Codruța Stoica

ECUAȚII DIFERENȚIALE
ŞI
CU DERIVATE PARȚIALE
PRIN EXERCIȚII ŞI PROBLEME

Ediția a II-a revăzută şi completată

Editura MIRTON

Timişoara 2004

CUPRINS

Capitolul 1. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL 1

1.1. Considerații teoretice

Se numeşte *ecuație diferențială ordinară* cu o funcție necunoscută de n ori derivabilă $y: I \to \boldsymbol{R}$, I interval, o relație

$$F\,(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

între variabila independentă x şi $y(x)$, $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}, \ldots, y^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$

unde $F: D \to \boldsymbol{R}$, $D \subset \boldsymbol{R}^{n+2}$.

Relația se mai scrie

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

şi se numeşte *forma implicită* a ecuației diferențiale.

Dacă relația de definiție reapare derivata de ordinul n a funcției y, aceasta fiind derivata de cel mai mare ordin efectiv prezentă, se spune că este o ecuație diferențială de ordinul n.

O funcție $f: I \to \boldsymbol{R}$, $I \subset \boldsymbol{R}$, de n ori derivabilă pe I pentru care

$$F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0$$

se numeşte *soluție* a ecuației diferențiale.

Dacă soluția $y = f(x)$ a ecuației diferențiale se reprezintă grafic în planul xOy, curba obținută se numeşte *curbă integrală* a ecuației diferențiale. Determinarea tuturor soluțiilor unei ecuații diferențiale se numeşte *integrarea ecuației.*

De multe ori ecuația diferențială se poate scrie sub forma

$$y^{(n)}(x) = \varphi(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)),$$

$\varphi: D_1 \to \boldsymbol{R}$, $D_1 \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$. Aceasta se numeşte *forma normală* sau *explicită* a ecuației diferențiale.

În multe probleme practice este necesară determinarea unei soluții a unei ecuații diferențiale, care îndeplinește anumite condiții date, numite *condiții inițiale*.

Problema rezolvării ecuației date știind că în punctul $x_0 \in I$ avem

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

se numește *problema lui Cauchy* relativă la ecuația diferențială.

Ecuațiile diferențiale a căror rezolvare se reduce la calculul câtorva integrale definite se numesc *ecuații integrabile prin cuadraturi*.

Vom trata în acest capitol ecuațiile diferențiale de ordinul 1 integrabile prin cuadraturi, împreună cu metodele lor de integrare.

1.1.1. Ecuații cu variabile separabile

Ecuațiile diferențiale de forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(x)$$

în care funcțiile $f\colon [a_1, b_1] \to \mathbf{R}$ și $g\colon [a_2, b_2] \to \mathbf{R}$ sunt integrabile, se numesc *ecuații diferențiale cu variabile separabile*.

Se separă variabilele în membri diferiți după cum urmează:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

și prin integrare se obține

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(s)ds,$$

unde $x_0, x \in [a_1, b_1]$ și $y, y_0 \in [a_2, b_2]$.

Notând:

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)},\ F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds \text{ și } \varphi(x, y) = G(y) - F(x),$$

soluția ecuației va fi definită implicit prin relația:

$$\varphi(x, y) = 0.$$

1.1.2. Ecuații diferențiale omogene

Ecuațiile diferențiale de forma

$$y' = f(x, y)$$

unde f este funcție omogenă în x şi y se numesc *ecuații diferențiale omogene.*

O funcție f: $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ este *omogenă* în x şi y dacă pentru orice $t \in \boldsymbol{R}$ are loc relația

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Pentru rezolvare se transformă ecuația dată în

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

şi se substituie apoi

$$u = \frac{y}{x}.$$

Se obține o ecuație cu variabile separabile.

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}[\varphi(u) - u],$$

unde s-a notat

$$\varphi(u) = f(1, u),$$

φ fiind considerată continuă pentru $u \in [\alpha, \beta]$.

Dacă $\varphi(u) - u \neq 0$ în $[\alpha, \beta]$, adică $x\, f(x,y) - y \neq 0$, rezultă:

$$\int_{u_0}^{u} \frac{dt}{\varphi(t) - t} = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{s}, \; u_0 = \frac{y_0}{x_0}, \; u = \frac{y}{x}$$

De aici se obține u şi apoi soluția ecuației omogene date.

