Cursul numărul 1

MATEMATICA ÎN EGIPT

1. Mărturii implicite asupra matematicii egiptene

Opinia curentă este că nu vom şti niciodată cât de mult datorăm antichității egiptene. În Egipt, încă de timpuriu, societatea a făcut mari progrese deoarece a cunoscut lungi perioade de pace, țara fiind uşor de apărat (datorită barierelor naturale: mare, deşert) şi deoarece țara era fertilă, grație Nilului şi a climei plăcute. Complexitatea treburilor administrative, negoțul înfloritor, sistemul de irigații, inundațiile au avut nevoie de scriere şi de numere.

Grecii recunoşteau că matematica, alias geometria, venea din Egipt. Herodot spunea că egiptenii au inventat geometria, necesară lor din cauza inundațiilor anuale ale Nilului, pentru a şti când vin inundațiile şi pentru refacerea loturilor de pământ. De fapt, cum spunea Plutarh, cei mai înțelepți greci (Pythagoras, Platon, Thales din Milet) s-au format în Egipt, învățând de la preoți, între altele, secretele matematicii.

Însă, egiptenii credeau că matematica le-a fost dăruită de zeul Toth (sau Teuth), cel care i-a învățat şi scrierea. Există două idei asupra originii matematicii, grecii împărțindu-se în cei care cred că matematica este: operă a omului (Aristoteles) sau inspirată de divinitate (Platon).

Una dintre sursele istoriei matematicii la capitolul referitor la Egiptul antic, Aristotel s-a interesat de civilizația egipteană, remarcând că "*ştiința matematică s-a înfiripat mai întâi în Egipt, căci acolo era îngăduit castei preoților să aibă răgaz îndeajuns*".

Monumentalele construcții ale piramidelor, palatele somptuoase, templele minunate, Sfinxul, toate acestea nu ar fi putut fi concepute şi ridicate dacă egiptenii nu ar fi avut cunoştințe avansate de matematică, deoarece, aşa cum spune Francis Bacon: "ştim atât cât putem", iar grecii "puteau"! Au construit încă în 2778 – 2723 î.Chr. marea piramidă în trepte de la Saqqara(h), care avea baza 109m × 125m, înălțimea 61m, 6 trepte, un zid de incintă înalt de 10m şi lung de 1600m. În perioada 2723 – 2563 î. Chr. a fost construită o piramidă romboidală, putând cita, pe lângă, aproximativ, 150 de piramide mai mici, marea piramidă de la Gizeh, anume, piramida lui Kheops, una dintre cele şapte minuni ale lumii, singura rămasă până azi. Această piramidă înaltă de 147m, are panta de 51°52', fețele orientate spre cele patru puncte cardinale. Singura sa intrare, la Nord, are axul culoarului de acces orientat spre Steaua Polară. Suprafața fețelor este egală cu pătratul înălțimii piramidei. Raportul dintre baza şi înălțimea triunghiurilor isoscele care sunt fețele este chiar numărul de aur, şi lista "coincidențelor" ar putea continua. Există şi păreri contrare, printre acestea este şi cea a lui C. C. D. Shute, care cred că toate aceste coincidențe pot fi explicate simplu, şi anume, piramida era altfel când a fost construită, egiptenii au mai luat pietre din ea pentru a-şi construi casele, iar vântul a contribuit şi el la şlefuirea piramidei.

Calendarul egiptean, creat în mileniul al IV – lea î. Chr., este un calendar solar şi este cel mai bun calendar din antichitate, fiind preluat de Iulius Cesar în calendarul iulian. Lunile şi zilele se "numărau", nu se numeau: anul 2, luna a 3 – a etc. După ocuparea Egiptului de către persani (525 î. Chr.), lunile capătă nume. În 1937, la Liga Națiunilor a fost prezentat un proiect de calendar universal bazat pe calendarul egiptean.

Tot de la egipteni s-a moştenit împărțirea zilei în 24 de ore, dar acest lucru era acceptat şi de asirieni şi babilonieni, contemporani cu egiptenii.

Cunoştințele de astronomie ale Egiptului antic sunt mărturisite de surse indirecte, cum ar fi: reprezentările de evenimente astronomice de pe morminte, "calendarele în diagonală" de pe sarcofage, calendarul egiptean, orientarea piramidelor, cunoaşterea anuală a începutului inundațiilor.

Egiptenii făceau distincția între planete şi stele. Ei cunoşteau Steaua dimineții (planera Venus), Astrul strălucitor (Jupiter) ş.a. Cupola cerului era împărțită în 36 de sectoarea, fiecare fiind dominat de un astru sau o constelație.

Orele erau indicate prin instrumente de observare astronomică noaptea şi era necesară cunoaşterea lor pentru evenimente religioase; pentru zi, se utilizau clepsidre cu apă.

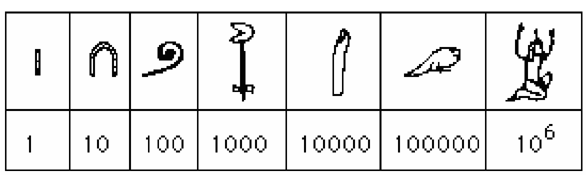
2. *Surse scrise pentru cunoaşterea matematicii egiptene*

După ce Champollion a reuşit să descifreze scrierea egipteană, mărturiile scrise, mai întâi cele săpate în piatră, au devenit utile. În piramide şi siturile arheologice s-au găsit texte scrise pe papirusuri, acestea parvenind de acum aproape 4000 de ani, enorme cantităţi de documente fiind nimicite de clima umedă şi de depunerile anuale de mâl.

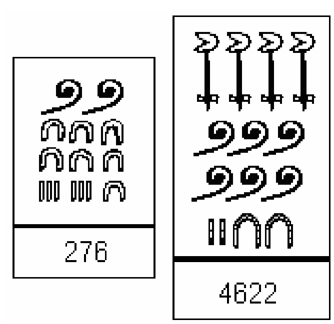
Textele egiptene de înţelepciune propun modele de existenţă, persoane vii ca exemple de urmat şi nu expun virtuţi abstracte şi calităţi ce trebuie admirate, învăţământul egiptean desfăşurându-se mai degrabă prin prezentarea de exemple concrete, decât prin expunerea unor teorii generale. În mulţimea papirusurilor ce conţin hieroglife reprezentând numere, puţine sunt interesante din punctul de vedere al unui matematician, majoritatea conţinând date comerciale. Dintre papirusurile interesante se disting "papirusul de la Moscova" şi "papirusul Rhind" din care aflăm probleme de matematică care se învăţau într-o şcoală de scribi.

În muzeele lumii se mai află texte matematice de pe cele două tăbliţe din lemn de la Cairo şi papirusurile demotice Carlsberg 1 şi 9 (sec. al II – lea î. Chr.).

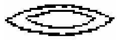
În continuare vom face câteva observaţii asupra sistemului de numeraţie egiptean (care a fost de la început în baza 10) şi asupra notării numerelor. Egiptenii aveau şapte hieroglife care reprezentau numere:

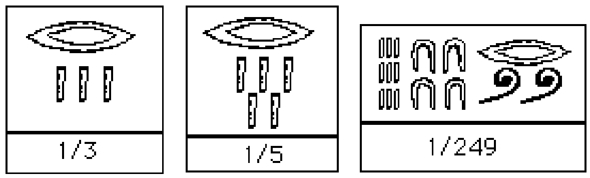


Astfel, pe o piatră găsită la Karnak, au fost săpate numerele 276 şi 4622 în hieroglife, pe la 1500 î. Chr. Piatra se află la Muzeul Louvre în Paris.



Este clar că adunarea numerelor se face uşor, înlocuind zece simboluri de acelaşi fel cu un simbol de valoare superioară.

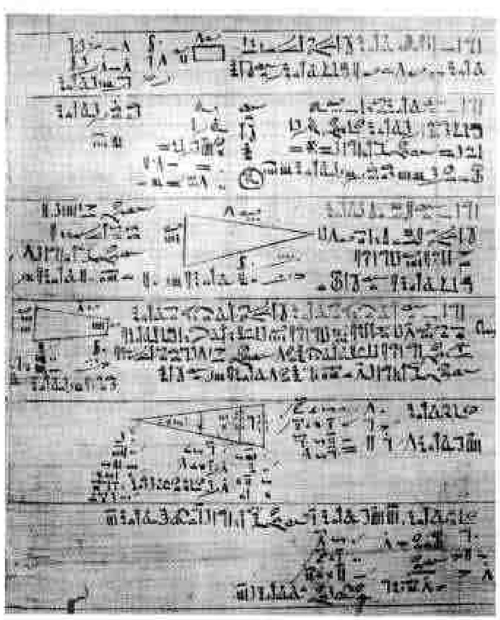
Fracțiile la egipteni erau fracțiile cu numărător 1 (singura excepție, $\frac{2}{3}$). Simbolul  reprezenta hieroglifa pentru "parte" (o gură).



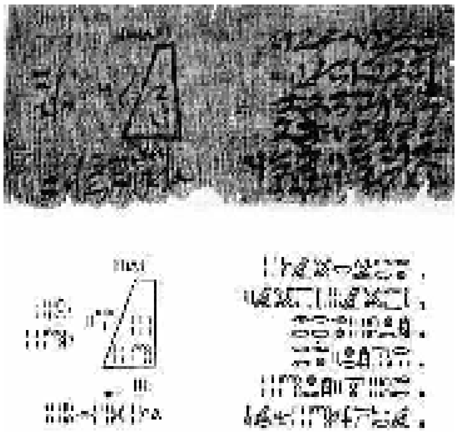
Hieroglifele nu au rămas neschimbate de milenii, ci se schimbă mai mult sau mai puțin, se trece la alt tip de scriere, după cum istoria Egiptului antic se separă în trei perioade distincte.

Egiptenii au avut şi un alt sistem de scriere a numerelor, aşa – zisa *scriere hieratică*, cu simboluri distincte pentru: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000. Cele două scrieri au fost utilizate simultan.

Papirusurile Rhind şi Moscova sunt scrise cu simboluri hieratice, în vreme ce numerele săpate în piatră (pe temple, morminte, monumente, vase) sunt scrise cu hieroglife.



Papirusul Rhind, numit astfel după numele egiptologului scoțian Alexander Henry Rhind care l-a cumpărat la Luxor în 1858, are o lungime de 6m pe o lățime de $\frac{1}{3}$ dintr-un metru; a fost scris de scribul Ahmes pe la 1650 î. Chr. Acesta afirmă că el copiază un document de data de 200 de ani. Acest papirul conține 87 de probleme, fiind o colecție de probleme rezolvate care promite cititorului "un studiu adânc al tuturor lucrurilor, o privire asupra a tot ceea ce există, cunoaşterea tuturor secretelor obscure”.



Papirusul de la Moscova, achiziționat de V. S. Golenişcev, adus la Muzeul de Artă din Moscova, a fost scris tot pe la 1850 î. Chr. şi conține 25 de probleme.

Dintre operațiile aritmetice (înmulțire şi împărțire) aflăm din papirusul Rhind, fiind ilustrată înmulțirea a două numere: 41×59; ea se face utilizând dublarea unuia dintre ele şi scrierea celuilalt ca sumă de puteri ale lui 2, începând cu $2^0 = 1$.

41		59		
1		59		V
2		118		
4		236		
8		472		V
16		944		
32		1888		V
		2419		

$$41 = 1 + 8 + 32$$

$$\begin{aligned} 41 \times 59 &= 59 + 472 + 1888 \\ &= 2419 \end{aligned}$$

Papirusul lui Rhind dă un tabel pentru scrierea fracțiilor $\frac{2}{n}$ pentru *n* între 5 şi 101, ca sumă de fracții cu numărător 1.

Celelalte fracții se pot exprima utilizând tabelul în felul următor:

$$\frac{3}{n} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n}; \quad \frac{4}{n} = 2 \cdot \frac{2}{n};$$

$$\frac{5}{n} = 2 \cdot \frac{2}{n} + \frac{1}{n}; \quad \frac{6}{n} = 2 \cdot \frac{2}{n} + \frac{2}{n};$$

$$\frac{7}{n} = 2 \cdot \frac{2}{n} + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}; \quad \frac{8}{n} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{n}; \quad \frac{9}{n} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{n} + \frac{1}{n}.$$

Iată tabelul pentru $5 \le n \le 17$:

Fracţia unitară	Fracţia dublă
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$
$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$
$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{7}+\frac{1}{91}$
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$
$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$

Tabelul este utilizat în probleme. Iată un exemplu:

Problema 21. *Completează* $\frac{2}{3}$ *şi* $\frac{1}{15}$ *la* 1.

Azi am scrie $\frac{2}{3}+\frac{1}{15}+x=1$. Metoda din papirus este să scape de fracţii prin înmulţirea cu 15 (ceea ce facem şi noi azi) şi să scrie cu roşu ("ecuaţia în roşu"):

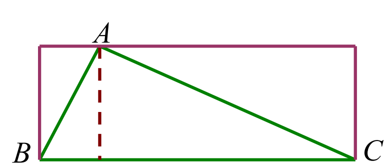
$$10 + 1 + y = 15$$

(de fapt, *Completează* 10 *şi* 1 *la* 15).

Răspunsul este $y=4$, adică $2\times\left(2\times\frac{1}{15}\right)$; din tabel, $\frac{2}{15}$ este $\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$, pe care dublând-o, găsim: $\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$, care este soluţia problemei.

Vom da acum o problemă de geometrie din papirusul lui Rhind.

Aria triunghiului se calculează încadrându-l într-un dreptunghi, care are o latură egală cu baza şi alta egală cu înălţimea triunghiului.



Se află aria dreptunghiului (produsul laturilor) şi se împarte la doi. Pe cazuri concrete se calculează volume de piramide, cuburi, paralelipipede, cilindri circulari.

