\right]$ b) $\frac{1}{81}\left[10^{n-1} - 10 - 9n\right]$ c) $\frac{1}{81}\left[10^{n+1} - 10 - 9n\right]$

d) $\frac{1}{9}\left[10^n - 10 - 9n\right]$ e) $\frac{1}{9}\left[10^{n-1} - 10 - 9n\right]$ f) $\frac{1}{9}\left[10^{n+1} - 10 - 9n\right]$

**AL – X. 098** Fie $n \in \mathbf{N}$ , $n \geq 3$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ primii n termeni ai unei progresii geometrice cu $a_k > 0, k = \overline{1,n}$ . Dacă $S_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ şi $p = a_1 a_2 \ldots a_n$ , atunci :

a) $p = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^n$ b) $p = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^n$ c) $p = \sqrt{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^n}$

d) $p = \sqrt[n]{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}$ e) $p = S_1^n - S_2^n$ f) $p = \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2}$

**AL – X. 099** Fie $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ două progresii astfel încât prima să fie aritmetică şi cea de a doua geometrică, iar $a_1 = b_1 = 3$ şi $a_3 = b_3$ . Să se determine aceste progresii dacă $a_2 = b_2 + 6$ .

a) $a_n = 12n - 9$, $b_n = 3^n$ sau $a_n = 12n + 9$, $b_n = 3^n$ b) $a_n = 12n - 9$, $b_n = 3^n$ sau $a_n = 12n - 6$, $b_n = 3^n$
c) $a_n = 12n - 9$ $a_n = 3$ d) $a_n = 12n - 9$ $a_n = 3$

$b_n = 3^n$ sau $b_n = 3(-1)^{n-1}$

e) $a_n = 12n + 9$ $\quad a_n = 12n - 9$

$b_n = 3(-1)^{n-1}$ sau $b_n = 3(-1)^n$

$b_n = 3^n$ sau $b_n = 3(-1)^n$

f) $a_n = 12n + 9$ $\quad a_n = 12n - 9$

$b_n = 3(-1)^n$ sau $b_n = 3^n$

**AL – X. 100** Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ un şir de numere reale în progresie geometrică şi $p \in \mathbf{N}^*$. Să se calculeze suma

$$S_n = \frac{1}{a_2^p + a_1^p} + \frac{1}{a_3^p + a_2^p} + ... + \frac{1}{a_{n+1}^p + a_n^p}.$$

a) $S_n = \dfrac{q^{np} - 1}{a_1^p\left(q^{2np} - 1\right)}$ b) $S_n = \dfrac{q^{np} - 1}{a_1^p\left(q^{2p} - 1\right)}$ c) $S_n = \dfrac{q^{np} - 1}{a_1^p q^{(n-1)p}\left(q^{2p} - 1\right)}$

d) $S_n = \dfrac{\left(q^{np} - 1\right)q^{(n-1)p}}{a_1^p\left(q^{2p} - 1\right)}$ e) $S_n = \dfrac{q^{(n-1)p}}{a_1^p\left(q^p + 1\right)}$ f) $S_n = \dfrac{1}{a_1^p q^{(n-1)p}\left(q^p + 1\right)}$

**AL – X. 101** Să se calculeze expresia

$$E = \frac{1 + a + a^2 + ... + a^{n-1}}{1 + a^2 + a^4 + ... + a^{2n-2}},\ a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}.$$

a) $\dfrac{1}{a}$ b) $\dfrac{a^n + 1}{a - 1}$ c) $\dfrac{a + 1}{a^n + 1}$

d) $\dfrac{a}{a^n + 1}$ e) $\dfrac{a^n + 1}{a^{2n} + 1}$ f) 1

**AL – X. 102** Să se decidă dacă este progresie geometrică un şir pentru care suma primilor săi n termeni este $S_n = n^2 + 1$; în caz afirmativ precizaţi raţia q a acesteia.

a) $q = \dfrac{3}{2}$ b) $q = \dfrac{2}{3}$ c) $q = 2$

d) $q = 3$ e) Şirul nu este progresie geometrică f) $q = 6$

**AL – X. 103** Să se determine numerele reale x,y,z dacă x,y,z sunt în progresie aritmetică cu raţia nenulă, x,z,y sunt în progresie geometrică şi x+y+z = 18.

a) - 24, 6, 12 b) 24, 6, -12 c) 6, 12, 0
d) -12, 12, 18 e) 12, -6, 36 f) 36, -18, 0

**AL – X. 104** Să se determine valoarea parametrului real m astfel încât polinomul $P(x)=x^4-x^2+2x-1+m$ să se devidă cu x+1.

a) 0 b) –1 c) 3 d) 1 e) –1 f) 2

**AL – X. 105** Să se determine câtul q şi restul r al împărțirii polinomului

$$f=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$$

la polinomul $g=x^2-3x+1$.

a) $q=2x^2+3x+11, r=25x-5;$ b) $q=2x^2+3x-11, r=25x+5;$
c) $q=2x^2-3x+7, r=5x-1;$ d) $q=2x^2+2, r=x+2;$
e) $q=2x^2+3x-6, r=-x+2;$ f) $q=2x^2, r=2x+5;$

**AL - X. 106** Să se determine gradul polinoamelor $f\in\mathbf{Z}[X]$ astfel încât f(7)=5 şi f(15)=9.

a) 2 b) Nu există asemenea polinom c) 3
d) 4 e) 6 f) 8

**AL - X. 107** Să se determine restul împărțirii polinomului: $f=(\cos a+x\sin a)^n$, $n\in\mathbf{N}^*$, $a\in\mathbf{R}$ la polinomul $g=x^2+1$.

a) $x\cos na+\sin na$ b) $x\sin na+\cos na$ c) $\cos na+i\sin na$
d) $nx+1$ e) $x\,\mathrm{tg}na$ f) $x+1$

**AL - X. 108** Un polinom $P$ împărțit la $x-\alpha$ dă restul $\beta$, iar împărțit la $x-\beta$, dă restul $\alpha$. Fie $R_1$, respectiv $R_2$, resturile împărțirii polinomului $P(P(x))$ la $x-\alpha$, respectiv la $x-\beta$. În funcție de $\alpha$ şi $\beta$ să se determine $R_1$ şi $R_2$.

a) $R_1 = \alpha, R_2 = \beta$ b) $R_1 = \beta, R_2 = \alpha$ c) $R_1 = \alpha^2, R_2 = \beta^2$

d) $R_1 = \beta^2, R_2 = \alpha^2$ e) $R_1 = R_2 = \alpha\beta$ f) $R_1 = \alpha - 1, R_2 = \alpha + 1$

**AL - X. 109** Fie *P* un polinom care împărțit la $x^2 - 1$ are restul $x - 2$ şi câtul *Q*(*x*), iar împărțit la $x^2 - 4$ are restul $x + 1$ şi câtul *H*(*x*). Fie $R_1$ restul împărțirii lui *Q*(*x*) la $x - 2$ şi $R_2$ restul împărțirii lui *H*(*x*) la $x + 1$. Să se determine $R_1$ şi $R_2$.

a) $R_1 = R_2 = 1$ b) $R_1 = -3, R_2 = 0$ c) $R_1 = -3, R_2 = 3$

d) $R_1 = 0, R_2 = 3$ e) $R_1 = R_2 = 0$ f) $R_1 = R_2 = -1$

**AL - X. 110** Fie *P* un polinom cu coeficienți reali. Dacă resturile împărțirii lui *P* la $x - a$ şi $x - b$, $(a \neq b)$ sunt egale, să se determine restul împărțirii lui *P* la polinomul $(x - a)(x - b)$.

a) $ax + b$ b) $bx + a$ c) $P(a)$ d) $bx + 1$ e) $x + a$ f) $x + b$

**AL - X. 111** Să se determine restul împărțirii polinomului

$$P(x) = (x-2)^{2n} + (x-1)^n - 1 \text{ la polinomul } Q(x) = x^2 - 3x + 2 .$$

a) $x + 1$ b) $x - 1$ c) 0 d) $x + 2$ e) $2x + 1$ f) $2x - 1$

**AL - X. 112** Fie $f = X^{2n+1} + aX^{2n} + bX^{2n-1} - 1$. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât restul împărțirii lui $f$ la $x - 1$ să fie egal cu 5, iar restul împărțirii lui $f$ la $x + 1$ să fie egal cu –3, apoi să se găsească restul împărțirii lui $f$ la $X^2 - 1$.

a) $a = 2, b = 3; 5x - 3$ b) $a = 2, b = 3; -3x + 5$ c) $a = 2, b = 3; 4x + 1$

d) $a = 2, b = 1; 5x - 3$ e) $a = 2, b = 1; -3x + 5$ f) $a = 2, b = 1; 3x - 4$

**AL - X. 113** Se consideră polinomul: $f(X) = X^4 + X^3 + aX + b$, $f \in \mathbf{R}[X]$.
Să se determine parametrii $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca restul împărțirii lui $f(X+2)$ la $X+1$ să fie $-18$, iar restul împărțirii lui $f(X-2)$ la $X-1$ să fie egal cu $-12$.

a) $a = -4, b = -16$ b) $a = 4, b = 16$ c) $a = 5, b = 11$
d) $a = 6, b = 12$ e) $a = 10, b = 16$ f) $a = 9, b = 10$

**AL - X. 114** Fie $f \in \mathbf{R}[X]$ un polinom de grad cel puțin doi. Dacă $f$ dă restul 2 prin împărțirea la $X+1$ şi $(X+2)f(X) - X f(X+3) = 1$, să se determine restul împărțirii lui $f$ la $X^2 - X - 2$.

a) $1 - X$ b) $1 + X$ c) 1 d) 0 e) $X^2 - X - 2$ f) $X$

**AL - X. 115** Fie $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X(X+1)^{2n+1} + (m-1)X^n$ unde $m \in \mathbf{R}$.
Determinați condiția necesară şi suficientă pentru ca polinomul $f$ să fie divizibil prin polinomul $g = X^2 + X + 1$.

a) $m = -1$ b) $m = 1$ c) $m = -2$ d) $m = 2$ e) $m \in \mathbf{R}$ f) $m \in \phi$

**AL - X. 116** Un polinom împărțit la x-1, x+1 şi x+4 dă respectiv resturile 15,7 şi –80. Să se afle restul împărțirii polinomului prin $(x-1)(x+1)(x+4)$.

a) $5x^2 + 4x + 16$ b) $5x^2 - 4x + 16$ c) $5x^2 - 4x - 16$
d) $-5x^2 + 4x + 16$ e) $-5x^2 - 4x + 16$ f) $-5x^2 + 4x - 16$

**AL - X. 117** Să se determine toate polinoamele de gradul trei care se divid la x-1, iar resturile împărțirii la x-2, x-3 şi x-4 sunt egale.

a) $\alpha(x^3 - 9x^2 + 26x - 18)$ b) $\alpha(x^3 + 9x^2 + 26x - 18)$
c) $\alpha(x^3 - 9x^2 - 26x - 18)$ d) $\alpha(x^3 - 9x^2 + 26x + 18)$
e) $\alpha(x^3 + 9x^2 - 26x - 18)$ f) $\alpha(x^3 + 9x^2 + 26x + 18)$ $\alpha \in \mathbf{R}$

**AL - X. 118** Să se determine parametrii reali *m* şi *n* astfel încât polinomul

$f = 2X^{29} + X^{23} + X^{12} + mX^{11} + X^{8} + 5X^{6} + nX^{2} + 2$ să fie divizibil prin polinomul $g = X^{4} + X^{3} + X^{2} + X + 1$.

a) $m = -3, n = 1$ b) $m = -3, n = -1$ c) $m = 0, n = 0$
d) $m = 1, n = -3$ e) $m = 1, n = 3$ f) $m = 0, n = -3$

**AL - X. 119** Determinați restul împărțirii polinomului
$P(x) = x^{n} + x^{n-1} + \ldots + x + 1$, $(n \geq 3)$ la polinomul $Q(x) = x(x-1)^{2}$.

a) $nx^{2} + n(n-3)x + 1$ b) $\frac{1}{2}n(n-1)x^{2} - \frac{1}{2}n(n-3)x + 1$
c) $\frac{1}{2}n(n+1)x^{2} + \frac{1}{2}n(n+3)x + 1$ d) $(n-1)x^{2} + 2nx + 1$
e) $\frac{1}{2}n(n+1)x^{2} + n(n-1)x + 2$ f) $\frac{1}{2}(n+1)x^{2} + 2nx + 3$

**AL - X. 120** Să se determine restul împărțirii polinomului $P(x) = x^{2n} - x^{n} + x^{4} + 1$, prin polinomul $Q(x) = (x-1)^{2}$.

a) $nx - 2$ b) $(n+1)x - n - 2$ c) $(n+4)x - n - 2$
d) $(n-4)x + n + 2$ e) $(2n+1)x - 3$ f) $(2n-1)x + n - 2$

**AL - X. 121** Fie *P* un polinom cu coeficienți reali de grad mai mare sau egal cu 3, iar $R = mX^{2} + nX + p$ restul împărțirii lui *P* prin produsul $(X^{2} - 1)(X - 2)$. Să se determine $m$, $n$ și $p$ astfel încât resturile împărțirii lui *P* prin $X - 1, X - 2$ și $X + 1$ să fie, respectiv, $-2$, 3, $-6$.

a) $m = 1, n = 2, p = -1$ b) $m = 1, n = -1, p = 2$ c) $m = -7, n = 26, p = -21$
d) $m = 1, n = 2, p = -5$ e) $m = -1, n = 3, p = 1$ f) $m = 1, n = 2, p = 3$

**AL - X. 122** Determinați puterile naturale *n* pentru care polinomul

$$f=\left(X^2+X+1\right)^{3n}+\left(2X-2\right)^{3n} \text{ este divizibil prin } g=X^2-X+1.$$

a) $n=3p,\ p\in\mathbf{N}$ b) $n=3p+1,\ p\in\mathbf{N}$ c) $n=3p+2,\ p\in\mathbf{N}$

d) $n=2p,\ p\in\mathbf{N}$ e) $n=2p+1,\ p\in\mathbf{N}$ f) $n\in\mathbf{N}$

**AL - X. 123** Să se determine parametrii a,b$\in$ **R** astfel încât polinomul $P(x)=2x^4-2x^3+ax+b$ , să fie divizibil cu $Q(x)=x^2-3x+2$.

a) a = 12, b = - 12 b) a = 16, b = - 16 c) a = - 16, b = 16

d) a = 16, b = - 14 e) a = 15, b = - 15 f) a = 13, b = - 13

**AL – X. 124** Să se determine restul R(x) al împărțirii polinomului $Q(x)=x^{3n-1}+ax+b$ la $x^2+x+1$, n $\in$ $\mathbf{N}^+$.

a) $R(x)=(a^2-1)x+b^2-1$ b) $R(x)=(a+1)x+b+1$ c) $R(x)=ax+b$

d) $R(x)=(a-1)x+b-1$ e) $R(x)=(a-1)x+1-b$ f) $R(x)=(a-1)x+b+1$

**AL - X. 125** Să se determine polinomul de gradul trei, care împărțit la $x^2-3x$ dă restul $6x-15$ şi împărțit la $x^2-5x+8$ dă restul $2x-7$.

a) $x^3-7x^2+14x-13$ b) $2x^3-x+1$ c) $x^3-6x^2+15x-15$

d) $x^3-6x^2+14x-15$ e) $2x^3-6x^2+15x-15$ f) $x^3-7x+1$

**AL - X. 126** Să se determine $\lambda$ şi $\mu\in\mathbf{Q}$ astfel încât un cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f=2X^3-7X^2+\lambda X+3$ şi $g=X^3-3X^2+\mu X+3$ să fie un polinom de gradul doi.

a) $\lambda=-1,\mu=2$ b) $\lambda=\mu=0$ c) $\lambda=2,\mu=0$

d) $\lambda=2,\ \mu=-1$ e) $\lambda=\mu=-1$ f) $\lambda=0,\ \mu=2$

**AL - X. 127** Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom de grad mai mare sau egal cu 2, care îndeplineşte simultan condiţiile :

a) P împărţit la X-1 dă restul 3 ;
b) (X-1) P(X) -X·P(X+2)=1.

Atunci restul împărţirii polinomului P(X) la $X^2$-4X+3 este :

a) X-1 b) X+1 c) –X+4 d) X-4 e) –2x+5 f) 1

**AL - X. 128** Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$, $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$. Determinaţi coeficienţii polinomului $f$, dacă $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^4$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

a) $f = -1 + 3X - 5X^2 + 4X^3$ b) $f = 2 - 2X - 3X^2 + 2X^3$

c) $f = -1 + 4X + 6X^2 + 4X^3$ d) $f = -1 + 4X - 6X^2 + 4X^3$

e) $f = -2 - 2X + 3X^2 - 2X^3$ f) $f = 1 - 4X - 6X^2 + 4X^3$

**AL - X. 129** Să se determine polinomul $P(X) \in \mathbf{R}[X]$ care satisface condiţiile:
$(X-1)[P(X) - P(X-1)] - 4P(X) = 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ şi $P(0) = 24$.

a) $X(X-1)(X-3)(X-4) + 24$ b) $-2(X+1)(X-1)(X-3)(X-4)$

c) $(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$ d) $X(X-1)(X-2)(X-3) + 24$

e) $X(X-5)(X+1)(X-2) + 24$ f) $X + 24$

**AL - X. 130** Să se determine toate polinoamele $P \in \mathbf{R}[X]$, astfel încât $P(x+1) = P(x) + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ .

a) $kx^3, k \in \mathbf{R}$ b) $x^4 + x^3 - 5$ c) $x^4 + k, k \in \mathbf{R}$

d) $x^5 + k, k \in \mathbf{R}$ e) $k \in \mathbf{R}$ f) $x^4 + x + k, k \in \mathbf{R}$

**AL - X. 131** Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$ un polinom de grad oarecare, care pentru patru valori întregi diferite este egal cu $p$, $p$ fiind un număr prim. Pentru ce valori întregi ale lui $x$ avem $f(x) = 2p$ ?

a) Nu există $x \in \mathbf{Z}$ b) Pentru orice $x \in \mathbf{N}$ c) Pentru $x = 2k+1,\ k \in \mathbf{Z}$

d) Pentru orice $x \in \mathbf{Z}$ e) Pentru $x = 2k,\ k \in \mathbf{Z}$ f) Pentru $x$ număr prim

**AL - X. 132** Dacă polinomul $f \in \mathbf{Z}[X]$ are proprietatea că f(0) şi f(1) sunt numere impare, atunci :

a) f are numai rădăcini întregi b) f are numai rădăcini întregi pare
c) f are numai rădăcini întregi impare d) f nu are rădăcini întregi
e) f are numai rădăcini întregi pozitive f) f are numai rădăcini întregi negative

**AL - X. 133** Să se determine toate valorile parametrilor $a, b \in \mathbf{R}$ pentru care există polinoame $P \in \mathbf{R}[X]$ care verifică identitatea $x[P(x) - b] = (x - a)P(x + a), (\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

a) $b = 0, a \in \mathbf{R}$ b) $a = 0, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ c) $a \neq b$ şi $a \neq 0, b \neq 0$

d) $a = b$ sau $a \neq 0$ şi $b = 0$ e) $a, b \in \mathbf{R}$ f) $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

**AL - X. 134** Fie polinomul $f = X^4 - 2aX^3 + b^2X^2 - bX + 1,\ a, b \in \mathbf{R}$. Care din următoarele afirmaţii sunt adevărate pentru orice valori ale numerelor reale $a$ şi $b$ .
a) $f$ are cel mult o rădăcină reală b) $f$ nu are rădăcini reale
c) $f$ are 4 rădăcini reale d) $f$ are cel puţin două rădăcini reale
e) $f$ are cel mult două rădăcini reale f) $a + ib;\ a, b \in \mathbf{R}$ este rădăcină a polinomului

**AL - X. 135** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât rădăcinile $x_1, x_2, x_3$ ale ecuaţiei $x^3 - 6x^2 + ax + a = 0$, să verifice relaţia $(x_1 - 1)^3 + (x_2 - 2)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$ .

a) $a \in \{-1, 1, 3\}$, b) $a \in \left\{\frac{27}{5}, \frac{5}{3}, \frac{7}{2}\right\}$, c) $a \in \left\{\frac{5}{2}, \frac{16}{3}, \frac{27}{4}\right\}$,

d) $a \in \left\{\frac{7}{2}, \frac{16}{3}, \frac{27}{2}\right\}$, e) $a \in \left\{\frac{5}{3}, \frac{16}{5}, \frac{27}{2}\right\}$, f) $a \in \{2,3,5\}$

**AL - X. 136** Determinați ordinul de multiplicitate $m \in \mathbf{N}$ al rădăcinii $x = 2$ a ecuației : $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

**AL - X. 137** Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii 1 pentru polinomul

$$f = X^{1997} - 1997X^{999} + 1997X^{998} - 1.$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 1997 f) 998

**AL - X. 138** Fie $P \in \mathbf{R}[X]$, $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $a,b \neq 0$. Să se determine relația dintre coeficienții *a*, *b*, *c*, *d* pentru care rădăcinile lui *P* sunt în progresie aritmetică.

a) $3b^3 + 27ab + 9abc = 0$ b) $2b^3 - 27a^2d + 9abc = 0$ c) $2b^3 + 27a^2d - 9abc = 0$
d) $3a^3 + 27abc - 9bd = 0$ e) $3c^3 + 27abc = 0$ f) $2c^3 + 27a^2d - 9abc = 0$

**AL - X. 139** Fie polinomul $P \in \mathbf{R}[X]$, $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $a,d \neq 0$. Să se determine relația dintre coeficienții *a*, *b*, *c*, *d* pentru ca rădăcinile polinomului *P* să fie în progresie geometrică.

a) $a^2b = c^2d$ b) $a^2b^2 = c^2d$ c) $ab^3 = c^3d$
d) $ac^3 = b^3d$ e) $ac = bd$ f) $a^3c = b^3d$

**AL - X. 140** Să se determine valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care produsul a două rădăcini ale ecuației $x^3 - 3x - \frac{2m}{m^2+1} = 0$ este egal cu 1.

a) $m = 0$ b) $m \in \{2,5\}$ c) $m \in \mathbf{R}$ d) $m \in \phi$ e) $m = -2$ f) $m \in \{-5,7,10\}$

**AL - X. 141** Care este relaţia dintre $a$ şi $b$ atunci când ecuaţia $x^3 - 3ax + 2ab = 0$, $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, are o rădăcină dublă.

a) $2b = 3a$ b) $b^2 = a\sqrt{2}$ c) $b^2 = a$ d) $a^3 = 5b$ e) $a = 2b$ f) $a = b$

**AL - X. 142** Arătaţi că ecuaţia $x^3 + (2m-5)x^2 + (9-5m)x + 2(m-3) = 0$, $m \in \mathbf{R}$, admite o rădăcină $x_1$ independentă de $m$ şi apoi determinaţi $m$ astfel încât : $\log_{10}|x_2 - x_3| = \dfrac{1}{2}\log_{10}(6m+5)$, $x_2$ şi $x_3$ fiind celelalte rădăcini ale aceleiaşi ecuaţii.

a) $m_1 = 4, m_2 = -\dfrac{1}{2}$ b) $m_1 = 3, m_2 = 1$ c) $m = 2$

d) $m = \dfrac{1}{2}$ e) $m_1 = \dfrac{1}{2}, m_2 = 3$ f) $m = 5$

**AL - X. 143** Să se afle rădăcina reală a ecuaţiei $x^3 + 6x^2 + 15x + 12 = 0$, ştiind că ea poate fi scrisă sub forma $x_1 = u + v - 2$ unde $u, v \in \mathbf{R}$ şi $uv = -1$.

a) $2\sqrt[3]{2} - 2$ b) $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} - 2$ c) $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - 2$

d) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{3}} - 2$ e) $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - 2$ f) $\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2}} - 2$

**AL - X. 144** Să se determine $m \in \mathbf{R}$ ştiind că rădăcinile $x_1, x_2, x_3$ ale ecuaţiei $x^3 + 2x^2 - mx + 1 = 0$ satisfac relaţia $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 24$.

a) $m = 0, m = -1$ b) $m = 1, m = -1$ c) $m = 0, m = 1$

d) $m = 0, m = -8$ e) $m = -1, m = 3$ f) $m = 4, m = 0$

**AL - X. 145** Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât rădăcinile $x_1, x_2, x_3$ ale ecuaţiei $x^3 + x + m = 0$, să verifice egalitatea $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 10$.

a) $m=1$ b) $m=2$ c) $m=-1$ d) $m\in\phi$ e) $m=-2$ f) $m\in\mathbf{R}$

**AL - X. 146** Dacă $x_1$, $x_2$, $x_3$ sunt rădăcinile ecuației $x^3-x+1=0$, să se calculeze expresia : $E=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2}+\dfrac{x_2^2+x_3^2}{x_1^2}+\dfrac{x_3^2+x_1^2}{x_2^2}$.

a) $E=3$ b) $E=-3$ c) $E=2$ d) $E=-2$ e) $E=-1$ f) $E=1$

**AL - X. 147** Se consideră ecuația $x^3+ax^2+ax+a=0$, $a\in\mathbf{C}$, cu rădăcinile $x_1$, $x_2$, $x_3$. Să se calculeze expresia : $E=\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3+1\right)^2$.

a) $E=(a+1)^6$ b) $E=(a-1)^6$ c) $E=\left(a^3+1\right)^2$

d) $E=\left(a^3-1\right)^2$ e) $E=a^6+1$ f) $E=a^6-1$

**AL - X. 148** Dacă $x_1$, $x_2$, $x_3$ sunt rădăcinile ecuației $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a,b,c,d\in\mathbf{R}^*$, să se formeze ecuația în $y$ care are ca rădăcini :

$$y_1=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3},\ y_2=\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_1},\ y_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}.$$

a) $by^3+cy^2+dy+a=0$ b) $d\left(y+\dfrac{c}{d}\right)^3+c\left(y+\dfrac{c}{d}\right)^2+b\left(y+\dfrac{c}{d}\right)-a=0$

c) $dy^3+cy^2+by+a=0$ d) $\left(y+\dfrac{1}{a}\right)^3+\left(y+\dfrac{1}{b}\right)^2+y+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=0$

e) $d\left(y+\dfrac{c}{d}\right)^3-c\left(y+\dfrac{c}{d}\right)^2+b\left(y+\dfrac{c}{d}\right)-a=0$

f) $d\left(y-\dfrac{c}{d}\right)^3-c\left(y-\dfrac{c}{d}\right)^2+b\left(y-\dfrac{c}{d}\right)-a=0$

**AL - X. 149** Dacă $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ sunt rădăcinile ecuației $x^3+x^2-3=0$, să se precizeze care din ecuațiile următoare are drept rădăcini :

$$y_1=x_2+x_3,\ y_2=x_3+x_1,\ y_3=x_1+x_2.$$

a) $y^3-y+2=0$ b) $2y^3-y-1=0$ c) $2y^3+y+7=0$

d) $y^3+2y^2+y+3=0$ e) $y^3+y-2=0$ f) $y^3-2y^2+y-3=0$

**AL - X. 150** Ştiind că ecuația : $x^3-(a+2)x^2+2(a+2)x-8=0$, admite şi rădăcini independente de *a*, să se determine mulțimea tuturor valorilor lui *a* pentru care toate rădăcinile ecuației sunt strict pozitive.

a) $[-4,4]$ b) $(0,+\infty)$ c) $(-1,0)$ d) $[4,+\infty)$ e) $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$ f) $(-\infty,-4]$

**AL - X. 151** Să se rezolve ecuația : $x^3-2\left(1+\sqrt{2}\right)x^2+\left(1+4\sqrt{2}\right)x-2=0$, ştiind că ea admite rădăcina $1+\sqrt{2}$ .

a) $1+\sqrt{2},1-\sqrt{2},2$ b) $1+\sqrt{2},1-\sqrt{2},2\sqrt{2}$ c) $1+\sqrt{2},-1+\sqrt{2},2$

d) $1+\sqrt{2},-2,-2$ e) $1+\sqrt{2},1+\sqrt{2},1+\sqrt{2}$ f) $1+\sqrt{2},1-\sqrt{2},-2\sqrt{2}$

**AL – X. 152** Se consideră ecuația:

$$(m+1)x^3-\left(m^2+5m-5\right)x^2+\left(m^2+5m-5\right)x-(m+1)=0$$

Să se determine m ∈ **R** ştiind că ecuația are rădăcinile în progresie aritmetică cu rația nenulă şi $x_1$ nu depinde de m.

a) $m_1=-4$, $m_2=1$; b) $m_1=-7$, $m_2=\frac{1}{2}$; c) $m=-1$;

d) $m=-4$; e) $m_1=2$, $m_2=-4$; f) $m=2$

**AL - X. 153** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$ astfel ca ecuația $x^4-4x^3+ax^2+bx+17=0$ să aibă rădăcinile în progresie aritmetică.

a) $a = 2, b = -17$ b) $a = 12, b = -19$ c) $a = -52, b = 12$
d) $a = -14, b = 36$ e) $a = 21, b = 36$ f) $a = 52, b = 40$

**AL - X. 154** Fie ecuația $x^4 - 7x^3 + 17x^2 + mx + n = 0$. Să se rezolve şi să se afle m şi n ştiind că admite o rădăcină dublă şi că suma celorlalte două rădăcini este 5.

a) $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ m = -17,\ n = 6$
b) $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ m = 6,\ n = -17$
c) $x_1 = x_2 = 2,\ x_3 = 1,\ x_4 = 5,\ m = 1,\ n = 1$
d) $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 5,\ m = 3,\ n = 4$
e) $x_1 = x_2 = 3,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ m = -3,\ n = 3$
f) $x_1 = x_2 = 2,\ x_3 = 4,\ x_4 = 1,\ m = 3,\ n = -3$

**AL - X. 155** Să se rezolve ecuația: $x^3 - 2x^2 + \left(1 + 2\sqrt{2}\right)x + 2 = 0$, ştiind că admite rădăcina $1 - \sqrt{2}$.

a) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_{2,3} = \dfrac{1 + \sqrt{2} \pm i\sqrt{5 + 6\sqrt{2}}}{2}$
b) $x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_{2,3} = \dfrac{\pm i\sqrt{5 + 6\sqrt{2}}}{2}$
c) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = 1 + \sqrt{2}$
d) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{1 - \sqrt{2}}$
e) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{5 + 6\sqrt{2}}$
f) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{5 + 6\sqrt{2}}$

**AL - X. 156** Fie polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, unde

$$f = X^5 - 2X^4 + 2X^3 + aX^2 - 2aX + 4(a - 4),\ a \in \mathbf{R}.$$

Să se determine valorile lui $a$ pentru care are loc inegalitatea $\left|\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{x_k}\right| \le \frac{1}{2}$, unde $x_k$, $(k \in \{1,2,3,4,5\})$, sunt rădăcinile polinomului $f$.

a) $a \in (-\infty, 2]$ b) $a \in (-\infty, 3]$ c) $a \in (2, +\infty)$

d) $a \in [2, +\infty)$ e) $a \in [3, +\infty)$ f) $a \in \mathbf{R}$

**AL – X. 157** Pentru ce valori $n \in \mathbf{N}$ expresia $E = \dfrac{\lg 2 \cdot \lg 3 \ldots \lg n}{2^n}$ are valoare minimă ?

a) n = 1000 b) n = 101 c) n = 99 şi n = 100
d) n = 10 şi n = 20 e) n>100 f) Nu există $n \in \mathbf{N}$

**AL - X. 158** Să se determine valorile raţionale ale parametrilor *a* şi *b* astfel încât $1 + \sqrt{2}$ să fie rădăcină a ecuaţiei : $x^4 + ax^3 + bx^2 + 5x + 2 = 0$.

a) $a = -3, b = -1$ b) $a = 3, b = 1$ c) $a = -3, b = 1$
d) $a = 2, b = 1$ e) $a = -2, b = -1$ f) $a = -2, b = 1$

**AL - X. 159** Să se determine toate valorile parametrilor reali *a* şi *b* pentru care ecuaţia $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + ax + b = 0$ are cel mult două rădăcini reale.

a) $a = 1, b = 2$ b) $a \in \mathbf{R}, b = 5$ c) $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}, b = 2$
d) $a, b \in \mathbf{R}$ e) $a = -2, b = 3$ f) $a \neq 1, b \neq 3$

**AL - X. 160** Să se determine parametrul real *a* astfel încât ecuaţia :
$x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0$, să aibă toate rădăcinile reale.

a) $a \in (-\infty, 3]$ b) $a \in (-6, 3]$ c) $a \in (0, 1)$ d) $a \in (-\infty, -6]$ e) $a = 0$ f) $a = 1$

**AL – X. 161** Se consideră ecuaţia

$$x^4 - (2^m - 1)x^3 + 2^m x^2 - (2^m - 1)x + 1 = 0$$

Să se determine m $\in \mathbf{R}$ astfel încât ecuaţia să aibă două rădăcini reale, distincte, negative.

a) $m = \log_2 3$ b) $m = 2$ c) $m \in \phi$

d) $m<0$ e) $m \in (0,1)$ f) $m \in (2,\infty)$

**AL - X. 162** Precizați mulțimea *A* căreia îi aparține cel mai mic număr întreg *k* pentru care ecuația $x^4-2(k+2)x^2-12+k^2=0$ are numai două rădăcini reale distincte.

a) $A=\{-6,-5,-4\}$ b) $A=\{-2,-1,1\}$ c) $A=\{-3,2,7\}$
d) $A=\{-1,0,7\}$ e) $A=\varnothing$ f) $A=\{0,1,2\}$

**AL - X. 163** Să se determine toate polinoamele de gradul $n \in \mathbf{N}^*$, $P \in \mathbf{R}[X]$, care verifică identitatea :

$$P(1)+P(x)+P(x^2)+\ldots+P(x^n)=(1+x+x^2+\ldots+x^n)P(x),\ (\forall)x \in \mathbf{R}\ .$$

a) $k(x^2+1)$ b) $k(x^2-x)$ c) $k(x^3-x)$
d) $k(x^2+x)$ e) $k(x^4-3)$ f) $k(x^2-2)$

**AL - X. 164** Să se determine parametrii reali *m*, *n* şi *p* pentru care ecuațiile de gradul trei : $(m+1)x^3+(m+n+p-1)x^2+(3m-n-2p)x+3-m-2n-2p=0$ şi $x^3+x+1=0$ au aceleaşi rădăcini.

a) $m=n=p=1$ b) $m,n,p \in \phi$ c) $m=\dfrac{p+2}{3}, n=\dfrac{1-4p}{3},\ p \in \mathbf{R}$
d) $m=1-n-p,\ n,p \in \mathbf{R}$ e) $m=\dfrac{p+2}{3}, n=\dfrac{1-4p}{3},\ p \neq -5$
f) $m=\dfrac{p-2}{3}, n=\dfrac{4p-1}{3},\ p=-5$

**AL - X. 165** Să se determine parametrii reali *a*, *b* şi *c* ştiind că ecuațiile $x^4+ax^2+bx+2=0$ şi $x^3-3x+2c=0$ au o rădăcină dublă comună.

a) $a=-1, b=-2, c=1$; $a=-1, b=2, c=-1$  b) $a=1, b=2, c=2$  c) $a=-1, b=3, c=-1$; $a=1, b=-3, c=1$

d) $a=-2, b=3, c=-1$  e) $a=-1, b=3, c=1$; $a=1, b=2, c=-1$  f) $a=b=c=1$

**AL - X. 166** Să se determine suma coeficienților polinomului obținut din dezvoltarea

$$\left(10x^8-x^4-8\right)^{1997}.$$

a) 0  b) 1  c) $2^{1997}$  d) $10^{1997}$  e) $C_{1997}^{8}$  f) 1997

**AL - X. 167** Să se determine coeficientul lui $x^{1997}$ din expresia :

$E=(1+x)^{1997}+x(1+x)^{1996}+x^2(1+x)^{1995}+\ldots+x^{1996}(1+x)+x^{1997}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$.

a) 0  b) 1  c) 1996  d) 1998  e) 1997  f)1999

**AL - X. 168** Să se determine toate valorile lui $m\in\mathbf{R}$ astfel încât ecuația :

$x^4+x^3-2x^2+3mx-m^2=0$, să admită numai rădăcini reale.

a) $\phi$  b) $\left[-\frac{1}{4},-1\right]$  c) $\left[-1,\frac{1}{4}\right]$  d) $\left[-\frac{1}{4},1\right]$  e) $(-4,1]$  f) $\left[\frac{1}{4},2\right]$

**AL - X. 169** Să se rezolve ecuația

$$5x^5-4x^4+5x^3+5x^2-4x+5=0$$

a) $\left\{1;\frac{3\pm i\sqrt{21}}{5};\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$  b) $\left\{3;\frac{2\pm i\sqrt{21}}{5};\frac{1\pm i\sqrt{3}}{3}\right\}$  c) $\left\{-1;\frac{2\pm i\sqrt{21}}{5};\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$

d) $\left\{-1;\frac{1\pm i\sqrt{21}}{3};\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$  e) $\left\{-1;\frac{3\pm i\sqrt{3}}{2};\frac{1\pm i\sqrt{2}}{3}\right\}$  f) $\left\{-1;\frac{2\pm i\sqrt{3}}{3};\frac{1\pm i\sqrt{2}}{2}\right\}$

**AL - X. 170** Ştiind că ecuația

$2ax^5 + 2(a+b)x^4 + (2b+3)x^3 + 2ax^2 + (2a+b-2)x + b + 1 = 0$
este reciprocă să se calculeze suma rădăcinilor negative ale acesteia

a) –5 b) –6 c) $-\frac{9}{2}$ d) –1 e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{3}{2}$

**AL - X. 171** Determinați polinomul de grad minim cu coeficienți raționali care admite ca rădăcini $x_1 = -\frac{4}{1-\sqrt{5}}$ şi $x_2 = \frac{5}{2-3i}$.

a) $13X^4 + 46X^3 - 13X^2 + 30X + 100$ b) $13X^4 - 46X^3 + 13X^2 + 30X - 100$
c) $X^4 - 5X^2 + 129$ d) $X^4 + 10X^3 - X^2 + 5$
e) $X^4 - 3X^2 + 5X + 6$ f) $X^4 - 9X^2 + 81$

**AL - X. 172** Determinați modulul rădăcinilor ecuației
$$9x^4 + 8x^3 + 14x^2 + 8x + 9 = 0.$$

a) 2 b) 1 c) 3 d) 0 e) $\sqrt{2}$ f) $\sqrt{3}$

**AL - X. 173** Să se determine $a \in \mathbf{R}^*$ astfel încât ecuația $ax^3 - x^2 - (a+2)x - 2a = 0$ să aibă o rădăcină complexă de modul egal cu 1.

a) $a = 1$ b) $a = -1$ c) $a = 2$ d) $a = -2$ e) $a = \frac{1}{2}$ f) $a = -\frac{1}{2}$

**AL - X. 174** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuația $x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0$ să aibă numai două rădăcini reale.

a) $a \in (-\infty, 2)$ b) $a \in (2, +\infty)$ c) $a \in (2, 3]$ d) $a \in (1, +\infty)$ e) $a \in (-6, 2]$ f) $a \in \phi$

**AL - X. 175** Calculați $E = \left|\overline{z_1} z_2 + 1\right|^2 + \left|z_1 \overline{z_2} - 1\right|^2$ pentru numerele complexe $z_1$ şi $z_2$ ($\overline{z}$ fiind complexul conjugat numărului z)

a) $2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ b) $2\left(1+|z_1z_2|^2\right)$ c) $2\left(1+|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right)$

d) $2|z_1z_2|^2$ e) $\left(1+|z_1|^2\right)\left(|z_1|^2-1\right)$ f) $2\left(1+|z_1|^2-|z_2|^2\right)$

**AL - X. 176** Să se găsească valorile reale ale lui m pentru care numărul
$3i^{43}-2mi^{42}+(1-m)i^{41}+5$ este real $\left(i^2=-1\right)$

a) $m=-1$ b) $m=-2$ c) $m=-\dfrac{5}{2}$ d) $m=3$ e) $m=1$ f) $m=0$

**AL - X. 177** Să se calculeze valoarea expresiei $E=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1996}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{1996}$

a) i b) 2 c) –i d) –2 e) 2i f) –2i

**AL - X. 178** Precizați partea imaginară a numărului complex

$$\frac{1}{4+3i}+\frac{(2-i)^2}{1+i}-\frac{i}{4i-3}+\frac{6}{2-i}.$$

a) $-\dfrac{23}{10}i$ b) $-\dfrac{29}{10}i$ c) $\dfrac{19}{10}i$ d) $\dfrac{10}{13}i$ e) $-\dfrac{33}{10}i$ f) $-\dfrac{10}{33}i$

**AL - X. 179** Să se determine $\alpha\in\mathbf{R}$ astfel încât numărul complex $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{\alpha+(\alpha+1)i}$ să fie real.

a) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$ d) $\dfrac{2\sqrt{3}+1}{4}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ f) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$

**AL – X. 180** Fie $z_1,z_2\in\mathbf{C}$ şi $x+iy=\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ . Atunci avem:

a) $x=\dfrac{|z_1|^2+|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}$ , $y=\dfrac{|z_1z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}$ b) $x=\dfrac{z_1^2+z_2^2}{z_1^2-z_2^2}$, $y=i\dfrac{2z_1\overline{z_2}}{z_1^2-z_2^2}$

c) $x=\dfrac{|z_1|^2+|z_2|^2}{|z_1+z_2|^2}$, $y=i\dfrac{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2}{|z_1+z_2|^2}$ d) $x=\dfrac{|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}$, $y=i\dfrac{z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2}{|z_1-z_2|^2}$

e) $x=\dfrac{|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}$ , $y=\dfrac{\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}}{|z_1-z_2|^2}$ f) $x=\dfrac{|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}$, $y=\dfrac{|z_1z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}$

**AL - X. 181** Să se calculeze $|z|$ dacă $z=\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^4$.

a) 1 b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 16 e) 4 f) 6

**AL – X. 182** Fie $z_1 = a+bi$, cu $a,b\in\mathbf{R}^*$ şi $z_2=\dfrac{1-\overline{z_1}}{1+\overline{z_1}}$, două numere complexe.

Atunci $z_1 - z_2$ şi $z_2^2$ sunt reale dacă $z_1$ are una dintre expresiile:

a) $\pm$ i; b) 1+i; c) 1-i; d) 1-2i; e) 3-5i; f) 1+2i

**AL - X. 183** Să se determine numerele complexe $z$ astfel încât $4z^2+8|z|^2-3=0$.

a) $z\in\left\{1\pm i,\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ b) $z\in\left\{\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$ c) $z\in\left\{\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\pm\dfrac{1}{2}\right\}$

d) $z\in\left\{\pm\dfrac{1}{2}i,\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ e) $z\in\left\{-1\pm i,\dfrac{2\pm i\sqrt{5}}{2}\right\}$ f) $z\in\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{2},\dfrac{2i-5}{3},\dfrac{i+7}{2}\right\}$

**AL – X. 184** Să se precizeze cu care din valorile date mai jos este egal $z=\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

a) $z=1+i$ b) $z=2$ c) $z=1-i$ d) $z=-i$ e) $z=i$ f) $z=2+i$

**AL - X. 185** Căreia din mulţimile de mai jos aparţine $\alpha=\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}$ , pentru $z\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$ ?

**N** b) **Z** c) **Q** d) **R** e) $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ f) $\mathbf{R}\setminus\{0\}$

**AL - X. 186** Să se determine toate numerele complexe $z\in\mathbf{C}$ care verifică ecuaţia $|z|-z=1+2i$.

a) $z=-\frac{1}{2}+i$ b) $z_1=-\frac{1}{2}+i,\ z_2=\frac{3}{2}-2i$ c) $z_1=0, z_2=\frac{3}{2}+2i$

d) $z=\frac{3}{2}-2i$ e) $z_1=0,\ z_2=-\frac{1}{2}+i$ f) $z=\frac{5}{2}+3i$

**AL - X. 187** Să se afle numerele complexe $z=x+iy,\ \ x,y\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, de modul $\sqrt{2}$ , astfel încât $\left(x+iy^2\right)^3$ să fie imaginar.

a) $z\in\{1\pm i,-1\pm i\}$ b) $z\in\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1\pm\sqrt{3}\right),\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1\pm i\sqrt{3}\right)\right\}$

c) $z\in\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1\pm i\sqrt{5}\right),\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-1\pm i\sqrt{5}\right)\right\}$ d) $z\in\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}\pm i\right),\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{3}\pm i\right)\right\}$

e) $z\in\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\pm i\sqrt{2}\right),\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-2\pm i\sqrt{2}\right)\right\}$ f) $z\in\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{5}\pm i\right),\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\sqrt{5}\pm i\right)\right\}$

**AL - X. 188** Fie $a \in \mathbf{R}_+$ şi $z \in \mathbf{C}$, astfel încât $\left|z + \frac{1}{z}\right| = a$. Să se determine cea mai mare şi cea mai mică valoare posibilă a lui $|z|$.

a) $\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}, 0$  b) $a, 0$  c) $\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}, \frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}$

d) $2+\sqrt{a^2+4}, \sqrt{a^2+4}-2$  e) $\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}, \frac{\sqrt{a^2+4}-a-1}{2}$  f) $\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}$

**AL - X. 189** Fie $z$ un număr complex astfel încât $|z-a| = \sqrt{a^2-b^2}$, unde, $a > b > 0$. Să se calculeze $\left|\frac{b-z}{b+z}\right|$.

a) $a$  b) $\sqrt{1-\frac{b}{a}}$  c) $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$  d) $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$  e) $\sqrt{1+\frac{b}{a}}$  f) $\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$

**AL - X. 190** Fie $a \in \mathbf{C}$. Să se calculeze valoarea expresiei

$$E(a) = \left|a + \frac{1}{2}\right|^2 + i\left|a + \frac{i}{2}\right|^2 - (1+i)|a|^2 - \frac{1}{4}(1+i).$$

a) 1- a  b) 1+a  c) a
d) 2a  e) 1  f) 0

**AL - X. 191** Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Să se calculeze :

$$E = (1+\varepsilon)\left(1+\varepsilon^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\varepsilon^{1997}\right).$$

a) $E = 1$  b) $E = 2$  c) $E = 2^{663}$  d) $E = 2^{1997}$  e) $E = 2^{665}$  f) $E = 4$

**AL - X. 192** Pentru $x \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ care satisface ecuația $x + \frac{1}{x} = -1$,

să se calculeze valoarea expresiei

$$E = x^{333} + \frac{1}{x^{333}}.$$

a) E=1 b) E=2 c) E=-3 d) E=i e) E=2i f) E=3i

**AL - X. 193** Fie α și β rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$. Să se calculeze $\alpha^{2000} + \beta^{2000}$.

a) 1 b) 0 c) $-1$ d) $i\sqrt{3}$ e) $-i\sqrt{3}$ f) 2

**AL - X. 194** Fie z un număr complex de modul 1 și argument $\theta$.
Să se calculeze expresia

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}}, \ (n \in \mathbf{N}).$$

a) $2\cos n\theta$ b) $\cos n\theta$ c) $2\sin n\theta$

d) $\frac{1}{2\cos n\theta}$ e) $\frac{1}{\cos n\theta}$ f) $\frac{1}{2\sin n\theta}$

**AL - X. 195** Precizați care din valorile de mai jos sunt rădăcinile ecuației
$z^2 - 2i\sqrt{3}z - 5 = 0$.

a) $z = 2 \pm i\sqrt{3}$ b) $z = \pm\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ c) $z = -\sqrt{3} \pm i\sqrt{2}$

d) $z = -\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ e) $z = \sqrt{3} \pm i\sqrt{2}$ f) $z = -\sqrt{3} \pm i\sqrt{3}$

**AL - X. 196** Soluția ecuației $z^2 + (5-2i)z + 5(1-i) = 0$ este:

a) $i-3, i-2$; b) $3i, 2-i$; c) $2i, 3-i$;

d) $2-i, 3-i$; e) $5-2i, 1-i$; f) $2i, 3i$

**AL - X. 197** Se consideră ecuația $(2-i)z^2-(7+4i)z+6+mi=0$, în care $z\in\mathbf{C}$ este necunoscuta, iar *m* este un parametru real. Să se determine valorile lui *m* pentru care ecuația admite o rădăcină reală.

a) $m\in\left\{-12,\frac{33}{5}\right\}$ b) $m=32$ c) $m\in\{2,5\}$

d) $m\in\left\{12,\frac{33}{4}\right\}$ e) $m\in\left\{0,\frac{33}{5}\right\}$ f) $m\in\left\{2,\frac{31}{2}\right\}$

**AL - X. 198** Formați ecuația de grad minim, cu coeficienți reali, care admite ca rădăcini şi rădăcinile ecuației : $z^2-3\sqrt{2}\,z+5+\sqrt{2}\,i=0$.

a) $z^3-6\sqrt{2}\,z^2+2z+27=0$ b) $z^4-6\sqrt{2}\,z^3+28z^2-30\sqrt{2}\,z+27=0$

c) $z^4+2\sqrt{2}\,z^3-4z^2-6\sqrt{2}\,z+27=0$ d) $z^4-\sqrt{2}\,z^2+28z+27=0$

e) $z^4+\sqrt{2}\,z^3-28z^2-27=0$ f) $z^4-6\sqrt{2}\,z^2+30\sqrt{2}\,z+27=0$

**AL - X. 199** Se dă ecuația $2z^2-\left(5+i\sqrt{3}\right)z+2\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$. Fie $\alpha$ o rădăcină a ecuației pentru care $|\alpha|=1$. Să se determine $x\in\mathbf{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea

$$\frac{1+ix}{1-ix}=\alpha .$$

a) $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $x=-\sqrt{3}$ d) $x=\sqrt{3}$ e) $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ f) $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

**AL - X. 200** Să se afle numărul rădăcinilor reale ale ecuației $(1+iz)^5=m(1-iz)^5$ unde $m\in\mathbf{C}$, $|m|=1$.

C-$\{-1\}$

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5; f) 0

**AL - X. 201** Pentru $z\in\mathbf{C}$ să se determine soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \left|z^2 - 2i\right| = 4 \\ \left|\dfrac{z+1+i}{z-1-i}\right| = 1 \end{cases}.$$

a) $z_1 = 1,\ z_2 = 1 - i$ b) $z_1 = 1 - i,\ z_2 = -1 + i$ c) $z_1 = 1 - i,\ z_2 = 0$

d) $z_1 = 0,\ z_2 = -1 + i$ e) $z_1 = i,\ z_2 = 0$ f) $z_1 = -i,\ z_2 = 1 + i$

**AL - X. 202** Să se calculeze rădăcina pătrată din numărul complex

$$z = -3 + 4i,\ \left(i = \sqrt{-1}\right).$$

a) $2 + i,\ 2 - i$ b) $1 + 2i,\ -1 + 2i$ c) $1 + 2i,\ -1 - 2i$

d) $-2 + i,\ 2 + i$ e) $1 - 2i,\ -1 - 2i$ f) $2 - i,\ -1 - 2i$

**AL - X. 203** Să se calculeze rădăcinile de ordinul n=3 ale lui $z = \dfrac{1+i}{1-i}$.

a) $z_1 = i,\ z_2 = -i,\ z_3 = 1$ b) $z_1 = 1,\ z_2 = -1,\ z_3 = -i$

c) $z_1 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right),\ z_2 = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + i\right),\ z_3 = -i$ d) $z_1 = z_2 = z_3 = -i,$

e) $z_1 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}i\right),\ z_2 = \dfrac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}i\right),\ z_3 = -i$ f) $z_1 = z_2 = z_3 - 1,$

**AL - X. 204** Să se determine toate rădăcinile complexe ale ecuației $z^4 + 81 = 0$.

a) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(1 \pm i),\ -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1 \pm i),\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1 \pm i)$ c) $2(1 \pm i),\ -2(1 \pm i)$

d) $\sqrt{2}(1 \pm i),\ -\sqrt{2}(1 \pm i)$ e) $\sqrt{2} \pm i,\ -\sqrt{2} \pm i$ f) $\pm 3i,\ \mp 3i$

**AL - X. 205** Fie mulțimile :

$A = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$, $B = \left\{z \in \mathbf{C}^* \mid \arg z < \dfrac{2\pi}{3}\right\}$

$C = \{z \in \mathbf{C} \mid |z+1| \le 1\}$; $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - i| \le 2\}$;

$E = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z = 2\}$, $F = \left\{z \in \mathbf{C}^* \mid \dfrac{2\pi}{3} < \arg z < \dfrac{5\pi}{4}\right\}$

Să se precizeze care dintre următoarele afirmații sunt corecte.

a) A este discul de centru 0 şi rază 1;
B este mulțimea punctelor din semiplanul y>0,
C este cercul de centru A(-1,0) şi rază 1;
D este cercul de centru A(0,1) şi rază 2
E este o dreaptă paralelă cu axa Oy;
F este $Int\left(\widehat{AOB}\right)$ unde $A\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ şi $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

**AL – X. 206** Să se determine modulul şi argumentul redus pentru numărul complex: z = cosa +sina + i(sina- cosa).

a) $|z|=\sqrt{2}, \arg z=\frac{\pi}{4}$

b) $|z|=\sqrt{2}$ , $\arg z=a-\frac{\pi}{4}$

c) $|z|=2\left|\cos\frac{a}{2}\right|, \arg z=\frac{\pi}{4}$

d) $|z|=2\left|\cos\frac{a}{2}\right|, \arg z=a-\frac{\pi}{4}$

e) $|z|=2, \arg z=\frac{\pi}{4}$

f) $|z|=2, \arg z=a-\frac{\pi}{4}$

**AL – X. 207** Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex : $z = 1+\cos\alpha - i\sin\alpha$, unde $\alpha\in(0,\pi)$.

a) $z=2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

b) $z=\cos\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

c) $z=4\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

d) $z=\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}$

e) $z=\cos\alpha(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

f) $z=2\cos\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

**AL – X. 208** Determinați partea reală a numărului complex $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{2(\sin\alpha+i\cos\alpha)}$.

a) $\operatorname{Re} z=\sin\left(\frac{7\pi}{3}-\alpha\right)$

b) $\operatorname{Re} z=\cos\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)$

c) $\operatorname{Re} z=\cos\frac{5\pi}{3}$

d) $\operatorname{Re} z = \sin\left(\frac{7\pi}{6} + \alpha\right)$  e) $\operatorname{Re} z = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$  f) $\operatorname{Re} z = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

**AL – X. 209** Să se determine modulul şi argumentul redus pentru numărul complex:

$$z = \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{16}.$$

a) $|z| = \sqrt{2}, \arg z = \frac{2\pi}{3}$  b) $|z| = 2, \arg z = \frac{2\pi}{3}$  c) $|z| = 2, \arg z = \frac{\pi}{3}$

d) $|z| = \sqrt{2}, \arg z = \frac{\pi}{3}$  e) $|z| = 2^8, \arg z = \frac{2\pi}{3}$  f) $|z| = 2^8, \arg z = \frac{\pi}{3}$

**AL – X. 210** Să se scrie sub forma z = x + iy numărul complex : $z = \frac{3 - i\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3} + i\right)^7}$ .

a) $\frac{\sqrt{3}}{2^7}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$  b) $\frac{1}{128}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$  c) $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) i  e) $\frac{1}{128}\left(\sqrt{3} + i\right)$  f) $\frac{1}{128}\left(\sqrt{3} - i\right)$

**AL – X. 211** Să se determine numărul complex: $Z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^n + \left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$, n∈**N** .

a) $Z = 2^n \cos\frac{n\pi}{3}$  b) $Z = 2^{n+1} \sin\frac{n\pi}{3}$  c) $Z = 2^{n+1} \cos\frac{n\pi}{3}$

d) $Z = 2^n \sin\frac{n\pi}{3}$  e) $Z = 2^{n+1}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$  f) $Z = 2^{n+1}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

**AL – X. 212** Ştiind că $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$ .Să se calculeze expresia: $E = z^n + \frac{1}{z^n}$, n∈**N**.

a) $E = 2\cos n\alpha$  b) $E = 2i\sin n\alpha$  c) $E = 2\sin n\alpha$

d) E = $\cos n\alpha$ e) E = $2i\cos n\alpha$ f) E = $\sin n\alpha$

**AL – X. 213** Se notează cu $z_1$ şi $z_2$ rădăcinile complexe ale ecuației: $z^3+1=0$. Să se determine valorile posibile pe care le poate lua expresia: $E(n)=z_1^n+z_2^n$ , când n ia valori întregi pozitive.

a) $\{E(n) \mid n\in \mathbf{N}\}=\{0,\pm 1\}$ b) $\{E(n) \mid n\in \mathbf{N}\}=\{0,1,2\}$

c) $\{E(n) \mid n\in \mathbf{N}\}=\{\pm 1,\pm 2\}$ d) $\{E(n) \mid n\in \mathbf{N}\}=\mathbf{Z}$

e) $\{E(n) \mid n\in \mathbf{N}\}=\{\pm 2\}$ f) $\{E(n) \mid n\in \mathbf{N}\}=\mathbf{N}$

**AL – X. 214** Să se determine toate solițiile ecuației $\overline{z}=z^{n-1}$, oricare ar fi numărul natural n ≥ 2.

a) z = 1+ i b) z = 1± i c) z = i d) $z_1 = 0$, $z_2 = i$

e) $z_1=0,\ z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k\in\overline{0,n-1}$ f) $z_1=1+i\sqrt{3}, z_2=1-i\sqrt{3}$

**AL – X. 215** Să se determine rădăcinile $z_k$ , $k\in\overline{0,5}$ ale ecuaşiei: $z^6 = i$.

a) $z_k=\cos\frac{k\pi}{11}+i\sin\frac{k\pi}{11}$, $k=\overline{0,5}$ b) $z_k=\cos\frac{4k+1}{12}\pi+i\sin\frac{4k+1}{12}\pi$, $k=\overline{0,5}$

c) $z_k\cos\frac{k\pi}{7}\pi+i\sin\frac{k\pi}{7}\pi$, $k=\overline{0,5}$ d) $z_k=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$, $k=\overline{0,5}$

e) $z_k=\cos\frac{k\pi}{13}+i\sin\frac{k\pi}{13}, k=\overline{0,5}$ f) $z_k=\cos\frac{2k+1}{12}\pi+i\sin\frac{2k+1}{12}\pi, k=\overline{0,5}$

**AL – X. 216** Fie ω o rădăcină complexă a ecuației: $z^n = 1$, $n\in N^*$, n ≥ 2. Să se precizeze valoarea expresiei: $S=1+2\omega+3\omega^2+\ldots+n\omega^{n-1}$.

a) $S=\frac{1}{\omega-1}$ b) $S=\frac{1}{1-\omega}$ c) $S=\frac{n}{\omega-1}$

d) $S=\dfrac{n}{1-\omega}$ e) $S=n\cdot\omega$ f) $S=\dfrac{n\omega}{\omega-1}$

**AL – X. 217** Să se determine rădăcinile ecuației: $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^n=\cos t+i\sin t$ în care $n\in\mathbf{N}^*$, $x,t\in\mathbf{R}$.

a) $x_k=tg\dfrac{t+2k\pi}{2n},\ k=\overline{0,n-1}$ b) $x_k=tg\dfrac{t+k\pi}{2n},\ k=\overline{0,n-1}$

c) $x_k=tg\dfrac{t+k\pi}{n},k=\overline{0,n-1}$ d) $x_k=\sin\dfrac{t+2k\pi}{2n},k=\overline{0,n-1}$

e) $x_k=\cos\dfrac{t+2k\pi}{2n},k=\overline{0,n-1}$ f) $x_k=\sin\dfrac{t+k\pi}{n},k=\overline{0,n-1}$

**AL – X. 218** Precizați numărul maxim de rădăcini comune ale ecuaților: $z^8=1$ şi $z^{12}=1$.

a) nici una b) una c) două d) patru e) trei f) opt

**AL – X. 219** Fie $z_i,\ i=\overline{1,4}$ soluțiile ecuației: $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^4=\dfrac{1+a\cdot i}{1-a\cdot i}$, $a\in\mathbf{R}^*$.

Care este valoarea produsului $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4$ ?

a) 1 b) 2 c) –1 d) 3 e) –3 f) –2

**AL – X. 220** Să se calculeze expresia:

$$E=1+3\left(\cos t+i\sin t\right)+3\left(\cos t+i\sin t\right)^2+\left(\cos t+i\sin t\right)^3\ .$$

a) $\cos\dfrac{3t}{2}+i\sin\dfrac{3t}{2}$ b) $8\cos\dfrac{3t}{2}$ c) $8\cos^3\dfrac{t}{2}\left(\cos\dfrac{3t}{2}+i\sin\dfrac{3t}{2}\right)$

d) $8\sin\frac{3t}{2}$ e) $\cos^3\frac{t}{2}\left(\cos\frac{3t}{2}+\sin\frac{3t}{2}\right)$ f) $\cos\frac{3t}{2}-i\sin\frac{3t}{2}$

**AL – X. 221** Să se afle poziția celui de al treilea vârf al triunghiului echilateral, ştiind că afixele a două vârfuri sunt: $z_1 = 1$, $z_2 = 2+i$.

a) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ c) 3+i

d) $i$ e) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ şi $\frac{3+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ f) $1+i$

**AL – X. 222** Fie $M_1$ , $M_2$ , $M_3$ , $M_4$ puncte ale căror afixe sunt, respectiv,

$z_1 = 2-i\sqrt{3}$, $z_2 = 2+i\sqrt{3}$ , $z_3 = -\sqrt{6}+i$, $z_4 = -\sqrt{6}-i$ . Care din afirmațiile următoare este adevărată

a) $M_1$ , $M_2$ , $M_3$, $M_4$ sunt coliniare b) $M_1$ , $M_2$ , $M_3$ , $M_4$ sunt conciclice
c) patrulaterul $M_1M_2M_3M_4$ nu este inscriptibil
d) patrulaterul $M_1M_2M_3M_4$ este un pătrat
e) $M_1M_2 = M_3M_4$
f) patrulaterul $M_1M_2M_3M_4$ este romb.

**AL – X. 223** Să se determine valorile expresiilor:

$$S_1 = 1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

$$S_2 = \sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n},\ n\in\mathbf{N}$$

a) $S_1 = S_2 = 1$ b) $S_1 = 0$, $S_2 = 1$ c) $S_1 = S_2 = -1$
d) $S_1 = S_2 = 0$ e) $S_1 = -1$, $S_2 = 0$ f) $S_1 = 0$, $S_2 = -1$

**AL – X. 224** Se dau numerele complexe: $z_1 = \sin\alpha-\cos\alpha+i(\sin\alpha+\cos\alpha)$ şi $z_2 = \sin\alpha+\cos\alpha+i(\sin\alpha-\cos\alpha)$, unde $\alpha$ este parametrul real dat. Să se găsească numerele n pentru care $(z_1\cdot z_2)^n$ este un număr real şi pozitiv.

a) $n = 3p,\ p\in \mathbf{N}$ b) $n = 2p,\ p\in\mathbf{N}$ c) $n = 2p+1,\ p\in \mathbf{N}$
d) $n = 4p,\ p\in\mathbf{N}$ e) $n = 4p + 1,\ p\in \mathbf{N}$ f) $n = 3p + 1,\ p\in \mathbf{N}$

**AL – X. 225** Numerele complexe $z_1$ şi $z_2$ satisfac relația: $|z_1 + z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ .

Care din afirmațiile următoare este adevărată ?

a) $z_1 = 0,\ z_2 = 1- i$ b) $z_1 = z_2 = 2+3i$ c) $|z_1| = 0, |z_2| > 0$

d) $|z_1|>2$ şi $|z_2|>2$ e) cel puțin unul din cele două numere are modulul mai mic sau egal cu 2. f) $|z_1|>2,\ |z_2| = 0$

**AL – X. 226** Fie $z \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$, $w = \dfrac{z}{|z|} + \dfrac{|z|}{z}$ şi Im($w$) -partea imaginară a numărului $w$.

Care dintre afirmațiile următoare este adevărată ?

a) Im($w$)>0 b) Im($w$)< 0 c) dacă $z = i$ atunci $w \neq 0$
d) $w \neq 0$ pentru orice $z\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$
e) $w \in\mathbf{R}$ şi există a,b$\in$ $\mathbf{R}$ astfel încât $z^2 = az + b$
Dacă $z = -i$, atunci $w = i$.

**AL – X. 227** Determinați mulțimea tuturor punctelor din plan ale căror afix y verifică relația: $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbf{R}$ .

a) axa reală mai puțin originea b) cercul cu centrul în origine şi raza 2
c) cercul cu centrul în origine şi raza 1 d) axa imaginară
e) axa reală fără origine reunită cu cercul cu centrul în origine de rază 1
f) axa imaginară reunită cu cercul cu centrul în origine de rază 2

**AL – X. 228** Considerăm două numere complexe $z_1$ , $z_2 \in\mathbf{C}^*\setminus\mathbf{R}$ astfel încât: $z_1\overline{z_2} = |z_1|\cdot|z_2|$ . Ce putem afirma despre imaginile lor ?

a) sunt coliniare cu originea b) sunt conciclice cu originea c) coincid
d) împreună cu originea formează vârfurile unui triunghi nedegenerat
e) imaginea lui $z_1$ coincide cu imaginea lui $\dfrac{1}{z_2}$
f) împreună cu originea formează un triunghi isoscel.

**AL – X. 229** Vârfurile A, B, C ale unui triunghi au afixele $1,\ 1+z,\ 1+z+z^2$, unde $z=r\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ cu $r\in(0,1)$. Precizați poziția originii O (0,0) față de laturile triunghiului.

a) $O\in[AB]$ b) $O\in[AC]$ c) $O\in[BC]$
d) O aparține interiorului triunghiului
e) O aparține exteriorului triunghiului
f) O este centrul cercului înscris în triunghiul ABC

**AL – X. 230** Să se calculeze : $E=\left(\dfrac{1+i\mathrm{tg}t}{1-i\mathrm{tg}t}\right)^n$, $t\in \mathbf{R}-\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$, $n\in\mathrm{N}^*$.

a) $\dfrac{\mathrm{tg}nt+i}{\mathrm{tg}nt-i}$ b) $\dfrac{1+i\mathrm{tg}nt}{1-i\mathrm{tg}nt}$ c) $\dfrac{1+i\mathrm{ctg}nt}{1-i\mathrm{ctg}nt}$

d) $\dfrac{\mathrm{ctg}nt+i}{\mathrm{ctg}nt-i}$ e) $\mathrm{ctg}nt+i$ f) $1+i\mathrm{tg}nt$

# CLASA a XI-a

**MATEMATICĂ , clasa a XI – a**
**ALGEBRĂ SUPERIOARĂ**
**(simbol AL - XI)**

**AL - XI. 001** Se dau matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 0,(3) \\ -0,5 & 1,4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 0,(6) \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Să se calculeze matricea C = A + B.

a) $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $C=\begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $C=\begin{pmatrix} 2 & 0,(3) \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $C=\begin{pmatrix} 0,(6) & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ f) $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

**AL - XI. 002** Se dau matricele pătratice de ordinul al doilea $E=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ şi $F=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze matricea

A = 2E – 3F

a) $A=\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} -13 & 12 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} 13 & -12 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ e) $A=\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$ f) $A=\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$

**AL - XI. 003** Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Z})$.

Dacă $f(x)=3x$ să se calculeze $f(A)$.

a) $f(A)=\begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}$ b) $f(A)=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 6 & 1 & -1\\ 9 & -1 & 3\end{pmatrix}$ c) $f(A)=\begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\ 6 & 3 & -3\\ 9 & -3 & 9\end{pmatrix}$

d) $f(A)=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 9\end{pmatrix}$ e) $f(A)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 6\\ 2 & 3 & -1\\ 9 & -1 & 3\end{pmatrix}$ f) $f(A)=I_3$

**AL - XI. 004** Să se calculeze produsul de matrice A·B, unde

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix}7\\ 11\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}11 & 7\\ 3 & 6\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}11 & 7 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}11\\ 7\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}11 & 7 & 3\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}11\\ 7\\ 3\end{pmatrix}$

**AL - XI. 005** Să se rezolve ecuația matriceală:

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 7\end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**AL - XI. 006** Să se rezolve ecuația matriceală:

$$X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

**AL - XI. 007** Să se rezolve ecuația matriceală

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ e) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ f) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

**AL - XI. 008** Aflați $a \in \mathbf{R}$ astfel ca matricea diagonală constantă

$X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ să fie soluția comună a ecuațiilor matriceale

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \text{ şi } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$$

a) $a = \dfrac{3}{10}$ b) $a = \dfrac{2}{10}$ c) $a = \dfrac{1}{10}$

d) $a = \dfrac{10}{3}$ e) $a = \dfrac{10}{2}$ f) $a = 10$

**AL - XI. 009** Să se determine toate matricile *X*, cu proprietatea că $AX = XA$, unde $A = \begin{pmatrix} 1\,2 \\ 3\,1 \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$; $\alpha \in \mathbf{R}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 3\alpha & 1 \end{pmatrix}$; $\alpha \in \mathbf{R}$ e) $\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ 3\beta & \alpha \end{pmatrix}$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ f) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

**AL - XI. 010** Să se determine matricea *X* care verifică relația: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ e) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ f) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

**AL - XI. 011** Care este valoarea parametrului $a\in\mathbf{R}$ pentru care există $x,y,z,t\in\mathbf{R}$, nu toți nuli, astfel încât $x\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & a-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ?

a) $a=1$ b) $a=0$ c) $a=-1$ d) $a=2$ e) $a=-2$ f) $a=4$

**AL - XI. 012** Să se determine constantele reale $p$ şi $q$ pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ satisface relația $A^3=pA^2+qA$ .

a) $p=-2$ , $q=3$ b) $p=3$ , $q=-2$ c) $p=1$ , $q=4$
d) $p=-2$ , $q=-3$ e) $p=2$ , $q=1$ f) $p=1$ , $q=3$

**AL - XI. 013** Să se rezolve ecuația matriceală $X\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}$.

a) $X=\begin{pmatrix}6 & -31 & -5\\ 4 & -12 & -14\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}6 & -32 & -21\\ 4 & -23 & -14\end{pmatrix}$ c) $X=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$

d) $X=\begin{pmatrix}6 & 4\\ -31 & 2\\ 5 & -11\end{pmatrix}$ e) $X=\begin{pmatrix}5 & -31 & 4\\ 4 & -12 & 10\end{pmatrix}$ f) $X=\begin{pmatrix}6 & -32 & 21\\ 4 & -23 & 14\end{pmatrix}$

**AL - XI. 014** Să se determine matricea $X$ care verifică ecuația

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\mathrm{X}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 12 & -6 & -9\end{pmatrix}.$$

a) $X=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$  b) $X=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$  c) $X=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\ 5 & 1 & 4\end{pmatrix}$

d) $X=\begin{pmatrix}5 & 0 & 3\\ -3 & -2 & 4\end{pmatrix}$  e) $X=\begin{pmatrix}5 & -2 & -4\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix}$  f) $X=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

**AL – XI. 015** Să se rezolve ecuația matricială

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & 4 & -5\end{pmatrix}$$

a) $X=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4 & 4 & -8\\ -9 & 16 & -1\\ -4 & 24 & -16\end{pmatrix}$;  b) $X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 4 & 8\\ 9 & 16 & 1\\ 4 & 24 & 16\end{pmatrix}$

c) $X=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 4 & 8\\ 9 & -16 & 1\\ 4 & -24 & 16\end{pmatrix}$;  d) $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$

e) $X=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -4 & -8\\ 9 & 16 & 1\\ 4 & 24 & -16\end{pmatrix}$;  f) $X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$

**AL –XI. 016** Să se determine toate matricile formate cu elemente din codul binar

**B**= $\{0,1\}$ care să transforme prin înmulţire matricea coloană $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ în matricea coloană $\begin{pmatrix}3\\1\\2\\4\end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

**AL - XI. 017** Să se rezolve ecuaţia: $X^2 = \begin{pmatrix}1&12\\-4&1\end{pmatrix}$, $X \in M_2(\mathbf{Z})$.

a) $X = \begin{pmatrix}2&3\\-1&2\end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix}-2&-3\\1&-2\end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix}2&3\\-1&2\end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix}-2&-3\\1&-2\end{pmatrix}$

d) $X=\begin{pmatrix} i\sqrt{3} & -\dfrac{6i}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{2i}{\sqrt{3}} & i\sqrt{3} \end{pmatrix}$ e) $X=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ f) $X=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

**AL - XI. 018** Să se determine toate matricile $X \in M_2(\mathbf{Z})$ astfel ca: $X^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

**AL - XI. 019** Se dau matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} m & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ cu $m \in \mathbf{R}$.. Să se determine valorile lui $m \in \mathbf{R}$ astfel încât să existe trei constante nu toate nule, $a,b,c \in \mathbf{R}$ cu condiţia $aA+bB+cC=0$, 0 - matricea nulă.

a) $m=1$ b) $m=0$ c) orice $m \in \mathbf{R}$ d) $m \in \varnothing$ e) $m=\dfrac{5}{4}$ f) $m=-\dfrac{5}{4}$

**AL - XI. 020** Să se calculeze suma: $\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} 1 & k & k^2 & k^3 \\ -1 & 2 & 3 & k(k+1) \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} n & \dfrac{n(n+1)}{2} & \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 \\ -n & 2n & 3n & \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} n & n! & 2n! & 3n! \\ -n & 2n & 3n & 3n! \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} n & \dfrac{n(n+1)}{2} & \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \dfrac{n(n+1)}{3} \\ -n & 2n & 3n & 3n! \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & n & n^2 & n^3 \\ -1 & 2 & 3 & n(n+1) \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} n! & (2n)! & (3n)! & (4n)! \\ -n! & 2! & 3! & (6n)! \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & n! & n^2 & n^3 \\ -n & 2n & 3n & 3n! \end{pmatrix}$

**AL – XI. 021** Dacă $\omega = \frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ iar $A = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega^2 & 1 \end{pmatrix}$, să se determine numărul $a_n \in$ **R** astfel încât să avem

$$A^2 + A^3 + ... + A^n = a_n \cdot A, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

a) $2^n + 2$ b) $2^{n-1} - 2$ c) $2^n - 2$

d) $2^{n-1} + 2$ e) $2^{n-1} - 1$ f) $2^{n-1} + 1$.