1.1.3. Ecuații diferențiale liniare de ordinul 1

Ecuațiile diferențiale de forma

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

unde P, Q:$[a, b] \to \boldsymbol{R}$ sunt funcții continue, se numesc *ecuații diferențiale liniare de ordinul 1.*

Dacă $Q(x) = 0$, atunci ecuațiile se numesc *liniare omogene*. Când $Q(x) \neq 0$, ecuațiile se numesc *liniare neomogene.*

Soluțiile generale sunt date de relația

$$y(x) = \left[C + \int_{x_0}^{x} Q(t) e^{\int_{x_0}^{t} P(s)ds} dt \right] e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}, \ C \text{ constant.}$$

1.1.4. Ecuații diferențiale de tip Bernoulli

Ecuațiile diferențiale de forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$$

în care P, $Q:[a, b] \to \mathbf{R}$ sunt funcții continue pe domeniul lor de definiție, iar $\alpha \in \mathbf{R}$ se numesc *ecuații diferențiale de tip Bernoulli.*

Pentru $\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$ ecuațiile devin liniare. Vom trata în continuare cazurile $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

Evident, funcția constantă $y = 0$ este o soluție a ecuației. Fie z o soluție pozitivă a ecuației date pe un interval $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$.

Se face schimbarea de funcție

$$u(x) = [z(x)]^{1 - \alpha}$$

şi se obține ecuația diferențială liniară de ordinul 1:

$$u'(x) + (1 - \alpha)P(x)u(x) = (1 - \alpha)Q(x).$$

1.1.5. Ecuații diferențiale de tip Riccati

Ecuațiile diferențiale de forma

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

unde P, Q, $R:[a, b] \to \mathbf{R}$ sunt funcții continue pe $[a, b]$ se numesc *ecuații diferențiale de tip Riccati.*

În general, ecuația diferențială de acest tip nu se poate integra prin cuadraturi. În cazul în care se cunoaşte o soluție particulară $z = z(x)$ se face schimbarea de funcție

$$y(x) = z(x) + \frac{1}{u(x)}.$$

După substituțiile adecvate, funcția u se va determina din ecuația diferențială liniară

$$u'(x) + [2P(x)u(x) + Q(x)]u(x) + P(x) = 0.$$

1.1.6. Ecuații cu diferențială totală exactă

Ecuațiile diferențiale de forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

cu $P, Q: D \to \mathbf{R}$ continue pe domeniul $D \subset \mathbf{R}^2$, se numesc *ecuații cu diferențială totală exactă* dacă există o funcție $U(x, y)$ astfel încât

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \ \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Dacă funcțiile P şi Q admit derivate parțiale de ordinul 1, atunci condiția ca expresia

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

să fie o diferențială totală exactă este

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

În acest caz soluția ecuației va fi dată implicit de

$$U(x, y) = C, \ C = \text{constant},$$

unde

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)dt,$$

cu $M(x_0, y_0) \in D$ convenabil ales.

1.1.7. Ecuații diferențiale implicite

Ecuațiile diferențiale de ordinul 1 *implicite* sunt de forma

$$F(x, y, y') = 0$$

unde $F: D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^3$, astfel încât ecuația nu este rezolvabilă în raport cu y'.

Această ecuație se integrează prin metoda *Sophus Lie* astfel: ataşăm ecuației suprafața

$$F(x, y, z) = 0$$

obținută înlocuind variabila y' cu z.

Unei soluții $y = \varphi(x)$ a ecuației îi ataşăm curba (C) de pe suprafața definită anterior avînd ecuațiile parametrice:

$$(C)\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \\ z = \varphi'(x) \end{cases}$$

De-a lungul curbei (C) are loc

$$dy = zdx.$$

Reciproc, dacă pe suprafața $F(x, y, z) = 0$ există o curbă (C) reprezentată prin ecuațiile parametrice

$$(C)\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$$

de-a lungul căreia are loc egalitatea $dy = zdx$, atunci proiecția acestei curbe în planul xOy furnizează o soluție a ecuației diferențiale date.

Presupunând că se cunoaşte o reprezentare parametrică a suprafeței de forma

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}, \ (u, v) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2,$$

obținem

$$\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv = h(u,v)\left(\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv\right).$$

Rezolvăm această ecuație în raport cu $\dfrac{dv}{du}$ sau cu $\dfrac{du}{dv}$.

Presupunem că am obținut astfel

$$\frac{dv}{du} = G(u, v), \ (u, v) \in \Omega.$$

Dacă $v = w(u)$ este o soluție a acestei ecuații, atunci soluția corespunzătoare a ecuației date este

$$\begin{cases} x = f(u, w(u)) \\ y = g(u, w(u)) \end{cases}.$$

Cazuri particulare:

1. Ecuații care se pot explicita în raport cu y sub forma

$$y = f(x, y'),$$

unde $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^2$.