În papirusul de la Moscova, Problema 14 cere volumul unui trunchi de piramidă cu baza un pătrat de latură 4 cubiți, cu latura pătratului de sus de 2 cubiți şi cu înălțimea de 6 cubiți.

De fapt se cere "piramida trunchiată", subînțelegându-se volumul ei.

Calculul este făcut astfel: aria bazei este $4 \times 4 = 16$; aria bazei mici este $2 \times 2 = 4$; produsul laturilor bazelor: $4 \times 2 = 8$. Adunate dau: $16 + 4 + 8 = 28$. $\frac{1}{3}$ din înălțime este 2.

Se face produsul 2×28.

Răspunsul este 58.

După cum se vede se aplică binecunoscuta formulă:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

Problemele din papirusul de la Moscova se termină cu observația: "aşa este" ("ai socotit bine").

Alte cunoştințe matematice neaşteptate relevate de papirusuri sunt: progresii aritmetice; rezolvarea ecuațiilor liniare, chiar mai complicate; extragerea rădăcinii pătrate; rezolvarea unor sisteme de tipul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}$; aria sferei ("Socoteşte un coş, când ți se spune că are lărgimea la gură $4 + \frac{1}{2}$. Fă-mă să cunosc aria lui").

Deoarece scrierile matematice găsite sunt "caiete de teme" dintr-o şcoală de scribi, şi nu manuale sau tratate de matematică, putem să ne întrebăm retoric: *Dacă Biblioteca din Alexandria nu ar fi fost mistuită de flăcări, ce ne-ar fi "povestit" ea despre matematica egipteană?*

MATEMATICA ÎN MESOPOTAMIA

Acum aproape şase milenii, în câmpia dintre râurile Tigru şi Eufrat, înflorea civilizația sumeriană; era o civilizație avansată, sumerienii construind oraşe şi un sistem ingenios de irigații, o administrație eficientă, un sistem de legi care a rămas exemplar (codul lui Hammurabi), un serviciu poştal organizat, un comerț activ.

De aceea, sumerienii au simțit nevoia scrierii şi aritmeticii şi drept urmare, le-au inventat şi pe acestea. Din argila existentă din belşug au modelat tăblițe, pe care, umede fiind, scriau cu calam de trestie. Au inventat scrierea cuneiformă şi au utilizat sistemul de numerație cu baza 60.

Între 2300 şi 2100 î. Chr, Mesopotamia a fost invadată de akkadieni. Aceştia au adoptat cultura avansată sumeriană cu care şi-a amestecat cunoştințele, inventând abacul.

Pe la 2000 î. Chr., babilonienii semitici i-au absorbit pe sumerieni şi akkadieni, invadând Mesopotamia şi stabilindu-şi capitala la Babilon (pe la 1900 î. Chr.). Au adoptat scrierea cuneiformă pe tăblițe de lut umede, coapte apoi la soare. Printre sutele de mii de tăblițe conținând calcule de tot felul, acte comerciale, acte de administrație, câteva vorbesc despre viața unui “elev” în casa tăblițelor. Scribii babilonieni trebuiau să socotească numărul de muncitori şi numărul de zile necesare săpării unui canal, hrana şi cheltuielile aferente (canalele fiind utilizate la irigații, dar şi la transport, de aceea săparea şi întreținerea canalelor a fost o activitate prioritară). Multe astfel de tăblițe chiar rezolvă astfel de probleme.

Precizăm câteva alte surse de cunoaştere a matematicii babiloniene. Mai întâi, construcțiile babiloniene, masive, formate din prisme dreptunghiulare suprapuse, tot mai mici, cu scări de acces, cu drumuri exterioare, cu mari posibilități de apărare. Astronomia sumero – babiloniană era, de fapt, astrologie. Preoții observau şi notau eclipsele. Calendarul sumero – babilonian avea ani cu 12 luni lunare de 29 şi 30 zile, luna lunară având 29 zile, 12 ore şi 44 minute. Un an avea 354 zile şi o treime de zi. Pentru concordanțele necesare, se introducea a 13 –

a lună, intercalată. Cifra 7 era sacră; a şaptea zi era nelucrătoare (la egipteni, a zecea). Babilonienii cunoşteau Pleiadele, cele douăsprezece constelații ale zodiacului. Se utilizau ceasuri cu apă, inventate de babilonieni şi numite de greci "clepsidre" (hoți de apă). Deoarece mulți împărați şi prooroci evrei au avut legături cu Babilonul, aflăm mai multe informații din Biblie. Pe lângă alte mărturii, Biblia vorbeşte de încercarea păcătoasă de a construi un ziggurat "care să ajungă la cer" (Turnul Babel), încercare pedepsită de Dumnezeu.

Numerele babiloniene sunt scrise pozițional, baza fiind 60, dar păstrând reminiscențe de bază 10.

O problemă mai dificilă o constituie scrierea fracțiilor. Numărul

$$10 \times 60^2 + 12 \times 60 + 5 + \frac{1}{60} + \frac{52}{60^2} + \frac{30}{60^3}$$

s-ar putea scrie 10, 12, 5; 1, 52, 30, dar babilonienii nu aveau separarea părții întregi 10, 12, 5 de partea fracționară 1, 52, 30.

Cât despre cifra zero, pe tăblițele de lut din jurul anului 1700 î. Chr. nu se face deosebirea între

132 şi 1302.

Pe la 700 – 400 î. Chr., apare în tăblițe, pentru 0 aflat în interiorul numărului, o notație:

$$13''2 \text{ sau } 13'''2 \text{ sau } 13'2,$$

dar nu se scrie 132'' pentru 1320.

De la babilonieni provine împărțirea orei în 60 minute, a minutului în 60 secunde.

Există tăblițe utilizate în rezolvarea problemelor ce conțin $a^2, a^3, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}$ şi a^{-1}, scrise, desigur, în baza 60:

$$8^2 = 1{,}4 \text{ (adică 64)},\ 59^2 = 58{,}1, \text{ etc.}$$

Înmulțirea a două numere se făcea după formula:

$$x \cdot y = \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2}$$

sau

$$x \cdot y = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4},$$

uşor de calculat utilizând tăbliţa cu pătrate.

Împărţirea $\frac{x}{y}$ se făcea prin înmulţirea lui x cu $\frac{1}{y}$; existau tăbliţe cu y^{-1} pentru y de la 2 la câteva milioane.

Pentru rezolvarea ecuaţiilor algebrice, scribii utilizau tabele. Spre exemplu, o tăbliţă conţine numerele $x^3 + x^2$ şi ea ajută la rezolvarea ecuaţiilor $x^3 + x^2 = a$.

Ecuaţii mai complicate, de forma $Ax^3 + Bx^2 = C$, se reduc la aceasta prin transformări:

$$\left(\frac{Ax}{B}\right)^3 + \left(\frac{Ax}{B}\right)^2 = \frac{A^2C}{B^3}.$$

Se aflau $y = \frac{Ax}{B}$ şi apoi $x = \frac{By}{A}$.

Pentru ecuaţia $ax = b$, având soluţia $x = b \cdot a^{-1}$, se consulta tăbliţa cu a^{-1} şi se făcea înmulţirea cu *b*.

O problemă ce apare pe tăbliţă este următoarea:

"*Aria dreptunghiului este* 1,0 (*adică 60*)*, iar lungimea este întrece lăţimea cu 7*" (Se cere lungimea). Ecuaţia, nescrisă de scris, este: $x^7 + 7x = 1{,}0$. El calculează astfel: se ia jumătate din 7, adică $3;30'$, apoi pătratul acesteia, anume $12;15'$. Se adaugă $1{,}0$ şi se obţine: $1{,}12;15'$. Din tabel, se ia rădăcina pătrată: $8;30'$ şi se obţine 5, lungimea.

Problemele de volum (de pământ excavat) conduc la ecuaţii cubice; astfel, pe o tăbliţă apar 36 de probleme de acest tip. Pe o tăbliţă de 8cm pe 4cm, deci 32cm^2, puteau fi scrise şi 200 probleme, cărora li se dădea numai rezultatul.

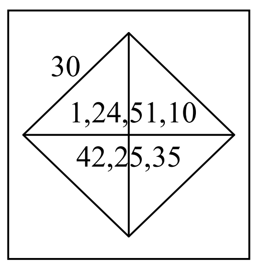
Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr *a*, $\sqrt{a}$, se face cu tabele şi cu aproximare, utilizând formula

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \dfrac{a}{a_n}}{2},$$

cu a_1 numărul întreg cel mai mare inferior lui $\sqrt{a}$ sau cel mai mic superior lui $\sqrt{a}$.

Pentru $\sqrt{2}$, de exemplu, se obțin $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2} = 1;30'_{(60)}$, $a_3 = \frac{17}{12} = 1;25'$ adică 1,4166..., iar $a_4 = 1;24',51'',10''',35''''$, adică $\frac{577}{408}(=1,4142...)$, aproximând surprinzător de bine $\sqrt{2}$.

Acest procedeu este ştiut din descrierea dată de Heron, in "Metrica", prin anul 60 d. Chr. Totuşi, pe o tăbliță aflată acum la Universitatea Yale, se află următoarea diagramă



care pare a conține următoarea problemă:

"Pătratul cu latura 30; se cere diagonala".

Se ia $\sqrt{2} = 1;24',51'',10'''$ şi înmulțindu-l cu 30, găsim $42;25',35''$.

Această valoare este a_{19}, dacă interpretarea tăbliței este corectă. Se deduce de aici că babilonienii făceau calcule lungi, cu numere mari, dacă era nevoie.

Pe tăblițe s-au găsit rezolvate sisteme de ecuații cu două necunoscute:

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=50 \\ (3x+2y)^2+\frac{1}{13}\cdot\left\{\left[\frac{1}{2}(x+y)-\frac{3}{2}(x-y)\right]^2+(x+y)^2\right\}=17100 \end{cases}$$

(cu soluția $x=30, y=20$),

$$\begin{cases} xyz+xy=1+\frac{1}{6} \\ y=\frac{2}{3}x \\ z=12x \end{cases}$$

(cu soluția $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}, z=6$).

Babilonienii utilizau formulele:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$
$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$$

Metoda de rezolvare a sistemului $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$, echivalent cu ecuația de gradul al doilea $x^2+b=ax$, cea aplicată, nu explicată sau demonstrată, era următoarea:

- formează $\frac{x+y}{2}$ $\qquad\frac{a}{2}$
- formează $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ $\qquad\frac{a^2}{4}$
- formează $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy$ $\qquad\frac{a^2}{4-b}$
- formează $\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy}=\frac{x-y}{2}$ $\qquad\sqrt{\frac{a^2}{4-b}}$

Se găsesc x, y din $\frac{x+y}{2}=\frac{a}{2}$ și $\frac{x-y}{2}=\sqrt{\frac{a^2}{4-b}}$.

Deci, $x, y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$, formulă bine ştiută astăzi.

Din tăblițe se deduce că geometria babiloniană avea anumite achiziții incontestabile, cum ar fi:

- ► teorema lui Pitagora şi triunghiuri pitagoreice (*4 este lungimea şi 5 diagonala. Cât este lățimea?* cu rezolvarea

$$4 \times 4 = 16$$
$$5 \times 5 = 25$$

Scade 16 din 25, rămâne 9. 3 este lățimea);

- ► lungimea şi aria cercului.

Pe o tăbliță găsită în 1936, π este luat egal cu 3;7',30", adică 3,125, în baza 10.

Pe o tăbliță găsită în 1939, descifrată în 1950, se calculează raza cercului circumscris triunghiului isoscel cu baza 60 şi laturile egale cu 50; aceasta este 31;15'. Apoi, se calculează raza cercului înscris în hexagonul regulat, folosind $\sqrt{3} \approx 1;45'$ (adică 1,75).

Iată care este soluția dată pe o tăbliță pentru triunghiurile "pitagoreice", în limbaj actual: *Dacă u, v sunt numere întregi relativ prime cu* $u > v$ *şi se iau* $a = 2uv, b = u^2 - v^2, c = u^2 + v^2$, *atunci a, b, c sunt relativ prime şi* $a^2 + b^2 = c^2$ (o veritabilă teoremă).

Triunghiurile babiloniene au *u* şi *v* numere cu singurii factori primi 2, 3, 5.

Se exemplifică pentru $u = 125$, $v = 54$; triunghiul dat în tăbliță este $(13500, 12709, 18541)$. Triunghiul $(59, 60, 106)$ este babilonian, cu $u = 9$, $v = 5$, dar $(28, 45, 53)$ nu ($u = 7, v = 2$).

Să observăm că reciproca teoremei de mai sus este valabilă, ceea ce nu apare în tăblițele găsite şi, probabil, nici nu se ştia.

Ştiind câte ceva despre matematica din Egipt şi din Mesopotamia, miracolul matematicii greceşti este mai uşor de înțeles.

MATEMATICA ÎN INDIA ŞI CHINA

Matematica în India antică

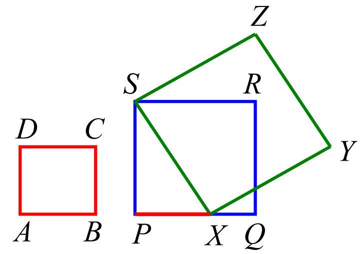
În antichitate, la est de Mesopotamia, între valea Indului şi valea Gangeului se afla India. Civilizaţia descoperită acolo s-a dezvoltat pe la 2500 î. Chr. şi a supravieţuit peste 800 ani (1700 î. Chr.). În scriere se utilizau vreo 500 de caractere, unele încă nedescifrate. Civilizaţia de pe Ind este rivală civilizaţiilor contemporane ei de pe Nil, Tigru şi Eufrat. Comerţul înfloritor cerea un sistem uniform de măsuri şi greutăţi. Aceste măsuri utilizau multipli zecimali şi diviziuni zecimale: 0, 05; 0, 1; 0,2; 0, 5; 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100; 200; 500. S-a descoperit o scală de lungimi cu unitatea de 3,35 cm foarte corect marcată; 10 unităţi de acest fel dădeau următoarea măsură de lungime.