**AL - XI. 022** Dacă ω este o rădăcină a ecuației $x^2+x+1 = 0$ şi $n = 3p$, $p \in \mathbf{N}^*$, să se calculeze suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \omega^k & \omega^{2k} & \omega^{3k} \\ \omega^{3k} & \omega^{2k} & \omega^k \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & n \\ n & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & n \\ n & -1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & n \\ n & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^2 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$

**AL – XI. 023** Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde ε este o rădăcină cubică complexă a unității şi fie ecuația matriceală AX = B. Fie S suma modulelor elementelor matricei X. Atunci :

a) S = 4; b) S = 16; c) S = 3;

d) S = $1+\sqrt{3}$ ; e) S = $1-\sqrt{3}$ ; f) S = $2+\sqrt{3}$

**AL – XI. 024** Fie M mulţimea tuturor matricelor cu 4 linii şi 5 coloane în care toate elementele sunt numerele +1 şi - 1 şi astfel încât produsul numerelor din fiecare linie şi din fiecare coloană este -1 . Să se calculeze numărul elementelor mulţimii M.

a) 2  b) 7  c) 6
d) 4  e) 0  f) 1

**AL - XI. 025** Se consideră matricea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d \in \mathbf{R}$. Să se determine condiţiile în care există $p,q \in \mathbf{R}$ , unici astfel ca $M^2 - pM - qI = 0$, I fiind matricea unitate, 0 matricea nulă. Să se determine în acest caz valorile lui $p$ şi $q$.

a) $b = c$, $a = d$, $p = a$, $q = b^2 - a^2$  b) $b,c \in \mathbf{R}$, $a = d$, $p = 2a$, $q = bc - a^2$

c) $b = c$, $a,d \in \mathbf{R}$, $p = a+d$, $q = b^2 - a^2$  d) $b \neq 0$ sau $c \neq 0$ sau $a \neq d$, $p = a+d$, $q = bc - ad$

e) $b = 0$, $c = 0$, $a = d$, $p = a+d$, $q = bc - ad$  f) $b \neq 0$, $a \neq d$, $c \in \mathbf{R}$, $p = a+d$, $q = -ad$

**AL - XI. 026** Fie $A,B,C \in M_n(\mathbf{C})$ cu proprietăţile $A+B = AB$, $B+C = BC$, $C+A = CA$. Pentru ce valoare $m \in \mathbf{R}$ are loc egalitatea $A+B+C = mABC$ ?

a) $m = 1$  b) $m = \frac{1}{2}$  c) $m = \frac{1}{4}$  d) $m = 3$  e) $m = \frac{3}{4}$  f) $m = \frac{1}{3}$

**AL - XI. 027** Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice nenulă cu $ad = bc$ , $a,b,c,d \in \mathbf{R}$. Să se determine (în funcţie de elementele matricii $A$) numărul real $r$ astfel încât să aibă loc egalitatea $A^n = r^{n-1}A$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

a) $r = a-d$  b) $r = a+d$  c) $r = b+c$

d) $r = b-c$  e) $r = a+c$  f) $r = b+d$

**AL - XI. 028** Să se determine puterea $n \in \mathbf{N}$ a matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ b_n & a_n & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} a_n = 2n \\ b_n = 2n^2 + n \end{matrix}$

b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ b_n & a_n & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} a_n = n \\ b_n = n^2 \end{matrix}$

c) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ b_n & a_n & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} a_n = 2n \\ b_n = 2n^2 \end{matrix}$

d) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ b_n & a_n & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} a_n = 2n \\ b_n = n^2 + n \end{matrix}$

e) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ b_n & a_n & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} a_n = n^2 \\ b_n = 2n^2 + n \end{matrix}$

f) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ b_n & a_n & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} a_n = n \\ b_n = n^2 - n \end{matrix}$

**AL - XI. 029** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculați det $P(A)$, unde $P(x) = x^{100} - 1$.

a) 0 b) 1 c) -1 d) 99 e) 100 f) -100

**AL - XI .030** Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^n$ este de forma: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi să se determine apoi $a_n$, $n \in \mathbf{N}$.

a) $a_{n+1} = a_n + 2, a_n = 2n$ b) $a_{n+1} = a_n, a_n = 1$ c) $a_{n+1} = a_n + 1, a_n = n$

d) $a_{n+1} = 2a_n, a_n = 2^n$ e) $a_{n+1} = a_n + 2, a_n = 2^n$ f) $a_{n+1} = 2a_n, a_n = 2n^2$

**AL - XI. 031** Să se determine $A^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, unde $A \in M_3(\mathbf{Z})$ este o matrice care verifică relația: $(1 \quad 1+x \quad 1+x^2) = (1 \quad x \quad x^2)A$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$ .

a) $A^n=\begin{pmatrix}1 & n & n\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ b) $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ n & 1 & 0\\ n & 0 & 1\end{pmatrix}$ c) $A^n=\begin{pmatrix}1 & n & n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

d) $A^n=\begin{pmatrix}1 & -n & -n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ e) $A^n=\begin{pmatrix}1 & n & -n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ f) $A^n=\begin{pmatrix}n & 1 & 1\\ 0 & n & 0\\ 0 & 0 & n\end{pmatrix}$

**AL - XI. 032** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n$, $(n\geq 1)$.

a) $A^n=\begin{pmatrix}\cos^n\alpha & -\sin^n\alpha\\ \sin^n\alpha & \cos^n\alpha\end{pmatrix}$ b) $A^n=\begin{pmatrix}n\cos\alpha & -n\sin\alpha\\ n\sin\alpha & n\cos\alpha\end{pmatrix}$

c) $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$ d) $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & \sin n\alpha\\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$

e) $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & n\sin n\alpha\\ -n\sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$ f) $A^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\cos\alpha & -\frac{1}{n}\sin\alpha\\ \frac{1}{n}\sin\alpha & \frac{1}{n}\cos\alpha\end{pmatrix}$

**AL - XI. 033** Să se calculeze $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{30}$.

a) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**AL - XI. 034** Fiind dată matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze matricea $A^n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

a) $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2(n-1)}{4} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n & 3n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 3n & n^2 \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n^2 & n^3-1 \\ 0 & 1 & n^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**AL - XI. 035** Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^n$, $n\geq 1$ are forma $\begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi să se determine $a_n$ şi $b_n$.

a) $a_n=\frac{n}{2}$, $b_n=\frac{n(n+1)}{6}$ b) $a_n=\frac{n}{2}$, $b_n=\frac{n(2n+5)}{12}$

c) $a_n=\frac{n+1}{2}$, $b_n=\frac{n(2n+1)}{6}$ d) $a_n=\frac{n}{2}$, $b_n=\frac{n(3n+5)}{24}$

e) $a_n = 2n+3$, $b_n = 3n+7$ f) $a_n = \dfrac{2n+1}{4}$, $b_n = \dfrac{n(5n+4)}{4}$

**AL - XI. 036** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2n & n^2+4n-2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} n & \dfrac{n(n+1)}{3} & 3n \\ 0 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} n & 2n & 3n \\ 0 & n & 2n \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**AL - XI. 037** Să se calculeze $A^n$, $n \in \mathbf{N}^*$ unde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2n \end{pmatrix}$ b) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ c) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

d) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ e) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ f) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

**AL - XI. 038** Care sunt valorile parametrului $a \in \mathbf{R}$ pentru care matricea

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a & \frac{1}{2}-a \\ \frac{1}{2}-a & \frac{1}{2} & a \\ a & \frac{1}{2}-a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ este inversabilă.

a) orice $a\in\mathbf{R}\setminus\{1,2\}$ b) orice $a\in[-7,2]$ c) orice $a\in\mathbf{R}$

d) orice $a\in(-\infty,1]\cup\{9\}$ e) orice $a\in\{1,2,3,4\}$ f) orice $a\in\mathbf{R}\setminus\{3,4\}$

**AL - XI. 039** Să se calculeze inversa matricei $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & -7 & 1 \\ -8 & 6 & -1 \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ -8 & 6 & -1 \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ d) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

e) $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**AL - XI. 040** Să se determine parametrul $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$ să fie inversabilă şi apoi să se afle inversa sa.

a) $\alpha \neq -2$; $\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\alpha+2} & \dfrac{1}{\alpha+2} \\ \dfrac{-\alpha}{\alpha+2} & \dfrac{1}{\alpha+2} \end{pmatrix}$

b) $\alpha = -2$; $\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\alpha+2} & \dfrac{1}{\alpha+2} \\ \dfrac{-\alpha}{\alpha+2} & \dfrac{1}{\alpha+2} \end{pmatrix}$

c) $\alpha \neq -1$; $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha+2} & \dfrac{2}{\alpha+2} \\ \dfrac{-\alpha}{\alpha+2} & \dfrac{\alpha}{\alpha+2} \end{pmatrix}$

d) $\alpha = -1$; $\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\alpha-1} & \dfrac{1}{\alpha-1} \\ \dfrac{-\alpha}{\alpha+2} & \dfrac{1}{\alpha+2} \end{pmatrix}$

e) $\alpha = 1$; $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha+1} & \dfrac{-2}{\alpha+1} \\ \dfrac{-\alpha}{\alpha+2} & \dfrac{1}{\alpha+2} \end{pmatrix}$

f) $\alpha \neq -1$; $\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\alpha+1} & \dfrac{2}{\alpha+2} \\ \dfrac{1}{\alpha+1} & \dfrac{-1}{\alpha+1} \end{pmatrix}$

**AL - XI. 041** Matricea $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 5 & -4 & 7 & \beta \end{pmatrix}$ are rangul doi pentru:

a) $\alpha = 2,\ \beta = -5$ b) $\alpha = -1,\ \beta = -10$ c) $\alpha = -3,\ \beta = 2$

d) $\alpha = 1,\ \beta = -10$ e) $\alpha = 3,\ \beta = -1$ f) $\alpha = -1,\ \beta = 10$

**AL - XI. 042** Să se determine valorile parametrilor reali $\alpha$ şi $\beta$ pentru care matricea:

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 2 & 4 \\ 1 & \alpha & 2 & 3 \\ 1 & 2\alpha & 2 & 4 \end{pmatrix}$$ are rangul 2.

a) $\alpha = 1, \beta = 1$ b) $\alpha = \dfrac{1}{2}, \beta = 1$ c) $\alpha = 1, \beta = \dfrac{1}{2}$

d) $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 1$ e) $\alpha = -1, \beta = \frac{1}{2}$ f) $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$

**AL - XI. 043** Se dă matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$. Să se determine parametrul real $a$ pentru care rangul matricei este egal cu 2.

a) $a = 4$ b) $a = -2$ c) $a = 3$ d) $a = 8$ e) $a = -1$ f) $a = 0$

**AL - XI. 044** Pentru ce valori ale parametrilor $a, b \in \mathbf{R}$, matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & a \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & a & 4 \\ 3 & -1 & 1 & b \end{pmatrix}$$ au ambele rangul 2.

a) $a = \frac{44}{7}, b = \frac{19}{5}$ b) $a = \frac{1}{3}, b = -1$ c) $a = \frac{19}{5}, b = \frac{44}{7}$

d) $a = -1, b = -2$ e) $a = 2, b = -1$ f) $a = -1, b = \frac{1}{3}$

**AL - XI. 045** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & i \\ \alpha & i & i \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{R}$; dacă rangul matricii este 2, atunci suma elementelor sale este soluție a ecuației:

a) $x^2 + 1 = 0$ b) $x^2 - 9 = 0$ c) $x^3 + 1 = 0$

d) $x^3 - 27i = 0$ e) $x^4 + 1 = 0$ f) $x^4 - 81 = 0$

**AL - XI. 046** Să se determine valorile parametrilor $a, b \in \mathbf{R}$ pentru care matricea

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & b\\ a & 1 & 2 & -1\\ a & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

are rangul minim.

a) $a=1, b=1$   b) $a=1, b=-1$   c) $a=1, b=-\frac{1}{3}$

d) $a=2, b=-\frac{1}{3}$   e) $a=2, b=2$   f) $a=-1, b=-\frac{1}{3}$

**AL - XI. 047** Se dă matricea: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & \beta\\ 1 & 2 & \alpha & -1\\ 1 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$. Să se determine parametrii reali $\alpha, \beta$ pentru care rangul matricei să fie doi.

a) $\alpha \neq 1, \beta \neq -1$   b) $\alpha = 1, \beta \neq -1$   c) $\alpha = 1, \beta \neq -1$; $\alpha \neq 1, \beta = -1$

d) $\alpha \neq 1, \beta = -1$   e) $\alpha = 1, \beta = -1$   f) $\alpha = 1, \beta \in \mathbf{R}$

**AL - XI. 048** Pe care din următoarele mulțimi de variație ale parametrilor reali $\alpha$ și $\beta$ matricea $\begin{pmatrix}\beta & 1 & 2 & 4\\ 1 & \alpha & 2 & 3\\ 1 & 2\alpha & 2 & 4\end{pmatrix}$ are rangul 3?

a) $\alpha \in [-1,1], \beta \in [-1,4]$   b) $\alpha \in \left(-7, \frac{2}{3}\right], \beta \in (0,2)$

c) $\alpha \in \left(0, \frac{3}{4}\right), \beta \in \left(-1, \frac{3}{2}\right)$   d) $\alpha \in \left(-3, \frac{3}{5}\right), \beta \in (0,1)$

e) $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right), \beta \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)$   f) $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right], \beta \in (0,7]$

**AL – XI. 049** Se consideră matricea

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \alpha & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2\alpha & 5 \\ 2 & 10 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se precizeze valoarea parametrului $\alpha$, pentru care rangul matricei este doi.

a) $\alpha = 3$; b) $\alpha = 1$; c) $\alpha = -5$; d) $\alpha = 5$; e) $\alpha = -3$; f) $\alpha = 4$ .

**AL – XI. 050** Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ a & a & a & a \\ a & a+1 & a+2 & a+3 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$

Pentru ce valori reale ale lui a şi x matricea A are rangul 2?

a) $a = 0$; $x = 1$ b) $x = 1$; $a \in \mathbf{R}$ c) $a = 0$; $x \in \mathbf{R}$ d) $a = 0$; $x \in (-1,2)$
e) pentru nici o valoare reală a lui a şi x. f) $a = 0$; $x = 0$

**AL - XI. 051** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2X - 5Y = A \\ -X + 3Y = B \end{cases}$ unde $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) $X = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ d) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

e) $X=\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ f) $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

**AL - XI. 052** Să se precizeze care dintre perechile de matrice (X,Y), date mai jos, reprezintă o soluție a sistemului: $\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$.

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**AL - XI. 053** Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

a) 8 b) 6 c) 16 d) 17 e) 18 f) 0

**AL - XI. 054** Să se calculeze determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & a \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}$$

a) 0 b) $2a^2$ c) $4a^2$
d) $6a^2$ e) 1 f) -1

**AL - XI. 055** Să se calculeze $\det\left(A^{-1}\right)$ dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{11}$ d) $\frac{1}{7}$ e) $\frac{1}{11}$ f) $\frac{1}{5}$

**AL - XI. 056** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $A\in M_2(R)$

Să se determine mulțimea matricelor

$$M=\{X \mid \det X=0, \det(A+X)=0\}$$

a) $\begin{pmatrix}3x & x\\ 3y & y\end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix}2ky & 2y\\ ky & y\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}3x & y\\ y & 3y\end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix}2y & 2xy\\ y & ky\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}2x & 2ky\\ y & 2ky\end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix}2ky & 2y\\ y & ky\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}2k & ky\\ ky & kx\end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix}2k & x\\ ky & ky\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}kx & kx\\ ky & y\end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix}x & x\\ ky & y\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}$

**AL - XI. 057** Calculați determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}x^2 & x & 1\\ 1 & -y & y^2\\ y^2 & -xy & x^2\end{vmatrix}$.

a) $\Delta=(x^2+y)(1-xy)(x+y^2)$

b) $\Delta=(x^2-y)(1-xy)(x-y^2)$

c) $\Delta=(x^2-y)(1-xy)(x+y^2)$

d) $\Delta=(x^2+y)(1+xy)(x+y^2)$

e) $\Delta=-(x^2+y)(1+xy)(x-y^2)$

f) $\Delta=-(x^2-y)(1+xy)(x+y^2)$

**AL - XI. 058** Se consideră $f(x)=\begin{vmatrix} \dfrac{2}{1+x^2}+2 & \dfrac{2}{1+x^2}+5 & \dfrac{2}{1+x^2}+3 \\ -2x & 1-5x & -3x \\ 4 & 7+x & 5 \end{vmatrix}$.

Aduceți $f(x)$ la forma cea mai simplă.

a) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{4x}{1+x^2}$ c) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$

d) $f(x)=x^2$ e) $f(x)=0$ f) $f(x)=2+x^2$

**AL - XI. 059** Care este valoarea determinantului $\Delta=\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ?

a) 3 b) 2 c) -2 d) 1 e) -1 f) 0

**AL - XI. 060** Se consideră $f(x)=\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & \sin 2x \\ \cos^2 x & \sin^2 x & \sin 2x \\ 1+\sin 2x & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Aduceți $f(x)$ la forma cea mai simplă.

a) $f(x)=1+\cos x$ b) $f(x)=\sin^2 x+2\cos x$ c) $f(x)=-2\sin 2x$

d) $f(x)=\cos^2 x$ e) $f(x)=-\cos^3 2x$ f) $f(x)=\cos^3 2x$

**AL - XI. 061** Dacă $a,b,c$ sunt lungimile laturilor unui triunghi şi $h_a, h_b, h_c$ sunt înălțimile corespunzătoare , care este valoarea determinantului: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & a & h_b\cdot h_c \\ 1 & b & h_c\cdot h_a \\ 1 & c & h_b\cdot h_a \end{vmatrix}$ ?

a) $\Delta=abc$ b) $\Delta=0$ c) $\Delta=a^2+b^2+c^2$

d) $\Delta = 1$;  e) $\Delta = 2abc$  f) $\Delta = \frac{1}{2}(ab+ac+bc)$

**AL - XI. 062** Să se calculeze determinantul: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, unde $\omega$ este o rădăcină cubică complexă a unității ($\omega^3 = 1$).

a) $\Delta = -3$  b) $\Delta = -3-6\omega$  c) $\Delta = -3+6\omega$

d) $\Delta = 1$  e) $\Delta = 3$  f) $\Delta = 6\omega$

**AL - XI. 063** Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, calculați determinantul matricii $\sum\limits_{k=0}^{4} A^k$.

a) 15  b) 20  c) 40  d) 30  e) 31  f) 41

**AL – XI. 064** Să se calculeze

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

a) $\Delta = 2abc(a-b)(b-c)(c-a)$  b) $\Delta = 2abc(a-c)(c-b)(b-a)$

c) $\Delta = 2abc(a+b)(b+c)(c+a)$  d) $\Delta = 0$

e) $\Delta = 2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$  f) $\Delta = (a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)$

**AL – XI. 065** Fie x,y,z $\in$**R;** să se calculeze valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & x+y+z & xy+xz+yz & xyz \end{vmatrix}$$

a) $\Delta=1$ b) $\Delta=-1$ c) $\Delta=0$
d) $\Delta=x+y+z$ e) $\Delta=x^2+y^2+z^2$ f) $\Delta=xyz$

**AL – XI. 066** Fie a,b,c,d $\in$ **R** . Să se calculeze determinantul:

$$D=\begin{vmatrix} 1+a^2 & ab & ac & ad \\ ba & 1+b^2 & bc & bd \\ ca & cb & 1+c^2 & cd \\ da & db & dc & 1+d^2 \end{vmatrix}$$

a) $1-a^2-b^2-c^2-d^2$ b) $(a-b)(b-c)(c-d)$ c) $1+a^2+b^2+c^2+d^2$
d) $a^2+b^2+c^2+d^2$ e) 1 f) 0

**AL – XI. 067** Să se calculeze valoarea determinantului asociat matricei

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

a) $a^2+b^2+c^2+d^2$ b) $-\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$ c) $\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$
d) $\pm\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$ e) $(a+b+c+d)^2$ f) $\pm(a+b+c+d)^2$

**AL – XI. 068** Să se determine toate valorile x $\in$ **R** astfel ca valoarea determinantului

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4+2i & 4-2i & 1-3i \\ 1 & x+2i & x-2i & 1+3i \\ 1 & x+i & 8+3i & 1-i \end{vmatrix}$$

să fie un număr real.
a) $x\in\{0,6\}$ b) $x\in\{0,2\}$ c) $x\in\{2,6\}$

d) $x \in \{1,2\}$ e) $x \in \{-1,1\}$ f) $x \in \{3,4\}$.

**AL – XI. 069** Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

a)4 b)3 c) 5 d)-4 e)-5 f) 0

**AL – XI. 070** Fie $A = (a_{i\,j})$ o matrice pătrată de ordinul 4, definită astfel :
$a_{i\,j} = \max\{i, j\},\ i, j = \overline{1,4}$ .
Să se determine det A.

a) 0 b) 4 ! c) -4 !
d) –4 e) 4 f) 1

**AL – XI. 071** Dacă $a_1, a_2, a_3$ sunt numere reale în progresie geometrică cu rația r, să se calculeze valoarea determinantului,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_1^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_3^2 \end{vmatrix}$$

în funcție de primul termen $a_1$ şi rația r .

a) $a_1^3 r^3$ b) $a_1 r^2$ c) $a_1^6 r^3$
d) $a_1^6 r^6$ e) $a_1^6 r^{12}$ f) $a_1^6 r^2$ .

**AL – XI. 072** Dacă $b_1, b_2, b_3$ sunt numere reale în progresie geometrică cu rația $q \in \mathbf{R}_+$, să se calculeze pentru $\alpha \in \mathbf{R}$, în funcție de primul termen b₁ şi rația q, valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 1+b_1^{2\alpha} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b_2^{2\alpha} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b_3^{2\alpha} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) $b_1^{6\alpha} q^{2\alpha}$ b) $b_1^{6\alpha+1} q^{12\alpha}$ c) $b_1^{6\alpha} q^{15\alpha}$

d) $b_1^{6\alpha} q^{6\alpha}$ e) $b_1^{6\alpha} q^{3\alpha}$ f) $b_1^{6\alpha} q^{4\alpha}$

**AL - XI. 073** Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} a^2-x & ab & ac \\ ba & b^2-x & bc \\ ca & cb & c^2-x \end{vmatrix} = 0$.

a) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ b) $x_1 = x_2 = x_3 = a$

c) $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_3 = c$ d) $x_1 = x_2 = 0, x_3 = a^2 + b^2 + c^2$

e) $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = a^2 + b^2 - c^2$ f) $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 0$

**AL - XI. 074** Care sunt soluțiile ecuației $\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0$ ?

a) $x_1 = 3, x_2 = 7, x_3 = -1$ b) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$

c) $x_1 = 7,\ x_2 = \sqrt{5}, x_3 = -\sqrt{5}$ d) $x_1 = x_2 = 7, x_3 = 1$

e) $x_1 = 7,\ x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$ f) $x_1 = -2,\ x_2 = 7, x_3 = 1$

**AL - XI. 075** Care sunt soluțiile ecuației $\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ?

a) $x_1 = 1,\ x_{2,3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$

b) $x_1 = 1,\ x_{2,3} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$

c) $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$

d) $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2},\ x_3 = -1$

e) $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 2$

f) $x_1 = -1,\ x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$

**AL - XI. 076** Precizați soluțiile ecuației $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$ .

a) $a, -a, 2a, 3a$ b) $a, -a, 2a, -2a$ c) $a, -a, -a, -3a$

d) $a, a, -a, -3a$ e) $a, a, a, -3a$ f) $a, a, -a, 3a$

**AL - XI. 077** Care sunt soluțiile reale ale ecuației $\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x} \\ e^{-x} & e^{-x} & e^{2a} \end{vmatrix} = 0$ ?

a) $x = 0$ b) $x = a$ c) $x = 2a$ d) $x = -\dfrac{a}{2}$ e) $x = -a$ f) $x = -2a$

**AL - XI. 078** Fie $A$ o matrice pătratică de ordinul $n$ ($n \geq 2$) nesingulară. Precizați care este relația între $\det(A^*)$ și $\det A$ , unde $A^*$ este reciproca lui $A$.

a) $\det A = \det A^*$ b) $\det(A^*) = (\det A)^{n-1}$ c) $\det(A^*) = (\det A)^{n}$

d) $(\det A^*)^{n} = \det A$ e) $(\det A^*)^{n-1} = \det A$ f) $\det A = \dfrac{1}{\det A^*}$

**AL - XI. 079** Fie matricea $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le 4\\ 1\le j\le 4}}$, $a_{ij} = \max\{|i+j-2|, |i+j-3|\}$.

Să se calculeze det $(A^t \cdot A)$, unde $A^t$ este transpusa matricei $A$.

a) 25 b) 9 c) 0 d) 1 e) -1 f) 36

**AL - XI. 080** Fie matricea $A = \left(a_{ij}\right)$, $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 3$, cu elementele $a_{ij} = \min\{|\,i+j-3\,|, |\,i-2j+3\,|\}$. Să se calculeze $\det A$ şi $A^{-1}$.

a) $\det A = 2$, $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\det A = -3$, $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\det A = 1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\det A = 2$, $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\det A = -3$, $A^{-1} = -\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ f) $\det A = 1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**AL - XI. 081** Să se calculeze determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3, x_4$ sunt rădăcinile ecuației $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

a) $\Delta = 1$ b) $\Delta = -1$ c) $\Delta = p-q$ d) $\Delta = 0$ e) $\Delta = p-q+r$ f) $\Delta = -1$

**AL - XI. 082** Se dă ecuația $\begin{vmatrix} x^3 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 \\ x & 1 & a \end{vmatrix} = 0$; $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Să se determine parametrul $a$ astfel încât între rădăcinile ecuației să existe relația $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 < (x_1 x_2 x_3)^2$.

a) $a \in (-\infty,-1] \cup [2,+\infty)$ b) $a \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$ c) $a \in [-1,2]$

d) $a \in [1,2]$ e) $a \in (-\infty,1]$ f) $a \in [1,+\infty)$

**AL - XI. 083** Să se calculeze $\Delta = |d|$**,** unde $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$, iar $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$ sunt rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$.

a) $\Delta = 2p^2$ b) $\Delta = \sqrt{p^3 - 27pq}$ c) $\Delta = 4pq$

d) $\Delta = \sqrt{q^2 - p}$ e) $\Delta = \sqrt{-4p^3 - 27q^2}$ f) $\Delta = \sqrt{-4p^3 + 27q^2}$

**AL - XI. 084** Să se calculeze determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, știind că $x_1, x_2, x_3$ sunt rădăcinile ecuației $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$

a) $\Delta = 1$ b) $\Delta = -1$ c) $\Delta = 2$ d) $\Delta = 4$ e) $\Delta = 3$ f) $\Delta = 0$

**AL - XI. 085** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -x_1 & x_2 & -x_3 \\ x_1^2 & -x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3$ sunt rădăcinile ecuației: $x^3 + ax + b = 0$, $a$, $b \in \mathbf{R}$. Să se calculeze $\det\left(A \cdot {}^tA\right)$ în funcție de $a$ și $b$, unde ${}^t\mathrm{A}$ este transpusa matricei A .

a) $a^3+b^2$ b) $-4a^3-27b^2$ c) $4a^3+27b^2$

d) $4a^3-27b^2$ e) $a^3+b^2$ f) $-4a^3+27b^2$

**AL - XI. 086** Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ x-y+3z=5 \\ 2x+y+\ z=2 \end{cases}$.

a) (1,1,0) b) (1,-1,1) c) (-4,0,3)

d) (0,0,2) e) (1,0,0) f) (1,0,2)

**AL - XI. 087** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x+3y+z=11 \\ x+2y+3z=14 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases}$$

a) x =1, y =2, z =3 b) x =2, y =1, z =1 c) x =3, y =2, z =2
d) x =1, y =1, z =4 e) x =1, y =3, z =2 f) x =1, y =7, z =6

**AL - XI. 088** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x-y+3z+t=-8 \\ 3x+y-z+2t=-5 \\ 2x+2y-4z+t=3 \end{cases}$$

a) $x=-\dfrac{2z+3t+13}{4},\ y=\dfrac{10z+t+19}{4},\ z=z\in\mathbf{R},\ t=t\in\mathbf{R}$

b) $x=\dfrac{z+t+1}{3},\ y=\dfrac{2z+t+1}{3},\ z=z\in\mathbf{R},\ t=t\in\mathbf{R}$

c) $x=z+t,\ y=2z+t,\ z=z\in\mathbf{R},\ t=t\in\mathbf{R}$

d) $x=1+t,\ y=1+t,\ z=2+t,\ t=t\in\mathbf{R}$

e) $x=2t+1,\ y=2t-1,\ z=2-t,\ t=t\in\mathbf{R}$

f) $x=2z+1,\ y=z-1,\ t=z,\ z=z\in\mathrm{R}$

**AL - XI. 089** Care sunt valorile parametrului $m \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ x + y + mz = 4 \end{cases}$$ admite soluție unică ?

a) $m \in \mathbf{R} \setminus \{-2,1\}$ b) $m \in \mathbf{R} \setminus \{2,-1\}$ c) $m \in \mathbf{R} \setminus \{-2,-1\}$

d) $m \in \mathbf{R} \setminus \{2,1\}$ e) $m \in \mathbf{R} \setminus \{-2,2\}$ f) $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}$

**AL – XI. 090** Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x - 2y + z = m \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

Să se determine parametrul real m pentru ca sistemul să fie incompatibil.

a) m = 1, m = -2; b) m = 2, m = -2; c) m = -1, m = 0;
d) m = 3, m = 4; e) m = -3, m = 3; f) m = 0, m = -2.

**AL - XI. 091** Să se determine m∈ **R** astfel ca sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 1 \\ 5x + 4y = m \end{cases}$$

să fie compatibil.

a) 0 b) 1 c) 20
d) 23 e) 8 f) 21

**AL - XI. 092** Pentru ce valoare a parametrului real $m \in \mathbf{R}$ sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x + 5y + 4z = 4 \\ x + 2y + z = m \end{cases}$$

este compatibil şi nedeterminat de ordinul întâi ?
a) m =-1 b) m =2 c) m =-2 d) m =1 e) m =-3 f) m=3

**AL - XI. 093** Să se determine la care din următoarele mulțimi aparțin parametrii $a, b \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} ax + ay + (a+1)z = b \\ ax + ay + (a-1)z = a \\ (a+1)x + ay + (2a+3)z = 1 \end{cases}$$

este compatibil nedeterminat.

a) $a \in (-1,1), b \in (0,1)$
b) $a \in (-1,1), b \in (-1,1)$
c) $a \in (1,90), b \in (-2,30)$
d) $a \in (0,32), b \in (-2,30)$
e) $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbf{R}$
f) $a \in (-1,3), b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

**AL - XI. 094** Să se determine valorile parametrilor reali $a$ şi $b$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -6 \\ 2x + y + bz = 4 \\ ax - y + z = 8 \end{cases}$$ este incompatibil.

a) $a \neq \frac{1}{2}$ şi $b \neq -1$
b) $\begin{cases} a = -\frac{1}{2}, b \in \mathbf{R} \text{ sau} \\ a \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{4}{7}\right\}, b = -1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} a \neq -\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$
d) $a \neq \frac{1}{2}$ şi $b \in \mathbf{R}$
e) $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$
f) $\begin{cases} a = \frac{4}{7} \\ b = -1 \end{cases}$

**AL - XI. 095** Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = \beta \end{cases}$,

să fie incompatibil.

a) $\alpha \neq 1, \beta \neq -2$
b) $\alpha = 1, \beta \neq -2$
c) $\alpha = 1, \beta = -2$
d) $\alpha = 1, \beta \neq 1$
e) $\alpha = \beta = -2$
f) $\alpha = 1, \beta \neq -6$

**AL - XI. 096** Fie sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+by+\ z=\ 1 \\ bx+ay+bz=a \\ \ x+\ y+az=b \end{cases}$ , $a,b\in\mathbf{R}$.

Să se determine valorile parametrilor $a,b\in\mathbf{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

a) $a = 1$, $b = -2$ b) $a\in\mathbf{R}\setminus\{1,-1\}$, $b = -2$ c) $a = -1$, $b\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$

d) orice $a = b\in\mathbf{R}$ e) $a = 1$, $b\in\mathbf{R}\setminus\{1,-2\}$ f) $a = -1$, $b = 0$

**AL - XI. 097** Se consideră sistemul liniar $\begin{cases} mx+\ y-2z=2 \\ 2x+\ y+3z=1 \\ (2m-1)x+2y+\ z=n \end{cases}$ , $m,n\in\mathbf{R}$.

Pentru ce valori ale parametrilor $m$ şi $n$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat?

a) $m=3$, $n\neq 3$ b) $m=3$, $n=3$ c) $m\neq 3$, $n=3$

d) $m\neq 3$, $n\neq 3$ e) $m=3$, $n=0$ f) $m=3$, $n=2$

**AL - XI. 098** Să se determine toate valorile parametrilor reali $\alpha,\beta,\chi$ pentru care

sistemul: $\begin{cases} x+\ y+\ z=1 \\ \alpha x+\ \beta y+\chi z=1 \\ \alpha^2 x+\beta^2 y+\chi^2 z=1 \end{cases}$ este compatibil dublu nedeterminat.

a) $\alpha\neq\beta\neq\chi$ b) $\alpha=\beta\neq\chi$ c) $\alpha=\chi\neq\beta$

d) $\alpha\neq\beta=\chi\neq 1$ e) $\alpha=\beta=\chi=1$ f) $\alpha=1,\beta\neq 1,\chi=-1$

**AL - XI. 099** Să se determine $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ astfel încât sistemul liniar:

$\begin{cases} 3x+2y+z-t=2 \\ x+\alpha y-2z+3t=1 \\ x+4y+5z-7t=\beta \end{cases}$ să fie compatibil dublu nedeterminat.

a) $\alpha=-1,\beta=2$ b) $\alpha=0,\beta=1$ c) $\alpha=1,\beta=-1$

d) $\alpha=-1,\beta=3$ e) $\alpha=-1,\beta=0$ f) $\alpha=2,\beta=0$

**AL - XI. 100** Pentru ce valori ale lui $\lambda\in\mathbf{R}$ sistemul: $\begin{cases}-\ x+2y+2z+\ t=1\\-2x+\ y+\ z+\ t=0\\\ \ 5x-\ y-\ z-2t=\lambda\end{cases}$

este compatibil ?

a) $\lambda=2$ b) $\lambda=-1$ c) $\lambda=-2$ d) $\lambda=3$ e) $\lambda=1$ f) $\lambda=-3$

**AL - XI. 101** Să se determine parametrii reali *a*,*b*,*c* astfel ca sistemul:

$\begin{cases}2x-3y+\ 4z-5t=\ \ 1\\\ x+9y+\ az+\ t=-3\\5x-6y+10z+bt=\ \ c\end{cases}$ să fie dublu nedeterminat.

a) $a=b=c=2$ b) $a=2$, $b=-12$, $c=-2$ c) $a=c=2$, $b=-12$

d) $a=b=2$, $c=-12$ e) $a=b=2$, $c=12$ f) $a=c=2$, $b=12$

**AL - XI. 102** Să se determine mulțimea valorilor parametrului real *m* pentru care sistemul următor este compatibil

$$\begin{cases}x-\ my+\ 1\ =0\\2x+\ y-\ m\ =0\\3x+(m-1)y+m-1\ =0\end{cases}.$$

a) $\{0,2\}$ b) $\varnothing$ c) $\{1,0\}$ d) $\{-1,1\}$ e) $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$ f) $\{3,2\}$

**AL - XI. 103** Pentru ce valori ale lui *m* sistemul $\begin{cases}2x+my+z=0\\2x+\ 2y-z=0\\2x-\ \ y+z=0\end{cases}$ admite şi soluții

diferite de soluția banală?

a) $m\in\mathbf{R}$ b) $m\in\varnothing$ c) $m=0$ d) $m\neq 0$ e) $m=-1$ f) $m\neq -1$

**AL - XI. 104** Să se determine parametrul real $\alpha$ astfel încât sistemul omogen:

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + 2y + z - 4t = 0 \\ x - y + \alpha z + \alpha t = 0 \\ x + 2y - z - 2t = 0 \end{cases}$$ să aibă soluții nenule.

a) $\alpha = 1$    b) $\alpha = -1$    c) $\alpha = 0$

d) $\alpha = 2$    e) $\alpha = 1$ sau $\alpha = -1$    f) $\alpha = -1$ sau $\alpha = 2$

**AL - XI. 105** Ce valori întregi pot lua parametrii *p*, *q* şi *r* astfel încât sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = px + qy + rz \\ \frac{1}{2}y = rx + py + qz \\ \frac{1}{2}z = qx + ry + pz \end{cases}$$ să admită soluții nenule ?

a) $p = 1, q = 2, r = 3$    b) $p = -1, q = 0, r = 1$    c) $p, q$ şi $r$ pot lua orice valori întregi

d) $p, q$ şi $r$ nu pot lua nici o valoare întreagă pentru a satisface condiția cerută

e) $p = 1, q = 1$ şi $r$ orice valoare întreagă    f) $p = 1, q = 2, r = 2$

**AL - XI. 106** Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel ca sistemul următor să admită soluții şi să se rezolve în acest caz.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -7x + my - z = 0 \\ 4x + z = 0 \\ nx + 2y - 3mz = 0 \\ x^2 + 4y^2 - z^2 - 3x - 3yz = -2 \end{cases}$$

a) $\begin{cases} m = 3, n = -38 \\ x_1 = 1, y_1 = 1, z_1 = -4 \\ x_2 = 2, y_2 = 2, z_2 = -8 \end{cases}$    b) $\begin{cases} m \neq 3, n \neq -38 \\ x_1 = 1, y_1 = 1, z_1 = -4 \\ x_2 = 2, y_2 = 2, z_2 = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} m=-3, n=38 \\ x_1=1, y_1=1, z_1=-4 \\ x_2=2, y_2=2, z_2=-8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} m=n=3 \\ x_1=0, y_1=0, z_1=\sqrt{2} \\ x_2=0, y_2=0, z_2=-\sqrt{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} m=3, n=-38 \\ x_1=1, y_1=0, z_1=0 \\ x_2=2, y_2=0, z_2=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} m=3, n=-38 \\ x_1=2, y_1=1, z_1=1 \\ x_2=2, y_2=1, z_2=2 \end{cases}$

**AL – XI. 107** Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} 3x+y-z=5 \\ x-2y+z=n \\ mx+y+z=6 \end{cases} \quad (m, n \in \mathbf{R})$$

Să se determine valorile lui $m \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{R}$, astfel ca sistemul dat să fie compatibil şi nedeterminat.

a) $m \neq -11$, $n \in \mathbf{R}$; b) $m = -11$, $n = -\frac{21}{2}$; c) $m = -11$, $n \in \mathbf{R}$

d) $m = -11$, $n \neq -\frac{21}{2}$; e) $m \in \mathbf{R}$, $n = -\frac{21}{2}$; f) $m \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{R}$.

**AL – XI. 108** Se consideră sistemul

$$\begin{cases} 2ax+y+z=0 \\ x+ay-z=-1 \\ x+2ay+z=1 \end{cases}, \quad \text{unde } a \in \mathbf{R}.$$

Fie S suma valorilor parametrului $a$ pentru care sistemul este incompatibil. Stabiliți dacă :

a) $S=\frac{1}{2}$; b) $S=\frac{1}{6}$; c) $S=-\frac{1}{6}$;

d) $S=\frac{5}{3}$; e) $S=-\frac{3}{4}$; f) $S=-\frac{2}{3}$

**AL – XI. 109** Fie $A = \begin{pmatrix} a & a & o \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ şi sistemul $\left(A^3 - I_3\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

a fiind un parametru real iar $I_3$ este matricea unitate de ordinul trei. Pentru ce valori ale lui a sistemul de mai sus admite soluție unică ?

a) $a \neq 1$  b) $a = 1$  c) $a \neq -2$

d) $a \neq 0$  e) $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$  f) $a \neq 2$.

**AL – XI. 110** Să se determine parametrii $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

astfel încât sistemul $\begin{cases} \alpha x + \beta y + z = 1 \\ x + \alpha \beta y + z = \beta \\ x + \beta y + \alpha z = 1 \end{cases}$

să aibă soluțiile $x = z = \lambda$, $y = -\frac{1}{2}(1 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

a) $\alpha = 2, \beta = 0$  b) $\alpha = -2, \beta = 2$  c) $\alpha = \beta = 1$

d) $\alpha = \beta = -2$  e) $\alpha = -2, \beta \in \mathbf{R}$  f) $\alpha \in \mathbf{R}, \beta = 0$

**AL – XI. 111** Se consideră sistemul

$$\begin{cases} ax - by = 2a - b \\ (c+1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$$

Să se determine mulțimile A, B, C cărora le aparțin valorile reale respectiv ale lui a, b,c pentru care sistemul are o infinitate de soluții, iar x = 1, y = 3 este una dintre soluții.

a) $A = [0,3]$; $B = [-2,-1)$; $C = (0,3)$  b) $A = [0,3]$; $B = [-1,0]$; $C = (0,3)$

c) $A = (0,3)$; $B = (-2,-1)$; $C = (0,3)$  d) $A = (1,2]$; $B = [-1,0]$; $C = (1,2]$

e) $A = (1,3)$; $B = [-1,0]$; $C = (1,2]$  f) $A = (2,4]$; $B = [-1,0]$; $C = [1,3)$

**AL – XI. 112** Se consideră sistemul liniar : $\begin{cases} x - ay + a^2z = a^3 \\ x - by + b^2z = b^3 \\ x - cy + c^2z = c^3 \end{cases}$

Care din următoarele condiții sunt satisfăcute de soluțiile x,y şi z ale sistemului, pentru orice valori ale parametrilor a > 0, b> 0, c > 0 şi a ≠ b ≠ c ?

a) $x < y < z$  b) $y < z < x$  c) $z^2, y^2 < x^2$
d) $27x \geq z^3,\ y < z^2$  e) $27x \leq z^3,\ y < z^2$  f) $z, x < y$

**AL – XI. 113** Să se determine toate valorile lui $\lambda \in \mathbf{R}$ pentru care tripletele (x, y, z) corespunzătoare sunt soluții ale sistemului omogen

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = 0 \\ 2x - (\lambda + 3)y - 2z = 0 \\ 3x - 7y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

oricare ar fi $k \in \mathbf{R}$ :

a) $\lambda \in \{-5,4\}$, $(x = 6k,\ y = -k,\ z = 5k)$ sau $(x = 6k,\ y = 2k,\ z = -k)$
b) $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{-5,4\}$, $(x = 6k,\ y = -k,\ z = 5k)$ sau $(x = 6k,\ y = 2k,\ z = -k)$
c) $\lambda \in \{-5,4\}$, $(x = 2k,\ y = k,\ z = -k)$ sau $(z = 2k,\ y = 3k,\ z = k)$
d) $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{-5,4\}$, $(x = 2k,\ y = k,\ z = -k)$ sau $(x = 2k,\ y = 3k,\ z = k)$
e) $\lambda \in \{-5,4\}$, $(x = k,\ y = k,\ z = -2k)$ sau $(x = k,\ y = 3k,\ z = 2k)$
f) $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{-5,4\}$, $(x = k,\ y = k,\ z = -2k)$ sau $(x = k,\ y = 3k,\ z = 2k)$.

**AL – XI. 114** Fie a,b∈ **R** şi $\theta \in [0,2\pi)$. Să se afle varianta în care una sau alta dintre perechile (x,y) , prezentate alăturat , este soluție a sistemului de ecuații liniare

$$\begin{cases} x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta = a \cdot \sin\theta \\ x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta = a \cdot \cos\theta + b \\ ax \cdot \sin\theta + y \cdot (a\cos\theta + b) = 0 \end{cases}$$

a) $a \neq \pm b$, $(x = a + b,\ y = -b)$ sau $(x = a - b,\ y = -b)$

b) $a \neq \pm b,\quad (x = a + b,\ y = 0)$ sau $(x = a - b,\ y = 0)$
c) $a \neq \pm b,\quad (x = a + b,\ y = b)$ sau $(x = a - b,\ y = b)$
d) $a = \pm b,\quad (x = a^2 + b^2,\ y = -b)$ sau $(x = a^2 - b^2,\ y = -b)$
e) $a = \pm b,\quad (x = a^2 + b^2,\ y = 0)$ sau $(x = a^2 - b^2,\ y = 0)$
f) $a = \pm b,\quad (x = a^2 + b^2,\ y = b)$ sau $(x = a^2 - b^2,\ y = b)$.

**AL – XI. 115** Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} \left(1 + \dfrac{m}{m^2 - m + 1}\right)x + \left(-1 + \dfrac{m}{m^2 - m + 1}\right)y + \left(2 + \dfrac{m}{m^2 - m + 1}\right)z = 0 \\ 3mx + (1 + m)y + 4mz = 1 \\ 2x + (1 - m)y + 3z = 1 \end{cases}$$

cu $x, y, z \in \mathbf{R}$ şi parametrul $m \in \mathbf{R}$.
Dacă $M = \{m \in \mathbf{R} \mid \text{ sistemul este incompatibil } \}$, să se calculeze $S = \sum\limits_{m \in M} m^3$.

a) $S = \dfrac{7}{4}$ b) S=0 c) $S = \dfrac{9}{8}$

d) $S = -\dfrac{1}{8}$ e) $S = -\dfrac{9}{8}$ f) $S = \dfrac{8}{9}$

**AL – XI. 116** Să se determine produsul valorilor parametrului $\lambda \in \mathbf{R}$, valori pentru care sistemele de ecuaţii

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2\lambda y - 2z = 2\lambda - 2 \end{cases} \quad \text{respectiv} \quad \begin{cases} 2x - y - 3z = -3 \\ 3x + \lambda(\lambda + 1)y - 4z = \lambda - 1 \end{cases}$$

sunt compatibile şi au aceleaşi soluţii.

a) –2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2 f) 3

## GEOMETRIE ANALITICĂ
**(simbol GA - XI)**

**GA - XI. 001** Fie în planul (Oxy) punctele A(5,6), B(-4,3), C(-3,-2) şi D(6,1). Ce figură geometrică reprezintă patrulaterul ABCD ?

a) dreptunghi b) romb c) pătrat
d) trapez isoscel e) trapez dreptunghic f) paralelogram

**GA - XI. 002** Se dau punctele A(3,5), M(-1,3), N(4,1). Să se scrie ecuațiile dreptelor ce trec prin A şi fac unghiurile de 45° şi, respectiv ,135° cu dreapta (MN).

a) $3x - 7y + 26 = 0,\ 7x + 3y - 36 = 0$ b) $2x - 5y + 19 = 0,\ 5x - 2y - 5 = 0$
c) $x - y + 2 = 0,\ x + y - 8 = 0$ d) $3x - 2y + 1 = 0,\ 2x + 3y - 21 = 0$
e) $x - 2y + 7 = 0,\ 2x + y - 11 = 0$ f) $3x - 7y + 1 = 0,\ 7x - 3y - 2 = 0$

**GA - XI. 003** Fie în planul (Oxy) punctele A(1,2), $B\left(-\frac{5}{3},0\right)$ şi C(0,2). Să se afle lungimea bisectoarei interioare unghiului $\hat{A}$ în triunghiul $\overline{ABC}$.

a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{\sqrt{10}}{13}$ c) $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ d) $\frac{6\sqrt{10}}{13}$ e) $\frac{7\sqrt{5}}{13}$ f) $\frac{8\sqrt{10}}{13}$

**GA - XI. 004** Să se afle coordonatele vârfurilor unui triunghi cunoscând mijloacele laturilor P(3,-1), Q(1,7), R(-4,3).

a) (-1,-4), (5,2), (-3,12) b) (-2,3), (8,-5), (-6,19) c) (-2,-5), (4,19), (-12,13)
d) (-2,-5), (8,3), (-6,11) e) (2,-3), (-10,9), (0,17) f) (1,-3), (5,1), (-9,9)

**GA - XI. 005** Se dau punctul A(-3,4) şi dreapta (d) $2x - y + 5 = 0$. Să se determine coordonatele punctului B, simetricul lui A față de dreapta (d).

a) B(-1,3) b) B(2,1) c) B(1,-2) d) B(1,2) e) B(3,-4) f) B(-1,2)

**GA - XI. 006** În triunghiul $\overline{ABC}$ o dreaptă dusă prin B taie mediana $\overline{AA'}$ şi latura $\overline{AC}$ în K, respectiv I. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ pentru care $\frac{\mathrm{IC}}{\mathrm{IA}} = m\frac{\mathrm{KA'}}{\mathrm{KA}}$

a) $m = 3$ b) $m = \frac{1}{3}$ c) $m = 1$ d) $m = 2$ e) $m = \frac{3}{2}$ f) $m = \frac{4}{3}$

**GA - XI. 007** Fiind date numerele $a, b \in \mathbf{R}^*$, se consideră punctele A($a$,0), B(0,$b$) şi M(0,λ) situate pe axele de coordonate (Ox) şi (Oy). Să se determine λ astfel ca proiecţia punctului M pe dreapta (AB) să coincidă cu mijlocul segmentului $\overline{\mathrm{AB}}$.

a) $\frac{a^2 - b^2}{a}$ b) $\frac{a^2 - b^2}{b}$ c) $\frac{a^2 + b^2}{a}$

d) $\frac{b^2 - a^2}{2a}$ e) $\frac{b^2 - a^2}{2b}$ f) $\frac{a^2 + b^2}{b}$

**GA – XI. 008** În sistemul cartezian (Oxy) se consideră punctele A(3,0), B(0,2), M(3,-3) şi N(-2,2) . Să se determine punctul de concurenţă al dreptelor (AN), (BM) şi al perpendicularei din O pe (AB).

a) $\left(\frac{18}{19},\frac{12}{19}\right)$ b) $\left(\frac{12}{19},\frac{18}{19}\right)$ c) $\left(\frac{8}{19},\frac{12}{19}\right)$

d) $\left(\frac{12}{19},\frac{8}{19}\right)$ e) $\left(\frac{18}{19},\frac{6}{19}\right)$ f) $\left(\frac{16}{19},\frac{18}{19}\right)$

**GA - XI. 009** Se dau punctele A(3,5), B(-1,3), C(4,1). Se cere să se scrie ecuaţia medianei din A a triunghiului $\overline{ABC}$.

a) $2x + 5y - 31 = 0$ b) $x - 2y + 7 = 0$ c) $2x + y - 11 = 0$

d) $x + 2y - 13 = 0$ e) $2x - y - 1 = 0$ f) $3x - y - 4 = 0$

**GA – XI. 010** Ştiind că punctul M(x,y) se află pe dreapta $D: x + y + 1 = 0$, să se determine minimul expresiei: $E = x^2 + y^2$.

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 2 d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

**GA – XI. 011** Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctul de intersecție al dreptelor $(d_1)$ $x+2y-7=0,$ $(d_2)$ $2x-y+1=0$
şi este paralelă cu prima bisectoare.

a) $2x-2y=1;$ b) $y=x+7;$ c) $x-y+5=0$
d) $x-y+2=0;$ e) $x-y+3=0;$ f) $3x-3y+7=0$.

**GA - XI. 012** În planul (Oxy) se consideră punctele A(-1,0), B(2,0) şi punctul variabil M(0,α). Să se calculeze modulul raportului în care punctul fix al fascicolului de drepte ce trec prin proiecțiile originii O respectiv pe dreptele (MA) şi (MB) împarte segmentul $\overline{AB}$.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{7}{8}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{2}{3}$

**GA - XI. 013** Se dă dreapta $(\alpha - 1)x + (\alpha - 2)y - \alpha + 3 = 0$ cu $\alpha\in\mathbf{R}$. Să se determine $\alpha$ astfel că dacă A,B sunt intersecțiile dreptei cu (Ox), respectiv (Oy), să avem:

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=10.$$

a) $\alpha_1=3$, $\alpha_2=4$ b) $\alpha_1=\frac{5}{2}$ $\alpha_2=\frac{17}{4}$ c) $\alpha_1=\frac{7}{2}$ $\alpha_2=\frac{15}{4}$

d) $\alpha_1=-\frac{5}{2}$ $\alpha_2=\frac{17}{4}$ e) $\alpha_1=\frac{5}{2}$ $\alpha_2=-\frac{17}{2}$ f) $\alpha_1=-\frac{7}{2}$ $\alpha_2=-\frac{15}{4}$

**GA - XI. 014** Într-un sistem de axe rectangulare se dau dreptele:
(AB) $8x + 15y - 168 = 0$, (CA) $4x - 3y = 0$, (BC) $12x + 5y + 168 = 0$,
care formează triunghiul $\overline{ABC}$. Să se calculeze lungimea $m_c$ a medianei din vârful C şi aria triunghiului $\overline{ABC}$.

a) $m_c = 20$, $S = 255\sqrt{2}$ b) $m_c$=25, S = 625 c) $m_c$=28, S = 420

d) $m_c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $S = \sqrt{2996}$ e) $m_c=17\sqrt{3}$, $S = 210\sqrt{3}$ f) $m_c$=27, S=421

**GA - XI. 015** Se dau dreptele $(d_1)$ $x$-2=0 , $(d_2)$ $x$-6=0. Se consideră pe $(d_1)$ un punct mobil M. Dreapta (OM) taie pe $(d_2)$ în N, iar paralele din N la bisectoarea a doua taie pe (Oy) în P. Dreapta (MP) trece printr-un punct fix. Să se determine coordonatele acestui punct.

a) (0,0) b) (1,-1) c) (-1,1) d) (3,-3) e) (-3,3) f) (2,-2)

**GA - XI. 016** Un triunghi isoscel cu baza $\overline{AB}$ are vârfurile A(-3,-1), B(7,5) , iar C este situat pe dreapta (d) $x$-$y$+8 = 0. Să se scrie ecuațiile laturilor (AC) şi (BC).

a) $2x - y + 9 = 0$ (AC), $x + 2y - 13 = 0$ (BC)

b) $x - 3y = 0$ (AC), $3x - y - 16 = 0$ (BC)

c) $2x - y + 5 = 0$ (AC), $x + 2y - 17 = 0$ (BC)

d) $4x - y + 11 = 0$ (AC), $x + 4y - 27 = 0$ (BC)

e) $4x - 3y + 9 = 0$, (AC), $3x + 4y - 41 = 0$ (BC)

f) $x + y + 4 = 0$ (AC), $x - y - 2 = 0$ (BC)

**GA - XI. 017** Pe axele (Ox) şi (Oy) considerăm punctele A($a$,0) şi B(0,$b$) şi punctele mobile M şi N astfel ca AM = NB, unde $A \in \overline{OM}$, $B \in \overline{ON}$ . Mediatoarea segmentului $\overline{MN}$ trece priuntr-un punct fix. Să se determine coordonatele acestui punct.

a) $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$ b) $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ c) $\left(\frac{a-b}{2},-\frac{a-b}{2}\right)$

d) $\left(-\frac{a-b}{2},\frac{a-b}{2}\right)$ e) $\left(\frac{a+b}{2},-\frac{a+b}{2}\right)$ f) $\left(-\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2}\right)$

**GA - XI. 018** Pe catetele $\overline{OB}$ şi $\overline{OC}$ ale unui triunghi dreptunghic se construiesc în afară pătrate în care vârfurile opuse lui O sunt, respectiv, D şi E. Să se determine coordonatele punctului H de intersecţie a dreptelor (CD) şi (BE), dacă B($b$,0) iar C(0,$c$).

a) H $\left(\dfrac{bc^2}{b^2+c^2+bc}, \dfrac{b^2c}{b^2+c^2+bc}\right)$

b) H $\left(\dfrac{bc^2}{b^2+c^2-bc}, \dfrac{b^2c}{b^2+c^2-bc}\right)$

c) H $\left(\dfrac{bc}{b+c}, \dfrac{bc}{b-c}\right)$

d) H $\left(\dfrac{b^2}{b+c}, \dfrac{c^2}{b+c}\right)$

e) H $\left(\dfrac{b^2}{b-c}, \dfrac{c^2}{b-c}\right)$

f) H $\left(\dfrac{b^2+c^2}{bc}, \dfrac{b^2-c^2}{bc}\right)$

**GA - XI. 019** Fie A şi B punctele în care dreapta $ax + (2a + 1)y + a^2 = 0$ taie axa (Ox), respectiv (Oy), ($d_1$) dreapta ce trece prin A şi este paralelă cu prima bisectoare a axelor; ($d_2$) dreapta care trece prin B şi este perpendiculară pe ($d_1$). Să se determine "$a$" astfel încât punctul de intersecţie dintre ($d_1$) şi ($d_2$) să fie pe dreapta de ecuaţie $x + 5y = 1$.

a) $a = \pm 2$ b) $a = \pm 1$ c) $a = 0, a = 1$

d) $a = 2, a = 3$ e) $a = \pm 3$ f) $a = -1, a = 3$

**GA - XI. 020** Se dau dreptele (AB): $x - 2y + 3 = 0$, (AC): $2x - y - 3 = 0$, (BC): $3x + 2y + 1 = 0$. Să se scrie ecuaţia înălţimii din A a triunghiului $\overline{ABC}$.

a) $2x - 3y + 3 = 0$ b) $6x - 9y - 1 = 0$ c) $-4x + 6y - 1 = 0$

d) $2x - 3y - 1 = 0$ e) $6x - 9y + 2 = 0$ f) $4x - 6y + 3 = 0$

**GA – XI. 021** Fie în planul (Oxy) punctele A(3,0) şi B(-1,8) . Prin A se duce o paralală (d) la prima bisectoare, iar prin punctul B se duce o dreaptă care taie dreapta (d) într-un punct C astfel încât triunghiul $\overline{ABC}$ să fie isoscel cu baza $\overline{AB}$. Să se afle coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului $\overline{ABC}$.

a) (3,4) b) (-1,3) c) (3,5)

d) $\left(\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right)$ e) $\left(\frac{19}{3},\frac{20}{3}\right)$ f) $\left(\frac{17}{3},\frac{10}{3}\right)$

**GA - XI. 022** Se dau punctele A(3,0), B(-1,8) şi C astfel încât triunghiul $\overline{ABC}$ este isoscel cu baza $\overline{AB}$ şi C aparţinând dreptei (d), paralela prin A la prima bisectoare. Să se determine coordonatele punctului H de intersecţie a înălţimilor triunghiului.

a) H(2,4) b) H$\left(\frac{7}{3},\frac{14}{3}\right)$ c) H$\left(\frac{7}{3},-\frac{14}{3}\right)$

d) H$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ e) H$\left(-\frac{7}{3},\frac{14}{3}\right)$ f) H$\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

**GA - XI. 023** Fie M un punct variabil pe prima bisectoare în planul (xOy), A(3,1) şi B(-1,2) două puncte fixe. Dreapta (MA) taie axa (Ox) în P, iar dreapta (MB) taie axa (Oy) în Q. Să se studieze dacă fascicolul de drepte (PQ) trece printr-un punct fix şi în caz afirmativ să se determine coordonatele acestuia.

a) nu trece printr-un punct fix b) trece prin punctul fix $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

c) trece prin punctul fix $\left(\frac{3}{2},1\right)$ d) trece prin punctul fix $\left(1,\frac{3}{2}\right)$

e) trece prin punctul fix $\left(\frac{32}{5},\frac{7}{3}\right)$ f) trece prin punctul fix $\left(\frac{31}{3},-\frac{1}{5}\right)$

**GA - XI. 024** Se dau dreptele $x + y - 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ şi $x - 2y - 3 = 0$, care sunt laturile unui paralelogram. Să se scrie ecuaţiile diagonalelor.

a) $2x - y = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ b) $x - 2y - 3 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$
c) $x - 2y + 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ d) $x + 4y - 1 = 0$, $-x + 2y + 3 = 0$

e) $3x + 6y - 5 = 0$, $5x + 2y - 7 = 0$ f) $3x + 6y - 5 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$

**GA - XI. 025** Fie în planul (xOy) triunghiul având laturile de ecuaţii $x - y + 1 = 0$,

$2x + y - 4 = 0$ şi $x + 2y + 7 = 0$. Să se determine coordonatele ortocentrului H al acestui triunghi.

a) $H\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ b) $H\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ c) $H\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

d) $H\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ e) $H\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ f) $H\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

**GA - XI. 026** Să se determine punctul de intersecție al dreptei (d), de pantă $\frac{2}{5}$ şi care trece prin punctul (3,1), cu drepta ( d' ) având urmele : $-\frac{8}{3}$ pe axa (Ox) şi -4 pe (Oy).

a) (1,1) b) (-1, -1) c) (2,1) d) (2,2) e) (-2, -1) f) (1,2)

**GA - XI. 027** Să se determine punctul de intersecție al dreptei (d) ce trece prin punctele (1,0) şi (-1,4) cu drepta ( d' ), perpendiculară pe (d), având urma -3 pe axa (Oy).

a) (1,-2) b) (1, -1) c) (2,-1) d) (2, -2) e) (-2,2) f) (0,3)

**GA - XI. 028** Se dau punctele A(1,0), B(-2,4), C(-1,4), D(3,5). Să se găsească pe dreapta $y = 3x - 5$ un punct M astfel încât ariile triunghiurilor $\overline{MAB}$ şi $\overline{MCD}$ să fie egale.

a) $M_1\left(2,\frac{7}{3}\right)$, $M_2(-9, -32)$ b) $M_1\left(\frac{7}{3},2\right)$, $M_2(-9,-32)$

c) $M_1(1,-2)$, $M_2\left(\frac{5}{3},0\right)$ d) $M_1(-1,-8)$, $M_2\left(-\frac{5}{3},-10\right)$

e) $M_1(-2, -11)$, $M_2\left(\frac{1}{3},-4\right)$ f) $M_1(3,4)$, $M_2\left(\frac{2}{3},-3\right)$

**GA - XI. 029** Se dă triunghiul $\overline{ABC}$ determinat de dreptele (AB): $x + 2y - 4 = 0$, (BC): $3x + y - 2 = 0$, (CA): $x - 3y - 4 = 0$. Să se calculeze aria triunghiului $\overline{ABC}$.

a) $A_{\Delta ABC} = 10$ b) $A_{\Delta ABC} = 8$ c) $A_{\Delta ABC} = 6$

d) $A_{\Delta ABC} = 5$ e) $A_{\Delta ABC} = 7$ f) $A_{\Delta ABC} = 9$

**GA - XI. 030** Se dau punctele A(2,1) şi B(-5,-3). Să se afle punctul M pe dreapta (d) $y = x + 4$, astfel ca $m\left(\widehat{AMB}\right) = 90°$.

a) $M_1(-1,3)$, $M_2(1,5)$ b) $M_1(-2,2)$, $M_2\left(-\frac{11}{2},-\frac{3}{2}\right)$ c) $M_1(-1,3)$, $M_2\left(-\frac{11}{2},-\frac{3}{2}\right)$

d) $M_1(1,5)$ e) $M(-3,1)$ f) $M_1(0,4)$, $M_2(-3,1)$

**GA - XI. 031** Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin intersecţia dreptelor ($d_1$) $2x - 3y + 6 = 0$, ($d_2$) $x + 2y - 4 = 0$ şi este perpendiculară pe dreapta care trece prin P(2,2) şi intersectează axa (Ox) într-un punct aflat la distanţa 4 de originea O a sistemului de axe de coordonate.

a) $x + y - 2 = 0$ b) $x - 3y + 4 = 0$

c) $x + y -2 = 0$ şi $x - 3y + 4 = 0$ d) $x - 2y + 4 = 0$ şi $6x + y - 2 = 0$

e) $4x + y - 2 = 0$ f) $x - y + 2 = 0$ şi $3x + y - 2 = 0$

**GA - XI. 032** Se dau punctele A(2,2) şi B(5,1). Să se determine punctul C situat pe dreapta $x - 2y + 8 = 0$, astfel încât aria triunghiului $\overline{ABC}$ să fie 17.

a) $C_1(12,10)$, $C_2\left(-\frac{76}{5},-\frac{18}{5}\right)$ b) $C_1(10,9)$, $C_2\left(-\frac{8}{5},-\frac{16}{5}\right)$

c) $C_1(8,8)$, $C_2\left(-\frac{12}{5},-\frac{14}{5}\right)$ d) $C_1(-20,-6)$, $C_2\left(-\frac{26}{5},\frac{7}{5}\right)$

e) $C_1(-2,3)$, $C_2\left(-\frac{14}{3},\frac{5}{3}\right)$ f) $C_1(12,10)$, $C_2\left(-\frac{12}{5},-\frac{14}{5}\right)$

**GA - XI. 033** Se dă dreapta $3x - 4y + 4 = 0$ şi punctul A(8,0). Să se afle aria triunghiului format de dreapta dată şi două drepte ce trec prin A şi fac cu axa (Ox) unghiurile de 45° şi 135°.

a) 90 b) 100 c) 105 d) 110 e) 116 f) 112

**GA - XI. 034** Se dă dreapta $5x - 12y + 32 = 0$ şi punctele A(1,-1), B(5,-3). Să se afle coordonatele punctului M egal depărtat de A şi B şi care are distanța de 4 unități până la dreapta dată.

a) $M_1(1,-6)$, $M_2(9,10)$ b) $M_1(-1,-10)$, $M_2(9,10)$ c) $M_1(2,-4)$, $M_2(-2,12)$

d) $M_1(-2,-12)$, $M_2(1,-6)$ e) $M_1(4,0)$, $M_2\left(\frac{180}{19},\frac{208}{19}\right)$ f) $M_1(0,-8)$, $M_2\left(-\frac{180}{19},-\frac{512}{19}\right)$

**GA - XI. 035** Să se determine $\lambda$ astfel ca distanța de la punctul A(3,4) la dreapta variabilă $(\lambda+3)x - (\lambda-2)y + 3\lambda - 1 = 0$ să fie $d = \sqrt{10}$.

a) 4, -2 b) $1,-\frac{7}{4}$ c) $-\frac{9}{2},\frac{7}{4}$ d) $\frac{9}{2},-\frac{7}{4}$ e) $-1,\frac{7}{4}$ f) $\frac{2}{3},-\frac{2}{3}$

**GA - XI. 036** Să se scrie ecuațiile dreptelor care trec prin punctul A(-5,7) şi sunt situate la distanța 3 de punctul B(0,7).

a) $4x + 3y - 1 = 0$, $4x - 3y + 41 = 0$ b) $4x + 5y - 15 = 0$, $4x - 5y + 55 = 0$

c) $3x - 2y + 29 = 0$, $3x + 2y + 1 = 0$ d) $3x + 4y - 13 = 0$, $4x + 3y - 1 = 0$

e) $3x - 4y + 43 = 0$, $3x + 2y + 1 = 0$ f) $3x - 4y + 43 = 0$, $3x + 4y - 13 = 0$

**GA - XI. 037** Se dau dreptele $3x - 4y + 6 = 0$ şi $4x - 3y - 9 = 0$. Să se determine paralela la a doua bisectoare a axelor de coordonate care formează între cele două drepte un segment de $5\sqrt{2}$ unități.

a) $y = -x + 10$, $y = -x + 20$ b) $y = -x - 20$, $y = -x + 20$ c) $y = -x + 50$, $y = -x + 20$

d) $y = -x + 50$, $y = -x - 20$ e) $y = -x - 10$, $y = -x + 30$ f) $y = -x + 10$, $y = -x - 30$

**GA - XI. 038** Să se calculeze mărimea unghiului format de dreptele $2x - y - 5 = 0$ şi $x - 3y + 4 = 0$ în care se află originea axelor.

a) 30° b) 150° c) 45° d) 135° e) 60° f) 120°

**GA - XI. 039** Se consideră triunghiul cu vârfurile: A(7,4), B(5,1) şi C(1,3). Să se determine distanţele vârfurilor B şi C la mediana din vârful A.

a) $d_B = \frac{4}{\sqrt{5}}, d_C = 1$ b) $d_B = 1, d_C = \frac{4}{\sqrt{5}}$ c) $d_B = d_C = 1$

d) $d_B = d_C = \frac{3}{\sqrt{5}}$ e) $d_B = \frac{3}{\sqrt{5}}, d_C = \frac{2}{\sqrt{5}}$ f) $d_B = d_C = \frac{4}{\sqrt{5}}$

**GA - XI. 040** Fie în planul (xOy) punctul M(-2,6) şi dreapta (d) $x + 2y - 5 = 0$. Să se afle distanţa simetricului punctului M în raport cu dreapta (d) până la prima bisectoare.

a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

**GA - XI. 041** Fie în planul (xOy) punctele A(3,3) şi B(7, -3) şi dreapta (d) $4x-2y+3=0$. Să se afle punctul M de pe dreapta (d) care este echidistant faţă de punctele A şi B.

a) M(1,2) b) $M\left(-\frac{13}{4}, -\frac{23}{4}\right)$ c) $M\left(-\frac{23}{4}, -\frac{29}{4}\right)$

d) $M\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}\right)$ e) $M\left(-\frac{29}{8}, -\frac{23}{4}\right)$ f) $M\left(-\frac{13}{8}, -\frac{23}{4}\right)$

**GA – XI. 042** Fie punctul P( a,b ) $a > 0, b. > 0;$ dat prin coordonatele lui într-un sistem cartezian ortogonal (Oxy), $(d_1)$ şi $(d_2)$ două drepte cu pante negative care trec prin P şi determină cu axele de coordonate triunghiuri de arie $k^2$ . Fie $A_1$ ,$B_1$ punctele de intersecţie ale dreptei $(d_1)$ cu (Ox), respectiv cu (Oy), $A_2$ , $B_2$ punctele de intersecţie ale dreptei ($d_2$ ) cu (Ox), respectiv, cu (Oy). Să se determine coeficienții unghiulari $m_1$, $m_2$ ai dreptelor ($A_1$ $B_2$), respectiv ($A_2$ $B_1$) .

a) $m_1 = \frac{b}{a}, \quad m_2 = -\frac{a}{b}$

b) $m_1 = -\frac{b}{a}, \quad m_2 = -\frac{a}{b}$

c) $m_1 = -\frac{a}{b}, \quad m_2 = -\frac{a}{b}$

d) $m_1 = -\frac{a^2}{b}, \quad m_2 = -\frac{a}{b^2}$

e) $m_1 = -\frac{b}{a}, \quad m_2 = -\frac{b}{a}$

f) $m_1 = -\frac{b^2}{a^2}, \quad m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$

**GA - XI. 043** Fie A($a$,0) un punct fix pe axa (Ox) şi D o dreaptă trecând prin originea axelor. Două drepte date $D_1$ şi $D_2$ trecând prin A şi simetrice în raport cu (Ox) taie pe (Oy) şi D în punctele $M_1$, $N_1$şi $M_2$, $N_2$. Dreptele ($M_1N_2$) şi ($M_2N_1$) trec printr-un punct P. Să se afle locul geometric al punctului P când D se roteşte în jurul originii O.

a) $x + y = a$

b) $2x - y = 0$

c) $x = - a$

d) $x = a$

e) $x = 2a$

f) $x = -2a$

**GA - XI. 044** Fie A($a$,0) şi B($b$,0) două puncte fixe situate pe axa (Ox), iar M şi N două puncte mobile pe axa (Oy), în ordonarea (O,M,N), astfel ca ON = 2 OM. Să se afle locul geometric al punctului P, intersecția dreptelor (AM) şi (BN).

a) $y = \frac{ab}{2a-b}$

b) $y = \frac{ab}{2b-a}$

c) $x = \frac{ab}{a-b}$

d) $x = \frac{ab}{a-2b}$

e) $x = \frac{ab}{2a-b}$

f) $x = \frac{ab}{a+b}$

**GA - XI. 045** Fie punctul A($a$,$b$). O dreaptă mobilă (d) ce trece prin punctul A taie axa (Ox) în P. Perpendiculara în A pe (d) taie axa (Oy) în Q. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $\overline{PQ}$.

a) $2ax + 2by - a^2 - b^2 = 0$

b) $2ax - 2by + a^2 - b^2 = 0$

c) $2ax - 2by - a^2 + b^2 = 0$

d) $ax + by + a^2 + b^2 = 0$

e) $ax + by - a^2 - b^2 = 0$

f) $ax - by + a^2 - b^2 = 0$

**GA - XI. 046** Se consideră dreapta (d) $x + 2y - 12 = 0$. O paralelă la bisectoarea a doua taie axele (Ox) şi (Oy) respectiv în A şi B. Se construieşte dreptunghiul $\overline{ABCD}$, vârful C fiind situat pe dreapta (d). Să se afle locul geometric al intersecției dreptei $(AD)$ cu paralela prin C la (Ox).

a) $2x + y - 12 = 0$ b) $x - 4y + 12 = 0$ c) $x + 4y - 12 = 0$

d) $2x - y - 12 = 0$ e) $x + 2y - 12 = 0$ f) $4x - y + 12 = 0$

**GA - XI. 047** Fie $\overline{\mathrm{ABC}}$ un triunghi isoscel având vârfurile A(0,$a$), B(-$c$,0) şi C($c$,0). Prin mijlocul O al bazei $\overline{\mathrm{BC}}$ se duce o dreaptă mobilă care intersectează dreptele (AB) şi (AC) în punctele D şi, respectiv, E. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor (BE) şi (CD).

a) $ax + cy = 0$ b) $x = a$ c) $x = -a$

d) $ax - cy = 0$ e) $y = a$ f) $y = -a$

**GA - XI. 048** Punctele A($2a$,0) şi B($2b$,0) sunt fixe, iar punctul C($0,2\lambda$) descrie axa (Oy). Fie $A', B'$ mijloacele segmentelor $\overline{BC}$, $\overline{AC}$. Să se găsească locul geometric al centrului de greutate al triunghiului $\overline{CB'A'}$.

a) $x + y - \dfrac{a+b}{2} = 0$ b) $y = \dfrac{a+b}{3}$ c) $x = \dfrac{a+b}{3}$

d) $x - y - \dfrac{a+b}{3} = 0$ e) $y = \dfrac{a+b}{2}$ f) $x = \dfrac{a+b}{2}$

**GA - XI. 049** Fie triunghiul $\overline{ABC}$. Picioarele $B'(b,0)$ şi $C'(c,0)$ ale înălțimilor $\overline{BB'}$ şi $\overline{CC'}$, sunt puncte fixe pe axa (Ox), iar vârful A($0,\lambda$) este mobil pe axa (Oy). Se cere locul geometric al ortocentrului triunghiului $\overline{ABC}$.

a) $y = b + c$ b) $y = -b - c$ c) $x = -b - c$

d) $x = b + c$ e) $x + y = b + c$ f) $x - y = b - c$

**GA - XI. 050** Se dă dreapta (d) $2x + 3y - 12 = 0$. Un punct M mobil pe (d) se proiectează pe (Ox) în P şi pe dreapta $x - y + 2 = 0$ în Q. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului $\overline{PQ}$.

a) $x + y - 2 = 0$ b) $2x - y + 5 = 0$ c) $x - 7y + 10 = 0$
d) $3x - y + 5 = 0$ e) $x + 7y - 10 = 0$ f) $4x - y + 7 = 0$

**GA - XI. 051** Fie într-un plan dreptele perpendiculare (Ox) şi (Oy) şi punctul fix $M_0$. Prin $M_0$ se duc două drepte perpendiculare, una dintre acestea intersectând dreapta (Ox) în A, iar cealaltă intersectând dreapta (Oy) în B. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $\overline{AB}$ când unghiul drept $\widehat{AM_0B}$ se roteşte în jurul lui $M_0$.

a) cercul circumscris triunghiului $\overline{OM_0C}$ unde C este simetricul lui $M_0$ faţă de axa (Ox)
b) cercul înscris în triunghiul $\overline{AM_0B}$
c) mediatoarea segmentului $\overline{AB}$
d) mediatoarea segmentului $\overline{OM_0}$
e) cercul cu centrul în O şi rază $\dfrac{OM_0}{2}$
f) bisectoarea unghiului $\widehat{OM_0M_0'}$ unde $M_0'$ este proiecţia lui $M_0$ pe axa (Ox)

**GA – XI. 052** Se consideră punctele $A(\lambda - 1,0), B(\lambda + 2,0), C(0,\lambda - 2), D(0,\lambda + 1)$. Să se afle locul geometric al intersecţiei dreptelor (AD) şi (BC).

a) $x + y - 1 = 0$; b) $x - y - 1 = 0$; c) $x - y + 1 = 0$; d) $x + y + 1 = 0$
e) $3x - y - 1 = 0$; f) $3x + y - 1 = 0$.