În acest caz metoda *Sophus Lie* conduce la suprafața cu reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x, p), \\ z = p \end{cases} \qquad (x, p) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2.$$

Condiția $dy = zdx$ este în acest caz

$$pdx = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp$$

şi conduce la ecuația diferențială explicită

$$\frac{dx}{dp} = G(x, p),$$

unde

$$G(x, p) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p}}{p - \dfrac{\partial f}{\partial x}}.$$

2. Ecuația diferențială a lui *Lagrange* este de forma

$$y = x\,A(y') + B(y')$$

unde A, B sunt funcții depinzând numai de y'.

Dacă $A(y') \neq y'$, condiția $dy = pdx$ devine

$$\frac{dx}{dp} + \frac{A'(p)}{A(p) - p} x + \frac{B'(p)}{A(p) - p} = 0,$$

care este liniară în x ca funcție de p.

Notând soluția generală a acestei ecuații

$$x = \varphi(p, c),\ c \text{ constant},$$

rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației lui Lagrange în funcție de parametrul p are forma

$$\begin{cases} x = \varphi(p,c) \\ y = A(p)\varphi(p,c) + B(p) \end{cases}, \; c \in \mathbf{R}.$$

Dacă $A(p) - p = 0$ are rădăcină reală $p = p_1$, atunci funcția

$$y = p_1 x + B(p_1)$$

reprezentând o dreaptă este o soluție singulară a ecuației lui Lagrange.

3. Ecuația diferențială a lui *Clairaut* este

$$y = xy' + A(y')$$

Condiția $dy = pdx$ conduce la

$$[x + A'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$$

de unde rezultă familia de funcții

$$y = cx + A(c),\; c \in \mathbf{R} \cap D_A,$$

care este soluția generală a ecuației lui Clairaut.

De asemenea, funcția definită parametric prin

$$\begin{cases} x = -A'(p) \\ y = -pA'(p) + A(p) \end{cases}$$

este o soluție singulară a ecuației lui Clairaut, fiind înfăşurătoarea familiei de drepte.

1.2. Probleme rezolvate

1.2.1. Să se integreze ecuația:

$$\frac{dy}{dx} = ky\,,\ k \in \mathbf{R}.$$

Soluție: Ecuația este echivalentă cu $\frac{dy}{y} = kdx$. Integrând ambii membri avem $\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{t} = \int_{x_0}^{x} kds$, deci soluția se definește implicit prin $ln\, y - ln\, y_0 = k(x - x_0)$ iar explicit prin

$$y = y_0 e^{k(x - x_0)}.$$

1.2.2. Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-1}{x-1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluție: Ecuația este echivalentă cu

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x-1}$$

deci are loc $\int \frac{dt}{t-1} = \int \frac{ds}{s-1}$ și atunci $ln|t-1| = ln\,C + ln|s-1|$. Prin urmare $|t-1| = C|s-1|$, C constant.

Dacă pentru $s = 0$ avem $t = 0$ se obține $C=1$, deci soluția implicită este

$$|y-1| = |x-1|.$$

Aceasta a fost rezolvarea lui Cauchy relativă la problema dată.

Observăm că se poate înlocui integrarea definită, atunci când se cere rezolvarea unei probleme Cauchy, cu integrarea nedefinită, problema Cauchy revenind la necesitatea determinării constantei arbitrare C care rezultă prin integrare.

1.2.3. Determinați soluția problemei Cauchy:

$$\begin{cases} 2x\sqrt{4-y^2}+y\dfrac{dy}{dx}=0 \\ y(1)=2 \end{cases}$$

Soluție: Ecuația este echivalentă cu

$$\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}dx=-2xdx,$$

de unde, prin integrare, rezultă

$$\sqrt{4-y^2}=x^2+C,\ C \text{ constant.}$$

Prin urmare,

$$y^2(x)=4-(x^2+C)^2.$$

Condiția $y(1) = 2$ impune $C = -1$ şi obținerea soluției

$$y(x)=\sqrt{4-(x^2-1)^2}.$$

1.2.4. Să se rezolve ecuația:

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Soluție: Observăm că

$$y' = \frac{x(1+\frac{y}{x})}{x(1-\frac{y}{x})}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

deci ecuația este omogenă. Facem substituția indicată $y = ux$, de unde rezultă $y' = u'x + u$, deci $u' = \frac{1}{x}(\frac{1+u}{1-u}-u)$ adică $\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}$.
Integrând ecuația cu variabile separabile obținem

$$\int\frac{(1-u)du}{1+u^2}=\int\frac{dx}{x}$$

deci $$arctgu-\frac{1}{2}ln(1+u^2)=ln\,x-ln\,C$$

de unde, revenind la y, se deduce

$$Ce^{arctg\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2 + y^2}\text{ , } C \text{ const,}$$

care descrie implicit soluția ecuației.