O anexă la Vedele religioase aduse de indo – arienii veniţi spre India dintre Iran pe la 1500 î. Chr., anume "Sulbasutras" conţine toate texte matematice cu geometria necesară construirii altarelor. Aceste cărţi au fost compuse de preoţi; ele nu conţin demonstraţii ale regulilor pe care le descriu: construirea unui pătrat cu aria egală cu aria unui cerc dat (construcţie aproximativă); construcţia unui unghi drept. Aici găsim dependenţa latură – diagonală în pătrat, cazuri particulare ale teoremei lui Pitagora $((5,12,13),(12,16,20),(8,15,17),(15,20,25),(12,35,37)$, $(15,26,39),\left(\frac{5}{2},6,\frac{13}{2}\right),\left(\frac{15}{2},10,\frac{25}{2}\right)$), aproximarea lui $\sqrt{2}$ şi π cu fracţii ordinare:

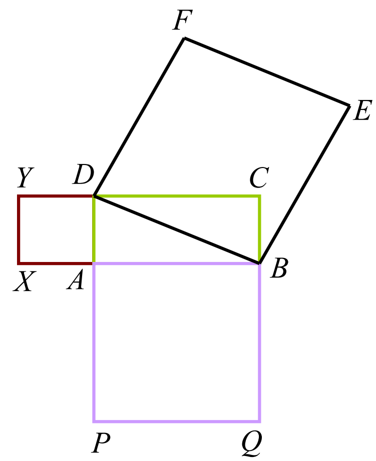
$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$$
$$(\approx 1,4142516),$$

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 29}-\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6}+\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}\right)^2\approx 18(3-2\sqrt{2})$$
$$(\approx 3,088...).$$

Tot în aceste cărţi se construieşte un pătrat a cărui arie este egală cu suma ariilor a altor două pătrate, deci se obţine teorema lui Pitagora.



găsită, în altă carte, sub forma:



Pe la 250 î. Chr. au apărut numeralele Brahmanice, care conțineau semne pentru numerele 1 – 9.

Mai înainte, existau simboluri pentru numerele 1 – 9, 10, 20, …, 100, 200, …, 1000, 2000, ..., etc.; scrierea era nepozițională, dar baza de numerație era 10, apoi trecându-se la scrierea pozițională.

Indienii vechi erau fascinați de numerele mari; Gautama Budha era examinat, pe când era tânăr, la matematică; el listează puterile lui 10 până la 10^{53} şi, la a doua întrebare, ajunge până la 10^{421}.

În "Sulbasutras" apare metoda de cuadrare a cercului care constă în construirea unui pătrat cu latura $\frac{13}{15}$ din diametrul cercului. Se ia, deci, $\pi = 4 \cdot \left(\frac{13}{15}\right)^2 = 3{,}00444...$. Problema inversă a "circularizării pătratului" apare şi ea în cărți.

Între 400 – 300 î. Chr. apar idei legate de teoria numerelor, operațiile aritmetice, geometrie, operații cu fracții, ecuații simple, ecuații cubice şi cuartice, permutări şi combinări. Se studiază, din motive religioase, împărțirea cercului prin drepte paralele în regiuni de grosimi prescrise, ale căror arii se calculează pe baza unor formule. Cosmologia Jaina (jainismul fiind religia apărută în 500 î. Chr. şi existentă şi azi) cuprinde o perioadă de 2^{588} de ani (2^{588}, în sistemul zecimal, este un număr de 178 cifre). Şi aici, ca şi în religia vedică, se observă o pasiune pentru numerele mari: se calculează numărul semințelor de muştar alb ce pot fi plasate într-un container cilindric de rază foarte mare, r^q (raza Pământului). În matematica Jaina apar formule de tipul:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{\sqrt{a}}=\left(\sqrt{\sqrt{a}}\right)^3,$$

$$\left(\sqrt{\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}\right)=\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}\right)^3.$$

Într-un manuscris matematic indian, aflat la Biblioteca Bodleiană de la Oxford, găsim amănunte asupra modului de rezolvare a problemelor şi asupra operațiilor cu fracții ordinare. Apar acolo şi ecuații cu numere întregi:

"O persoană are 7 cai asaya, alta 9 cai haya şi alta 10 cămile. Fiecare dă câte un animal celorlalți doi şi, după ce vând animalele cu prețuri ce trebuie determinate, au aceiaşi bani"

sau

"Doi paji ai regelui primesc $\frac{13}{6}$ dinari pe zi şi, respectiv, $\frac{3}{2}$ dinari. Dacă primul datorează celui de al doilea 10 dinari, calculează şi spune-mi când au pajii aceeaşi sumă de bani".

Matematica în China antică

Chinei antice îi datorăm inventarea cifrelor utilizate apoi de indieni şi de arabi. Se ştie că, pe la 475 î. Chr., în China se utiliza un sistem de şapte bețişoare de bambus pe care fiecare chinez interesat (comerciant, înțelept, călugăr, funcționar) le avea asupra lui, într-o mică legătură, înşirându-le la nevoie pe table sau pe pământ. Numerele erau notate pozițional şi se puteau face uşor operațiile aritmetice, în mod ce aminteşte de maniera noastră de lucru, atunci când nu utilizăm calculatorul.

Texte matematice apar în “Cartea schimbării” apărută în secolele al VIII-lea şi al VII-lea î. Chr. Aici este semnalată existența pătratului magic

4	9	2
3	5	7
8	1	6

şi regăsirea unor nu, mere scrise zecimal. De altfel, se ştie că astfel de numere apar în China în jurul anului 2000 î. Chr.

Primele cărți matematice supraviețuind până azi, scrise pe hârtie de bambus sau pe scoarță de copac, datează, cel mai devreme, din perioada 200 î. Chr. – 220 d. Chr., unele reproducând, probabil, experiențe mai vechi. În aceste cărți sunt descrise una dintre teoriile despre cercuri, teorema lui Pitagora utilizată în astronomie şi o demonstrează, calcule cu fracții ordinare. Aceste cărți au influențat matematica timp de mii de ani. Conținutul unei asemenea cărți, scrisă pe la 100 î. Chr. – 50 d. Chr., denumită “Nouă capitole ale artei matematice” este următorul. Capitolul 1 se consacră măsurării loturilor de pământ, dar discută sistematic algoritmi de găsire a celui mai mare divizor comun şi a celui mai mic multiplu comun, operații cu fracții ordinare, arii ale figurilor plane (pătrat, dreptunghi, triunghi, trapezoid, cerc, segment de cerc), aria segmentului de sferă, coroana circulară, ultimele cu aproximații foarte bune. Capitolele 2, 3, 6 prezintă proporții şi distribuții proporționale, aplicate la taxe şi la cereale. Capitolul 4 pune următoarea problemă: care este mărimea (latura) dacă se dă aria / volumul unui corp geometric, descriind algoritmi pentru rădăcinile pătrate şi cubice. Capitolul 5 dă sfaturi asupra construcțiilor şi apar în acest capitol volumele cubului, paralelipipedului dreptunghic, prismei, piramidei, piramidei triunghiulare, tetraedrului, cilindrului, conului, sferei, pentru π luându-se valoarea 3. În capitolul 7, despre exces şi defect, este prezentată metoda falsei ipoteze şi aceea a dublei false ipoteze. Capitolul 8, despre matrice dreptunghiulare, dă algoritmul eliminării pentru rezolvarea unui sistem cu trei sau mai multe ecuații liniare. Apar aici şi numere negative, funcționând regula semnelor. Capitolul 9 se referă la triunghiuri dreptunghice: teorema lui Pitagora şi aplicații, triunghiuri asemenea; sunt rezolvate ecuații pătratice de forma $x^2 + ax = b$, a, b pozitive, cu aplicarea algoritmului de extragere a rădăcinii.

În jurul anului 250 d. Chr. apare lema chinezească a resturilor:

"Să se determine n care la împărțirea cu 3 dă restul 2, la împărțirea cu 5 dă restul 3 şi la împărțirea cu 7 dă restul 2".

Soluția dată este: la 140, 63, 30, adună-le (233), scade 210 şi ai 23.

În alte cărți, din 263 d. Chr. până în 450 d. Chr. este enunțat pentru cerc principiul exhaustive, sugerându-se principiul lui Cavalieri pentru găsirea volumului cilindrului; apare suma progresiei geometrice şi rezolvarea sistemelor liniare cu două ecuații şi trei necunoscute; π este utilizat cu valoarea $3{,}14$; apare o formulă mai buna pentru volumul sferei. Matematica următoarelor cinci secole, până în anul 1000, aduce, interpolarea pătratică şi rezolvarea ecuațiilor cubice.

Recapitulând, contribuțiile majore ale matematicii Chinei antice, avem:

- Teoreme: Pitagora, triunghiul lui Pascal (numere triunghiulare), lema chinezească a resturilor;
- Ecuații rezolvate: regula de trei, metoda falsei ipoteze, sisteme de ecuații liniare;
- Combinatorică: permutări şi combinări, serii şi progresii;
- Numere: numere negative, fracții;
- Jocuri: pătrate magice, probleme şi jocuri.

Cursul numărul 4

MATEMATICA EBRAICĂ ÎN PERIOADA ANTICĂ

Mărturii despre matematica poporului evreu în perioada antică se găsesc în Biblie (Vechiul Testament), precum şi de cărţile de înţelepciune ale sale. Talmudul, cartea de bază, conţine cunoştinţe acumulate de-a lungul mileniilor prin studiile întreprinse de învăţaţii evrei. Talmudul are două părţi: Mishna şi Gemara. Învăţăturile din Mishna au fost editate abia la sfârşitul secolului al doilea, până atunci fiind transmise din generaţie în generaţie, prin grai viu. Gemara constă din discuţii şi dispute despre Mishna. Există două şcoli principale, babiloniană şi palestiniană, cărora le corespund Talmudul Babilonian (TB) şi Talmudul palestinian (TP).

O ediţie completă a TB a fost publicată la Veneţia, între 1520 – 1523, prin Daniel Bomberg. Cea mai cunoscută ediţie a Talmudului a fost tipărită de fraţii Romm, în 1880, la Vilna.

TP, în afara problemelor de ordin religios, tratează ştiinţa intercalării lunilor şi matematica, conţinând învăţăturile lui Rabbi Yohanan Ben Nappaha (180 – 279), cel mai mare comentator al Mishnei.

În TB se tratează, de exemplu, aproximarea rabbinică a lui π. Mishna enunţă regula: "Oricare (cerc), a cărui circumferinţă este trei coţi, are distanţa (diametrul) de un cot". Urmează $\pi_0 = 3$.

Gemara întreabă: "De unde se ştie aceasta?". Rabbi Yohanan citează autoritatea biblică unde, "distanţa de la o margine la alta a bazinului circular de aramă este de 10 coţi, iar circumferinţa este de 30 de coţi". Gemara argumentează: "Dar el (bazinul) are o grosime", adică diametrul poate fi măsurat din afară, iar circumferinţa din interior. Rabbi Yohanan sugerează că grosimea este neglijabilă.

Gemara obiectează: "Dar există o grosime!", astfel că 3 nu este raportul căutat între circumferinţă şi diametru.

Concluzia este că trebuie luată drept buna valoarea dată de Talmud pentru π, adică 3. În aceeaşi perioadă, egiptenii şi babilonienii aveau aproximări mai bune pentru π.

Alte reguli din Talmud atestă aceeaşi valoare pentru π. În Talmud se spune: “Cât de mare este pătratul faţă de cercul înscris în el? Un sfert!” (adică, lungimea cercului înscris în pătrat este $\frac{3}{4}$ din perimetrul pătratului), “Un cerc într-un pătrat, un sfert” (din aria pătratului, pentru diferenţa ariilor).

Autorii preocupaţi de această temă au observat că dacă s-ar ţine seama de valorile numerice ale literelor cuvintelor care apar în textul Bibliei, atunci valoarea lui π_H, faţă de $\pi_0 = 3$ este: $\frac{\pi_H}{\pi_0} = \frac{111}{106}$, de unde $\pi_H = 3{,}1415094...$.

Maimonides vorbeşte de iraţionalitatea lui π: “Raportul diametrului la circumferinţa cercului nu se ştie şi nu poate fi exact exprimat”, precizând că acest număr se cunoaşte numai aproximativ. Oamenii educaţi iar $3\frac{1}{7}$, dar, cum acesta nu se poate preciza exact, evreii iau raportul egal cu cel mai apropiat întreg, adică 3. De fapt, dacă se utilizează în loc de cerc hexagonal regulat înscris în cerc, raportul perimetrului acestuia cu diametrul cercului este 3.

Pentru arii, în locul cercului, se ia dodecagonul înscris în cerc.

Rabbi Yohanan ştia aproximările $\sqrt{2} \approx 1\frac{2}{5}$ şi $\pi \approx 3\frac{1}{7}$.

Revenim la mistica şi utilizarea numerelor în Biblie. Se spune că mare parte din Vechiul Testament este un lung şir de numere, ca şi cum ar fi un cod trimis de Dumnezeu. Astfel, Geneza, prima carte, începe cu numărarea zilelor creaţiei. În Biblie există o evidenţă de necontestat a unei proporţii numerice şi a unei simetrii uimitoare. Apare o adevărată “preferinţă” pentru unele numere, de exemplu, 7, 12, 40.