**GA – XI. 053** Se dă unghiul drept xOy şi punctul fix A (a,b) în planul său. Prin A* se duc două drepte perpendiculare, dintre care una taie latura $[Ox)$ în K, iar cealaltă taie latura $[Oy)$ în L. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului $\overline{LK}$ când unghiul drept $\widehat{LAK}$ se roteşte în jurul lui A.

a) $ax - by = a^2 + b^2$; b) $2ax + 2by = a^2 + b^2$; c) $2ax - 2by = a^2 + b^2$

d) $ax - by = a^2 - b^2$; e) $2ax - 2by = a^2 - b^2$; f) $ax + by = a^2 + b^2$.

**GA - XI. 054** O dreaptă se deplasează paralel cu ea însăşi şi intersectează axele de coordonate ale unui reper ortogonal în punctele M şi N. Prin M şi N se duc drepte de direcţii fixe. Ce este locul geometric al punctului de intersecţie al acestor drepte ?

a) mediatoarea segmentului $\overline{MN}$; b) cerc;
c) dreaptă ce trece prin origine; d) elipsă;
e) hiperbolă echilaterală; f) parabolă.

**GA – XI. 055** Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât dreptele $d_1$ : 3x+my+2m+3=0 şi $d_2$ : 2x+(m-1)y+m+3=0 să coincidă.

a) $m \in \varnothing$ b) m=0 c) m=1

d) m=2 e) m=3 f) m=4

**GA – XI. 056** Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât dreptele de ecuaţii ($d_1$) x+2y-2=0, ($d_2$) 2x-4y+3=0 şi ($d_3$) $\alpha$x+y-1=0 să fie concurente:

a) $\alpha=1$ b) $\alpha=0$ c) $\alpha=\frac{1}{2}$ d) $\alpha=-1$ e) $\alpha=-\frac{1}{2}$

**GA – XI. 057** Să se scrie ecuaţia dreptei din plan, ştiind că A(2, 3) este piciorul perpendicularei coborâtă din origine pe dreaptă.

a) 3x+2y-13=0; b) x+3y-11=0; c) 3x+y-9=0;

d) 2x+3y-13=0; e) 3x+4y-14=0; f) 4x+3y-17=0.

**GA – XI. 058** Se dau dreptele x+y-2=0 şi 3x-2y+1=0. Să se determine dreapta fasciculului care are ca drepte de bază, dreptele date şi trece prin punctul M(2, 3).

a) 8x-7y+5=0 b) 8x+7y+5=0 c) 8x-7y-5=0

d) x-y+5=0 e) x+y+5=0 f) x-y-5=0

**GA – XI. 059** Pe dreapta care uneşte punctele A(-3,5), B(-1,2) să se determine un punct de abscisă x=5

a) (5, -1) b) (5, -7) c) (3, 5)

d) (-7, 5) e) (5, 0) f) (1,5)

**GA – XI. 060** Să se determine ecuaţia mediatoarei segmentului ce uneşte punctele (3,1) şi (4,8)

a) 9x-7y=0 b) 7x-9y=0 c) x+7y-10=0

d) 7x-y-20=0 e) x+7z-20=0 f) x-y+1=0

**GA – XI. 061** În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(-2, 0) şi B(0,1). Fie A’ mijlocul segmentului [OA] şi B’ simetricul lui B faţă de origine. Să se determine punctul de intersecţie al dreptei (A’B’) cu prima bisectoare a axelor de coordinate.

a) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ b) $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$; $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

d) (-1, -1) e) (1,1) f) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

**GA – XI. 062** Să se determine vârful C al triunghiului ABC, A(1,0), B(-2,4) pentru care centrul de greutate este punctul G (1,2).

a) C (4,2) b) C (0,2) c) C (-4,2)

d) C (4,-2) e) C(1,1) f) C (2,4)

**GA – XI. 063** Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}^*$ astfel încât punctele A(3,9), B(8,4), C(-2,4) şi D($\alpha$, -$\alpha$) să definească un patrulater inscriptibil.

a) $\alpha=1$ b) $\alpha \in \emptyset$ c) $\alpha=-1$

d) $\alpha=2$ e) $\alpha=-2$ f) $\alpha=3$

**GA – XI. 064** Să se determine raza cercului de ecuație:

$$x^2+y^2-2x-4y-3=0.$$

a) 4; b) $\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{2}$;

d) $4\sqrt{2}$; e) 8; f) 9.

**GA – XI. 065** Să se determine ecuaţia cercului ce trece prin origine şi are centrul în punctul (-1,3).

a) $x^2+y^2-4x+6y=0$ b) $x^2+y^2+2x-6y=0$

c) $x^2+y^2-8x-6y=0$ d) $x^2+y^2-3x+y-10=0$

e) $x^2+y^2-8x-4y=0$ f) $x^2+y^2+2x+6y-10=0$

**GA – XI. 066** Să se determine ecuaţia cercului tangent dreptei y=1 în punctul A(1,1) şi tangent dreptei 2x-3y=0 în punctul B(3,2)

a) $x^2+y^2-10x+9y-1=0$ b) $x^2+y^2-13x+13y=0$

c) $x^2+y^2-2x-10y+10=0$ d) $x^2+y^2-8x+5y+1=0$

e) $x^2+y^2-12x+13y-3=0$ f) $x^2+y^2-11y+9=0$

**GA – XI. 067** Din punctul A(-8,6) se duc tangente la cercul $x^2+y^2=25$. Să se determine unghiul dintre tangente la cerc.

a) $30^0$ b) $60^0$ c) $45^0$

d) $90^0$ e) $15^0$ f) $75^0$

**GA – XI. 068** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele A(4,5), B(-2, -3) şi C(5, 4). Cercul circumscris triunghiului ABC are ecuaţia:

a) $x^2+y^2+2x-2y-23=0$
b) $x^2+y^2-2x+2y-23=0$
c) $x^2+y^2-2x-2y-23=0$
d) $x^2+y^2+2x+2y-23=0$
e) $x^2+y^2+2x+2y+23=0$
f) $x^2+y^2+2x-2y+23=0$

**GA – XI. 069** Să se determine coordonatele centrelor cercurilor de rază $\sqrt{13}$ ce trec prin punctul A(2,1) şi taie axele de coordonate după două coarde de lungime egală.

a) $C_1(1,-1)$, $C_2(1,4)$
b) $C_1(4,1)$, $C_2(1,4)$
c) $C_1(-1,-1)$, $C_2(4,4)$
d) $C_1(1,1)$, $C_2(4,4)$
e) $C_1(1,2)$, $C_2(2,1)$
f) $C_1(4,4)$, $C_2(3,3)$

**GA – XI. 070** Se dă cercul $x^2+y^2-6y+8=0$. Să se găsească $M\in Ox$ din care ducând tangente la cerc, acestea să determine pe dreapta y=6 un segment de 6 unităţi.

a) $\alpha=3\pm\sqrt{2}$
b) $\alpha=\pm 2\sqrt{2}$
c) $2\pm\sqrt{2}$
d) $\pm 3\sqrt{2}$

e) $\pm 3\sqrt{3}$ f) $\pm 2\sqrt{3}$

**GA – XI. 071** Găsiti ecuația cercului care trece prin punctele A(1,0) , B(-1,0) și C(1,1).

a) $x^2+y^2+y-1=0$ b) $x^2+y^2-y-1=0$ c) $x^2+y^2-y+1=0$

d) $x^2+y^2+y+1=0$ e) $x^2+y^2-y=0$ f) $x^2+y^2-1=0$

**GA – XI. 072** Să se găsească ecuația carteziană a cercului cu centrul în $M_0(1,1)$ și tangent dreptei $3x+4y+8=0$

a) $(x-1)^2+(y-1)^2=8$ b) $(x-1)^2+(y-1)^2=9$

c) $(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$ d) $x^2+y^2-2x=9$

e) $x^2+y^2-2y=8$ f) $x^2+y^2-2x=\sqrt{2}$

**GA – XI. 073** Se consideră dreapta D: x = 4 și punctul P ( 6,5) în planul ( Oxy). Să se determine cercul de diametru $\overline{PP'}$, unde $P'$ este proiecția punctului P pe dreapta D.

a) $x^2+y^2-10x+10y+49=0$ b) $x^2+y^2-10x-10y+49=0$

c) $x^2+y^2-10x-10y-49=0$ d) $x^2+y^2+10x-10y+49=0$

e) $x^2+y^2+10x+10y+49=0$ f) $x^2+y^2+10x+10y-49=0$

**GA – XI. 074** Fie A(a,b) un punct fix în planul (Oxy), iar $M\in(Ox)$ şi $N\in(Oy)$ două puncte mobile, astfel ca $OM=2\cdot ON$. Să se afle locul geometric al proiecţiei punctului M pe dreapta (AN).

a) $x^2+y^2-(a+2b)x+(2a-b)y=0$ b) $x^2+y^2-2ax+2by=0$

c) $x^2+y^2-(a-2b)x+(2a+b)y=0$ d) $x^2+y^2+2ax-2by=0$

e) $x^2+y^2-(a+b)x+(a-b)y=0$ f) $x^2+y^2+ax+by+a^2+b^2=0$

**GA – XI. 075** Se dă cercul de ecuaţie $x^2+y^2-3x-3y+2=0$ şi punctul A(0,2) situat pe cerc. Să se afle coordonatele vârfurilor pătratului $\overline{ABCD}$ înscris în cerc.

a) $C(2,0)$; $B(1,3)$; $D(1,0)$; b) $C(3,2)$; $B(3,1)$; $D(2,0)$;

c) $C(1,3)$; $B(0,1)$; $D(3,2)$; d) $B(1,0)$; $C(3,1)$; $D(2,3)$;

e) $B(3,2)$; $C(0,1)$; $D(2,3)$; f) $B(2,3)$; $C(2,0)$; $D(3,2)$.

**GA - XI. 076** Se cer centrul şi raza cercului a cărei ecuaţie este

$$8(x^2+y^2)+4x+12y-27=0.$$

Care este poziţia originii faţă de acest cerc ?

a) $C\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$, r = 2 b) $C\left(-\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$, r = 2 c) $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, r = 4 interioară interioară exterioară

d) $C\left(-\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$, r = 2 exterioară

e) $C\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$, r = 3 interioară

f) $C\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, r = 2 exterioară

**GA - XI. 077** Se dau punctele A(-1,4), B(3,-2). Să se scrie ecuația cercului care are pe $\overline{AB}$ ca diametru .

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 11 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 13 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 13 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 14 = 0$

**GA - XI. 078** Să se determine toate valorile parametrului real $\lambda$ pentru care dreapta $(1 - \lambda^2)x - 2\lambda y + 2(1 + \lambda^2) = 0$ este tangentă la cercul cu centrul în origine şi având raza r = 2.

a) $\lambda = 1$

b) $\lambda = 2$ şi $\lambda = -2$

c) $\lambda = \frac{1}{2}$

d) $\lambda = -1$ şi $\lambda = 3$

e) $\lambda \in \varnothing$

f) $\lambda \in \mathbf{R}$

**GA - XI. 079** Fie în planul (Oxy) punctele A($a$,0) şi B($b$,0) unde $a \cdot b > 0$. Să se afle locul geometric al punctelor de contact ale tangentelor duse din origine la un cerc variabil ce trece prin A şi B.

a) $x = \dfrac{a+b}{2}$

b) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

c) $x^2 + y^2 - ax - ay + 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 - ab = 0$

e) $\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{b-a}{2}\right)^2 = 1$

f) $\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2 + y^2 = a^2b^2$

**GA - XI. 080** Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor $x^2 + y^2 - (\lambda+5)x - (\lambda + 1)y + \lambda = 0$, când $\lambda$ variază în **R**.

a) $x - y - 2 = 0$

b) $x - y - 3 = 0$

c) $x + y + 3 = 0$

d) $x - y - 4 = 0$

e) $x + y - 2 = 0$

f) $x + y + 2 = 0$

**GA - XI. 081** Să se scrie ecuațiile tangentelor la cercul $x^2 + y^2 - 3x + y + 2 = 0$ în punctele de intersecție cu axa (Ox).

a) $2x + y - 1 = 0$
$x + y - 2 = 0$

b) $x - y - 1 = 0$
$2x + y - 2 = 0$

c) $x - y - 1 = 0$
$x + y - 2 = 0$

d) $x + y - 1 = 0$
$x - y + 2 = 0$

e) $2x + 2y - 1 = 0$
$x - y - 2 = 0$

f) $x + y + 1 = 0$
$x + y + 2 = 0$

**GA - XI. 082** Să se scrie ecuația cercului înscris în triunghiul ce are ca vârfuri punctele A(2,-2), B$(2, \sqrt{2} - 2)$ și C$(\sqrt{2} + 2, -2)$.

a) $\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 3 - \sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$

b) $\left(x+1+\sqrt{2}\right)^2+\left(y-3+\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{2}$ c) $\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2=1$

d) $\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$ e) $x^2+\left(y+2\right)^2=\sqrt{2}$

f) nici un răspuns nu e corect

**GA - XI. 083** Să se scrie ecuațiile cercurilor ce sunt tangente în punctul A(1,2) dreptei D: $x + y - 3 = 0$ şi au raza $\sqrt{2}$ .

a) $x^2+y^2-4x-6y+11=0$
$x^2+y^2-2y-1=0$

b) $x^2+y^2-x-y-7=0$
$x^2+y^2-2x-2y-2=0$

c) $x^2+y^2-1=0$
$x^2+y^2-4x-5=0$

d) $x^2+y^2-1=0$
$x^2+y^2-x-12=0$

e) $x^2+y^2-4=0$
$x^2+y^2+2x+4y-13=0$

f) nici un răspuns nu e corect

**GA – XI. 084** Să se scrie ecuațiile cercurilor tangente axei (Ox), având centrul pe prima bisectoare şi care trec prin A(2,1).

*a*) $x^2+y^2+2x+2y+1=0$
$x^2+y^2-2x-2y+1=0$

*b*) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$
$x^2+y^2-10x-10y+25=0$

*c*) $x^2+y^2-4x-4y+2=0$
$x^2+y^2-2x-2y+1=0$

*d*) $x^2+y^2-x-y+1=0$
$x^2+y^2-5x-5y+4=0$

*e*) $x^2+y^2-2x-2y-1=0$
$x^2+y^2-10x-10y+20=0$

*f*) $x^2+y^2-2x-2y+5=0$
$x^2+y^2-10x-10y+16=0$

**GA – XI. 085** Să se scrie ecuația cercului cu centrul pe dreapta ($d_1$) $y = 2x – 3$, tangent dreptei ($d_2$) 2x + 2y = 13 în punctul $M\left(\frac{7}{2},3\right)$.

a) $4x^2+4y^2-20x-16y-107=0$; b) $4x^2+4y^2-24x-24y+71=0$
c) $4x^2+4y^2+24y-157=0$; d) $4x^2+4y^2-20x-16y+33=0$
e) $4x^2+4y^2-8x+8y-81=0$; f) $4x^2+4y^2-8x-4y-45=0$

**GA - XI. 086** Se consideră cercul de ecuație $x^2+y^2-4x-4y-1=0$. Să se determine cercurile de centru C(-2,5) tangente cercului dat.

a) $x^2+y^2-4x+10y+25=0$ b) $x^2+y^2+4x-10y+25=0$

c) $x^2+y^2+4x-10y-35=0$ d) $x^2+y^2-4x+10y+25=0$
$x^2+y^2+4x-10y+25=0$

e) $x^2+y^2+4x-10y+25=0$
$x^2+y^2+4x-10y-35=0$
f) $x^2+y^2-4x+10y+25=0$
$x^2+y^2+4x-10y-35=0$

**GA - XI. 087** Fie triunghiul $\overline{ABM}$ cu A(1,1), B(-1,1) şi M un punct variabil. Să se afle locul geometric al punctului M ştind că mediana din A a triunghiului $\overline{ABM}$ are o lungime dată *a*.

a) $x^2+y^2=a^2$ b) $x^2+y^2=4a^2$
c) $(x-1)^2+(y-1)^2=a^2$ d) $(x-3)^2+(y-1)^2=4a^2$
e) $(x-1)^2+(y-3)^2=4a^2$ f) $(x-3)^2+(y-3)^2=a^2$

**GA - XI. 088** Fiind dat cercul $x^2+y^2-289=0$, să se determine ecuațiile tangentelor la cerc paralele cu dreapta 15*x* + 8*y* - 12 = 0.

a) 15*x* + 8*y* - 289 = 0
15*x* + 8*y* + 1 = 0
b) 15*x* + 8*y* - 289 = 0
15*x* + 8*y* + 289 = 0
c) 8*x* + 15*y* - 289 = 0
8*x* + 15*y* + 289 = 0

d) $x - y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$  e) $-15x + 8y - 289 = 0$, $15x + 8y + 289 = 0$  f) $15x - 8y - 1 = 0$, $15x + 8y + 1 = 0$

**GA – XI. 089** Să se determine coeficienții unghiulari pentru tangentele la cercul de ecuație $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$, care conțin punctul A(8,7).

a) $m_1 = 1, m_2 = 3$  b) $m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = 2$  c) $m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{3}$

d) $m_1 = 6, m_2 = 4$  e) $m_1 = 0, m_2 = 1$  f) $m_1 = 4, m_2 = 6$

**GA - XI. 090** Să se determine centrele cercurilor ce sunt tangente axei (Ox) şi trec prin punctele A(2,3) şi B(4,1).

a) $C_1(\sqrt{6}, \sqrt{3})$, $C_2(\sqrt{6}, -\sqrt{3})$  b) $C_1(3+\sqrt{6}, 2+\sqrt{6})$, $C_2(3-\sqrt{6}, 2+\sqrt{6})$  c) $C_1(5+\sqrt{6}, 4-\sqrt{6})$, $C_2(5-\sqrt{6}, 4+\sqrt{6})$

d) $C_1(5+\sqrt{6}, 4+\sqrt{6})$, $C_2(5-\sqrt{6}, 4-\sqrt{6})$  e) $C_1(5-\sqrt{6}, 2+\sqrt{6})$, $C_2(5+\sqrt{6}, 2-\sqrt{6})$  f) $C_1(5+\sqrt{6}, 3-\sqrt{6})$, $C_2(5-\sqrt{6}, 3+\sqrt{6})$

**GA - XI. 091** Se consideră cercul de ecuație $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Să se determine ecuațiile tangentelor duse la cerc din punctul A(-1,2).

a) $y = 2$ şi $12x - 5y + 3 = 0$  b) $y = -2$ şi $12x - 5y + 3 = 0$
c) $y = 2$ tangentă unică  d) $12x - 5y + 3 = 0$ tangentă unică
e) $y = 2$ şi $12x + 5y + 2 = 0$  f) $y = 2$ şi $12x + 5y - 2 = 0$

**GA - XI. 092** Să se afle lungimea tangentei duse din origine la cercul care trece prin punctele A(1,1), B(2,0), C(3,2).

a) 1  b) 10  c) $\sqrt{\frac{14}{3}}$  d) $\frac{14}{5}$  e) $\frac{13}{4}$  f) $\sqrt{\frac{3}{14}}$

**GA - XI. 093** Se cere ecuația unui cerc care să fie tangent la bisectoarea întâi în punctul I (2,2) şi care să taie pe axa (Ox) un segment de lungime egală cu 2.

a) $(x-1)^2+(y-1)^2=5$  b) $(x+1)^2+(y+1)^2=5$

c) $\begin{matrix}(x-3)^2+(y-1)^2=2\\(x+3)^2+(y-7)^2=50\end{matrix}$  d) $x^2+(y-1)^2=5,(x-1)^2+y^2=4$

e) $\begin{matrix}(x+3)^2+(y+1)^2=1\\(x-3)^2+(y+7)^2=25\end{matrix}$  f) $(x-3)^2+(y-3)^2=10$

**GA - XI. 094** Se dă cercul de ecuație $x^2+y^2=20$ şi dreptele $(d_1)$ $x+2y+1=0$, $(d_2)$ $2x+y-1=0$. Să se calculeze aria paralelogramului determinat de tangentele la cerc ce sunt paralele cu dreptele date.

a) $\frac{800}{3}$  b) 100  c) 120  d) 80  e) $\frac{400}{3}$  f) 150

**GA - XI. 095** Se dă dreapta (d): $3x-4y+4=0$ şi fie (b) bisectoarea unghiului ascuțit format de dreapta (d) cu axa (Oy). Să se scrie ecuația cercului C, ce trece prin origine, tangent în origine dreptei $y = mx$, $m\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ şi care mai trece prin punctul de intersecție al dreptei (b) cu axa (Ox).

a) $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4m}\right)^2=\frac{1}{16}+\frac{1}{16m^2}$  b) $x^2+y^2-mx+2y=0$

c) $x^2+y^2-mx+4y=0$  d) $\left(x-\frac{1}{2m}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2m}\right)^2=\frac{1}{4m^2}$

e) $(x-m)^2+(y+m)^2=\frac{1}{m^2}$  f) $x^2+(y-2m)^2=\frac{1}{4m^2}$

**GA - XI. 096** Două cercuri sunt ortogonale dacă în punctele lor de intersecție au razele perpendiculare. Să se scrie ecuația cercului ortogonal cercurilor

$$x^2+y^2-6x-15=0,\quad x^2+y^2+2y-15=0$$

şi care trece prin punctul de coordonate (5,-4).

a) $x^2+(y-3)^2=74$ b) $(x-2)^2+(y+6)^2=13$ c) $(x-1)^2+(y+1)^2=41$

d) $x^2+y^2=41$ e) $(x-3)^2+y^2=20$ f) $(x-2)^2+y^2=25$

**GA - XI. 097** Să se scrie ecuația tangentelor comune cercurilor

$$(x-2)^2+(y-1)^2=1 \text{ şi } (x+2)^2+(y+1)^2=9.$$

a) $x+y-1=0$, $x-y=0$ b) $x=1$, $y=2$, $2x=-y$

c) $x-y+1=0$, $x+y=0$, $2x-y=0$ d) $x=1$, $2x=-y$, $y=2$, $x-3y+1=0$

e) $x=1$, $y=2$, $3x+4y-1=0$, $4x-3y+1=0$

f) $x=1$, $y=2$, $3x+4y-5=0$, $4x-3y-10=0$

**GA - XI. 098** Fie în planul (xOy) punctele A(4,0), B(0,3) şi cercul înscris triunghiului $\overline{OAB}$, respectiv cercul ce trece prin mijloacele laturilor triunghiului $\overline{OAB}$. Să se studieze dacă cele două cercuri sunt tangente şi în caz afirmativ să se calculeze coordonatele punctului de contact.

a) sunt tangente în punctul T(1,2) b) sunt tangente în punctul T$\left(2,\frac{3}{2}\right)$

c) nu sunt tangente d) sunt tangente în punctul T$\left(\frac{7}{8},\frac{9}{4}\right)$

e) sunt tangente în punctul T(1,1) f) sunt tangente în punctul T$\left(1,\frac{5}{2}\right)$

**GA - XI. 099** Să se găsească punctele din care tangentele duse la cercul $x^2+y^2-4=0$ au o lungime de 3 unități, iar tangentele duse la cercul $x^2+y^2-7x-14y+20=0$ au o lungime de $\sqrt{5}$ unități.

a) M(2,3), N(5,-7) b) M(-1,1), N(0,-3) c) M(3,-2), N$\left(\frac{1}{5},\frac{17}{5}\right)$

d) M(0,-1), N(-2,3) e) M$\left(\frac{1}{5},\frac{18}{5}\right)$, N$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ f) M (-2,3), N$\left(\frac{18}{5},\frac{1}{5}\right)$

**GA – XI. 100** Se consideră familia de cercuri $x^2 + y^2 + \lambda\left(x - a^2 y\right) - a^2 - \frac{1}{a^2} = 0$, unde "*a* "este o constantă, iar $\lambda$ un parametru real.

Să se afle ecuația cercului din familie pentru care segmentul de dreaptă ce are ca extremități punctele fixe ale familiei este diametru.

a) $x^2 + y^2 = a^2$ b) $x^2 + y^2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$ c) $x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2}$

d) $(x-a)^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 = 1$ e) $(x-a)^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2$

f) $(x-a)^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}$.

**GA - XI. 101** Se dă cercul C cu centrul în origine şi având diametrul [AB], pe axa Ox de lungime 2*r*, $r \in (0,+\infty)$. Fie Γ un cerc, cu centrul variabil M∈C şi tangent în N la [AB]. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție dintre dreapta (MN) cu coarda comună cercurilor C şi Γ.

a) $x^2 + (y-r)^2 = r^2$ b) $(x+r)^2 + (y-r)^2 = 4r^2$ c) $\frac{x^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{r^2} - 1 = 0$

d) $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} - 1 = 0$ e) $\frac{x^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{r^2} - 1 = 0$ f) $x = \pm r$

**GA - XI. 102** Fie în planul (xOy) cercul $x^2 + y^2 = r^2$ şi punctele P($a$,0) şi Q($b$,0). Fie M, N extremităţile unui diametru variabil al cercului. Se cere locul geometric al intersecţiei dreptelor (MP) şi (NQ).

a) $x + by + ra = 0$

b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - r^2 = 0$

c) $x + \dfrac{2ab}{(a+b)^2} y^2 = r^2$

d) $\left(x + \dfrac{2ab}{a+b}\right)^2 + y^2 = r^2 \dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$

e) $\left(x - \dfrac{2ab}{a+b}\right)^2 + y^2 = r^2 \dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$

f) $x^2 + \left(y - \dfrac{2ab}{a+b}\right)^2 = r^2 \dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$

**GA - XI. 103** Fie în planul (xOy) cercul $x^2 + y^2 - 2ry = 0$ şi M un punct mobil pe axa (Ox). Se duce prin M o tangentă la cerc, punctul de contact fiind N. Se cere locul geometric al ortocentrului (punctul de intersecţie al înălţimilor) triunghiului $\overline{OMN}$, când M descrie axa (Ox).

a) dreapta $rx + y - r = 0$

b) cercul $x^2 + y^2 + 2x = r^2$

c) diametrul $x = 0$ şi cercul $x^2 + y^2 = r^2$

d) parabola $y^2 = 2rx$

e) hiperbola $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{r^2} = 1$

f) hiperbola $\dfrac{x^2}{r^2} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

**GA – XI. 104** Să se determine locul geometric al punctelor prin care se pot duce tangente ortogonale la un cerc

a) hiperbolă;
b) parabolă;
c) elipsă
d) cerc;
e) dreaptă
f) hiperbolă echilaterală

**GA – XI. 105** Fie A un punct fix pe cercul $C : x^2 + y^2 = R^2$ şi M un punct mobil pe cercul dat.

Să se determine punctul A astfel încât locul geometric al simetricului punctului A față de M să fie un cerc cu centrul pe dreapta $D: x + y + R = 0$.

a) $A(\pm R, 0)$ b) $A(0, \pm R)$ c) $A(-R, 0)$, $A(0, -R)$

d) $A(R, 0)$, $A(0, R)$ e) $A\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}R, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)$ f) $A \in \phi$

**GA – XI. 106** Într-un cerc de rază R se consideră coarda fixă $\overline{AB}$ și un punct mobil M pe cerc. Dacă $A_1$ este mijlocul lui $\overline{AM}$ și $B_1$ mijlocul lui $\overline{BM}$, să se afle locul geometric al mijlocului lui $\overline{A_1B_1}$.

a) o dreaptă paralelă cu (Ox)
b) un cerc
c) o elipsă
d) o parabolă
e) o hiperbolă
f) o dreaptă paralelă cu (Oy).

**GA – XI. 107** Se consideră cercurile care trec prin două puncte fixe A(4,0) și B(-4,0). Locul geometric al extremităților diametrilor acestor cercuri, paraleli cu dreapta (AB), este:

a) o hiperbolă echilateră; b) o parabolă; c) un cerc
d) o elipsă e) o dreaptă f) o hiperbolă oarecare ?

**GA - XI. 108** Se dă elipsa E: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ și dreapta $d_n$: $y = x + n$, $n \in \mathbf{R}$, care intersectează elipsa în punctele P și Q. Să se scrie ecuația cercului C de diametru [PQ].

a) C: $\left(x - \frac{n}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{4n}{5}\right)^2 = \frac{8}{25}\left(n^2 + 5\right)$, $n \in \mathbf{R}$

b) C: $\left(x + \frac{n}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4n}{5}\right)^2 = \frac{8}{25}\left(5 - n^2\right)$, $n \in \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$

c) C: $\left(x - \frac{n}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3n}{5}\right)^2 = \frac{8}{25}\left(n^2 - 2\right)$, $n \in \mathbf{R}$

d) C: $(x-n)^2+(y-3n)^2=25n^2$, $n\in\mathbf{R}$

e) C: $\left(x-\frac{n}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{5}\right)^2=8n^2$, $n\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$

f) C: $x^2+\left(y-\frac{4n}{5}\right)^2=\frac{25}{8}n^2$, $n\in\mathbf{R}$

**GA - XI. 109** Unul dintre focarele unei elipse este situat la distanţele 7 şi, respectiv, 1 faţă de extremităţile axei mari.

Să se scrie ecuaţia acestei elipse.

a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

d) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{9}=1$ e) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ f) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

**GA - XI. 110** Un punct M descrie o elipsă de centru O şi semiaxe 2 şi 1. Fie P proiecţia lui M pe axa mare iar N un punct pe (OM) aşa încât ON = 2 NM . Dreapta (PN) taie axa mică în Q, să se calculeze lungimea segmentului PQ.

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{1}{4}$

**GA - XI. 111** Se consideră elipsa de ecuaţie $x^2+4y^2=9$. Să se scrie ecuaţia unei drepte ce trece prin punctul M(2,1), care intersectează elipsa în punctele A şi B, astfel ca M să fie mijlocul segmentului $\overline{AB}$.

a) $8x-y+17=0$ b) $x-8y+17=0$

c) $8x-8y+17=0$ d) $8x+y-17=0$

e) $x+2y-4=0$ f) $x-2y+4=0$

**GA - XI. 112** Prin focarul F(c,0) al elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ se duce o coardă perpendiculară pe axa mare. Să se găsească lungimea acestei coarde.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{b}{a}$ c) $\frac{2b}{a^2}$ d) $\frac{2b^2}{a}$ e) $\frac{a^2}{b}$ f) $a+b$

**GA – XI. 113** Fiind dat punctul $M\left(1,\frac{3}{2}\right)$ al elipsei : $(E)\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-1=0$, să se scrie ecuațiile dreptelor suport pentru razele focale ale acestui punct.

a) $x+y=1$; $3x+4y+3=0$

b) $x-1=0$; $3x-4y+3=0$

c) $x+y+1=0$; $x+3y+4=0$

d) $2x-y+3=0$; $3x-4y+2=0$

e) $x-1=0$; $3x+4y+3=0$

f) $x-1=0$; $3x-4=0$

**GA – XI. 114** Să se afle punctul de pe elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1$ care este cel mai apropiat de dreapta $x+ay=3a$.

a) $\left(\frac{a}{2},\frac{3}{2}\right)$; b) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$; c) $\left(\frac{a}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$;

d) $\left(-\frac{a}{2},\frac{3}{2}\right)$; e) $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\sqrt{2}\right)$; f) $(a,0)$

**GA – XI. 115** Fie elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, a > b şi F unul din focare situat în punctul F. Prin F se duce o secantă oarecare, care taie elipsa în punctele M şi N. Să se calculeze valoarea expresiei $E=\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}$

a) $E=\dfrac{2a}{b^2}$ b) $E=\dfrac{a}{b^2}$ c) $E=\dfrac{a}{2b^2}$

d) $E=\dfrac{2b}{a^2}$ e) $E=\dfrac{b}{a^2}$ f) $E=\dfrac{b}{2a^2}$

**GA - XI. 116** Să se calculeze aria unui pătrat având două vârfuri ce coincid cu focarele elipsei E: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}-1=0$.

a) 36 b) 18 c) 36 sau 18 d) 9 sau 18 e) 36 sau 9 f) 20

**GA - XI. 117** În elipsa $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{24}=1$ se înscrie un dreptunghi astfel încât două laturi opuse ale sale să treacă prin focare. Să se calculeze aria acestui dreptunghi.

a) $27\sqrt{3}$ b) $\dfrac{480}{7}$ c) $27\sqrt{3}+1$ d) $27+\sqrt{2}$ e) $3\sqrt{2}$ f) 25

**GA - XI. 118** Un romb cu latura de lungime 5 şi înălţimea de lungime 4,8 are diagonalele situate pe axele de coordonate (Ox) şi (Oy).

Să se determine elipsele, având axa mare pe (Ox), care trec prin două vârfuri opuse ale rombului, iar focarele sunt situate în celelalte două vârfuri.

a) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ b) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{8}-1=0,\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}-1=0$

c) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}-1=0$ d) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$

e) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}-1=0,\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}-1=0$ f) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1=0$

**GA - XI. 119** Fiind dată elipsa de ecuaţie: $2x^2+y^2-6=0$. Să se scrie ecuaţia normalei la elipsă în punctul A(1,2).

a) $y = x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = 2x$

d) $y = -x + 3$ e) $y = -x$ f) $y = 3x - 1$

**GA - XI. 120** Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din punctul A(-6,+3) la elipsa $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) $-x + y - 9 = 0$, $2x + y + 9 = 0$
b) $x + y + 3 = 0$, $-2x + y - 15 = 0$
c) $12x + 7y + 51 = 0$, $y = 3$

d) $-3x + y - 21 = 0$, $3x + y + 15 = 0$
e) $4x + y + 21 = 0$, $-4x + y - 27 = 0$
f) $-5x + y - 33 = 0$, $5x + y + 27 = 0$

**GA - XI. 121** Să se scrie ecuațiile tangentelor la elipsa $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ perpendiculare pe dreapta $13x + 12y - 115 = 0$.

a) $12x - 13y \pm 1 = 0$ b) $12x - 13y \pm 169 = 0$ c) $12x - 13y \pm 2 = 0$

d) $12x - 13y \pm 3 = 0$ e) $5x \pm 7y = 9$ f) $12x - 13y \pm 10 = 0$

**GA - XI. 122** Se știe că dreapta $4x - 5y - 40 = 0$ este tangentă la elipsa $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$. Să se găsească coordonatele punctului de tangență.

a) (10,0) b) (0,-8) c) (50,0) d) (5,-4) e) (-4,5) f) (9,1)

**GA – XI. 123** În planul (Oxy) se consideră punctul M(5,0) și elipsa $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Să se determine coordonatele punctelor $P \in (E)$ astfel încât tangentele în P la elipsă să treacă prin M.

a) $\left(-\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right); \left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$; b) $\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right); \left(\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}\right)$; c) $\left(\frac{14}{5}, -\frac{9}{5}\right); \left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5}\right)$

d) $\left(\frac{12}{5},\frac{9}{5}\right);\left(\frac{12}{5},-\frac{9}{5}\right)$; e) $\left(\frac{16}{5},\frac{12}{5}\right);\left(-\frac{16}{5},\frac{12}{5}\right)$; f) $\left(\frac{12}{5},-\frac{16}{5}\right);\left(-\frac{12}{5},-\frac{16}{5}\right)$

**GA – XI. 124** Pe o elipsă de centru O şi semiaxe a şi b, $(a > b)$, se consideră un punct arbitrar $M_0$ . Tangenta în $M_0$ la elipsă taie prelungirea axei mari în $O'$. Prin $M_0$ se duce o paralelă la axa mică a elipsei care taie cercul de diametru $\overline{OO'}$ în punctele P şi $P'$. Să se calculeze distanța de la O la P.

a) $OP = a$ b) $OP = a - b$ c) $OP = b$

d) $OP = \frac{a^2}{b}$ e) $OP = \frac{b^2}{a}$ f) $OP = 2b$

**GA - XI. 125** O elipsă este tangentă dreptelor : $x + y = 5$ şi $x - 4y = 10$. Să se scrie ecuația acestei elipse cu condiția ca axele ei de simetrie să fie situate pe axele de coordonate.

a) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

d) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ e) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{16}=1$ f) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

**GA - XI. 126** Să se găsească tangentele comune la următoarele două elipse:

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \text{şi} \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1 .$$

a) $x \pm y \pm 3 = 0$ b) $x \pm 2y = 1$ c) $x \pm y = 5$

d) $2x - y = \pm 1$ e) $x - y = \pm 2$ f) $3x + 3y = \pm 1$

**GA – XI. 127** Fie M $(a\cos t, b\sin t)$, $(t \in [0,2\pi])$, un punct arbitrar pe o elipsă de semiaxe a şi b, raportată la axele de coordonate. Considerăm trei puncte pe elipsă A, B şi C, ce corespund valorilor $\alpha, \beta$ şi $\gamma$ ale parametrului t.

Ştiind că tangenta în A la elipsă este paralelă cu dreapta (BC) , să se precizeze care dintre relaţiile de mai jos este satisfăcută de $\alpha, \beta$ şi $\gamma$ .

a) $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha-\gamma)$  b) $\sin(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\gamma)$
c) $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\gamma)$  d) $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\gamma)$
e) $2\alpha=\beta-\gamma$  f) $2\gamma=\alpha+\beta$

**GA - XI. 128** Se consideră punctele variabile A(α,0), B(0,β), astfel încât AB = 6. Să se găsească locul geometric al punctului M, care împarte segmentul [AB] în raportul $\frac{1}{2}$.

a) parabolă  b) elipsă  c) hiperbolă echilaterală
d) dreaptă  e) cerc  f) hiperbolă oarecare

**GA – XI. 129** Să se determine locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la o elipsă.

a) parabolă  b) elipsă  c) hiperbolă echilaterală
d) dreaptă  e) cerc  f) hiperbolă oarecare

**GA – XI. 130** Fie M un punct mobil pe elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ cu vârfurile $A, A', B, B'$. Tangenta în M taie axa (Ox) în C, iar paralela din M la axa (Oy) taie cercul de diametru $\overline{OC}$ în $P, P'$. Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului $\overline{OAP}$.

a) $y=\frac{2a}{3}$  b) $\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{9}$  c) $\frac{3x^2}{a^2}+y^2=1$

d) $\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2a}{3}\right)^2=\frac{5a^2}{9}$  e) $x^2+\left(y-\frac{a}{3}\right)^2=\frac{a^2}{9}$  f) $x+y-\frac{4a}{3}=0$

**GA - XI. 131** Să se determine focarele elipsei $x^2+3y^2-9=0$ .

a) $F_1(-3,0), F_2(3,0)$ b) $F_1(0,-3), F_2(0,3)$ c) $F_1\left(-\frac{1}{3},0\right), F_2\left(\frac{1}{3},0\right)$

d) $F_1\left(0,-\sqrt{6}\right), F_2\left(0,\sqrt{6}\right)$ e) $F_1\left(-\sqrt{6},0\right), F_2\left(\sqrt{6},0\right)$ f) $F_1\left(-\sqrt{3},0\right), F_2\left(\sqrt{3},0\right)$

**GA - XI. 132** Fie U un punct mobil situat pe tangenta în punctul A(a,0) la elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. Perpendiculara în A pe (OU) taie axa (Oy) în V. Se cere să se determine elipsa pentru care AU·OV=12 şi care trece prin punctul P(3,2).

a) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}-1=0$ b) $\frac{x^2}{36}+\frac{3y^2}{16}-1=0$

c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}-1=0$ d) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}-1=0$

e) $\frac{x^2}{18\left(2-\sqrt{2}\right)}+\frac{y^2}{8\left(2+\sqrt{2}\right)}-1=0$ f) $\frac{x^2}{36\left(2-\sqrt{3}\right)}+\frac{y^2}{16\left(2+\sqrt{3}\right)}-1=0$

**GA - XI. 133** Se dă hiperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Să se calculeze coordonatele focarelor F şi F'.

a) $F(5,0)$, $F'(-5,0)$ b) $F(0,5)$, $F'(0,-5)$ c) $F(3,0)$, $F'(-3,0)$

d) $F(0,3)$, $F'(0,-3)$ e) $F(3,4)$, $F'(-3,4)$ f) $F(0,4)$, $F'(0,-4)$

**GA - XI. 134** Se dă hiperbola H: $2x^2-5y^2-10=0$. Să se determine vârfurile şi asimptotele hiperbolei H.

a) (-5,0),(5,0); $y=\sqrt{\frac{2}{5}}x, y=-\sqrt{\frac{2}{5}}x$ b) (-$\sqrt{5}$,0), ($\sqrt{5}$,0); $y=\frac{2}{5}x, y=-\frac{2}{5}x$

c) $(-\sqrt{5},0),(\sqrt{5},0)$; $y=\sqrt{\frac{2}{5}}x, y=-\sqrt{\frac{2}{5}}x$ d) $(\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0)$; $y=\frac{5}{2}x, y=-\frac{5}{2}x$

e) $(-2,0),(2,0)$; $y=\sqrt{\frac{5}{2}}x$ , $y=-\sqrt{\frac{5}{2}}x$ f) $(-\sqrt{2},0), (\sqrt{2},0)$; $y=\sqrt{\frac{5}{2}}x$ , $y=-\sqrt{\frac{5}{2}}x$

**GA - XI. 135** Să se scrie ecuația hiperbolei care trece prin focarele elipsei $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ şi are focarele în vârfurile acestei elipse.

a) $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{144}=1$ b) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ c) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$

d) $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{25}=1$ e) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{144}=1$ f) $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{16}=1$

**GA – XI. 136** Să se scrie ecuația hiperbolei ce are asimptotele $y=\pm\frac{2}{3}x$ şi care trece prin punctul P(5,-2).

a) $64x^2-144y^2-1=0$ b) $4x^2-9y^2-64=0$

c) $9x^2-64y^2-1=0$ d) $144x^2-64y^2-1=0$

e) $9x^2-4y^2-64=0$ f) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-\frac{1}{36}=0$

**GA – XI. 137** Pentru hiperbola $(H):\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, să se calculeze aria triunghiului format de asimptotele hiperbolei (H) şi dreapta $(d):9x+2y=24$.

a) 24 b) 16 c) 18

d) 12 e) 14 f) 15

**GA – XI. 138** Să se calculeze produsul distanțelor unui punct oarecare al hiperbolei : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ la cele două asimptote.

a) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; b) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; c) $\frac{a+b}{a^2+b^2}$; d) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$; e) $\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}$; f) 1.

**GA – XI. 139** Se consideră hiperbola de ecuație $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. O secantă paralelă cu axa (Ox) taie curba în punctele M şi N, M fiind pe aceeaşi ramură a curbei ca şi vârful A. Fie T intersecția dreptei (MN) cu tangenta în A la hiperbolă. Să se determine $m \in \mathbf{R}$, astfel ca să aibe loc relația :

$$b^2 TM \cdot TN + ma^2 AT^2 = 0$$

a) m = -1 b) m = 2 c) m = -2

d) m = 1 e) m = $\frac{1}{2}$ f) m = $-\frac{1}{2}$

**GA - XI. 140** Se consideră hiperbola de ecuație: $x^2-2y^2-2=0$ şi dreapta (d) de ecuație: $x$ - $y$ - 3 = 0. Să se scrie ecuațiile tangentelor la hiperbolă paralele cu dreapta (d).

a) $x- y - 1 = 0$ şi $x - y + 1 = 0$ b) $x - y - 2 = 0$ şi $x - y + 2 = 0$

c) $x - y - 3 = 0$ şi $x - y + 3 = 0$, d) $x - y - 4 = 0$ şi $x - y + 4 = 0$

e) $x - y - \sqrt{2} = 0$ şi $x - y + \sqrt{2} = 0$ f) $x - y = 0$ şi $x + y = 0$

**GA - XI. 141** Fie hiperbola echilateră $x^2-y^2=a^2$ cu vârfurile A şi A'. Să se afle locul geometric al intersecției dreptei ( MA') cu simetrica dreptei (MA) față de axa ( AA'), M fiind un punct mobil pe hiperbolă.

a) hiperbola echilaterală $y^2 - x^2 = \frac{a^2}{4}$  b) cercul $x^2 + y^2 = a^2$

c) elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1$  d) cercul $x^2 + y^2 = 4a^2$

e) hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4a^2} = 1$  f) elipsa $a^2x^2 + 4a^2y^2 = 1$

**GA - XI. 142** Să se scrie ecuațiile tangentelor la hiperbola $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ prin punctul (2,0).

a) $-x + y + 2 = 0$
$x + y - 2 = 0$

b) $-2x + y + 4 = 0$
$2x + y - 4 = 0$

c) $-3x + y + 6 = 0$
$3x + y - 6 = 0$

d) $3x \pm 2y - 6 = 0$

e) $-4x \pm y + 8 = 0$

f) $4x + y - 8 = 0$
$-5x + y + 10 = 0$

**GA - XI. 143** Se consideră hiperbola de vârfuri A($a$,0), A'($-a$,0) şi focare F($c$,0) şi $\mathrm{F}'(-c,0)$. Perpendiculara în A pe axa (AA') taie o asimptotă în G. Să se determine mărimea unghiului $\widehat{\mathrm{FGF}'}$.

a) $\frac{2\pi}{3}$  b) $\frac{\pi}{3}$  c) $\frac{\pi}{4}$  d) $\frac{\pi}{2}$  e) $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$  f) $\operatorname{arctg}\frac{5}{4}$

**GA - XI. 144** Să se determine unghiul ascuțit dintre asimptotele hiperbolei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, având raportul $\frac{c}{a} = 2$, $c$ - fiind abscisa unui focar al hiperbolei.

a) 30°  b) 45°  c) 90°  d) 15°  e) 75°  f) 60°

**GA - XI. 145** Un cerc de centru C(0,2) este tangent ramurilor hiperbolei $x^2 - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$. Să se determine coordonatele punctelor de contact.

a) $\left(-\sqrt{41}, 8\right)$ şi $\left(\sqrt{41}, 8\right)$  b) $\left(-\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right)$ şi $\left(\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right)$  c) $\left(-\frac{\sqrt{41}}{5}, \frac{8}{5}\right)$ şi $\left(\frac{\sqrt{41}}{5}, \frac{8}{5}\right)$

d) $\left(\frac{8}{5}, -\frac{\sqrt{41}}{5}\right)$ şi $\left(\frac{8}{5}, \frac{\sqrt{41}}{5}\right)$  e) (1,0) şi (-1,0)  f) $\left(\sqrt{2}, 2\right)$ şi $\left(-\sqrt{2}, 2\right)$

**GA – XI. 146** O hiperbolă de centru O şi semiaxe a şi b are vârfurile $A(a,0)$ şi $A'(-a,0)$ situate pe axa transversală, (Ox). Un punct mobil M al hiperbolei se proiectează în N pe axa (Oy), iar P este mijlocul segmentului $\overline{MN}$.

Să se afle locul geometric al punctului G, centrul de greutate al triunghiului $\overline{APA'}$. Ce este acesta ?

a) cerc de rază $r = \sqrt{ab}$

b) elipsă de semiaxe $\frac{a}{6}$ şi $\frac{b}{3}$ .

c) hiperbolă de semiaxe $\frac{a}{6}$ şi $\frac{b}{3}$

d) parabolă de parametru $p = \sqrt{ab}$

e) hiperbolă de semiaxe $\frac{a}{3}$ şi $\frac{b}{6}$

f) elipsa de semiaxe $\frac{a}{3}$ şi $\frac{b}{6}$

**GA – XI. 147** Ce este locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente ortogonale la hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (a > b)?$$

a) dreaptă; b) cerc; c) elipsă;
d) parabolă; e) hiperbolă; f) segment de dreaptă

**GA - XI. 148** Pe axa (Ox) a reperului cartezian (xOy) se iau punctele M şi N astfel încât produsul absciselor lor să fie constanta $a^2$. Prin M şi N se duc două drepte (MP) şi (NP), având coeficienţii unghiulari egali respectiv cu $\frac{b}{a}$ şi $-\frac{b}{a}$ , $a,b\in(0,+\infty)$. Să se afle locul geometric al punctului P.

a) elipsă b) hiperbolă c) parabolă
d) cerc e) dreaptă f) pătrat

**GA - XI. 149** Se dă hiperbola $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Prin punctul A(+3, -1) să se ducă o coardă la hiperbolă astfel încât acest punct s-o împartă în două părți egale.

a) $-x + y + 4 = 0$ b) $x + y - 2 = 0$ c) $3x + 4y - 5 = 0$
d) $-2x + y + 7 = 0$ e) $2x + y - 5 = 0$ f) $-3x + y + 10 = 0$

**GA - XI. 150** Să se determine coordonatele focarului F al parabolei $y^2 = 2x$

a) $F\left(\frac{1}{2},0\right)$ b) $F(1,0)$ c) $F(2,0)$
d) $F\left(-\frac{1}{2},0\right)$ e) $F\left(0,\frac{1}{2}\right)$ f) $F(0,1)$

**GA - XI. 151** Prin focarul parabolei $y^2 = 8x$ se duce o coardă $\overline{AB}$ care face unghiul $\alpha$ cu axa (Ox). Dacă prin focar se mai duce şi corda $\overline{CD}$ care este perpendiculară pe $\overline{AB}$, să se calculeze suma

$$S = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 8 e) 4 f) 2

**GA - XI. 152** Să se determine ecuația unei parabole raportată la axa de simetrie şi tangenta în vârf, ştiind că trece prin punctul A(3,3), apoi să se scrie ecuația normalei în punctul A.

a) $y^2 = 3x$, $2x + y - 3 = 0$ b) $y^2 = 3x$, $2x + y - 9 = 0$
c) $y^2 = 9x$, $2x + y - 9 = 0$ d) $y^2 = 6x$, $2x + y - 3 = 0$
e) $y^2 = 3x$, $x - 2y + 3 = 0$ f) $y^2 = 6x$, $x - 2y + 3 = 0$

**GA - XI. 153** Fiind dată parabola de ecuație $y^2 = 4x$, să se scrie ecuația normalei la parabolă în punctul A(1,2).

a) $y = x - 3$ b) $y = x + 1$ c) $y = -x + 3$
d) $y = x$ e) $y = -x$ f) $y = -x - 3$

**GA – XI. 154** Să se calculeze aria triunghiului format de dreapta $x - y + 1 = 0$ şi normalele la parabola $y = x^2 - 4x + 5$ în punctele sale de intersecţie cu dreapta dată.

a) 2,50 b) 3 c) 3,75
d) 4 e)2,25 f) 3,25

**GA - XI. 155** Se dă parabola de ecuaţie $y^2 = 2px$ şi punctul $A(p,0)$. Dreapta (d) $2x - 2y + p = 0$ este tangentă parabolei în punctul B, iar dreapta (AB) taie a doua oară parabola în C. Să se determine $m$ astfel ca $AC = mAB$.

a) $m = 1$ b) $m = \frac{3}{2}$ c) $m = 2$ d) $m = \frac{5}{2}$ e) $m = \frac{5}{4}$ f) $m = \frac{5}{3}$

**GA - XI. 156** Să se scrie ecuaţia unei drepte care trece prin punctul P(+5, -7) şi este tangentă la parabola $y^2 = 8x$.

a) $-x + y + 12 = 0$, $x + y + 2 = 0$
b) $-2x + y + 17 = 0$, $2x + y - 3 = 0$
c) $-3x + y + 22 = 0$, $3x + y - 8 = 0$
d) $x + y + 2 = 0$, $2x + 5y + 25 = 0$
e) $-4x + y + 27 = 0$, $4x + y - 13 = 0$
f) $-5x + y + 32 = 0$, $5x + y - 18 = 0$

**GA - XI. 157** Fie parabola de ecuaţie $y^2 = 2px$ şi M un punct mobil pe aceasta. Tangenta în M la parabolă taie axa parabolei în punctul T, iar normala în M la parabolă taie axa parabolei în N. Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului $\overline{TMN}$.

a) $y^2 = \frac{2p}{9}x$ b) $y^2 = \frac{2p}{9}x - \frac{p}{9}$ c) $y^2 = \frac{2p}{3}x - \frac{2p^2}{9}$

d) $y^2 - \frac{x^2}{p} = 1$ e) $y^2 - \frac{2p}{9}x^2 = 1$ f) $x^2 + y^2 - \frac{2p}{9}x = \frac{2p^2}{27}$

**GA – XI. 158** La ce distanță de vârf trebuie plasată o sursă luminoasă pe axa unui reflector parabolic de înălțime 20 cm şi diametrul bazei 20 cm, pentru a produce prin reflexie un fascicol de raze paralele.

a) 10 cm; b) 2 cm; c) 2,5 cm;
d) 3 cm; e) 1,25 cm; f) 1,5 cm.

**GA - XI. 159** Să se determine un punct M situat pe parabola $y^2 = 64x$, cât mai aproape posibil de dreapta $4x + 3y + 37 = 0$ şi să se calculeze distanța de la punctul M la această dreaptă.

a) M(9, -24), d = 5 b) M(9, -24), $d = \frac{1}{5}$ c) M(1,8), d = 5
d) M(9,24), d = 5 e) M(1, -8), $d = \frac{1}{5}$ f) M(1,1), d = 1

**GA – XI. 160** Fie $\overline{AB}$ o coardă a parabolei $y^2 = 2px$ ,(p>0) perpendiculară pe axa de simetrie (Ox). Se consideră un cerc de diametru $\overline{AB}$, care mai intersectează parabola în punctele C şi D. Să se calculeze distanța dintre coardele $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$.

a) p b) 2p c) 3p d) $\frac{p}{2}$ e) $\frac{p}{3}$ f) $\frac{p}{4}$

**GA – XI. 161** Pe parabola $y^2 = 2px$ se consideră punctele A şi B de ordonate a şi b astfel încât dreapta (AB) să treacă prin focarul parabolei. Tangentele în A şi B se intersectează într-un punct C. Fie P punctul de intersecție al normalelor la parabolă duse în A şi B, iar D punctul de intersecție al dreptei (CP) cu parabola. Să se determine $m \in \mathbf{R}$, astfel ca $CP = m \cdot CD$.

a) m = 4 b) m = $\frac{4}{3}$ c) m = 2 d) m = $\frac{1}{2}$ e) m = $\frac{3}{4}$ f) m = 1

**GA – XI. 162** Fie $M_i(x_i, y_i),\ (i = 1,2,3)$, trei puncte distincte situate pe parabola $(P)\colon y^2 = 2px$. Ştiind că centrul de greutate al triunghiului $\overline{M_1M_2M_3}$ aparţine axei (Ox), în funcţie de coordonatele punctelor $M_1$ şi $M_2$ să se determine coordonatele punctului de concurenţă al celor trei normale la parabolă duse în punctele $M_1$, $M_2$ şi $M_3$.

a) $\left(p - \dfrac{x_1y_1 - x_2y_2}{y_1 - y_2}, \dfrac{y_1y_2(x_2 - x_1)}{p(y_1 - y_2)}\right)$ b) $\left(p + \dfrac{x_1y_1 - x_2y_2}{y_1 - y_2}, \dfrac{y_1y_2(x_2 - x_1)}{p(y_1 - y_2)}\right)$

c) $\left(p + \dfrac{x_1y_1 - x_2y_2}{y_1 - y_2}, \dfrac{y_1y_2(x_1 - x_2)}{p(y_1 - y_2)}\right)$ d) $\left(p + \dfrac{x_1y_1 - x_2y_2}{y_1 - y_2}, \dfrac{y_1y_2(x_2 - x_1)}{p(y_2 + y_1)}\right)$

e) $\left(p + \dfrac{x_1y_1 - x_2y_2}{y_2 - y_1}, \dfrac{y_1y_2(x_2 - x_1)}{p(y_1 - y_2)}\right)$ f) $\left(p + \dfrac{x_1y_1 - x_2y_2}{y_2 - y_1}, \dfrac{y_1y_2(x_2 - x_1)}{p(y_2 - y_1)}\right)$

**GA - XI. 163** În planul raportat la un reper cartezian se consideră parabola P: $2y = x^2$. Fie M un punct pe parabolă. Să se determine, în funcţie de abscisa m a lui M coordonatele punctului T, unde tangenta în M la P taie axa (Ox). Să se calculeze aria triunghiului $\overline{OTM}$ şi coordonatele centrului de greutate G al aceluiaşi triunghi.

a) $\mathrm{T}\left(\dfrac{m}{2},0\right), \sigma[\mathrm{OTM}] = \dfrac{m^2}{4}, \mathrm{G}\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{m^2}{6}\right)$ b) $\mathrm{T}\left(\dfrac{m}{2},0\right), \sigma[\mathrm{OTM}] = \dfrac{|m|^3}{8}, \mathrm{G}\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{m^2}{6}\right)$

c) $\mathrm{T}(m,0), \sigma[\mathrm{OTM}] = \dfrac{|m|^3}{8}, \mathrm{G}(m,m^2)$ d) $\mathrm{T}(m,0), \sigma[\mathrm{OTM}] = \dfrac{m^2}{4}, \mathrm{G}\left(\dfrac{m}{3},\dfrac{m^2}{3}\right)$

e) $\mathrm{T}\left(\dfrac{m}{2},0\right), \sigma[\mathrm{OTM}] = \dfrac{|m|^3}{8}, \mathrm{G}\left(\dfrac{m}{3},\dfrac{m^2}{3}\right)$ f) $\mathrm{T}(2m,0), \sigma[\mathrm{OTM}] = m^3, \mathrm{G}(m,m^2)$

**GA – XI. 164** Pe parabola $y^2 = 2px$ se consideră punctul $M$ şi simetricul său $M'$

față de axa de simetrie. Să se găsească locul geometric al intersecției tangentei în M la parabolă cu paralela dusă prin $M'$ la axa de simetrie.

a) $2y^2+3px=0$ b) $y^2+3px=0$ c) $3y^2+2px=0$

d) $3y^2+2px^2=1$ e) $2y^2+3px^2=1$ f) $3y^2-2px^2=1$

**GA - XI. 165** Să se determine locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la o parabolă

a) dreaptă; b) cerc; c) elipsă;

d) parabolă; e) hiperbolă oarecare f) hiperbolă echilaterală.

**GA - XI. 166** Fie în planul (xOy) punctul fix A(1,0) pe axa (Ox) și punctele M și N mobile pe axa (Oy) astfel încât lungimea segmentului $\overline{MN}$ este 2. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție al perpendicularelor ridicate în M și N respectiv pe (AM) și (AN).

a) cercul $x^2+y^2=4$ b) dreapta perpendiculară pe axa Ox în punctul (-1,0) c) elipsa cu centru în O și semiaxe $\sqrt{2}$ și 2

d) parabola $y^2=4x+4$ e) cercul de ecuație $x^2+y^2-2x-4=0$ f) parabola $y^2=2x+4$

**GA - XI. 167** Fie în planul (xOy) elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ și hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Să se determine dreptele ce trec prin centrul comun al celor două curbe și le taie pe acestea în punctele în care tangentele la curbele respective sunt perpendiculare între ele.

a) $y=\pm\frac{b}{2a}x$ b) $y=\pm\frac{b\sqrt{2}}{2a}x$ c) $y=\pm\frac{b^2}{a^2}x$

d) $y=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}x$ e) $y=\pm\frac{b}{3a}x$ f) $y=\frac{+a}{-b}x$

**GA - XI. 168** Punctele A(1,-5,4), B(0,-3,1), C(-2,-4,3) şi D(4,4,-2) sunt vârfurile unui tetraedru. Să se calculeze înălţimea coborâtă din vârful A.

a) $\frac{3}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ e) 3 f) 2

**GA - XI. 169** Fie punctele A(0,0,2), B(3,0,5), C(1,1,0) şi D(4,1,2). Să se calculeze volumul tetraedrului $\overline{ABCD}$.

a) 6 b) 2 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{2}$ f) 1

**GA - XI. 170** Să se determine mulţimea valorilor parametrului $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele A(-1,0,1), B(1,0,2), C(0,1,-1) şi D(1,1,α) să determine un tetraedru ce are volumul egal cu 3/2 unităţi de volum.

a) $\{4,-3\}$ b) $\{-5,4\}$ c) $\{5,-4\}$
d) $\{-5,-4\}$ e) $\{4,5\}$ f) $\{2,-4\}$

**GA - XI. 171** Se dau vectorii $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j},\ \overline{b} = \overline{j} - \overline{k},\ \overline{c} = \overline{i} + \overline{k}$.
Să se calculeze volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori şi înălţimea paralelipipedului corespunzătoare bazei construite pe vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$

a) $V = 2; h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $V = \sqrt{3}; h = 2\sqrt{3}$ c) $V = 3, h = 4$
d) $V = 2, h = 2\sqrt{3}$ e) $V = 4; h = 5$ f) $V = 4, h = \sqrt{3}$

**GA - XI. 172** Să se scrie ecuaţiile dreptei D ce trece prin originea axelor de coordonate în spaţiu şi este paralelă cu dreapta (AB), determinată de punctele A(-1,2,0) şi B(2,-3,1).

a) $D:\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{1}$ b) $D:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z}{1}$ c) $D:\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z}{1}$

d) $D:\frac{x}{3}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{1}$ e) $D:\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{1}$ f) $D:\frac{x}{-3}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$

**GA - XI. 173** Determinați punctul M(p,1,q) din spațiu ce se află pe dreapta ce trece prin punctele (0,2,3) şi (2,7,5).

a) $(1,1,1)$ b) $\left(-\frac{1}{5},1,\frac{3}{5}\right)$ c) $\left(-\frac{2}{5},1,\frac{13}{5}\right)$

d) $\left(\frac{1}{5},1,\frac{7}{3}\right)$ e) $(-1,1,2)$ f) $\left(-1,1,\frac{2}{5}\right)$

**GA - XI. 174** Să se determine ecuațiile dreptei care este paralelă cu segmentul $\overline{MN}$ şi trece prin P, unde M(3,2,1), N(5,0,2) şi P(0,0,1).

a) $\frac{x}{-2}=\frac{y}{2}=z+1;$ b) $\frac{x}{2}=\frac{y}{-2}=z-1;$ c) $\frac{x-3}{5}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{2};$

d) $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1};$ e) $x=y=z;$ f) $x=y=z-1$

**GA - XI. 175** Să se scrie ecuațiile canonice ale medianelor triunghiuluilui cu vârfurile A(1,5,-4), B(3,-1,6), C(5,3,2).

a) $$\frac{x+1}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z+4}{8}$$ $$\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-6}{7}$$ $$\frac{x-5}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{-2}$$

b) $$\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z+4}{1}$$ $$\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-3}{0}$$ $$x=y=z$$

c) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$
$\frac{x}{1}=\frac{y-5}{-4}=\frac{z+4}{2}$
$x=y-1=z+3$

d) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{-4}=\frac{z+4}{8}$
$\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-6}{-7}$
$\frac{x-5}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$

e) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+5}{4}=\frac{z+4}{5}$
$\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-6}{7}$
$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{2}$

f) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-5}{5}$
$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{7}$
$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{5}$

**GA - XI. 176** Să se determine punctele de intersecție cu planele de coordonate (xOy, yOz, zOx) ale dreptei ce trece prin punctele $M_1(-6,6,-5)$ şi $M_2(12,-6,1)$.

a) (-9,0,4), (0,-2,3), (2,0,-2)
b) (9,-4,0), (0,2,-3), (3,0,-2)
c) (8,0,3), (0,1,-1), (3,0,2)
d) (-9,0,2), (0,2,5), (1,0,-1)
e) (9,4,3), (1,2,3),(3,2,0)
f) (6,4,2), (0,2,1), (3,0,7)

**GA - XI. 177** Să se verifice dacă următoarele drepte ($d_1$) şi ($d_2$) definite prin:

$$(d_1): x=3+t,\ y=-2+t,\ z=9+t, \quad (t\in \mathbf{R})$$
$$(d_2): x=1-2s,\ y=5+s,\ z=-2-5s, \quad (s\in \mathbf{R})$$

sunt coplanare şi în caz afirmativ să se scrie ecuațiile perpendicularei pe planul determinat de ($d_1$), ($d_2$) ştiind că aceasta trece prin punctul $P_0(4,1,6)$

a) Nu sunt coplanare
b) Da; $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-6}{1}$

c) Da; $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-6}{1}$

d) Da; $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{1}$

e) Da $\begin{cases} x+2y-6=0 \\ y-z+4=0 \end{cases}$

f) Da $\begin{cases} x-2y-6=0 \\ y+z+4=0 \end{cases}$

**GA - XI. 178** Să se scrie ecuația planului care conține punctul A(1,0,-1) şi dreapta (d) $x=2t+1,\ y=-3t+1,\ z=2t,\ (t\in\mathbf{R})$.

a) $5x-y+z-7=0$
b) $5x+y+z-7=0$
c) $5x+2y-2z-7=0$
d) $5x-y-z+7=0$
e) $5x+y-z-7=0$
f) $5x+y+z-5=0$

**GA - XI. 179** În $\mathbf{R}^3$ se consideră punctele A(1,-1,0), B(1,2,1) C(1,0,-1). Să se scrie ecuația planului determinat de cele trei puncte.

a) $y=1$
b) $x=1$
c) $x+y+1=0$
d) $x-y+1=0$
e) $-x+y-1=0$
f) $2x-y-z=1$

**GA - XI. 180** Determinați valoarea numărului real α astfel ca punctele A(1,0,-1) , B(0,2,3), C(-2,1,1) şi D(4,2α,3) să fie coplanare.

a) α=0
b) α=-2
c) α=1
d) $\alpha=\frac{1}{2}$
e) α=-1
f) $\alpha=-\frac{1}{2}$

**GA - XI. 181** Să se determine $\alpha\in\mathbf{R}$ astfel încât punctele

A(1, α,-4), B(-1,2,- α), C(1,-1,-1), D(0,-1,0)

să fie coplanare

a) $\alpha=\{-2,4\}$
b) $\alpha=\{-2,-4\}$
c) $\alpha=\{2,4\}$
d) $\alpha=\{2,-4\}$
e) $\alpha=\{4,0\}$
f) $\alpha=\{2,0\}$

**GA - XI. 182** Să se calculeze volumul tetraedrului $\overline{OABC}$, unde O este originea sistemului spațial de axe $(Oxyz)$, $A \in (Ox) \cap P, B \in (Oy) \cap P, C \in (Oz) \cap P,$ iar P este planul de ecuație

$$P : x + 2y + 3z - 6 = 0$$

a) 6 b) 7 c) 8

d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{7}$ f) $\frac{1}{8}$

**GA - XI. 183** Să se scrie ecuația planului P care conține punctul A(-1,3,0) şi este paralel cu planul Q ce intersectează axele de coordonate în punctele A(3,0,0) , B(0,-2,0) şi C(0,0,4).

a) $4x - 6y + 3z + 21 = 0$ b) $5x - y + z + 8 = 0$

c) $x + 2y + 3z - 5 = 0$ d) $4x - 6y + 3z + 22 = 0$

e) $5x - y + z + 9 = 0$ f) $x + 2y + 3z - 6 = 0$

**GA - XI. 184** Să se scrie ecuația unui plan ce conține punctul $M_0(1,-2,3)$ şi este perpendicular pe dreapta de intersecție a planelor

$$x - y + z + 3 = 0 \quad \text{şi} \quad 2x + 3z - 1 = 0$$

a) $x + 3y - z + 8 = 0$ b) $x + y + z - 2 = 0$ c) $3x + y - 2z + 5 = 0$

d) $2x - y + z - 7 = 0$ e) $5x + 5y - z + 8 = 0$ f) $x - y + z + 7 = 0$

**GA - XI. 185** Determinați ecuația planului ce are fiecare punct echidistant de punctele A(2,-1,1) şi B(3,1,5).

a) $2x + 4y + 8z - 29 = 0$ b) $x + 2y + 4z - 11 = 0$

c) $2x - y + 3z - 5 = 0$ d) $x + 2y - 3z - 2 = 0$

e) $x + y + z - 1 = 0$ f) $2x + 4y - 8z - 15 = 0$

**GA - XI. 186** Să se determine valorile lui c şi d astfel încât dreapta

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{1}$$

să fie inclusă în planul $3x+2y+cz+d=0$.

a) c=4, d= -4; b) c= -4, d= -33; c) c=1, d=1
d) c= -4, d= -23; e) c= -4, d=4; f) c= -4, d= -11

**GA - XI. 187** Determinaţi proiecţia ortogonală a punctului A(3,1,0) pe planul $2x+y-z+1=0$

a) (-1,5,4) b) (1, -2, 1) c) $\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},1\right)$
d) $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right)$ e) $\left(+\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ f) (0,1,2)

**GA - XI. 188** Să se determine simetricul originii O(0,0,0,) faţă de planul $\pi: x+y+z-1=0$

a) $O'\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ b) $O'\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ c) $O'\left(\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)$
d) $O'\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ e) $O'\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ f) $O'(3,3,3)$

**GA - XI. 189** Să se afle simetricul M' al punctului M(1,2,3) faţă de dreapta de ecuaţii:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{3}$$

a) $M'\left(-\frac{24}{7},\frac{-6}{7},\frac{2}{7}\right)$ b) $M'\left(\frac{2}{7},\frac{-6}{7},\frac{24}{7}\right)$ c) $M'\left(-\frac{6}{7},\frac{24}{7},\frac{2}{7}\right)$

d) $M'\left(\frac{24}{7},\frac{-6}{7},\frac{2}{7}\right)$ e) $M'\left(\frac{24}{7},\frac{6}{7},\frac{-2}{7}\right)$ f) $M'\left(\frac{24}{7},\frac{2}{7},\frac{-6}{7}\right)$

**GA - XI. 190** Să se determine ecuația planului care conține perpendicularele duse din punctul P(-2,3,5) pe planele $\pi_1 : 4x + y - 3z + 13 = 0$; $\pi_2 : x - 2y + z - 11 = 0$

a) $5x - 7y + 9z - 56 = 0$;
b) $5x + 7y - 9z + 56 = 0$
c) $5x - 7y - 9z - 56 = 0$
d) $5x + 7y + 9z - 56 = 0$
e) $7x + 5y + 9z - 56 = 0$
f) $9x + 7y - 5z - 56 = 0$

**GA - XI. 191** Pentru ce valori ale parametrului a planul $ax + 2y - 3z + 1 = 0$ este paralel cu dreapta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{0}$$

a) a=2 b) a=1 c) a=0 d) a=-1 e) a=-2 f) a=$\frac{1}{2}$

**GA - XI. 192** Să se scrie ecuația unei drepte (d) care trece prin punctul A(-1, 2, -2) şi se sprijină pe dreptele

$(d_1)$: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1}$, şi $(d_2)$: $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{2}$

a) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+2}{5}$
b) $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+2}{5}$
c) $\frac{x+1}{0} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{5}$
d) $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+2}{1}$
e) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$
f) Nu există o astfel de dreaptă

**GA - XI. 193** Să se determine distanța de la punctul $M_0(2,3,4)$ la planul $\pi : x - 2y - 2z + 8 = 0$

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) 8 e) 4 f) 1

**GA - XI. 194** Să se scrie ecuațiile dreptei ce se obține proiectând dreapta (d) : $\begin{cases} x-y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$ pe planul P: $x-y+z=0$.

a) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=2 \\ z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-3y=1 \\ z=-\frac{1}{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-3y=1 \\ z=\frac{1}{3} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-y=2 \\ x-z=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

**GA - XI. 195** Dreapta (d): $\begin{cases} x-y=0 \\ \alpha y-z=0 \end{cases}$ este paralelă cu planul P dacă:

a) $P: 4x+2y-3z=1; \alpha=2$ b) $P: x+y+z=1; \alpha=0$
c) $P: 4x-y+3z=0; \alpha=1$ d) $P: x-y-z=0; \alpha=1$
e) $P: z=0; \alpha=1$ f) $P: x+y=0; \alpha=0$

**GA - XI. 196** Să se determine ecuația planului ce conține dreapta (d): $\begin{cases} x-y=0 \\ 4x-3y-z=0 \end{cases}$ şi este perpendicular pe planul $P: x-y+z=1$.

a) x+y=0 b) x-z=0 c) y+z=0
d) x+y=1 e) x-z=1 f) y+z=1

**GA - XI. 197** Distanța dintre dreptele ($d_1$): $\begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ și ($d_2$): $\begin{cases} x-y=-2 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ este:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{2}$ e) 2 f) 4

**GA - XI. 198** Să se determine parametrii $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ astfel încât dreptele

($d_1$): $\begin{cases} x+y=1 \\ \alpha y+z=-1 \end{cases}$ și ($d_2$): $\begin{cases} y+z=\beta \\ x+2y+z=\beta+1 \end{cases}$ să determine un plan.

a) $\alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}$ b) $\alpha=-\beta=1$ c) $\alpha \in \mathbf{R}, \beta=-1$ sau $\alpha=1, \beta \in \mathbf{R}$

d) $\alpha \neq 1, \beta \in \mathbf{R}$ **sau** $\alpha=1, \beta \neq -1$ e) $\alpha,\beta \in \phi$ f) $\alpha=\beta=0$

**GA - XI. 199** Se dau : dreapta (D) $\dfrac{x-\alpha}{2}=\dfrac{y+1}{\beta}=\dfrac{z-1}{3}$ și planul (P) $x+y-z-1=0$.
Să se determine valorile reale ale lui $\alpha$ *și* $\beta$ pentru care dreapta (D) se află în planul (P).

a) $\alpha=1, \beta=1$ b) $\alpha=2, \beta=1$ c) $\alpha=-1, \beta=2$

d) $\alpha=3, \beta=-1$ e) $\alpha=3, \beta=1$ f) $\alpha=-1, \beta=-1$

**GA - XI. 200** Se dau punctele A(1,1,1); B(2,-1,-1); C(-2,2,2). Să se scrie ecuațiile medianei duse din vârful A în triunghiul $\overline{ABC}$.

a) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$ b) $-x=2y+1=2z+1$ c) $\dfrac{x-1}{-2}=y-1=z-1$

d) $x=2y-1=2z-1$ e) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ f) $x=2y-1=2z+1$

**GA - XI. 201** Să se scrie ecuația planului ce trece prin punctul A(a,b,1) situat pe dreapta ($d_1$): $x-1=y+2=z$ şi este perpendicular pe dreapta

($d_2$): $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=z-1$.

a) $-x-2y+z-1=0$ b) $x-2y-z-1=0$ c) $x-2y-z-3=0$
d) $2x-y+z-3=0$ e) $x+y-z-1=0$ f) $x-2y+z-3=0$

**GA - XI. 202** Se consideră punctele A(3,-1,0), B(0,-7,3), C(-2,1,-1). Să se determine parametrul α astfel ca dreapta (D) $\begin{cases}2x-3y-3z+9=0\\ x+\alpha y+z+1=0\end{cases}$ să fie paralelă cu planul determinat de punctele A, B şi C.

a) α=4 b) α=1 c) $\alpha=-\dfrac{1}{4}$ d) $\alpha=-\dfrac{1}{3}$ e) α=0 f) α=-3

**GA - XI. 203** Fie dreptele ($D_1$) $\begin{cases}x-z-1=0\\ y+2z-3=0\end{cases}$, ($D_2$) $\begin{cases}x+z-3=0\\ y-3z-1=0\end{cases}$ şi punctul A(1,-1,3). Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul A şi este paralel cu dreptele ($D_1$) şi ($D_2$).

a) $x+3y-z+5=0$ b) $x+3y-z=0$ c) $3y-z+5=0$
d) $x-3y-z=0$ e) $5x+2y-z=0$ f) $5x+2y-z+5=0$

**GA - XI. 204** Se consideră dreapta în spațiu (D) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{8}=\dfrac{z+2}{8}$ şi punctul A(0,3,1). Să se calculeze distanța de la punctul A(0,3,1) la dreapta (D).

a) 2 b) 2,5 c) 2,63 d) 3 e) 5 f) 0

**GA - XI. 205** Să se scrie ecuația planului ce trece prin punctul A(0,1,-1) şi conține dreapta

D: $\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$

a) $5x - y + 2z + 3 = 0$
b) $5x + y + 2z + 3 = 0$
c) $5x - y - 2z + 3 = 0$
d) $5x - y + 2z - 3 = 0$
e) $-5x - y + 2z + 3 = 0$
f) $-5x + y + 2z + 3 = 0$

**GA - XI. 206** Se dau planul P: $x - y + 2z + 2 = 0$ şi punctele A(2,3,-1) , B(1,2,4). Să se scrie ecuaţiile dreptei ce trece prin simetricele punctelor A şi B în raport cu planul P.

a) $\dfrac{x - \frac{7}{3}}{13} = \dfrac{y - \frac{8}{3}}{-7} = \dfrac{z + \frac{1}{3}}{5}$
b) $\dfrac{x + \frac{7}{3}}{13} = \dfrac{y - \frac{8}{3}}{-7} = \dfrac{z + \frac{1}{3}}{5}$

c) $\dfrac{x - \frac{7}{3}}{13} = \dfrac{y + \frac{8}{3}}{-7} = \dfrac{z + \frac{1}{3}}{5}$
d) $\dfrac{x - \frac{7}{3}}{13} = \dfrac{y - \frac{8}{3}}{-7} = \dfrac{z - \frac{1}{3}}{5}$

e) $\dfrac{x - \frac{7}{3}}{-13} = \dfrac{y - \frac{8}{3}}{-7} = \dfrac{z + \frac{1}{3}}{5}$
f) $\dfrac{x - \frac{7}{3}}{13} = \dfrac{y - \frac{8}{3}}{7} = \dfrac{z + \frac{1}{3}}{5}$

**GA - XI. 207** Să se determine ecuaţiile unei drepte care trece prin punctul A(1,1,-2) şi este paralelă cu dreapta D

D: $\begin{cases} x - y - 3z + 2 = 0 \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$

a) $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y-1}{-8} = \dfrac{z+2}{1}$
b) $\dfrac{x+1}{-5} = \dfrac{y-1}{-8} = \dfrac{z+2}{1}$

c) $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y+1}{-8} = \dfrac{z+2}{1}$
d) $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y-1}{-8} = \dfrac{z-2}{1}$

e) $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z+2}{1}$ f) $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{8}=\frac{z+2}{1}$

**GA - XI. 208** Fiind dată dreapta D: $x-3y+7=0$ să se determine o dreaptă D', paralelă cu D, care intersectează axa (Ox) într-un punct de abscisă 3.

a) $D': x-3y-1=0$ b) $D': x-3y-2=0$ c) $D': x-3y-3=0$
d) $D': 3x-y-1=0$ e) $D': 3x-y-2=0$ f) $D': 3x-y-3=0$

**GA - XI. 209** Să se găsească dreapta D care în planul (Oxy) este paralelă şi echidistantă în raport cu dreptele:

$D_1$: $x-2y+8=0$ şi $D_2$: $x-2y-2=0$

a) $x-2y+7=0$ b) $x-2y+3=0$ c) $x-2y+4=0$
d) $x-2y+5=0$ e) $x-2y+1=0$ f) $x-2y+2=0$

**GA - XI. 210** Determinaţi dependenţa liniară între gradele Celsius C şi gradele Fahrenheit F, ştiind că apa îngheaţă la $0^0$ Celsius şi $32^0$ Fahrenheit şi fierbe la $100^0$ Celsius şi $212^0$ Fahrenheit.

a) $F=32C$ b) $F=\frac{8}{5}C+32$ c) $F=\frac{9}{5}C+32$
d) $F=\frac{9}{4}C+32$ e) $F=32C-108$ f) $F=\frac{212}{100}C+32$

**ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ**
**(simbol AM – XI)**

**AM - XI. 001** Să se calculeze: $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + (-2)^n}{3^n}$, $n \in \mathbf{N}$.

a) $L = 1$ b) $L$ nu există c) $L = 0$

d) $L = \dfrac{1}{3}$ e) $L = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ \dfrac{2}{3}, & n = 2k \end{cases}$ f) $L = \dfrac{2}{3}$

**AM - XI.002** Precizați toate valorile parametrului $a \in (0,+\infty)$ pentru care

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n + a^n}{3^n + 4^n} = 0 .$$

a) $a \in (0,1)$ b) $a \in (2,3)$ c) $a \in (0,4)$ d) $a \in (0,2)$ e) $a \in \{5,6,7\}$ f) $a \in (0,+\infty)$

**AM - XI. 003** Să se calculeze limita şirului cu termenul general $a_n = \dfrac{3^n}{n!}, n \geq 1$.

a) 1 b) 0 c) 3 d) $\dfrac{1}{3}$ e) 2 f) $\dfrac{1}{2}$

**AM - XI. 004** Să se calculeze limita şirului cu termenul general $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$.

a) 1 b) 2 c) 0 d) $e$ e) 3 f) $\dfrac{1}{3}$

**AM - XI. 005** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ , unde

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\ n\ge 2\,.$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{3}$

**AM - XI. 006** Să se determine limita şirului cu termenul general

$$a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}\right),\quad n\in\mathbf{N}^*\,.$$

a) 4 b) 2 c) 1 d) 0 e) $\frac{1}{2}$ f) 3

**AM - XI. 007** Care este limita şirului cu termenul general

$$a_n=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[9]{5}\cdot\sqrt[27]{5}\cdot\ldots\cdot\sqrt[3^n]{5}, n\in\mathbf{N}^*\ ?$$

a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $2\sqrt[3]{5}$ f) $2\sqrt{5}$

**AM - XI. 008** Calculaţi limita şirului cu termenul general $a_n=2n\sin\frac{\pi}{n},\quad n\ge 1$

a) 1 b) 0 c) π d) $\frac{\pi}{2}$ e) 2π f) ∞

**AM - XI. 009** Să se precizeze valoarea limitei $L=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}$,

unde $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

a) $L=x\sin x$ b) $L=\frac{\sin x}{x}$ c) $L=\sin x$

d) $L=\dfrac{\sin x}{2}$ e) $L=2\sin x$ f) $L=\dfrac{\sin 2x}{2x}$

**AM - XI. 010** Fie $x\in\mathbf{R}$. Să se calculeze: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+xe^{nx}}{1+e^{nx}}$.

a) $f(x)=1,\ x\in\mathbf{R}$ b) $f(x)=x,\ x\in\mathbf{R}$ c) $f(x)=x^2,\ x\in\mathbf{R}$

d) $f(x)=\begin{cases}x, & \text{dacă } x\geq 0\\ 1, & \text{dacă } x<0\end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x\geq 0\\ x, & \text{dacă } x<0\end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases}x, & \text{dacă } x>0\\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x=0\\ 1, & \text{dacă } x<0\end{cases}$

**AM - XI. 011** Care este limita şirului cu termenul general $a_n=n^2\left(\sqrt[n]{2}-\sqrt[n+1]{2}\right),\ n\geq 2$ ?

a) $\dfrac{1}{2}\ln 2$ b) $\ln 2$ c) $\dfrac{1}{3}\ln 3$ d) $e\ln 2$ e) $\dfrac{1}{4}\ln 5$ f) $\dfrac{1}{3}\ln 2$

**AM - XI. 012** Să se calculeze, pentru $k\in\mathbf{N}$, $a\in\mathbf{R}$, $a>0$, $a\neq 1$, limita

$$L=\lim_{n\to\infty}n^k\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right).$$

a) $L=\begin{cases}0, & k<3\\ -\ln a, & k=3\\ +\infty, & k>3\end{cases}$ b) $L=\begin{cases}0, & k<3\\ -\infty, & k>3\\ -\ln a, & k=3\end{cases}$ c) $L=\begin{cases}0, & k<3\\ -\ln a, & k=3\\ -\infty, & k>3 \text{ şi } a>1\\ +\infty, & k>3 \text{ şi } a<1\end{cases}$

d) $L=\begin{cases}+\infty, & k\geq 3, a>1\\ 0, & k\leq 3\end{cases}$ e) $L=\begin{cases}0, & k\leq 3\\ +\infty, & k>3\end{cases}$ f) $L=\begin{cases}-\infty, & k<3 \text{ şi } a<1\\ +\infty, & k>3 \text{ şi } a>1\\ -\ln a, & k=0\end{cases}$

**AM - XI. 013** Care este valoarea limitei şirului cu termenul general

$$a_n = \left(\frac{2n+\sqrt{n}+3}{2n+1}\right)^{\sqrt{n}} \ ?$$

a) $e$ b) $\sqrt[3]{e}$ c) $\sqrt{e}$ d) $\frac{1}{e}$ e) $e^2$ f) 0

**AM - XI. 014** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde $a_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{\frac{\alpha n^2}{2}}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

a) $\alpha$ b) $e^{\alpha}$ c) 0 d) $e^{-\alpha}$ e) $e^{2\alpha}$ f) $-\alpha$

**AM - XI. 015** Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$a_n = \frac{\left[\left(n^2+1\right)\left(n^2-n+1\right)\left(n^2-2n+1\right)\right]^n}{\left(n^2+n\right)^{3n}}, \ n \geq 1.$$

a) $e^2$ b) $e^{-6}$ c) $e^{-4}$ d) $e^3$ e) $e^{-3}$ f) 1

**AM - XI. 016** Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sin\frac{\pi}{2^n} + \mathrm{tg}^{\mathrm{n}}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2^n}\right)\right]$.

a) $L=0$ b) $L=2$ c) $L=\frac{1}{2}$ d) $L=1$ e) $L=-1$ f) $L=3$

**AM - XI. 017** Să se determine mulţimea valorilor $a \in \mathbf{R}$, astfel ca

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(1-a^2\right)^2\cdot n^2+2}}{n} = 3.$$

a) $(0,1)$ b) $\{-2,2\}$ c) $\{0,1\}$ d) $\{0,1,2\}$ e) $(-2,2)$ f) $(-1,1)$

**AM - XI. 018** Să se determine constanta $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât
$\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$ să fie finită.

a) $\alpha \le 1$ b) $\alpha \le 0$ c) $0<\alpha<1$ d) $\alpha>1$ e) $\alpha=-1$ f) $\alpha=\frac{1}{2}$

**AM - XI. 019** Să se determine numerele reale $a$, $b$, $c$ astfel încât
$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(an+\sqrt{cn^2+bn+2}\right)=1$.

a) $a=-1, b=0, c=1$ b) $a=-1, b=0, c=-1$ c) $a=b=c=-1$
d) $a=b=c=0$ e) $a=1, b=0, c=-1$ f) $a=0, b=c=-1$

**AM - XI. 020** Ce relație trebuie să existe între parametrii reali $a$ şi $b$ astfel încât să aibă loc relația: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right)=0$ ?

a) $a+b=0$ b) $a+b+1=0$ c) $a+b=1$
d) $a=b=1$ e) $a=1, b=0$ f) $a^2=b^2$

**AM - XI. 021** Fie $a_0, a_1, \ldots, a_k$ numere reale astfel încât $a_0+a_1+\ldots+a_k=0$.
Să se calculeze $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt[3]{n}+a_1\sqrt[3]{n+1}+\ldots+a_k\sqrt[3]{n+k}\right)$.

a) $L=1$ b) $L=2$ c) $L=\frac{k}{3}$ d) $L=\frac{1}{2}$ e) $L=0$ f) $L=\frac{2k}{3}$

**AM - XI. 022** Să se determine $a,b \in \mathbf{R}$ astfel încât: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b\right)=0$.

a) $a=1, b=0$ b) $a=-1, b=1$ c) $a=-1, b=0$

d) $a=b=0$ e) $a=b=1$ f) $a=1, b=2$

**AM - XI. 023** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+3n+4}\right)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{3}$ e) 1 f) 0

**AM - XI. 024** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$, dacă $a,b \in (-1,1)$.

a) $\frac{1-a}{1-b}$ b) $\frac{1-b}{1-a}$ c) $\frac{1+a}{1-b}$ d) $\frac{1-a}{1+b}$ e) $\frac{a}{b+1}$ f) $\frac{1+b}{1+a}$

**AM - XI. 025** Într-o progresie aritmetică $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ suma primilor *n* termeni este $S_n = \frac{3n^2+9n}{2}$, oricare ar fi $n \geq 1$. Să se determine $a_n$ şi să se calculeze:
$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n\,a_n}$.

a) $a_n = 3n, L=1$ b) $a_n = 3n+3, L=\frac{1}{2}$ c) $a_n = 3n+3, L=2$

d) $a_n = n+2, L=\frac{3}{2}$ e) $a_n = 3n+3, L=\frac{3}{2}$ f) $a_n = 4n, L=\frac{2}{3}$

**AM - XI. 026** Să se calculeze limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, unde
$x_n = ac + (a+ab)c^2 + (a+ab+ab^2)c^3 + \ldots + (a+ab+\ldots+ab^n)c^{n+1}$, *a*, *b*, *c* fiind numere reale astfel încât $|c|<1$, $b \neq 1$ şi $|bc|<1$.

a) 0   b) $\dfrac{ac}{(1-c)(1-bc)}$   c) 1

d) $\dfrac{2ac}{(1-c)(1-bc)}$   e) $ac$   f) $\dfrac{abc}{(1-c)(1-bc)}$

**AM - XI. 027** Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(k^2 - nk + n^2\right)$.

a) 1   b) $\dfrac{5}{6}$   c) $\dfrac{3}{2}$   d) $\dfrac{2}{3}$   e) $\dfrac{4}{3}$   f) 2

**AM - XI. 028** Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{\pi^2}{6}$ , care este valoarea limitei

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right] ?$$

a) $\dfrac{\pi^2}{2}$   b) $\dfrac{\pi^2}{3}$   c) $\dfrac{\pi^2}{4}$   d) $\dfrac{\pi^2}{8}$   e) $\dfrac{\pi^2}{12}$   f) $\dfrac{2\pi^2}{3}$

**AM - XI. 029** Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\ldots+\dfrac{1}{4n^2-1}\right)$.

a) 1   b) 2   c) $\dfrac{3}{2}$   d) $\dfrac{1}{2}$   e) $\dfrac{3}{5}$   f) 3

**AM - XI. 030** Să se determine limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, unde $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ .

a) 1   b) 0   c) $e$   d) $\dfrac{1}{e}$   e) $1-e$   f) 2

**AM – XI. 031** Să se calculeze $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{2^{k-1}(k-1)}{(k+1)!}$

a) L = 1 b) L = e; c) L = $e^2$; d) L = 0; e) L = 2 f) L = $\frac{1}{e}$

**AM - XI. 032** Se consideră şirul cu termenul general

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}, n\in\mathbf{N}^*.$$ Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\left(S_n-\frac{1}{4}\right)^n$.

a) 1 b) $\frac{1}{e^2}$ c) $e$ d) $\frac{1}{e}$ e) $2e$ f) $4e$

**AM - XI. 033** Să se calculeze $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}\right]^n$.

a) $L=1$ b) $L=e^{\frac{3}{2}}$ c) $L=e$ d) $L=e^{-\frac{4}{3}}$ e) $L=e^{-\frac{1}{2}}$ f) $L=2$

**AM - XI. 034** Fie $a_n=\frac{n}{(n+1)!}$ şi $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$.

Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

a) 0 b) $e$ c) 1 d) $+\infty$ e) 2 f) $\frac{1}{2}$

**AM - XI. 035** Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, unde $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\text{arctg}\frac{x}{1+k(k+1)x^2}$ şi $x>0$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$ d) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ e) 1 f) 0

**AM - XI. 036** Să se calculeze limita şirului cu termenul general:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}},\ n \geq 1.$$

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1 e) 4 f) 3

**AM - XI. 037** Să se calculeze limita şirului cu termenul general $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3+k}{n^4+k}, n \geq 1$

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $+\infty$ f) 0

**AM - XI. 038** Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left( \sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 \right)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{4}$ e) 4 f) 3

**AM - XI. 039** Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n+1} \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{\pi}{2n+k}$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3}$ e) 1 f) 2

**AM - XI. 040** Notând $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left( n - \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2\pi}{n+k} \right)$, precizaţi care din următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $L=0$ b) $L=1$ c) $L=+\infty$ d) $L=e$ e) $L$ nu există f) $L=2$

**AM - XI. 041** Fie şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ astfel încât $x_0=1$ şi $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{\sqrt[3]{1+x_n^3}}$, $n\geq 0$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

a) 1 b) 0 c) 2 d) nu există e) $+\infty$ f) $-\infty$

**AM - XI. 042** Fie şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0=3$ şi $x_n=\dfrac{1}{3}x_{n-1}-4$, $n\geq 1$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

a) 0 b) 1 c) $-2$ d) $-3$ e) –6 f) nu există

**AM - XI. 043** Fie şirul $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ definit astfel: $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{10}\cdot a_n$, $n\geq 0$. Să se determine $L=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ în funcție de $a_0\in\mathbf{R}$.

a) $L=a_0$ b) $L=\begin{cases}1, \text{ dacă } a_0\geq 0\\ 0, \text{ dacă } a_0<0\end{cases}$ c) $L=+\infty,\ \forall a_0\in\mathbf{R}$

d) $L=\begin{cases}+\infty, \text{ dacă } a_0\geq 0\\ 1, \text{ dacă } a_0<0\end{cases}$ e) $L=\begin{cases}+\infty, \text{ dacă } a_0>0\\ 0, \text{ dacă } a_0=0\\ -\infty, \text{ dacă } a_0<0\end{cases}$ f) $L=\begin{cases}\dfrac{1}{a_0}, \text{ dacă } a_0\neq 0\\ 0, \text{ dacă } a_0=0\end{cases}$

**AM - XI. 044** Se consideră şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ definit prin: $x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2$, unde $x_0=a$ cu $a>0$. Să se determine toate valorile parametrului *a* pentru care şirul este convergent şi apoi să se calculeze limita şirului.

a) $a\in\left(1,2\right]$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$ b) $a\in\left[1,2\right]$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$

c) $a \in (0,2]$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1, \text{ dacă } a \in (0,2) \\ 2, \text{ dacă } a = 2 \end{cases}$ d) $a \in [1,2]$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1, \text{ dacă } a \in (1,2) \\ 2, \text{ dacă } a = 2 \end{cases}$

e) $a \in (0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ f) $a \in (0,2)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

**AM - XI. 045** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde

$$x_n = \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+1)!}, \quad n \geq 1$$

a) 1 b) 0 c) 2 d) e e) $\frac{1}{2}$ f) 2e

**AM - XI. 046** Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$$

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n + x_{n-1}}{n}$$

a) 1 b) $\infty$ c) $-1$ d) 0 e) $-\infty$ f) 2

**AM - XI. 047** Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, unde

$$a_n = \frac{1 + 2^2\sqrt{2} + 3^2\sqrt[3]{3} + \ldots + n^2\sqrt[n]{n}}{n(n+1)(2n+1)}$$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{5}$ f) $\frac{2}{3}$

**AM - XI. 048** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)^2}{n \cdot \ln n}$

a) $e^2$ b) 0 c) 2 d) $e^{-2}$ e) 1 f) $\frac{1}{2}$

**AM - XI. 049** Calculați limita

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(1+\frac{2}{1+1}+\frac{2^2}{2+1}+...+\frac{2^n}{n+1}\right)}{2^n}$$

a) $\infty$ b) 2 c) 0 d) 1 e) $\frac{1}{2}$ f) 4

**AM - XI. 050** Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un şir de numere strict pozitive cu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, finită sau infinită. Atunci:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$ e) $(\nexists)\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt{e}$

**AM - XI. 051** Fiind dat şirul $a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$.

a) e b) 1 c) $\frac{1}{e}$ d) 0 e) $e^2$ f) $\infty$

**AM - XI. 052** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

a) $-\frac{1}{56}$ b) $\frac{1}{56}$ c) $\frac{1}{48}$ d) $-\frac{1}{48}$ e) 0 f) 1

**AM - XI. 053** Determinaţi numerele reale $a$ şi $b$ astfel încât:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x+a}-b}{x^2+x-2}=\frac{5}{18}.$$

a) $a=-3, b=-5$ b) $a=3, b=-5$ c) $a=5, b=3$
d) $a=-5, b=-3$ e) $a=2, b=1$ f) $a=-2, b=-1$

**AM - XI. 054** Să se determine parametrii $a$ şi $b$ reali, aşa încât:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-ax^2}-bx+2\right)=1.$$

a) $a=12, b=2$ b) $a=10, b=2$ c) $a=12, b=4$
d) $a=-10, b=2$ e) $a=8, b=6$ f) $a=6, b=10$

**AM - XI. 055** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2^x+3^x+4^x}{3}\right)^{1/x}$.

a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt[3]{24}$ c) 4 d) 1 e) $\sqrt{2}$ f) $\sqrt{e}$

**AM - XI. 056** Fie $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$.Care din următoarele afirmaţii este adevărată ?

a) limita nu există b) limita este $-1$ c) limita este $-\infty$
d) limita este 0 e) limita este $+\infty$ f) limita este 1

**AM - XI. 057** Să se calculeze limita: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.

a) $-1$ b) $-\dfrac{e}{2}$ c) 0 d) $+\infty$ e) 1 f) $\dfrac{e}{2}$

**AM - XI. 058** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbf{R}$, definită prin: $f(x)=\dfrac{1}{e^{1/x}-e}$.
Să se cerceteze existența limitelor laterale ale lui $f$ în punctele $x=0$ şi $x=1$.

a) $f(0-0)=-\dfrac{1}{e},\ f(0+0)=0$
$f(1-0)=+\infty,\ f(1+0)=-\infty$

b) $f(0-0)=\dfrac{1}{e},\ f(0+0)=0$
$f(1-0)=-\infty,\ f(1+0)=+\infty$

c) $f(0-0)=e,\ f(0+0)=+\infty$
$f(1-0)=\dfrac{1}{e},\ f(1+0)=-\infty$

d) $f(0-0)=-\infty,\ f(0+0)=+\infty$
$f(1-0)=+\infty,\ f(1+0)=-\infty$

e) $f(0-0)=-\dfrac{1}{e},\ f(0+0)=\dfrac{1}{e}$
$f(1-0)=-\infty,\ f(1+0)=\pm\infty$

f) $f(0-0)=\dfrac{1}{e},\ f(0+0)=-\dfrac{1}{e}$
$f(1-0)=-\infty,\ f(1+0)=\pm\infty$

**AM - XI. 059** Să se determine parametrul real $a$ astfel încât funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases} a\ln(3-x), & \text{dacă } x<1\\ \dfrac{2^x-2}{x-1}, & \text{dacă } x>1\end{cases}$ să aibă limită în punctul $x=1$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\dfrac{1}{2}$ e) ln2 f) 2ln2

**AM - XI. 060** Să se determine: $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$, unde $m,n\in\mathbf{N}^*$.

a) $m-n$ b) $\dfrac{m-n}{2}$ c) $m+n$ d) $\dfrac{m+n}{2}$ e) 1 f) 0

**AM - XI. 061** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

a) $-1$　　b) $\frac{1}{2}$　　c) $1$　　d) $2$　　e) $\frac{3}{2}$　　f) $3$

**AM - XI. 062** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln(1+x)-\ln x\right]$.

a) $0$　　b) $\frac{1}{2}$　　c) $1$　　d) $2$　　e) $e$　　f) $2e$

**AM - XI. 063** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

a) $\frac{1}{2}$　　b) $0$　　c) $\frac{3}{4}$　　d) $-\frac{1}{2}$　　e) $-\frac{3}{4}$　　f) $1$

**AM - XI. 064** Să se determine: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

a) $-\infty$　　b) $+\infty$　　c) $0$　　d) $1$　　e) $\frac{1}{2}$　　f) nu există

**AM - XI. 065** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}$, unde $n\in\mathbf{N}^*$.

a) $\frac{n(n+1)}{2}$　　b) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$　　c) $n$　　d) $\frac{n^2}{4}$　　e) $0$　　f) $1$

**AM - XI. 066** Să se calculeze: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{xe^{-1/x}}{\operatorname{tg}^2 x}$.

a) $1$　　b) $0$　　c) $-1$　　d) $\pi$　　e) $\frac{\pi}{2}$　　f) $2$

**AM - XI. 067** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 d) 1 e) $\frac{1}{2}$ f) 2

**AM - XI. 068** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$, unde $m,n\in\mathbf{N}^*$.

a) $\frac{m}{n}$ b) $(-1)^m\cdot\frac{m}{n}$ c) $(-1)^{m-n}\cdot\frac{m}{n}$ d) $(-1)^{mn}\cdot\frac{m}{n}$ e) $\frac{n}{m}$ f) $(-1)^{n-m}\cdot\frac{n}{m}$

**AM - XI. 069** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}$.

a) 0 b) 1 c) $3\pi$ d) $2\pi$ e) $\frac{\pi}{2}$ f) $\pi$

**AM - XI. 070** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(ax)-\sin(ax)}{\operatorname{tg}(bx)-\sin(bx)}$, unde $a,b\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a^2}{b^2}$ c) $a\cdot b$ d) $\frac{a^3}{b^3}$ e) $\frac{a^4}{b^4}$ f) $a^3\cdot b^3$

**AM - XI. 071** Să se calculeze: $L=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}}$.

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0 d) 1 e) $-1$ f) 2

**AM - XI. 072** Să se calculeze: $L_n = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(n \arcsin x)}{x^2}$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

a) 0 b) 1 c) $n$ d) $n^2$ e) $\dfrac{n^2}{2}$ f) $\dfrac{n^2}{4}$

**AM - XI. 073** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3}-1}{\sin^3 x}$.

a) –1 b) 1 c) $\dfrac{1}{2}$ d) $e$ e) $e^2$ f) $+\infty$

**AM - XI. 074** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cos\frac{1}{x}}{\sin x}$.

a) –1 b) 0 c) 1 d) sin1 e) $e$ f) 2

**AM - XI. 075** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}}$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) $e$ e) $\dfrac{1}{e}$ f) $2e$

**AM - XI. 076** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 3} (7-2x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

a) 0 b) 1 c) $e$ d) $e^{\pi/3}$ e) $e^{4/\pi}$ f) $e^{12/\pi}$

**AM - XI. 077** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\cos\dfrac{2\pi x}{x+1}\right)^{x^2}$.

a) 0 b) 1 c) $e$ d) $e^{-\pi}$ e) $e^{-2\pi^2}$ f) $e^{-\pi^2}$

**AM - XI. 078** Se consideră şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, unde $a_n = \lim\limits_{x\to 0}(1 - x\sin nx)^{1/x^2}$. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

a) $1-e$  b) $\dfrac{1}{1-e}$  c) $e$  d) $e-1$  e) $\dfrac{1}{e-1}$  f) 0

**AM - XI. 079** Fie $f:(0,+\infty)\to \mathbf{R}$, definită prin relaţia

$$f(x)=\left[1+\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ldots+\ln(1+nx)\right]^{1/x} \text{ pentru orice } x>0.$$

Să se determine $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

a) 1  b) 0  c) $e^n$  d) $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$  e) $e^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$  f) $e^{-n^2}$

**AM - XI. 080** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x}{x-\sin x}}$.

a) 1  b) $\dfrac{1}{e}$  c) 0  d) $e$  e) $2e$  f) $e^2$

**AM - XI. 081** Să se calculeze limita: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{2}\left(a^{1/x}+b^{1/x}\right)\right]^x$.

a) $ab$  b) $\dfrac{a}{b}$  c) $\sqrt{ab}$  d) $a^2b^2$  e) $a^3b^3$  f) $\dfrac{1}{2}ab$

**AM – XI. 082** Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel ca funcţia

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{-x}, & x\in(-1,0)\\[2mm] \dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\ln\left(1-x+x^2\right)}{ax^2}, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

să aibă limită pentru $x\to 0$.

a) –2 b) –1 c) $-\dfrac{1}{2}$

d) 1 e) 2 f) $\dfrac{1}{2}$

**AM - XI. 083** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

a) 1 b) 0 c) $e$ d) $\dfrac{1}{e}$ e) $e^2$ f) $\dfrac{1}{e^2}$

**AM - XI. 084** Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\dfrac{1+x}{x}\right)$.

a) 1 b) 2 c) $-\dfrac{1}{2}$ d) 3 e) $\dfrac{1}{3}$ f) $\dfrac{1}{2}$

**AM - XI. 085** Se consideră funcția $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x$. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

a) 1 b) $\dfrac{1}{3}$ c) $-\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $-\dfrac{2}{3}$ f) $\dfrac{1}{2}$

**AM - XI. 086** Pentru ce valori ale numărului natural *n* există limita:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^n}\ ?$$

a) $n\in\mathbf{N}$ b) $n\in\mathbf{N}\setminus\left\{2k \mid k\in\mathbf{N}\right\}$ c) $n\in\mathbf{N}\setminus\left\{2k+1 \mid k\in\mathbf{N}\right\}$

d) $n\in\mathbf{N}\setminus\left\{2k \mid k\geq 2,\, k\in\mathbf{N}\right\}$ e) $n\in\mathbf{N}\setminus\left\{1,2,3\right\}$ f) $n\in\varnothing$

**AM - XI. 087** Să se calculeze pentru $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 1$, limita $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n-\left(\sin x\right)^n}{x^{n+2}}$.

a) $L=\dfrac{n}{2}$ b) $L=\dfrac{n^2}{3}$ c) $L=n-1$ d) $L=\dfrac{n}{6}$ e) $L=\dfrac{n}{3}$ f) $L=\dfrac{n^2}{6}$

**AM - XI. 088** Se consideră funcția

$$f:\mathbf{R}\setminus\left\{-1\right\}\to\mathbf{R},\ f\left(x\right)=\frac{x^2+px-1}{x+1},\ \text{unde } p\in\mathbf{R}.$$

Să se determine *p* astfel încât graficul funcției să admită asimptotă dreapta $y=x+1$ la ramura $+\infty$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) –1 e) –2 f) –3

**AM - XI. 089** Se consideră funcția $f:\left(-k,+\infty\right)\to\mathbf{R}$, $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-3ax+2a^2}{x+k}$, unde $a,k\in\mathbf{R}$. Să se precizeze relația dintre *a* și *k* astfel încât graficul funcției $f$ să admită ca asimptotă dreapta $y=x+1$.

a) $3a+k=0$ b) $3a+k=-1$ c) $3a+k=1$

d) $3a+2k=1$ e) $3a+2k=0$ f) $3a+2k=-1$

**AM - XI. 090** Fie $f:D\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{x^2+ax+a}$, unde *D* este domeniul maxim de definiție și $a>0$. Să se determine *a* astfel încât graficul lui $f$ să admită o singură asimptotă verticală.

a) $a=4$ b) $a \in \{0,4\}$ c) $a \in (0,4)$ d) $a=2$ e) $a=1$ f) $a \in (4,+\infty)$

**AM - XI. 091** Fie $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x-2}$, unde $D$ este domeniul maxim de definiție. Să se determine asimptotele lui $f$.

a) $x=2,\ x=3,\ y=5$ b) $x=3,\ x=1,\ y=6$ c) $x=2,\ x=-1,\ y=2$

d) $x=-2,\ x=1,\ y=1$ e) $x=3,\ x=4,\ y=5$ f) $x=\dfrac{1}{2},\ x=2,\ y=-1$

**AM - XI. 092** Să se determine toate valorile parametrilor reali $a$, $b$, $c$ astfel încât graficul funcției $f : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^4}{(b+cx)^3}$ să admită ca asimptotă dreapta $y=x-3$.

a) $a=8, b=-1, c=2$ b) $a=18, b=-1, c=1$ c) $a \in \mathbf{R}, b=-c$

d) $b=c, a=c^3, c \neq 0$ e) $b=2c, a=1$ f) $b=-2c, a \in \mathbf{R}$

**AM - XI.093** Se dă funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{2\} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{\left|ax^2+bx+c\right|}{x-2}$, unde $a>0$, $c<0$, $b \in \mathbf{R}$. Să se determine coeficienții $a$, $b$, $c$ astfel ca graficul funcției să admită asimptotă dreapta $y=x+3$, iar $f(0)=-1$.

a) $a=2, b=1, c=-3$ b) $a=1, b=2, c=3$ c) $a=1, b=2, c=-3$

d) $a=1, b=1, c=2$ e) $a=1, b=1, c=-2$ f) $a=1, b=-1, c=2$

**AM - XI. 094** Se consideră funcția $f : (-\infty,0] \cup [4,+\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$. Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul lui $f$.

a) $y=x$ b) $y=x-2$ c) $y=-x+2$ d) $y=-x$ e) $y=-x+1$ f) nu există

**AM - XI. 095** Să se determine asimptotele la graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=x-\sqrt{\left|x^2+x\right|}.$$

a) nu are b) $y=-1$ c) $x=0$ d) $y=1$ asimptotă orizontală la $+\infty$

e) $y=-\dfrac{1}{2}$ asimptotă orizontală la $+\infty$ şi $y=2x+\dfrac{1}{2}$ asimptotă oblică la $-\infty$

f) $y=\dfrac{1}{2}$ asimptotă orizontală la $-\infty$

**AM - XI. 096** Să se determine valorile parametrilor $p$ şi $q$ astfel ca graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=px-q\sqrt{\left|x^2-1\right|}$ să admită ca asimptote dreptele $y=2x$ şi $y=0$.

a) $(p,q)\in\{(-1,-1),(1,0)\}$ b) $(p,q)\in\{(1,-1),(1,1)\}$ c) $(p,q)\in\{(0,1),(2,1)\}$
d) $(p,q)\in\{(-1,1),(-1,-2)\}$ e) $(p,q)\in\{(-1,2),(2,1)\}$ f) $(p,q)\in\{(2,-1),(-1,2)\}$

**AM - XI. 097** Se dă funcția $f(x)=\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}+\chi x$ cu $\alpha,\beta,\chi\in\mathbf{R}$. Să se determine $\alpha$, $\beta$, $\chi$ astfel încât $f$ să fie definită pe $\mathbf{R}$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$.

a) $\alpha=6,\beta\ge 9,\chi=-1$ b) $\alpha=-6,\beta\ge 9,\chi=3$ c) $\alpha=1,\beta=10,\chi=6$
d) $\alpha\ge 3,\beta\ge 2,\chi\ge 1$ e) $\alpha=6,\beta=10,\chi=1$ f) $\alpha=1,\beta=10,\chi=-1$

**AM - XI. 098** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ax+\sqrt{bx^2+cx+1}$, unde $a>0$, $b>0$, $c\in\mathbf{R}$. Să se determine *a*, *b*, *c* astfel încât graficul funcției să admită la $+\infty$ o asimptotă paralelă cu dreapta $y=4x-2$, iar la $-\infty$ asimptota orizontală $y=-1$.

a) $a=1,b=1,c=2$ b) $a=2,b=1,c=2$ c) $a=1,b=4,c=4$
d) $a=2,b=4,c=4$ e) $a=1,b=4,c=-4$ f) $a=-1,b=-1,c=-2$

**AM - XI. 099** Să se determine asimptotele oblice ale funcției $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{|x-1|}}.$$

a) $y=x$ şi $y=-x$ b) $y=2x$ şi $y=-2x$ c) $y=x+1$ şi $y=x-1$

d) $y=2x+3$ şi $y=-x+1$ e) $y=x+\frac{1}{2}$ şi $y=-x$ f) $y=-\frac{1}{2}x$ şi $y=x$

**AM - XI. 100** Fie funcția $f:\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$. Să se determine asimptotele la graficul acestei funcții.

a) $x=\frac{3}{2},\ y=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$ b) $x=\frac{3}{2},\ y=x$ c) $x=\frac{3}{2},\ y=x+\frac{1}{2}$

d) $x=\frac{3}{2},\ y=0$ e) $x=-\frac{3}{2},\ y=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$ f) $x=1,\ y=x+1$

**AM - XI. 101** Să se determine asimptotele la graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=x-2\operatorname{arctg}x.$$

a) $x=0,\ x=1$ b) $y=0$ c) $y=x,\ y=-x$

d) nu are asimptote e) $y=\pi x,\ y=-\pi x$ f) $y=x+\pi,\ y=x-\pi$

**AM - XI. 102** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x-\sqrt{a^2x^2+ax+1}, & x\le 1\\ \sqrt{x-1}+|a|\sqrt{x}, & x>1\end{cases}$.

Să se determine valorile parametrului real $a$ pentru care $f$ este continuă pe $\mathbf{R}$.

a) $a=-1$ b) $a=-\frac{3}{5}$ c) $a=0$

d) $a\in\left\{-1,\frac{3}{5}\right\}$ e) $a\in\left\{-1,\frac{5}{3}\right\}$ f) $a\in\varnothing$

**AM - XI. 103** Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$. Să se determine valoarea constantei $c\in\mathbf{R}$ pentru care $f$ este continuă pe $\mathbf{R}$

a) $c=0$ b) $c=1$ c) $c=-1$ d) $c=\dfrac{\pi}{2}$ e) $c=-\dfrac{\pi}{2}$ f) $c=\pi$

**AM - XI. 104** Se consideră $f:[0,\pi]\to\mathbf{R}$, definită prin:

$$f(x)=\begin{cases}e^{3x}, \text{ pentru } x\in[0,1]\\ a\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-5x+4}, \text{ pentru } x\in(1,\pi]\end{cases}.$$

Determinați valorile lui $a$ astfel încât funcția $f$ să fie continuă pe $[0,\pi]$.

a) $2e^3$ b) $e$ c) $-3e^3$ d) $3e^3$ e) $3e^2$ f) $2e$

**AM - XI. 105** Să se determine $\beta\in[0,1]$ astfel ca funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-x^2+6}{x^{2n}+x^2+4}, \text{ dacă } |x|<1\\ 1+\sqrt{x^2-\beta}\cdot e^{-x}, \text{ dacă } |x|\geq 1\end{cases}$$ să fie continuă pe $\mathbf{R}$.

a) $\beta=e$ b) $\beta=1$ c) $\beta=-1$ d) $\beta=e^{-1}$ e) $\beta=0$ f) $\beta=e^2$

**AM - XI. 106** Să se studieze continuitatea funcției definită prin:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\left|1-x^2\right|}{1+x^2}, & x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}\\ -2, & x=0\end{cases}.$$

a) $f$ continuă pe $\mathbf{R}$ b) $f$ continuă pe $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ c) $f$ continuă pe $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$

d) $f$ discontinuă în $x=0$ e) $f$ discontinuă pe $\mathbf{R}$ f) $f$ continuă pe $\mathbf{R}\setminus\{1,0\}$

**AM - XI. 107** Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases}2-x, x\in\mathbf{Q}\\ 2x, x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$.

Să se determine mulțimea punctelor în care $f$ este continuă.

a) $\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$ b) $\mathbf{R}$ c) $\mathbf{Q}$ d) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ e) $\varnothing$ f) $\{0\}$

**AM - XI. 108** Să se determine mulțimea punctelor în care funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$f(x)=\begin{cases}\left|x^2-1\right|,\ x\in\mathbf{Q}\\ 1,\ x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$ este continuă.

a) $\{0\}$ b) $\{0,2\}$ c) $\{-2,2\}$
d) $\{-\sqrt{2},2\}$ e) $\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$ f) $\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$

**AM - XI. 109** Fiind dată funcția $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^n\left(x^2+4\right)}{x\left(x^n+1\right)}$, să se precizeze care este domeniul maxim de definiție *A* şi mulțimea punctelor sale de discontinuitate *D*.

a) $A=(0,+\infty)$, $D=\{1,2\}$ b) $A=\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$, $D=\{1\}$
c) $A=(-1,+\infty)\setminus\{0\}$, $D=\{1\}$ d) $A=\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$, $D=\{-1\}$
e) $A=\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$, $D=\{0,1\}$ f) $A=(-\infty,-1)$, $D=\{0,-1\}$

**AM - XI. 110** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin relația

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|\cdot e^{nx}+a(x+1)^2\cdot e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}\text{ , unde } a\in\mathbf{R}.$$

Să se determine valorile parametrului *a* astfel încât funcția $f$ să fie continuă pe $\mathbf{R}$.

a) $a=2$ b) $a\in\{0,-1\}$ c) $a=3$ d) $a=1$ e) $a\in\{-1,2\}$ f) $a\in\{-1,0,1\}$

**AM – XI. 111** Să se determine punctele de discontinuitate ale funcției $f:[1,e^2]\to \mathbf{R},\quad f(x)=[\ln x]$.

a) $\{1\}$; b) $\{2\}$; c) $\{e,e^2\}$;
d) $\phi$ e) $\{1,e,e^2\}$ f) $\{1,2,e\}$

**AM – XI. 112** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ funcția definită prin $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}\left[\dfrac{2}{x}\right], & x\neq 0\\ a\quad, & x=0\end{cases}$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui $x\in\mathbf{R}$. Să se determine valoarea lui $a\in\mathbf{R}$ pentru care funcția este continuă în punctul x = 0.

a) a = 0; b) a = $-\dfrac{2}{3}$; c) a = $\dfrac{2}{3}$; d) a = 2; e) a = $\dfrac{1}{3}$; f) a $\in\phi$

**AM – XI. 113** Se cere mulțimea de continuitate a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x\,arctg\dfrac{1}{\left|x^2-3x+2\right|}, & x\in R\setminus\{1,2\}\\ \dfrac{\pi}{2} & ,\quad x=1\\ \pi & ,\quad x=2\end{cases}$$

a) $\mathbf{R}$ b) $\mathbf{R}^*$ c) $\mathbf{R}_+$
d) $\mathbf{R}\setminus\{1,2\}$ e) $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ f) $\mathbf{R}\setminus\{2\}$.

**AM - XI. 114** Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2+a}{2}, & x<-2 \\ x-b, & x\in[-2,2] \\ \dfrac{x^2+a}{2}, & x>2 \end{cases}$$

este continuă pe **R** dacă:

a) a=b=0 b) a=2, b=0 c) a=0, b=1
d) a=2, b=1 e) a=b=1 f) a=b=2

**AM - XI. 115** Se consideră funcţia $f:[0,2]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x-[x]}{2x-[x]+1}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x.
Fie S suma absciselor punctelor de dicontinuitate ale funcţiei f; atunci:

a) $S=\dfrac{1}{2}$ b) S=1 c) S=2 d) S=3 e) $S=\dfrac{3}{2}$ f) S=0

**AM - XI. 116** Fie funcţia $f:D\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x\ln\dfrac{1}{|x|}+(1-x)\ln\dfrac{1}{1-x} & x\neq 0,\ x\neq 1 \\ 0 & x=0,\ x=1 \end{cases}$$

unde D este domeniul maxim de definiţie. Să se determine D şi mulţimea de continuitate C.

a) $D=[0,1]$; C=(0,1) b) $D=(-\infty,1]; C=(-\infty,1)\setminus\{0\}$
c) $D=(-\infty,1]; C=(-\infty,1]$ d) $D=(-\infty,1]; C=(-\infty,1)$
e) $D=(-\infty,1]; C=(-\infty,0)\cup(0,1]$ f) D = **R**; C = **R**

**AM – XI. 117** Se consideră funcția $f:[0,1]\to \mathbf{R}$ ;

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \ sau \ x=1 \\ x\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x<\dfrac{1}{\pi} \\ 0, & \dfrac{1}{\pi}\le x\le 1-\dfrac{1}{\pi} \\ (1-x)\sin\dfrac{1}{1-x}, & 1-\dfrac{1}{\pi}<x<1 \end{cases}$$

Să se determine mulțimea punctelor din $[0,1]$ în care f este continuă

a) f este discontinuă în x = 0 b) f nu este continuă în $x=\dfrac{1}{\pi}$

c) f este continuă pe $[0,1]$ d) f este continuă pe $[0,1]\setminus\left\{\dfrac{1}{\pi},1-\dfrac{1}{\pi}\right\}$

e) f este continuă pe $(0,1]\setminus\left\{\dfrac{1}{\pi},1-\dfrac{1}{\pi}\right\}$ f) f este continuă pe $(0,1)\setminus\left\{\dfrac{1}{\pi},1-\dfrac{1}{\pi}\right\}$

**AM – XI. 118** Să se determine valoarea constantei $a\in\mathbf{R}$, astfel încât funcția

$f:[0,3]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{7\sin a(x-2)}{x-2}, & x\in[0,2) \\ 6x+a, & x\in[2,3] \end{cases}$ să fie continuă pe domeniul ei de definiție.

a) a = 2; b) a = 1; c) a = 3; d) a = 4; e) a = 5; f) a = 0,5.

**AM – XI. 119** Să se determine valoarea constantei $a\in\mathbf{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{\sin x}-1}{x-\dfrac{\pi}{2}}, & \text{dacă } x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ a\quad, & \text{dacă } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

să fie continuă pe **R** .

a) $\frac{\pi}{2}$ b) 1 c) 0 d) –1 e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{2}$

**AM – XI. 120** Să se determine funcția continuă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ pentru care $f(0)=\frac{1}{e}$ și $f(x)-f\left(\frac{x}{e}\right)=x,\quad \forall x\in\mathbf{R}$.

a) $f(x)=\dfrac{e^2x+e-1}{e(e-1)}$ b) $f(x)=\dfrac{e^2x+1-e}{e(1-e)}$ c) $f(x)=\dfrac{ex+1-e}{e(1-e)}$

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{e}$ e) $f(x)=\dfrac{x^2+e}{e^2}$ d) $f(x)=\dfrac{e^2x+1}{e}$

**AM – XI. 121** Fie ecuația $\dfrac{ax^5}{x-1}+\dfrac{b(x^3-25)}{x-3}=0,\quad a>0, b>0.$

Care este mulțimea tuturor valorilor lui a și b pentru care ecuația dată are cel puțin o rădăcină în intervalul (1,3) ?

a) $a\in(0,1), b\in(0,1)$; b) $a\in(2,3), b\in(0,\infty)$; c) $a\in(0,\infty), b\in(0,\infty)$;
d) $a\in\{1,2\}, b=3$; e) $a\in(1,3), b\in(1,3)$; f) $a\in(2,3), b\in(1,3)$.

**AM - XI. 122** Fie $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $g(x)=[x]f(x)$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$. Dacă $f$ și $g$ sunt continue în punctul $n\in\mathbf{N}^*$, să se calculeze $f(n)$.

a) $f(n)=\dfrac{g(n)+1}{n}$ b) $f(n)=g(n)-1$ c) $f(n)=1$

d) $f(n)=-1$ e) $f(n)=\dfrac{1}{2}$ f) $f(n)=0$

**AM – XI. 123** Fie funcțiile $f_1, f_2, f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite astfel :

$$f_1(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 1, & x\le 0\end{cases};\qquad f_2(x)=\begin{cases}-\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases};\qquad f_3(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

Care dintre următoarele funcții au proprietatea lui Darboux pe **R** ?

a) $f_1$ şi $f_3$ ; b) $f_3$ ; c) $f_1$ şi $f_2$ ; d) $f_2$ şi $f_3$ ; e) $f_1$,$f_2$ şi $f_3$ ; f) nici una .

**AM - XI. 124** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu proprietatea că:

$$f(x-1)\le 3x+1\le 3f\left(\frac{x+1}{3}\right)-14,\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

Decide :

a) $f(0)=3$ b) f este injectivă, dar nu este surjectivă c) f este bijectivă

d) f nu are proprietatea lui Darboux e) f nu e continuă f) nu există f cu această proprietate

**AM - XI. 125** Fie $f:[-3,3]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+3; & x\in[-1,3]\\ x+m; & x\in[-3,-1)\end{cases}$

Să se determine toate valorile $m\in\mathbf{R}$ pentru care funcția f are proprietatea lui Darboux pe $[-3,3]$

a) $m\in\{1\}$ b) $m\in[1,3)$ c) $m\in[3,7]$

d) $m\in[1,7]$ e) $m\in\mathbf{R}$ f) $m\ge 1$

**AM - XI. 126** Să se determine valorile parametrului real m astfel încât ecuația $2mx^3-5x-12m=0$ să aibă cel puțin o rădăcină reală în intervalul (1,2).

a) $m \in (1,2)$ b) $m \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ c) $m \in \left\{-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right\}$

d) $m \in \left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ e) $m \in \left[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$ f) $m \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

**AM - XI. 127** Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ -1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

Să se precizeze care dintre afirmațiile de mai jos este corectă:

a) f nu este mărginită; b) f are limită în punctul x=0;
c) f este continuă în punctul x=0; d) f are proprietatea lui Darboux pe **R**;
e) f nu are proprietatea lui Darboux pe **R** f) restricția funcției f la intervalul $[-1,1]$ are proprietatea lui Darboux.

**AM - XI. 128** Ecuația $x2^x = 1$ are pe segmentul [0,1]:

a) cel puțin o soluție b) nu are soluție c) x=0 este singura soluție
d) x=1 este singura soluție e) $x = \frac{1}{2}$ este singura soluție

**AM - XI. 129** Fie $f : [0,1] \to [0,1] \cup [2,3]$, f continuă și $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Decide:

a) f surjectivă b) f injectivă c) f nu are proprietatea lui Darboux
d) f strict crescătoare e) f strict descrescătoare f) a), b), c), d), e) false

**AM - XI. 130** Să se rezolve inecuația: $(x^2 - 5x + 6)\ln(x-1) > 0$

a) $x \in (2,3)$ b) $x \in (1,2)$ c) $x \in (1,2) \cup (2,3)$
d) $x \in (3,\infty)$ e) $x \in (1,\infty)$ f) $x \in (0,\infty)$

**AM - XI. 131** Să se afle mulțimea soluțiilor inecuației

$$\left(x^3+2x\right)\ln(x+1)<0$$

a) (-1, 0) b) $(0,\infty)$ c) $\{-1\}$
d) $\phi$ e) $(-1,0)\cup(0,\infty)$ f) $\{-1,0\}$

**AM - XI. 132** Fie funcțiile $f_1 : D_1 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x)=\sqrt{x^2(x-1)}$ şi funcțiile $f_2 : D_2 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_2(x)=|x|\sqrt{x-1}$. Ştiind că $D_1$ şi $D_2$ sunt domeniile maxime de definiție ale celor două funcții, să se precizeze aceste domenii.

a) $D_1=[1,+\infty)\cup\{0\}$; $D_2[1,+\infty)$ b) $D_1=[1,+\infty)\cup\{0\}$; $D_2=[1,2)$
c) $D_1=(1,+\infty)$; $D_2=[1,+\infty)\cup\{0\}$ d) $D_1=D_2=[1,+\infty)$
e) $D_1=[1,+\infty)$; $D_2=[1,+\infty)\cup\{0\}$ f) $D_1=D_2=[1,+\infty)\cup\{0\}$

**AM - XI. 133** Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ştiind că $g(x)=x+\dfrac{1}{4}$, iar $(f\circ g)(x)=x^4+\dfrac{1}{4}$, să se determine $f(x)$.

a) $f(x)=x^4-\dfrac{1}{4}$ b) $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^4+\dfrac{1}{4}$ c) $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^4-\dfrac{1}{4}$
d) $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^4+\dfrac{1}{4}$ e) $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^4-\dfrac{1}{4}$ f) $f(x)=(x-1)^4+\dfrac{1}{4}$

**AM - XI. 134** Cum se poate exprima faptul că graficul unei funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este simetric față de punctul $C(a,b)$, $a,b\in\mathbf{R}$ ?

a) $f(a-x)=f(a+x), \forall x\in\mathbf{R}$ b) $f(a+b-x)=f(2a-x), \forall x\in\mathbf{R}$
c) $2b-f(x)=f(2a-x), \forall x\in\mathbf{R}$ d) $2b+f(a-x)=f(2a-x), \forall x\in\mathbf{R}$

e) $2b+f(x)=f(2a+x),\forall x\in\mathbf{R}$ f) $2b-f(x)=f(a-x),\forall x\in\mathbf{R}$

**AM - XI. 135** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\quad f(x)=(x+1)\ln x$
Să se calculeze $f'(1)$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) –1 f) –2

**AM - XI. 136** Să se calculeze derivata de ordinul unu a funcției

$$f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R},\quad f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)$$

a) $f'(x)=\dfrac{x^2+4}{2x^2}$ b) $f'(x)=\dfrac{x^2-4}{2x^2}$ c) $f'(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$

d) $f'(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2}$ e) $f'(x)=\dfrac{x^2+4}{2x}$ f) $f'(x)=\dfrac{x^2-4}{2x}$

**AM - XI. 137** Să se calculeze derivata de ordinul doi a funcției

$$f(x)=tg^2(2\arcsin x)$$

a) $\dfrac{-16x^2+64x+8}{(1-2x^2)^3}$ b) $\dfrac{80x^2+8}{(1-2x^2)^4}$ c) $\dfrac{-16x^2+8}{1-2x^2}$

d) $\dfrac{-16x^2-64x+8}{(1-2x^2)^3}$ e) $\dfrac{-16x^2+64x-8}{(1-2x^2)^3}$ f) $\dfrac{16x^2+64x+8}{(1-2x^2)^3}$

**AM - XI. 138** Care este cea mai mică pantă posibilă a unei tangente la curba $y=x^3-3x^2+5x$?

a) $-\dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{5}{3}$ c) 1 d) 0 e) 2 f) -3

**AM - XI. 139** Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n}, & x=\dfrac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}^*\\ 0, & \text{în toate celelalte puncte}\end{cases}$.

Să se calculeze $f'(0)$.

a) nu există $f'(0)$ b) $f'(0)=0$ c) $f'(0)=1$

d) $f'(0)=\dfrac{1}{2}$ e) $f'(0)=+\infty$ f) $f'(0)=2$

**AM - XI. 140** Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 \pi x}{x-1}, & \text{pentru } x\neq 1\\ 0, & \text{pentru } x=1\end{cases}$.

Să se calculeze $f'(1)$.

a) $f'(1)$ nu există b) $f'(1)=1$ c) $f'(1)=\pi$

d) $f'(1)=\pi^2$ e) $f'(1)=0$ f) $f'(1)=\dfrac{\pi}{2}$

**AM - XI. 141** Fie funcția $f:D\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$, unde $D$ este domeniul maxim de definiție al funcției $f$. Să se studieze derivabilitatea funcției $f$ în punctul $x=0$ şi în caz afirmativ să se calculeze valoarea derivatei în acest punct.

a) $f'(0)=1$ b) $f'(0)=-1$ c) $f'(0)$ nu există

d) $f'(0)=0$ e) $f'(0)=2$ f) $f'(0)=\dfrac{1}{2}$

**AM - XI. 142** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\min\{x^4,x^5,x^6,x^7\}$. Determinați punctele în care $f$ nu este derivabilă.

a) $\{-1,0,1\}$ b) $\{-1,0\}$ c) $\{0,1\}$ d) $\varnothing$ e) $\{-1,1\}$ f) $\{0\}$

**AM - XI. 143** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+xe^{nx}}{1+e^{nx}}$. Care este mulțimea punctelor de derivabilitate ale funcției $f$ ?

a) $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ b) $\mathbf{R}$ c) $[0,+\infty)$
d) $(-\infty,0]$ e) $[1,+\infty)\cup\{0\}$ f) $(-\infty,1]$

**AM - XI. 144** Fie şirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, cu termenul general $u_n=\dfrac{1+x^n}{1+x+\ldots+x^{n+p-1}}$, unde $x\geq 0$ şi $p\in\mathbf{N}$. Dacă $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$, atunci să se determine domeniile de continuitate $C$ şi de derivabilitate $D$ pentru $f$.

a) $C=[0,+\infty);\ D=[0,+\infty)$ b) $C=[0,+\infty);\ D=[0,+\infty)\setminus\{1\}$ c) $C=(0,+\infty);\ D=(0,+\infty)$
d) $C=\mathbf{R};\ D=\mathbf{R}$ e) $C=\mathbf{R};\ D=\mathbf{R}\setminus\{1\}$ f) $C=[1,+\infty);\ D=[1,+\infty)$

**AM - XI. 145** Fie $f:\left[\dfrac{1}{e},e\right]\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\arcsin|\ln x|$. Să se determine mulțimea punctelor în care funcția este derivabilă.

a) $\left[\dfrac{1}{e},e\right]$ b) $\left[\dfrac{1}{e},1\right)$ c) $(1,e]$ d) $[1,e]$ e) $\left(\dfrac{1}{e},1\right)\cup(1,e)$ f) $\left[\dfrac{1}{e},1\right)\cup(1,e]$

**AM - XI. 146** Se dă funcția $f:E\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\arccos\left(3x-4x^3\right)$.
Să se determine domeniul maxim de definiție $E$ şi domeniul său de derivabilitate $D$.

a) $E=[-1,1];\ D=(-1,1)$ b) $E=\mathbf{R};\ D=\mathbf{R}$

c) $E=[-1,1];\ D=\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ d) $E=[-1,1];\ D=\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

e) $E=[-2,2];\ D=[-2,0)\cup(0,2]$ f) $E=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right];\ D=\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right]$

**AM – XI. 147** Fiind dată funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases}[x], & \text{dacă } x\in\mathbf{Q}\\ x, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$
să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată :

a) f are limită, $(\forall)x\in\mathbf{R}$ ; b) f are limită într-un număr finit de puncte din **R**
c) f nu are limită în nici un punct din **R** ; d) f e continuă pe **R**
e) f are proprietatea lui Darboux pe **R** ; f) f este derivabilă pe **R** .

**AM – XI. 148** Fie funcțiile
$f:(0,1)\to(2,3);\ g:(2,3)\to(3,4)\quad si\quad h:(0,1)\to(3,4)$ unde $h=g\circ f$ ;
$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+2; & 2<x\le\frac{5}{2}\\ \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}; & \frac{5}{2}<x<3\end{cases}$ şi $h(x)=\sin x+3$ . Să se determine mulțimea punctelor de derivabilitate ale funcției f.

a) $(0,1)$; b) $(0,1)\setminus\frac{1}{2}$ c) $(0,1)\setminus\arcsin\frac{1}{3}$

d) $(0,1)\setminus\arcsin\frac{1}{4}$ e) $(0,1)\setminus\frac{1}{\sqrt{3}}$ f) $(0,1)\setminus\frac{\sqrt{3}}{2}$

**AM – XI. 149** Să se determine derivatele la stînga şi la dreapta punctelor x = 0 şi x = 1 ale funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x)=\sqrt[3]{x^2|1-x|}$ .

a) $\begin{matrix}f_s'(0)=-\infty;\ f_d'(0)=-\infty\\ f_s'(1)=-\infty;\ f_d'(1)=-\infty\end{matrix}$ b) $\begin{matrix}f_s'(0)=-\infty;\ f_d'(0)=+\infty\\ f_s'(1)=-\infty;\ f_d'(1)=-\infty\end{matrix}$ c) $\begin{matrix}f_s'(0)=\infty;\ f_d'(0)=-\infty\\ f_s'(1)=\infty;\ f_d'(1)=-\infty\end{matrix}$

d) $\begin{matrix}f_s'(0)=-\infty;\ f_d'(0)=\infty\\ f_s'(1)=-\infty;\ f_d'(1)=\infty\end{matrix}$ e) $\begin{matrix}f_s'(0)=\infty;\ f_d'(0)=\infty\\ f_s'(1)=\infty;\ f_d'(1)=\infty\end{matrix}$ f) $\begin{matrix}f_s'(0)=-\infty;\ f_s'(0)=\infty\\ f_s'(1)=\infty;\ f_d'(1)=\infty\end{matrix}$

**AM – XI. 150** Se dă funcţia $f : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\ln tg\frac{x}{2}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right).$$

Să se determine intervalele $\mathbf{I}_k (\subset E)$ şi derivata $f'(x)$, astfel ca $D=\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\mathbf{I}_K$ să reprezinte domeniul de derivabilitate al funcţiei date.

a) $\mathbf{I}_k=(k\pi,2k\pi),\ f'(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ b) $\mathbf{I}_k=(k\pi,2k\pi),\ f'(x)=\dfrac{1}{\sin^3 x}$

c) $\mathbf{I}_k=((2k-1)\pi,\ 2k\pi),\ f'(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ d) $\mathbf{I}_k=((2k-1)\pi,\ 2k\pi),\ f'(x)=\dfrac{1}{\sin^3 x}$

e) $\mathbf{I}_k=(2k\pi,\ (2k+1)\pi),\ f'(x)=\dfrac{1}{\sin^3 x}$ f) $\mathbf{I}_k=(2k\pi,\ (2k+1)\pi),\ f'(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$

**AM – XI. 151** Să se găsească punctele în care funcţia $f : [0,3] \to \mathbf{R}$; $f(x)=\arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ nu este derivabilă.

a) x = 0 şi x = 3 b) x = 0 şi x = 1 c) $x=1-\dfrac{1}{\pi}$

d) f nu este continuă pe $[0,3]$ e) (0,3) f) $(0,3)\setminus\{1\}$

**AM – XI. 152** Se dă funcţia $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$ ; să se determine D şi mulţimea M a punctelor în care f nu este derivabilă .

a) $D=[1,\infty)$, $M=\phi$ b) $D=[1,10]$, $M=\{1,10\}$ c) $D=[10,\infty)$, $M=\{10\}$

d) $D=[1,\infty)$, $M=\{1,10\}$ e) $D=[1,\infty)\setminus\{10\}$, $M=\{1\}$ f) $D=[1,\infty)$, $M=\{10\}$

**AM – XI. 153** Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3+bx^2+cx+d, & x<1 \\ arctg(x-1), & x\geq 1 \end{cases}$

Ştiind că f este derivabilă de ordinul doi pe R să se calculeze f(-2) .

a) 30 b) –30 c) –2 d) 25 e) –15 f) 6.

**AM - XI. 154** Se dă funcţia $f(x)=\sqrt[3]{x^2+mx-m}$, unde $m \in \mathbf{R}$. Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui *m* pentru care domeniul maxim de definiţie al funcţiei coincide cu domeniul maxim de derivabilitate al acestei funcţii.

a) $(-4,0)$ b) $[-4,0]$ c) $(-5,-3)$ d) $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$ e) $[-4,4]$ f) $(4,+\infty)$

**AM - XI. 155** Să se determine parametrii reali *a* şi *b* astfel încât funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases} x^2+a, & x\le 2 \\ ax+b, & x>2 \end{cases}$, să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$.

a) $a=4, b=0$ b) $a=3, b=0$ c) $a\in\mathbf{R}, b=5$
d) $a=3, b\in\mathbf{R}$ e) $a=4, b=-1$ f) $a=-1, b=4$

**AM - XI. 156** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases} 2\alpha\sqrt{4-x}+\beta, & x<2 \\ \sqrt{x^2+\alpha}, & x\ge 2 \end{cases}$,
unde $\alpha\in\mathbf{Q}$ şi $\beta\in\mathbf{R}$. Precizaţi care sunt valorile lui $\alpha$ şi $\beta$ pentru care $f$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

a) $\alpha=1, \beta=0$ b) $\alpha=1, \beta=-1$ c) $\alpha=2, \beta=5\sqrt{2}$
d) $\alpha=-2, \beta=5\sqrt{2}$ e) $\alpha=2, \beta=-5\sqrt{2}$ f) $\alpha=0, \beta=1$

**AM - XI. 157** Să se determine parametrii reali *a* şi *b* astfel încât funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x\le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$, să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$.

a) $a=1, b=1$ b) $a=2e, b=e$ c) $a=-2e, b=e$

d) $a = 2e, b = -e$ e) $a = e, b = 0$ f) $a = 2, b = \frac{1}{e}$

**AM - XI. 158** Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} ae^{2x}, & x \le 0 \\ \sin 2x + b\cos 3x, & x > 0 \end{cases}$.

Să se determine constantele reale $a$ şi $b$ astfel încât $f$ să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$.

a) $a = b = 1$ b) $a = 1, b = 2$ c) $a = b = 2$

d) $a = 3, b = 1$ e) $a = b = 3$ f) $a = 1, b = -1$

**AM - XI. 159** Pentru ce valori ale tripletului de numere reale $(\alpha, \beta, \chi)$ funcția

$$f : (0, +\infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} \ln x, \text{ dacă } x \in (0,1] \\ \alpha x^2 + \beta x + \chi, \text{ dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

este de două ori derivabilă pe $(0, +\infty)$ ?

a) $(1, -1, 2)$ b) $\left(-1, 2, -\frac{3}{2}\right)$ c) $\left(-1, 1, -\frac{3}{2}\right)$

d) $\left(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{3}{2}\right)$ e) $\left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{3}{2}\right)$ f) $\left(\frac{1}{2}, -2, \frac{3}{2}\right)$

**AM - XI. 160** Să se calculeze derivata funcției $f : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}.$$

a) $f'(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$ b) $f'(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$ c) $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$

d) $f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ e) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ f) $f'(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$

**AM - XI. 161** Să se calculeze derivata funcției $f : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = 2\mathrm{tg}^4 x + 4\mathrm{tg}^2 x - \frac{2}{\cos^4 x}.$$

a) $f'(x) = \frac{\mathrm{tg}\, x}{\cos x}$ b) $f'(x) = \sin x$ c) $f'(x) = 0$

d) $f'(x) = \cos x$ e) $f'(x) = -\mathrm{tg}\, x$ f) $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$

**AM - XI. 162** Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ constante reale nenule cu proprietatea că $\sum_{i=1}^{n} a_i \in \mathbf{R}^*$.

Să se determine funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile pe $\mathbf{R}$ astfel încât

$$\sum_{i=1}^{n} f(x + a_i y) = n f(x) + by$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$ şi $y \in \mathbf{R}^*$, unde $b$ este o constantă reală.

a) $f(x) = \frac{bx}{\sum_{i=1}^{n} a_i} + c,\ c \in \mathbf{R}$ b) $f(x) = \frac{x}{b\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)} + cx + d,\ c, d \in \mathbf{R}$

c) $f(x) = bx + x^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + c,\ c \in \mathbf{R}$ d) $f(x) = cx - b\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)x + d,\ c, d \in \mathbf{R}$

e) $f(x) = b\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)x$ f) $f(x) = bx + \sum_{i=1}^{n} a_i$

**AM – XI. 163** Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

şi g este derivabilă în x = 0 . Să se calculeze derivata funcției $g \circ f$ în x = 0 .

a) nu există b) 1 c) 2

d) 0 e) $\frac{1}{2}$ f) $-1$

**AM – XI. 164** Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, derivabilă , cu proprietățile :
$f(x+y)=f(x)+f(y)+5xy$ şi $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=3$. Determinați $f(0)$ şi $f'(x)$.

a) $f(0)=1,\quad f'(x)=3x;$ b) $f(0)=0,\quad f'(x)=3x;$ c) $f(0)=3,\quad f'(x)=5x;$
d) $f(0)=1, f'(x)=5x+1;$ e) $f(0)=0, f'(x)=5x+3;$ f) $f(0)=3, f'(x)=3x+5$

**AM – XI. 165** Fie f şi g funcții derivabile pe intervalul (-1,1) cu proprietățile:
$f(0)=\sqrt{2}-1,\ f'(0)=\sqrt{2}+1,\quad f'(x)=g(x)$ şi $g'(x)=-f(x)$.

Determinați funcția $h:(-1,1)\to\mathbf{R}$, definită prin $h(x)=f^2(x)+g^2(x)$.

a) $h(x)=x^2+x+6;$ b) $h(x)=x^2+6;$ c) $h(x)=6$;
d) $h(x)=2$ e) $h(x)=6-x;$ f) $h(x)=6-2x$

**AM – XI. 166** Fiind dată funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ pară şi derivabilă, să se calculeze $g'(0)$ unde funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este definită prin relația :

$$g(x)=\left(\frac{x^3}{3}+1\right)f(x)+x.$$

a) $g'(0)=1;$ b) $g'(0)=-1;$ c) $g'(0)=0$ d) $g'(0)=\frac{1}{2}$ e) $g'(0)=-\frac{1}{2}$; f) $g'(0)=2$

**AM - XI. 167** Fie $f:(a,b)\to\mathbf{R}$, $f(x)\neq 0$ pentru orice $x\in(a,b)$ şi $c\in(a,b)$.

Ştiind că $f$ este derivabilă în $x=c$, să se calculeze $\lim\limits_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{f(c)}\right)^{\frac{1}{x-c}}$.

a) $e^{f'(c)}$ b) $e^{2f'(c)\cdot f(c)}$ c) $e^{\frac{f'(c)}{f(c)}}$ d) $e^{-f'(c)}$ e) $e^{\frac{f(c)}{f'(c)}}$ f) $e^{-f(c)\cdot f'(c)}$

**AM - XI. 168** Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, derivabilă astfel încât $f(-x)=f(x)$ pentru orice $x\in[-1,1]$. Să se calculeze $f'(0)$.

a) $f'(0)=1$ b) $f'(0)=-1$ c) $f'(0)=\frac{1}{2}$ d) $f'(0)=-\frac{1}{2}$ e) $f'(0)=0$ f) $f'(0)=2$

**AM - XI. 169** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu proprietatea $f(0)=0$ şi pentru care există $f'(0)$.

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f(x)+f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{3}\right)+\ldots+f\left(\frac{x}{k}\right)\right]$, unde $k\in\mathbf{N}^*$.

a) 0 b) $\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)f'(0)$ c) $\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)$

d) $1+2+\ldots+k$ e) $k$ f) 1

**AM - XI. 170** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție derivabilă astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$, real şi există $\lim\limits_{x\to\infty}xf'(x)$. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}xf'(x)$.

a) 1 b) 0 c) –1 d) $a$ e) $a^2$ f) $\frac{a}{2}$

**AM - XI. 171** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe $\mathbf{R}$, cu derivata continuă în 1 şi cu proprietatea că $f'(1)\neq 0$. Să se calculeze limita: $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)\sin\frac{\pi x}{2}-f(1)}{f(x)\cos\pi x+f(1)}$.

a) $L=f(1)$ b) $L=f'(1)$ c) $L=-f'(1)$ d) $L=-1$ e) $L=1$ f) $L=f(\pi)$

**AM - XI. 172** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{-2|\ln x|}$. Să se determine

$k \in \mathbf{R}$, astfel încât funcția $g:(0,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbf{R}$, $g(x)=\dfrac{x^2 f''(x)+kx f'(x)}{f(x)}$ să fie constantă.

a) $k=2$ b) $k=\dfrac{1}{2}$ c) $k=0$ d) $k=4$ e) $k=1$ f) $k=-1$

**AM - XI. 173** Fie $\alpha$ un număr real şi $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ funcția dată de:

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

Să se determine $\alpha\in\mathbf{R}$ pentru care $f$ este de două ori derivabilă în $x=0$.

a) $\alpha=2$ b) $\alpha=1$ c) $\alpha>1$ d) $\alpha>2$ e) $\alpha>3$ f) $\alpha\leq 3$

**AM - XI. 174** Să se calculeze derivata de ordinul *n* a funcției $f:\mathbf{R}\setminus\{-2\}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{x+2}.$$

a) $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(x+2)^n}$ b) $f^{(n)}(x)=\dfrac{(n-1)!}{(x+2)^{n+1}}$ c) $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{n!}{(x+2)^{n+1}}$

d) $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{(x+2)^{n+1}}$ e) $f^{(n)}(x)=-\dfrac{1}{(x+2)^n}$ f) $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(x+2)^{n-1}}$

**AM - XI. 175** Fie $f:\mathbf{R}\setminus\{-1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, şi fie şirul $a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}f^{(k)}(1)$, unde $f^{(k)}$ este derivata de ordinul $k$, $k\in\mathbf{N}^*$, $f^{(0)}=f$ şi $n\in\mathbf{N}^*$. Să se calculeze: $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

a) $L=\frac{1}{2}$ b) $L=-1$ c) $L=2$ d) $L=\frac{3}{2}$ e) $L=+\infty$ f) $L=1$

**AM - XI. 176** Să se calculeze $f^{(n)}(0)$, $n\in\mathbf{N}^*$, pentru funcția $f:(-1,1)\to\mathbf{R}$,

$f(x)=\ln(1-x^2)$.

a) $f^{(n)}(0)=0$

b) $f^{(n)}(0)=\begin{cases}-2(n-1)!\text{, pentru } n=2k\\ 0\text{, pentru } n=2k+1\end{cases}$

c) $f^{(n)}(0)=\begin{cases}(n+1)!\text{, pentru } n=2k\\ 2n+1\text{, pentru } n=2k+1\end{cases}$

d) $f^{(n)}(0)=2(n-1)!$

e) $f^{(n)}(0)=\begin{cases}2(n-1)!\text{, pentru } n=2k\\ 0\text{, pentru } n=2k+1\end{cases}$

f) $f^{(n)}(0)=\begin{cases}2n!\text{, pentru } n=2k\\ (n-1)!\text{, pentru } n=2k+1\end{cases}$

**AM - XI. 177** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=e^x(2x^2-3x)$. Știind că $f^{(n)}(x)=e^x(2x^2+a_nx+b_n)$ pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$, unde $(a_n)$ și $(b_n)$ sunt șiruri de numere reale , să se stabilească o formulă de recurență pentru $(a_n)$ și $(b_n)$.