Astfel, şapte sunt zilele creaţiei şi ale săptămânii, Cain va fi răzbunat de şapte ori, Lameh de şaptezeci de ori câte şapte. Între Paşti şi Rusalii sunt şapte săptămâni. Două dintre sărbătorile evreieşti ţin şapte zile. Pământul trebuie lăsat să se odihnească la fiecare al şaptelea an. Poporul din Israel a mărşăluit timp de şapte zile în jurul cetății Ierihonului, înainte ca zidurile acesteia să se prăbuşească. Nabat, bolnavul de lepră este trimis de Elisei să se scalde de şapte ori în Iordan şi exemplele pot continua.

Numărul 12, însemnând “fundament”, “temelie”, apare ca număr al triburilor lui Israel. Există 12 apostoli ai lui Christos.

Măsurarea este o acțiune permanentă în Biblie; se numără: anii vieții unui om, oştenii, banii (aurul, argintul etc.) ş.a.

Numărul 40 are multiple semnificații: patruzeci de ani a trăit Moise în palatal Faraonului, alți patruzeci la socrul său, în deşert, patruzeci de ani au rătăcit evreii în pustie până a ajunge la țara promisă lor de Dumnezeu. Patruzeci de zile şi de nopți a ținut potopul. La patruzeci de zile de la învierea sa Christos s-a înălțat la ceruri.

Biblia conține şi informații “geometrice” multiple asupra construcțiilor făcute de evrei: cortul, templul, palate, altare, sfeşnice, mese, etc. au dimensiuni (lungimi, lățimi (grosimi), înălțimi şi greutăți) precizate alături de informații asupra materialelor folosite.

Calendarul evreiesc este un calendar lunar cu 12 luni. Anul solar conține 12,4 luni lunare motiv pentru care, pentru compensare, din când în când, trebuie adăugată a treisprezecea lună. În secolul al IV – lea, Hillel II a stabilit un calendar fix, utilizat şi azi, care standardizează lungimea lunilor şi adăugarea celei de a treisprezecea luni la 19 ani.

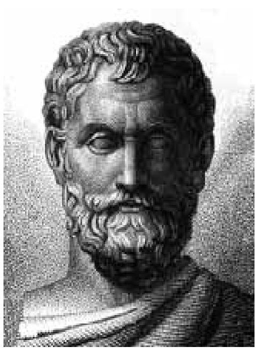
Cursul numărul 5

MATEMATICA ÎN GRECIA ANTICĂ (I)

Matematica prezentată până acum era o colecție de formule, rețete aplicabile pentru rezolvarea unor probleme, fără a fi demonstrate, necesitatea demonstrării acestor formule şi necesitatea analizării cazului general nefiind simțită de nimeni.

Ideea demonstrației matematice a fost introdusă şi menținută de matematica Greciei antice.

În continuare vor fi prezentați cei şapte înțelepți ai Greciei,



Thales din Milet (640 – 546 î. Chr.) este primul matematician grec cunoscut. Thales a învățat matematica în Egipt şi Mesopotamia. "Thales a adus în Ellada această doctrină (matematica) şi multe a descoperit el însuşi, pentru multe a arătat principiile, având când un caracter mai general, când unul mai practic", aşa cum spune Eudemos.

Potrivit lui Proclus, importantă pentru Thales a fost vizita sa la preoții egipteni, de la care a luat cunoştințele de geometrie.

Utilizând table de observații babiloniene, Thales prezice eclipsa de soare din 28 mai 585 î. Chr.

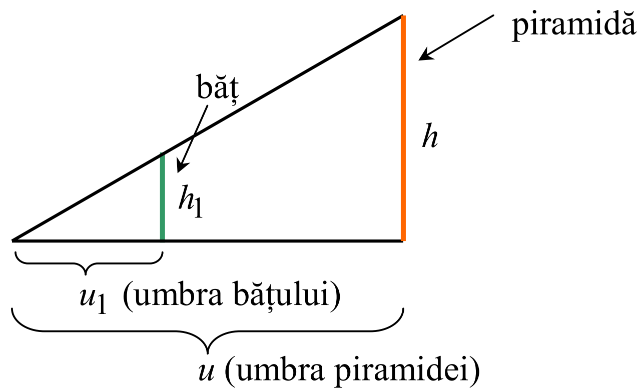
Thales a rămas în matematică prin mai multe teoreme de geometrie, demonstrate şi enunțate pentru prima dată de el:

- Un cerc este împărțit în două de un diametru.
- Unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt egale.
- Unghiurile opuse la vârf sunt egale.
- Două triunghiuri sunt congruente dacă au o latură şi unghiurile alăturate ei respectiv egale.
- Un unghi înscris într-un semicerc este drept.
- Suma unghiurilor unui triunghi este două unghiuri drepte.

Thales a fost şi un mare filosof, cunoscut prin afirmația că orice lucru este făcut din apă, apa fiind un principiu fundamental al vieții.

Cu privire la viața lui Thales există câteva anectode reproduse de alții. Platon povesteşte cum Thales, cufundat în gânduri pe când se plimba, a cazut într-o fântână.

Plutarch povesteşte cum Thales măsoară o piramidă, fără a se urca pe ea, utilizând lungimea umbrei acesteia comparată cu umbra unui băț a cărui înălțime o ştia.



$$h = \frac{u}{u_1} \cdot h_1$$

Astăzi, orice elev de clasa a VII – a ştie să facă acest lucru, utilizând teorema lui Thales.

În mod analog, Thales a descris posibilitatea de a afla distanța de țărm, la care se află o corabie, ştiind înălțimea catargului său.

Anaximandru (601 – 540 î. Chr.) a fost elev al lui Thales. El susținea că există o infinitate de lumi, toate făcute dintr-o substanță nedeterminată. Pământul, aerul, focul nu sunt forme ale apei, ci forme ale acestui "infinit". Durata universului este "infinită". Un oponent al ideilor lui Anaximandru despre infinitul actual a lui Aristotel.

Pitagora, născut pe insula Samos pe la 569 î. Chr., a învățat mai întâi cu Pherekydes, apoi cu Thales şi Anaximandru. Thales era pe atunci bătrân, dar cu siguranță l-a impresionat foarte mult pe tânărul de 18 ani.

Pitagora, întors la Samos din călătoria din Egipt şi Babilon de unde a luat alte învăţături, a creat o şcoală, numită "semicercul" lui Pitagora. Pe la 518 î. Chr. (sau 530 î. Chr. după alte surse), Pitagora s-a stabilit la Crotona (colonie grecească din sudul Italiei), unde a fondat o şcoală având moto – ul "Totul este număr". A încercat să fundamenteze prin numere ştiinţa, religia şi filosofia. Ca şi Democrit, Pitagora crede că universal este discret.

Pitagora este primul care o folosit numele "mathematica" (= ceea ce se învaţă), pentru cunoştinţele de matematică.

Şcoala lui Pitagora funcţiona în secret. Descoperirile individuale era proprietatea şcolii, descoperitorii rămânând în umbră. Pythagoreii erau vegetarieni şi credeau în reîncarnare. Încercând să influenţeze politica, pythagoreii întâmpină rezistenţă şi însuşi Pitagora se exilează şi moare la Metapont, în 475 î. Chr.

Pentru Pitagora cea mai frumoasă figură solidă era sfera, dintre figurile plane – cercul, iar ca număr – zece este numărul perfect ($1+2+3+4=10$; scris cu puncte, se obţine un triunghi).

Lui Pitagora îi sunt atribuite descoperirile:

- numerele pătrate (n^2), numerele triunghiulare ($n(n+1)/2$) şi reprezentarea acestora;
- proporţiile de bază: media aritmetică, media geometrică, media armonică şi relaţiile dintre ele:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}=\frac{1}{b}, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}, \quad \frac{\frac{a+c}{2}}{ac}=\frac{1}{b};$$

- seria naturală a armonicelor (exprimarea sunetelor cu numere: $\frac{1}{1}$ unison, $\frac{2}{1}$ octavă, $\frac{3}{2}$ cvintă, $\frac{4}{3}$ cvartă, $\frac{5}{4}$ terţa majoră, $\frac{6}{3}$ terţa majoră, $\frac{8}{5}$ sexta majoră);
- teorema lui Pitagora, pe la 500 î. Chr.;
- construcţia pentagonului şi decagonului regulat înscrise în cerc.

Aristotel spunea că "pythagoreicul, fiind educat în studiul matematicii, gândeşte că lucrurile sunt numere şi că întregul cosmos este o scală şi un număr".

Iamblicos povesteşte că Hippasos, unui dintre pythagorei, a divulgat problema construcţiei dodecaedrului înscris în sferă, iar doi matematicieni dintre cei mai vestiţi la acea vreme, Theodoros din Cirene şi Hippocrates din Chios, au dezvoltat această învăţătură matematică în cel mai înalt grad, şi drept urmare Hippasos şi-a găsit pieirea în mare.

În continuare prezentăm o listă cu teoremele atribuite lui Pitagora sau şcolii sale:

- Suma unghiurilor unui triunghi este două unghiuri drepte. Mai mult, un poligon cu n laturi are suma unghiurilor interioare egală cu $2n-4$ unghiuri drepte, iar a celor exterioare cu 4 unghiuri drepte.
- Teorema lui Pitagora.
- Construirea unor figuri geometrice de arie dată (rezolvarea unor ecuaţii algebrice prin geometrie, de exemplu, $a(a-x)=x^2$).
- Descoperirea iraţionalelor.
- Cele cinci solide (poliedre) regulate (se spune că Pitagora ştia să construiască trei dintre ele).
- În astronomie, Pitagora considera Pământul sferic şi centru al Universului.

Hippias din Elis (425 î. Chr.) este cel care a descoperit curba numită cuadratice, ce poate fi folosită la trisecţia unghiului. Această curbă se construieşte în felul următor: se consideră pătratul unitate *ABCD*, cu *AB* latura superioară şi cu *DC* latura de jos. Se mişcă, cu o unitate pe secundă, *AB* către *DC*, iar *AD* se roteşte în jurul lui *D* către *DC* cu 90° pe secundă, astfel că *AD* şi *AB* coincid, după o secundă, cu *DC*. La un moment t, $0 \le t \le 1$, cele două laturi în mişcare se intersectează într-un punct *P*, ce descrie cuadraticea. Ecuaţie sa este:

$$y = x tg\left(\frac{\pi}{2} y\right), \text{ cu } 0 \le y \le 1.$$

Pentru a trisecta un unghi, să spunem de 60°, îl plasăm aşa ca vârful unghiului să fie în *D*, o latură pe *DC* şi alta să întâlnească cuadraticea într-un punct

Q. Dacă d este distanța de la Q la DC, construim o paralelă la DC la distanța de $\frac{d}{3}$ de BC. Dacă paralela construită întâlneşte cuadraticea în punctul R, atunci $R\hat{D}C = 20^\circ$. Mai mult, cum $\lim\limits_{y \to 0} \frac{y}{tg\left(\frac{\pi}{2} y\right)} = \frac{2}{\pi}$ şi cum cuadraticea întâlneşte DC în punctul S la distanța de $\frac{2}{\pi}$ unități de D, cuadraticea se poate utiliza la construirea unui pătrat de arie egală cu a cercului de rază 1.

Antiphon (425 î. Chr.) sugerează că aria cercului poate fi calculată prin arii ale poligoanelor regulate cu tot mai multe laturi înscrise în el, observând că: pătratul este mai mare ca $\frac{1}{2}$ din cerc, aria octogonului este mai mare ca $\frac{3}{4}$ din aria cercului şi aşa mai departe. Cum aria poligonului regulat cu 2^n laturi este proporțională cu pătratul diagonalei celei mai lungi, rezultă că aria cercului este proporțională cu $(2r)^2$.

Hippocrates din Chios (425 î. Chr.) este responsabil pentru materialul despre cerc şi poligoane regulate din Cărțile III şi IV ale lui Euclid.

Hippocrates construieşte semicercuri pe cele trei laturi ale unui triunghi dreptunghic astfel ca acest triunghi să fie înscris în semicercul construit pe ipotenuză. Intersecția semicercurilor dă "lunulele" lui Hippocrate, iar suma ariilor lor este egală cu aria triunghiului. Lui Hippocrate I se atribuie teorema lui Pitagora generalizată pentru un triunghi oarecare. Legenda spune că la 430 î. Chr. Atena a suferit din cauza unei epidemii de febră tifoidă. Oracolul de la Delos, consultat de atenieni, le-a spus că trebuie să dubleze volumul altarului cubic al lui Apollo, adică să rezolve problema duplicării cubului cu rigla şi compasul, problemă rămasă nerezolvată de-a lungul secolelor. Hippocrate observă că ar trebui construite lungimile y şi z astfel ca $\frac{1}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{2}$. Atunci y ar fi $\sqrt[3]{2}$.

Textele fundamentale greceşti s-au păstrat parţial sau total, dar prin copii mult mai târzii decât timpul în care au fost scrise originalele.

"Elementele" lui Euclid constituie cea mai veche carte grecească, care a supravieţuit în întregime prin frecvente copieri şi apoi traduceri. Primele copii, până pe la 800 î. Chr., era scrise cu litere de tipar, fără spaţii între cuvinte. După acest an, copiile, cu litere mici şi spaţiate, se citeau mai uşor şi ocupau mai puţin loc. Cea mai veche copie în litere mici existentă datează din 888, la 1200 de ani de la scrierea "Elementelor", iar pentru scrierea ei s-au plătit 14 monede de aur, o sumă imensă pentru acel timp. Acest manuscris din 888 conţine adnotări existente pe copia precedentă utilizată de copist, dar şi adnotări ulterioare, făcute de utilizatorii lui. Primele versiuni ale "Elementelor", apărute în Europa medievală, au folosit traduceri în arabă ale acestora, deoarece nu se cunoşteau copii greceşti sau latineşti.