(Prin $f^{(n)}$ s-a notat derivata de ordinul $n$ a funcției $f$).

a) $a_{n+1}=a_n+4, b_{n+1}=b_n+3$

b) $a_{n+1}=a_n, b_{n+1}=b_n$

c) $a_{n+1}=a_n+4, b_{n+1}=b_n+4n-3$

d) $a_{n+1}=2a_n, b_{n+1}=b_n+4$

e) $a_{n+1}=a_n+4, b_{n+1}=b_n+4$

f) $a_{n+1}=4a_n+2, b_{n+1}=b_n+2$

**AM - XI. 178** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$. Să se calculeze

$L=\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(0)$.

a) $L=+\infty$ b) $L=4$ c) $L=\frac{1}{2}$ d) $L=0$ e) $L=-\frac{1}{2}$ f) $L=2$

**AM - XI. 179** Derivata de ordinul $n$ în origine a funcției $y:\mathbf{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $y=\operatorname{arctg} x$ este:

a) $y^{(n)}(0)=(n-1)!,\ \forall n\in\mathbf{N}^*$

b) $\begin{cases} y^{(2p+1)}(0)=0, \text{ pentru } n=2p+1 \\ y^{(2p)}(0)=p!, \text{ pentru } n=2p \end{cases}$

c) $y^{(n)}(0)=(2n)!!$

d) $\begin{cases} y^{(2p+1)}(0)=(-1)^p(2p)!, \text{ pentru } n=2p+1 \\ y^{(2p)}(0)=0, \text{ pentru } n=2p \end{cases}$

e) $y^{(n)}(0)=\frac{\pi}{2}(2n)!!$

f) $y^{(n)}(0)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

**AM - XI. 180** Fie funcția $y:\mathbf{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $y=\operatorname{arctg} x$. Să se exprime derivata de ordinul $n$ în funcție de $y$.

a) $y^{(n)}=n!\cos^n y\sin ny$

b) $y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$

c) $y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\operatorname{tg} y$

d) $y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\sin^n y$

e) $y^{(n)}=n!\cos^{n+1} y\sin(n+1)y$

f) $y^{(n)}=\frac{1}{\left(1+\operatorname{tg}^2 y\right)^n}$

**AM - XI. 181** Se dă funcția $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$, prin $f(x)=\frac{1}{2^x}+\frac{1}{5^x}$. Să se calculeze derivata inversei funcției $f$ în punctul $y=2$.

a) $\frac{1}{\ln 5}$  b) $\ln 5$  c) $\frac{1}{\ln 10}$  d) $\ln 10$  e) $-\frac{1}{\ln 10}$  f) $\ln 2$

**AM - XI. 182** Fie funcția $f:\mathbf{R}\to(1,+\infty)$, $f(x)=4^x+2^x+1$. Să se arate că $f$ este inversabilă, să se determine $g=f^{-1}$ şi să se calculeze $g'(3)$.

a) $g(y)=\ln\left(\sqrt{4y-3}-1\right);\ g'(3)=\dfrac{1}{3}$

b) $g(y)=\dfrac{1}{\ln 2}\left[\ln\left(\sqrt{4y-3}-1\right)-\ln 2\right];\ g'(3)=\dfrac{1}{3\ln 2}$

c) $g(y)=\dfrac{1}{\ln 2}\ln\dfrac{\sqrt{4y-3}-1}{2};\ g'(3)=\dfrac{1}{3}$

d) $g(y)=\ln\sqrt{4y-3}+1;\ g'(3)=\dfrac{1}{3}$

e) $g(y)=\dfrac{1}{\ln 2}\left(\ln\sqrt{4y-3}\right);\ g'(3)=\dfrac{1}{3\ln 2}$

f) $g(y)=\dfrac{1}{\ln 2}\left(\ln\sqrt{4y-3}+2\right);\ g'(3)=\dfrac{1}{3\ln 2}$

**AM - XI. 183** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^5+x$. Să se arate că $f$ este bijectivă.Dacă $g$ este inversa lui $f$, să se calculeze $g'(2)$ şi $g''(2)$.

a) $g'(2)=6,\ g''(2)=-20$ b) $g'(2)=\dfrac{1}{6},\ g''(2)=-\dfrac{20}{6^3}$ c) $g'(2)=\dfrac{1}{6}, g''(2)=-\dfrac{1}{25}$

d) $g'(2)=0,\ g''(2)=1$ e) $g'(2)=\dfrac{1}{6}, g''(2)=0$ f) $g'(2)=\dfrac{1}{36},\ g''(2)=-\dfrac{5}{6^3}$

**AM - XI. 184** Fie $f:(1,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3-3x$. Să se arate că funcția $f:I\to f(I)$ este inversabilă pe intervalul $I=(1,+\infty)$ şi fie $g$ inversa lui $f$. Să se calculeze $g'(2)$ şi $g''(2)$.

a) $g'(2)=\dfrac{1}{9},\ g''(2)=243$ b) $g'(2)=\dfrac{1}{9},\ g''(2)=-\dfrac{4}{243}$ c) $g'(2)=2,\ g''(2)=15$

d) $g'(2)=9,\ g''(2)=-\dfrac{243}{4}$ e) $g'(2)=-\dfrac{4}{243},\ g''(2)=\dfrac{1}{9}$ f) $g'(2)=\dfrac{2}{9},\ g''(2)=-\dfrac{4}{243}$

**AM - XI. 185** Fiind dată funcția $f:[-1,1]\to[-2,2]$, $f(x)=\begin{cases}-3x-2, & x\in[-1,0]\\ x^2+1, & x\in(0,1]\end{cases}$,

să se precizeze dacă este inversabilă şi în caz afirmativ să se determine inversa.

a) $f^{-1}(y)=\begin{cases}-\frac{1}{3}(y+2), & y\in[-2,1]\\ \sqrt{y-1}, & y\in(1,2]\end{cases}$

b) $f^{-1}(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}\sqrt{y+2}, & y\in[-2,0]\\ \sqrt{y+1}, & y\in(0,2]\end{cases}$

c) $f^{-1}(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(y+2), & y\in[-2.1]\\ -\sqrt{y+1}, & y\in(1,2]\end{cases}$

d) $f^{-1}(y)=\begin{cases}-\frac{1}{3}(y+2), & y\in[-2,1]\\ -\sqrt{y+1}, & y\in(1,2]\end{cases}$

e) $f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y\in[-2,1]\\ \frac{1}{3}\sqrt{y+1}, & y\in(1,2]\end{cases}$

f) $f$ nu admite inversă

**AM - XI. 186** Fiind dată funcția $f:[-2,2]\to[-1,5]$, $f(x)=\begin{cases}-2x-1, & x\in[-2,0]\\ x^2+1, & x\in(0,2]\end{cases}$,

să se determine inversa ei în cazul în care există.

a) $f^{-1}(y)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(y+1), & y\in[-1,3]\\ \sqrt{y-1}, & y\in(3,5]\end{cases}$

b) $f^{-1}(y)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(y+1), & y\in[-1,1]\\ \sqrt{y-1}, & y\in(1,5]\end{cases}$

c) nu este inversabilă

d) $f^{-1}(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(y+1), & y\in[-1,0]\\ \sqrt{y+1}, & y\in(0,5]\end{cases}$

e) $f^{-1}(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(y-1), & y\in[-1,1]\\ \sqrt{y-1}, & y\in(1,5]\end{cases}$

f) $f^{-1}(y)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(y+1), & y\in[-1,2]\\ \sqrt{y-1}, & y\in(2,5]\end{cases}$

**AM - XI. 187** Să se determine coeficientul unghiular al tangentei în punctul $(e, e^2)$ la graficul funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x + x^2 - 1$.

a) $e-1$ b) $\frac{1-2e^2}{2}$ c) $1+2e^2$ d) $\frac{2e^2+1}{e}$ e) $\frac{2e^2-1}{2}$ f) $2e$

**AM - XI. 188** Pentru ce valoare a parametrului real $t$, funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{tx^3}{1+x^2}$ are în punctul $x=1$ graficul tangent unei drepte paralelă cu prima bisectoare ?

a) $t=1$ b) $t=-1$ c) $t=2$ d) $t=-2$ e) $t=-3$ f) $t=0$

**AM - XI. 189** Fie $f:[-1,+\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt{x+1}$. Să se determine abscisa $x_0$ a unui punct situat pe graficul lui $f$ în care tangenta la grafic să fie paralelă cu coarda ce unește punctele de pe grafic de abscisă $x=0$, $x=3$.

a) $x_0=\frac{1}{3}$ b) $x_0=\frac{1}{4}$ c) $x_0=-\frac{1}{3}$ d) $x_0=\frac{5}{4}$ e) $x_0=-\frac{2}{3}$ f) $x_0=\frac{4}{3}$

**AM - XI. 190** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{-3\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$ și $x_0=-3+\frac{\sqrt{14}}{2}$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul lui $f$ în punctul de abscisă $x_0$.

a) $y=2x+4-2\sqrt{14}$ b) $y=2x+8+2\sqrt{14}$ c) $y=4x+8+2\sqrt{14}$
d) $y=4x+8-2\sqrt{14}$ e) $y=2x+8-2\sqrt{14}$ f) $y=x-4+2\sqrt{14}$

**AM - XI. 191** Fie funcția $f(x)=2\arcsin\frac{x-2}{2}-\sqrt{4x-x^2}$. Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x=1$.

a) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)+\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$ b) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ c) $y=3+\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$

d) $y=(x-1)-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3}$ e) $y=-(x-1)-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ f) $y=x+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3}$

**AM - XI. 192** Fie $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x}$, unde $a,b\in\mathbf{R}$. Să se determine $a$ şi $b$ ştiind că graficul lui $f$ este tangent dreptei $y=-2$ în punctul $x=1$.

a) $a=4, b=-1$ b) $a=-1, b=2$ c) $a=2, b=3$

d) $a=-4, b=-1$ e) $a=-4, b=1$ f) $a=4, b=1$

**AM - XI. 193** Se consideră funcţiile $f(x)=x^2$ şi $g(x)=-x^2+4x+c$, unde $c\in\mathbf{R}$. Să se afle $c$ astfel încât graficele lui $f$ şi $g$ să aibă o tangentă comună într-un punct de intersecţie a curbelor.

a) $c=1$ b) $c=2$ c) $c=\frac{1}{2}$ d) $c=-2$ e) $c=3$ f) $c=-1$

**AM - XI. 194** Fie $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definite prin $f(x)=\sqrt{|x|}$ şi $g(x)=x^3+ax+b$, unde $a,b\in\mathbf{R}$. Să se determine $a$ şi $b$ pentru care graficele celor două funcţii sunt tangente în $x=1$.

a) $a=b=1$ b) $a=7, b=-7$ c) $a=b=3$

d) $a=\frac{5}{2}, b=-\frac{5}{2}$ e) $a=-\frac{5}{2}, b=\frac{5}{2}$ f) $a=2, b=-3$

**AM - XI. 195** Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=xe^x$. Să se determine panta tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă x=-1.

a) -1 b) 0 c) 1

d) e e) -e f) 2e

**AM - XI. 196** Se consideră funcția $f(x)=\dfrac{x^2+px+q}{x^2+2}$. Să se determine parametrii $p,q\in\mathbf{R}$ astfel ca dreapta y=x-3 să fie tangentă graficului funcției în punctul A(1,-2).

a) p=1, q= -8 b) p=-2, q=-5 c) p=-3, q= -4
d) p=-4, q=-3 e) p=-5, q=-2 f) p=-6, q=-1

**AM - XI. 197** Determinați punctele A, B $\in G_f$, unde $G_f$ notează graficul funcției

$$f: E\subset R\to R,\quad f(x)=\frac{-16x}{4x^2+12x+1},$$

încare tangentele la grafic sunt paralele cu (Ox).

a) $A\left(-\frac{1}{2},-2\right), B\left(\frac{1}{2},-1\right)$ b) $A\left(\frac{1}{2},0\right), B\left(-\frac{1}{2},1\right)$

c) $A\left(\frac{1}{2},1\right), B\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ d) $A\left(-\frac{1}{2},1\right), B\left(\frac{1}{2},2\right)$

e) $A\left(\frac{3}{2},0\right), B\left(-\frac{3}{2},1\right)$ f) $A\left(-\frac{3}{2},1\right), B\left(\frac{3}{2},-1\right)$

**AM - XI. 198** Tangenta la graficul funcției $f: R\to R,\quad f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, face cu axa Ox un unghi de $45^0$ în punctele de abscise:

a) $\pm\sqrt{\sqrt{5}+1}$ b) $\pm\sqrt{\sqrt{3}-1}$ c) $\pm\sqrt{\sqrt{3}+2}$
d) $\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$ e) $\pm\sqrt{\sqrt{5}+2}$ f) $\pm\sqrt{\sqrt{5}+4}$

**AM - XI. 199** Să se determine punctul P de pe graficul funcției $f(x)=e^x+x$, în care tangenta la grafic trece prin origine.

a) P(0,1) b) $P(-1, e^{-1}-1)$ c) P(1, 1+e)

d) $P(2, e^2 + 2)$ e) $P(-2, e^{-2} - 2)$ f) $P \in \varnothing$

**AM - XI. 200** Inegalitatea $\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x$ este adevărată pentru

a) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ b) $x \in [0,1]$ c) $x \in (0,+\infty)$

d) $x \in (-1,+\infty)$ e) $x \in [-1,1]$ f) $x \in (-1,+\infty)$

**AM - XI. 201** Fiind dată funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} arctg\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

să se precizeze care dintre afirmațiile următoare este adevărată

a) f este continuă pe **R** b) f este discontinuă pe **R** c) f este derivabilă în 0

d) f nu este derivabilă în 0 dar are derivata $f'(0) = \infty$ e) f nu este derivabilă în 0 dar are derivata $f'(0) = -\infty$ f) f nu este derivabilă şi nici nu are derivată în x = 0

**AM - XI. 202** Folosind intervalele de monotonie ale funcției $f : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, să se precizeze care din următoarele inegalități este adevărată.

a) $\left(\sqrt{3}\right)^5 > 5^{\sqrt{3}}$ b) $3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$ c) $2^{\sqrt{3}} > 3^{\sqrt{2}}$

d) $8^{\sqrt{10}} < 10^{\sqrt{8}}$ e) $10^{\sqrt{11}} < 11^{\sqrt{10}}$ f) $2^{\sqrt{5}} > 5^{\sqrt{2}}$

**AM - XI. 203** Să se afle soluția inecuației $\ln\left(x^2 + 1\right) > x$.

a) $x \in (0,+\infty)$ b) $x \in (-\infty,1)$ c) $x \in (-\infty,0)$

d) $x \in (1,+\infty)$ e) $x \in (-1,+\infty)$ f) $x \in (-\infty,2)$

**AM - XI. 204** Pentru ce valori ale lui x are loc inegalitatea

$$\ln(x+1) \geq \frac{2x}{x+2}?$$

a) x > -1
b) x > 0
c) $x \geq 0$
d) x < -1
e) $x \in (-1,0)$
f) $x \in \mathbf{R}$

**AM - XI. 205** Să se determine valorile $x \in \mathbf{R}$ pentru care are loc inegalitatea

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$$

a) $x \in \mathbf{R}$
b) $x \in (-\infty,-1) \cup (0,\infty)$
c) $x \in (-\infty,-1)$
d) $x \in (0,\infty)$
e) $x \in \phi$
f) $x \in (-\infty,-2] \cup [1,\infty)$

**AM - XI. 206** Precizați soluția inecuației $\arcsin\frac{1}{x} - \arccos\frac{1}{x} \geq 0$.

a) $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$
b) $\left[1,\sqrt{2}\right]$
c) $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$
d) $[0,1]$
e) $[-1,0]$
f) $[-1,1]$

**AM - XI. 207** Pentru ce valori ale parametrului real $m$, funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = mx + \ln(4+x^2)$ este monoton descrescătoare pe $\mathbf{R}$.

a) $(-\infty,0]$
b) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2},+\infty\right)$
c) $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$
d) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$
e) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$
f) $(-\infty,-2] \cup \left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

**AM - XI. 208** Să se determine valorile parametrului real $m$ pentru care funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(1+x^2) - mx$ este monoton crescătoare pe $\mathbf{R}$.

a) $(-\infty,1]$
b) $[1,+\infty)$
c) $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$
d) $(-\infty,-1]$
e) $(-\infty,1] \cup [2,+\infty)$
f) $[-1,1]$

**AM - XI. 209** Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{5+3\sin x}$. Să se afle mulțimea $f(\mathbf{R})=\{f(x)\mid x\in\mathbf{R}\}$.

a) $\mathbf{R}$ b) $[0,+\infty)$ c) $\left[\frac{1}{8},\frac{1}{2}\right]$ d) $\left[\frac{1}{4},1\right]$ e) $(1,5)$ f) $\left[\frac{1}{2},8\right]$

**AM - XI. 210** Să se determine toate soluțiile $x\in(0,+\infty)$ ale inecuației: $\ln x\le\dfrac{x}{e}$.

a) $(0,+\infty)$ b) $(1,e]$ c) $[e,+\infty)$ d) $e$ e) $[e,e^2]$ f) $[e^2,+\infty)$

**AM - XI. 211** Fie $f:[-1,+\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{2(1+x^2)}}-\operatorname{arctg}x$.

Să se determine parametrii $a,b\in\mathbf{R}$ pentru care $f(x)=ax+b$, $\forall\, x\in[-1,+\infty)$.

a) $a=0, b=-\frac{\pi}{4}$ b) $a=0, b=\frac{\pi}{4}$ c) $a=\frac{\pi}{4}, b=0$

d) $a=-\frac{\pi}{4}, b=\frac{\pi}{4}$ e) $a=1, b=-1$ f) $a=\frac{\pi}{2}, b=\frac{\pi}{4}$

**AM XI. 212** Fiind date funcțiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, $g(x)=-2\operatorname{arctg}x$, să se arate că $f$ şi $g$ diferă printr-o constantă pe anumite intervale şi să se precizeze intervalele şi constantele corespunzătoare.

a) $f(x)-g(x)=\frac{\pi}{2}$, $x\in[-1,1]$ b) $f(x)-g(x)=\pi$, $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

c) $f(x)-g(x)=\begin{cases}-\pi, & x\in(-\infty,-1]\\ \pi, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$ d) $f(x)-g(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & x\in(-\infty,-1]\\ \dfrac{\pi}{4}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$

e) $f(x)-g(x)=\dfrac{\pi}{4},\ \forall x\in\mathbf{R}$ f) $f(x)-g(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & x\in(-\infty,-1]\\ \dfrac{\pi}{2}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$

**AM - XI. 213** Să se afle punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin

$f(x)=x^4-10x^2$, precizând natura lor.

a) $-\sqrt{5}=\min,\ 0=\max,\ \sqrt{5}=\min$ b) $0=\max,\ 5=\min$
c) $-\sqrt{5}=\min, \sqrt{5}=\max$ d) $0=\max, \sqrt{5}=\max$
e) $-\sqrt{5}=\max,\ 0=\min, \sqrt{5}=\min$ f) $-\sqrt{5}=\max, 0=\min,\ \sqrt{5}=\max$

**AM - XI. 214** Să se determine cea mai mică şi cea mai mare valoare a funcției

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=6x-x^3$ pe segmentul $[-2,3]$.

a) $f_{\min}=2,\ f_{\max}=4$ b) $f_{\min}=-5,\ f_{\max}=6$ c) $f_{\min}=-8,\ f_{\max}=4\sqrt{2}$

d) $f_{\min}=-2,\ f_{\max}=7$ e) $f_{\min}=-9,\ f_{\max}=4\sqrt{2}$ f) $f_{\min}=-7,\ f_{\max}=4$

**AM - XI. 215** Care sunt valorile parametrului real *m* pentru care funcția

$f:\mathbf{R}\setminus\{1,4\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{m-x}{x^2-5x+4}$ nu are puncte de extrem ?

a) $m\in(-1,0)$ b) $m\in(5,8)$ c) $m\in(-3,0)$ d) $m\in(2,7)$ e) $m\in(-3,2)$ f) $m\in(1,4)$

**AM - XI. 216** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=e^x\left(x^2-x-1\right)$. Dacă notăm cu $m$ valoarea minimă, iar cu $M$ valoarea maximă a funcției $f$ pe intervalul $[-3,0]$, să se determine $m$ şi $M$.

a) $m=-1,\ M=5e^{-2}$ b) $m=0,\ M=e^{-1}$ c) $m=5e^{-2},\ M=6e^{-2}$
d) $m=e^{-1},\ M=5e^{-2}$ e) $m=e^{-1},\ M=11e^{-3}$ f) $m=1,\ M=e$

**AM - XI. 217** Care este mulțimea punctelor de extrem local ale funcției $f:E\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$, unde $E$ este domeniul maxim de definiție ?

a) $\{2\}$ b) $\{0,4\}$ c) $\varnothing$ d) $\{1\}$ e) $\{1,2\}$ f) $\{-1,5\}$

**AM - XI. 218** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x+a}}$, unde $a\in\mathbf{R}$. Să se determine parametrul $a$ astfel încât funcția să admită un extrem cu valoarea $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

a) $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $a=0$ şi $a=1$ c) $a=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ d) $a=1$ e) $a=5$ f) $a=-2$

**AM - XI. 219** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{x^2-ax}{\sqrt{x^2+1}}$ unde $a\in\mathbf{R}$. Să se determine $a$ pentru care funcția $f$ admite un punct de extrem situat la distanța 2 de axa Oy.

a) $a=-11, a=12$ b) $a=-12, a=11$ c) $a=-12, a=12$
d) $a=-4, a=3$ e) $a=1, a=-2$ f) $a=4, a=7$

**AM - XI. 220** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{ax+a-2}{x^2+1}$ unde $a$ este un parametru real. Să se determine *a* astfel încât funcția să aibă un extrem în punctul $x=1$.

a) $a=1$ b) $a=2$ c) $a=-2$ d) $a=-1$ e) $a=3$ f) $a=-3$

**AM - XI. 221** Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x+a}{x^2+2bx+1}$, $a,b\in\mathbf{R}$. Să se determine valorile parametrilor *a* și *b* pentru care graficul funcției $f$ are un extrem în punctul $A(0,-1)$.

a) $a=1, b=0$ b) $a=-1, b=-\dfrac{1}{2}$ c) $a=0, b=\dfrac{1}{2}$

d) $a=-1, b=\dfrac{1}{2}$ e) $a=2, b=-\dfrac{1}{2}$ f) $a=-2, b=0$

**AM - XI. 222** Să se determine mulțimea punctelor de inflexiune pentru funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+5$.

a) $\{0,3\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0,2\}$ d) $\varnothing$ e) $\{1\}$ f) $\{0,1\}$

**AM - XI. 223** Fie $f:\mathbf{R}\setminus\{a\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2px+q}{x-a}$ unde $a,p,q\in\mathbf{R}$. Știind că graficul funcției $f$ nu taie axa Ox, precizați câte puncte de extrem local are funcția.

a) nici unul b) unu c) două d) trei e) cel puțin trei f) patru

**AM - XI. 224** Se dă funcția $f:E\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{ax}{x^2+3x+k^2}$ unde $a,k\in\mathbf{R}^*$. Să se determine *a* și *k* pentru care valorile extreme ale funcției $f$ sunt $-1$ și $-2$.

a) $a=2, k=3$ b) $a=5, k=\pm\dfrac{1}{2}$ c) $a=2, k=5$

d) $a=-4,\ k=\pm\frac{1}{2}$ e) $a=-1,\ k=\frac{3}{2}$ f) $a=-2,\ k=\pm\frac{3}{2}$

**AM - XI. 225** Să se determine punctele de extrem ale funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}.$$

a) $x=-1$ maxim, $x=1$ minim b) $x=-1$ maxim, $x=-2$ minim

c) $x=-1$ şi $x=-2$ maxime, $x=1$ minim d) $x=-1$ şi $x=2$ maxime

e) $x=1$ şi $x=-2$ minime f) $x=-1$ şi $x=-3$ maxime

**AM - XI. 226** Fie funcția $f:D\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{ax^2+b}$, $D$ fiind domeniul maxim de definiție , iar $a,b\in\mathbf{R}$. Să se determine $a$ şi $b$ cunoscând că $D$ este un interval de lungime 2 şi că funcția admite un extrem egal cu 1.

a) $a=1, b=1$ b) $a=-4, b=-2$ c) $a=1, b=-1$

d) $a=0, b=2$ e) $a=-1, b=1$ f) $a=-2, b=0$

**AM - XI. 227** Fie funcția $f:D\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ unde $D$ este domeniul ei maxim de definiție. Să se determine coordonatele şi natura punctelor sale de extrem.

a) $f$ nu are puncte de extrem local b) A$\left(-1,-\frac{\pi}{4}\right)$ - minim

c) B$\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ - minim d) C$\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ - maxim şi D(1,0) - minim

e) E$\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ - minim f) F$\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ - minim şi G(1,0) - maxim

**AM - XI. 228** Fie funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=|x-1|\cdot e^{\frac{1}{x}}$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată ?

a) $f$ nu este definită în $x=1$
b) $f$ este strict monotonă
c) $f$ este derivabilă pe domeniul de definiție
d) $f$ are un punct unghiular în $x=1$
e) $f$ este convexă pe tot domeniul de definiție
f) $f$ are un punct de întoarcere în $x=1$

**AM - XI. 229** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{|x|-1}{|x|+1}\cdot\ln\dfrac{x^2+1}{|x|+1}$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$. Precizați ce fel de punct este $x=0$ pentru funcția $f$.

a) inflexiune b) maxim c) unghiular
d) de întoarcere e) de discontinuitate f) de inflexiune pe verticală

**AM - XI. 230** Să se determine punctele unghiulare și punctele de întoarcere ale funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{|x-1|}{|x|+1}$.

a) $x=0, x=1$ puncte de întoarcere
b) $x=1$ punct unghiular și $x=0$ punct de întoarcere
c) $x=0$ și $x=1$ puncte unghiulare
d) $f$ nu are puncte unghiulare și nici puncte de întoarcere
e) $x=-1$ punct unghiular
f) $x=1$ punct de întoarcere și $x=0$ punct unghiular

**AM - XI. 231** Fie $f:(0,1)\to\mathbf{R}$ și $x_0\in(0,1)$. Considerăm proprietățile:

$P_1$: $x_0$ este punct de extrem local al funcției $f$

$P_2$: $x_0$ este punct de inflexiune

$P_3$: $x_0$ este punct de întoarcere al graficului funcției $f$

$P_4$: $f'(x_0)=0$

Care din următoarele implicații este adevărată ?

a) $P_1 \Rightarrow P_4$  b) $P_4 \Rightarrow P_1$  c) $P_3 \Rightarrow P_1$
d) $P_3 \Rightarrow P_2$  e) $P_2 \Rightarrow P_4$  f) $P_4 \Rightarrow P_2$

**AM - XI. 232** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2\left(x^2+2x+2\right)}}$.

Să se precizeze natura punctului $A\left(-2,-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) punct de inflexiune, $(\exists)f'(-2)\in\mathbf{R}$  b) punct de maxim, $(\exists)f'(-2)\in\mathbf{R}$
c) punct de discontinuitate  d) punct de minim, $(\exists)f'(-2)\in\mathbf{R}$
e) punct de întoarcere  f) punct unghiular

**AM - XI. 233** Se dă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt{\left|x^2+ax+b\right|}$ cu $a,b\in\mathbf{R}$.
Să se determine parametrii *a* și *b* astfel ca $f$ să admită pe $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=5$ ca puncte de extrem local.

a) $a=4, b=5$  b) $a=-4, b=5$  c) $a=4, b=-5$
d) $a=-4, b=-5$  e) $a=1, b=3$  f) $a=-2, b=4$

**AM - XI. 234** Fie *m* și *M* valorile extreme ale funcției
$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+ax+b$ $(a, b\in\mathbf{R},\ a<0)$.
Să se calculeze produsul $m\cdot M$ în funcție de *a* și *b*.

a) $\dfrac{a^3}{3}+b^2$  b) $\dfrac{27a^3}{4}+b^2$  c) $b^2+\dfrac{4}{27}a^3$
d) $a^2+b^2$  e) 1  f) $\dfrac{4b^2}{27}+a^3$

**AM - XI. 235** Să se precizeze valorile parametrului real *a*, pentru care funcția

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$ are trei puncte de extrem diferite.

a) $a \in (-3,3)$ b) $a \in (-2,2)$ c) $a \in \{-2,2\}$

d) $a \in [-2,2]$ e) $a \in (-\infty,2) \cup (2,+\infty)$ f) $a \in \left(-\dfrac{1}{2},7\right)$

**AM - XI. 236** Se consideră ecuația $x^5 + 5x^3 + 5x - 2m = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$. Să se determine toate valorile lui *m* astfel încât ecuația să aibă o singură rădăcină reală.

a) $m \in \mathbf{R}$ b) $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ c) $m = 0$ d) $m \in (-\infty,0]$ e) $m \in [0,+\infty)$ f) $m \in \varnothing$

**AM - XI. 237** Să se determine mulțimea valorilor parametrului real *m* astfel ca ecuația $2\ln x + x^2 - 4x + m^2 - m + 1 = 0$ să aibă o rădăcină reală supraunitară.

a) $m \in (10,11)$ b) $m \in (-2,-1]$ c) $m \in (-1,2)$

d) $m \in (2,+\infty)$ e) $m \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$ f) $m \in (-\infty,-1)$

**AM - XI. 238** Să se determine toate valorile parametrului real *m* pentru care ecuația $e^x = mx^2$ are trei rădăcini reale.

a) $m \in (-\infty,0]$ b) $m \in \left(0,\dfrac{e^2}{8}\right)$ c) $m = 1$

d) $m \in \left(\dfrac{e^2}{8},\dfrac{e^2}{4}\right)$ e) $m \in \left(\dfrac{e^2}{4},+\infty\right)$ f) $m = \dfrac{e^2}{4}$

**AM - XI. 239** Se dă ecuația $2x^3 + x^2 - 4x + m = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$. Să se determine parametrul real *m* astfel ca ecuația să aibă toate rădăcinile reale.

a) $m \in (-\infty,-3)$ b) $m \in \left[-3,\dfrac{44}{27}\right]$ c) $m \in (-\infty,-3] \cup \left(0,\dfrac{44}{27}\right]$

d) $m \in (-3,+\infty)$ e) $m \in (-\infty,-3) \cup \left(\dfrac{44}{27},+\infty\right)$ f) $m \in \left[-5,\dfrac{44}{27}\right]$

**AM - XI. 240** Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real $p$ pentru care ecuația: $3x^4+4x^3-24x^2-48x+p=0$ are toate rădăcinile reale.

a) $\mathbf{R}$ b) $[0,4]$ c) $\{0,4\}$ d) $[16,23]$ e) $[-23,-16]$ f) $[-23,16]$

**AM - XI. 241** Să se determine toate valorile reale ale lui $a$ pentru care ecuația $x^3-3x^2+a=0$ are toate rădăcinile reale şi distincte.

a) $[0,4]$ b) $(0,4)$ c) $(0,4]$ d) $[1,+\infty)$ e) $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ f) $(0,1)$

**AM - XI. 242** Pentru ce valori ale lui $m\in\mathbf{R}$, ecuația $2^x-x\ln 2=m$ are două rădăcini reale distincte ?

a) $m<1$ b) $m=1$ c) $m>1$ d) $m=\ln 2$ e) $m>\ln 2$ f) $m<\ln 2$

**AM - XI. 243** Fie $x_1,x_2,x_3$ rădăcinile ecuației $x^3-x^2-1=0$. Dacă $x_1$ este rădăcina reală a ecuației , să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_2^n+x_3^n\right)$.

a) nu există b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) 0 e) 1 f) $-1$

**AM - XI. 244** Se consideră ecuația: $x^4-4x^3+6x^2+ax+b=0$, unde $a,b\in\mathbf{R}$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4$. Dacă toate rădăcinile ecuației sunt reale , să se precizeze aceste rădăcini.

a) $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$
b) $x_1=-1, x_2=2, x_3=-3, x_4=-4$
c) $x_1=x_2=x_3=x_4=1$
d) $x_1=1, x_2=-1, x_3=2, x_4=-2$
e) $x_1=-2, x_2=1, x_3=0, x_4=5$
f) $x_1=1, x_2=2, x_3=-2, x_4=5$

**AM - XI. 245** Să se afle mulțimea valorilor lui $p\in\mathbf{R}$ pentru care ecuația $3x^4+4x^3-24x^2-48x+p=0$ are rădăcină dublă negativă.

a) $\{-23,-16\}$ b) $\varnothing$ c) $\{-23, 16\}$ d) $\{23,-16\}$ e) $\{23\}$ f) $\{16\}$

**AM - XI. 246** Care sunt valorile parametrului real $\lambda$ pentru care ecuația:
$x^3 - 3x^2 - 3x + 5 + \lambda^2\sqrt{2} = 0$ admite rădăcini duble ?

a) $(-1,1) \subset \mathbf{R}$ b) nu admite rădăcini duble c) $\{-2,2\}$
d) $\{3,4\}$ e) $\{1,3\}$ f) $[0,1) \subset \mathbf{R}$

**AM - XI. 247** Fie $a_1 > 0,\ a_2 > 0$ şi $a_1^x + a_2^x \geq 2$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Să se calculeze produsul $a_1 \cdot a_2$.

a) 0 b) 2 c) $+\infty$ d) 1 e) $\frac{1}{2}$ f) 4

**AM - XI. 248** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $2^x + a^x \geq 3^x + 4^x$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

a) 3 b) 6 c) 2 d) 5 e) $-5$ f) 8

**AM - XI. 249** Fie $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \in [-1,0) \\ cx^2 + 4x + 4, & x \in [0,1] \end{cases}$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$. Care sunt valorile parametrilor *a*, *b*, *c* pentru care $f$ verifică ipotezele teoremei lui Rolle pe intervalul $[-1,1]$ ?

a) $a = 1, b = 2, c = \frac{1}{3}$ b) $a = -1, b = -1, c = 2$ c) $a = -2, b = -2, c = 8$
d) $a = 4, b = 4, c = -7$ e) $a = 2, b = 3, c = 5$ f) $a = -1, b = -2, c = 7$

**AM – XI. 250** Fie funcția $f : [-1, a] \to \mathbf{R}$, $f(x) = |3x - 2| - 5$, unde $a > -1$. Să se determine valoarea lui a astfel încât f să îndeplinească condițiile din teorema lui Rolle.

a) 0 b) $\frac{7}{3}$ c) nu există d) 1 e) 2 f) $\frac{2}{3}$

**AM – XI. 251** Se consideră ecuația $4x^3 + x^2 - 4x + a = 0$, unde a este un parametru real. Pentru ca ecuația să aibe trei rădăcini reale, parametrul a aparține următorului interval :

a) $a \in \left[-\frac{52}{27}, \frac{5}{4}\right]$; b) $a \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$; c) $a \in \left(-\frac{2}{7}, \frac{5}{4}\right)$
d) $a \in \left(-\frac{5}{7}, \frac{4}{5}\right)$; e) $a \in (1,5)$ f) $a \in (2,5)$

**AM – XI. 252** Să se determine pentru care valori ale parametrului real a ecuației $x^5 - 5a^4x + 4a^3 = 0$ admite o singură rădăcină reală ( fără a fi multiplă).

a) $a \in (-\infty,-1)$ b) $a = -1$ c) $a \in (-1,0) \cup (0,1)$ d) $a = 1$ e) $a \in (0,\infty)$ f) $a = 0$

**AM – XI. 253** Ecuația $f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = 0$ admite:

a) numai rădăcini complexe dacă n impar
b) numai rădăcini reale dacă n par
c) o singură rădăcină reală dacă n este impar şi nici o rădăcină dacă n este par
d) admite toate rădăcinile reale dacă n este impar
e) admite două rădăcini complexe dacă n este impar şi restul reale
f) admite două rădăcini reale şi restul complexe dacă n este par

**AM – XI. 254** Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația $x^4 - 4x^3 + 8x - m = 0$ are toate rădăcinile reale.

a) $m \in (-\infty,-7)$; b) $m \in \mathbf{R}$; c) $m \in [-6,-5]$;
d) $m \in [-4,5]$; e) $m \in (6,\infty)$; f) $m \in (-\infty,-5)$

**AM – XI. 255** Care sunt intervalele de variație ale parametrului real a pentru care ecuația

$$x^4 - 15x^2 + ax - 12 = 0$$

are două rădăcini reale.

a) $(-\infty,-26)$ b) $(-28,28)$ c) $(26,+\infty)$ d) $(-\infty,-26)\cup(26,+\infty)$
e) $(-\infty,-28)\cup(-26,26)\cup(28,+\infty)$ f) $(-28,-26)\cup(26,28)$

**AM – XI. 256** Pentru ce valori ale parametrului $m \in \mathbf{R}$, funcția polinomială $f(x) = x^3 - 3x^2 - m + 7$, admite trei rădăcini reale distincte, una negativă şi două pozitive.

a) $m \in [3,7]$ b) $m \in [3,7)$ c) $m \in (3,7]$
d) $m \in (3,7)$ e) $m \in (0,7)$ f) $m \in (0,3)$.

**AM – XI. 257** Ştiind că ecuația $3x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ are o rădăcină reală $x_1$, iar celelalte două rădăcini complexe conjugate $x_{2,3} = a \pm ib$, să se determine tripletul de mulțimi I, $J_1$ şi $J_2$ pentru care $x_1 \in I, a \in J_1$ şi $|x_2| = |x_3| \in J_2$.

a) $I = (-\infty,0); J_1 = \left(\frac{1}{2},\infty\right); J_2 = \mathbf{R}_+^*$; b) $I = (-\infty,0); J_1 = (1,\infty); J_2 = (-\infty,0)$

c) $I = (-\infty,0); J_1 = (-\infty,0); J_2 = (1,\infty)$; d) $I = (-\infty,-1); J_1 = \left(-\infty,\frac{1}{2}\right); J_2 = (0,\infty)$

e) $I = (1,\infty); J_1 = \left(\frac{1}{2},\infty\right); J_2 = \mathbf{R}^*$; f) $I = R; J_1 = \left(\frac{1}{2},\infty\right); J_2 = \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$

**AM – XI. 258** Să se determine numărul de soluții reale ale ecuației :

$$x^3 - 2x - \ln|x| = 0.$$

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4; f) 5.

**AM – XI. 259** Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m astfel ca ecuația $x^4 - 4x^3 + m = 0$ să aibă toate rădăcinile complexe.

a) $m \in (-\infty, 27)$ b) $m \in (27, \infty)$ c) $m \in (0, 27)$
d) $m \in (-8, 0) \cup (27, \infty)$ e) $m \in (-27, 0)$ f) $m \in (-\infty, -27)$

**AM – XI. 260** Care este condiția ca ecuația
$na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1} = 0 \quad n \geq 2, n \in \mathbf{N}$ să aibe cel puțin o rădăcină în intervalul (0,1)

a) $na_0 + (n-1)a_1 + \ldots + 2a_{n-2} = 0$; b) $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \neq 0$
c) $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} = 0$; d) $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = 0$
e) $na_0 + (n-1)a_1 + \ldots + 2a_{n-2} \neq 0$;
f) $n(n-1)a_0 + (n-1)(n-2)a_1 + \ldots + 6a_{n-3} + 2a_{n-2} = a_{n-1}$

**AM- XI. 261** Fie polinomul $f = x^{3n-1} + ax + b; \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad a, b \in \mathbf{R}.$ Care din următoarele afirmații sunt adevărate pentru valorile lui a şi b pentru care f se divide cu $x^2 + x + 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$

a)f nu are rădăcini reale b) f are cel puțin o rădăcină reală
c) f are cel mult o rădăcină reală d) f are cel puțin două rădăcini reale
e) f are cel mult două rădăcini reale f) f are cel mult trei rădăcini reale.

**AM – XI. 262** Să se precizeze care dintre următoarele condiții este suficientă pentru ca ecuația :

$$x^{p+q} - A(x^p - 1) = 0, \quad (p, q \in \mathbf{N}, impare, A > 0)$$

să aibă două rădăcini reale şi pozitive.

a) $p^p q^q A^p < (p+q)^{p+q}$; b) $p^p q^q A^p > (p+q)^{p+q}$; c) $p^p A^p > (p+q)^{p+q}$
d) $q^q p^p A^p < (p+q)^{p \cdot q}$; e) $p^q \cdot q^p A^p > (p+q)^{p \cdot q}$; f) $p^p \cdot q^q > A^p$.

**AM – XI 263** Dacă $x_2$ şi $x_3$ sunt rădăcinile complexe ale ecuației $x^3 - x - 1 = 0$, precizați cărui interval aparține partea lor reală :

a) $\left[-\frac{1}{2\sqrt{3}},0\right)$; b) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{8},0\right)$; c) $\left(-\infty,-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$;

d) $\left(-\infty,-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$; e) $\left(-\infty,-\frac{1}{15}\right)$; f) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$.

**AM – XI. 264** Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real m pentru care ecuația: $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + m = 0$ nu are nici o rădăcină reală.

a) $m \in (-8,-13)$; b) $m \in (-13,-8)$; c) $m \in (-8,19)$;
d) $m \in (19,\infty)$; e) $m = -8$; f) $m = 19$.

**AM – XI. 265** Fiind dată ecuația $x^3 - 2x + 1 - \ln|x| = 0$, iar S fiind suma rădăcinilor acesteia, să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată.

a) $S \in (-e^2,-e)$ b) $S \in (-e,-2)$ c) $S \in (-2,-1)$
d) $S \in (-1,0)$ e) $S \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ f) $S \in \left(\frac{1}{2},1\right)$

**AM – XI. 266** Să se precizeze în care din intervalele de mai jos se află punctul c din teorema lui Logrange aplicată funcției $f:(0,\infty)\to \mathbf{R},\ f(x)=\ln x$ şi intervalului $[1,2]$.

a) $\left(1,\sqrt[3]{2}\right)$ b) $\left(\sqrt[3]{2},\sqrt{2}\right)$ c) $\left(\sqrt{2},\frac{3}{2}\right)$
d) $\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)$ e) $\left(\frac{7}{4},2\right)$ f) $(0,1)$

**AM - XI. 267** Să se determine constanta *c* din teorema lui Lagrange aplicată funcției

$$f(x)=\frac{|x^2-3x+2|}{x+|x-1|} \text{ pe intervalul } [2,3].$$

a) $c=2$ b) $c=\frac{1+\sqrt{15}}{2}$ c) $c=\frac{1-\sqrt{15}}{2}$

d) $c=\frac{1-\sqrt{15}}{2}$ şi $c=\frac{1+\sqrt{15}}{2}$ e) $c=\frac{5}{2}$ f) $c=\frac{7}{3}$

**AM – XI. 268** Fiind dată funcția $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\in R\setminus\{0\} \\ 0, & x=0 \end{cases}$ şi $c_n$ punctele rezultate aplicând teorema lui lagrange funcției f pe intervalul $\left[\frac{1}{\frac{3\pi}{4}+2n\pi}, \frac{1}{\frac{\pi}{4}+2n\pi}\right]$, $n\in\mathbf{N}$, să se calculeze : $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(c_n)+nf'(c_n)\right)$.

a) L = 0 b) L = 1 c) $\frac{1}{\pi}$ d) $L=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$ e) $L=\sqrt{2}\pi$ f) $L=\frac{\sqrt{2}}{2}$

**AM – XI. 269** Fie $f: D_m\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln\left(1+\frac{mx}{5}\right)$, $m>0$ , m parametru şi $D_m$ domeniul maxim de definiție. Să se determine toate valorile lui m pentru care f verifică ipotezele teoremei lui Lagrage pe intervalul $[-4,4]$

a) $m\in[0,5]$; b) $m\in\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$; c) $m\in\left(0,\frac{5}{4}\right)$;

d) $m\in\left(\frac{4}{5},\frac{5}{4}\right)$; e) $m\in\left(\frac{5}{4},2\right)$; f) $m\in\phi$

**AM – XI. 270** Se consideră funcțiile $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + x \cdot e^{nx}}{1 + e^{nx}}, \quad g(x) = e^{x+1} \text{ şi } h(x) = (g \circ f)(x).$$

Să se determine constanta c din teorema lui Lagrange aplicată funcției h pe $[1,2]$.

a) $c = 1 - \ln(e-1)$; b) $c = \ln(e^2 - 1)$; c) $c = 1 + \ln(e-1)$;

d) $c = \ln(e-1) - 1$; c) $c = \frac{3}{2}$; f) $c = 1$.

**AM - XI. 271** Să se determine constanta *c* care intervine în teorema lui Cauchy pentru funcțiile $f : [-2,5] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & x \in [-2,1) \\ \frac{x}{4} + \frac{7}{4}, & x \in [1,5] \end{cases}$ şi

$g : [-2,5] \to \mathbf{R}$, $g(x) = x$.

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{16}$ e) $-\frac{1}{16}$ f) $\frac{1}{14}$

**AM - XI. 272** Să se determine constanta *c* care intervine în teorema lui Cauchy în cazul funcțiilor $f : [0,3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1, & x \in (1,3] \\ -x + \frac{4}{3}, & x \in [0,1] \end{cases}$ şi

$g : [0,3] \to \mathbf{R}$, $g(x) = x$.

a) $c = \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1$ b) $c = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $c_1 = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $c_2 = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $c = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e) $c = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$ f) $c = \frac{-2\sqrt{3}}{2} + 1$

**AM - XI. 273** Fie $f, g : [-2,5] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+a}, & x \in [-2,1) \\ \dfrac{x+7}{b}, & x \in [1,5] \end{cases} \quad \text{şi} \quad g(x) = \begin{cases} x + ab - 4, & x \in [-2,0) \cup (0,5] \\ c^2, & x = 0 \end{cases}$$

unde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$. Să se afle $a$, $b$, $c$ astfel încât $f$ şi $g$ să verifice teorema lui Cauchy.

a) $a = 3, b = 5, c = 8$

b) $a = 3, b = 4, c \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$

c) $a = 1, b = 2, c = -2\sqrt{2}$

d) $a = 3, b = -1, c = 7$

e) $a = 3, b = -4, c = 3$

f) $a = 4, b = 3, c = 1$

**AM – XI. 274** Să se aplice teorema lui Cauchy pentru funcţiile $f, g : [1, e] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x;\quad g(x) = 2x - 1,$ determinând punctul c corespunzător .

a) c = e-1; b) c = e; c) c = 1; d) c = -1; e) c = 1-e; f) c = 2.

**AM – XI. 275** Fie $[x_1, x_2]$ un interval real de lungime $\leq \dfrac{\pi}{2}$ astfel ca $x_1 < -x_2$.
Să se determine punctul $c \in (x_1, x_2)$ pentru care funcţiile $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = 3\cos x$ satisfac teorema lui Cauchy pe intervalul specificat.

a) $\dfrac{x_1 \pm x_2}{2}$

b) $\dfrac{x_1 - x_2}{2}$

c) $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$

d) $\dfrac{x_1 \pm x_2}{3}$

e) $\dfrac{x_1 - x_2}{3}$

f) $\dfrac{x_1 + x_2}{3}$

**AM – XI. 276** Aplicând teorema lui Cauchy funcţiilor $f, g : [1, e] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x,\quad g(x) = \dfrac{x}{2} - 2$ să se determine constanta $c \in (1, e)$ din această teoremă .

a) $\dfrac{1}{2}(e+1)$

b) $e - 1$

c) $\dfrac{e}{2}$

d) $\frac{1}{2}(e-1)$ e) $\frac{1}{2}(2e-1)$ f) $\frac{3}{2}e$

**AM – XI. 277** Fiind date funcțiile $f, g:[1,e]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x$, $g(x)=\frac{e}{x}$, să se precizeze punctul $c\in(1,e)$ care se obține aplicând teorema lui Cauchy funcțiilor f și g.

a) $c=\frac{1}{e}$; b) $c=e-1$; c) $c=\frac{e-1}{e}$; d) $c=\frac{e}{e-1}$; e) $c=\frac{e}{2}$ f) $c=2e$

**AM - XI. 278** Fie $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f$ pe intervalul $[0,x]$, se obține punctul $c\in(0,x)$, unde $c=\theta\cdot x$, $0<\theta<1$ și $\theta=\theta(x)$. Să se calculeze: $L=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\theta(x)$.

a) $L=1$ b) $L=2$ c) $L=\frac{1}{2}$ d) $L=\frac{1}{3}$ e) $L=0$ f) $L=3$

# CLASA a XII-a

**MATEMATICĂ , clasa a XII – a**
**ALGEBRĂ SUPERIOARĂ**
**(simbol AL – XII)**

**AL - XII. 001** Se consideră funcțiile $f_i : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $i \in \{1,2,3,4\}$, definite prin

$f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = -x$, $f_4(x) = -\frac{1}{x}$.

Care din următoarele afirmații relative la operația de compunere a funcțiilor este adevărată?

a) necomutativă şi neasociativă
b) comutativă şi asociativă
c) necomutativă, dar asociativă
d) comutativă, dar neasociativă
e) nu orice element are invers
f) fără element neutru

**AL - XII. 002** Să se determine toate valorile parametrului $a \in \mathbf{R}$ pentru care intervalul $(-1,\infty)$ este partea stabilă în raport cu legea de compoziție

$$x * y = xy + x + y + a$$

a) $a \in \emptyset$
b) $a \le 0$
c) $a=0$
d) $a \ge 0$
e) $a=-1$
f) $a \ge -1$

**AL - XII. 003** Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția $f : (1,\infty)x(1,\infty) \to (1,\infty)$, definită prin $f(x, y) = xy - (x + y) + \alpha$ să fie o lege de compoziție pe $(1,\infty)$.

a) $\alpha<0$
b) $\alpha>0$
c) $\alpha<1$
d) $\alpha \ge -1$
e) $\alpha<-2$
f) $\alpha \ge 2$

**AL - XII. 004** Pe **R** se consideră legea de compoziție internă „*” definită astfel:

$$x * y = 2xy - 2x - 2y + m, \qquad m \in \mathbf{R}$$

Să se determine $m$ astfel încât această lege să fie asociativă.

a) $m=1$
b) $m=2$
c) $m=3$
d) $m=4$
e) $m=-1$
f) $m=-2$

**AL - XII. 005** Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție „o", definită prin

$$x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21.$$

Când relația $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ este adevărată?

a) numai pentru x=y=z;
b) pentru orice $x,y,z \in \mathbf{R}$;
c) numai pentru valori pozitive ale lui x,y,z;
d) numai pentru x=y şi z=0;
e) numai pentru valori negative ale lui x,y,z;
f) numai pentru valori întregi ale lui x,y,z.

**AL - XII. 006** Mulțimea $K = \{e_0, e_1, ..., e_6\}$ cu $e_i \neq e_j$ dotată cu operațiile:

1) $e_i + e_j = e_k$ unde k=i+j dacă i+j≤6 şi k=i+j-7 dacă i+j>6
2) $e_i e_j = e_k$ unde k este restul împărțirii lui $i \cdot j$ la 7 formează un corp.

Atunci ecuația $e_3 x + e_4 = e_6$ are soluția

a) $e_0$
b) $e_1$
c) $e_3$
d) $e_4$
e) $e_5$
f) $e_6$

**AL - XII. 007** În mulțimea $[0,+\infty)$ este definită legea de compoziție internă „∗" definită prin

$$x * y = \frac{x^2 + y^2 + xy + x + y}{1 + x + y}.$$

Determinați elementul neutru al acestei legi.

a) 1 b) -1 c) $\frac{1}{2}$ d) 0 e) 2 f) $1 + \sqrt{2}$

**AL - XII. 008** Pe Z se defineşte legea de compoziție ∗ prin:

$$x * y = xy - 4x - 4y + 20, \quad \forall x, y \in Z$$

Fie $A = \{x_k \in Z \mid x_k \text{ este simetrizabil în raport cu legea } *\}, \alpha = \sum_{x_k \in A} x_k$

Să se precizeze care dintre afirmațiile următoare este adevărată.

a) $\alpha=3$ b) $\alpha=5$ c) $\alpha=8$ d) $\alpha=0$ e) $\alpha=10$

**AL - XII. 009** Determinați elementele simetrizabile în raport cu înmulțirea claselor din $\mathbf{Z}_{20}$.

a) $\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{9}, \hat{11}, \hat{13}, \hat{17}, \hat{19}$, b) $\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{9}, \hat{11}, \hat{13}, \hat{17}, \hat{19}$,

c) $\hat{1}, \hat{3}, \hat{7}, \hat{9}, \hat{11}, \hat{13}, \hat{17}, \hat{19}$, d) $\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{9}, \hat{11}$,

e) $\hat{1}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{17}$, f) $\varnothing$

**AL - XII. 010** Se definește pe **C** legea de compoziție

$$Z_1 * Z_2 = Z_1 Z_2 + i(Z_1 + Z_2) - 1 - i, \ \left(i = \sqrt{-1}\right).$$

Determinați soluția ecuației: $z * (1 - i) = 3 + i$.

a) $z = 3 + i$ b) $z = 2 + i$ c) $z = -5 + 2i$
d) $z = -3 + i$ e) $z = 3 - i$ f) $z = 2 - i$

**AL - XII. 011** Fie $M = \{0,1,2,3\}$. Pe $M \times M \to M$ se definește legea de compoziție :

$$(x, y) \to x * y = \begin{cases} |x - y| + 1, & x < y < 3 \\ \max\{x, y\}, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Să se rezolve ecuația $z * 2 = 2 \ \ (z \in M)$

a) $z = 0, z = 1;$ b) $z = 1, z = 3;$ c) $z = 0, z = 2;$

d) $z = 1, z = 2;$ e) $z = 3, z = 2;$ f) $z = 0, z = 3;$

**AL - XII. 012** Pe mulțimea **R** se definesc legile de compoziție internă "$*$" și "$\circ$" astfel: $(\forall)\, a,b \in \mathbf{R} : a * b = 2a + 2b + 2ab + 1,\ a \circ b = 2a + 2b + ab + 2$.

Sistemul $\begin{cases} (x+y)*2 = 35 \\ (x-y)\circ 3 = 13 \end{cases}$ are soluțiile :

a) $x = 3, y = 2$ b) $x = 1, y = 0$ c) $x = 2, y = 3$
d) $x = 2, y = 2$ e) $x = 1, y = 1$ f) $x = 1, y = 2$

**AL - XII. 013** Găsiți toate soluțiile din $\mathbf{R}_{12}$ ale sistemului de ecuații liniare
$\begin{cases} 3 \otimes x \oplus 4 \otimes y = 11 \\ 4 \otimes x \oplus 9 \otimes y = 10 \end{cases}$, unde $\otimes$ și $\oplus$ sunt simbolurile înmulțirii și adunării modulo 12.

a) $x = 1, y = 2$ b) $x = 2, y = 1$ c) $x = 5, y = 2$
d) $x = 5, y = 1$ e) $x = 9, y = 6$ f) $x = 1, y = 6$

**AL – XII. 014** Găsiți soluțiile din $\mathbf{R}_6$ ale ecuației:
$5 \otimes x \oplus 2 = 4$ unde $\oplus$ și $\otimes$ sunt simbolurile adunării și înmulțirii modulo 6.

a) x=1 b) x=2 c) x=3
d)x=4 e) x=5 f) x=0

**AL – XII. 015** Pe mulțimea **R** definim două legi de compoziție internă „* „ și „T „ prin:

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \text{ și } x\mathrm{T}y = x + y + 1 \quad (\forall) x, y \in \mathbf{R}.$$

Indicați soluțiile (x,y) ale sistemului: $\begin{cases} x * y = -1 \\ x\mathrm{T}y = 0 \end{cases}$

a) (0,1);(2,0) b) (2,0); (-1,1) c) (0,-1); (-1,0)
d) (-2,1); (1,2) e)(0,3); (3,0) f) (2,1); (-1,1)

**AL - XII. 016** În mulţimea $Q_+$ se defineşte operaţia $x * y$ astfel încât $(\forall)x, y, z, t \in Q_+$ , să avem :

1) $(x * y)(z * t) = (xz) * (yt)$
2) $x * x = 1$
3) $x * 1 = x$

Care din răspunsurile de mai jos ne dă $12 * 3$ ?

a) 36 b) 4 c) 15
d) 9 e) 0,25 f) 0,15

**AL – XII. 017** Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \ln(e^x + e^y)$; precizaţi mulţimea soluţiilor ecuaţiei $(x * x) * x = 0$

a) $\left\{\ln\sqrt{3}, \ln\frac{1}{3}\right\}$ b) $\left\{\ln\frac{1}{3}, -\ln\frac{1}{3}\right\}$ c) $\left\{-\ln\sqrt{3}\right\}$

d) $\left\{-\ln\frac{1}{3}\right\}$ e) $\{-\ln 3\}$ f) $\{\ln 3\}$

**AL - XII. 018** Pe mulţimea **R** definim legea de compoziţie

$$x * y = 2x + y, (\forall)x, y \in \mathbf{R}$$

şi notăm $x_{n+1} = x_n * x$; $x_1 = x$ , $(\forall)x \in \mathbf{R}$ .

Să se determine numărul natural $n \geq 2$ pentru care $x_{2n} = 8(x_n - x) - x, (\forall)x \in \mathbf{R}$

a) $n \geq 2$ b) $n \in \phi$ c) $n = 6$
d) $n = 4$ e) $n = 2$ f) nici un răspuns nu e corect

**AL - XII. 019** Fie $a \in \mathbf{Z}$ şi $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = x + a$ . Cum sunt definite legile de compoziţie pe **Z** notate „⊥” şi „⊤” dacă

$$f(x + y) = f(x) \perp f(y), \quad (\forall)x, y \in \mathbf{Z}$$

şi $$f(xy) = f(x) \top f(y), \quad (\forall)x, y \in \mathbf{Z} \ ?$$

a) $\begin{array}{l} x \perp y = x + y \\ x \top y = xy - ax - ay + a^2 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} x \perp y = x + y + a \\ x \top y = xy + ax + ay \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x \perp y = x + y + a \\ x \top y = xy - ax - ay - a^2 + a \end{array}$

d) $\begin{array}{l} x \perp y = x + y - a \\ x \top y = xy - ax - ay - a^2 + a \end{array}$

e) $\begin{array}{l} x \perp y = x + y + a \\ x \top y = xy - ax - ay - a^2 - a \end{array}$

f) nici un răspuns nu e corect

**AL - XII. 020** Pe **R** se defineşte legea de compoziţie „$*$" : $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(x, y) \to x * y = x^2 + y^2 - 4x - 4y + m$, unde $m \in \mathbf{R}$. Care sunt valorile $m \in \mathbf{R}$ pentru care intervalul $(0,\infty)$ este parte stabilă a lui **R** în raport cu legea considerată?

a) $m < -8$ b) $m \in \{-8, 0, 8\}$ c) $m \in (-8, 0)$

d) $m \in \phi$ e) $m > 8$ f) $m < 8$

**AL XII. 021** Fie mulţimea

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbf{R});$$

să se determine submulţimea maximală a lui K ce este parte stabilă a mulţimii $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

f) K

**AL - XII. 022** Pe mulţimea $A = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ se consideră legea de compoziţie „$*$" definită prin:

$$x * y = 2xy - 2x - 2y + c,\ (\forall)x, y \in A,\quad c \in \mathbf{R}$$

Pentru ce valoare a lui c legea „*” este asociativă?

a) c=1 b) c=-1 c) c=3
d) c=2 e) c=4 f) c=6

**AL - XII. 023** Pe mulțimea $(0,\infty)$ se consideră legea de compoziție „*” definită prin $x * y = e^{a\ln x - b\ln y}$, oricare ar fi $x, y > 0$, unde $a, b \in \mathbf{R}^*$.
Precizați în ce condiții legea considerată este asociativă şi comutativă.

a) $a = 1, b = -1$ b) pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$ cu proprietatea $a + b = -1$
c) $a = -1, b = 1$ d) $a = 1, b = 1$
e) nu există $a, b \in \mathbf{R}^*$ cu proprietatea cerută f) nici un răspuns nu e corect

**AL - XII. 024** Fie legea de compoziție internă pe **R** definită prin $x * y = xy + 2\alpha x + \beta y\ (\forall)x, y \in \mathbf{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Care sunt valorile lui $\alpha$ şi $\beta$ pentru care legea este comutativă şi asociativă ?

a) $\alpha = \beta = 0$ sau $\alpha = \frac{1}{2}$ şi $\beta = 1$ b) $\alpha + \beta = 1$

c) $\alpha = \beta = 0$ sau $\alpha = \frac{1}{2}$ şi $\beta = 2$ d) $\alpha = \beta = 1$

e) $\alpha = \beta = -1$ f) $\alpha = 2$ , $\beta = \frac{1}{2}$

**AL - XII. 025** Fie operația „*” cu numere reale, definită astfel: $a * b = ma + nb + p\ (\forall)a, b \in \mathbf{R}$. Sistemele de constante m,n,p pentru care operația $*$ este asociativă şi necomutativă sunt:

a) (1,0,0); (0,1,0) b) (1,1,0); (0,1,0) c) (1,1,1); (0,1,0)
d) (1,0,0); (1,1,0) e) (1,0,0); (1,1,1) f) (1,1,1); (1,1,0)

**AL - XII. 026** În mulțimea numerelor reale, se definesc operațiile : $\top$ şi $\perp$ prin relațiile :

$$a \top b = a + ab + b \qquad (\forall) a, b \in \mathbf{R}$$
$$a \perp b = a - ab + b$$

Operațiile au același element neutru e. Expresia
$$\left(a \top \frac{1}{a}\right) \cdot \left(a \perp \frac{1}{a}\right) - (e \top 1) \perp (e \perp 1)$$ are valoarea

a) $a^2 + \frac{1}{a^2}$ b) $a^2$ c) $\frac{1}{a^2}$
d) $a^2 - \frac{1}{a^2}$ e) $-a^2$ f) $-\frac{1}{a^2}$

**AL - XII. 027** În mulțimea **R** este definită legea de compoziție internă „∗" astfel încât $(\forall) x, y \in \mathbf{R}: \quad x * y = \frac{x + y}{1 - xy}$ cu $xy \neq 1$.
Elementul neutru e, admis de lege este:

a) 0 b) 1 c) –1
d) 2 e) –2 f) 3

**AL – XII. 028** Pe **R** se definește legea de compoziție „∗" prin
$x * y = axy - x - y + 2$, unde $a \in \mathbf{R}$. Pentru ce valori ale lui a legea considerată admite element neutru?

a) $a = -1$ b) 0 c) $a = 1$
d) $a = \frac{1}{2}$ e) $a = -\frac{1}{2}$ f) $a = \frac{3}{2}$

**AL – XII. 029** Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție bijectivă cu $f^{-1}(1) = 2$. Definim legea de compoziție „∗" pe **R** prin
$$a * b = f\left[f^{-1}(a) + f^{-1}(b) - 2\right], \text{ pentru orice } a, b \in \mathbf{R}.$$
Care este elementul neutru al acestei legi?

a) nu are b) 1 c) 2
d) 0 e) –1 f) –2

**AL – XII. 030** Pe mulțimea $(1,\infty)$ se defineşte legea de compoziție $x * y = (x-1)^{\ln(y-1)} + 1$. Determinați elementul său neutru.

a) $\varepsilon = 1+e$ b) $\varepsilon = 1-e$ c) $\varepsilon = -1+e$
d) $\varepsilon = 3-e$ e) $\varepsilon = 3+e$ f) $\varepsilon = -3+2e$

**AL – XII. 031** Pe mulțimea **R** se definesc legile de compoziție $*$ şi $\circ$, $a * b = a + ab + b$ şi $a \circ b = a - ab + b$, care admit acelaşi element neutru, $e$. Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui a pentru care există inegalitatea

$$\left(a * \frac{1}{a}\right)\left(a \circ \frac{1}{a}\right) > (e * 1) \circ (e \circ 1)$$

a) $a \in \{-3,-2,-1,1,2,3\}$; b) $a \in \phi$ c) $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;
d) $a \in R \cap [(-\infty,-1) \cup (1,\infty)]$; e) $a \in \mathbf{R}$ f) $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2,-1,0,1,2\}$

**AL – XII. 032** Ce relații trebuie să existe între a,b şi c pentru ca operația $*$, definită pe mulțimea **Z** a numerelor întregi prin $x * y = axy + b(x+y) + c$, să admită element neutru?

a) $b^2 - 4ac = 0$ b) $b^2 - ac = 0$ şi $b$ divide pe $a$;
c) $b^2 - ac = b$ şi $b$ divide pe $c$; d) $a$ divide pe $b$ şi $b^2 - ac = b$
e) $c$ divide pe $b$ şi $b^2 - ac = 2b$ f) $c$ divide pe $b$ şi $b^2 - ac = b$

**AL – XII. 033** Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât matricea $A_x = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ x & \alpha & x \\ 1 & x & 2 \end{pmatrix}$ să fie un element simetrizabil al monoidului $(M_3(\mathbf{R}), \cdot)$ pentru orice x >1.

a) $\alpha > 1$ b) $\alpha = 1$ c) $\frac{2}{3} < \alpha \le \frac{3}{2}$
d) $\alpha > \frac{3}{2}$ e) $\alpha \le \frac{2}{3}$ f) $\alpha \in \mathbf{R}^*$

**AL - XII. 034** Fie mulțimea $G=\left\{X^n \,\middle|\, X=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}, n\in\mathbf{N}^*\right\}$

Care este simetricul elementului $X^{1997}$ în raport cu operația indusă pe G de înmulțirea matricelor?

a) X

b) $\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

d) $I_4$

e) $\begin{pmatrix}1997&0&0&0\\0&1997&0&0\\0&0&1997&0\\0&0&0&1997\end{pmatrix}$

f) nici un răspuns nu e corect

**AL - XII. 035** Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}a&0&a\\0&0&0\\a&0&a\end{pmatrix}, a\in\mathbf{C}\right\}$

Care este simetricul elementului $A=\begin{pmatrix}\frac{i}{4}&0&\frac{i}{4}\\0&0&0\\\frac{i}{4}&0&\frac{i}{4}\end{pmatrix}$ în raport cu legea de compoziție indusă pe M de înmulțirea matricelor?

a) $\begin{pmatrix}4&0&4\\0&0&0\\4&0&4\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\0&0&0\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}i&0&i\\0&0&0\\i&0&i\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -i \end{pmatrix}$  e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**AL - XII. 036** În corpul $(\mathbf{R},+,\cdot)$ se introduce legea de compoziție:

$$x * y = ax + ay + bxy + c,\ (\forall) x, y \in \mathbf{R} \text{ şi } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

Ştiind că elementul său neutru este e = - 4 şi că orice element cu excepția lui –5, admite un simetric, să se determine constantele a,b,c.

a) a=b=c=1  b) a=b=1, c∈**R**  c) a=5, b=1, c=20
d) a=3, b=2, c=0  e) a=1, b=4, c=2  f) a=b=2, c=40

**AL - XII. 037** Determinați elementul neutru al operației $*$ definită în $\mathbf{R}^2$ prin

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 + x_1 + x_2, y_1y_2 + y_1 + y_2)$$

a) (1,0)  b) (0,1)  c) (1,1)
d) (0,0)  e) (-1,-1)  f) (0,-1)

**AL – XII. 038** Pe mulțimea **R** a numerelor reale definim legea de compoziție *, astfel: $x * y = \frac{1}{3}(x + y - 2xy + 1)$, oricare ar fi x,y $\in \mathbf{R}$.

Să se determine elementele simetrizabile şi simetricul fiecăruia dintre acestea.

a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\},\quad x' = \frac{x+3}{x-1}$;  b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\},\quad x' = \frac{2x+1}{x+1}$

c) $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\},\quad x' = \frac{x-2}{2x-1}$;  d) $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\},\quad x' = \frac{x+4}{2x-1}$;

e) $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\},\quad x' = \frac{x-5}{3x-1}$;  f) $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\},\quad x' = \frac{x}{x-1}$

**AL – XII. 039** Pentru fiecare n $\in \mathbf{N}^*$ se defineşte funcția

$$f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} nx, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}.$$

Care este simetricul elementului $f_{2001}$ față de compunerea funcțiilor ?

a) $f_1$ b) nu există c) $f_{2000}$ d) $f_{2002}$ e) $f_{1000}$ f) $f_{1001}$

**AL – XII. 040** Se consideră mulțimea $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ înzestrată cu operația de înmulțire indusă din **R** .

Care este condiția suficientă pentru ca elementul $x = a + b\sqrt{2}$ să admită un invers în mulțimea M ?

a) Nu există un invers al lui x în M. b) $a^2 - 2b^2 \neq 0$ c) $a^2 - 2b^2 = \pm 1$
d) $a^2 - 2b^2 = 2$ e) $a^2 - 2b^2 = -2$ f) $a^2 - 2b^2 = 0$

**AL - XII. 041** Fie $E = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Pentru orice $t \in \mathbf{R}$, fie funcția $f_t : E \to E$ , $f_t(x, y) = \left( x + ty + \frac{t^2}{2}, y + t \right), (\forall)(x, y) \in E$ și mulțimea $G = \{ f_t \mid t \in \mathbf{R} \}$ înzestrată cu operația de compunere a funcțiilor. Care este simetricul elementului $f_{-1}$ ?

a) $g(x, y) = (x, y)$ b) $g(x, y) = (y, x)$

c) $g(x, y) = (x + y,\ y - 1)$ d) $g(x, y) = \left( x - y + \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2} \right)$

e) $g(x, y) = \left( x + y + \frac{1}{2}, y + 1 \right)$ f) $g(x, y) = \left( x + \frac{y}{2} + \frac{1}{8}, y + \frac{1}{2} \right)$

**AL - XII. 042** Să se determine elementul neutru al grupului comutativ (G,∗), unde $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ iar $x * y = x^{\ln y}$

a) 1 b) e c) 0 d) 2 e) $\frac{1}{e}$ f) $e^2$

**AL - XII. 043** Pe **R** se definește legea de compoziție

$$x * y = ax + by, \quad (\forall)x, y \in \mathbf{R}$$

unde a şi b sunt parametri reali. Legea „∗” defineşte pe R o structură de grup pentru:

a) a=1, b=0 b) a=0, b=3; c) a=0,b=1;
d) a=1, b=1; e) a=b=$\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$; f) a=b=2

**AL - XII. 044** Pe **Z** se defineşte legea de compoziţie

$$(x, y) \to x * y = x + y + k,$$

unde $k \in \mathbf{Z}$. Să se determine toate valorile lui k pentru care (**Z**, ∗) este grup.

a) k∈**Z**; b) k=-1; c) k=0;
d) k∈ϕ; e) k∈{-1,1}; f) k∈{-1,0}

**AL - XII. 045** Determinaţi mulţimea $A \subset \mathbf{R}$ astfel ca legea de compoziţie

$$x * y = xy - x - y + 2$$

să determine o structură de grup pe **R**\ A.

a) A=**R** b) A={0} c) A={0,1}
d) A=ϕ e) A={1} f) A={2}

**AL - XII. 046** Ce structură algebrică defineşte pe **R** şi ce element neutru, respectiv inversabil admite pe **R** legea de compoziţie $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, $x, y \in \mathbf{R}$ ?

a) grup comutativ; 0; -x b) grup; 0; -x c) grup; -x;0
d) grup comutativ; -x; 0 e) grup; 0;1 f) grup; 0; -1.

**AL - XII. 047** Pentru ce valori ale parametrului real λ intervalul (2,+∞) este monoid în raport cu legea de compoziţie definită pe **R** prin :

$$x * y = xy - 2x - 2y + \lambda, \ (\forall)x, y \in \mathbf{R} \ ?$$

a) $\lambda \in (-\infty, 6)$ b) $\lambda \in (6, +\infty)$ c) $\lambda = 6$
d) $\lambda = 0$ e) $\lambda \in (0, +\infty)$ f) $\lambda \in (-\infty, 0)$

**AL - XII. 048** În mulțimea **R** a numerelor reale se consideră legea de compoziție ''$\oplus$'' definită prin : $x\oplus y = ax + by - 1,\ (\forall)x, y \in \mathbf{R}$ . Să se determine parametrii reali $a$ şi $b$ astfel încât această lege de compoziție să determine pe **R** o structură de grup abelian.

a) $a = 1, b = 0$ b) $a = 2, b = -1$ c) $a = b = 1$

d) $a = 2, b = 1$ e) $a = 1, b = 2$ f) $a = 0, b = 1$

**AL - XII. 049** Fie **R** mulțimea numerelor reale înzestrate cu legea de compoziție internă definită prin : $x * y = ax + by + c$, $a,b,c \in \mathbf{R}$ şi $ab \neq 0$. Precizați valorile lui $a$, $b$, $c$ pentru care ( $\mathbf{R}, *$ ) este un grup cu elementul neutru $e = 1991$.

a) $a = -1, b = -1, c = 1991$ b) $a = 1, b = 1, c = -1991$ c) $a = -1, b = -1, c = -1991$

d) $a = 1, b = 1, c = 1991$ e) $a = b, c = 1991$ f) $a = b = 2, c = -1991$

**AL - XII. 050** Se consideră grupul abelian ( $\mathbf{R}, *$ ) cu legea de compoziție :

$x * y = \left(\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{a}\right)^k$, unde $a \in \mathbf{R}$ este un număr fixat , iar $k$ este impar şi $k \geq 3$ . Care este elementul neutru şi care este simetricul elementului $x \in \mathbf{R}$ în raport cu legea considerată ?

a) $a ; \left(\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{x}\right)^k$ b) $a ; \left(\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{x}\right)^k$ c) $a ; \left(2\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{x}\right)^k$

d) $1; \left(\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{x}\right)^k$ e) $1; \left(\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{x}\right)^k$ f) $1; \left(2\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{x}\right)^k$

**AL - XII. 051** Se defineşte pe **C** legea ''$*$'' : $z_1 * z_2 = z_1 \cdot z_2 + i\left(z_1 + z_2\right) - 1 - i$ . Să se determine elementul neutru $e$ , elementele simetrizabile şi să se determine $\alpha \in \mathbf{C}$, astfel încât $\left(\mathbf{C} \setminus \{\alpha\}, *\right)$ să fie grup abelian.

a) $e = 1 - i$ ; $z' = \dfrac{2 + iz}{z - 1}$; $\alpha = i$ b) $e = 1$; $z' = \dfrac{1 - z}{z + i}$; $\alpha = -1$

c) $e = 1 + i$ ; $z' = \dfrac{1 + z}{2z - i}$; $\alpha = 2$ d) $e = -i$ ; $z' = \dfrac{zi + z}{z - 1}$; $\alpha = -2$

e) $e=2+i$ ; $z'=\dfrac{1}{z}$; $\alpha=2$ f) $e=1-i$ ; $z'=\dfrac{2-iz}{z+i}$; $\alpha=-i$

**AL - XII. 052** Să se determine partea mulţimii **Z** pe care legea de compoziţie definită prin : $x*y=x+y+xy,\ (\forall)x,y\in\mathbf{Z}$ determină o structură de grup abelian propriu.

a) **Z** b) $\mathbf{Z}\setminus\{1\}$ c) $\mathbf{Z}\setminus\{-1\}$ d) $\mathbf{Z}\setminus\{0\}$ e) $\{-2,0\}$ f) $\{0\}$

**AL - XII. 053** Determinaţi $a\in\mathbf{C}^*$ astfel încât mulţimea $M=\left\{x\in\mathbf{C}\,\middle|\,x^4-a^4=0\right\}$ să fie grup în raport cu înmulţirea numerelor complexe.

a) $a\in\mathbf{C}$ b) $a\in(0,+\infty)$ c) $a\in\mathbf{R}^*$
d) $a\in\{-1,1,i,-i\}$ e) $a\in\left\{\sqrt[4]{2},-\sqrt[4]{2}\right\}$ f) $a=\pm2$

**AL – XII. 054** Care este ordinul elementului $\hat{25}$ al grupului abelian $(\mathbf{Z}_{120},+)$?

a) 20; b) 21 c) 22 d) 23 e) 24 f) 25

**AL – XII. 055** Se consideră mulţimea $G=(-1,\infty)$ şi legea de compoziţie

$$x*y=xy+ax+by,\quad (\forall)x,y\in G\ (a,b\in\mathbf{R}).$$

Să se determine valorile lui a şi b pentru care $(G,*)$ este grup abelian.

a) a = 1, b = 0 b) a = b = 1 c) a = 1, b = -1
d) a = b = -1 e) a = b = 0 f) a = 0, b = 1

**AL – XII. 056** Fie mulţimea $M=R\setminus\{-1\}$ pe care se dă legea " * " definită astfel :

$$x*y=a\left(x^2+y^2\right)+2xy+2\left(m^2-3\right)x+2y+m-1,\quad (\forall)\,x,y\in M,$$

unde $a$ şi $m$ sunt constante reale. Să se determine $a,m\in\mathbf{R}$, astfel ca $(M,*)$ să fie grup.

a) $a = 0,\ m = -1$; b) $a = 0,\ m = -\frac{3}{2}$; c) $a = 0,\ m = 2$;

d) $a \in \mathbf{R},\ m = 2$; e) $a \in \mathbf{R},\ m = -1$; f) $a \in \mathbf{R},\ m \in \mathbf{R}$

**AL – XII. 057** Se consideră grupul $(\mathbf{Z}_6,+)$
Care este numărul subgrupurilor (H,+) ale acestuia, diferite de grupul dat ?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

**AL – XII. 058** Fie G un grup şi a,b$\in$ G astfel încât : $a^2 = b^2 = (ab)^2$. Să se precizeze care din următorele egalităţi este adevărată.

a) $a^4 = b^4 = e$; b) $a^3 = b^3 = e$; c) $a^4 = b^2 = e$;

d) $a^5 = b^5$; e) $a^3 = b^3$; f) $a^6 = b^6 = e$.

**AL – XII. 059** Fie x şi y elemente distincte ale unui grup multiplicativ cu elementul neutru e, care satisfac relaţiile:

$$x^2 = y^6 = e, \quad xy = y^4 x.$$

Care dintre elementele menţionate mai jos este egal cu $y^3$ ?

a) x ; b) xy ; c) y ; d) e ; e) $y^2$ ; f) $xy^2$ .

**AL - XII. 060** Fie grupul ( $\mathbf{R}$ , $*$ ) unde legea de compoziţie ’’$*$’’ este definită prin : $x * y = x + y + axy$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$, unde $a \in \mathbf{R}$. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât intervalul $(-1,+\infty)$ să fie subgrup al grupului $\left(\mathbf{R} \setminus \{-1\}, *\right)$.

a) $a = 0$ b) $a = 1$ c) $a = -1$ d) $a \in \varnothing$ e) $a \in (-\infty,-1)$ f) $a \in (1,+\infty)$

**AL - XII. 061** Fie $H = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}) \,\middle|\, A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix},\ n \in \mathbf{N}^* \right\}$.

Să se determine $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ astfel încât $H$ să fie subgrup al grupului multiplicativ al matricilor pătrate nesingulare de ordin doi cu elemente reale.

a) $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a,b,d \in \mathbf{R},\ ad \neq 0 \right\}$ b) $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,c,d \in \mathbf{R},\ ad \neq 0 \right\}$

c) $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R}^* \right\}$ d) $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a,d \in \mathbf{R},\ ad \neq 0 \right\}$

e) $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbf{R},\ a \neq 0 \right\}$ f) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| b,c,d \in \mathbf{R},\ bc \neq 0 \right\}$

**AL - XII. 062** Fie $M = \mathbf{R} \setminus \left\{ \dfrac{3}{2} \right\}$. Să se determine $m,a,b \in \mathbf{R}^*$ astfel ca legea $x * y = 2xy - 3x - 3y + m$ să determine pe $M$ o structură de grup abelian , iar aplicația $f : (M, *) \to (\mathbf{R}^*, \bullet),\ f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între ( $M, *$ ) şi grupul multiplicativ al numerelor reale, diferite de zero.

a) $m = 6\,;\, a = 2\,;\, b = -3$ b) $m = 6\,;\, a = 1\,;\, b = 2$ c) $m = 5\,;\, a = -1\,;\, b = 1$

d) $m = 2\,;\, a = \dfrac{2}{3}\,;\, b = \dfrac{1}{2}$ e) $m = -3\,;\, a = \dfrac{1}{2}\,;\, b = \dfrac{2}{3}$ f) $m = 3\,;\, a = 3\,;\, b = -4$

**AL - XII. 063** Considerăm mulțimea $F(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \{ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ este bijecție} \}$ înzestrată cu structură de grup față de operația de compunere a funcțiilor. Dacă $\varphi : (\mathbf{Z}, +) \to (F(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \circ)$ este un morfism de grupuri astfel încât $\varphi(1) = f$, unde $f(x) = x^3 - 5, (\forall) x \in \mathbf{R}$, să se determine funcția $g = \varphi(2)$.

a) $x^9 - 15x^6 + 75x^3 - 130$ b) $x^9 + 15x^6 - 75x^3 - 130$ c) $x^8 - 3x^6 + 3x - 5$

d) $x^8 + 3x^6 - 3x - 5$ e) $x^6 - 9x^4 + 15x^2 + 1$ f) $x^6 + 9x^4 - 15x^2 + 1$

**AL - XII. 064** Fie grupurile $(\mathbf{R}, +)$ şi $((0, +\infty), \cdot)$. În ce condiții funcția

$f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=e^{\alpha x+\sqrt{\alpha^2-11}-\sqrt{\alpha^2-20}-1}$, $\alpha\in\mathbf{N}$, $\alpha\geq 5$ este un izomorfism de grupuri ?

a) $\alpha=5$ b) $\alpha\in\varnothing$ c) $\alpha=8$ d) $\alpha=6$ e) $\alpha=7$ f) $\alpha=9$

**AL - XII. 065** Se consideră grupul $(M_3(\mathbf{R}),+)$ şi $A=\begin{pmatrix}11 & \lambda & 13\\ 121 & \lambda^2 & 169\\ 1331 & \lambda^3 & 2197\end{pmatrix}\in M_3(\mathbf{R})$.

Să se determine $\lambda\in\mathbf{R}$ astfel încât funcția :
$f:M_3(\mathbf{R})\to M_3(\mathbf{R}), f(X)=AX, (\forall)X\in M_3(\mathbf{R})$ să fie un automorfism.

a) $\lambda=0$ b) $\lambda=12$ c) $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{12\}$
d) $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{0,11,13\}$ e) $\lambda=11$ şi $\lambda=13$ f) $\lambda\in\varnothing$

**AL - XII. 066** Fie grupul $(A,+)$ unde $A=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ şi ''+'' este legea de compoziție definită prin :
$(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3),(\forall)(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\in A$.
Pentru ce $m\in\mathbf{R}$ funcția $f:A\to A$ cu

$$f(x_1,x_2,x_3)=(mx_1+x_2+x_3,x_1+mx_2+x_3,x_1+x_2+mx_3)$$

este un automorfism al grupului $(A,+)$ ?

a) $m=\pm 1$ b) $m\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ c) $m\in\{-1,3\}$
d) $m=-2$ e) $m\in\varnothing$ f) $m\in\mathbf{R}\setminus\{-2,1\}$

**AL - XII. 067** Fie $G=(2,+\infty)$ care are o structură de grup față de operația ''$*$'' definită prin : $x*y=xy-2(x+y)+6$, $(\forall)x,y\in G$. Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbf{R}_+^*\to G$, $f(x)=ax+b$ pentru orice $x\in\mathbf{R}_+^*$, să realizeze un izomorfism de la grupul $(\mathbf{R}_+^*,\cdot)$ la grupul $(G,*)$.

a) $a=0,b=2$ b) $a=1,b=2$ c) $a=0,b=3$

d) $a = 1, b = 3$ e) $a = b = 1$ f) $a = -1, b = 2$

**AL – XII. 068** Fie **Z** mulțimea numerelor întregi. Se știe că mulțimile $(\mathbf{Z},*)$ și $(\mathbf{Z},\circ)$ au structură de grup în raport cu operațiile definite prin egalitățile :

$$x * y = x + y + 1, \quad x \circ y = x + y - 1.$$

Să se determine a,b∈ **Z** astfel încât funcția $f(x) = ax + b$, $f : (\mathbf{Z},*) \to (\mathbf{Z},\circ)$ să fie un izomorfism de grupuri, cu condiția a + b = 3

a) a = 1, b = 2 b) a = 2, b = 1 c) a = 3, b = 0
d) a = 0, b = 3 e) a = -1, b = 4 f) a = 4, b = -1.

**AL – XII. 069** Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{Z}_3 \right\}$.

Să se determine n∈**N** și relația dintre $x, y \in \mathbf{Z}_3$ astfel ca $(G_1, \cdot)$, $G_1 \subset G$ să formeze un grup abelian izomorf cu grupul $(\mathbf{Z}_n, +)$ al claselor de resturi modulo n.

a) $x^2 + y^2 = 1; n = 4;$ b) $x^2 + y^2 = 1; n = 9;$ c) $x^2 + y^2 \neq 0; n = 6;$
d) x,y ∈ $\mathbf{Z}_3$; n = 9; e) x,y∈ $\mathbf{Z}_3$; n = 4; f) $x, y \neq 0; n = 9.$

**AL – XII. 070** Se consideră legea de compoziție

$$x * y = \frac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5}$$ , care determină pe intervalul (1,2) o

structură de grup comutativ. Precizați valoarea parametrului $m$, astfel încât între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive și grupul menționat mai sus să existe un izomorfism

$$f : (0, \infty) \to (1,2) \quad \text{de forma} \quad f(x) = \frac{x + m}{x + 1}.$$

a) $m = 2$; b) $m = 1$; c) $m = -1$;
d) $m = -2$; e) $m = 3$; f) $m = -3$.

**AL – XII. 071** Fie (G, · ) grupul multiplicativ al matricelor de forma

$$X = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ( a,b,c } \in \mathbf{R}).$$

Să se determine printre subgrupurile sale comutative subgrupul izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale, ( **R**, +) .

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**AL - XII. 072** Fie ( I,+,· ) un inel cu proprietatea : $x^2 = x, \ (\forall) x \in \mathrm{I}$. Să se precizeze care din următoarele afirmații rezultă din proprietatea menționată :

a) inelul I este necomutativ şi $x^4 = -x, (\forall) x \in \mathrm{I}$
b) inelul I este necomutativ şi $x = -x, (\forall) x \in \mathrm{I}$
c) inelul I este comutativ şi $x = -x, (\forall) x \in \mathrm{I}$
d) inelul I este necomutativ
e) inelul I este necomutativ şi $x = -x^3, (\forall) x \in \mathrm{I}$
f) inelul I este comutativ şi $x^5 = 2x$

**AL - XII. 073** Fie ( $A$, + , · ) un inel pentru care 1 + 1 = 0 (0 şi 1 fiind elementele neutre ale inelului). Să se exprime $(x+1)^5$ ca sumă de puteri ale lui $x \in A$.

a) $x^5 + 1$ b) $x^5 + x$ c) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

d) $x^5 + x^4 + x + 1$ e) $x^5 + x^3 + x + 1$ f) $x^5 + x^4 + x^2 + 1$

**AL – XII. 074** Pe mulțimea **Z** se definesc legile de compoziție “$\oplus$” şi “$\otimes$“ prin :

$x \oplus y = x + y - 3$ şi $x \otimes y = xy - 3(x + y) + 12$ , $(\forall) x, y \in \mathbf{Z}$.
Care din următoarele afirmații este adevărată ?
a) $(\mathbf{Z}, \oplus)$ şi $(\mathbf{Z}, \otimes)$ sunt grupuri abeliene
b) $(\mathbf{Z}, \oplus, \otimes)$ este inel necomutativ
c) $(\mathbf{Z}, \oplus, \otimes)$ este inel comutativ cu divizori ai lui zero
d) $(\mathbf{Z}, \oplus, \otimes)$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero
e) $(\mathbf{Z}, \oplus, \otimes)$ este corp necomutativ
f) $(\mathbf{Z}, \oplus, \otimes)$ este corp comutativ.

**AL – XII. 075** Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ se definesc legile de compoziție

$$x \perp y = ax + by - 2$$
$$x \top y = xy - 2x - 2y + c, \quad (\forall) x, y \in \mathbf{R}$$

Să se determine a,b şi c astfel încât $(\mathbf{R}, \perp, \top)$ să fie un inel.

a) a = b = c = 1  b) a = b = c = 6  c) a = b = 1, c = 6
d) a = b = c = 3  e) a = b = c = 2  f) a = b = 1, c = 2.

**AL . XII. 076** Fie $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{Z}\}$. Să se determine $a \in \mathbf{Z}$ pentru care operațiile $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ şi

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 y_2 + y_1 x_2, a y_1 y_2)$$

determină pe $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ o structură de inel cu elementul unitate e=(0,1). În acest caz să se determine divizorii lui zero dacă există.

a) a=1; nu există  b) a=1; (x,0), $x \in \mathbf{Z}^*$  c) a=0; (x,0), $x \in \mathbf{Z}^*$
d) $(\forall) a \in \mathbf{Z}$; nu există  e) $\forall a \in \mathbf{Z}$; (0,y), $y \in \mathbf{Z}^*$  f) $(\forall) a \in \mathbf{Z}$;(x,0), $x \in \mathbf{Z}^*$

**AL . XII. 077** Pe mulțimea $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ a tuturor perechilor ordonate de numere reale, z = ( x,y) , se definesc operațiile

$$z \top z' = (x, y) \top (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$z \perp z' = (x, y) \perp (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

Care este structura definită de aceste operații pe mulțimea $\mathbf{R}^2$ ?

a) inel necomutativ b) inel comutativ c) $(\mathbf{R}^2, \perp)$ grup necomutativ
d) corp necomutativ e) corp comutativ f) $(\mathbf{R}^2, \perp)$ este grup comutativ

**AL – XII. 078** Fie inelul $(\mathbf{Z}, \oplus, \circ)$ unde legile de compoziție sunt definite prin
$x \oplus y = x + y - p; \quad x \circ y = xy - px - py + p^2 + p, \quad p \in \mathbf{Z}^*$.
Să se stabilească dacă inelul are sau nu divizori ai lui zero. În caz afirmativ să se determine divizorii lui zero.

a) Da; 2p, p-1; b) Nu; c) Da; p, p;
d) Da; 0, p+1; e) Da; 2p,p; f) Da; 2p, p+1.

**AL – XII. 079** Fie inelul $(\mathbf{Z}, \oplus, \otimes)$ unde:

$x \oplus y = x + y + 2$ şi $x \otimes y = xy + 2x + 2y + 2$

Să se determine divizorii lui zero în acest inel.

a) $\{-2, 2\}$ ; b) $\{0, -1\}$ ; c) $\{-2, -4\}$ ; d) $\{2, 4\}$; e) nu există ;
f) inelul are o infinitate de divizori ai lui zero.

**AL – XII. 080** Fie inelul $(\mathbf{Z}, *, \circ)$ unde $x * y = x + y + 3$ şi
$x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$
$(\forall) x, y \in \mathbf{Z}$. Să se determine numărul $\alpha = \sum_{a \in A} a$, ( A fiind mulțimea elementelor inversabile din inel) şi mulțimea B a divizorilor lui zero.

a) $\alpha = 2$, $B = \{-1, 1\}$ b) $\alpha = -4$, $B = \phi$ c) $\alpha = 6$, $B = \phi$

d) $\alpha = -6$, $B = \phi$ e) $\alpha = 4$, $B = \{-3, 3\}$ f) $\alpha = 3$, $B = \{-2, -4\}$

**AL – XII. 081** Pe **Z** definim legile de compoziție :

$x \otimes y = x + y - 4$ şi $x * y = xy - 4x - 4y + 20, \quad (\forall) x, y \in \mathbf{Z}$.

Stabiliți mulțimea divizorilor lui 0 din inelul $(\mathbf{Z},\otimes,*)$.

a) $\phi$; b) $\{2k|k\in\mathbf{Z}\}$; c) $\{3k|k\in\mathbf{Z}\}$;

d) $\{2k+1|k\in\mathbf{Z}\}$; e) $\{3k+1|k\in\mathbf{Z}\}$; f) $\{3k+2|k\in\mathbf{Z}\}$.

**AL – XII. 082** Fie $\hat{S}_1$ suma elementelor neinversabile ale inelului $(Z_{12},+,\cdot)$, $\hat{S}_2$ suma elementelor inelului şi $A\in M_3(Z_{12})$, unde $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{S}_1 & \hat{S}_2+11\\ \hat{S}_1 & \hat{1} & \hat{S}_1\\ \hat{S}_2+\hat{1} & \hat{S}_1 & \hat{1}\end{pmatrix}$.

Atunci:

a) rang A=1; $\hat{S}_1\hat{S}_2=\hat{0}$ b) rang A=1; $\hat{S}_1\hat{S}_2=\hat{3}$

c) rang A=2; $\hat{S}_1\hat{S}_2=\hat{0}$ d) rang A=2; $\hat{S}_1\hat{S}_2=\hat{3}$

e) rang A=3; $\hat{S}_1\hat{S}_2=\hat{0}$ f) rang A=3; $\hat{S}_1\hat{S}_2=\hat{3}$

**AL - XII. 083** Legile $x\oplus y=x+y-4$ şi $x\otimes y=xy-4x-4y+20$ determină pe **R** o structură de corp comutativ. Să se determine elementele neutre ale corpului față de cele două legi.

a) 4, 5 b) 0, 1 c) 2, 0 d) 1, 1 e) 0, 0 f) 1, 1

**AL - XII. 084** Fie $k\in\mathbf{Z}$ şi mulțimea $M_k=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ kb & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbf{Z}\right\}$ care în raport cu adunarea şi înmulțirea matricelor are o structură de inel comutativ. Pentru care din următoarele valori ale lui $k$ inelul are divizori ai lui zero ?

a) $k=2$ b) $k=3$ c) $k=4$ d) $k=5$ e) $k=6$ f) $k=7$

**AL - XII. 085** Fie $a,b,c \in \mathbf{R}$ . Pe **R** definim legile de compoziţie ''$\perp$'' şi ''T'' prin: $x \perp y = ax + by - 2,\ (\forall)x, y \in \mathbf{R}$ şi $x\mathrm{T}y = xy - 2x - 2y + c,\ (\forall)x, y \in \mathbf{R}$.
Care sunt valorile *a*, *b*, *c* astfel încât ( **R** , $\perp$ , T ) să fie corp ?

a) $a = 0, b = 0, c = 3$ b) $a = 1, b = 1, c = 6$ c) $a = 0, b = 1, c = 6$
d) $a = 1, b = 1, c = 3$ e) $a = 1, b = 1, c = -3$ f) $a = 1, b = 0, c = 6$

**AL - XII. 086** Fie *K* un corp comutativ cu proprietatea că există un cel mai mic număr $n \in \mathbf{N}^*$ astfel ca $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ ori}} = 0$ (0 şi 1 sunt elementele neutre ale corpului).
Care din următoarele afirmaţii este adevărată ?

a) $n$ = număr par b) $n$ = număr prim c) $n$ = număr impar
d) $n = 4k,\ k \in \mathbf{N}^*$ e) $n = 4^k,\ k \in \mathbf{N}^*$ f) $n = 3^k,\ k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2$

**AL – XII. 087** Fie mulţimea numerelor complexe **C** dotată cu operaţiile
$x * y = x + y + a$ şi $x \circ y = bixy + b(x + y) + ci$, $a,b,c \in \mathbf{C}, b \neq 0, i^2 = -1$.

Să se determine valorile numerelor a,b şi c pentru care **C** este corp în raport cu cele două legi de compoziţie, cu elementul neutru faţă de prima lege i, respectiv faţă de a doua lege –i.

a) a = 1, b = 1, c = 0; b) a = i, b = 2, c = -1; c) a = -i, b = c = $\frac{1}{2}$;
d) a = -i, b = c = i; e) a = i, b = $\frac{1}{2}$, c = 1; f) a = i, b = c = -i.

**AL – XII. 088** Pe mulţimea **R** a numerelor reale se consideră legile de compoziţie internă, $x \oplus y = ax + by - 1,\ x \otimes y = 2(xy - x - y) + c$ oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$ iar $a,b,c \in \mathbf{R}$. Să se determine a,b, şi c astfel ca $(\mathbf{R}, \oplus, \otimes)$ să fie corp.

a) a = b = 1, c = 2 b) a = b = c = 1 c) a = b = c = 2
d) a = b = 1, c = 3 e) a = 2, b = 1, c = 3 f) a = 1, b = 2, c = 3.

**AL - XII. 089** Pentru ce valori ale lui $a$ şi $b$ funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ax+b$ determină un izomorfism între corpul numerelor reale şi corpul ( $\mathbf{R}$, T, $*$ ), unde $x\,\mathrm{T}\,y=x+y-2$, iar $x*y=\frac{1}{4}xy-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+3$ pentru $(\forall)x,y\in\mathbf{R}$ ?

a) $a=1,b=1$ b) $a=2,b=2$ c) $a=1,b=2$
d) $a=4,b=2$ e) $a=2,b=4$ f) $a=1,b=4$

**AL - XII. 090** Fie corpurile ( $K,+,\bullet$ ) şi ( $L,+,\bullet$ ) unde: $K=\left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbf{Q}\right\}$, $L=\left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbf{Q}\right\}$, iar ''+'' şi ''$\bullet$'' sunt operaţiile de adunare şi înmulţire a matricelor , respectiv , a numerelor reale. Care din următoarele funcţii este un izomorfism al acestor corpuri ?

a) $f_1\left(a+b\sqrt{2}\right)=\begin{pmatrix} a^2 & 2b \\ b & a^2\end{pmatrix}$ b) $f_2\left(a+b\sqrt{2}\right)=\begin{pmatrix} -a & -2b \\ -b & -a\end{pmatrix}$

c) $f_3\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a\end{pmatrix}=a+b+b^2\cdot\sqrt{2}$ d) $f_4\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a\end{pmatrix}=a+b+b\sqrt{2}$

e) $f_5\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a\end{pmatrix}=-a+b\sqrt{2}$ f) $f_6\left(a+b\sqrt{2}\right)=\begin{pmatrix} a & -2b \\ -b & a\end{pmatrix}$

**AL - XII. 091** Fie $U,E,X\in M_2(\mathbf{Z}_6)$ (inelul matricilor de ordin doi cu coeficienţi din $\mathbf{Z}_6$) : $U=\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{5} \\ \hat{5} & \hat{4}\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d}\end{pmatrix}$. Care este soluţia $X$ a ecuaţiei: $U\cdot X=E$ ?

a) $X=\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{1}\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{5}\end{pmatrix}$ c) $X=\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{3}\end{pmatrix}$ d) $X=\begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{1}\end{pmatrix}$ e) $X=\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{5} \\ \hat{5} & \hat{3}\end{pmatrix}$ f) $X=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{5} \\ \hat{2} & \hat{5}\end{pmatrix}$

**AL - XII. 092** Să se calculeze determinantul de mai jos având elementele în corpul claselor de resturi modulo 7 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{4} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{6} & \hat{5} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{5} & \hat{1} \\ \hat{6} & \hat{0} & \hat{2} & \hat{3} \end{vmatrix}.$$

a) $\Delta = \hat{1}$ b) $\Delta = \hat{0}$ c) $\Delta = \hat{2}$
d) $\Delta = \hat{3}$ e) $\Delta = \hat{4}$ f) $\Delta = \hat{5}$

**AL - XII. 093** Fie $A \in M_3(\mathbf{Z}_3)$, unde $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \hat{x} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{x} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\hat{x} \in \mathbf{Z}_3$. Pentru ce valori ale lui $\hat{x}$ matricea $A$ este inversabilă ?

a) $\hat{x} = \hat{0}$ b) $\hat{x} = \hat{2}$ c) $\hat{x} = \hat{1}$ d) $\hat{x} \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$
e) matricea nu este inversabilă pentru nici o valoare a lui $\hat{x}$ f) $\hat{x} \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$

**AL – XII. 094** Să se calculeze în corpul claselor de resturi modulo 11 expresia:

$$E = \left( \frac{\hat{3}}{\hat{4}} + \hat{5} + \frac{\hat{8}}{\hat{3}} \cdot \frac{\hat{7}}{\hat{6}} \right) \cdot \frac{\hat{9}}{\hat{2}}$$

a) $E = \hat{0}$; b) $E = \hat{1}$; c) $E = \hat{2}$; d) $E = \hat{3}$; e) $E = \hat{4}$; f) $E = \hat{5}$.

**AL – XII. 095** Să se determine $\hat{a} \in \mathbf{Z}_7$ pentru care polinomul $P \in \mathbf{Z}_7[X]$, $P(x) = x^6 + \hat{a}x + \hat{5}$ este ireductibil.

a) $\hat{a} \in \mathbf{Z}_7$; b) $\hat{a} \in \phi$; c) $\hat{a} = \hat{2}$; d) $\hat{a} = \hat{4}$; e) $\hat{a} \in \{\hat{3}, \hat{6}\}$; f) $\hat{a} \in \{\hat{5}, \hat{6}\}$

**AL – XII. 096** Pe mulțimea $\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$ se definește legea de compoziție internă : $x * y = x^{\ln y}$. Se consideră afirmațiile:

A) $\left(\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}, *\right)$ este grup abelian
B) $(\mathbf{M}, *)$ este subgrup al grupului $\left(\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}, *\right)$ unde $M = \left\{e^{\alpha}, \alpha \in \mathbf{Q}^*\right\}$.
C) Aplicația $f : \left(R_+^* \setminus \{1\}, *\right) \to \left(R^*, \cdot\right)$ cu $f(x) = \ln x$ și "$\cdot$" reprezintă înmulțirea, este un izomorfism de grupuri
D) $\left(\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}, *, \cdot\right)$ este un inel
E) $\left(\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}, *, \cdot\right)$ este un corp.
Stabiliți câte afirmații sunt corecte .

a) nici una; b) una; c) două; d) trei; e) patru; f) cinci.

**AL – XII. 097** Fie $f_k,\ k = \overline{1,n}$, automorfismele corpului $(\mathbf{C}, +, \cdot)$, ce au proprietatea că : $f_k(x) = x,\ (\forall) x \in \mathbf{R}$.

Să se calculeze $S(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$.

a) S(z) = 0 b) S(z) = n c) S(z) = Re z
d) S(z) = Im z e) S(z) = 2Re z f) S(z) = 2Im z

**Al – XII. 098** Fie corpul $(M_2, +, \cdot)$, unde

$M_2 = \left\{ M_2(z,u) = \begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix}; z, u \in \mathbf{R} \right\}$ iar legile de compunere internă "$+$" și "$\cdot$" sunt adunarea și înmulțirea matricelor. Să se determine izomorfismele $f : (M_2, +, \cdot) \to (\mathbf{C}, +, \cdot)$, cu proprietatea $f\left(\alpha M_2(z,u)\right) = \alpha\, f\left(M_2(z,u)\right)\ (\forall) \alpha \in \mathbf{R}$, unde $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ este corpul numerelor complexe.

a) $f\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix} = z - 5iu$ b) $f_1\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix} = z + 5iu$; $f_2\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix} = z - 3iu$

c) $f_1\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix} = z + \frac{3}{2}u + \frac{5}{2}ui$ ; $f_2\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix} = z + \frac{3}{2}u - \frac{5}{2}ui$

d) $f\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix} = z - \frac{3}{2}u + \frac{\sqrt{5}}{2}ui$; e) $f_1\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix} = z + \frac{3}{2}u + \frac{\sqrt{11}}{2}ui$;

$f_2\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix} = z + \frac{3}{2}u - \frac{\sqrt{11}}{2}ui$ f) $f\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix} = z + \frac{3}{2}u + i\left(\frac{z}{2} - 5u\right)$

**AL – XII. 099** Legile de compoziție $x \oplus y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ și $x \otimes y = xy$ determină pe **R** o structură de corp comutativ. Pentru ce valori $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ funcția bijectivă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt[3]{\alpha x + \beta}$ determină un izomorfism între corpul numerelor reale $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ și corpul $(\mathbf{R}, \oplus, \otimes)$?

a) nu există $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; b) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; c) $\alpha = \beta = 1$;
d) $\alpha = 1,\ \beta = 0$; e) $\alpha = 2,\ \beta = 1$; f) $\alpha = 1, \beta = 2$

**AL - XII. 100** Să se rezolve următorul sistem de ecuații în corpul claselor de resturi modulo 11: $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{4}y = \hat{5} \\ \hat{7}x + \hat{3}y = \hat{8} \end{cases}$.

a) $(\hat{9},\hat{0})$ b) $(\hat{0},\hat{9})$ c) $(\hat{6},\hat{9})$ d) $(\hat{8},\hat{9})$ e) $(\hat{5},\hat{0})$ f) $(\hat{6},\hat{0})$

**AL - XII. 101** Care sunt soluțiile sistemului: $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{2} \end{cases}$ în inelul $\mathbf{Z}_{12}$ ?

a) $x = \hat{2}, y = \hat{7}$ b) $x = \hat{1}, y = \hat{4}$ c) $x = 1\hat{0}, y = \hat{3}$
d) incompatibil e) $x = 1\hat{1}, y = \hat{2}$ f) $x = \hat{8}, y = \hat{3}$

**AL - XII. 102** Să se rezolve în inelul $\mathbf{Z}_{12}$ sistemul: $\begin{cases} \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{4} \\ \hat{2}x+\hat{3}y=\hat{1} \end{cases}$.

a) $x=\hat{0}, x=\hat{2}$ b) $x=1\hat{0}, y=\hat{7}$ c) $x=\hat{5}, y=\hat{2}$

d) $x=\hat{4}, y=\hat{1}$ e) $x=\hat{2}, y=1\hat{1}$ f) $x=1\hat{1}, y=\hat{8}$

**AL - XII. 103** Să se rezolve în corpul claselor de resturi modulo 11, sistemul următor: $\begin{cases} \hat{2}x+1\hat{0}y+z=\hat{4} \\ x+\hat{3}z=\hat{2} \\ 1\hat{0}x+\hat{2}y+\hat{2}z=\hat{1} \end{cases}$.

a) $(\hat{6},\hat{3},\hat{6})$ b) $(\hat{3},\hat{6},\hat{3})$ c) $(\hat{3},\hat{3},\hat{6})$ d) $(\hat{6},\hat{6},\hat{3})$ e) $(\hat{6},\hat{6},\hat{1})$ f) $(\hat{3},\hat{3},\hat{1})$

**AL - XII. 104** Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x+y+z+u=\hat{6} \\ x-y+\hat{2}z-u=\hat{2} \\ \hat{2}x+y-z+u=\hat{3} \\ x+y+\hat{3}z-u=\hat{2} \end{cases}$ în corpul claselor de resturi modulo 7.

a) $x=\hat{1}, y=1\hat{0}, z=\hat{2}, u=\hat{4}$ b) $x=\hat{2}, y=\hat{3}, z=\hat{1}, u=\hat{4}$

c) $x=\hat{2}u, y=\hat{1}+\hat{3}u, z=\hat{5}+u,\ u=u$ d) $x=\hat{2}u, y=\hat{1}+\hat{2}u, z=\hat{6}+u$

e) $x=\hat{1}, y=\hat{2}, z=\hat{3}, u=\hat{4}$ f) $x=\hat{2}, y=\hat{3}, z=\hat{4}, u=\hat{5}$

**AL - XII. 105** Să se rezolve sistemul

$\begin{cases} \hat{3}x+\hat{8}y+\hat{8}z=\hat{3} \\ \hat{8}x+\hat{8}y+\hat{3}z=\hat{0} \\ \hat{8}x+\hat{3}y+\hat{8}z=\hat{5} \end{cases}$ în corpul claselor de resturi modulo 13.

a) $x=\hat{5}, y=\hat{2}, z=\hat{3};$ b) $x=\hat{2}, y=\hat{5}, z=\hat{2};$ c) $x=\hat{4}, y=\hat{1}, z=\hat{2};$

d) $x=\hat{1}, y=\hat{2}, z=\hat{2};$ e) $x=\hat{2}, y=\hat{2}, z=\hat{5};$ f) $x=\hat{2}, y=\hat{2}, z=\hat{7};$

**AL - XII. 106** Precizați valorile $\lambda \in \mathbf{Z}_4$ pentru care sistemul: $\begin{cases} \hat{\lambda}x + y + z = \hat{1} \\ x + \hat{\lambda}y + z = \hat{\lambda} \\ x + y + \hat{\lambda}z = \hat{\lambda}^2 \end{cases}$

este incompatibil.

a) $\lambda \in \{\hat{0},\hat{2}\}$ b) $\lambda = \{\hat{3},0\}$ c) $\lambda = \{\hat{1},\hat{0}\}$ d) $\lambda \in \{\hat{1},\hat{3}\}$ e) $\lambda \in \varnothing$ f) $\lambda \in \{\hat{1},\hat{2}\}$

**AL - XII. 107** Care este condiția ca sistemul: $\begin{cases} \hat{\lambda}x + y + z = \hat{0} \\ x + \hat{\lambda}y + z = \hat{0} \\ x + y + \hat{\lambda}z = \hat{0} \end{cases}$ să aibă numai soluția banală în inelul claselor de resturi modulo 4 ?

a) $\hat{\lambda} = \hat{0}$ b) $\hat{\lambda} = \hat{1}$ c) $\hat{\lambda} \in \varnothing$ d) $\hat{\lambda} \in \mathbf{Z}_4$ e) $\hat{\lambda} = \hat{2}$ f) $\hat{\lambda} = \hat{3}$

**AL - XII. 108** În corpul claselor de resturi modulo 5 să se afle restul împărțirii polinomului

$$\hat{2}x^4 + \hat{3}x^3 + \hat{4}x^2 + x + \hat{3} \text{ la polinomul } \hat{3}x^2 + \hat{3}x + \hat{4}.$$

a) $x+\hat{2}$ b) $x+\hat{1}$ c) x

d) $x+\hat{4}$ e) $x+\hat{5}$ f) $\hat{2}x+\hat{1}$

**AL - XII. 109** Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f, g \in \mathbf{Z}_5[X]$: $f = \hat{3}X^5 + \hat{4}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$ şi $g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$.

a) $(f, g) = 1$ b) $g$ c) $X + \hat{1}$ d) $\hat{2}X + \hat{3}$ e) $\hat{2}X + \hat{1}$ f) $X + \hat{2}$

**AL - XII. 110** În inelul $\mathbf{Z}_4[X]$, să se găsească un polinom *h* astfel încât:

$$\left(\hat{2}x^2+\hat{2}x+\hat{3}\right)\cdot h(x)=\hat{1}.$$

a) $h=\hat{2}x^2+\hat{2}x+\hat{3}$ b) $h=\hat{2}x^2+\hat{3}$ c) $h=x^2+\hat{2}x+\hat{1}$
d) $h=x^2+\hat{1}$ e) $h=x^2+\hat{3}x+\hat{2}$ f) $h=\hat{3}x^2+x+\hat{2}$

**AL - XII. 111** Să se descompună în factori ireductibili peste corpul $\mathbf{Z}_3$ polinomul: $f=x^3+\hat{2}x^2+x+\hat{2}\in\mathbf{Z}_3[X]$.

a) $\left(x-\hat{1}\right)\left(x^2+x+\hat{1}\right)$ b) $\left(x+\hat{1}\right)\left(x^2+x\right)$ c) $\left(x+\hat{1}\right)\left(x^2+\hat{1}\right)$
d) $\left(x+\hat{2}\right)\left(x^2+\hat{1}\right)$ e) $\left(x-\hat{2}\right)\left(x^2-\hat{1}\right)$ f) $x\left(x-\hat{1}\right)\left(x-\hat{2}\right)$

**AL - XII. 112** Să se determine *p* astfel încât polinomul $\hat{2}x^3+\left(p+\hat{2}\right)x+\hat{1}\in\mathbf{Z}_3[X]$ să fie ireductibil peste $\mathbf{Z}_3$.

a) orice $p$ din $\mathbf{Z}_3$ satisface condiția cerută
b) nici un $p$ din $\mathbf{Z}_3$ nu satisface condiția cerută
c) $p\in\left\{\hat{0},\hat{1}\right\}$ d) $p=\hat{1}$ e) $p=\hat{0}$ f) $p=\hat{2}$

**AL - XII. 113** Să se determine $m\in\mathbf{Z}_5$ astfel încât polinomul $X^4+\hat{m}X^3+\hat{2}X^2+\hat{4}X+\hat{1}\in\mathbf{Z}_5[X]$ să aibă două rădăcini diferite.

a) $\hat{m}=\hat{0}$ b) $\hat{m}=\hat{1}$ c) $\hat{m}=\hat{2}$ d) $\hat{m}=\hat{3}$ e) $\hat{m}=\hat{4}$ f) $\hat{m}\in\varnothing$

**AL - XII. 114** Produsul elementelor nenule într-un corp comutativ cu *n* elemente este:

a) 1 b) –1 c) 1+1 d) (–1)+( –1) e) ( –1)+ ( –1)+ ( –1) f) 1+1+1

**AL – XII. 115** Să se determine toate morfismele de grupuri $f:(\mathbf{Q},+)\to(\mathbf{Q},+)$.

a) $f(x)=rx,\ x\in\mathbf{Q};\ r\in\mathbf{Q}$
b) $f(x)=rx,\ x\in\mathbf{Q};\ r\in\mathbf{Z}$
c) $f(x)=x,\ x\in\mathbf{Q}$
d) $f(x)=-x,\ x\in\mathbf{Q}$
e) $f(x)=nx,\ x\in\mathbf{Q},\ n\in\mathbf{N}$
f) $f(x)=0,\ x\in\mathbf{Q}$

**AL – XII. 116** Care trebuie să fie expresia lui f(x) pentru ca aplicația $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{C}$ să fie un morfism de corpuri.

a) $f(x)=x+1$ b) $f(x)=x^2$ c) $f(x)=x$
d) $f(x)=x+x^{-1}$ e) $f(x)=x^{-1}$ f) Nici una dintre cele menționate anterior.

**AL – XII. 117** Fie $K=Z_2=\left\{\hat{0},\hat{1}\right\}$.

Precizați atât numărul vectorilor spațiului vectorial $K^3$ cât şi numărul vectorilor spațiului vectorial $K^n$ .

a) 8; b) 8; n c) 8; $2^n$ d) 8; 2n e) 8; $3^n$ f) 8; $2^{2n}$

**AL – XII. 118** Se definesc pe **R** operațiile
$x\oplus y=x+y-x_0,\ (\forall)x,y\in\mathbf{R}$ şi $x_0\in\mathbf{R}$ şi
$\lambda\otimes x=a\lambda x+(1-a\lambda)x_0\quad(\forall)x\in\mathbf{R},\quad(\forall)\lambda\in\mathbf{R},\quad a\in\mathbf{R}$. Să se determine intervalele la care aparține $a\in\mathbf{R}$ pentru care operațiile $\oplus$ şi $\otimes$ determină o structură de spațiu vectorial real pe **R**.

a) $(0,1]$
b) $(1,3]$
c) $[-1,1)$
d) $\phi$
e) $[2,4]$
f) $[0,1)$

**AL – XII. 119** Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui a pentru care intervalul deschis, corespunzător, $V_a=(a,+\infty)\subset\mathbf{R}$ poate fi structurat ca spațiu vectorial în raport cu operațiile

$$x\oplus y=x\cdot y\quad \text{şi}\quad \lambda\otimes x=x^{\lambda},\ (\lambda\in\mathbf{R}).$$

a) $(-\infty,0]$ b) $[1,+\infty)$ c) $(0,+\infty)$
d) $[0,1)$ e) $\{0\}$ f) $(0,1)$

**AL – XII. 120** În spațiul vectorial $\mathbf{R}^2$ considerăm vectorii

$$v_1=(a,1),\quad v_2=(1,a),$$

unde $a\in\mathbf{R}$ . Să se determine valorile lui a astfel încât sistemul de vectori $v_1,v_2$ să fie liniar dependent.

a) $a\in\phi$ b) $a\in\mathbf{R}$ c) $a\in\{-1,1\}$
d) $a\in\{-1\}$ e) $a\in\{1\}$ f) $a\in\{1,2\}$

**AL – XII. 121** Fie spațiul liniar $\mathbf{R}^3$ şi vectorii a=(1,-1,4) , b=(2,-3,1) şi c=(1,2,$\lambda$). Să se determine valoarea parametrului real $\lambda$ astfel încât vectorii să fie liniari independenți.

a) $\lambda\in\mathbf{R}$ b) $\lambda=1$ c) $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{25\}$
d) $\lambda=25$ e) $\lambda\in\{-1,1\}$ f) $\lambda\in\{-25,23\}$

**AL – XII. 122** Să se determine $a\in\mathbf{R}$ pentru care sistemul de vectori $B=\{u=(a,1),v=(-1,a)\}\subset\mathbf{R}^2$ formează o bază şi să se determine coordonatele vectorului $w=(1,a^3)$ în baza B.

a) $a\in\mathbf{R};\left(\frac{1}{a},a\right)$; b) $a\in\mathbf{R};(a,a^2-1)$ c) $a\neq\pm1;(1,1)$
d) $a=1;(1,1)$ e) $a=-1;(1,-1)$ f) $a\in\mathbf{R};(1,a^3)$

**AL – XII. 123** În spațiul vectorial $\mathbf{R}^3$ vectorii $e_1$=(3,1,5), $e_2$=(3,6,2) şi $e_3$=(-1,0,1) formează o bază, $\{e_1,e_2,e_3\}$.

Să se determine coordonatele vectorului x=(1,0,2) în raport cu această bază.

a) $\left(\frac{17}{43},\frac{1}{43},\frac{-3}{43}\right)$ b) $\left(\frac{18}{43},-\frac{3}{43},\frac{2}{43}\right)$ c) $\left(\frac{19}{43},\frac{2}{43},\frac{-1}{43}\right)$
d) $(3,0,5)$ e) $(6,1,9)$ f) $(7,0,2)$

**AL – XII. 124** În spațiul $\mathbf{R}^3$ se consideră sistemul de vectori:

$$B=\left\{\overline{v_1}=(1,0,0),\quad \overline{v_2}=(1,1,0),\quad \overline{v_3}=(1,1,1)\right\}$$

Să se verifice că sistemul de vectori formează o bază în $\mathbf{R}^3$ şi să se afle coordonatele vectorului $\overline{v}=(3,1,-1)$ în această bază

a) $\overline{V_B}=(1,0,0)$; b) $\overline{V_B}=(1,2,-1)$ c) $\overline{V_B}=(2,2,-1)$
d) $\overline{V_B}=(2,2,0)$ e) $\overline{V_B}=(0,2,-1)$ f) $\overline{V_B}=(0,0,1)$

**AL – XII. 125** În spațiul vectorial $\mathbf{R}^3$ se consideră vectorii: $\overline{v_1}=(a,1,1)$, $\overline{v_2}=(1,a,1)$ , $\overline{v_3}=(1,1,a)$, unde a este parametru real.

Să se determine valorile lui a astfel ca sistemul de vectori $B=\left\{\overline{v_1},\overline{v_2},\overline{v_3}\right\}$ să formeze o bază a lui $\mathbf{R}^3$ .

a) $a\in\{1,-2\}$ b) $a\in\{-1,2\}$ c) $a\in\mathbf{R}\setminus\{1,-2\}$
d) $a\in\mathbf{R}$ e) $a\in\mathbf{R}\setminus\{-1,2\}$ f) $a\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$

**AL – XII. 126** În spațiul vectorial $\mathbf{R}^3$ considerăm vectorii

$$v_1=(a,1,1),\quad v_2=(1,a,1),\quad v_3=(1,1,a),$$

unde $a\in\mathbf{R}$ . Să se determine valorile lui $a$ astfel încât sistemul de vectori $v_1,v_2,v_3$ să fie liniar dependent.

a) $a\in\{-1,2\}$ b) $a\in\{-2,1\}$ c) $a\in\phi$
d) $\alpha\in\mathbf{R}$ e) $a\in\{1,\}$ f) $a\in\{-1,1,2\}$

**AL – XII. 127** Fie vectorii $v_1=(1,1,0), v_2=(0,1,1)$ şi $v_3=(1,m,1)$, $m\in\mathbf{R}$ . Să se determine $m$ astfel încât cei trei vectori să formeze o bază a lui $\mathbf{R}^3$, iar pentru $m$ =0, să se exprime vectorul $v=(2,-3,5)$ ca o combinație liniară de vectorii $v_1,v_2$ şi $v_3$ .

a) $m \neq 2, v = 5v_3 - 3v_1$ b) $m \neq 2, v = 3v_1 - 5v_3$
c) $m \neq 2, v = 3v_1 + 5v_3$ d) $m \neq 2, v = -3v_1 - 5v_3$
e) $m \neq 2, v = 3v_3 - 5v_1$ f) $m \neq 2, v = 3v_3 + 5v_1$

**AL – XII. 128** În spațiul vectorial $M_2(\mathbf{R})$ al matricelor pătratice cu coeficienți reali se consideră matricele:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Să se precizeze dacă $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ formează o bază a lui $M_2(\mathbf{R})$; să se reprezinte apoi matricea A ca o combinație liniară de acești vectori.

a) Da; $A = 5E_1 + E_2 - 9E_3 - 5E_4$ b) Nu; $A = -5E_1 - E_2 + 9E_3 - 5E_4$
c) Nu; $A = 5E_1 + E_2 + 9E_3 + 5E_4$ d) Da; $A = -5E_1 - E_2 + 9E_3 - 5E_4$
e) Da; $A = E_1 + 5E_2 + 9E_3 - E_4$ f) Da; $A = 5E_1 - E_2 - 4E_3 + 9E_4$

**AL – XII. 129** Să se afle $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul de vectori

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 3 \\ 2-\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix} \right\}$$

să formeze o bază în spațiul vectorial real $M_2(\mathbf{R})$ cu operațiile de adunare şi înmulțire cu scalar a matricelor.

a) $\lambda = 0$ b) $\lambda \neq -\frac{7}{2}$ c) $\lambda = -\frac{7}{2}$
c) $\lambda \neq 0$ d) $\lambda = 2$ e) $\lambda \neq 2$

**AL – XII. 130** Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $L(x, y) = (x + \lambda, y + 1)$ să fie o aplicație liniară

a) $\lambda \in \mathbf{R}$ b) $\lambda \in \phi$ c) $\lambda = 0$
d) $\lambda = 1$ e) $\lambda = \pm 1$ f) $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$

**AL – XII. 131** Considerăm spaţiul vectorial $\mathbf{R}^2$ şi aplicaţia $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,

$$f(x)=(2x_1+3x_2, x_1+x_2+a),\ x=(x_1,x_2)\in \mathbf{R}^2,$$

unde $a\in\mathbf{R}$. Să se determine valorile lui a astfel încât aplicaţia f să fie liniară.

a) $a\in\{0\}$ b) $a\in\{1\}$ c) $a\in\phi$

d) $a\in\mathbf{R}$ e) $a\in\{0,1\}$ f) $a\in\mathbf{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$

**AL – XII. 132** Determinaţi m şi n aşa ca aplicaţia $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$,

$f(x^1,x^2)=\left(x^1+2(x^2)^m, x^1-x^2+n, x^2\right),\quad (\forall)x=(x^1,x^2)\in\mathbf{R}^2$ să fie liniară.

a) m=1, n=1 b) m=0, n=1 c) m=0, n$\in$**R**

d) m=0, n=0 e) m=1, n=0 f) m=1, n=2

**AL – XII. 133** Să se determine expresia analitică a aplicaţiei liniare $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ ştiind că aceasta are în baza $B=\{(1,1),(1,0)\}$ matricea $T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

a) $T(x,y)=(x,x-y)$ b) $T(x,y)=(y,x)$ c) $T(x,y)=(y,x+y)$

d) $T(x,y)=(x-y,x+y)$ e) $T(x,y)=(x,y)$ f) $T(x,y)=(-x,-y)$

**AL – XII. 134** Să se determine aplicaţia liniară $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ de matrice $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ în baza $B=\{u=(1,1), v=(0,1)\}$

a) $F(x,y)=(2x+y,x+y)$ b) $F(x,y)=(x-y,x-2y)$

c) $F(x,y)=(x+y,x+2y)$ d) $F(x,y)=(2x,y)$

e) $F(x,y)=(x+y,2x-y)$ f) $F(x,y)=(x+y,x-2y)$

**AL – XII. 135** Considerăm spaţiul vectorial $\mathbf{R}^2$ şi baza canonică $\{e_1,e_2\}$, $e_1=(1,0), e_2=(0,1)$. Să se determine matricea asociată aplicaţiei liniare

$$H:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\ \ H(x,y)=(2x,2y),\ (x,y\in\mathbf{R}^2)$$
în baza canonică.

a) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

**AL – XII. 136** Să se determine matricea asociată aplicației liniare $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$, $f\left(x^1,x^2\right)=\left(2x^1,x^1+x^2,-x^2\right)$ în pereche de baze $B_1=\{(2,1),(1,2)\}\subset\mathbf{R}^2$ şi $B_2=\{(2,1,0),(0,1,1),(0,0,2)\}\subset\mathbf{R}^3$.

a) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

**AL – XII. 137** Fie aplicația liniară $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ definită prin $L(x_1,x_2)=(x_1-x_2,2x_1,x_2)\quad(\forall)(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$.

Să se determine matricea A asociată aplicației L în pereche de baze canonice $B_0$ şi $B_0^{'}$ ale lui $\mathbf{R}^2$ respectiv $\mathbf{R}^3$.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ f) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**AL – XII. 138** Fie spațiul vectorial real $\mathbf{R}^3$ cu baza canonică

$$e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1).$$

Determinați matricea asociată aplicației liniare $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$,

$$L(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_1+x_2-x_3,3x_1-2x_2+x_3)$$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

**AL – XII. 139** Fie aplicația liniară $f:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^3$ care pe baza canonică din $\mathbf{R}^4$ are efectul dat de relațiile:

$$f(\bar{e}_1)=(1,0,3);\quad f(\bar{e}_2)=(0,-1,2);\quad f(\bar{e}_3)=(1,1,1);\quad f(\bar{e}_4)=(2,1,-1).$$

Să se găsească matricea asociată aplicației liniare în bazele canonice

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**AL – XII. 140** Fie transformarea liniară
$f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ f(x)=(-7x_1+10x_2,-5x_1+8x_2)$, oricare ar fi $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$.
Să se determine vectorii $x\in\mathbf{R}^2$ pentru care $f(x)=0$ şi apoi găsiţi valorile lui $x\in\mathbf{R}$ pentru care există $x\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ astfel încât $f(x)=\lambda x$.

a) $x=(0,0),\ \lambda\in\{-2,2\}$ b) $x=(0,0),\ \lambda\in\{-2,3\}$
c) $x=(0,0),\ \lambda\in\{2,3\}$ d) $x=(0,0),\ \lambda\in\{2,-3\}$
e) $x=(0,0),\ \lambda\in\{-2,-3\}$ f) $x=(0,0),\ \lambda\in\{-3,2\}$

**AL – XII. 141** Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 1 & -1\\ 2 & 7 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Să se determine expresia analitică a aplicaţiei liniare $L:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^2$ ce relativ la bazele canonice ale celor două spaţii are matricea A.

a) $L(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-5x_1+3x_2+x_3-x_4,2x_1+7x_2+2x_3+x_4)$
b) $L(x_1,x_2)=(-5x_1+2x_2,3x_1+7x_2,x_1+2x_2,-x_1+x_2)$
c) $L(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-5x_1+2x_2+3x_3+7x_4,5x_1-x_2+x_3+x_4)$
d) $L(x_1,x_2)=(x_1+x_2,5x_1+2x_2,3x_1+7x_2,-x_1-x_2)$
e) $L(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-5x_1+x_2+x_4,x_1+7x_2+2x_3-x_4)$
f) $L(x_1,x_2,x_3,x_4)=(5x_1-3x_2-x_3+x_4,-2x_1-7x_2-2x_3-x_4)$

**AL – XII. 142** Fie $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\ f(\overline{x})=\left(-\frac{1}{2}x_1-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2,\frac{\sqrt{3}}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2\right)$ oricare ar fi $\overline{x}=(x_1x_2)\in\mathbf{R}^2$. Precizaţi dacă f este sau nu o transformare liniară a lui $\mathbf{R}^2$ iar apoi calculaţi $f^3=f\circ f\circ f$.

a) Nu; $f^3(\overline{x})=\overline{x}$ b) Da; $f^3(\overline{x})=-\overline{x}$ c) Da; $f^3(\overline{x})=\overline{x}$
d) Da; $f^3(\overline{x})=(\overline{x})$ e) Nu; $f^3(\overline{x})=-\overline{x}$ f) Da; $f^3(\overline{x})=\overline{0}$

**AL – XII. 143** Fie aplicația liniară $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ definită prin

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-2x_3, x_1-x_2, x_1-x_3, x_2-x_3), (\forall) x=(x_1,x_2,x_3)$$

Să se determine coordonatele în baza canonică din $\mathbf{R}^4$ ale imaginii vectorului x=(1,2,0) prin aplicația liniară f.

a) (3, -1, 1, 0) b) (3, -1, 0, 2) c) (3, -1, 1, 2)
d) (3, 0, 1, 2) e) (0, 1, 1, 2) f) (3, 0, 0, 2)

**AL – XII. 144** Fie aplicația liniară $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,

$f(\overline{x})=(-7x_1+10x_2, -5x_1+8x_2)$, $\forall \overline{x}=(x_1,x_2)\in \mathbf{R}^2$

Să se determine matricea $A\in M_2(\mathbf{R})$ a acestei aplicații în baza canonică din $\mathbf{R}^2$, iar apoi să se găsească valorile $\lambda \in \mathbf{R}$ pentru care există $\overline{x}\in\mathbf{R}^2$, $\overline{x}\neq\overline{0}$ astfel încât $f(\overline{x})=\lambda\overline{x}$

a) $A=\begin{pmatrix}-7 & 10\\ 5 & 8\end{pmatrix}; \lambda\in\mathbf{R}\setminus\{-2,3\}$ b) $A=\begin{pmatrix}-7 & 10\\ -5 & 8\end{pmatrix}; \lambda\in\{-2,3\}$

c) $A=\begin{pmatrix}5 & 8\\ -7 & 10\end{pmatrix}; \lambda\in\mathbf{R}$ d) $A=\begin{pmatrix}-7 & -10\\ -5 & 8\end{pmatrix}; \lambda\in\{-2,3\}$

e) $A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 10 & 8\end{pmatrix}; \lambda\in\mathbf{R}\setminus\{-2,3\}$ f) $A=\begin{pmatrix}-7 & -5\\ 8 & 10\end{pmatrix}; \lambda\in\{-3,2\}$

**AL – XII. 145** Fie spațiul vectorial al matricelor pătratice de ordinul doi $M_2(\mathbf{C})$ în care considerăm matricele

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$$

Să se determine o aplicație liniară $l: M_2(\mathbf{C})\to\mathbf{C}$ astfel încât

$l(A_1)=-4i, l(A_2)=6, \quad l(A_3)=2, l(A_4)=4i$

a) $l(A)=3a_{11}+ia_{12}-5ia_{21}+a_{22}$; b) $l(A)=a_{11}-a_{12}+ia_{21}-ia_{22}$;

c) $l(A) = 2a_{11} - ia_{12} + 3ia_{21} - a_{22}$; d) $l(A) = -a_{11} + ia_{12} - 2ia_{21} + a_{22}$;
e) $l(A) = 4a_{11} - 2ia_{12} + a_{21} - 5ia_{22}$; f) $l(A) = 3a_{11} - ia_{12} + 3ia_{21} - 5a_{22}$;

**AL – XII. 146** Fie $R_1[x]/\mathbf{R}$ spațiul liniar real al polinoamelor de grad cel mult unu. Să se verifice că $F : R_1[x] \to R_1[x]$ definită prin $F(P(x)) = (x+2)P'(x) + P(x)$ este o aplicație liniară. Să se determine matricea lui F în baza $B = \{x,1\}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

**AL – XII. 147** Se consideră aplicația liniară $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$

$$f(\overline{x}) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3) \quad (\forall)\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$$

și bazele $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B' = \{f_1, f_2\}$

$$e_1 = (-1,1,1) \qquad f_1 = (1,1)$$
$$e_2 = (1,-1,1) \qquad f_2 = (-1,1)$$
$$e_3 = (1,1,-1)$$

Să se determine matricea aplicației relativă la bazele $B, B'$.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**AL – XII. 148** Se consideră aplicația liniară $f : R^3 \to R^3$ definită astfel:

$f(\overline{x}) = (-x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - x_3)$ şi bazele

$B = \{e_1, e_2, e_3\};\quad B' = \{f_1, f_2, f_3\}$

$e_1 = (1,2,1) \qquad f_1 = (1,1,1)$

$e_2 = (2,1,-1) \qquad f_2 = (1,1,0)$

$e_3 = (2,4,-2) \qquad f_3 = (1,0,0)$

Să se determine matricea aplicației liniare f în bazele $B$ şi $B'$.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -2 & -4 & -12 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**AL – XII. 149** Fie aplicația liniară $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$; $f(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$ $(\forall) x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Determinați toate valorile $\lambda \in \mathbf{R}$ pentru care există $x \in \mathbf{R}^3$, $x \neq 0$ astfel ca $f(x) = \lambda x$. Pentru valorile determinate ale lui $\lambda$ găsiți mulțimile $S_\lambda = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid f(x) = \lambda x\}$.

a) $\lambda = 1;\ S_1 = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$

b) $\lambda = -1;\ S_{-1} = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$

c) $\lambda = 1; \lambda = -1;\ S_1 = \{(\alpha, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\};\ S_{-1} = \{(\alpha, 0, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$

d) $\lambda = 1; \lambda = -1;\ S_1 = \{(\alpha, 0, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\};\ S_{-1} = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$

e) $\lambda = 1; \lambda = -1;\ S_1 = \{(\alpha, \beta, -\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\};\ S_{-1} = \{(\alpha, 0, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$

f) $\lambda = 1; \lambda = -1;\ S_1 = \{(\alpha, \beta, -\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\};\ S_{-1} = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$

**ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ**
**(simbol AM - XII)**

**AM - XII. 001** Fiind dată funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$, să se determine valorile parametrului real $k$ pentru care $f$ admite primitive pe $\mathbf{R}$.

a) $k=0$ b) $k=1$ c) $k=0$ sau $k=1$ d) $k=2$ e) $k\in\mathbf{R}$ f) nu există $k$

**AM - XII. 002** Se dă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(-\infty,0)\\ x^2, & x\in[0,2)\\ 2x, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$.

Care din următoarele funcții $F$ este o primitivă a lui $f$ pe $\mathbf{R}$ ?

a) $F(x)=\begin{cases}1, & x\in(-\infty,0)\\ 2x, & x\in[0,2)\\ 2, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$ b) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+1, & x\in(-\infty,0)\\ \frac{x^3}{3}, & x\in[0,2)\\ x^2-\frac{4}{3}, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases}1, & x\in(-\infty,0)\\ 2x-2, & x\in[0,2)\\ 2, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$ d) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & x\in(-1,0)\\ \frac{x^3}{3}, & x\in[0,2)\\ x^2-\frac{4}{3}, & x\in[2,3)\end{cases}$

e) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+1, & x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{x^3}{3}+1, & x\in[0,2)\\ x^2-\dfrac{1}{3}, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$

f) Nici una dintre funcțiile precedente nu este primitivă a lui $f$ pe $\mathbf{R}$

**AM - XII. 003** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x\le 0\\ e^x, & x>0\end{cases}$. Precizați care din următoarele funcții reprezintă o primitivă a funcției $f$:

$F_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x, & x\le 0\\ e^x, & x>0\end{cases}$ $\qquad F_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+c, & x\le 0\\ e^x+c, & x>0\end{cases}$

$F_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x, & x\le 0\\ e^x-1, & x>0\end{cases}$ $\qquad F_4(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x, & x\le 0\\ e^x+1, & x>0\end{cases}$

a) toate b) nici una c) $F_1$

d) $F_2$ e) $F_3$ f) $F_4$

**AM - XII. 004** Se dă funcția $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\in[-1,0)\\ x^2+2, & x\in[0,1]\end{cases}$.

Care din următoarele afirmații este adevărată ?

a) $F(x)=\begin{cases}e^x, x\in[-1,0)\\ 2x, x\in[0,1]\end{cases}$ este primitivă a lui $f$

b) $F(x)=\begin{cases}e^{2x}, & x\in[-1,0)\\ 2x+1, & x\in[0,1]\end{cases}$ este primitivă a lui $f$

c) $F(x)=\begin{cases}e^x+1, x\in[-1,0)\\ \dfrac{x^3}{3}+2, x\in[0,1]\end{cases}$ este primitivă a lui $f$

d) $F(x)=\begin{cases} e^x, & x\in[-1,0) \\ \dfrac{x^3}{3}+1, & x\in[0,1] \end{cases}$ este primitivă a lui $f$

e) $f$ nu are primitive pe $[-1,1]$

f) $F(x)=\begin{cases} e^x, & x\in[-1,0) \\ \dfrac{x^2}{2}+3, & x\in[0,1] \end{cases}$ este primitivă a lui $f$

**AM - XII. 005** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{e^x}, & \text{dacă } x\in(-\infty,1) \\ \dfrac{\ln^2 x}{x}, & \text{dacă } x\in[1,+\infty) \end{cases}$.

Să se afle primitivele funcției $f$.

a) $F(x)=\begin{cases} xe^{-x}+C, x\in(-\infty,1) \\ \dfrac{1}{3}\ln^3 x+C, x\in[1,+\infty) \end{cases}$

b) $F(x)=\begin{cases} xe^{-x}+C, x\in(-\infty,1) \\ \dfrac{1}{3}\ln^3 x-\dfrac{1}{e}+C, x\in[1,+\infty) \end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases} -xe^{-x}+\dfrac{1}{e}+C, x\in(-\infty,1) \\ \dfrac{1}{3}\ln^3 x+C, x\in[1,+\infty) \end{cases}$

d) $F(x)=\begin{cases} -xe^{-x}+C, x\in(-\infty,1) \\ \dfrac{1}{2}\ln x+C, x\in[1,+\infty) \end{cases}$

e) $F(x)=-xe^{-x}+\dfrac{1}{3}\ln^3 x+C, x\in\mathbf{R}$

f) $F(x)=\begin{cases} -x^2e^{-x}+C, x\in(-\infty,1) \\ \dfrac{1}{3}\ln^3 x-\dfrac{1}{e}+C, x\in[1,+\infty) \end{cases}$

**AM- XII. 006** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in\mathbf{Q} \\ 2^x & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q} \end{cases}$

Care din următoarele afirmații este corectă ?

a) f(x) admite primitiva $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & ,x\in\mathbf{Q} \\ \dfrac{2^x}{\ln 2} & ,x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q} \end{cases}$

b) f(x) admite primitiva $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+c_1 & ,x\in\mathbf{Q}\\ \dfrac{2^x}{\ln 2}+c_2 & ,x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$ $\quad c_1\neq c_2$

c) f(x) nu admite primitive

d) f(x) admite primitiva $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+c & ,x\in\mathbf{Q}\\ \dfrac{2^x}{\ln 2}+c & ,x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$

e) f(x) admite primitiva $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+1 & ,x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\\ \dfrac{2^x}{\ln 2}+1 & ,x\in\mathbf{Q}\end{cases}$

**AM - XII. 007** Să se stabilească dacă există primitivele $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ale funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$, iar în caz afirmativ să se calculeze.

a) $F(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C, x<0\\ x+C, \quad x\geq 0\end{cases}$

b) $F(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+1, x<0\\ x+1, \quad x\geq 0\end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+C, x<0\\ x+C, \quad x\geq 0\end{cases}$

d) nu admite primitive pe **R**

e) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C, x<0\\ x+C, \quad x\geq 0\end{cases}$

f) $F(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C_1, x<0\\ x+C_2, \quad x\geq 0\end{cases}$

**AM. XII. 008** Să se precizeze dacă funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\inf\limits_{t\le x}\left(t^2-t+1\right), & \text{dacă } x\le\dfrac{1}{2}\\[2mm] \sup\limits_{t\ge x}\left(-t^2+t+1\right), & \text{dacă } x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

admite primitive pe **R** şi în caz afirmativ să se determine primitivele.

a) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{5}{24}+C, x\le\dfrac{1}{2}\\[2mm] -\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+1, \quad x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

b) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x+C, \quad x\le\dfrac{1}{2}\\[2mm] -\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{1}{6}+C, x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x+1+C, x\le\dfrac{1}{2}\\[2mm] -\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x, \quad x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

d) Nu admite primitive

e) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{5}{24}+C, x\le\dfrac{1}{2}\\[2mm] -5x+C, \quad x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

f) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-x+C_1, x\le\dfrac{1}{2}\\[2mm] 5x+C_2, \quad x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

**AM - XII. 009** Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel ca funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}2+\ln(1-x), x\langle 0\\ \quad a, \quad x=0\\ 1+e^{-2x}, \quad x>0\end{cases}$$ să admită primitive pe **R** .

a) $a=1$ b) $a=-1$ c) $a=-2$ d) $a=2$ e) $a=3$ f) $a=\dfrac{1}{3}$

**AM - XII. 010** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}2-e^{-x}, x<0\\ m, \quad x=0\\ 1-3\sin x, x>0\end{cases}$.

Să se determine $m \in \mathbf{R}$ pentru care funcția $f$ admite primitive şi apoi să se determine primitivele corespunzătoare.

a) $m=2,\ F(x)=\begin{cases} 2x+e^{-x}+2+C, x<0 \\ 2x,\ x=0 \\ x+3\cos x+C, x>0 \end{cases}$

b) $m=1,\ F(x)=\begin{cases} 2x+e^{-x}+2+C, x\le 0 \\ x+3\cos x+C, \quad x>0 \end{cases}$

c) $m=1,\ F(x)=\begin{cases} 2x+e^{-x}+2+C, x<0 \\ C,\ \ x=0 \\ x+3\cos x+C, \quad x>0 \end{cases}$

d) $m=1,\ F(x)=\begin{cases} x, \quad x\le 0 \\ x+3\cos x+C, x>0 \end{cases}$

e) $m=0,\ F(x)=\begin{cases} 2x+e^{-x}+2+C, x\le 0 \\ x+3\cos x+C, \quad x>0 \end{cases}$

f) $m=3,\ F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+e^{-x}+C, x\le 0 \\ x+3\sin x+C, x>0 \end{cases}$

**AM - XII. 011** Fie $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=x|x-a|+|x-b|+|x-c|$ unde $a, b, c \in \mathbf{R}$. Care sunt valorile parametrilor $a$, $b$, $c$ pentru care $F$ este o primitivă a unei funcții $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ?

a) $a=b=c=-1$ b) $a=b=3, c=4$ c) $a=b=c=-3$
d) $a=-1, b=c=1$ e) $a=b=c=-2$ f) $a=-b=c=3$

**AM - XII. 012** Să se determine primitivele funcției $f:[0,2\pi]\to\mathbf{R}$, unde

$$f(x)=\sqrt{1+\cos x}\ .$$

a) $2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}+C$

b) $\begin{cases} 2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}+C_1, x\in[0,\pi] \\ -2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}+C_2, x\in(\pi,2\pi] \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}+C_1, x\in[0,\pi] \\ -2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}+C_1+4\sqrt{2}, x\in(\pi,2\pi] \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}, x\in[0,\pi] \\ -2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}+C, x\in(\pi,2\pi] \end{cases}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}+C$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}+C$

**AM - XII. 013** Să se stabilească dacă există , şi în caz afirmativ să se afle primitivele funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-2+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$ .

a) nu admite primitive

b) $F(x)=\begin{cases}-\frac{x^2}{2}+2x+C_1, x\in(-\infty,1] \\ -\frac{x^2}{2}+C_2, \quad x\in(1,3] \\ 3\frac{x^2}{2}+6x+C_3, x\in(3,+\infty)\end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases}-\frac{x^2}{2}+2x+C, x\in(-\infty,1] \\ \frac{x^2}{2}+1+C, x\in(1,3] \\ 3\frac{x^2}{2}-6x+10+C, x\in(3,+\infty)\end{cases}$

d) $F(x)=\begin{cases}-\frac{x^2}{2}+2x+C, x\in(-\infty,3] \\ 3\frac{x^2}{2}+6x+C, x\in(3,+\infty)\end{cases}$

e) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+2x+C, x\in(-\infty,1] \\ 2x+3+C, x\in(1,3] \\ 3\frac{x^2}{2}+6x+C, x\in(3,+\infty)\end{cases}$

f) $F(x)=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2-6x+9}}+C$

**AM - XII. 014** Se consideră funcția $f:(0,\,1)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^3+3x^2-9x-27}{x^2-2x+1}$.

Să se găsească numerele reale *m*, *n* şi *p* astfel încât funcția $F:(0,1)\to\mathbf{R}$, $F(x)=\frac{mx^3+nx^2+px}{x-1}$ să fie primitivă pentru $f$ .

a) $m=1, n=\frac{9}{2}, \ p=27$ b) $m=\frac{1}{2}, n=-\frac{9}{2}, \ p=27$ c) $m=\frac{1}{2}, n=\frac{9}{2}, \ p=27$

d) $m=-\frac{1}{2}, n=\frac{9}{2}, \ p=27$ e) $m=1, n=27, \ p=9$ f) $m=2, n=3, \ p=\frac{1}{2}$

**AM - XII. 015** Să se determine parametrii reali $a$, $b$, $c$ astfel încât funcția

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{axe^{nx}+bx^2+c}{e^{nx}+1}$$ să admită primitive pe $\mathbf{R}$.

a) $a, b, c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ b) $a,b \in \mathbf{R}$, $c = 0$ c) $a = 1$, $b = 1$, $c = -3$

d) $a = 1$, $b, c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ e) $a = 1$, $b,c \in \mathbf{R}$ f) $a, c \in \mathbf{R}$, $b = 0$

**AM - XII. 016** Să se determine relațiile dintre $a$, $b$, $c$, $A$, $B$, $C$, astfel încât

primitivele $\int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)^2 dx$ să fie funcții raționale.

a) $A\cdot B = B\cdot C = C\cdot A$, $a\cdot b = b\cdot c = c\cdot a$

b) $A = B\cdot C$, $a = b\cdot c$

c) $A = B = C$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

d) $A + B + C = 0$, $a + b + c = 0$

e) $A(b - c) = B(c - a) = C(a - b)$

f) $A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c = 0$

**AM - XII. 017** Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\sin^2(\ln x)$. Care din următoarele funcții reprezintă o primitivă a lui $f$ pe intervalul $(0,+\infty)$ ?

a) $F_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x}{10}\cos(2\ln x)-\frac{x}{5}\sin(2\ln x)$ b) $F_2(x)=x\cos^2(\ln x)-2x\sin^2(\ln x)$

c) $F_3(x)=x+\frac{1}{2}\cos(2\ln x)+\frac{3}{2}x\sin(2\ln x)$ d) $F_4(x)=x\sin^2(\ln x)$

e) $F_5(x)=\frac{x}{2}+x\cos(2\ln x)$ f) $F_6(x)=\frac{x}{2}+x\sin(2\ln x)$

**AM – XII. 018** Calculați integrala nedefinită

$\int\frac{x+1}{x}dx$ pentru orice $x\in(a,b)$, unde $0\notin(a,b)$.

a) $1+\ln x+C$ b) $x-\frac{1}{x^2}+C$ c) $x+\frac{1}{x^2}+C$

d) $x+\ln|x|+C$ e) $\ln|x+1|+C$ e) $\dfrac{x+1}{x}+C$

**AM – XII. 019** Calculați integrala nedefinită

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}},\ x>0.$$

a) $\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}}+C$ b) $xe^{\sqrt{x}}+C$ c) $-\dfrac{2}{e^{\sqrt{x}}}+C$

d) $2e^{-\sqrt{x}}+C$ e) $\dfrac{1}{2}e^{\sqrt{x}}+C$ f) $\dfrac{1}{2e^{\sqrt{x}}}+C$

**AM – XII. 020** Să se calculeze integrala nedefinită

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2}dx$$

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}arctg\dfrac{e^x}{\sqrt{2}}+C$ b) $\dfrac{1}{2}arctg\dfrac{e^x}{2}+C$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}arctg\dfrac{e^x}{2}+C$

d) $\ln\left(e^{2x}+2\right)+C$ e) $\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+2\right)+C$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(e^{2x}+2\right)+C$

**AM – XII. 021** Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx,\ x<0$.

a) $\arcsin\left(e^{-x}\right)+C$ b) $\arcsin\left(e^{x}\right)+C$ c) $\arcsin\left(e^{2x}\right)+C$

d) $\arccos\left(e^{x}\right)+C$ e) $\arccos\left(e^{-x}\right)+C$ f) $\mathrm{arctg}\left(e^{x}\right)+C$

**AM – XII. 022** Să se calculeze $\displaystyle\int \sqrt{1+tg^2x}\,dx$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

a) $\ln\left(tgx-\frac{1}{\cos x}\right)+C$ b) $\ln\left(tgx+\frac{1}{\cos x}\right)+C$

c) $\ln\left(tgx+\frac{1}{\sin x}\right)+C$ d) $\ln\left(tgx-\frac{1}{\sin x}\right)+C$

e) $\ln(tgx+\cos x)+C$ f) $\ln(tgx-\cos x)+C$

**AM – XII. 023** Să se calculeze primitivele funcției:

$$f(x)=x^n\cdot\ln x,\ x>0,\ \text{n – număr natural } (n\geq 1).$$

a) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x+C$ b) $\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x-1)+C$ c) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C$

d) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x$ e) $\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x-1)$ f) $-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C$

**AM – XII. 024** Să se calculeze $I=\int\sin(3\ln x)dx$.

a) $I=-\cos(3\ln x)+C$ b) $I=\frac{x}{10}[\sin(3\ln x)-3\cos(3\ln x)]+C;$

c) $I=\cos(3\ln x)+C;$ d) $I=3\ln x[\sin(3\ln x)-3\cos(3\ln x)]+C;$

e) $I=\frac{\ln x}{5}[\cos(3\ln x)-\sin(3\ln x)]+C;$ f) $I=\frac{\cos(3\ln x)}{3\ln x}+C$

**AM – XII. 025** Să se calculeze primitivele funcției: $f(x)=(x^2-2x-1)e^x,\ x\in\mathbf{R}$

a) $(x^2-2x-1)e^x+C$ b) $(x^2-4x+3)e^x+C$ c) $(x^2-1)e^x+C$

d) $(x^2-2x-1)e^x$ e) $(x^2-4x-1)e^x$ f) $(x^2-1)e^x$

**AM – XII. 026** Să se calculeze

$$I=\int a^{x^3+3x}\cdot\ln a^{x^5+4x^3+3x}dx,$$

unde $x \in \mathbf{R}$ şi $a > 0$.

a) $\frac{1}{3}a^{x^3+3x}\left(x^3+3x+\frac{1}{\ln a}\right)+C$ b) $a^{x^3+3x}\left(x^3+3x+\ln a\right)+C$

c) $\frac{1}{3}a^{x^3+3x}\cdot \ln a + C$ d) $\frac{1}{3}a^{x^3+3x}\left(x^3+3x-\frac{1}{\ln a}\right)+C$

e) $a^{x^3+3x}\left(x^3+3x-\ln a\right)+C$ f) $\frac{1}{3}\cdot a^{x^3+3x}\cdot\frac{1}{\ln a}+C$

**AM – XII. 027** Să se calculeze

$$I=\int\left[1+xf'(x)\right]e^{f(x)}dx.$$

a) $I = xe^{f(x)}+C$; b) $I = xe^{f(x)}$; c) $I = e^{f(x)}+C$;
d) $I = x + C$; e) $I = f(x)+C$; f) $I = x+e^{f(x)}$; g) $I = C$.