Arhimede este un alt autor elen ale cărui opere s-au păstrat prin traduceri. În 1458, Jacobus Cremonensis, însărcinat de papa Nicolae al V – lea, termină de tradus în latină "Operele" lui Arhimede, carte cu frumoase şi curioase ornamente. "Colecţia astronomico – matematică", cel mai vechi şi mai frumos manuscris al unei colecţii de opere de astronomie aparţinând, între alţii, lui Euclid, Aristarchus, Theodosius, datează din secolul al X – lea. Cel mai elegant manuscris grecesc a fost făcut pentru papa Paul al III – lea, în 1536, şi este copia lui Appolonius despre conice. "Colecţia" lui Pappus este un supliment, în greacă, la tratatele sale de geometrie, astronomie, mecanică, datând din secolul al X – lea, când s-a efectuat copia. "Aritmetica" lui Diophantes apare la Paris, în 1621, în cea mai cunoscută ediţie tipărită. Cartea lui Boetius, "De institutione arithmeticae", manual didactic din secolul al V – lea, comentând cuceririle anterioare ale aritmeticii greceşti, utilizat în toate universităţile europene medievale, apare tipărită la Leipzig, în 1867.

Am amintit aceste texte matematice deoarece în ele, prin note şi comentarii, se amintesc contribuţiile anterioare, cu atribuirea descoperirilor celor care le-au făcut.

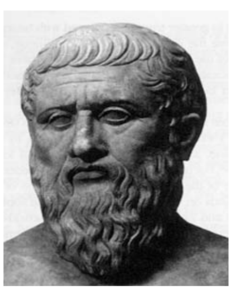
Sistemul de numeraţie utilizat de grecii antici era zecimal, iar scrierea a fost acrofonică, adică se utiliza pentru număr prima literă a numelui său, cu combinarea numeralelor pentru scrierea numerelor mari.

O altă scriere utilizată este aceea alfabetică:

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϛ	Ζ	Η	Θ
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ξ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9

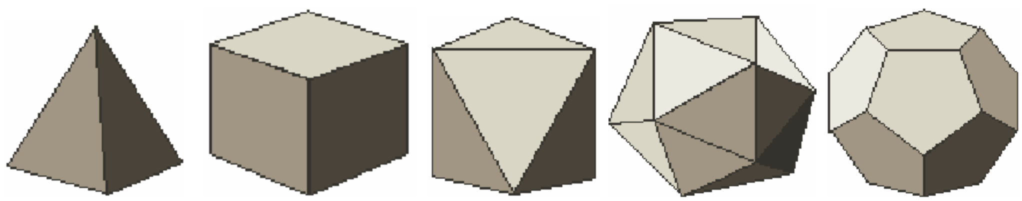
Numărul 6 este scris cu litera digamma, ieşită acum din uz.

Grecii nu s-au gândit la numărul şi cifra zero, probabil pentru că ei considerau numerele din punct de vedere geometric, ca lungimi de segmente, arii, volume. Se pare că astronomii greci, în speţă Ptolemeu pe la 130 d. Chr., au utilizat un simbol pentru zero, neacceptat unanim.



Platon (427 – 349 î. Chr.) a fost discipol al lui Socrate (469 – 399 î. Chr.). După executarea lui Socrate la 399 î. Chr., Platon vizitează Heliopolis şi Cyrene. Studiază cu Theodorus din Cyrene (care demonstrase iraţionalitatea numerelor $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ şi $\sqrt{17}$), cunoaşte şcoala lui Pitagora, petrecând un timp lângă Archytas, care conducea pe atunci confreria pythagoreică. Călătoria în Italia era să-i fie fatală, deoarece guvernatorul Syracusei, Dionysius I, l-a vândut ca sclav, însă a fost răscumpărat de prietenii săi. Astfel, Platon revine la Atena, unde, pe la 380 î. Chr. fondează şcoala sa, numită Academia, în grădinile lui Academos. La intrarea în Academie este scris: “Să nu intre aici cel care nu ştie geometrie!”, deoarece Platon considera că primele ştiinţe care “deşteaptă gândirea” sunt ştiinţele numărului şi măsurii (calculul, aritmetica şi geometria). Ştiinţa numărului scoate pe om la lumină, fără această ştiinţă, cunoştinţele învăţate ar fi simple aplicări practice, care au în vedere acţiunea, nu şi cauza ei.

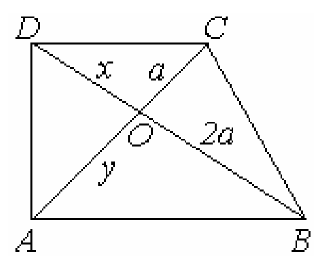
În dialogul “Timaeus” Platon vorbeşte despre construcţiile cu rigla şi compasul, spunând că sunt singurele permise, şi despre poliedrele regulate, numite mai târziu corpuri platonice.



tetraedru cub octaedru icosaedru dodecaedru

Platon atribuise acestor poliedre regulate semnificaţii mistice, care au rămas valabile în tot Evul Mediu european. El asociază cubului pământul, tetraedrului – focul, octaedrului – aerul, icosaedrului – apa şi dodecaedrului – cosmosul.

Lui Platon îi este atribuită găsirea unei soluţii de dublare a cubului, construind un trapez dreptunghic cu diagonalele perpendiculare şi $OC = a$, $OD = 2a$.



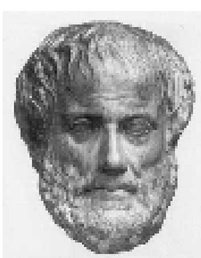
Acesta are proprietatea că $\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OD}$. Notând $OB = x, OA = y$, găsim $x = a\sqrt[3]{2}$, deci $x^3 = 2a^3$. Mai târziu, Eratostene (275 – 195 î. Chr.) a construit un aparat, numit mesolab, format din două drepte paralele, care se mişcă pe două perpendiculare formând trapezul cerut.

Importanţa lui Platon pentru matematică nu constă în contribuţia matematică directă, ci în influenţa pe care a avut-o, în timpul vieţii sale şi după, asupra altora, în influența cu care cere definiții clare şi postulate, în credința că studiul matematicii este un mijloc de a deveni virtuos.

În continuare, vom reproduce pentru frumusețea ei, replica regelui egiptean Thamos către zeul Theut, care-i cere regelui să răspândească semnele scrise: "… acest meşteşug va aduce în sufletele celor care îl învață, din pricina nepăsării lor față de memorie, tocmai contrariul ei, uitarea. Oamenii se vor bizui pe scris, îşi vor aminti pe dinafară, pe semne străine, nu dinăuntru, prin lucrarea minții lor". Apoi, vorbind despre "ştiutorii închipuiți", spune: "După ce vor fi citit multe, fără să fi trecut printr-o autentică învățătură, îşi vor închipui că şi pricep multe lucruri …".

Eudoxus din Cnidos (408 – 355 î. Chr.) studiază cu Architas, apoi cu tânărul Platon. Lui îi sunt atribuite cărțile X şi XII din "Elementele" lui Euclid, tratând despre proporții şi despre cerc. Eudoxus demonstrează că aria cercului este proporțională cu pătratul diametrului său.

Menaechmus (375 – 325 î. Chr.), alt discipol al lui Platon şi elev al lui Eudoxus, este cel care a descoperit conicele – elipsa, hiperbola, parabola – şi le utilizează la dublarea cubului. Despre Menaechmus se spune că ar fi răspuns la cererea lui Alexandru cel Mare de a-i indica o cale mai scurtă de a învăța geometria că "în matematică nu există căi speciale pentru regi".



Aristotel din Stagira (384 – 322 î. Chr.) a fost elev, timp de 20 de ani, al lui Platon, deşi nu era de acord cu acesta asupra naturii matematicii. Fiu al lui Nicomach, medicul lui Filip, regele Macedoniei, Aristotel a fost profesorul lui Alexandru cel Mare. Aristotel fundamentează logica în cărțile sale adunate sub titlul "Organon" (Instrument). Aici el defineşte silogismul, formulează metoda deductivă, precizează că un silogism este adevărat sau fals. Pentru Aristotel, axiomele matematice sunt adevărate, deci tot adevărate sunt şi teoremele deduse din ele. La Atena, Aristotel a întemeiat o şcoală proprie, "Şcoala peripatetică" sau "Lykeion" (Liceul), frecventată de circa 2000 de elevi. Aristotel a respins ideea de infinit, pentru el existând segmente oricât de lungi, dar nu există o dreaptă care "merge la infinit". După Aristotel, infinitul este prea mare, pentru a fi frumos. El spune că liniile infinite contrazic cinematica; pretinde că mulțimile infinite conduc la contradicție deoarece au o submulțime proprie infinită. Aristotel își imaginează o lampă care se aprinde la momentul $t_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, pentru n par, şi se stinge la momentul t_n pentru n impar. Divizând un interval de timp în număr infinit de momente, fie acest interval [0;1], la momentul 1 lampa nu poate fi nici aprinsă, nici stinsă, ceea ce este imposibil. Pentru a înlocui infinitul, Aristotel foloseşte noțiunea de "infinit potențial".

În aceeaşi perioadă, unii filosofi greci şi-au pus probleme legate de existența infinitului.

Pe la 480 î. Chr., *Parmenide din Elea* spune că mişcarea nu există, deoarece universul constă dintr-un singur obiect, iar mişcarea ar avea nevoie de două locuri de plecare şi de sosire.

Pe la 450 î. Chr., discipolul lui Parmenide, *Zenon din Elea*, dă patru argumente care arată că nu există mişcare:

i. Un obiect în mişcare parcurge întâi jumătate din distanță, apoi jumătate din jumătate şi tot aşa mereu. În momentul n, pentru intervalul [0;1], obiectul se află în poziția $1 - \frac{1}{2^n}$ şi nu există n, astfel încât $1 - \frac{1}{2^n} = 1$.

Evident, Zenon nu acceptă infinitul.

ii. Achilles cel iute de picior, plecând din punctul 0, nu poate să prindă din urmă o broască țestoasă, care pleacă din punctul 1, deşi aleargă de două ori mai repede ca ea, deoarece, atunci când Achilles ajunge în poziția 1, broasca este în $1 + \frac{1}{2}$, când Achilles este în $1 + \frac{1}{2}$, broasca ajunge în $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, şi tot aşa.

Dacă infinitul nu se acceptă, atunci broasca rămâne în frunte.

iii. O săgeată în zbor se află, în fiecare moment, într-un punct fixat, deci nu se mişcă. Mai precis, distanța parcursă într-un moment fiind 0, aceasta înseamnă că distanța parcursă în ∞ momente este 0, pentru că Zenon nu acceptă infinitul.

iv. Există trei linii de oameni:

$$\begin{array}{rl} & AAAA \\ & BBBB \;\rightarrow \\ \rightarrow & CCCC \end{array}$$

Presupunem oamenii A staţionari, oamenii B mişcându-se la dreapta cu viteza maximă posibilă, iar oamenii C la stânga cu viteza maximă posibilă. Atunci B se mişcă relativ la C cu viteza dublă faţă de viteza maximă posibilă, ceea ce este fals.

Evident, se poate combate Zenon prin eliminarea ideii de viteză maximă posibilă sau prin recurs la teoria specială a relativităţii.

Filosoful *Democrit* din Abdera (460 – 370 î. Chr.) are o contribuţie matematică: "Volumul piramidei este o treime din volumul prismei cu aceeaşi înălţime". Democrit, pe la 420 î. Chr., susţine că există o infinitate de atomi indestructibili şi că spaţiul care îi conţine este la rându-i infinit.

MATEMATICA ÎN GRECIA ANTICĂ (II)

În articolul "Formația matematică", Dan Barbilian spunea: "Totuşi gândirea greacă se exprimă nu numai mitic, în fabulă, dar şi direct, în teoreme. Poarta prin care poți aborda lumea greacă – fără a cărei cunoaştere, după părerea mea, cultura cuiva nu poate fi socotită completă – nu este obligatoriu Homer. Geometria greacă e o poartă mai largă, din care ochiul cuprinde un peisagiu auster, dar esențial".

Alexandru cel Mare, după supunerea Egiptului, impresionat de construcțiile acestuia, a întemeiat acolo un oraş grecesc, oraş care să fie şi port la Mediterană. Astfel, între 332 şi 331 î. Chr. este întemeiat oraşul Alexandria, care devine capitala regatului Ptolemeilor pe la 305 î. Chr. Ptolemeu I şi Alexandru cel Mare, foşti elevi ai lui Aristotel, înființează o "universitate" numită Museum, cu o bibliotecă în care, în timp, s-au adunat peste 600000 de manuscrise pe papirus. Timp de 600 de ani Alexandria a fost centrul de matematică şi de ştiință al lumii. În 549 d. Chr. împăratul Justinian a închis şcoala de filosofie şi "anii întunecați" se abat asupra Europei, iar declinul intelectual al Alexandriei este grăbit. După ce faimoasa bibliotecă a fost cucerită de arabi, ea a fost incendiată în 641, când probabil nu mai rămăsese nimic din ea. Arabii şi-au justificat actul astfel: "dacă manuscrisele din bibliotecă ar confirma ceea ce este scris în Coran, ele sunt inutile, iar dacă ele ar contrazice zisele Coranului, sunt primejdioase".

Strălucirea intelectuală a Alexandriei era dată de profesorii invitați la şcoala de la Museum. Prima catedră de matematică a fost ocupată de Euclid, care a scris cărți despre optică, muzică, astronomie şi cele 13 cărți grupate sub numele "Stihia" (Elemente), care conțineau toată matematica studiată în şcoala alexandrină.

Nici una dintre aceste 13 cărți nu-i poate atribuită direct lui Euclid. Pythagoreicii sunt cei care au conceput cărțile I, II, VI, VII, VIII; IX şi XI, Hippocrates stă în spatele cărților III şi IV, Eudoxius a conceput cărțile V şi XII, iar Theaetetus, cărțile X şi XIII, lui Euclid aparținându-i concepția logică şi organizarea cărților, bazarea acestora pe un grup minim de axiome şi definiții expuse şi utilizate în demonstrarea teoremelor. Forma acestor cărți a fost imitată de Newton în “Principia”, de Spinoza în “Etica” sa, chiar de grupul Bourbaki în elaborarea celebrelor “Cărți” care îşi propuneau să fundamenteze toată matematica.

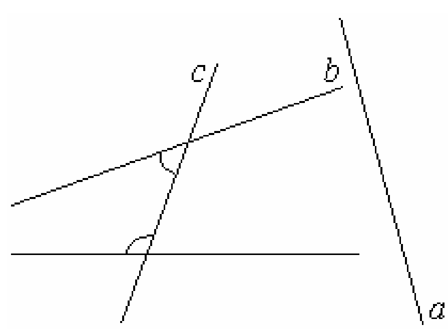
În şcolile europene, geometria s-a învățat după cărțile lui Euclid vreme de sute de ani, până în secolul al XX – lea, chiar şi după ce Hilbert a construit un sistem de axiome, căruia i-a discutat minimalitatea şi necontradicția.

După cum spunea Dan Barbilian, în cultura greacă se poate intra foarte bine prin poarta impresionantă constituită de opera lui Euclid. Fondarea matematicii actuale începe cu teoria mulțimilor şi teoria numerelor. Euclid porneşte de la puncte şi linii, adică de la geometrie. Un sinopsis al “Elementelor” este de neocolit.

Cartea I începe cu 23 de definiții, urmate de 5 postulate, care precizează modul de construcție şi existența unor obiecte geometrice.

Primul postulat afirmă: “Se poate construi o dreaptă de la un punct la alt punct”, deci, date două puncte distincte, există o dreaptă trecând prin ele.

Al cincilea postulat, Postulatul paralelelor, a rămas faimos în istoria matematicii: “Dacă o dreaptă care taie alte două drepte face unghiuri interioare de aceeaşi parte mai mici decât două unghiuri drepte, liniile, prelungite indefinit, se intersectează pe partea pe care se află unghiurile a căror sumă este mai mică decât două unghiuri drepte.”



Urmează cinci adevăruri logice, primul afirmând că “cele egale cu acelaşi lucru sunt egale între ele”, iar ultimul spunând că “întregul este mai mare decât partea”.

Urmează 48 de propoziții. Prima propoziție este: “Să se construiască un triunghi echilateral”. Acesta se construieşte plecând de la un segment *AB* şi folosind cercurile cu centrul în capetele segmentului şi raze egale cu segmentul. Ele se intersectează în *C*, iar *ABC* este triunghi căutat. În celelalte propoziții apar cazurile de congruență ale triunghiurile, proprietăți ale triunghiurilor isoscele, egalitatea unghiurilor opuse la vârf, proprietăți ale paralelelor. Propozițiile 27 şi 28, deşi sunt despre paralele, se pot deduce fără postulatul 5, Propoziția 29 fiind prima care apelează în demonstrație la acest postulat. Propoziția 47 este teorema lui Pitagora, iar următoarea, şi ultima, este reciproca ei.

Cartea a II – a demonstrează geometric unele identități algebrice, printre care şi legea cosinusurilor.

Cartea a III – a este dedicată studierii cercului.

Cartea a IV – a oferă construcțiile pentru pentagonului regular, ale decagonului regulat şi ale poligonului regulat cu 15 laturi. Abia în 1796 Gauss găseşte construcția cu rigla şi compasul a poligonului regulat cu 17 laturi.

Cartea a V – a prezintă proprietățile operațiilor aritmetice cu segmente, utilizându-se definiția proporțiilor dată de Eudoxus şi axioma lui Arhimede. Apar aici numerele iraționale, cu demonstrarea iraționalității lor.

Cartea a VI – a studiază triunghiuri şi alte figuri asemenea, precum şi proporții în geometrie. Între altele se arată că lungimea arcului de cerc este proporțională cu unghiul la centru subîntins de acesta. Se construiesc figuri asemenea, sunt date cazurile de asemănare, se demonstrează teorema bisectoarei, tranzitivitatea asemănării şi se studiază figuri echivalente.

Cartea a VII – a, în 22 definiții şi 39 propoziții, fundamentează teoria numerelor. Propoziția a doua este Algoritmul lui Euclid de aflare a celui mai mare divizor comun, iar faptul că orice număr natural mai mare ca 1 este divizibil cu un număr prim apare ca Propoziția 31.

În cartea a VIII – a se aplică proporții în teoria numerelor, cartea conținând 27 de propoziții.

Cartea a IX – a prezintă în continuare, în 36 de propoziții, proprietățile numerelor naturale: factorizarea unică a numerelor libere de pătrate adică Teorema fundamentală a aritmeticii, infinitatea numerelor prime, formula pentru numere pare perfecte.

Cartea a X – a investighează radicalii compuşi şi reducerea lor, dacă este posibil, la expresii ce conțin mai puțini radicali.

În Cartea a XI – a se studiază geometria în spațiu. Euclid dă aici construcția conului prin rotirea unui triunghi dreptunghic în jurul unei catete, construcție care depăşeşte construcțiile cu rigla şi compasul.

Cartea a XII – a prezintă riguros volumele piramidei, conului, sferei şi wsdffrfr5ryhyhgtre44eeeeeeeeeeeefrfccfrbgthy77ui0.k;/metoda pentru aflarea volumului lor.

În Cartea a XIII – a sunt studiate cele cinci poliedre regulate, pentru care Euclid dă raportul între latura lor şi raza **sfe**rei în care sunt înscrise. El demonstrează că există numai 5 poliedre regulate.

Continuăm incursiunea în istoria matematicii în Grecia antică prin prezentarea contribuției lui Arhimede la dezvoltarea matematicii. Născut la Siracuza (Sicilia), în anul 287 î. Chr., ca fiu al astronomului Phidias (despre care vorbeşte în cartea sa asupra numărului firelor de nisip), Arhimede a studiat la Alexandria, cu succesorii lui Euclid. Arhimede a inventat o pompă, bazată pe şurubul lui Arhimede, care este utilizată şi astăzi. În prefața cărții sale “Despre spirale” Arhimede povesteşte că unii dintre prietenii săi din Alexandria, cărora le trimisese teoreme descoperite de el fără demonstrație, le-au răspândit ca fiind ale lor, motiv pentru care le-a trimis un nou set de rezultate, printre care a inclus şi două teoreme false “astfel încât cel ce pretinde că a descoperit ceva, dar nu produce demonstrații, poate fi considerat ca pretinzând că a descoperit imposibilul”.

Fără îndoială, Arhimede a fost un geniu al matematicii, fiind considerat unui dintre cei mai mari matematicieni ai tuturor timpurilor, englezii comparându-l cu Newton.

Pagini întregi despre Arhimede au scris Plutarh (în “Vieți paralele”) şi Titus Livius. De la aceştia ştim că Arhimede era prieten apropiat al regelui Hieron II al

Siracuzei. Arhimede l-a sprijinit efectiv pe Hieron în diverse ocazii. Se spune că Arhimede a descoperit legea sa asupra corpurilor scufundate (moment rămas în istorie pentru strigătul lui Arhimede: “Evrika!” – “am descoperit!”) în lichid gândindu-se cum să afle dacă giuvaergiul care făcuse regelui o coroană de aur, utilizase într-adevăr acest metal la fabricarea coroanei. Aşa a observat că giuvaergiul folosise nu numai aur, ci şi argint pentru coroana regelui Hieron al II – lea. Iată procedeul prin care Arhimede a cercetat compoziția coroanei care avea *m* kilograme: Ştiind că densitatea aurului este *a* şi aceea a argintului este *b*, Arhimede măsoară (cu volumul de apă dislocuit prin scufundare) volumul *v* al coroanei. Notând cu *x* greutatea aurului şi cu *m* – *x* pe aceea a argintului, el obține: $v = \frac{x}{a} + \frac{m-x}{b}$, de unde $x = \frac{a(bv-m)}{b-a}$.

Arhimede este vestit pentru o serie de aplicații ale geometrie în mecanică. Matematicianul proiecta tot felul de maşini, pentru a se amuza, dar la cererea regelui, în timpul asedierii Siracuzei, a construit o catapultă care a ajutat la apărarea cetății. Cu un sistem de oglinzi, Arhimede a dat foc unor corăbii care încercau să atace cetatea. Pentru Arhimede, inventivitatea şi încrederea în forța matematicii erau fără sfârşit. Plutarch povesteşte că Arhimede i-a arătat regelui puterea invențiilor sale, ducând la apă o corabie încărcată cu oameni şi mărfuri, numai cu forța mâinilor sale, moment în care matematicianul i-a spus regelui: “Dați-mi un punct de sprijin şi ridic universul!”.

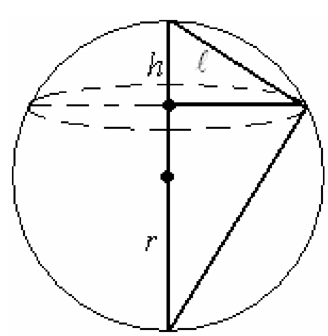
O versiune a morții sale este redată în versiunea: “Pe când Arhimede, adâncit în gânduri matematice, privind cercurile desenate de el pe nisip, un soldat roman a venit să-l conducă la Marcellus. Umbra soldatului îi deranja studiul şi savantul i-a spus: “Nu-mi strica cercurile!”, la care romanul, enervate, l-a ucis cu o lovitură de sabie”.

Arhimede a inventat metode ce folosesc un procedeu apropiat de integralele definite (simple, duble, triple), pentru calculul volumelor şi ariilor corpurilor solide şi calculul ariilor figurilor olane. Dă o bună aproximare buna a lui π, ca şi a rădăcinii pătrate a lui 2. În mecanică, Arhimede descoperă teoreme fundamentale asupra centrelor de greutate ale figurilor plane sau spațiale. Aşa cum am spus, Arhimede a descoperit faimoasa sa teoremă care dă greutatea unui corp scufundat în lichid, numită Principiul lui Arhimede, precum şi axioma sa care are atâtea implicații în analiză şi algebră.

Operele lui Arhimede care au supraviețuit sunt următoarele: “Asupra echilibrului în plan” (2 cărți), “Cuadratura parabolei”, “Asupra sferei şi cilindrului” (2 cărți), “Despre spirale”, “Asupra conoizilor şi sferoizilor”, “Despre corpurile plutitoare” (2 cărți), “Măsurarea cercului”, “Despre numărarea firelor de nisip”, “Metoda”.

Dintre contribuțiile inestimabile ale lui Arhimede la dezvoltarea ideilor matematice enumerăm:

- În “Asupra echilibrului în plan”, folosind geometria, enunță principiile fundamentale ale mecanicii, descoperă teoremele asupra centrelor de greutate, în particular găseşte aceste centre în paralelogram, triunghi, trapez, segmentul de parabolă.
- În “Despre sferă şi cilindru” Arhimede arată că suprafața sferei este de patru ori suprafața cercului mare, găseşte aria segmentului de sferă, demonstrează că volumul sferei este $\frac{2}{3}$ din volumul cilindrului circumscris, iar suprafața sferei este $\frac{2}{3}$ din suprafața totală a cilindrului circumscris ei. El demonstrează că o calotă este echivalentă cu un cerc a cărui rază este distanța dintre centrul calotei şi un punct de pe cercul sferic de bază: $A = \pi\ell^2 = 2\pi rh$.



- Arhimede consideră sfera, cilindrul circumscris ei şi un con cu două pânze, cu vârful în centrul sferei şi cu bazele tocmai bazele cilindrului. El arată că un plan paralel cu bazele determină pe sferă un cerc a cărui arie este diferența ariilor cercurilor determinate în cilindru şi con, iar două plane paralele cu bazele, determină în sferă un volum egal cu diferența dintre volumele solidelor determinate de ele în cilindru şi con, un rezultat a cărui frumusețe rezistă şi astăzi.
- Arhimede observă că dacă planele de secțiune sunt la distanța maximă ($2r$) se obține că volumul sferei este diferența volumelor cilindrului şi conului cu două pânze.
- În aceeaşi carte despre sferă şi cilindru este rezolvată problema găsirii unui plan care secționează sfera în două părți ale căror volume să fie într-un raport dat.
- În cartea "Despre spirale" Arhimede defineşte spirala, îi dă proprietățile fundamentale, dă unele rezultate asupra tangentelor la spirală şi asupra ariilor porțiunilor din spirală.
- În cartea "Asupra conoizilor şi sferoizilor" Arhimede examinează paraboloidul şi hiperboloidul de rotație, precum şi elipsoidul, obținute prin rotirea unor figuri în jurul unei axe.
- Principiile de bază ale hidrostaticii au fost date de Arhimede în cartea "Despre corpurile care plutesc", iar calculul lui π cu mare acuratețe este făcut în "Măsurarea cercului". El a obținut $\pi \in \left(3\frac{10}{71}, 3\frac{1}{7}\right)$ prin înscrierea şi circumscrierea cercului în poligoane regulate cu 96 laturi.
- "Numărarea firelor de nisip" este o capodoperă a lui Arhimede, care propune un sistem numeric capabil să exprime numere până la numărul $8 \cdot 10^{16}$, în notația de azi. Arhimede a dat dimensiunea universului, pentru a calcula numărul firelor de nisip care încap în el.

Deşi Arhimede a trimis cărțile sale la Alexandria, unde ele au fost utilizate, totuşi operele lui Arhimede nu au cunoscut o răspândire mare în antichitate, poate şi pentru că multe dintre ideile matematice din ele nu puteau fi înțelese atunci. Cu toate acestea, pentru că Arhimede a demonstrat gândire originală, abilitate de calcul şi rigoare în demonstrație, el a rămas în istoria matematicii greceşti şi nu numai ca unul dintre cei mai mari matematicieni.