**AM – XII. 028** Să se calculeze primitivele funcției

$$f:(1,2)\cup(2,+\infty)\to\mathbf{R},\quad f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-3x+2}.$$

a) $\begin{cases}2\ln\left(x^2-3x+2\right)+C_1\\ 2\ln\left(x^2-3x+2\right)+C_2\end{cases}$ b) $\ln\frac{x-2}{x-1}+C$ c) $\begin{cases}\ln\frac{x-1}{x-2}+C_1\\ \ln\frac{x-1}{x-2}+C_2\end{cases}$

d) $\begin{cases}x+3\ln\frac{(x-2)^2}{x-1}+C_1\\ x+3\ln\frac{(x-2)^2}{x-1}+C_2\end{cases}$ e) $\begin{cases}x+2\ln\frac{x-2}{x-1}+C_1\\ x+2\ln\frac{x-2}{x-1}+C_2\end{cases}$ f) $x+\ln\frac{(x-2)^2}{x-1}+C$

**AM - XII. 029** Să se calculeze : $\int\frac{x^4}{x^3-1}dx$ pentru orice $x \in (a, b)$, unde $1 \notin (a, b)$.

a) $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

b) $\frac{1}{6}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{2}}+C$

c) $\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+C$

d) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x+1|+\operatorname{arctg}x+C$ e) $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+C$

f) $\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$

**AM – XII. 030** Să se determine mulțimea primitivelor următoarei funcții trigonometrice

$f:(0,\pi)\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{1}{\sin x}$

a) $\ln|ctgx|+C$ b) $\frac{1}{\cos x}+C$ c) $\ln|tgx|+C$

d) $\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$ e) $\ln\left|ctg\frac{x}{2}\right|+C$ f) $\frac{1}{\ln(\cos x)}+C$

**AM - XII. 031** Să se calculeze $I=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$, unde $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$.

a) $I=\ln\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$ b) $I=\frac{1}{2}\left(x^2-\ln|\sin x-\cos x|\right)+C$

c) $I=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$ d) $I=\frac{1}{2}\left(x-\ln|\sin x+\cos x|\right)+C$

e) $I=\frac{1}{2}\left(\ln|\sin x-\cos x|\right)+\operatorname{arctg}x+C$ f) $I=\frac{1}{2}\left(x+\ln|\sin x+\cos x|\right)+C$

**AM - XII. 032** Să se determine toate polinoamele $P\in\mathbf{R}[X]$ astfel încât pentru orice $x$ real să avem: $\int_1^x P(t)dt=P(x)\cdot P(2-x)$.

a) $P(x)= k(x-1),\ k\in\left\{-\frac{1}{2},0\right\}$

b) $P(x)=k(x+1),\ k\in\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$

c) $P(x)=k\left(x+1\right),\ k\in\left\{-\frac{1}{2},0\right\}$

d) $P(x)=2x-1$

e) $P(x)=1$

f) $P(x)=k\left(x-1\right),\ k\in\left\{-1,1\right\}$

**AM - XII. 033** Să se calculeze: $I=\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$

a) $I=\arcsin(2\sin x)+C$

b) $I=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\ \operatorname{tg} x\right)+C$

c) $I=2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\ \operatorname{tg} x\right)+C$

d) $I=-\arccos\left(\frac{1}{2}\cos x\right)+C$

e) $I=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\ \operatorname{tg} x\right)+C$

f) $I=x+\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\left(\sqrt{2}\ \operatorname{tg} x\right)+C$

**AM - XII. 034** Să se calculeze $\int\frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx$.

a) $\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}+C$

b) $\frac{1}{2}\ln\frac{2+\cos x}{1-\cos x}+C$

c) $\frac{1}{4}\ln\frac{2-\cos x}{2+\cos x}+C$

d) $\ln\left(1+\cos^2 x\right)+C$

e) $\ln\frac{1+\sin x}{1-\cos x}+C$

f) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\sin x}+C$

**AM - XII. 035** Se dau matricile $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \cos x & \sin x\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}\cos x & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Să se calculeze: $\int \det^2(A\cdot B)dx$, unde $x\in\mathbf{R}$.

a) $x+\cos^2 x+C$

b) $x+\cos x+\sin x+C$

c) $\cos 2x+C$

d) $x+\sin^2 x+C$

e) $x-\cos x-\sin x+C$

f) $\frac{x^2}{2}+\cos^2 x-\sin x+C$

**AM - XII. 036** Să se calculeze $\int \frac{x+\sin x-\cos x-1}{x+e^x+\sin x}dx, x \in \mathbf{R}$.

a) $e^x \sin x+\cos x+C$ b) $x-e^x \sin x+\ln|\sin x|+C$

c) $x+\ln|\sin x|+e^x+C$ d) $x-\ln|x+e^x+\sin x|+C$

e) $x-\cos x+x\sin x+C$ f) $x+\ln|x-e^x+\sin x|+C$

**AM - XII. 037** Să se calculeze: $\int \frac{2x^2e^{x^2}-x^2e^{2x^2}-2xe^{x^2}+e^{x^2}-1}{xe^{x^2}+1}dx.$

a) $\ln\left|xe^{x^2}-1\right|+\frac{e^{x^2}}{2}+x+C$ b) $\ln\left|xe^{x^2}+1\right|-\frac{e^{x^2}}{2}-x+C$ c) $xe^{x^2}-arctg\, e^{x^2}+C$

d) $\ln\left|xe^{x^2}\right|+e^{-x^2}+C$ e) $e^{x^2}+x\ln|x|-x+C$ f) $\ln\left|x^2+e^x\right|+e^{x^2}+C$

**AM – XII. 038** Să se calculeze

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^{-2x}}dx, \quad x \neq 0$$

a) $4\ln\frac{|e^x-1|}{e^x+1}+\frac{1}{2}arctg(e^x)+C$ b) $2\ln\frac{|e^x-1|}{e^x+1}+arctg(e^x)+C$

c) $\frac{1}{4}\ln\frac{|e^x-1|}{e^x+1}+\frac{1}{2}arctg(e^x)+C$ d) $\frac{1}{2}\ln\frac{|e^x-1|}{e^x+1}-\frac{1}{2}arctg(e^x)+C$

e) $\frac{1}{2}\ln\frac{e^x+1}{|e^x-1|}+\frac{1}{2}arctg(e^x)+C$ f) $\frac{1}{2}\ln\frac{e^x+1}{|e^x-1|}-\frac{1}{2}arctg(e^x)+C$

**AM- XII. 039** Să se determine primitivele funcției

$$f(x)=\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}, \quad x \in [3,8].$$

a) $F(x)=\frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C$  b) $F(x)=x+C$  c) $F(x)=\sqrt{x+1}+C$

d) $F(x)=2\sqrt{x+1}+C$  e) $F(x)=\begin{cases} x+C, & x\in[3,5] \\ \frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3}+5-8\sqrt{6}+C, & x\in[5,8] \end{cases}$

f) $F(x)=-5x+C$

**AM – XII. 040** Să se calculeze integrala

$$I=\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\cdot dx$$

a) $I=\ln\frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}}-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C;$

b) $I=\ln\frac{x+2+\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x+1}}+arctg\sqrt{x+1};$

c) $I=\ln\frac{x+\sqrt{x+1}}{x+1}+C;$  d) $I=x+arctg2\sqrt{x+1};$

e) $I=\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}+arctg\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3}}+C;$  f) $I=\sqrt{x+1}-tgx+C.$

**AM – XII. 041** Să se calculeze primitivele funcției $f:(0,\infty)\to \mathbf{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

a) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2}+\frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x}\right)+C;$  b) $\ln\left(\frac{x^2+2}{2x^2}+\sqrt{x^4+4x^2+1}\right)+C;$

c) $\dfrac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x}+C$; d) $-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2}+\dfrac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2}\right)+C$;

e) $2\sqrt{x^4+x^2+1}+C$; f) $\dfrac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}+C$.

**AM – XII. 042** Să se determine constantele reale a,b,m astfel încât

$$\int f(x)dx=(ax+m)\sqrt{1+x^2}+b\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

unde $f(x)=\dfrac{x^2+mx+5}{\sqrt{1+x^2}}$

a) $a=b=m=1$ b) $a=\dfrac{1}{2}; b=\dfrac{9}{2}; m\in\mathbf{R}$ c) $a=\dfrac{1}{2}; b=\dfrac{1}{2}; m\in\mathbf{R}$

d) $a=1; b=\dfrac{9}{2}; m=\dfrac{9}{2}$ e) $a\in\mathbf{R}; b=\dfrac{9}{2}; m=\dfrac{1}{2}$ f) $a=\dfrac{9}{2}; b=\dfrac{1}{2}; m\in\mathbf{R}$.

**AM – XII. 043** Să se calculeze integrala :

$$I=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx,\quad x>0.$$

a) $I=\sqrt{1+X^2}+C$; b) $I=\sqrt{1+x^2}-\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}+C$;

c) $I=\sqrt{1+x^2}$; d) $I=\sqrt{1+x^2}-\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$;

e) $I=x+\sqrt{1+x^2}+C$; f) $I=\sqrt{1+x^2}+\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}+C$.

**AM - XII. 044** Să se stabilească o relație de recurență pentru integralele:

$$I_n,\ n\in\mathbf{N},\ I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

a) $I_n = -x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$

b) $I_n = (n+1)x^n\sqrt{1-x^2}\,I_{n-1}$

c) $I_n = x^{n-1}\sqrt{1-x^2} - (n+1)(I_n - I_{n-1})$

d) $I_n = (n-1)I_{n-1} + I_{n-2}$

e) $I_n = x^{n+1}\sqrt{1-x^2} + n(I_{n-1} - I_{n-2})$

f) $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$

**AM – XII. 045** Să se stabilească o relație de recurență pentru integralele $I_n$, $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \int (\sin x)^n \, dx$.

a) $I_n = \dfrac{n+1}{n} I_{n-2} + \dfrac{1}{n}(\sin x)^{n-1} \cdot \cos x,\ n \geq 2;$

b) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2} - \dfrac{1}{n}(\sin x)^{n-1}$, $n \geq 2$

c) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2} - \dfrac{1}{n}(\sin x)^{n-1} \cos x,\ n \geq 2;$

d) $I_n = \dfrac{n-1}{2} I_{n-2}$, $n \geq 2$

e) $I_n = \dfrac{n-1}{2} I_{n-2} - \dfrac{n}{2}(\sin x)^{n-1} \cos x,\ n \geq 2;$

f) $I_n = \dfrac{n+1}{2} I_{n-2} - \dfrac{n}{2} \sin x (\cos x)^{n-1}$, $n \geq 2$

**AM - XII. 046** Să se calculeze: $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, unde $p \in \mathbf{N}^*$.

a) $L = 1$ b) $L = 0$ c) $L = \dfrac{1}{p+1}$ d) $L = e$ e) $L = +\infty$ f) $L = \dfrac{1}{p}$

**AM - XII. 047** Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$.

a) $L = 0$ b) $L = \dfrac{\pi}{4}$ c) $L = 1$ d) $L = e$ e) $L = \dfrac{\pi}{2}$ f) $L = 2$

**AM - XII. 048** Să se calculeze: $L=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$.

a) $L=1$ b) $L=0$ c) $L=\frac{1}{2}$ d) $L=-\frac{1}{2}$ e) $L=\mathrm{e}$ f) $L=\frac{1}{4}$

**AM - XII. 049** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{n^2+k^2}}$.

a) $1+\sqrt{2}$ b) $1-\sqrt{2}$ c) $\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

d) $1-\sqrt{2}+\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)$ e) $1-\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$ f) $1+\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

**AM - XII. 050** Care este limita şirului cu termen general: $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k)^3+n^3}$ ?

a) $\frac{1}{12}\ln 3$ b) $\frac{1}{2}\ln 7$ c) $\frac{1}{6}\ln 3$ d) $\frac{1}{12}\ln 13$ e) $\frac{1}{3}\ln 4$ f) $\frac{1}{4}\ln 2$

**AM - XII. 051** Care este limita şirului cu termenul general: $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^2-k^2}$ ?

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$ b) $1+\ln 2$ c) $-1+\ln 3$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{3}{2}$ f) $-1+\ln 2$

**AM - XII. 052** Să se calculeze limita şirului cu termenul general:

$$a_n=\frac{3}{n}\left[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right].$$

a) 0 b) 2 c) 1 d) $e$ e) 3 f) $\frac{1}{2}$

**AM - XII. 053** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde

$$a_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(k^2+n^2\right) + \ln n^2 - 2n \ln n + \ln 2\right].$$

a) $\ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$ b) $\ln 3 + \frac{\pi}{2} - 3$ c) $\ln 2 + \frac{\pi}{4}$

d) $3\ln 2 + \frac{\pi}{4}$ e) $2\ln 2 - \frac{\pi}{2}$ f) $\ln 2 - \frac{\pi}{2} + 2$

**AM - XII. 054** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)\sqrt{1-\frac{k^4}{n^4}}$.

a) 1 b) 2 c) $\pi$ e) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{2}$ f) 0

**AM - XII. 055** Care din următoarele funcții nu este integrabilă pe intervalul specificat ?

a) $f(x) = \begin{cases} x, & x<1 \\ x+1, & x\geq 1 \end{cases}$ pe $[-1,1]$ b) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ pe $[-1,1]$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x}}, & x<1 \\ 0, & x\geq 1 \end{cases}$ pe $[0,1]$ d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pe $[1,2]$

e) $f(x) = e^{-x^2}$ pe $[-1,1]$ f) $f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$ pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

**AM – XII. 056** Să se calculeze $\int\limits_{-1}^{2} x^3 dx.$

a) 4 b) $\frac{15}{4}$ c) 3 d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{17}{4}$ f) 2

**AM – XII. 057** Să se calculeze: $\int_0^3 (x+2)dx$ .

a) 3 b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{20}{3}$ d) $\frac{21}{2}$ e) $\frac{9}{2}$ f) 6

**AM – XII. 058** Să se calculeze $I = \int_0^1 \left( x^{\frac{3}{2}} + 1 \right) dx$

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{5}{2}$ c) 5 d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{5}{7}$

**AM - XII. 059** Presupunând că funcțiile implicate mai jos sunt toate integrabile pe $[a,b]$, care din următoarele egalități este adevărată ?

a) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$ b) $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$

c) $\int_a^b [f(x)]^n dx = \left[ \int_a^b f(x)dx \right]^n$ d) $\int_a^b \left( \sum_{k=1}^n C_k f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^n \left[ C_k \int_a^b f_k(x)dx \right]$

$(C_1, C_2, \ldots, C_n$ constante)

e) $\int_a^b \sqrt{f(x)}dx = \sqrt{\int_a^b f(x)dx}$ f) $\int_a^b \ln|f(x) \cdot g(x)| dx = \ln \int_a^b |f(x)| dx + \ln \int_a^b |g(x)| dx$

**AM - XII. 060** Fie funcția $f : [1,3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ . Să se determine $c \in (1,3)$ astfel încât $\int_1^3 f(x)dx = 2f(c)$.

a) $c=\frac{1}{3}$ b) $c=\pm\sqrt{\frac{13}{3}}$ c) $c=\sqrt{\frac{13}{3}}$

d) $c=\sqrt{\frac{28}{3}}$ e) $c=\pm\sqrt{\frac{28}{3}}$ f) $c=2$

**AM - XII. 061** Ştiind că $\int_1^5 P(x)dx=-1$ şi $\int_3^5 P(x)dx=3$ , să se calculeze

$\int_3^1 [2P(t)+P(2t-1)]dt$ .

a) 4 b) 9 c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{19}{2}$ e) $\frac{17}{2}$ f) Nu are sens o astfel de integrală

**AM - XII. 062** Să se calculeze integrala $I=\int_0^2 f(x)dx$ ştiind că $f(0)=1$ , iar

$$f'(x)=\begin{cases}1-x & \text{pentru } x\in[0,1]\\ x-1 & \text{pentru } x\in(1,2]\end{cases}.$$

a) $I=1$ b) $I=2$ c) $I=3$ d) $I=\frac{3}{2}$ e) $I=\frac{2}{3}$ f) $I=0$

**AM - XII. 063** Să se calculeze $\int_{-1}^{1}\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}dx$

a) e b) 1 c) $\frac{1}{4}$ d) 4 e) ln(e+1) f) $\ln\frac{e+1}{e}$

**AM - XII. 064** Să se calculeze $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x+1)}dx$

a) 1 b) $\frac{\pi}{4}$ c) e-1 d) $\ln\sqrt{2}$ e) ln2 f) $\frac{\pi}{2}$

**AM XII. 065** Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{7\pi}{6}\right)\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\ln(1+2\sin x)$.

Să se calculeze integrala definită

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f''(x)dx.$$

a) –2 b) –3 c) –1 d) 2 e) 3 f) 1.

**AM - XII. 066** Să se calculeze $F(a)=\int_0^1 \left|x^2+a\right| dx,\ a\in\mathbf{R}$.

a) $F(a)=\begin{cases} a+\frac{1}{3}, & a\le 0\\ a-\frac{1}{3}, & a>0\end{cases}$

b) $F(a)=\begin{cases} -a-\frac{1}{3}, & a\le -1\\ -\frac{4}{3}a\sqrt{-a}+a+\frac{1}{3}, & -1<a\le 1\\ a-\frac{1}{3}, & 1<a\end{cases}$

c) $F(a)=\begin{cases} -a-\frac{1}{3}, & a\le -1\\ -\frac{4}{3}a\sqrt{-a}+a+\frac{1}{3}, & -1<a\le 0\\ a+\frac{1}{3}, & 0<a\end{cases}$

d) $F(a)=\begin{cases} -a-\frac{1}{3}, & a\le -1\\ -\frac{4}{3}a\sqrt{a}+\frac{1}{3}, & -1<a<1\\ a+\frac{1}{3}, & 1\le a\end{cases}$

e) $F(a)=\begin{cases} a+\frac{1}{3}, & a<0\\ a\sqrt{a}+a+\frac{1}{3}, & a\ge 0\end{cases}$

f) $F(a)=\begin{cases} a-\frac{1}{3}, & a\le -1\\ \frac{4}{3}a\sqrt{a}+a, & -1<a<1\\ a-\frac{1}{3}, & 1\le a\end{cases}$

**AM - XII. 067** Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde $f(x) = \begin{cases} x, \text{ pentru } x \leq 1 \\ \dfrac{x^2+1}{2}, \text{ pentru } x > 1 \end{cases}$ şi $I = \int_0^1 \dfrac{f(e^{-x})}{f(e^x)} dx$.

Precizați care din răspunsurile de mai jos este corect:

a) $I$ nu există b) $I = 2 - \dfrac{2}{e} - 2\operatorname{arctg} e + \dfrac{\pi}{2}$ c) $I = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e^2}$

d) $I = 1$ e) $I = e$ f) $I = \ln 2 + \operatorname{arctg} e + \dfrac{1}{e}$

**AM - XII. 068** Calculați valoarea integralei: $I = \int_{-2}^{2} \left(|x-1| + |x+1|\right) dx$.

a) 8 b) 5 c) 10 d) 9 e) 7 f) 18

**AM - XII. 069** Să se calculeze valoarea integralei: $I = \int_1^3 \dfrac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2} dx$.

a) $I = \dfrac{5}{12}$ b) $I = \dfrac{1}{2}$ c) $I = \dfrac{1}{3}$ d) $I = \dfrac{1}{12}$ e) $I = \dfrac{1}{4}$ f) $I = \dfrac{1}{10}$

**AM - XII. 070** Fie $I = \int_0^1 \dfrac{x^n + x^4 + 1}{x^2 + x + 1} dx$. Precizați pentru ce valori naturale ale lui $n$, $I$ este un număr rațional.

a) pentru orice $n \in \mathbf{N}$ b) nu există $n \in \mathbf{N}$ astfel ca $I \in \mathbf{Q}$
c) $n = 3k$, unde $k \in \mathbf{N}$ d) $n = 3k + 1$, unde $k \in \mathbf{N}$
e) $n = 3k + 2$, unde $k \in \mathbf{N}$ f) $n = 2k$, unde $k \in \mathbf{N}$

**AM - XII. 071** Fie $P$ o funcție polinomială de gradul $n$ cu rădăcinile 1, 2,...,$n$. Să se calculeze $I=\int_{n+1}^{n+2}\frac{P'(x)}{P(x)}dx$ .

a) $I = 2n + 3$ b) $I = n$ c) $I = n - 1$ d) $I = 1$ e) $I = \ln(n + 1)$ f) $I = \frac{1}{n}$

**AM - XII. 072** Să se calculeze integrala: $I=\int_{2}^{3}\frac{x^2-2x+5}{x-1}dx$ .

a) $I=\frac{3}{2}-4\ln 2$ b) $I=-\frac{1}{2}-4\ln 2$ c) $I=-\frac{3}{2}+4\ln 2$

d) $I=\frac{3}{2}+4\ln 2$ e) $I=-\frac{1}{2}+4\ln 2$ f) $I=1+3\ln 2$

**AM – XII. 073** Să se calculeze $I=\int_{6}^{11}\frac{12x^2-70x+98}{x^3-9x^2+26x-24}dx.$

a) $I=\ln(3^2\cdot 2\cdot 7^5)$; b) $I=\ln(3\cdot 2\cdot 7^3)$; c) $I=\ln(3^3\cdot 2\cdot 7)$;

d) $I=\ln(3^2\cdot 7^5)$; e) $I=\ln(3\cdot 2^4\cdot 7^2)$; f) $I=\ln(3^2\cdot 2^2\cdot 7^2)$

**AM - XII. 074** Să se calculeze $\int_{1}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$ .

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $2+\sqrt{5}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) 0 e) $\sqrt{5}$ f) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

**AM – XII. 075** Să se calculeze $\int_{0}^{1}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

a) 0; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{\pi}{3}$; e) $\frac{\pi}{2}$; f) $\frac{3\pi}{2}$;

**AM - XII. 076** Să se calculeze : $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}$ .

a) $\ln\sqrt{2}+\operatorname{arctg}2$ b) $\ln\sqrt[4]{2}+\frac{\pi}{8}$ c) $\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}$

d) $\ln 2$ e) $\frac{\pi}{8}$ f) $\ln\sqrt[3]{2}+\pi$

**AM - XII. 077** Să se calculeze : $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^{10}+1)}$ .

a) $\ln\frac{3}{2}$ b) $\ln\frac{4032}{3107}$ c) $\ln\frac{2100}{103}$

d) $\ln\frac{e}{2}$ e) $\frac{1}{10}\ln\frac{2048}{1025}$ f) $\ln\frac{140}{343}$

**AM - XII. 078** Să se calculeze : $I=\int_0^1 \frac{2x^3+3x^2+x}{(x^2+x+1)^{1993}}dx$ .

a) $I=\frac{1}{1991\cdot 1992}\left(1-\frac{3985}{3^{1992}}\right)$ b) $I=\frac{1}{1991\cdot 1992}$

c) $I=\frac{1}{1991\cdot 1992}\left(1-\frac{1}{3^{1992}}\right)$ d) $I=\frac{1}{1991\cdot 1992}-\frac{1}{3^{1992}}$

e) $I=\frac{1}{1991}+\frac{1}{1992}$ f) $I=3^{\frac{1}{1992}}\left(\frac{1}{1991}+\frac{1}{1992}\right)$

**AM - XII. 079** Care este valoarea integralei : $\int_{-9}^{9} \frac{x^5}{x^8+1}dx$ ?

a ) $2\ln(9^8+1)$ b) arctg 2 c) 1 d) 0 e) –1 f) $\frac{1}{8}$

**AM - XII. 080** Să se calculeze valoarea integralei: $I=\int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx$ .

a) $I=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$ b) $I=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2}$ c) $I=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

d) $I=2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$ e) $I=2\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$ f) $I=2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}-2\right)$

**AM - XII. 081** Care este valoarea integralei: $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2-15}}$ ?

a) 0 b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\pi$ e) $\frac{5}{3}$ f) 1

**AM - XII. 082** Să se calculeze integrala : $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ .

a) $2(\pi+1)$ b) $2(\pi-1)$ c) $2\pi$ d) $\pi$ e) $\frac{\pi}{2}$ f) $3\pi$

**AM - XII. 083** Să se calculeze : $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}dx$ .

a) 5 b) 2 c) $\frac{3}{2}$ d) 3 e) $\frac{5}{2}$ f) 1

**AM - XII. 084** Valoarea integralei $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ este :

a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) 0 d) $-1$ e) $\frac{\pi}{6}$ f) $\frac{\pi}{2}$

**AM - XII. 085** Valoarea integralei $I=\int_0^3 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$ este:

a) $\frac{\pi}{2}$  b) $\frac{\pi}{4}$  c) $2\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{2}$

d) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$  e) $\frac{\pi}{6}-\arcsin\frac{1}{4}$  f) $\operatorname{arctg}2+\frac{\pi}{2}$

**AM - XII. 086** Să se calculeze: $I=\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\left|\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right|}$.

a) $I=1$  b) $I=\frac{2}{3}$  c) $I=0$  d) $I=-1$  e) $I=\frac{\pi}{2}$  f) $I=-\frac{\pi}{2}$

**AM - XII. 087** Să se calculeze integrala definită $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$

a) $\frac{1}{3}\ln 2$  b) $\frac{1}{2}\ln 3$  c) $\ln 4$  d) $3\ln 2$  e) $2\ln 3$  f) $\ln 8$

**AM - XII. 088** Să se calculeze : $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x dx$ .

a) $\frac{1}{4}$  b) $\frac{1}{8}$  c) 1  d) $\frac{1}{2}-\ln 2$  e) $\ln\sqrt{\frac{e}{2}}$  f) $\ln(\sqrt{2}-1)$

**AM - XII. 089** Se consideră integrala $I=\int_0^{\pi/2} x\sin^3 x dx$ . Care din următoarele afirmații este adevărată ?

a) $I=\frac{5}{9}$  b) $I=\frac{5}{36}$  c) $I=\frac{29}{36}$  d) $I=\frac{8}{9}$  e) $I=\frac{7}{9}$  f) $I=\frac{10}{9}$

**AM - XII. 090** Determinați valoarea integralei: $I=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{4\cos^2 x+\sin^2 x}dx$ .

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) ln 2 d) $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$ e) 1 f) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$

**AM – XII. 091** Să se calculeze : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{1+\cos x}dx.$

a) $\frac{\pi-5}{4}$ b) $\frac{3\pi-8}{4}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi-10}{2}$ e) 0 f) $\pi$

**AM – XII. 092** Să se calculeze

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{tgx}{1+\sqrt{2}\cos x}dx.$$

a) $I=-\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; b) $I=\ln\frac{4}{2+\sqrt{2}}$ c) $I=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\ln 2$;

d) $I=\ln\frac{4}{2-\sqrt{2}}$; e) $I=\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)\ln 2$; f) $I=\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\ln 2$ .

**AM – XII. 093** Calculați $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx$ și $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx$

a) $I=\frac{\pi}{8}; J=\frac{3\pi}{8}$ b) $I=\frac{\pi}{6}; J=\frac{\pi}{3}$ c) $I=\frac{\pi}{5}; J=\frac{3\pi}{10}$

d) $I=J=\frac{\pi}{2}$; e) $I=J=\frac{\pi}{4}$; f) $I=J=\pi$

**AM – XII. 094** Ştiind că m este un număr natural impar, să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(m-1)x \sin mx \sin(m+1)x \, dx$$

a) 0 b) $\frac{2(m^2-1)}{3m(m^2-4)}$ c) $\frac{m^2-1}{12m(m^2-4)}$

d) $\frac{4m^2-1}{3m(m^2-4)}$ e) $\frac{1}{3m}$ f) $\frac{m^2-1}{3m}$

**AM - XII. 095** Să se calculeze $\int_0^1 (x - \text{tg}\, x \cdot \sec x)dx$.

a) $\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}$ b) $1-\pi$ c) $\frac{3}{2}-\cos 1$ d) $\frac{3}{2}-\sec 1$ e) 0 f) tg 1

**AM - XII. 096** Să se calculeze integrala: $I = \int_0^1 \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

a) $I = 1$ b) $I = 3$ c) $I = \frac{\pi}{4}+1$

d) $I = \frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$ e) $I = \frac{\pi}{4}+\ln 2$ f) $I = \frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}$

**AM - XII. 097** Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \arcsin\frac{m}{\sqrt{m^2+x^2}}$, $m>0$. Să se calculeze

$$\int_m^{m\sqrt{3}} f(x)dx .$$

a) $\frac{m^2\pi}{24}$ b) $\frac{m^2}{2}\left(\sqrt{3}-1+\frac{\pi}{6}\right)$ c) $m^2\left(\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}\right)$

d) $\frac{m^2}{4}(\pi-1)$ e) 1 f) $\frac{m^2}{2}\left(\sqrt{2}-1+\frac{\pi}{6}\right)$

**AM - XII. 098** Să se calculeze $I=\int_1^{\sqrt{3}} x\,arctg x\,dx$.

a) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3-1}\right)$ b) $\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ c) $\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

d) $\frac{5\pi}{12}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3-1}\right)$ e) $\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$ f) $\frac{5\pi}{12}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$

**AM – XII. 099** Să se calculeze :

$$I=\int_1^2\left(arctg x+arctg 3x+\arccos\frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}}+\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx.$$

a) $\pi$ b) 0 c) 1 d) $2\pi$ e) $\frac{\pi}{2}$ f) $\frac{1}{2}$

**AM - XII. 100** Să se calculeze $I=\int_0^{\pi/2^{n+1}} \sin x\cos x\cos 2x\ldots\cos 2^{n-1}x dx$.

a) $I=\frac{1}{2^n}$ b) $I=1$ c) $I=\frac{1}{4^n}$ d) $I=0$ e) $I=\frac{1}{2^{n+1}}$ f) $I=\frac{1}{4^{n+1}}$

**AM - XII. 101** Fie funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$. Să se calculeze $\int_{-1}^3 x f^{-1}(x)dx$.

a) $\frac{140}{1089}$ b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{108}{13}$ e) $\frac{1089}{140}$ f) $\frac{1098}{143}$

**AM - XII. 102** Să se calculeze $I=\lim_{b\to\infty}\int_2^b |x-3|e^{-x}dx$.

a) $I=e^{-3}(1-e)$ b) $I=2e^{-3}(2+e)$ c) $I=2e^{-3}(1-e)$

d) $I = 2e^{-3}(2-e)$ e) $I = e^{-3}(2-e)$ f) $I = 2e^{-3}$

**AM - XII. 103** Valoarea integralei $I = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$ este:

a) $4 - \pi$ b) $3 - \pi$ c) $2 - \frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{2} - 1$ e) $\pi - 5$ f) $4 + \pi$

**AM - XII. 104** Să se calculeze $I = \int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} e^{\operatorname{arctg} x} dx$ .

a) $e^{\frac{\pi}{6}}$ b) $e^{\frac{\pi}{3}}$ c) $e^{\frac{\pi}{2}}$ d) $e^{\frac{\pi}{4}}$ e) e f) $2e^2$

**AM - XII. 105** Să se calculeze $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 3x dx$ .

a) $I = \frac{1}{13}\left(3 - \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$ b) $I = \frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}e^{\pi} - 3\right)$ c) $I = \frac{1}{5}\left(3 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

d) $I = \frac{1}{5}\left(3 - \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$ e) $I = \frac{1}{5}\left(-3 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$ f) $I = \frac{1}{13}\left(3 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

**AM – XII. 106** Fie $f_i : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $i = 1,2$ şi $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$. Să se calculeze integrala definită:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)^2 dx.$$

a) $I = 1 - \sqrt{e}$; b) $I = e^2 - 1$; c) $I = e - 1$;

d) $I=\frac{1}{2}(e-1)$; e) $I=\frac{1}{2}(1-e)$; f) $I=e+1$.

**AM - XII. 107** Calculați $I=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^{x}dx$.

a) $2e^{\frac{\pi}{2}}$ b) $2\left(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$ c) 0 d) $e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}$ e) $e^{-\frac{\pi}{2}}$ f) $2e^{-\frac{\pi}{2}}$

**AM - XII. 108** Indicați care din valorile de mai jos reprezintă valoarea integralei

$$I=\int_{0}^{\pi/3}\ln\left(1+\sqrt{3}tgx\right)dx.$$

a) $I=\frac{\pi}{3}\ln 3$ b) $I=\frac{\pi}{3}\ln 2$ c) $I=\frac{\pi}{2}\ln 3$

d) $I=\frac{\pi}{2}\ln 2$ e) $I=\pi\ln 3$ f) $I=\pi\ln 2$

**AM – XII. 109** Să se calculeze integrala $I=\int_{0}^{1}\frac{\ln(1+x)}{1+x^{2}}dx$.

a) 1; b) $\frac{\pi}{2}\ln 2$; c) $\frac{\pi}{3}\ln 2$; d) $\frac{\pi}{4}\ln 2$; e) $\frac{\pi}{8}\ln 2$; f) $\ln 2$.

**AM - XII. 110** Să se stabilească în care din intervalele următoare se află valoarea integralei

$$I=\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1-x^{2}}\,arctgx\,dx.$$

a) $\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2},1\right]$ b) $\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$ c) $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

d) $\left[0,\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}\right]$ e) $\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{4},1\right]$ f) $\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2},2\right]$

**AM - XII. 111** Să se calculeze $\int_{-1}^{1} \min\left\{1, x, x^2\right\}dx$ .

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{I}{\partial}$ c) 1 d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{6}$ f) $\frac{1}{4}$

**AM - XII. 112** Calculați $I = \int_{-2}^{3} \min_{t \le x}\left\{t^2\right\}dx$ .

a) $I = \frac{35}{3}$ b) $I = \frac{8}{3}$ c) $I = -\frac{8}{3}$ d) $I = -\frac{35}{3}$ e) $I = \frac{10}{3}$ f) $I = \frac{5}{3}$

**AM - XII. 113** Să se calculeze $I = \int_{-2}^{2} \min\left\{x^2 - 1, x + 1\right\}dx.$

a) $-1$ b) 1 c) $-\frac{1}{2}$ d) 2 e) 3 f) -3

**AM - XII. 114** Dacă $t_1(x)$ și $t_2(x)$ sunt rădăcinile ecuației $t^2 + 2(x-1)t + 4 = 0$ , iar $f(x) = \max_{x\in\mathbf{R}}\left\{\left|t_1(x)\right|, \left|t_2(x)\right|\right\}$, să se calculeze $\int\limits_{-2}^{4} f(x)dx$ .

a) $13 - 3\sqrt{5} - 2\ln\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ b) $13 - 3\sqrt{5} + 2\ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

c) $13 + 3\sqrt{5} - 2\ln\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ d) $13 + 3\sqrt{5} + 2\ln\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$

e) $13 + 3\sqrt{5} + 2\ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ f) $13 + 3\sqrt{5} - 2\ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

**AM - XII. 115** Să se calculaze $\int_0^2 \min\left\{x, \dfrac{2}{1+x^2}\right\}dx.$

a) 0 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $2\operatorname{arctg}2-\dfrac{\pi}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}+2\operatorname{arctg}2-\dfrac{\pi}{2}$ e) -1 f) $\operatorname{arctg}2-\dfrac{\pi}{2}$

**AM - XII. 116** Care este valoarea integralei $I=\int_0^4 \max\left\{x^2, 2^x\right\}dx$ ?

a) $I=\dfrac{3}{\ln 2}$ b) $I=\dfrac{56}{3}$ c) $I=\dfrac{256}{3}$

d) $I=1$ e) $I=\dfrac{3}{\ln 2}+\dfrac{56}{3}$ f) $I=\dfrac{3}{\ln 2}-\dfrac{53}{3}$

**AM - XII. 117** Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)dx$ , unde $f(x)=\max\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x, 3^x\right\}$, $x\in[-1,1]$.

a) 0 b) $\dfrac{4}{\ln 3}$ c) $\dfrac{2}{\ln 4}$ d) $\dfrac{5}{\ln 3}$ e) 1 f) ln3

**AM - XII. 118** Care este valoarea integralei:

$$I=\int_0^{\pi/4} \max\{\sin x, \cos x\}\cdot \ln\left(1+\sqrt{2}\sin x\right)dx \ ?$$

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln 3$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 3-\ln 2)$ c) $\ln 2-\ln 3$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 4-1)$ e) $\sqrt{2}\ln 2-2$ f) $\sqrt{2}\ln 2+2$

**AM - XII. 119** Să se calculeze $\int_0^{\pi/2} \max\{\sin x, \cos x\}dx$ .

a) $\sqrt{2}$ b) 0 c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) 1 f) -1

**AM - XII. 120** Fiind date integralele: $I_1 = \int_1^2 e^{x^2} dx$ , $I_2 = \int_1^2 e^{x^2}\left(x^2 - 5\right)dx$ şi

$I_3 = \int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată .

a) $I_1 < I_2 < I_3$ b) $I_1 < I_3 < I_2$ c) $I_2 < I_1 < I_3$
d) $I_2 < I_3 < I_1$ e) $I_3 < I_1 < I_2$ f) $I_3 < I_2 < I_1$

**AM - XII. 121** Dacă $[\alpha]$ reprezintă partea întreagă a lui $\alpha \in \mathbf{R}$ , atunci să se calculeze $\int_0^{1990} [x] dx$.

a) $1989 \cdot 995$ b) $1992 \cdot 995$ c) $1990 \cdot 995$
d) $1988 \cdot 995$ e) $1991 \cdot 995$ f) $1993 \cdot 995$

**AM - XII. 122** Să se calculeze $I = \int_0^1 \left[2^5 x\right] dx$ .

a) $I = 32$ b) $I = \frac{31}{2}$ c) $I = 16$ d) $I = 1$ e) $I = 2$ f) $I = \frac{1}{2}$

**AM - XII. 123** Se consideră funcţia $f : [0,2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1 - [x]}{2x - [x] + 1}$ .

Să se calculeze integrala $I = \int_0^2 f(x) dx$

a) $I = \frac{1}{2}\ln 3$ b) $I = 1 - \ln 6$ c) $I = 1 - \frac{1}{4}\ln 12$
d) $I = \frac{1}{2} - \ln 12$ e) $I = \frac{1}{4}\ln 12 - 1$ f) $I = \frac{1}{4}\ln 12$

**AM - XII. 124** Care este limita şirului: $a_n = \frac{1}{n!}\int_1^{n+1} \ln[x]dx$ ?

a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) $e$ e) $e^{-1}$ f) $e^2$

**AM - XII. 125** Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\int_0^1 e^x[nx]dx$ , unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $a$ .

a) $\frac{1}{2}$ b) $e^{-1}$ c) 1 d) 0 e) $e-1$ f) $e+1$

**AM - XII. 126** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$, dacă $a_n = \int_1^n \frac{x-1}{x+1}dx$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

a) 2 b) 3 c) 1 d) –1 e) 5 f) 4

**AM - XII. 127** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n (x-1)e^{-x}dx$.

a) 0 b) $e^2$ c) $e$ - 1 d) $\frac{1}{e}$ e) $\frac{1}{e}-1$ f) 1

**AM - XII. 128** Să se calculeze $l = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ .

a) $l = 1$ b) $l = 0$ c) $l = +\infty$ d) $l = -\infty$ e) nu există f) $l = \text{arctg}\frac{1}{2}$

**AM - XII. 129** Fiind dată funcţia continuă $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\in N}$ dat de: $a_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$ .

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $e$ e) $\sqrt{2}$ f) $f(1)$

**AM - XII. 130** Fie $G_g$ graficul funcției $g:[0,\pi]\to[0,1]$, $g(x)=\sin x$. Familia de drepte $y = t$, $t\in[0,1]$ taie graficul $G_g$ în două puncte $A_1$ şi $A_2$. Fie $\gamma:[0,1]\to\mathbf{R}$, astfel încât $\gamma(t)$ este egală cu distanța dintre $A_1$ şi $A_2$ pentru orice $t\in[0,1]$.
Să se calculeze integrala $I=\int_0^1 \gamma(t)dt$.

a) $I=2$ b) $I=\frac{2}{3}$ c) $I=\frac{3}{2}$ d) $I=3$ e) $I=1$ f) $I=4$

**AM - XII. 131** Dacă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este o funcție de două ori derivabilă şi cu derivata a doua continuă pe $[a,b]$, atunci calculați $I=\int_a^b xf''(x)dx$, în funcție de *a* şi *b*.

a) $I=bf'(b)-af'(a)+f(b)-f(a)$
b) $I=bf'(b)-af'(a)+f(a)-f(b)$
c) $I=bf'(a)-af'(b)+f(b)-f(a)$
d) $I=af'(a)-bf'(b)+f(b)-f(a)$
e) $I=af'(a)-bf'(b)+2f(b)-f(a)$
f) $I=(b-a)(f'(b)-f'(a))$

**AM - XII. 132** Fie $a<b$ şi $f:[0,b-a]\to(0,+\infty)$ continuă pe $[0,b-a]$. Să se calculeze $\int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)}dx$ în funcție de *a* şi *b*.

a) $\frac{b-a}{2}$ b) $b-a$ c) $a-b$ d) $\frac{a-b}{4}$ e) $\frac{b-a}{3}$ f) $\frac{a-b}{3}$

**AM - XII. 133** Să se calculeze $I=\int_0^1 \frac{2x+1}{x^4+2x^3-x^2-2x+2}dx$.

a) $\pi$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) 0 d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{3\pi}{4}$ f) $\frac{3\pi}{2}$

**AM - XII. 134** Fie $f$ o funcție impară şi continuă pe intervalul $[-1,1]$ şi fie integrala $I=\int_0^{2\pi} x^2 f(\sin x)dx$. Să se precizeze care din următoarele egalități este adevărată.

a) $I=2\pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ b) $I=4\pi^2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ c) $I=-4\pi^2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$

d) $I=\frac{\pi^2}{2}\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ e) $I=\pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ f) $I=\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$

**AM - XII. 135** Să se calculeze $I=\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x\,dx$.

a) 10 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) $\frac{1}{10}$ f) 4

**AM - XII. 136** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție continuă şi $k\in\mathbf{R}$ astfel încât:

$\int_0^x f(t)dt=\frac{x}{2}(f(x)+k)$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$. Care este valoarea lui $f(0)$ ?

a) 1 b) $k$ c) $\frac{k}{2}$ d) 0 e) $\frac{k^2}{3}$ f) $\frac{k}{4}$

**AM - XII. 137** Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ o funcție continuă şi $F:[a,b]\to\mathbf{R}$, definită prin

$F(x)=(b-a)\cdot\int_a^x f(t)dt-(x-a)\cdot\int_a^b f(t)dt$. Să se calculeze $F'(x)$.

a) $F'(x)=(b-a)f(x)-(x-a)\int_a^b f'(t)dt$ b) $F'(x)=(b-a)-(x-a)\int_a^b f(t)dt$

c) $F'(x)=(b-a)-\int_a^b f(t)dt$ d) $F'(x)=-\int_a^b f(t)dt$

e) $F'(x)=(b-a)f(x)-\int_a^b f(t)dt$ f) $F'(x)=0$

**AM - XII. 138** Fie $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\int_0^{x^3} e^{t^2}dt$. Să se calculeze $f'(x)$ pentru orice $x\in[0,1]$.

a) $f'(x)=e^{x^2}$ b) $f'(x)=3x^2e^{x^2}$ c) $f'(x)=3x^2e^{x^{6x}}$
d) $f'(x)=3x^2e^{3x^2}$ e) $f'(x)=3x^2e^{x^6}$ f) $f'(x)=3x^2e^{2x}$

**AM- XII. 139** Să se determine toate funcțiile polinomiale $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel încât :

$$\int_x^{x+1} f(t)dt = x^2,\quad x\in\mathbf{R}.$$

a) $x^2+x-\frac{1}{6}$; b) $x^3-x^2+\frac{1}{6}x+2$; c) $x^2-x+\frac{1}{6}$
d) $x^2+2x-1$; e) $x^3+x^2+x-\frac{1}{6}$ f) $x^2+2x+\frac{1}{6}$

**AM - XII. 140** Se dau funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\int_0^{x^2}\sin t^2 dt$ și $g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$. Care este valoarea limitei $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)}{g(x)}$ ?

a) $e$ b) $e-1$ c) 1 d) $1-e$ e) 0 f) $\frac{1}{2}$

**AM - XII. 141** Să se determine expresia analitică a funcției: $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to(0,+\infty)$,

$$f(x)=\int_0^x \frac{(\sin t+\cos t)\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{dt}.$$

a) $f(x) = -\operatorname{ctg} x - x - \ln(\cos x)$ b) $f(x) = \operatorname{tg} x - x + \ln(\cos x) + 1$
c) $f(x) = \operatorname{ctg} x - x - \ln(\cos x) - 1$ d) $f(x) = \operatorname{tg} x + x - \ln(\cos x)$
e) $f(x) = \operatorname{tg} x - x - \ln(\cos x)$ f) $f(x) = \operatorname{tg} x + 2x + \ln(\sin x)$

**AM - XII. 142** Fie $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=\int_0^x e^t \ln(1-t+t^2)dt$ . Determinați punctele de extrem local ale funcției *F*.

a) $x_1=-1$ b) $x_1=e$ c) $x_1=0, x_2=1$

d) $x_1=\frac{1}{e}$ e) nu are puncte de extrem local f) $x_1=2, x_2=5$

**AM - XII. 143** Determinați o funcție polinomială $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, de grad minim, astfel încât să admită un maxim egal cu 6 în $x=1$ şi un minim egal cu 2 în $x=3$.

a) $f(x)=x^3-5x^2+2x+7$ b) $f(x)=x^4-3x^2-5$ c) $f(x)=x^3+2x^2+x+1$

d) $f(x)=-x^3+5x^2+2x+7$ e) $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ f) $f(x)=x^3+2x^2+1$

**AM - XII. 144** Fiind dată funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\int_x^{x+2\pi}\frac{t}{1+\sin^2 t}dt$ , să se calculeze $f'(0)$.

a) $f'(0)=\pi$ b) $f'(0)=0$ c) $f'(0)=\frac{\pi}{2}$

d) $f'(0)=2\pi$ e) $f'(0)=1$ f) $f'(0)=\frac{\pi}{4}$

**AM - XII. 145** Să se calculeze derivata funcției $F:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$,

$$F(x)=\sin\left[\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt\right].$$

a) $F'(x)=\cos x$ b) $F'(x)=\cos\frac{1}{x}$ c) $F'(x)=0$

d) $F'(x)=\sin 2x$ e) $F'(x)=1$ f) $F'(x)=\cos 2x$

**AM - XII. 146** Fie $F:[0,3]\to \mathbf{R}$ definită prin $F(x)=\int_0^x e^{t^2}\left(-t^3+4t^2-5t+2\right)dt$ pentru orice $x\in[0,3]$. Pentru ce valoare a lui $x\in[0,3]$, $F$ are valoarea maximă ?

a) $x=0$ b) $x\in\varnothing$ c) $x=3$ d) $x=2$ e) $x=1$ f) $x=\dfrac{1}{2}$

**AM – XII. 147** Fie funcţia $f(x)=\int_0^{arctgx} e^{tg^2 t}dt;\quad x\in\mathbf{R};$ Să se calculeze

$$I=\int_0^1 \frac{xf(x)}{e^{x^2}}dx+\frac{1}{2e}\int_0^1\frac{e^{x^2}}{1+x^2}dx$$

a) $I=1;$ b) $I=\dfrac{\pi}{4};$ c) $I=\dfrac{\pi}{8};$ d) $I=0;$ e) $I=\dfrac{\pi}{2};$ f) $I=\dfrac{3\pi}{4}$

**AM - XII. 148** Să se calculeze aria domeniului marginit de graficul funcţiei $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ cu axa Ox şi dreptele x=0, x=1.

a) ln2 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\pi$ d) 1 e) $\dfrac{\pi}{2}$ f) $\dfrac{\pi}{3}$

**AM - XII. 149** Să se calculeze aria subgraficului funcţiei

$$f:[0,2]\to\mathbf{R},\quad f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

a) $5\sqrt{2}-2+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$ b) $2\sqrt{5}+2+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$ c) $2\sqrt{5}+\ln\left(\sqrt{5}-2\right)$
d) $2\sqrt{5}-2+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$ e) $-2\sqrt{5}+2-\ln\left(\sqrt{5}-2\right)$ f) $2\sqrt{5}+2$

**AM - XII. 150** Să se calculeze aria figurii plane cuprinsă între parabola $y=x^2$ şi dreapta $x+y=2$.

a) $\frac{9}{2}$ b) 3 c) 2 d) $\frac{8}{3}$ e) 7 f) 8

**AM - XII. 151** Calculați aria domeniului mărginit de curbele : $y = 2x - x^2$ şi $y = -x$ .

a) 13,5 b) 4,5 c) 13,2 d) 6,5 e) $\frac{1}{2}$ f) 3,5

**AM - XII. 152** Fie $f : (-1,+\infty) \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = x^2 \ln(1+x^3)$. Care este aria porțiunii plane cuprinsă între graficul funcției, dreptele $x = 0$ , $x = 1$ şi axa Ox ?

a) 0 b) ln 2 c) $\ln\frac{1}{3}$

d) $\frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}$ e) $3\ln 2 - 1$ f) $\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{3}$

**AM - XII. 153** Să se calculeze aria porțiunii plane mărginită de graficul funcției $f : (-\infty,-1) \cup [1,\infty) \to \mathbf{R}$ , $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ , axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 1$ şi $x = 2$.

a) $\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$ b) $\ln 2+\sqrt{3}$ c) $\ln 2-\sqrt{3}$

d) ln 2 e) $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}$ f) $\ln\left(3+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}$

**AM - XII. 154** Să se determine abscisa $x = \lambda$ , a punctului în care paralela dusă la axa Oy împarte porțiunea plană cuprinsă între curba $y = \frac{1}{x^2+2x+5}$ , axa Ox şi dreptele $x = 1$ şi $x = 2\sqrt{3}-1$ , în două părți de arii egale.

a) $\lambda = \sqrt{3}-1$ b) $\lambda = 2\sqrt{3}-2$ c) $\lambda = 2\text{tg}\frac{7\pi}{24}-1$

d) $\lambda = \text{tg}\frac{7\pi}{4} - \frac{1}{2}$ e) $\lambda = 2$ f) $\lambda = \frac{3}{2}$

**AM - XII. 155** Să se calculeze aria $A$ a porțiunii plane mărginite de graficele funcțiilor $f, g : [-1,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

a) $A = \frac{\pi}{4}$ b) $A = \frac{\pi}{2} - 1$ c) $A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$

d) $A = \frac{\pi}{6}$ e) $A = \frac{\pi}{6} + 5$ f) $A = \frac{\pi}{3} + 1$

**AM - XII. 156** Care este aria suprafeței cuprinsă între parabolele de ecuații :

$$y^2 = x \text{ şi } x^2 = 8y \text{ ?}$$

a) 8 b) $\frac{16}{3}$ c) $\frac{8}{3}$ d) 1 e) $\frac{1}{24}$ f) $\frac{1}{4}$

**AM - XII. 157** Fie funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ .

Să se calculeze aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției $f^{(1991)}$ , axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$.

a) $\frac{1991!\left(2^{1992}-1\right)}{2^{1990}}$ b) 1991 c) $\frac{1990!\left(2^{1991}-1\right)}{2^{1990}}$

d) $\frac{1991!}{2^{1990}}$ e) 1 f) $\frac{1992!\left(2^{1991}-1\right)}{2^{1990}}$

**AM - XII. 158** Care este aria figurii plane situată în cadranul doi, mărginită de axe şi graficul funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x+2}$ ?

a) $A=\pi-\ln 3$ b) $A=\frac{1}{2}(\pi-\ln 3)$ c) $A=\pi\ln 3$

d) $A=\frac{\pi}{2}$ e) $A=\pi+\ln 3$ f) $A=\pi-\ln 3$

**AM - XII. 159** Să se calculeze aria suprafeței cuprinsă între graficele funcțiilor $f,g:[0,2\pi]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$

a) $2\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{5}$ d) $4\sqrt{2}$ e) 4 f) $3\sqrt{2}$

**AM – XII. 160** Să se calculeze aria domeniului mărginit de graficul funcției $f:\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{\cos x}{1+\cos x}$, axa (Ox) şi dreptele de ecuații $x=0,\quad x=\frac{3\pi}{4}$

a) $2+tg\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{4}$ b) $-2+tg\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{4}$ c) $-2-tg\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{4}$

d) $-tg\frac{3\pi}{8}+\frac{3\pi}{4}$ e) $2-tg\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{4}$ f) $-2-tg\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{4}$

**AM - XII. 161** Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției $f(x)=\arccos\frac{x^3-3x}{2}$, axa Ox şi dreptele de ecuații x = -1 , x = 1.

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\pi$ d) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e) $\frac{\pi}{3}$ f) $\frac{\pi}{6}$

**AM - XII. 162** Să se calculeze aria porțiunii plane mărginită de graficele funcțiilor $f(x)=\ln(1+x^2)$, $g(x)=x\,arctg x$ şi dreptele x = -1, x = 0.

a) $-\frac{3}{2}+\ln 2+\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{3}{2}+\ln 2-\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{3}{2}-\ln 2-\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{3}{2}+\ln 2-\frac{\pi}{4}$ e) $-\frac{3}{2}-\ln 2+\frac{\pi}{4}$ f) $\frac{3}{2}+\ln 2+\frac{\pi}{4}$

**AM - XII. 163** Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat prin rotirea în jurul axei Ox a subgraficului funcției $f(x)=\sqrt{8x},\ x\in[0,4]$.

a) 64 $\pi$ b) 66 $\pi$ c) 20 $\pi$ d) 24 $\pi$ e) 4 $\pi$ f) 8$\pi$

**AM - XII. 164** Care este volumul corpului de rotație generat prin rotirea în jurul axei Ox a subgraficului funcției $f(x)=x+e^x,\ x\in[0,1]$ ?

a) $V=\frac{\pi}{2}(e+1)$ b) $V=\pi(e^2+9)$ c) $V=\frac{\pi}{8}(3e-1)$

d) $V=\frac{\pi}{3}(2e+3)$ e) $V=\frac{\pi}{6}(3e^2+11)$ f) $V=\pi e$

**AM - XII. 165** Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat prin rotirea în jurul axei Ox a subgraficului funcției $f(x)=\sqrt{x^2-16},\ x\in[4,10]$.

a) 216 $\pi$ b) 200 $\pi$ c) 400 $\pi$ d) 20 $\pi$ e) 10 $\pi$ f) 60$\pi$

**AM - XII. 166** Calculați volumul corpului obținut orin rotirea subgraficului determinat de arcul de elipsă $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ situat deasupra axei Ox în jurul acestei axe.

a) 16$\pi$ b) 9$\pi$ c) 36$\pi$ d) 6$\pi$ e) $\frac{4}{3}\pi$ f) $\frac{4\pi}{9}$

**AM - XII. 167** Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat prin rotirea subgraficului funcției $f:[1,2]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x^3-1}$ în jurul axei Ox .

a) $\pi$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{11\pi}{4}$ d) $\frac{11\pi}{2}$ e) $\frac{7\pi}{4}$ f) $\frac{5\pi}{4}$

**AM - XII. 168** Să se calculeze aria suprafeței obținute prin rotirea parabolei de ecuație $y=\sqrt{2x}$ cu $1\le x\le 3$ în jurul axei Ox.

a) $\frac{2\pi}{3}\left[\left(\sqrt{7}\right)^3-\left(\sqrt{3}\right)^3\right]$ b) $\frac{3\pi}{2}\left[\left(\sqrt{7}\right)^3+\left(\sqrt{3}\right)^3\right]$ c) 1

d) $\frac{\pi}{5}\left(\sqrt{5}+1\right)$ e) $\pi\sqrt{5}$ f) $\frac{\pi}{5}\left(\sqrt{5}-1\right)$

**AM - XII. 169** Să se determine volumul corpului solid generat de rotirea în jurul axei Oy a domeniului plan cuprins între curbele $y=\sqrt{x}$, $y=2$ şi $x=0$.

a) $\frac{\pi}{7}$ b) $\pi$ c) $\frac{32\pi}{5}$ d) $\frac{21\pi}{2}$ e) $\frac{35\pi}{6}$ f) $\frac{31\pi}{3}$

**AM - XII. 170** Să se calculeze aria porțiunii plane mărginită de graficul funcției $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, axa (Ox) şi dreptele de ecuații: $x\sqrt{3}=1$ şi $x=\sqrt{3}$.

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$ b) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln 3$ c) $\frac{\pi}{3}+\ln 3$

d) $\frac{\pi}{3\sqrt{6}}+\frac{1}{3}\ln 2$ e) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln 3$ f) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln 3$

**AM - XII. 171** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea subgraficului funcţiei $f:\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x(1-x)}}$ în jurul axei Ox.

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi^2}{4}$ c) $\frac{\pi^2}{8}$ d) 1 e) $\frac{\pi^2}{6}$ f) $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}$

**AM - XII. 172** Să se calculeze aria domeniului plan cuprins între curba de ecuaţie $y=\sqrt{x}$, tangenta în $x=4$ la această curbă şi axa Oy.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 1 e) $\frac{1}{5}$ f) $\frac{2}{5}$

**AM - XII. 173** Calculaţi aria limitată de curba $y=\frac{1}{1+x^2}$, asimptota sa şi paralelele la axa Oy duse prin punctele de inflexiune.

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\pi$ d) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{6}$ f) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

**AM - XII. 174** Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea subgraficului funcţiei $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[4]{x(1-x)}$, în jurul axei Ox.

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi^2}{8}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}$ e) 1 f) $\pi^2\sqrt{2}$

**AM - XII. 175** Pentru ce valoare $m>0$, aria mulţimii

$$A=\left\{(x,y)\,\middle|\, m\le x\le 2m,\ 0\le y<x+\frac{6}{x^2}\right\}$$ este minimă ?

a) $m=2$ b) $m=10$ c) $m=\frac{5}{6}$ d) $m=\frac{3}{2}$ e) $m=5$ f) $m=1$

**AM – XII.176** Să se calculeze aria suprafeței obținute prin rotirea graficului funcției $f:[0,1]\to\mathbf{R},\quad f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$ în jurul axei Ox.

a) $\frac{\pi}{2}\left(e^2+e^{-2}-4\right)$; b) $\frac{\pi}{4}\left(e^2-e^{-2}+4\right)$; c) $\frac{\pi}{4}\left(e^2+e^{-2}+4\right)$

d) $\frac{\pi}{2}\left(e^2-e^{-2}+4\right)$ e) $\frac{\pi}{2}\left(e^2+e^{-2}+4\right)$ f) $\frac{\pi}{4}\left(e^2-e^{-2}+2\right)$

**AM – XII. 177** Să se calculeze aria suprafeței obținute prin rotirea în jurul axei Ox a arcului de curbă $9y^2=x(3-x)^2,\quad x\in[0,3]$.

a) $A=3\pi$; b) $A=\pi$; c) $A=2\pi$; d) $A=9\pi$; e) $A=10\pi$; f) $A=-\pi$.

**AM – XII. 178** Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R},\quad f(x)=\sqrt{x+1}$
Să se calculeze aria suprafeței generată prin rotația graficului funcției în jurul axei Ox

a) $\frac{\pi}{6}\left(27+5\sqrt{5}\right)$; b) $\frac{\pi}{6}\left(27-5\sqrt{5}\right)$; c) $\frac{\pi}{3}\left(27+5\sqrt{5}\right)$

d) $\frac{\pi}{3}\left(27-5\sqrt{5}\right)$; e) $\pi\left(27+5\sqrt{5}\right)$; f) $\pi\left(27-5\sqrt{5}\right)$

**AM – XII. 179** Să se determine aria suprafeței de rotație generată de rotirea arcului de curbă $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ în jurul axei Ox și cuprins între x = 1, x = e

a) 10 b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi\left(e^4-9\right)}{16}$ d) $\frac{e^2-9}{16}$ e) $11\frac{\left(e^2-9\right)}{16}$ f) $\frac{\pi}{16}$

**AM – XII. 180** Să se calculeze lungimea graficului pentru funcția $f(x)=\ln\cos x,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

a) $\ln\left(\sqrt{3}-1\right)$ b) $\ln\left(\sqrt{3}+1\right)$ c) 1
d) $\ln 2$ e) $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ f) $\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

**AM – XII. 181** Să se determine lungimea graficului funcției $f(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$ cuprins între punctul de minim al acestuia şi punctul de abscisă x = e.

a) $\frac{e^2+1}{4}$ b) $\frac{e}{2}$ c) $e^2$ d) $\frac{e-1}{2}$ e) $\frac{e+1}{2}$ f) 1

**AM – XII. 182** Se ştie că un cablu suspendat în două puncte situate la distanța 2c unul de altul este modelat de graficul funcției " lănțişor ", $f:[-c,c]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, unde a este distanța față de axa Ox a celui mai de jos punct al cablului. Să se calculeze lungimea acestui cablu.

a) $a\left(e^{\frac{c}{a}}-e^{-\frac{c}{a}}\right)$ b) $a\left(e^{\frac{c}{a}}+e^{-\frac{c}{a}}\right)$ c) $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{c}{a}}-e^{-\frac{c}{a}}\right)$

d) $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{c}{a}}+e^{-\frac{c}{a}}\right)$ e) $a\left(e^{\frac{c}{a}}+1\right)$ f) $a\left(e^{\frac{c}{a}}-1\right)$

**AM – XII. 183** Fie a şi b două numere reale pozitive, cu $b<a$. Să se calculeze lungimea arcului de curbă din planul (Oxy) ce reprezintă graficul funcției $f:[b,a]\to\mathbf{R}$, definită prin

$$f(x)=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sqrt{a^2-x^2},\quad (b\le x\le a)$$

a) $a\ln\frac{b}{a}$ b) $b\ln\frac{b}{a}$ c) $\ln\frac{b}{a}$ d) $a\ln\frac{a}{b}$ e) $b\ln\frac{a}{b}$ f) $\ln\frac{a}{b}$

**AM – XII. 184** Să se calculeze lungimea graficului funcției $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

a) $\frac{e^2+1}{2e}$; b) $\frac{e^2-1}{2e}$ c) $\frac{e^2-1}{2}$ d) $\frac{e^2-1}{e}$ e) $\frac{e^2+1}{2}$ f) $\frac{e^2+1}{4e}$

**AM – XII. 185** Să se calculeze lungimea arcului curbei de ecuație $f(x)=2\ln x$ $x\in\left[2,2\sqrt{2}\right]$

a) $2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+2\ln\frac{\sqrt{3}+1}{2+\sqrt{2}}$ b) $2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

c) $2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+2\ln\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $2\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)+\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

e) $2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ f) $2\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)+\ln\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$.

**AM – XII. 186** Baza unui corp solid este regiunea plană cuprinsă între curbele $y=\sin x,\quad y=0,\quad x=\frac{\pi}{4},\quad x=\frac{3\pi}{4}$; şi orice secțiune a corpului cu un plan perpendicular pe axa Ox este un pătrat .

Aflați volumul corpului .

a) $\frac{1}{4}(\pi+2)$; b) $\frac{\pi^2}{4}$; c) $\frac{\pi^2}{2}$; d) $\frac{\pi-2}{2}$; e) $\frac{\pi}{4}+2$; f) $\frac{\pi^2}{2}+2$

## INDICAȚII

### Matematică , clasa a IX – a

**AL – IX. 050** Se pun condițiile $a > 0,\ f(1) \geq 0,\ -\dfrac{b}{2a} \leq 1$.

**AL – IX. 054** Se pun condițiile ca ecuația obținută prin transformarea $x = y + 3$ să aibă rădăcinile reale negative.

**AL – IX. 070** Se elimină *z* între cele două ecuații şi se ține seama de faptul că o sumă de pătrate de numere reale este zero dacă şi numai dacă termenii ei sunt egali cu zero.

**AL – IX. 073** Se pun condițiile $\Delta > 0,\ a \cdot f(-1) < 0$ şi $a \cdot f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$.

**AL – IX. 076** Se pun condițiile $f(\mathbf{R}) \subset [-3{,}5]$ şi $[-3{,}5] \subset f(\mathbf{R})$.

**AL – IX. 080** Notând $a - 2b + c = m$ şi eliminând *c* din aceasta şi egalitatea dată , în ecuația obținută se pun succesiv condiții ca $a, b \in \mathbf{R}$ .

**AL – IX. 105** Se scrie $x + 2\sqrt{x-1}$ sub forma $x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 = \left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2$.

Analog se procedează cu $x - 2\sqrt{x-1}$ .

### Matematică , clasa a X – a

**AL – X. 002** Se observă că dacă notăm $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{x/2} = y > 0$, atunci

$\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{x/2} = \dfrac{1}{y} > 0$ şi astfel se obține ecuația de gradul doi în $y$,

$2y^2 - 3y - 2 = 0$.

**AL – X. 003** Dacă notăm $1+\sqrt{2}=u$, atunci $3-2\sqrt{2}=\frac{1}{u^2}$ şi în acest fel cu substituția $u^x=t>0$ se obține ecuația $t^3-2t^2+1=0$.

**AL – X. 020** Se foloseşte inegalitatea evidentă: $(\forall)\ u>0 \Rightarrow u+\frac{1}{u}\geq 2$.

**AL – X. 043** Cu substituția $x^{(\log_2 x)^2}=u,\ y^{(\log_2 y)^2}=v$, sistemul devine: $\begin{cases} u+v=258 \\ uv=2^9 \end{cases}$, care este un sistem simetric.

**AL – X. 052** Ecuația dată se poate scrie: $\frac{(3n-2)!}{(2n-2)!(2n-1)!}=1$.

Notând membrul stâng cu $a_n$ deducem că $a_1=1$ şi pentru $n\geq 2$, $(a_n)_{n\geq 2}$ este un şir strict descrescător.

În plus, $a_2=2,\ a_3=\frac{7}{4},\ a_4=1$ şi $a_n<1$ pentru $n\geq 5$.

**AL – X. 074** În binomul lui Newton $(a+b)^n$, în cazul nostru avem:

$\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{b}{a}=\frac{100-k}{10(k+1)}\geq 1$. Se constată apoi că pentru $k\leq 8$ avem $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}\geq 1$, iar pentru $k\geq 9$ avem $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}\leq 1$.

**AL – X. 119** Din identitatea:

$1+x+x^2+...+x^n=x(x-1)^2C(x)+ax^2+bx+c,(\forall)x\in\mathbf{R}$,

pentru $x=0$ obținem $c=1$, iar pentru $x=1$ obținem $a+b=n$.

Derivând identitatea considerată şi apoi luând $x=1$ se obține

$2a+b=\frac{1}{2}n(n+1)$.

**AL – X. 129** Folosind condiția dată se deduce că:

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\cdot T(x)$ cu $T(x)=\text{const.}$

**AL – X. 134** $\forall\, a,b \in \mathbf{R}$, $x=0$ nu este rădăcină a ecuaţiei. Se observă că ecuaţia ce are ca rădăcini inversele rădăcinilor ecuaţiei date nu poate avea toate rădăcinile reale.

**AL – X. 163** Fie $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$; prin identificarea gradelor polinoamelor din cei doi membrii ai identităţii se obţine că grad $P(x)$ este 2.

**AL – X. 168** Se descompune membrul stâng al ecuaţiei într-un produs de două polinoame de grad 2 în raport cu *x* şi se cere ca fiecare să aibă rădăcini reale.

**AL – X. 173** Deoarece $a \in \mathbf{R}^*$, fie $x_{1,2} = \cos t \pm i \sin t$ rădăcinile de modul 1 ale ecuaţiei. Deoarece $x_1 + x_2 = 2\cos t \overset{\text{not}}{=} -a$ şi $x_1 x_2 = 1$, cerem ca membrul stâng al ecuaţiei să se dividă cu $x^2 + ax + 1$.

**AL – X. 188** Se foloseşte inegalitatea $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

**<u>Matematică , clasa a XI – a</u>**
**<u>Algebră superioară</u>**

**AL – XI. 026** Din proprietăţile enunţate rezultă comutativitatea înmulţirii matricilor $A, B, C \in M_n(\mathbf{C})$. Astfel se poate scrie: $AB + BC = B(A + C) = ABC$, etc. Folosind aceste identităţi în relaţia: $2(A + B + C) = AB + BC + CA$, prin identificare rezultă valoarea lui *m*.

**AL – XI. 027** Folosind metoda inducţiei complete pentru determinarea lui $A^n$, apoi prin identificare din $A^n = r^{n-1} \cdot A$ rezultă valoarea lui *r*.

**AL – XI. 029** Folosind metoda inducţiei complete pentru determinarea lui $A^n$, apoi calculând $P(A) = A^{100} - \mathrm{I}$ rezultă şi $\det P(A)$.

**AL – XI. 036** Se foloseşte metoda inducţiei complete pentru determinarea lui $A^n$ sau formula binomului lui Newton, observând $A^n = (\mathrm{I} + B)^n$, iar $B^3$ va fi matricea nulă.

**AL – XI. 063** Folosind descompunerea $A = D + X$, unde $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, se va calcula $A^2, A^3, \dots, A^n$.

În continuare se obţin uşor $\sum_{k=0}^{4} A^k$ şi $\det\left(\sum_{k=0}^{4} A^k\right)$.

**AL – XI. 079** Folosind definiţia matricei *A* se obţine uşor următoarea formă:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.Determinând $A^t$, se calculează ulterior $\det\left(A^t \cdot A\right)$.

**AL – XI. 106** Primele patru ecuaţii din sistemul dat formează un sistem liniar omogen în raport cu necunoscutele *x*, *y* şi *z*. Acest sistem nu poate să admită soluţie banală, fiindcă sistemul enunţat trebuie să admită soluţii. Din condiţia ca matricea de bază a sistemului liniar omogen să aibă rang doi, rezultă valorile parametrilor *m* şi *n*. Pentru valorile parametrilor obţinuţi se rezolvă sistemul enunţat.

**<u>Geometrie analitică</u>**

**GA – XI. 079** Se aplică relaţia care dă puterea punctului O faţă de cerc.

**GA – XI. 110** Punctul curent $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ satisface ecuaţia elipsei date , iar punctele P şi N vor avea coordonatele $\mathrm{P}(\alpha,0)$, $\mathrm{N}\left(\frac{2}{3}\alpha, \frac{2}{3}\beta\right)$. Punctul Q fiind pe axa mică a elipsei va avea coordonatele $\mathrm{Q}(0,2\beta)$, etc.

**GA – XI. 113** Dreptele suport ale razelor focale trec prin M şi prin câte unul dintre cele două focare F şi F' ale elipsei .

**GA – XI. 140** Într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ pe hiperbola dată se scrie ecuaţia tangentei, apoi din condiţia de paralelism dintre două drepte se obţin coordonatele punctelor de tangenţă. În cele două puncte de tangenţă se scriu ecuaţiile tangentelor la hiperbola dată.

**GA – XI. 145** Se scrie ecuaţia cercului cu centrul în C( 0,2 ) şi cu rază variabilă. Condiţia de tangenţă (de contact) între cercul costruit şi hiperbola dată este ca sistemul format de cele două ecuaţii de gradul doi să admită soluţiile $(x_1, y_1)$ şi $(x_2, y_2)$ cu $x_1 = -x_2$ şi $y_1 = y_2$.

**GA – XI. 166** Considerând punctele mobile $M(0, \alpha)$ şi $N(0, \alpha + 2)$, coeficienţii unghiulari ai dreptelor (AM) şi (AN) vor fi : $m_{AM} = -\alpha$ şi $m_{AN} = -\alpha - 2$.
Scriind perpendicularele pe (AM) şi (AN) , se găsesc uşor coordonatele punctului de intersecţie dintre perpendiculare în funcţie de parametrul $\alpha$. Eliminând parametrul $\alpha$ între coordonatele punctului de intersecţie, rezultă ecuaţia locului geometric.

**<u>Elemente de analiză matematică</u>**

**AM – XI. 009** Dacă $a_n = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n}$, se calculează $2^n \sin\frac{x}{2^n} \cdot a_n$.

**AM – XI. 011** Se foloseşte relaţia $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{x_n} - 1}{x_n} = \ln 2$, dacă $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

**AM – XI. 023** Folosim relaţia $\sin^2 \pi\alpha = \sin^2(\pi\alpha - \pi n)$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$.

**AM – XI. 030** Utilizăm identitatea $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$.

**AM – XI. 035** Se ţine seama de relaţia :

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{1 + k(k+1)x^2} = \operatorname{arctg}(k+1)x - \operatorname{arctg} kx .$$

**AM – XI. 038** Se utilizează teorema „ cleştelui ”.

**AM – XI. 039** Se utilizează teorema „ cleştelui ”.

**AM – XI. 057** Se foloseşte formula $\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$.
Altfel: utilizăm regula lui $\mathrm{L}^{'}\mathrm{Hôspital}$.

**AM – XI. 065** Se utilizează relaţia $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$.

**AM – XI. 081** Folosim relaţia $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$.

**AM – XI. 162** Se foloseşte definiţia derivatei.

**AM – XI. 170** Se utilizează regula lui $\mathrm{L}^{'}\mathrm{Hôspital}$. (Se poate folosi şi teorema lui Lagrange.)

**AM – XI. 171** Se utilizează regula lui $\mathrm{L}^{'}\mathrm{Hôspital}$.

**AM – XI. 180** Se foloseşte inducţia matematică.

**AM – XI. 207** Se impune condiţia: $f^{'}(x)\le 0, x\in \mathbf{R}$.

**AM – XI. 211** Se calculează derivata lui $f$.

**AM – XI. 212** Se arată că $f^{'}=g^{'}$.

**AM – XI. 238** Se foloseşte şirul lui Rolle sau metoda grafică.

**AM – XI. 247** Se utilizează teorema lui Fermat.

**<u>Matematică , clasa a XII – a</u>**
**Algebră superioară**

**AL – XII. 065** Se va utiliza faptul că $f$ este bijecţie dacă şi numai dacă $A$ este matrice inversabilă.

**AL – XII. 073** Se va utiliza faptul că $1+1=0$ implică $x+x=0$.

**AL – XII. 084** Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix} \in M_k$ şi $Y=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ k\beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_k$. Ecuaţia $XY=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se reduce la un sistem omogen de ecuaţii în necunoscutele $a,b \in \mathbf{Z}$ şi respectiv $\alpha,\beta \in \mathbf{Z}$. Se va cere ca acesta să aibă în raport cu *a*, *b* şi respectiv $\alpha,\beta$ soluţii nenule.

**AL – XII. 086** Se va utiliza faptul că dacă ar exista $n_1, n_2 \in \mathbf{N}^*$ cu $1<n_1,\ n_2<n$ astfel ca $n=n_1 n_2$, atunci relaţia dată s-ar putea scrie $(n_1\cdot 1)(n_2\cdot 1)=0$ ceea ce, fiindcă *K* nu are divizori ai lui zero, ar implica $n_1\cdot 1=0$ , $n_2\cdot 1=0$, absurd.

**AL – XII. 106** Se vor studia cazurile $\lambda \in \mathbf{Z}_4$ pentru care determinantul sistemului este un element neinversabil.

**Elemente de analiză matematică**

**AM – XII. 008** Avem $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, & x\le \dfrac{1}{2} \\ -x^2+x+1, & x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

**AM – XII. 016** În urma integrării se obţine o funcţie raţională şi un logaritm. Se impune apoi condiţia ca expresia de sub logaritm să fie egală cu 1.

**AM – XII. 032** Se constată că polinomul *P* trebuie să fie de gradul I.

**AM – XII. 036** Se provoacă la numărător derivata numitorului.

**AM – XII. 037** Se provoacă la numărător derivata numitorului.

**AM – XII. 054** Se observă că termenul general al şirului este o sumă integrală corespunzătoare punctelor diviziunii $x_k=\dfrac{k^2}{n^2},\ k\in\overline{1,n}$.

**AM – XII. 061** Se foloseşte proprietatea de aditivitate

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

**AM – XII. 070** Dacă $\varepsilon$ este o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, atunci $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ şi $\varepsilon^3 = 1$. Se impune condiția ca polinomul de la numărător să se dividă cu cel de la numitor.

**AM – XII. 074** Se face substituția $x - \dfrac{1}{x} = t$.

**AM – XII. 078** Se face substituția $x^2 + x + 1 = t$.

**AM – XII. 099** Derivata integrantului este zero.

**AM – XII. 100** $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \ldots \cdot \cos 2^n x = \dfrac{\sin 2^n x}{2^n}$.

**AM – XII. 108** Se face schimbarea de variabilă $x = \dfrac{\pi}{3} - t$.

**AM – XII. 132** Se face schimbarea de variabilă $x = b + a - t$.

**AM – XII. 137 –146** Se foloseşte formula de derivare a funcției compuse

$$F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt .$$

**AM – XII. 186** Se utilizează procedeul folosit la deducerea volumului unui corp de rotație.

# PROBLEME MODEL
# CU REZOLVĂRI ŞI INDICAŢII

**MATEMATICĂ, clasa a IX – a**
**(simbol AL – IX)**

**AL - IX. 001**

Notăm $\frac{5a-1}{3} = K$, deci $K \in \mathbb{Z}$. Avem 5a - 1=3K, $a = \frac{3K+1}{5}$

Adică $\left[\frac{6K+7}{10}\right] = K$. Dar $K \le \frac{6K+7}{10} < K+1$ deci $a \in \left\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}$

Răspuns corect b.

**AL - IX. 004** Avem:

(1) $x - 1 < [x] \le x, \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $x^2 - 1 < [x^2] \le x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Se înmulţeşte (1) cu -3 şi (2) cu 5 şi $\Rightarrow$

(3) $-3x \le -3[x] < -3x + 2$

(4) $5x^2 - 5 < 5[x^2] \le 5x^2$; adunând (3) şi (4) $\Rightarrow$

(5) $5x^2 - 3x - 3 < 5[x^2] - 3[x] + 2 < 5x^2 - 3x + 5$. Deoarece

$5[x^2] - 3[x] + 2 = 0$, (5) devine

$5x^2 - 3x - 3 < 0 < 5x^2 - 3x + 5 \Rightarrow x \in \left(\frac{3-\sqrt{69}}{10}, \frac{3+\sqrt{69}}{10}\right)$

rezultă:

$[x] = -1$ sau $[x] = 0$ sau $[x] = 1$. Pentru primele 2 valori nu se verifică ecuaţia iniţială.

Deci $[x] = 1 \Rightarrow x \in [1,2) \Rightarrow x^2 \in [1,4)$ Rezultă $[x^2] = 1$ sau $[x^2] = 2$ sau $[x^2] = 3$

Pentru nici una din aceste valori nu este verificată soluţia.

Răspuns corect e.

**AL - IX. 009**

$$\frac{2x+1}{5}=k \text{ şi } \frac{2x+1}{5}\le\frac{m^2x-1}{2}<\frac{2x+1}{5}+1$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x=\frac{5k-1}{2} \qquad \text{şi} \qquad \frac{7}{5m^2-4}\le x<\frac{17}{5m^2-4}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{7}{5m^2-4}\le\frac{5k-1}{2}<\frac{17}{5m^2-4}$$

$$\Downarrow$$

$$(*) \qquad \frac{5m^2+10}{5\left(5m^2-4\right)}\le k<\frac{5m^2+30}{5\left(5m^2-4\right)}$$

Deoarece membrul stâng este pozitiv, pentru a avea soluții trebuie ca

$$\frac{5m^2+30}{5\left(5m^2-4\right)}>1 \Leftrightarrow m^2<\frac{5}{2}=2,5 \ .$$

Singurele numere întregi $\neq 0$ care verifică sunt $m=\pm1$.

Pentru $m=\pm1$, $(*)$ devine:

$$3\le k<7 \quad \Leftrightarrow \quad k\in\{3,4,5,6\}$$

Avem 4 soluții.

Răspuns corect c.

**AL - IX. 015**

Se pun condițiile: $m-1<0,\ \Delta=\left(m+1\right)^2-4\left(m^2-1\right)\Leftrightarrow m<1$

şi $\qquad m^2+2m+1-4m^2+4\le 0\Leftrightarrow m<1 \ \text{ şi } -3m^2+2m+5\le 0$

$$m_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+15}}{-3}=\frac{-1\pm4}{-3}$$

Deci $m<1$ şi $m\in\left(-\infty,-1\right]\cup\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$

$\Rightarrow m\in\left(-\infty,-1\right]$.

Răspuns corect c.

**AL - IX. 024**

Se scriu relațiile lui Vieto:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2m+1}{3m} \\ x_1x_2=\dfrac{m+1}{3m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3m} \\ x_1x_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3m} \end{cases} + \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+x_1x_2=-\frac{1}{3}$$

Răspuns corect d.

**AL - IX. 032**

$$f_m(x)=mx^2-(2m-1)x+m-1 \qquad (m\neq 0)$$

$$x_V=-\frac{b}{2a}\Rightarrow x_V=\frac{2m-1}{2m}$$

*Răspuns corect f.*

$$y_V=-\frac{\Delta}{4a}\Rightarrow y_V=-\frac{(2m-1)^2-4m(m-1)}{4m}$$

$$V\in I\ bis \Rightarrow x_V=y_V\Rightarrow \frac{2m-1}{2m}=-\frac{1}{4m}\Rightarrow \begin{array}{l} 8m^2-4m+2m=0 \\ 8m^2-2m=0 \end{array}$$

$\cancel{m=0}$ nu convine; $m=\dfrac{1}{4}$

Răspuns corect a.

**AL - IX. 045**

Notând $x^2-4x+5=t$ obținem

$$t\in[-1,0)\cup\left[\frac{4}{5},+\infty\right), \text{ de unde}$$

$$-1\le x^2-4x+5<0 \quad \text{sau} \quad x^2-4x+5\ge\frac{4}{5} \quad \Rightarrow x\in\mathbb{R}$$

Răspuns corect d.

**AL - IX. 053**

Se pun condițiile:

$$(1)\quad f(2)\cdot f(4)\le 0 \quad \text{şi} \quad (2)\quad \Delta\ge 0$$

(1) $$(4m-2+m-7)(16m-4+m-7)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$(5m-9)(17m-11)\le 0 \Leftrightarrow m\in\left[\frac{11}{17},\frac{9}{5}\right]=\mathrm{I}_1$$

(2) $\Delta=1-4m(m-7)\ge 0$ adică: $-4m^2+28m+1=0 \Rightarrow m_{1,2}=\dfrac{7\pm 5\sqrt{2}}{2}$

deci $\Delta\ge 0$ pentru $m\in\left[\dfrac{7-5\sqrt{2}}{2},\dfrac{7+5\sqrt{2}}{2}\right]=\mathrm{I}_2$

m trebuie să aparțină lui $I=I_1\cap I_2$ adică $\Rightarrow m\in\left[\dfrac{11}{17},\dfrac{9}{5}\right]$

Răspuns corect e.

**AL - IX. 062**

Ridicând prima ecuație la puterea a treia rezultă

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+3\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}\left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}}+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}\right)=a^3 \quad \text{se obține sistemul}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=a\left(a^2-3\right)\\ x+y=b\end{cases} \quad \text{de unde} \quad \begin{cases}x+y=b\\ xy=\dfrac{b^2}{(a-1)^2(a+2)}\end{cases}$$

$$t^2-bt+\frac{b^2}{(a-1)^2(a+2)}=0 \quad\Rightarrow\quad t_{1,2}=\frac{b}{2}\left(1\pm\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-2}{a+2}}\right)$$

Soluțiile sistemului sunt întregi dacă $b=2k,\ k\in\mathbf{Z}$

şi $\quad 1\pm\dfrac{a+1}{a-1}\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}\in\mathbf{Z}\qquad$ sau $\qquad b\in\mathbf{Z}$ şi $1\pm\dfrac{a+1}{a-1}\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}=2k,\quad k\in\mathbf{Z}$

$1\pm\dfrac{a+1}{a-1}\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}=1\pm\left(1+\dfrac{2}{a-1}\right)\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}\in\mathbf{Z}$ dacă $\quad a-1\in\{-2,-1,1,2\}$ şi

$\dfrac{a-2}{a+2}=n^2,\quad n\in\mathbf{Z}\Rightarrow a=2, b=2k,\ k\in\mathbf{Z}\quad \left(1\pm\dfrac{a+1}{a-1}\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}\right)=1$

pentru a=2 , deci rămâne doar cazul întâi ).
Răspuns corect c.

**AL - IX. 083**

Se pune condiţia $4-x^2\geq 0\Rightarrow x\in[-2,2]$

Cazul I $\quad 1-x\leq 0\Rightarrow[1,\infty)$

Soluţia (1) $\quad [-2,2]\cap[1,\infty)=[1,2]$

Cazul II $\quad 1-x>0\quad x\in(-\infty,1)$

În acest caz se ridică inegalitatea la pătrat

$$4-x^2>1-2x+x^2\quad\Rightarrow x\in\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2},\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$$

Soluţia 2 $\quad [-2,2]\cap(-\infty,1)\cap\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2},\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\right)=\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2},1\right)$

Soluţia finală = Sol (1) $\cup$Sol (2) = $[1,2]\cup\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2},1\right)=\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2},2\right]$

Răspuns corect f.

**AL - IX. 085**

Adăugăm în ambii membrii $2x\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

$$\left(x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+2x\left(\frac{x}{x-1}\right)=1+2x\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2=1+\frac{2x^2}{x-1}\right)\Leftrightarrow\left(\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}=1\right)$$

Notăm $\dfrac{x^2}{x-1}=y \Leftrightarrow \left(y^2-2y-1=0\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1+\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2}\end{array}\right.$

$$\left(\frac{x^2}{x-1}=1+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow\left(x^2-x\left(1+\sqrt{2}\right)+1+\sqrt{2}=0\right)\Rightarrow x\in\varnothing$$

$$\left(\frac{x^2}{x-1}=1-\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow\left(x^2-x\left(1-\sqrt{2}\right)+1-\sqrt{2}=0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\left\{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)\right\}$$

Răspuns corect f.

**MATEMATICĂ , clasa a X - a**
**(simbol AL - X)**

**AL - X. 009**

Se scrie $\left(x-m-1\right)^{|x-1|=1}\left(2x+m\right)-\left(2x+m\right)^{|x-1|}=0$

sau $\left(\dfrac{x-m-1}{2x+m}\right)^{|x-1|-1}=1$ pentru $2x+m\neq 0$

de unde rezultă $|x-1|-1=0$ deci $x_1=0$ $x_2=2$

şi $\dfrac{x-m-1}{2x+m}=1$ , deci $x_3=-2m-1$ . Condiţia cu $x-m-1>0$ conduce la

$$-3m-2>0 \quad \text{deci } m<-\frac{2}{3}\ , \text{ iar } -2m-1\neq 0 \ \text{ şi } -2m-1\neq 2$$

$$\Rightarrow m\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\},\quad x_1=0\Rightarrow m>0 \text{ rezultă } m\in\varnothing$$

Răspuns corect a.

**AL - X. 031**

Se pun condiţiile $x>0, x\neq 1 \quad y=\log_2 x\Rightarrow$

$$E=\sqrt{(y-1)^2}+\sqrt{(y+1)^2}=|y-1|+|y+1|,\ (\forall)\, y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$E=\begin{cases}-2y, & y\in(-\infty,-1)\\ 2, & y\in[-1,1]\\ 2y, & y\in(1,\infty)\end{cases}$$

$$\Rightarrow E=2\Leftrightarrow \quad y\in[-1,1]\setminus\{0\}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{2},2\right]\setminus\{1\}$$

Răspuns corect d.

**AL - X. 044**

Not. $\lg x=u, \lg y=v, \lg z=t; \quad x,y,z>0\Rightarrow$

$$\begin{cases}uv+ut+vt=1\\ uvt=1\\ u+v+t=1\end{cases}\Leftrightarrow w^3-s_1w^2+s_2w-s_3=0\Leftrightarrow w^3-w^2+w-1=0$$

$$\Leftrightarrow (w-1)\left(w^2+1\right)=0\Rightarrow \text{ Sistemul nu are soluţii în } \mathbb{R}$$

Răspuns corect e.

**AL - X. 051**

$$C_n^k;\ n,k\in\mathbb{N},\ n\geq k$$

$$x^2+10,\ 7x,\ 5x+4,\ x^2+3x-4\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{N}^*$$

$$\begin{cases} 7x \geq x^2 + 10 \\ 5x + 4 \geq x^2 + 3x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 \leq 0 \\ x^2 - 2x - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2,5] \\ x \in [-2,4] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2,4] \cap \mathbb{N} = \{2,3,4\}$$

Răspuns corect b.

**AL - X. 058**

Pentru $n \geq k+1$ avem $C_{m+1}^{k+1} = C_m^{k+1} + C_m^k$

Dând lui m valorile $n, n-1, ..., k+1$ obținem:

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$$
$$C_n^{k+1} = C_{n-1}^{k+1} + C_{n-1}^k$$
$$.........................$$
$$C_{k+1}^{k+1} = C_{k+1}^{k+1} + C_{k+1}^k$$
$$\overline{C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + ... + C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1}}$$

Dar $C_{k+1}^{k+1} = C_k^k$, deci $C_n^k + C_{n-1}^k + ... + C_{k+1}^k + C_k^k = C_{n+1}^{k+1}$

Răspuns corect b.

**AL - X. 068**

Se scrie termenul general

$$T_{k+1} = C_{16}^k \left( x^{\frac{3}{2}} \right)^{16-k} \left( x^{\frac{1}{4}} \right)^k = C_{16}^k x^{\frac{2(16-k)}{3} + \frac{k}{4}}$$

$$\frac{4(32-2k)+3k}{12} = \frac{128-5k}{12} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \in [0,16],\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$k = 4;\ k = 16 \Rightarrow$ Doi termeni nu conțin radicali

Răspuns corect b.

**AL - X. 079**

$$(i)^{2k}=\left(i^2\right)^k=(-1)^k\ ;$$

$$(1+i)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)=\sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

Avem:

$$(1+i)^n=C_n^0+C_n^1 i+C_n^2(-1)+C_n^3(-i)+C_n^4+C_n^5 i+C_n^6(-1)+\ldots+C_n^{2k}(i)^{2k}=$$

$$=C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots+(-1)^k C_n^{2k}+i\left(C_n^1-C_n^3+C_n^5+\ldots\right)$$

$$\Rightarrow E=\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}$$

Răspuns corect c.

**AL - X. 087**

$$a_1=2;\quad S_n=\frac{(2+a_n)n}{2}=n^2+an+b,(\forall)n\geq 1$$

$$2n+na_n=2n^2+2an+2b,(\forall)\ n\geq 1$$

$$2n+n\left[a_1+(n-1)r\right]=2n^2+2an+2b$$

$$n^2 r+\left(2+a_1-r\right)n=2n^2+2an+2b,(\forall)\ n\geq 1$$

$$\begin{cases} r=2 \\ a_1=2a \\ 2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=2 \\ b=0 \\ a_1=2a=2\Rightarrow a=1 \end{cases}$$

Răspuns corect c.

**AL – X. 095**

Fie $\frac{8}{7}=q^m$ şi $\frac{9}{8}=q^n$

Rezultă $\frac{8^n}{7^n} = q^{m+n}$ şi $\frac{9^m}{8^m} = q^{m+n}$

Avem: $\frac{8^n}{7^n} = \frac{9^m}{8^m} \Rightarrow 7^n \cdot 9^m = 8^{m+n}$

Cu m $8 = 7 + 1$ $\Rightarrow$ $8^{m+n}$ nu poate fi divizibil cu 7 deci nu pot forma termenii unei progresii geometrice.
Răspuns corect e.

**AL – X. 098**

$$S_1 = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},\ S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_1 q^{n-1}} = \frac{1}{a_1} \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{1}{a_1} \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}},$$

$$P = a_1^n q^1 q^2 ... q^{n-1} = a_1^n q^{1+2+...+n-1} = a_1^n q^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}}{\frac{1}{a_1} \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}} = a_1^2 q^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^n = a_1^{2n} q^{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^n}$$

Răspuns corect c.

**AL - X. 106**

$$f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

$$\underbrace{f(15)-f(7)}_{4}=a_0\left(15^n-7^n\right)+a_1\left(15^{n-1}-7^{n-1}\right)+\ldots+a_{n-1}(15-7)=$$
$$=8k,\quad k\in\mathbb{Z},\ \text{absurd}$$

Răspuns corect b.

**AL - X. 114**

$$f(-1)=2$$

$f(2)=-1$; Din identitatea împărțirii

$f(X)=\left(X^2-X-2\right)Q(X)+mX+n;$ deducem

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=-m+n=2 \\ f(2)=2m+n=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow -X+1$$

Răspuns corect a.

**AL - X. 126**

Se face împărțirea şi se aplică Algoritmul lui Euclid

$$\begin{array}{r|l} 2X^3-7X^2+\lambda X+3 & X^3-3X^2+\mu X+3 \\ \hline -2X^3+6X^2-2\mu X-6 \quad 2 & \\ \hline /\ -X^2+(\lambda-2\mu)X-3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} X^3-3X^2+\mu X+3 & X^2-(\lambda-2\mu)X+3 \\ \hline -X^3+(\lambda-2\mu)X^2-3X & X+(\lambda-2\mu-3) \\ \hline /\ -(\lambda-2\mu-3)X^2+(\mu-3)X-3 & \\ -(\lambda-2\mu-3)X^2+(\lambda-2\mu)(\lambda-2\mu-3)X-(\lambda-2\mu-3)\cdot 3 & \\ \hline /\quad \left[(\lambda-2\mu)(\lambda-2\mu-3)+\mu-3\right]X+(12-3\lambda+6\mu)\equiv 0 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda-2\mu=4 \\ (\lambda-2\mu)(\lambda-2\mu-3)+\mu-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=-1 \\ \lambda=2 \end{cases}$$

Răspuns corect d.

**AL - X. 130**

$$P(x+1)-P(x)=4x^3+6x^2+4x+1,\ (\forall)\, x\in\square \Rightarrow grad\ P=4,$$

$$\Rightarrow P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e;$$

$$P(x+1)=P(x)a\left(x^4+4x^3+6x^2+4x+1\right)+b\left(x^3+3x^2+3x+1\right)+$$

$$+c\left(x^2+2x+1\right)+d(x+1)+e-ax^4-bx^3-cx^2-dx-e=$$

$$=4ax^3+(6a+3b)x^2+(4a+3b+2c)x+a+b+c+d\equiv 4x^3+6x^2+4x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 6a+3b=6 \\ 4a+3b+2c=4 \\ a+b+c+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad P(x)=x^4+k, \quad k\in\square$$

Răspuns corect c.

**AL - X. 131**

$$f(a)=p,\ f(b)=p,\ f(c)=p,\ f(d)=p,$$

$a,b,c,d\in\mathbf{Z}$ diferite.

$$\Rightarrow f=(X-a)(X-b)(X-c)(X-d)g+p,\ g\in\mathbf{Z}[X]$$

Dacă $(\exists)\, X_0\in\mathbf{Z}: f(X_0)=2p \Leftrightarrow$

(∗) $$(X_0-a)(X_0-b)(X_0-c)(X_0-d)g(X_0)=+p=prim.$$

Egalitatea (∗) este imposibilă deoarece p este număr prim. Rezultă că nu există $X_0\in\square$ cu $f(x_0)=2p$

Răspuns corect a.

**AL - X. 138** Notăm rădăcinile $x_1,x_2,x_3$ cu: $u-r,u,u+r$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u = -\dfrac{b}{3a} \\ 3u^2 - r^2 = \dfrac{c}{a} \\ u\left(u^2 - r^2\right) = -\dfrac{d}{a} \end{cases} \underset{u \text{ și } r}{\overset{elimin}{\Rightarrow}} \; 2b^3 + 27a^2d - 9abc = 0$$

Răspuns corect c.

**AL - X. 144**

$$\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right) = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^3 - 3\left(x_1 + x_2 + x_3\right)\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right) +$$

$$+3x_1x_2x_3 = (-2)^3 - 3(-2)(-m) - 3 = -6m - 11$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^4 = -2x_1^3 + mx_1^2 - x_1 \\ x_2^4 = -2x_2^3 + mx_2 - x_2 \\ x_3^4 = -2x_3^3 + mx_3 - x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -2(-6m - 11) + m(4 + 2m) + 2 = 2m^2 + 16m + 24$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 16m + 24 = 24 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0,\, m = -8$$

Răspuns corect d.

**AL - X. 180**

$$\frac{z_1 + z_2}{z_1 + z_2} = \frac{\left(z_1 + z_2\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right)}{\left|z_1 - z_2\right|^2} = \frac{z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}}{\left|z_1 - z_2\right|^2} =$$

$$=\frac{|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}+\frac{\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}}{|z_1-z_2|^2}$$

$$Z=\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}\Rightarrow\overline{Z}=z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2=-Z\Rightarrow X-Y_i=-X-Y_i\Rightarrow X=0,Y\in\mathbb{R}$$

$$\|$$

$$X+Y_i \qquad \Rightarrow Z=Yi\Rightarrow -iZ=Y$$

Răspuns corect d.

**AL - X. 189**

$$|z-a|^2=(z-a)\left(\overline{z-a}\right)=(z-a)\left(\overline{z}-a\right)=z\cdot\overline{z}-a\left(z+\overline{z}\right)+a^2=$$

$$|z|^2-2a.\operatorname{Re}z+a^2=a^2-b^2\Rightarrow\quad |z|^2=2a.\operatorname{Re}z-b^2$$

$$\left|\frac{b-z}{b+z}\right|=\left|\frac{(b-z)\left(b+\overline{z}\right)}{(b+z)\left(b+\overline{z}\right)}\right|=\left|\frac{b^2-z\overline{z}-b\left(z-\overline{z}\right)}{b^2+b\left(z-\overline{z}\right)+z\overline{z}}\right|=$$

$$=\frac{\left|b^2-|z|^2-2ib\operatorname{Im}z\right|}{\left|2(a+b)\operatorname{Re}z\right|}=\frac{\left|b^2-a\operatorname{Re}z-ib\operatorname{Im}z\right|}{|\operatorname{Re}z|\cdot|a+b|}=$$

$$\frac{\sqrt{\left(b^2-a\operatorname{Re}z\right)^2+b^2(\operatorname{Im}z)^2}}{|\operatorname{Re}z|\cdot(a+b)}=\frac{\sqrt{(\operatorname{Re}z)^2\left(a^2-b^2\right)}}{|\operatorname{Re}z|(a+b)}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

Răspuns corect c.

**AL - X. 207**

Se folosesc formulele $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ şi $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

Avem:

$$Z = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - i2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right] =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

Răspuns corect a.

**AL - X. 216**

Avem $\omega^n = 1$ şi $1 + \omega + \omega^2 + ... + \omega^{n-1} = 0$

Înmulţim relaţia dată cu $1 - \omega$. Avem

$$(1-\omega)S = 1 + 2\omega + 3\omega^2 + ... + (n-1)\omega^{n-2} + n\omega^{n-1}$$

$$\underline{-\omega - 2\omega^2 - ... - (n-1)\omega^{n-1} - n\omega^n}$$

Avem

$$(1-\omega)S = 1 + \omega + ... + \omega^{n-1} - n\omega^n = -n$$

$$(1-\omega)S = -n$$

$$S = \frac{n}{\omega - 1}$$

Răspuns corect c.

**MATEMATICĂ , clasa a XI – a**
**ALGEBRĂ SUPERIOARĂ**
**(simbol AL - XI)**

**AL - XI. 011**

Identificând matricele avem

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 2x - y + 3z - 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x + (a-1)y + 2z + at = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 0$$

Răspuns corect b.

**AL - XI. 035**

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2};\, b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$a_1 = \frac{1}{2},\, b_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow a_n = \frac{n}{2}; \quad b_n = \frac{1}{4}\left[1+2+\ldots+\left(n-1\right)\right] + \frac{n}{3} = \frac{n\left(n-1\right)}{8} + \frac{n}{3}$$

$b_n = \dfrac{n\left(3n+5\right)}{24}$ Într-adevăr

$$\cancel{a_1} = \frac{1}{2} \qquad \text{și}$$

$$\cancel{a_2} = \cancel{a_1} + \frac{1}{2} \qquad \cancel{b_2} = b_1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

$$\cancel{a_3} = \cancel{a_2} + \frac{1}{2} \qquad \cancel{b_3} = \cancel{b_2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = \cancel{a_{n-1}} + \frac{1}{2} \qquad b_n = \cancel{b_{n-1}} + \frac{n-1}{4} + \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{n}{2} \qquad b_n = \frac{1}{4}\left(1+2+\ldots+\left(n-1\right)+\frac{n}{3}\right)$$

Răspuns corect d

**AL - XI. 042**

Trebuie ca un determinant de ordinul doi format din A să fie diferit de zero şi toți determinanții de ordinul 3 din A să fie nuli

Fie
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} \beta & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\left(\beta-1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \beta = 1;\, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \alpha & 2 & 3 \\ 2\alpha & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2\left(2\alpha-1\right) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Pentru aceste valori:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \beta & 1 & 4 \\ 1 & \alpha & 3 \\ 1 & 2\alpha & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} \beta & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2\alpha & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Răspuns corect b.

**AL - XI. 048**

Dacă $\begin{vmatrix} \beta & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2\alpha & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \beta & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \alpha & 2 & 3 \\ 2\alpha & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha - 2\alpha\beta = 0 \\ 2(\beta - 1) = 0 \\ 2(1 - 2\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ Pentru } \alpha = \frac{1}{2}, \ \beta = 1, \text{ matricea cu rangul 2}$$

Deci rangul este 3 dacă $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ nu $\beta \neq 1$.

Răspuns corect d.

**AL - XI. 057**

$$\Delta = \frac{1}{xy} \begin{vmatrix} x^2y & xy & y \\ x & -xy & xy^2 \\ y^2 & -xy & x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{xy} \begin{vmatrix} x^2y & xy & y \\ x + x^2y & 0 & xy^2 + y \\ x^2y + y^2 & 0 & x^2 + y \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} x(1+xy) & y(1+xy) \\ x^2y + y^2 & x^2 + y \end{vmatrix} = -(1+xy) \begin{vmatrix} x & y \\ y\left(x^2 + y\right) & x^2 + y \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+xy)\left(x^2 + y\right)\left(x - y^2\right)$$

Răspuns corect e.

**AL - XI. 061**

Fiindcă: $S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$ avem:

$$\Delta = 4S^2\begin{vmatrix} 1 & a & \frac{1}{bc} \\ 1 & b & \frac{1}{ac} \\ 1 & c & \frac{1}{ba} \end{vmatrix} = 0$$

Răspuns corect b.

**AL - XI. 076**

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$(x+3a)(x-a)^3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3a,\ x_2 = x_3 = x_4 = a$$

Răspuns corect e.

**AL - XI. 102**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -m \\ 2 & 1 \\ 3 & m-1 \end{pmatrix};\quad \begin{vmatrix} 1 & -m \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2m \neq 0 \quad \text{pentru} \quad m \neq -\frac{1}{2}$$

$$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & m \\ 3 & m-1 & 1-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -m & -1 \\ 0 & 2m+1 & 2+m \\ 0 & 4m-1 & 4-m \end{vmatrix} = 6\left(1-m^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow m = 1, \quad m = -1$$

Pentru $m=-\frac{1}{2}$ $\quad \Delta_{princ} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Delta_{car}$ e acelaşi

$\Rightarrow \quad m \in \{-1,1\}$

Răspuns corect d.

**AL - XI. 110**

Metoda 1. Sistem compatibil simplu nedeterminat $\Rightarrow$ necesar ca det A = 0

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha\beta & 1 \\ 1 & \beta & \alpha \end{vmatrix} = \beta(\alpha-1)^2(\alpha+2)=0$$

$$\beta = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow$$ x sau z necunoscută secundară, exclus

$$\alpha = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & \beta & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ rang A = 1, exclus

$$\alpha = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & \beta & 1 \\ 1 & -2\beta & 1 \\ 1 & \beta & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ pentru $p \neq 0$ posibil ca x sau z să fie cunoscute secundare

dacă z= nec.sec. : $\Delta_c = \begin{vmatrix} -2 & \beta & 1 \\ 1 & -2\beta & \beta \\ 1 & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \beta^2 + 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -2 \neq 0$

dacă x= nec.sec. : $\Delta_c = \begin{vmatrix} \beta & 1 & 1 \\ -2\beta & 1 & \beta \\ \beta & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

pentru $\alpha=\beta=-2$: $x=z=\lambda,\ y=-\frac{1}{2}(1+\lambda)$ verifică ecuațiile principale

Metoda 2:

Înlocuim x,y,z în sistem şi identificăm $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

Răspuns corect d.

**GEOMETRIE ANALITICĂ**
**(simbol GA - XI)**

**GA - XI. 006**

Alegem axele Ox dreapta BC, iar Oy perpendiculara din A pe BC

A(0,a) B(b,0) C(0,b)

Mijlocul A' a lui BC are coordonatele $A'\left(\frac{b+c}{2},0\right)$ o dreaptă arbitrară ce trece prin B are ecuația (d) $y=\lambda(x-b)$

$(AA')\quad \frac{2x}{b+c}=\frac{y-a}{-a}\qquad (AA')\cap d=\{K\}$ obținem $x_k=\frac{(\lambda b+a)(b+c)}{2a+\lambda(b+c)}$

Dacă s este raportul în care K împarte pe $AA'$, avem

$$x_k=\frac{s\frac{b+c}{2}}{1+s}=\frac{(\lambda b+a)(b+c)}{2a+\lambda(b+c)}\Rightarrow s=\frac{KA}{KA'}=\frac{2(\lambda b+a)}{\lambda(c-b)}$$

$$(AC)\quad \frac{x}{c}=\frac{y-a}{-a}\qquad (AC)\cap d=\{J\}\ \text{obținem}$$

$x_J=\frac{C(\lambda b+a)}{C\lambda+a}$ Dacă s' este raportul

$\frac{AJ}{JC}\Rightarrow\frac{s'C}{1+s'}=\frac{C(\lambda b+a)}{C\lambda+a}\Rightarrow s'=\frac{\lambda b+a}{\lambda(C-b)}=\frac{AJ}{JC}\Rightarrow\frac{JC}{AJ}=2\frac{KA'}{KA}$

Răspuns corect d.

**GA - XI. 012** Se consideră A, B pe axa Ox şi M pe axa Oy. Avem:

$$(MA) - x + \frac{y}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow y = \alpha x + \alpha$$

$$(MB) - \frac{x}{2} + \frac{y}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{\alpha}{2}x + \alpha$$

$$P\begin{cases} y = \alpha x + d \\ y = -\dfrac{1}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow P\left(-\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}, \frac{\alpha}{\alpha^2+1}\right)$$

$$Q\begin{cases} y = -\dfrac{\alpha}{2}x + \alpha \\ y = \dfrac{2}{\alpha}x \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+4}, \frac{4\alpha}{\alpha^2+4}\right)$$

$$(PQ): \frac{\left(\alpha^2+1\right)x + \alpha^2}{\alpha^2+2} = \frac{\left(\alpha^2+1\right)y - \alpha}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \alpha(x+2) - \left(\alpha^2+2\right)y = 0 \Rightarrow \quad x = -2, \quad y = 0$$

Punctul fix este N(-2,0). Atunci $k = \dfrac{NA}{NB} = \dfrac{1}{4}$

Răspuns corect a.

**GA - XI. 031**

Ecuaţia fasciculului de drepte ce trec prin intersecţia dreptelor $d_1$ şi $d_2$ este $(2+\lambda)x + (2\lambda - 3)y + 6 - 4\lambda = 0 \quad (1)$

Ecuaţia unei drepte ce trece prin P este $y - 2 = m(x-2)$

Punem condiţia ca această dreaptă să treacă prin punctul (4,0) respectiv (- 4,0). Găsim $m = -1$ respectiv $m = \frac{1}{3}$. Obţinem două drepte $(2)\ x + y - 4 = 0$ şi $x - 3y + 4 = 0 \quad (3)$. Condiţia ca dreapta (1) să fie perpendiculară pe (2) respectiv pe (3) este:

$$-\frac{2+\lambda}{2\lambda-3}=1 \text{ respectiv } -\frac{2+\lambda}{2\lambda-3}=-3 \Rightarrow$$

$\lambda=\frac{1}{3}$ respectiv $\lambda=\frac{11}{5}$. Obținem două drepte

$$(\delta_1)\quad x-y+2=0 \quad (\delta_2)\quad 3x+y-2=0$$

Răspuns corect f.

**GA - XI. 038**

Avem: $m_1=2, \quad m_2=\frac{1}{3}$

$$tg\theta=\pm\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\frac{1}{3}}=\pm1 \quad \Rightarrow \theta=45^0, \quad \theta=135^0 \quad \Rightarrow \theta=45^0$$

Răspuns corect c.

**GA - XI. 054**

Fie $y=ax+b$ ecuația dreptei care se deplasează paralel cu ea însăşi. Punctele M şi N aurespectiv coordonate: $M\left(-\frac{b}{a},0\right)$; $N(0,b)$. Ecuațiile dreptelor duse prin M şi N cu direcțiile fixe $m_1$ respectiv $m_2$:

$$\begin{cases} y=m_1\left(x+\frac{b}{a}\right) \\ y-a=m_2x \end{cases} \quad (1)$$

Ecuația locului geometric se obține eliminând parametrul b din ecuațiile (1) $\Rightarrow$

$$y(a-m_1)+x(m_2-a)m_1=0 \quad (2)$$

(2) – o dreaptă ce trece prin origine
Răspuns corect c.

**GA - XI. 092**

Determinăm centrul şi raza cercului ce trece prin cele 3 puncte:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$\begin{cases}(1-a)^2+(1-b)^2=r^2\\(2-a)^2+b^2=r^2\\(3-a)^2+(2-b)^2=r^2\end{cases}\Rightarrow a=\frac{13}{6},\ b=\frac{7}{6},\ r=\frac{\sqrt{50}}{6}$$

Deci $\omega\left(\frac{13}{6},\frac{7}{6}\right)$

$$O\omega^2=OT^2+r^2\Rightarrow OT^2=O\omega^2-r^2$$

$$OT^2=\frac{169}{36}+\frac{49}{36}-\frac{50}{36}=\frac{168}{36}\Rightarrow OT^2=\frac{14}{3}$$

Răspuns corect c.

**GA - XI. 101**

$$C:\quad x^2+y^2=r^2;\ M\left(r\cos t, r\sin t\right),\ t\neq 0;\pi$$

$$\Rightarrow \Gamma:\left(x-r\cos t\right)^2+\left(y-r\sin t\right)^2=r^2\sin^2 t$$

$$\begin{cases}\Gamma:\quad x^2+y^2-2rx\cos t-2ry\sin t=r^2\sin^2 t-r^2\\ C:\quad -x^2-y^2 \qquad\qquad\qquad\qquad =-r^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\omega\text{ coarda comună}: & -2rx\cos t-2ry\sin t=r\sin^2 t-2r^2\\ MN & :x=r\cos t \qquad\qquad =-r^2\cos^2 t-r^2\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}-2x^2+2ry\sin t=x^2+r^2\Rightarrow \sin t=\dfrac{r^2-x^2}{2ry}\quad \Big|^2 +\Rightarrow \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{\left(r^2-x^2\right)^2}{4r^2y^2}=1\Leftrightarrow\\ \cos t=\dfrac{x}{r}\quad \Big|^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+4y^2-r\right)\left(x^2-r^2\right)=0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{\frac{r^2}{4}}-1=0 \qquad 0 \quad \left(x=\pm r \Leftrightarrow t=0;\pi\right)$$

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{\frac{r^2}{4}}-1=0$$

Răspuns corect d.

**GA - XI. 102** Notăm $M\left(r\cos\alpha, r\sin\alpha\right)$, $N\left(-r\cos\alpha,-r\sin\alpha\right)$

Fie $R\left(x,y\right)$ punctul de intersecție dintre MP și NQ.

El se obține din sistemul

$$\begin{matrix}(MP)\\(NQ)\end{matrix}\quad \begin{cases} y=\dfrac{r\sin\alpha}{r\cos\alpha-a}\left(x-a\right)\\ y=\dfrac{r\sin\alpha}{r\cos\alpha+b}\left(x-b\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$r\sin\alpha=\frac{a+b}{a-b}y;\quad r\cos\alpha=\frac{a+b}{a-b}x-\frac{2ab}{a-b}\Rightarrow r^2\sin^2\alpha+r^2\cos^2\alpha=r^2$$

$$\Rightarrow y^2\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\left(x-\frac{2ab}{a+b}\right)^2=r^2 \quad \Bigg|:\frac{\left(a+b\right)^2}{\left(a-b\right)^2}\Rightarrow$$

$$\left(x-\frac{2ab}{a+b}\right)^2+y^2=r^2\frac{\left(a-b\right)^2}{\left(a+b\right)^2}$$

Răspuns corect e.

**GA - XI. 104**

Într-un reper ortogonal ecuaţia cercului este: $x^2+y^2=R^2$, Tangentele perpendiculare la cerc au respectiv ecuaţiile:

$$\begin{cases} y = mx + R\sqrt{1+m^2} \\ y = -\dfrac{1}{m}x + R\sqrt{1+\dfrac{1}{m^2}} \end{cases} \qquad (1)$$

Eliminând parametrul m din cele două ecuaţii rezultă ecuaţia locului geometric. Din (1) rezultă:

$$\begin{aligned} (y-mx)^2 &= R^2\left(1+m^2\right) \\ (my-x)^2 &= R^2\left(1+m^2\right) \end{aligned} \qquad (2)$$

$\Rightarrow x^2+y^2=2R^2 \qquad (3)$ este un cerc concentric cu cercul dat şi de rază $R\sqrt{2}$ (cercul lui Mőnge)

Răspuns corect d.

**GA - XI. 108**

$$\begin{cases} 4x^2+y^2-4=0 \\ y=x+n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2+2nx+n^2-4=0 \\ y=x+n \end{cases}$$

$$x_{1,2}=\frac{-n\pm 2\sqrt{5-n^2}}{5}: \quad y_{1,2}=\frac{4nn\pm 2\sqrt{5-n^2}}{5} \qquad n\in\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$$

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{n}{5}: \quad \frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4n}{5} \qquad V=\frac{2}{5}\sqrt{10-2n^2}$$

$$\left(x+\frac{n}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4n}{5}\right)^2=\frac{8}{25}\left(5-n^2\right), \quad n\in\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$$

Răspuns corect b.

**GA - XI. 115** Fie $M\left(x_1, y_1\right)$ şi $N\left(x_2, y_2\right)$ de pe elipsă: avem

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 & \Rightarrow x^2-Sx+p=0 \\ y=m\left(x-c\right) & \Rightarrow \begin{cases} y_1+y_2=S=m\left(S-2c\right) \\ y_1y_2=P=m^2\left(p-cs+c^2\right) \end{cases} \end{cases}$$

$$E=\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}=\frac{MN}{FM\cdot FN}$$

$$\begin{cases} MN=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{\left(1+m^2\right)\left(S^2-4p\right)}=\sqrt{\dfrac{4a^2b^4\left(1+m^2\right)^2}{\left(b^2+a^2m^2\right)^2}} \\ FM=\sqrt{\left(x_1-c\right)^2+y_1^2}=\sqrt{\left(1+m^2\right)\left(x_1-c\right)^2} \\ FN=\sqrt{\left(x_2-c\right)^2+y_2^2}=\sqrt{\left(1+m^2\right)\left(x_2-c\right)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow FM\cdot FN=\left(1+m^2\right)\left|P-CS+c^2\right|=\frac{b^4\left(1+m^2\right)}{b^2+a^2m^2}$$

$$E=\frac{2a}{b^2}$$

Răspuns corect a.

**GA - XI. 132**

$$U\left(a,\lambda\right),\text{ iar } V\begin{cases} y-a=-\dfrac{a}{\lambda}\left(x-a\right) \\ x=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow V\left(0, \frac{a^2}{\lambda}\right)$, $OVAU = a^2 = 12$ Punctul B se află pe elipsă deci

$$\frac{9}{a^2} + \frac{4}{a^2} - 1 = 0 \qquad \frac{3}{4} + \frac{4}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow b^2 = 16$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$$

Răspuns corect d.

**GA - XI. 164**

Fie $M(\alpha, \beta)$ un punct al parabolei.

Deci $\beta^2 = 2p\alpha$

Tangenta în M are ecuaţia: $\beta y = p(x + \alpha)$

Paralela prin $M'(\alpha, -\beta)$ are ecuaţia $y = -\beta$

$$\begin{cases} \beta y = p(x+\alpha) \\ y = -\beta \\ \beta^2 = 2p\alpha \end{cases} \underset{\alpha, \beta}{\overset{elimin}{\Rightarrow}} \quad 3y^2 + 2px = 0 \text{ ecuaţia unei parabole}$$

Răspuns corect c.

**GA - XI. 177**

Dreptele trec prin punctul $M_0(7, 2, 13)$ deci sunt coplanare.
Parametrii directori ai perpendicularei pe planul dreptelor sunt:

$$\overline{d_1} \times \overline{d_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -6\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}$$

Ecuaţia dreptei perpendiculare pe planul lor sunt:

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{1}$$

Răspuns corect d.

**GA - XI. 188**

$$\begin{cases} (OP) & x = y = z \\ (\pi) & x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$O'(x', y', z') \qquad \frac{O + x'}{2} = \frac{1}{3}; \quad \frac{O + y'}{2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{O + z'}{2} = \frac{1}{3}$$

$$O'\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Răspuns corect d.

**GA - XI. 195**

$$d : \begin{cases} x = y \\ z = \alpha y \end{cases} \quad ; \quad O, A(1,1,\alpha) \in d \Rightarrow \overline{d} = (1,1,\alpha)$$

$$P : 4x + 2y - 3z = 1 \Rightarrow \overline{N} = (4, 2, -3)$$

$$\overline{N} \cdot \overline{d} = 4 + 2 - 3\alpha = 0 \quad \alpha = 2$$

Răspuns corect a.

**GA - XI. 202**

Ecuația planului determinat de punctele A, B, C:

$$P_{ABC} : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow P_{ABC} : y + 2z + 1 = 0$$

$$\Rightarrow A = 0, B = 2, C = 2$$

Parametrii directori al dreptei:

$$\begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} l &= -3 + 3\lambda \\ m &= -5 \\ n &= 2\lambda + 3 \end{aligned}$$

Condiția de paralelism: $A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0 \Rightarrow 4\lambda - 4 = 0$ $\Rightarrow \lambda = 1$

Răspuns corect b.

**GA - XI. 204**

Din ecuaţia dreptei rezultă: $\begin{array}{l} M_0(1,-3,-2) \in D \\ \overline{V_D} = (1,8,8) \end{array}$

$\Rightarrow \overline{AM_0} = \overline{i} - 6\overline{j} - 3\overline{k}$

Distanţa de la punctul A la dreapta $(\mathrm{D})$ se calculează prin formula :

$$d = \frac{\left|\overline{AM_0} \times \overline{V_D}\right|}{\left|\overline{V_D}\right|} = \sqrt{\frac{893}{129}} = 2,631$$

fiindcă:
$$\overline{AM_0} \times \overline{V_D} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -6 & -3 \\ 1 & 8 & 8 \end{vmatrix} = -24\overline{i} - n\,\overline{j} + 14\overline{k}$$

$$\Rightarrow \left|\overline{AM_0} \times \overline{V_D}\right| = \sqrt{893}; \quad \left|\overline{V_D}\right| = \sqrt{129}$$

Răspuns corect c.

**ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ**
**(simbol AM – XI)**

**AM - XI. 015**

Avem

$$a_n = \left[\left(1+\frac{1-n}{n^2+n}\right)^{\frac{n^2+n}{1-n}}\right]^{\frac{1-n}{n^2+n}\cdot n} \cdot \left[\left(1+\frac{1-2n}{n^2+n}\right)^{\frac{n^2+n}{1-2n}}\right]^{\frac{1-2n}{n^2+n}\cdot n} \cdot$$

$$\cdot \left[\left(1+\frac{1-3n}{n^2+n}\right)^{\frac{n^2+n}{1-3n}}\right]^{\frac{1-3n}{n^2+n}\cdot n} \to e^{-1}\cdot e^{-2}\cdot e^{-3} = e^{-6}$$

Răspuns corect b.

**AM - XI. 020**

Limita devine:

$$\lim_{n\to\infty}\left[a\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}\right)+b\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}\right)+\left(a+b+1\right)\sqrt{n+3}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(a+b+1\right)\sqrt{n+3}=0\Leftrightarrow a+b+1=0$$

Răspuns corect b.

**AM - XI. 029**

Limita devine:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}$$

Răspuns corect d.

**AM - XI. 079**

Avem:

$$f\left(x\right)=\left\{\left[1+\prod_{k=1}^{n}\ln n\left(1+kx\right)\right]^{\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\ln(1+kx)}}\right\}^{\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{n}\ln(1+kx)}=$$

$$=e^{\prod_{k=1}^{n}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x\to 0}f\left(x\right)=e^{\sum_{k=1}^{n}k}=e^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Răspuns corect d.

**AM - XI. 107**

Arătăm că singurul punct de continuitate al funcției este $\frac{2}{3}$.

Fie $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ cu $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$

Avem $f(x_n) = 2 - x_n \underset{n\to\infty}{\to} 2 - x_0 \neq 2x_0 = f(x_0)$, deci $f$ nu e cont. în $x_0$

Fie $x_0 \in Q \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ cu $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$

Avem $f(x_n) = 2x_n \underset{n\to\infty}{\to} 2x_0 \neq 2 - x_0 = f(x_0)$

Dacă $x_0 = \frac{2}{3}$ arunci $(\forall)(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ avem

$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0) = \frac{4}{3}$, deci conf. T. Heine $f$ este continuă doar în $x_0 = \frac{2}{3}$

Răspuns corect d.

**AM - XI. 009**

Se ştie că $x^n \underset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & x \in (-1,1) \\ 1 & x = 1 \\ \infty & x \in (1,\infty) \\ \text{Nu există,} & x \in (-\infty,-1] \end{cases}$

Se vede că şirul $a_n(n) = \dfrac{1 + x^n\left(x^2 + 4\right)}{x\left(x^n + 1\right)}$ nu e definit în $x = 0$

Trecând la limită avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n\left(\frac{1}{x^n} + x^2 + 4\right)}{x^n\left(x + \frac{1}{x^n}\right)} = \dfrac{x^2 + 4}{x}$

$$f(x)=,\begin{cases}\dfrac{1}{x}: x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 3, \quad x=1\\ \dfrac{x^2+4}{x}, \quad x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\end{cases} \qquad \text{Deci} \quad A=\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$$

$f(1-0)=1\neq 5=f(1+0)\neq 3=f(0)$ Deci $D=\{1\}$

Răspuns corect b.

**AM - XI. 012**

Se foloseşte inegalitatea $\dfrac{2}{x}-1<\left[\dfrac{2}{x}\right]\leq\dfrac{2}{x}$

Pentru $x>0$, înmulțind cu $\dfrac{x}{3}$ se obține

$$\left(\frac{2}{x}-1\right)\frac{x}{3}<\frac{x}{3}\left[\frac{2}{x}\right]\leq\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{3}=\frac{2}{3} \quad \text{rezultă} \quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x}{3}\left[\frac{2}{x}\right]=\frac{2}{3}$$

Pentru $x<0$ înmulțind cu $\dfrac{x}{3}$ se obține

$$\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{3}\leq\frac{x}{3}\left[\frac{2}{x}\right]<\frac{x}{3}\left(\frac{2}{x}-1\right) \quad \text{şi} \quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x}{3}\left[\frac{2}{x}\right]=\frac{2}{3}\Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

Răspuns corect c.

**AM - XI. 039**

Avem:

$$f(0)=0; \quad f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{n}}, \quad \text{când} \quad x=\dfrac{1}{x}\\ \dfrac{0}{x}=0 \quad \text{când} \quad x\neq\dfrac{1}{n}\end{cases}=0$$

deci $f$ este derivabilă în $x = 0$ *şi* $f'(0) = 0$
Răspuns corect b.

**AM - XI. 142**

Funcţia se scrie

$$f(x) = \begin{cases} x^7, & x \in (-\infty, -1] \cup (0,1] \\ x^5, & x \in (-1, 0] \\ x^4, & x \in (1, \infty) \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 7x^6, & x \in (-\infty, -1) \cup (0,1) \\ 5x^4, & x \in (-1, 0) \\ 4x^3, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

$$f_s'(-1) = 7 \neq 5 = f_d'(-1) \qquad f_s'(1) = 7 \neq f_d'(1) = 4$$
$$f_s'(0) = f_d'(0)$$

Deci $f$ nu este derivabilă în $x = -1$ şi $x = 1$
Răspuns corect e.

**AM - XI. 152**

$$\left(3 - \sqrt{x-1}\right)^2 = 8 + x - 6\sqrt{x-1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{\left(3 - \sqrt{x-1}\right)^2} = \left|3 - \sqrt{x-1}\right| \Rightarrow D = [1, \infty)$$

$$3 - \sqrt{x-1} \geq 0 \quad \text{şi} \quad 9 \geq x - 1 \Leftrightarrow x \leq 10 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3 - \sqrt{x-1}, & x \in [1, 10] \\ \sqrt{x-1} - 3, & x \in (10, \infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}, & x \in (1, 10) \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1},} & x \in (10, \infty) \end{cases}$$

$$f_a'(1) = -\infty; \quad f_s'(0) = -\frac{1}{6}; \quad f_a'(10) = \frac{1}{6} \Rightarrow M = \{1, 10\}$$

Răspuns corect d.

**AM - XI. 159**

Punem succesiv condițiile ca f să fie continuă în 1, derivabilă în 1 şi de două ori derivabilă în 1.

$$f(1-0)=0,\quad f(1+0)=\alpha+\beta+\gamma \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=0 \qquad (1)$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1)\quad f_s'(1)=1\\ 2\alpha x+\beta, & x\in(1,0)\quad f_d'(2\alpha+\beta)\end{cases} \Rightarrow 2\alpha+\beta=1 \qquad (2)$$

$$f''(x)=\left.\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}, & x\in(0,1)\quad f_s''(1)=-1\\ 2\alpha & x\in(1,\infty)\quad f_d''2\alpha\end{cases}\right\} \Rightarrow 2\alpha=-1 \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3)\Rightarrow \alpha=-\frac{1}{2},\quad \beta=2,\quad \gamma=-\frac{3}{2}$$

Răspuns corect d.

**AM - XI. 178**

Aplicăm formula lui Leibnitz $f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$u(x)=e^{-\frac{x}{2}},\quad v(x)=x^2$$

$$f^{(n)}(x)=u^{(n)}\cdot v+C_n^1\, u^{(n-1)}\cdot v'+C_n^2\, u^{(n-2)}\cdot v''+0$$

$$u^{(n)}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{x}{2}};\quad v'=2x,\quad v''=2\quad v^{(k)}(x)=0 \text{ pentru } k>2$$

$$f^{(n)}(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{x}{2}}\cdot x^2+n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} e^{-\frac{x}{2}}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} e^{-\frac{x}{2}}\cdot 2$$

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n n(n-1)}{2^{n-2}};\quad L=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\left[n(n-1)\right]}{2^{n-2}}=0$$

Răspuns corect d.

**AM - XI. 190**

Avem $f'(x)=\dfrac{7}{(x+3)^2}$ $\qquad$ *Ec.tg* : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$$f'\left(x_0\right)=2;\quad y-\frac{-6+\sqrt{14-1}}{\frac{\sqrt{14}}{2}}=2\left(x+3-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y=2x+8-2\sqrt{14}$$

Răspuns corect e.

**AM - XI. 203**

$$f\left(x\right)=\ln\left(x^2+1\right)-x$$

Fie:

$$f'\left(x\right)=\frac{2x}{x^2+1}-1=\frac{-\left(x-1\right)^2}{x^2+1}<0$$

Tabelul de variaţie

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $\searrow$ | | $-\infty$ |

Deci $f\left(x\right)>0$ pentru $x\in\left(-\infty,0\right)$

Răspuns corect c.

**AM - XI. 219**

Trebuie ca $f'\left(-2\right)=0$ şi $f'\left(2\right)=0$

$$f'\left(x\right)=\frac{\left(2x-a\right)\left(x^2+1\right)-x^3+ax^2}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}=\frac{x^3+2x-a}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}$$

$$-8-4-a=0\Rightarrow a=-12$$

$$8+4-a=0\Rightarrow a=12$$

Răspuns corect c

**AM - XI. 226**

Avem: $f'(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{ax^2+b}}$; $f'(x)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\sqrt{b}=1 \Rightarrow b=1$

Pentru ca D să fie interval de lungime minimă trebuie ca

$$\begin{cases}\Delta>0\\ \sqrt{S^2-4P}=\left|x_1-x_2\right|=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4ab>0\\ 2\sqrt{\dfrac{-b}{a}}=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{-\frac{1}{a}}=1 \Rightarrow a=-1 \text{ şi } b=1$$

Răspuns corect e.

**AM - XI. 235**

Avem: $$f'(x)=\frac{x^3-3x+a}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$x^3-3x+a=0$ Şirul lui Rolle : $\varphi'(x)=3x^2-3=0$

| $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-$ | $a+2$ | $a-2$ | $+$ |
| | $+$ | $-$ | |

$$\begin{cases}a+2>0\\ a-2<0\end{cases} \Rightarrow a\in(-2,2)$$

Răspuns corect b.

**AM - XI. 237**

Fie: $$f(x)=2\ln x+x^2-4x+m^2-m+1$$ $$x>0$$

Avem: $f'(x) = \frac{2}{x} + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = 1$

Şirul lui Rolle

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| | $-\infty$ | $m^2 - m - 2$ | $+\infty$ |

Trebuie ca: $m^2 - m - 2 < 0 \Rightarrow m \in (-1, 2)$

Răspuns corect c.

**AM - XI. 266**

Pe baza teoremei Lagrange rezultă:

$$\ln 2 = \frac{1}{C}, \quad C \in (1,2)$$

Avem: $e^2 < 8 \Rightarrow 2 < 3\ln 2 \Rightarrow \ln 2 > \frac{2}{3} \Rightarrow C < \frac{3}{2}$

Demonstrăm că: $C > \sqrt{2} \Leftrightarrow \ln 2 < \frac{1}{\sqrt{2}}$. E suficient să demonstrăm relaţia:

$$(1) \qquad \ln t < \frac{t-1}{\sqrt{t}}, \quad t > 1$$

Dacă

$$g(t) = \ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}}, \quad t > 1 \Rightarrow g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{t+1}{2+\sqrt{t}} =$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{t-1}\right)^2}{2+\sqrt{t}} < 0, \quad t > 1 \Rightarrow g \text{ descrescătoare} \quad \Rightarrow (1)$$

Punem în $(1)$ $t = 2$

Răspuns corect c.

**AM - XI. 275**

Se verifică imediat că toate punctele c menţionate în lista de răspunsuri a) $-f$ ) aparţin intervalului $(x_1, x_2)$ în condiţiile impuse, deci nu pot fi eliminate apriori:

Aplicând formula lui Cauchy pentru funcțiile $f$ şi $g$, avem:

$$\frac{\sin x_2 - \sin x_1}{\cancel{3}\left(\cos x_2 - \cos x_1\right)} = \frac{\cos c}{-\cancel{3}\sin c}$$

$$\frac{2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cos\frac{x_2 + x_1}{2}}{-2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\sin\frac{x_2 + x_1}{2}} = -\frac{\cos c}{\sin c}$$

Unica soluție pe $\left(x_1, x_2\right)$ este : $C = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

Răspuns corect c.

**AM - XI. 278**

Avem: $f\left(x\right) - f\left(0\right) = xf'\left(\theta\left(x\right)\right)$, unde $\theta\left(x\right) = \theta \cdot x$ cu $\theta \in \left(0,1\right)$

$$f'\left(x\right) = -\frac{1}{\left(x+1\right)^2} \quad : \quad \forall x \in \left[0,1\right]$$

Avem: $$\frac{1}{x+1} - 1 = -1\frac{1}{\left[1 + \theta \cdot x\right]^2} \quad : \forall x \in \left(0,1\right)$$

Deci $\theta = \theta\left(x\right) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ , $\forall x \in \left(0,1\right)$

Evident $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \dfrac{1}{2}$

Răspuns corect c.

**MATEMATICĂ , clasa a XII – a**
**ALGEBRĂ SUPERIOARĂ**
**(simbol AL – XII)**

**AL - XII. 018**

Avem: $x_2 = x * x = 3x = \left(2^2 - 1\right)x$

Presupunem $x_k = \left(2^k - 1\right)x$ şi demonstrăm că:

$$x_{k+1} = \left(2^{k+1} - 1\right)x$$

$$x_k * x = \left[\left(2^k - 1\right)x\right] * x = 2\left(2^k - 1\right)x + x = \left(2^{k+1} - 1\right)x$$

deci

$$\left(2^{2n} - 1\right)x = 8\left[\left(2^n - 1\right)x - x\right] - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left(2^{2n} - 1\right)x = \left(8 \cdot 2^n - 8 - 8 - 1\right)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2^{2n} - 1 = 8 \cdot 2^n - 17 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2n} - 8 \cdot 2^n + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^n - 4\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^n = 4 \Leftrightarrow n = 2$$

Răspuns corect e.

**AL - XII. 025**

$$E_1 = \left(a * b\right) * c = \left(ma + nb + p\right) * c = m\left(ma + nb + p\right) + nc + p$$

$$E_2 = a * \left(b * c\right) = a * \left(mb + nc + p\right) = ma + n\left(mb + nc + p\right) + p$$

din $E_1 \cong E_2 \Rightarrow \begin{cases} m\left(m-1\right) = 0 & (1) \\ n\left(1 - n = 0\right) & (2) \\ p\left(m - n\right) = 0 & (3) \end{cases}$ Ec (3) poate fi satis. în 2 cazuri a) m=n dar atunci op. * este comut şi nu ne intere deci a; b) p=0 iar (1) şi (2) ne conduc fiecare la 2 posibilităţi: m=0 şi n=0
m=1 şi n=1 | când * este comutat.

şi m=1 şi n=0
m=0 şi n=1 când * nu este comut./ceeace ne intere.

Deci soluţiile sunt: (1,0,0) şi (0,1,0)
Răspuns corect a.

**AL - XII. 034**
Avem:

$$X^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad X^3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad X^4=I_4$$

Dar 1997=4.499+1

$$X^{1997}=\left(X^4\right)^{499}\cdot X=X$$

$$\left(X^{1997}\right)^{-1}=X^3\left(X^3\cdot X=XX^3=I_4\right)$$

Răspuns corect c.

**AL - XII. 039**

$$f_n\left(f_m(x)\right)=\begin{cases}nf_m(x),\ f_m(x)>0 \overset{m>0}{\Rightarrow} x>0\\ 0\qquad,\ f_m(x)\le 0 \quad\Downarrow\quad x\le 0\end{cases}\quad \Rightarrow f_n\circ f_m=f_{nm}$$

$$f_n\circ f_e\overset{A}{=}f_e\circ f_n=f_n\Leftrightarrow e=1$$

$$f_{2001}\circ f_n=f_n\circ f_{2001}=f_1\Leftrightarrow\quad 2001n=1\Rightarrow n\notin\mathbb{N}^*$$

Răspuns corect b.

**AL - XII. 040**

Inversul lui $x$ în M este elem. simetric al operaţiei $x'$, adică: $x\cdot x'=1$ sau

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\cdot\left(a'+b'\sqrt{2}\right)=1,\quad aa'+2bb'+\sqrt{2}\left(ab'+ba'\right)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} aa' + 2bb' = 1 \\ ba' + ab' = 0 \end{cases} \qquad \text{Nec.: } \Delta \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & a \end{vmatrix} \neq 0$$

sau $a^2 - 2b^2 \neq 0$ (Condiţie Nec)

Dar, mai trebuie ca

şi

$$\left.\begin{aligned} a' &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a}{\Delta} \in \mathbb{Z} \\ b' &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = \frac{-b}{\Delta} \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^2 - 2b^2 = \pm 1$$

Răspuns corect c.

**AL - XII. 041**

Elementul neutru e funcţia identică $1_E = f_0$

$$f_{-1} \circ f_t = f_t \circ f_{-1} = f_0$$

$$\Updownarrow$$

$$f_t\left(x - y + \frac{1}{2}, y - 1\right) = (x, y), \quad \forall (x, y) \in E$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(x - y + \frac{1}{2} + t(y-1) + \frac{t^2}{2},\ y - 1 + t\right) = (x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ -1 + t = 0 \\ \frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2} = 0 \\ -1 + t = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = 1 \Rightarrow f_1, \text{ adică}$$

$$g(x, y) = \left(x + y + \frac{1}{2}, y + 1\right);$$

Răspuns corect e.

**AL - XII. 051**

$$z*e=z,\quad \forall z\in\mathbb{C}\qquad *\text{este evident comutativă}$$

$$z(e+i)+ie-1-i=z\quad \forall z\in\mathbb{C}\ \Rightarrow e+i=1$$

$$e=1-i$$

$$z\cdot z'=1-i\Rightarrow z'=\frac{2-iz}{z+i}$$

Deci orice $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ este simetrizabil astfel încât $(\mathbb{C}\setminus\{-i\},*)$ este grup abelian $\alpha=-i$

Răspuns corect f.

**AL - XII. 058**

Egalitatea $a^2=(ab)^2$ se mai scriu $a^2=abab$ sau $a=bab(1)$ Egalitatea $b^2=(ab)^2$ se scrie $b^2=abab\Rightarrow b=aba(2)$. Din (1) şi (2) rezultă $ab=(bab)(aba)\Leftrightarrow ab=b(aba)ba\Leftrightarrow ab=b^3a$

Înmulțind la dreapta cu a obținem $aba=b^3a^2$ adică $b=b^3a^2$, de unde $b^2a^2=e$. Cum $b^2=a^2$ ultima egalitate se poate scrie $a^4=e$ sau $b^4=e$

Răspuns corect a.

**AL - XII. 069**

Elementul neutru este $E=\begin{pmatrix}\hat{1} & 0\\ 0 & \hat{1}\end{pmatrix}$. Elementul $X=\begin{pmatrix}\hat{x} & y\\ -y & x\end{pmatrix}$ are un invers $X'=\begin{pmatrix}x' & y'\\ -y' & x'\end{pmatrix}$ dacă şi numai dacă $X\cdot X'=X'\cdot X=E$ adică $xx'-yy'=1;\quad xy'+yx'=0$

A doua relație se scrie $\frac{x'}{x}=-\frac{y'}{y}=\lambda$. Înlocuind în prima $x'=\lambda x;\quad y'=-\lambda y$ se obține $\lambda'\left(x^2+y^2=1\right)$ de unde o soluție este $\lambda'=1$ şi $x^2+y^2=1$. Numărul elementelor lui G este 9 deoarece $x, y \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$. Grupul $(G, \bullet)$ va conţine 4 elemente datorită condiţiei $x^2 + y^2 = 1$.

Astfel $(G, \bullet)$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}_n, +)$, deci n=4

Răspuns corect a.

**AL - XII. 071**

Condiţia de comutativitate $X \cdot X' = X' \cdot X$, unde

$$X = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ implică: } ac' = a'c \quad (*)$$

Dar $(*)$ nu este satisfăcută pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$ în cazurile subgrupurilor generate de matricele d) şi e).

Astfel, sunt comutative subgrupurile generate de a), b), c), şi f).

Definim, acum, $f : (\mathbb{R}, +) \to (G, \cdot)$ prin

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avem $$f(x + x') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x + x' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & x' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = f(x) \cdot f(x')$$

Iar $f$ este bijecţie.

Răspuns corect c.

**AL - XII. 094**

$$\frac{\hat{3}}{\hat{4}} = \hat{3} \cdot \hat{4}^{-1} = \hat{3} \cdot \hat{3} = 9; \quad \frac{\hat{7}}{\hat{6}} = \hat{7} \cdot \hat{2} = \hat{3}; \quad \frac{\hat{9}}{\hat{2}} = \hat{9} \cdot \hat{6}^{1} = 10;$$

$$E = \left(\hat{9} \cdot \hat{5} + \widehat{10} \cdot \hat{3} = 9\right) \cdot \widehat{10} = \left(\hat{3} + \hat{8}\right) \widehat{10} = \hat{0} \cdot \widehat{10} = \hat{0};$$

Răspuns corect a.

**AL - XII. 097**

$$f(z_1+z_2)\overset{1)}{=}f(z_1)+f(z_2) \quad \text{şi} \quad f(z_1\cdot z_2)\overset{2)}{=}f(z_1)\cdot f(z_2), \quad \forall z_1,z_2\in\mathbb{C};$$

deci $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\quad f(x+yi)\overset{1)}{=}f(x)+f(yi)\overset{2)}{\Rightarrow}f(x)+f(y)f(i)=$

$$\xlongequal[x\in\mathbb{R}]{f(x)=x} x+yf(i)$$

$$f(i^2)=f(-1)\xlongequal{f(x)=x}-1; \quad \text{deci} \quad f(i)=\pm i\Rightarrow f(x+yi)=x\pm yi$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$[f(i)]^2 \qquad\qquad f(z)=z, \quad f(z)=\bar{z}$$

(sunt morfisme şi bijecţii)

$$\Rightarrow S(z)=z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}\,z$$

Răspuns corect e.

**AL - XII. 124**

B este sistem generator, dacă pentru $\forall\overline{V}(a,b,c)$

avem $(a=3, b=1, c=-1)$:

$\overline{V}(a,b,c)=\alpha_1\overline{V_1}+\alpha_2\overline{V_2}+\alpha_3\overline{V_3}\Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ coordonatele vectorului $\overline{V}$ în baza B.

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a=\alpha_1+\alpha_2+\alpha 3 \\ b=\qquad\ \alpha_2+\alpha_3 \\ c=\qquad\qquad\ \ \alpha_3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=a-b=2 \\ \alpha_2=b-c=2 \\ \alpha_3=c=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\overline{V_B}=(2,2,-1)$$

Răspuns corect c.

**AL - XII. 129**

Sistemul S este bază dacă şi numai dacă este liniar independent.

Deci
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & \lambda \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 2-\lambda \\ -1 & -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -5 & 52+8 \\ 2 & 0 & 4 & 1-2\lambda \\ -1 & -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ -3 & -5 & 5\lambda+8 \\ 2 & 4 & 1-2\lambda \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 82+8 \\ 0 & 6 & 1-4\lambda \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -8 & 8\lambda+8 \\ 6 & 1-42 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{array}{l} -9+32\lambda-48\lambda-48 \neq 0 \Leftrightarrow \\ -16\lambda-56 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -\dfrac{56}{16} = -\dfrac{7}{2} \end{array}$$

Răspuns corect b.

**AL - XII. 136** Avem:

$$\begin{cases} f(2,1) = a_1^1(2,1,0) + a_1^2(0,1,1) + a_1^3(0,0,2) \\ f(1,2) = a_2^1(2,1,0) + a_2^2(0,1,1) + a_2^3(0,0,2) \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} (4,3,-1) = \left(2a_1^1, a_1^1 + a_1^2, a_1^2 + 2a_1^3\right) \\ (2,3,-2) = \left(2a_1^2, a_1^2 + a_2^2, a_2^2 + 2a_2^3\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1^1 = 4 & \Rightarrow a_1^1 = 2 \\ a_1^1 + a_1^2 = 3 & \Rightarrow a_1^2 = 1 \\ a_1^2 + 2a_1^3 = -1 & \Rightarrow a_1^3 = -1 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \Rightarrow \begin{cases} 2a_2^1 = 2 & \Rightarrow a_2^1 = 1 \\ a_2^1 + a_2^2 = 3 & \Rightarrow a_2^2 = 2 \\ a_2^2 + 2a_2^3 = -2 & \Rightarrow a_2^3 = -2 \end{cases}$$

$$A = [f]_{(B_1,B_2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Răspuns corect a.

**AL - XII. 140**

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left(-7x_1+10x_2,\,-5x_1+8x_2\right)=(0,0)\Rightarrow$$

$\begin{cases}-7x_1+10x_2=0\\-5x_1+8x_2=0\end{cases}$. Acest sistem liniar omogen de 2 ecuații cu 2 necunoscute admite numai soluția banală $x_1=0,\quad x_2=0$ deoarece determinantul sistemului este

$\Delta=\begin{vmatrix}-7 & 10\\-5 & 8\end{vmatrix}=-56+50=-6\neq 0$ . Aşadar $x=(0,0)\in \mathbb{R}^2$.

$$f(x)=\lambda x \Leftrightarrow \left(-7x_1+10x_2,\,-5x_1+8x_2\right)=\left(\lambda x_1,\lambda x_2\right)\Leftrightarrow$$

$\begin{cases}(-7-\lambda)x_1+10x_2=0\\-5x_1+(8-\lambda)x_2=0\end{cases}$ Acest sistem admite soluție nebanală dacă şi numai dacă determinantul său $\Delta=0$, adică

$\Delta=\begin{vmatrix}-7-\lambda & 10\\-5 & 8-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-6=0\Rightarrow \quad \lambda_1=-2,\lambda_2=3$

Răspuns corect b.

**ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ**
**(simbol AM - XII)**

**AM - XII. 001**

Pentru $x\neq 0, f(x)=\left(x\sin\dfrac{1}{\alpha}\right)'$. Dacă $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$, fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă.

Atunci $F(x)=x\sin\dfrac{1}{x}+c,\quad \forall x\neq 0, c\in\mathbb{R}$ .

Cum F este continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow F(0)=C$

Cum F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow F'(0) = K = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ , limită care nu există. Deci am obţinut o contradicţie, aşadar $f$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$
Răspuns corect f.

**AM - XII. 004**

$f$ nu are proprietatea lui Darbaux pe $[-1,1] \Rightarrow f$ nu are primitive pe $[-1,1]$.

Într-adevăr $f\big|_{[-1,0)}$ şi $f\big|_{[0,1]}$ sunt continue fără ca $f$ să fie continuă pe $[-1,1]$

$$f[-1,1] = \underbrace{\left[\frac{1}{e}, 1\right) \cup [2,3]}_{\text{nu este interval}}$$

Răspuns corect e.

**AM - XII. 022**

Schimbarea de variabile $tgx = t \Rightarrow x = arctgt = \varphi(t)$

$\varphi'(t) = \dfrac{1}{t^2 + 1}$ $\qquad\qquad$ $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in \mathbb{R}$

$$\int \sqrt{1 + tg^2 x}\,dx = \int \sqrt{1 + t^2} \cdot \frac{1}{t^2 + 1}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}\,dt =$$

$$= \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right) + C = \ln\left(tgx + \frac{1}{\cos x}\right) + C$$

Răspuns corect b.

**AM - XII. 031**

$$I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx; \quad J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$$

$$I + J = \int dx = x + c_1$$

$$J - I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \ln\left|\sin x + \cos x\right| + c_2$$

$$2I = x + c_1 - \ln\left|\sin x + \cos x\right| - c_2$$

$$I = \frac{1}{2}\left(x - \ln\left|\sin + \cos x\right|\right) + k$$

Răspuns corect d.

**AM - XII. 039**

$(5+x)^2 - 16x - 16 = (x-3)^2$, $(10+x)^2 - 36x - 36 = (x-8)^2$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{x+5+|x-3|}{2}} - \sqrt{\frac{x+5-|x-3|}{2}} + \sqrt{\frac{x+10+|x-8|}{2}} - \sqrt{\frac{x+10-|x-8|}{2}}, \quad x \in [3,8]$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+2}{2}} - \sqrt{\frac{8}{2}} + \sqrt{\frac{18}{2}} - \sqrt{\frac{2x+2}{2}} = -2+3 = 1$$

$$\Rightarrow F(x) = x + c$$

Răspuns corect b.

**AM - XII. 043**

$$I = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot dx = \int \frac{1+x^2}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= J + \sqrt{1+x^2}$$

unde

$$J = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\frac{1}{x^2}\,dx}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = -\ln\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + \frac{1}{x}\right) + C$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{1+x^2} - \ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x} + C$$

Răspuns corect b.

**AM - XII. 052**

$$a_n = \frac{3}{n}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3(n-1)}{n}}}\right]$$

$$a_n = \frac{3}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+i\frac{3}{n}}}$$

Alegem funcţia $f:[0,3]\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ care este continuă deci integrabilă şi diviziunea $\Delta_{[0,3]} = \left\{0, \frac{3}{n}, \frac{6}{n}, \frac{9}{n}, \ldots, \frac{3(n-1)}{n}, 3\right\}$

şi punctele $\varepsilon_i = \left\{0, \frac{3}{n}, \frac{6}{n}, \ldots, \frac{3(n-1)}{n}\right\}$

$$\lim a_n = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x}\,\Big|_0^3 = 2\left(\sqrt{1+3} - \sqrt{1+0}\right) = 2$$

Răspuns corect b.

**AM - XII. 066**

Cazul I. $a \le 1$ $\quad\left|x^2 + a\right| = \begin{cases} x^2 + a,\ x \in \left(-\infty, -\sqrt{-a}\right) \cup \left(\sqrt{-a}, \infty\right) \\ -x^2 - a,\ x \in \left[-\sqrt{-a}, \sqrt{-a}\right] \end{cases}$

$$F(a) = \int_0^1 -\left(x^2 + a\right)dx = -\left[\frac{x^3}{3} + ax\right]\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3} - a$$

Cazul II. $-1 < a \le 0$

$$F(a) = \int_0^{\sqrt{-a}}\left(-x^2 - a\right)dx + \int_{\sqrt{-a}}^1\left(x^2 + a\right)dx = -\frac{4}{3}a\sqrt{-a} + a + \frac{1}{3}$$

Cazul III. $0 < a$

$$F(a)=\int_0^1 \left(x^2+a\right)dx=\frac{1}{3}+a$$

Răspuns corect c.

**AM - XII. 086**

Avem integrală pe interval simetric din funcția impară $f(x)=\dfrac{x}{\left|\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right|}$

Deci $I=0$

Răspuns corect c.

**AM - XII. 114**

Ecuația $t^2+2(x-1)t+4=0$, are $\Delta=4\left(x^2-2x-3\right)=4(x+1)(x-3)$

Dacă $x\in(-1,3)$, $\Delta<0$ şi $t_1,t_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ cu $\left|t_1\right|=\left|t_2\right|=2$. Dacă $x\in(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$, $\Delta\geq 0$ *şi* $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ cu $t_{1,2}=1-x\pm\sqrt{x^2-2x-3}$

$$\left|t_1(x)\right|=\begin{cases}1-x-\sqrt{x^2-2x-3}, & x\leq -1\\ -1+x+\sqrt{x^2-2x-3}, & x\geq 3;\end{cases}\qquad \left|t_2(x)\right|=\begin{cases}1-x+\sqrt{x^2-2x-3}, & x\leq -1\\ -1+x-\sqrt{x^2-2x-3}, & x\geq 3;\end{cases}$$

aşa că

$$f(x)=\begin{cases}1-x+\sqrt{x^2-2x-3}, & x\leq -1\\ 2 & x\in(-1,3)\\ -1+x+\sqrt{x^2-2x-3}, & x\geq 3\end{cases}$$

Se calculează separat

$$I=\int\sqrt{x^2-2x-3}\,dx=\int\sqrt{(x-1)^2-4}\,dx=\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{(x-1)^2-4}-2\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-4}\right|$$

Atunci

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1}\left(1-x+\sqrt{x^2-2x-3}\right)dx + \int_{-1}^{3} 2dx + \int_{3}^{4}\left(-1+x+\sqrt{x^2-2x-3}\right)dx =$$

$$= 13+3\sqrt{5}+2\ln\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

Răspuns corect d.

**AM - XII. 133**

Avem: $x^4+2x^3-x^2-2x+2=\left(x^2+x-1\right)^2+1$

Deci $I=\int_{0}^{1}\frac{\left(x^2+x-1\right)'}{1+\left(x^2+x-1\right)^2}dx = arctg\left(x^2+x-1\right)\Big|_0^1=$

$$= arctg1 - arctg(-1) = \frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Răspuns corect d.

**AM - XII. 155**

$$A=\int_{-1}^{1}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2}{2}\right)dx = arctgx\Big|_{-1}^{1}-\frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$$

Răspuns corect c.

**AM - XII. 169**

$$V=\pi\int_{0}^{2}y^4dy=\frac{\pi y^5}{5}\Big|_0^2=\frac{32\pi}{5}$$

Răspuns corect c.

**AM - XII. 174**

$$V=\pi\int_0^1\sqrt{x(1-x)}dx;\quad x=\sin^2 t$$

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}\,2\sin t\cos t dt=$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t dt=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{\pi^2}{8}$$

Răspuns corect b.