Cursul numărul 7

ISTORIA MATEMATICII ŞI A ÎNVĂŢĂMÂNTULUI MATEMATIC ÎN ROMÂNIA ÎN SECOLELE XVII – XIX

7.1. Istoria matematicii şi a învăţământului matematic în România în secolele XVII – XIX

În România, matematica a apărut şi s-a dezvoltat odată cu apariţia învăţământului organizat, a şcolii.

Un început de învăţământ matematic se semnalează în secolul al XVI – lea, prin înfiinţarea primei Şcoli de la Cotnari, unde s-a predat matematica. Această şcoală a avut grad de gimnaziu, nu de academie care e sinonim cu universitate.

În secolul al XVII – lea apar şi primele academii greceşti la Iaşi şi Bucureşti înfiinţate de Vasile Lupu şi respectiv Constantin Brâncoveanu. Ambele academii au durat până în 1821 când turcii şi-au dat seama că în ele se făcea propagandă împotriva imperiului lor. În aceste academii, în ultimii trei ani de studiu (10, 11, 12) se predau în limba greacă: aritmetică practică şi raţională, algebră, teoria şi practica algoritmilor, trigonometrie plană şi sferică, astronomia şi aplicarea matematicilor la arta militară. Trebuie precizat că pe lângă aceste academii, atât în Muntenia cât şi în Moldova existau şi alte şcoli (în care se predau cunoştinţe elementare: citit, scris şi socotit), în general pe lângă mânăstiri şi biserici.

O dezvoltare importantă a învăţământului matematic a avut loc la începutul secolului al XIX – lea odată cu întemeierea în august 1818 a Şcolii de inginerie a lui Gheorghe Lazăr (1779 – 1823) de la Sf. Sava (Bucureşti) şi la Iaşi a Şcolii de inginerie întemeiată de Gheorghe Asachi (1788 – 1869) cu predare în limba franceză la început. Atât Lazăr, cât şi Asachi au scris cărţi de: aritmetică, geometrie, trigonometrie, în limba română, după care s-a învăţat mulţi ani în şcoli în prima jumătate a secolului al XIX – lea. S-a ajuns la convingerea că se poate învăţa şi în limba maternă, oricât de înalte ar fi studiile de făcut, fapt cu urmări pozitive asupra învăţământului în general şi a celui matematic, în particular, iar mai târziu asupra creaţiei matematice.

Prima contribuţie originală românească în matematică a fost a lui Dimitrie Asachi (1820 – 1868), fiul lui Gheorghe Asachi, ofiţer şi inginer. Această lucrare a fost publicată la München în 1841 şi se referă la inversiunea seriilor.

După Unirea Principatelor române în 1859, Alexandru Ioan Cuza înfiinţează universităţi la Iaşi în 1860 şi la Bucureşti în 1864, cu mai multe facultăţi, printre care şi Facultatea de ştiinţe fizice, matematice şi naturale.

Printre profesorii de matematică de la universităţile nou înfiinţate care au produs şi publicat lucrări originale amintim pe Emanoil Bacaloglu (1830 – 1891) de la Universitatea din Bucureşti care a introdus o curbură ce-i poartă numele în teoria suprafeţelor, şi pe Neculai Şt. Botez (1843 – 1920) de la Universitatea din Iaşi cu o lucrare asupra seriei armonice.

Toţi profesorii de matematici de la ambele universităţi au avut importante contribuţii la aşezarea învăţământului matematic pe baze solide şi pentru formarea de specialişti în căi ferate, poduri, clădiri, industrie chimică ş.a.

Majoritatea acestor profesori au publicat manuale didactice atât pentru învăţământul secundar cât şi pentru învăţământul superior. Astfel, prima lucrare pentru studenţii în matematici a fost "Calcul diferenţial şi integral" a lui Neculai Culianu (Iaşi, 1870), urmată de "Curs de geometrie analitică" a lui C. Climescu (Iaşi, 1898). Profesorii universitari au editat reviste de matematică pentru ridicarea nivelului învăţământului matematic secundar şi superior. Astfel, au apărut în 1883 "Recreaţii ştiinţifice" la Iaşi şi "Gazeta matematică" în 1895 la Bucureşti.

Din pleiada de iluştri profesori matematică de la Universitatea din Bucureşti ne vom opri asupra a doi, care au influenţat pentru multă vreme învăţământul în ţara noastră şi care au adus şi contribuţii originale în matematică:

Spiru C. Haret (1851 – 1912). S-a născut la 15 februarie 1851 în localitatea Hanul Conachi din Dorohoi.

A urmat cursurile primare în casa părintească, apoi la o şcoală din Dorohoi iar în septembrie 1862 intră ca bursier (era copil sărac, dar foarte dotat pentru studiu) la liceul Sf. Sava. În 1869, după absolvirea liceului, se înscrie la Universitatea din Bucureşti la Facultatea de ştiinţe, secţia fizico – matematică. În decembrie 1870, deşi student în anul II, obţine prin concurs catedra de matematică la Seminarul central. După un an renunţă la catedră şi îşi continuă studiile la Universitate. Îşi ia licenţa în 1874, la 23 de ani. Titu Maiorescu, ministrul Instrucţiunii Publice, îi acordă o bursă, pe baza unui concurs, pentru a studia matematica la Paris. Aici, dându-şi seama de lacunele sale în domeniul matematicii, în special deprinderile de a rezolva probleme, şi-a trecut din nou ani licenţa în matematică şi apoi în 1878 îşi susţine teza de doctorat "Despre invariabilitatea marilor axe ale orbitelor planetare", ducând mai departe şi corectând cercetările lui Laplace, Lagrange şi Poisson asupra varietăţii axelor orbitelor planetare. Haret pune în evidenţă "termenii seculari puri" şi pentru "gradul al treilea", ceea ce înfăţişa într-o altă lumină stabilitatea sistemului planetar. Eruditul matematician şi astronom Jules Henri Poincaré observa: "În 1878 Spiru Haret a dovedit existenţa termenilor seculari de gradul III şi acest rezultat a provocat o mare uimire". În 1885 teza de doctorat a lui Haret e republicată în "Analele Observatorului Astronomic" din Paris. Facultatea de Ştiinţe din Paris trimite o adresa Ministerului Cultelor şi Instrucţiunii Publice felicitând România, ţara care a produs şi posedă asemenea talente. Târziu, în 1976 cu prilejul împlinirii a 125 de ani de la naşterea lui Spiru Haret, un crater de pe harta Lunii, pe coordonatele: latitudine 59 de grade sud şi longitudine 176 grade vest, în partea lunară invizibilă, a primit numele lui Haret. Era primul roman care anunţa valoarea, confirmată mai apoi, a scolii romaneşti de matematică, devenind primul român doctor în matematică la Paris. Spiru Haret putea să rămână în Franţa profesor universitar. A preferat însă Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti, unde devine profesor încă din 1878 în urma unui strălucit concurs (din 1882 profesor de geometrie analitică la Şcoala de Poduri şi Şosele). Profesează până în 1910, când se pensionează, ba şi după aceea, până la moarte, ţinând prelegeri de popularizare la Universitatea populară. În 1910 publică "Mecanica socială, la Paris şi Bucureşti, utilizând pentru prima oara, matematica în explicarea şi înţelegerea fenomenelor sociale. Haret a avut o activitate prodigioasă pentru ridicarea nivelului învățământului românesc pe toate treptele sale: primar, secundar şi universitar. A fost sufletul necontestat al şcolii româneşti între 1880 şi 1910 şi de aceea a fost numit "omul şcolii". Principiul după care se ghida în materie de învățământ era "primatul şcolii" şi a reuşit să ridice nivelul şcolii româneşti, mai ales în ce priveşte programele de matematică, la nivelul celor mai avansate țări.

Ca profesor Spiru Haret avea darul expunerii, cu demonstrații simple, intuitive, ilustrate cu diverse aplicații practice. Explicațiile lui erau clare, curgătoare, sistematice şi logice.

Ca om era modest, tăcut, cinstit, drept şi hotărât. A fost printre puținii care l-au ajutat pe inventatorul Aurel Vlaicu. A murit pe 17 decembrie 1912, de cancer, după ce ca membru al Academiei Romane, în şedința din 18 Mai 1912 a prezentat comunicarea "Pata cea mare roşie de pe planeta Jupiter".

În ştiință Spiru Haret a rămas prin două lucrări originale: teza de doctorat şi "Mecanica socială", apărută în 1910 în limba franceză şi tradusă în limba română în 1969, dar în istoria culturii şi învățământului este considerat ctitorul şcolii moderne româneşti.

Se poate spune că pe Spiru Haret ca matematician l-a preocupat "problema stabilității planetare", iar ca om al şcolii, l-a preocupat progresul ei.

David Emmanuel (1854 – 1941). S-a născut pe 31 ianuarie 1854 în Bucureşti, din părinți foarte săraci, tatăl său, Manole Emmanuel, fiind tâmplar.

Şcoala primară a urmat-o la Ploieşti, între 1861 – 1864, unde locuiau părinții săi. Primele patru clase secundare le-a făcut la Gimnaziul Şincai din Bucureşti, între anii 1865 – 1869; pe urmă trece la liceul Gh. Lazăr, unde face tot cursul superior între anii 1869 – 1873. Cu banii pe care îi strânge din meditații, în cursul superior pleacă la Paris să studieze la Sorbona fără bursă. La Paris îşi dă licența în ştiințele matematicii, iar mai apoi în fizică. Îşi susține teza de doctorat în matematică "Etude des intégrales abéliennes des troisième espèce". Este al doilea cetățean român doctor în matematici de la Paris.

Întors în țară în toamna anului 1879 este angajat ca profesor de matematici la un liceu, iar în 1880 profesor la Facultatea de științe a Universității Bucureşti şi la Şcoala de poduri şi şosele, iar din 1882 profesor şi la Şcoala normală superioară unde a predat pentru prima dată în țara noastră teoria grupurilor şi teoria lui Galois. La cursul de la universitate, în teoria generală a funcțiilor analitice, David Emmanuel s-a arătat adept al lui Weierstrass, cu tendință de aritmetizare în analiză. Cursul introducea noțiunea de funcții analitice prin seriile de puteri ale lui Weierstrass. La cursul din anul III, Emmanuel trata funcțiile eliptice ca rezultat al inversiunii integralelor eliptice, iar în partea finală a cursului trata ultimele noutăți din acel timp (de exemplu cele două teoreme celebre ale lui Emile Picard privind funcțiile analitice întregi).

Cursurile pe care le făcea David Emmanuel – “moş David” sau “tata David” cum îi spuneau studenții – la universitate sau la politehnică erau metodice, precise, clare, pline de ordine şi bogăție de fapte, pline de armonie şi continuu la curent ultimele noutăți în materie. Din pricină că urmărea evoluția continuă a disciplinelor pe care le preda, cursurile, în special de teoria funcțiilor, erau mereu reînnoite.

În 1907, împreună cu Spiru Haret, D. Emmanuel a fost sărbatorit la universitate şi la Şcoala de poduri şi şosele pentru împlinirea a 25 de ani de profesorat universitar. La 15 septembrie 1929 a fost sărbătorit pentru 50 de ani de la susținerea tezei şi 48 de ani de profesorat universitar, de toți matematicienii romani. La 25 mai 1936 a fost ales membru de onoare al Academiei Romane.

Senin şi modest ca şi filozofii antici (avea de altfel o cultură clasică splendidă, care se trăda adeseori în expunerile sale de matematică cele mai dificile), clar şi precis în expunere, scotea totdeauna în evidență esențialul dintr-o problemă pusă sau dintr-o demonstrație riguroasă. A fost un om de prestigiu ca şi S. Haret, stimat pentru ştiință şi caracter.

A decedat în Bucureşti, la vârsta de 87 de ani, la 4 februarie 1941.

D. Emmanuel va rămâne în istoria matematicii ca unul dintre cei care, profesând matematica la nivel înalt timp de 48 de ani, a realizat premise pentru apariția şcolii matematice româneşti. Toți matematicienii noştri de frunte de mai târziu, precum Țițeica, Pompei, Lalescu ş.a., au recunoscut că dacă ai ajuns la creații importante în matematică se datorează temeliei de granit pusă acestui învățământ de marele pedagog David Emmanuel.

Opera matematică a lui D. Emmanuel este redusă cantitativ, dar calitativ este de certă valoare. Din lucrările didactice se remarcă: "Curs de analiză infinitezimală" (1925) şi "Lecțiuni de teoria funcțiunilor", în două părți apărute la Editura Casa şcoalelor, 1924 şi 1927.

Aşa cum l-a caracterizat Pangrati la o sărbătorire, David Emmanuel, dascăl fermecător, departe de frământări deşarte şi indiferent de glorie, rămâne "un înțelept".

7.2. Istoria matematicii şi a învățământului matematic în România în secolul al XX – lea

La începutul secolului al XX – lea, în urma legii Haret de reformare a învățământului din 1898, cu numeroşi doctori în matematici (din apus): Haret, Emmanuel, Țițeica, Constantin Gogu, Nicolae Coculescu, Anton Davidoglu, D. Pompeiu, Traian Lalescu ş.a. şi cu o revistă de mare prestigiu "Gazeta matematică", era normal să ajungem şi noi să creăm în matematică, iar după 1920 să se poată vorbi chiar de o "şcoală matematică românească" recunoscută peste granițe. Se ajunsese la un moment dat ca în "Comptes rendus de l' Académie française des sciences" să apară într-un singur număr câte şase memorii scrise de matematicieni români.

Apariția şcolilor şi a universităților în a doua jumătate a secolului al XIX – lea au impulsionat şi la noi învățământul matematic şi chiar creația matematică, însă decalajul față de multe țări europene fiind enorm. Universitățile cu trecut de peste 800 de ani (Bologna creată în 1088) din străinătate au influențat dezvoltarea învățământului din acele țări, pe când la noi abia în a doua jumătate a secolului al XIX – lea apar, iar în al treilea sfert al secolului al XIX – lea începem să fim consemnați cu lucrări originale de matematici (lucrările lui Em. Bacaloglu şi N. Şt. Botez). În cel de-al patrulea sfert al secolului al XIX – lea apar primii doctori în matematică la Sorbona şi cele două publicații: Recreații științifice la Iaşi şi Gazeta matematică la Bucureşti, toate acestea creând premisele unei impulsionări a învățământului matematic, apt să ajungă din urmă pe cel din țările avansate.

În sfârşit, odată cu începutul secolului al XX – lea se conturează o epocă de creație matematică propriu – zisă, în care se formează o şcoală matematică românească cunoscută ca atare peste hotare. Într-un timp atât de scurt au apărut creatori ca Țițeica, Pompeiu şi Lalescu. Ei au fost cunoscuți şi în străinătate, Țițeica şi Pompeiu ținând cursuri la Sorbona, fiind citați în multe tratate de specialitate, iar în anumite domenii matematice au fost deschizători de drumuri. În jurul lor s-au format matematicienii noştri din prima jumătate a secolului al XX – lea şi care şi-au continuat opera de creație şi în a doua jumătate a secolului. De exemplu, în jurul lui Țițeica s-au format geometrii: Gh. Vrănceanu, Dan Barbilian, N. Mihăileanu ş.a., la seminarul de analiză a lui Pompeiu: Simion Stoilow, Miron Nicolescu, Alexandru Froda, Octav Onicescu ş.a., iar în jurul lui Lalescu, care din păcate a avut o viață scurtă, au roit o serie de matematicieni cu preocupări de algebră şi teoria ecuațiilor integrale.

În continuare consemnăm câteva date despre viața şi opera acestor trei părinți ai matematicii româneşti.

Gheorghe Țițeica (1873 – 1939) s-a născut la 14 / 16 octombrie 1873 în Turnu Severin. După absolvirea în 1895 a secției matematici, Facultatea de Ştiințe, Universitatea din Bucureşti, pleacă în 1896 la Paris să studieze matematica la şcoala normală superioară (Sorbona), unde susține în 1899 teza de doctorat în fața unei comisii care-l avea ca preşedinte pe Gaston Darboux. Opera ştiințifică a lui Țițeica cuprinde 96 de memorii ştiințifice, majoritatea de geometrie diferențială proiectivă şi afină.

Dimitrie Pompeiu (1873 – 1954) s-a născut în 22 septembrie / 4 octombrie 1873 în satul Dimăcheni (din Dorohoi), ca fiu al învățătorului Dimitrie Pompeiu, fost coleg de clasă la liceul din Botoşani cu Eminescu. Între 1889 şi 1893 urmează Şcoala de institutori din Bucureşti. În 1898 pleacă la Paris pentru a-şi perfecționa studiile de matematică. După un an de studiu îşi trece bacalaureatul francez, iar în 1899 se înscrie la Sorbona, unde, în 1903 obține licența în matematici. În 1905 îşi susține teza de doctorat în fața unei comisii al cărei preşedinte era Poincaré. Activitatea ştiințifică a lui Pompeiu s-a desfăşurat în patru domenii: teoria funcțiilor şi calcul funcțional, teoria mulțimilor, mecanica rațională şi calcul diferențial şi integral. Opera lui matematică cuprinde 129 de memorii în periodicele de prestigiu matematic din Franța, Belgia, Germania, Italia, Statele Unite, Japonia, Portugalia, Olanda etc. O predilecție deosebită a avut pentru teoria funcțiilor, introducând mai multe noțiuni noi de mare valoare, dintre care amintim: funcțiile Pompeiu, derivata areolară, teorema creşterilor finite în domeniul complex, diverse ecuații funcționale, fundamentele mecanicii. Dar Pompeiu se oprea de multe ori şi asupra problemelor de matematici elementare, în special de geometrie. Un caz tipic este celebra teoremă: "distanțele de la un punct din planul unui triunghi echilateral la laturile sale sunt laturile unui triunghi", teoremă care-i poartă numele.

Traian Lalescu (1882 – 1929) s-a născut la 24 iulie 1882 în Bucureşti. În clasa a VI – a de liceu ajunge corespondent la Gazeta matematică cu o activitate extrem de prodigioasă. După terminarea liceului în 1900 intră primul la Şcoala de poduri şi şosele din Bucureşti, urmând cursurile acesteia până în 1903 când se retrage şi trece definitiv la Facultatea de ştiințe, secția matematică a Universității din Bucureşti. În iunie 1903 îşi ia licența în matematică şi obține o bursă de studii la Sorbona. În 1908 susține teza de doctorat în matematici sub preşedinția lui E. Picard. Rezultatele din teza de doctorat au impresionat atât de mulți încât au fost citate în marile cursuri de analiză matematică. La Congresul mondial de matematică de la Roma din 23 – 30 martie 1908 îl cunoaşte pe celebrul matematician Vito Voltera (1860 – 1940) cu care stabileşte o adevărată colaborare ştiințifică. În creația matematică a lui Lalescu se disting preocupări privind teoria numerelor şi algebra, geometria, calculul vectorial şi tensorial, analiza matematică, mecanica, electricitate. A publicat peste 100 de articole şi memorii în diverse reviste de prestigiu din țară şi străinătate, în special Franța. Traian Lalescu a fost matematicianul român de o forță e concepție, spontaneitate şi originalitate rar întâlnite. Era matematicianul generalizărilor, al soluțiilor elegante şi simple.

Aceşti trei mari ctitori ai şcolii matematice româneşti au format prin lecțiile lor, prin lucrările lor de cercetare ştiințifică cât şi prin dăruirea lor de a sprijini dezvoltarea învățământului matematic în țara noastră o serie de matematicii care s-a transformat într-un adevărat *fenomen matematic românesc*.

A. Analiză şi teoria funcțiilor

1. *Anton Davidoglu* (1873 – 1958), născut la Bârlad, a făcut studiile superioare şi doctoratul la Sorbona în 1900. A publicat 12 memorii şi două lucrări didactice.

2. *Theodor Angheluță* (1882 – 1964), născut într-un sat din fostul județ Tutova, a făcut studiile superioare la Bucureşti şi Sorbona, iar doctoratul la Bucureşti în 1922. A publicat peste 70 de lucrări ştiințifice, precum şi o serie de cursuri universitare de o deosebită claritate.

3. *Aurel Angelescu* (1886 – 1938), născut la Ploieşti, a făcut studiile superioare şi doctoratul la Sorbona în 1916. A publicat peste 50 de lucrări ştiințifice.

4. *Simion Stoilow* (1887 – 1961), născut la Bucureşti, a făcut studiile superioare şi doctoratul la Sorbona în 1916. Opera matematică a lui a fost publicată în limba franceză de către Editura Academiei române în 1964.

5. *Florin Vasilescu* (1897 – 1958), născut la Călăraşi, îşi face doctoratul la Sorbona în 1925. A publicat 45 de memorii şi monografii în diverse reviste din țară şi în special din Franța.

6. *Mihail Ghermănescu* (1899 – 1962), născut în Bucureşti, îşi face studiile universitare la Bucureşti şi doctoratul la Cluj în 1933.

7. *Alexandru Ghika* (1902 – 1964), născut în Bucureşti, îşi face studiile la Bucureşti şi Paris şi doctoratul la Sorbona în 1927. Activitatea sa ştiințifică priveşte în special analiza funcțională în care a publicat peste 100 de memorii şi lucrări didactice.

8. *Miron Nicolescu* (1903 – 1975), născut la Giurgiu, îşi face studiile universitare la Bucureşti şi doctoratul la Sorbona în 1928. Activitatea ştiințifică

priveşte este imensă şi cuprinde peste 150 de memorii publicate în cele mai prestigioase reviste de matematică din țară şi străinătate.

9. *Adolf Haimovici* (1912 – ?), născut la Iaşi, îşi face studiile primare, liceale şi universitare şi doctorale la Iaşi în 1934. A publicat peste 80 de memorii şi o serie de lucrări didactice utile şi azi studenților.

B. Geometrie şi topologie

1. *Alexandru Myller* (1879 – 1965), născut la Bucureşti, îşi face studiile primare, liceale şi universitare la Bucureşti, unde îşi ia licența în 1900. În 1902 pleacă pentru studii de doctorat în Germania, mai întâi la Berlin şi apoi la Göttingen, unde susține în 1906 teza de doctorat în fața unei comisii din care făcea parte şi David Hilbert. Opera sa matematică cuprinde peste 120 de articole şi memorii publicate în țară şi străinătate.

2. *Octav Mayer* (1895 – 1966), născut la Mizil, îşi face studiile liceale şi universitare la Iaşi, unde îşi ia licența în 1919, după o întrerupere de trei ani datorită războiului. În 1920 susține la Iaşi teza de doctorat, fiind primul doctor în matematică la Universitatea din Iaşi şi primul doctor în matematici pure luat în țară. Opera lui matematică cuprinde peste 50 de lucrări publicate în țară şi străinătate.

3. *Gheorghe Vrănceanu* (1900 – 1979), născut în comuna Doagele, județul Vasului, îşi face studiile primare în satul natal, liceale la Vaslui şi universitare la Iaşi, unde îşi ia licența în 1922. În 1924 susține la Roma teza de doctorat. Opera ştiințifică este imensă, publicând peste 200 de memorii în cele mai prestigioase publicații de matematică din lume.

4. *Gheorghe Gheorghiev* (1907 –), născut în oraşul Cetatea Albă (Basarabia), a făcut studiile universitare la Iaşi. În 1946 susține la Iaşi teza de doctorat. Opera lui matematică cuprinde peste 70 de memorii de geometrie diferențială şi o serie de lucrări didactice printre care se remarcă “Curs de geometrie analitică”, “Geometrie diferențială” etc..

5. *Nicolae N. Mihăileanu* (1912 – 1997), născut la Constanța, urmează cursurile primar şi liceal la Constanța, iar cele universitare la Bucureşti. În 1949 îşi

susține teza de doctorat la București în fața unei comisii care-l avea ca președinte pe Gh. Vrănceanu. A publicat peste 120 de memorii și lucrări didactice.

C. Algebră și teoria numerelor

1. *Dan Barbilian* (1895 – 1961), născut la Câmpulung – Muscel. În 1929 își susține teza de doctorat la București. A publicat peste 120 de lucrări în cele mai prestigioase publicații matematice din țară și străinătate, precum și unele monografii (cursuri) care sunt și azi actuale.

2. *Ion Creangă* (1911 – ?), născut în localitatea Adâncata, fostul județ Dorohoi. În 1913 obține licența în matematică la Iași iar în 1939 își ia doctoratul la Roma. A publicat peste 50 de lucrări și a scris mai multe lucrări didactice consultate și azi de studenți.

3. *Alexandru Froda* (1894 – 1973), născut la București, își face studiile primare și liceale în București, în 1912 intră la Școala națională de poduri și șosele pe care o absolvă în 1918, după 3 ani de întrerupere datorată războiului. Se înscrie apoi la Facultatea de științe, secția matematici, a Universității din București, pe care o absolvă în 1927. În 1929 pleacă la Paris, unde, la finele aceluiași an își ia doctoratul în matematici la Sorbona. A publicat peste 60 de lucrări științifice și didactice.

D. Matematici pure și aplicate

1. *Victor Vâlcovici* (1885 – 1970), născut la Galați, a urmat școala primară și liceul la Brăila, apoi Facultatea de științe la Universitatea din București pe care o absolvă în 1907. În 1909 obține o bursă de studii pentru doctorat la Göttingen, iar în 1913 obține doctoratul cu un subiect de mecanică. A publicat 169 de memorii.

2. *Caius Iacob* (1912 – 1992), născut la Arad, a urmat școala primară și cursul inferior al liceului la Arad, iar cursul superior al liceului la Oradea. Urmează Facultatea de științe la Universitatea din București pe care o absolvă în 1931. În 1935 obține doctoratul cu un subiect de mecanica fluidelor la Sorbona. A publicat peste 120 de lucrări științifice.

3. *Mendel Haimovici* (1908 – 1973), născut la Iaşi şi a făcut toată gama de studii la Iaşi. În 1932 pleacă la Roma şi se întoarce în 1933 cu doctoratul. A publicat peste 70 de lucrări în reviste de mare prestigiu.

4. *Octav Onicescu* (1892 – 1983), născut la Botoşani, urmează şcoala primară şi liceul la Botoşani, iar în 1915, la Bucureşti, absolvă în paralel Facultatea de ştiințe şi Facultatea de filosofie. A publicat peste 200 de lucrări ştiințifice, lucrări de sinteză şi lucrări didactice.

5. *Gheorghe Mihoc* (1906 – 1981), născut la Brăila, face toate studiile la Bucureşti. Îşi ia licența în matematică în 1928, după care pleacă la Roma, obținând în 1930 titlul de doctor în ştiințele statistice şi actuariale. În 1934 susține şi o teză de doctorat în țară. A publicat peste 100 de lucrări ştiințifice şi tratate.

6. *Grigore Moisil* (1906 – 1973), născut la Tulcea, urmează studiile în Bucureşti, şi în paralel cu Facultatea de ştiințe, urmează între 1924 – 1929 şi Politehnica, secția construcții. În 1929 îşi susține la Bucureşti teza de doctorat, iar în 1931 îşi susține docența. A publicat peste 250 de lucrări, din care 198 sunt memorii.