1.2.5. Să se rezolve ecuația:

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0.$$

Soluție: Ecuația se scrie sub forma echivalentă:

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \text{ sau } y' = \frac{(\frac{y}{x})^2 - 1}{2\frac{y}{x}}.$$

Făcând substituția $u = \frac{y}{x}$, de unde $y' = u'x + u$, se obține $u'x = \frac{-u^2 - 1}{2u}$, adică o ecuație cu variabile separabile $-\frac{2u}{u^2 + 1}du = \frac{1}{x}dx$. Prin integrare se obține $- \ln (u^2 + 1) = \ln x + \ln C$ și mai departe $\frac{1}{u^2 + 1} = Cx$.

Soluția implicită a ecuației date este

$$x^2 + y^2 - Cx = 0,\ C \text{ constant}$$

și descrie o familie de cercuri tangente în origine la Oy.

1.2.6. Rezolvați ecuația:

$$(x - 2y + 5)dx + (2x - y + 4)dy = 0$$

Soluție: Ecuația diferențială, reductibilă la o ecuație omogenă, poate fi scrisă sub forma:

$$y' = - \frac{x - 2y + 5}{2x - y + 4}.$$

Dreptele de ecuație $x - 2y + 5 = 0$ și $2x - y + 4 = 0$ se intersectează în punctul $M(-1, 2)$, ceea ce impune schimbarea de variabile $x = u - 1$ și $y = v + 2$, care va conduce la ecuația omogenă

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u - 2v}{2u - v}.$$

În continuare, făcând schimbarea de funcție $v = uz$, cu $v' = uz' + z$, se obține ecuația cu variabile separabile

$$\frac{2-z}{z^2-1}dz=\frac{du}{u},$$

care are soluția $\frac{z-1}{(z+1)^3}=Cu^2$, C constant. Revenind la schimbările de funcții făcute, rezultă soluțiile ecuației inițiale

$$C(x+y-1)^3=y-x-3,\ C\in\mathbf{R}.$$

1.2.7. Determinați soluțiile ecuației:

$$x^3(y'-x)=y^2.$$

Soluție: Prin substituția $y=u^m$, $m\in\mathbf{R}$, ecuația dată este reductibilă la o ecuație omogenă. Determinăm valoarea lui m, după cum urmează, prin înlocuire în ecuația inițială:

$$mx^3u^{m-1}u'-x^4=u^{2m}.$$

Din condiția $3+m-1=2m$ rezultă $m=2$, deci schimbarea de funcție care se impune este $y=u^2$, ea conducînd la ecuația omogenă

$$2x^3uu'-x^4=u^4,$$

căreia, în urma efectuării schimbării de funcție $u=zx$, i se determină soluția

$$z^2=-\frac{1}{\ln C|x|}+1,\ C>0.$$

Revenind la schimbările de funcții efectuate se obțin soluțiile ecuației date:

$$y(x)=x^2\left(1-\frac{1}{\ln C|x|}\right),C>0.$$

1.2.8. Să se rezolve ecuația:

$$y-(x-y^3)y'=0.$$

Soluție: Obținem formele echivalente

$$ydx-(x-y^3)dy=0,$$

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}+ydy=0,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)+d\left(\frac{y^2}{2}\right)=0,$$

de unde rezultă soluția implicită a ecuației

$$\frac{x}{y}+\frac{y^2}{2}=C,\ C \text{ constant.}$$

Observație: Problema mai putea fi soluționată şi prin reducerea ei la o ecuație omogenă, ținând cont de procedeul prezentat în exercițiul anterior, prin schimbarea de variabilă $y=u^{\frac{1}{3}}$.

1.2.9. Determinați soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases}(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}+y(\sqrt{1+x^2}-x)=0\\ y(0)=1\end{cases}$$

Soluție: Ecuația se poate scrie sub forma

$$\frac{dy}{dx}+\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{1+x^2}y=0,$$

fiind o ecuație liniară omogenă cu $P(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{1+x^2}$. Aceasta poate fi privită ca o ecuație cu variabile separabile sau poate fi rezolvată direct prin

$$y(x)=Ce^{-\int\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{1+x^2}dx}.$$

Ținând cont şi de condiția $y(0)=1$ se obține soluția problemei Cauchy

$$y(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

1.2.10. Să se rezolve ecuația:

$$y-xy'=kx^2,\ k \text{ constant.}$$

Soluție: Se observă că este o ecuație liniară neomogenă, cu

$$P(x)=-\frac{1}{x} \text{ şi } Q(x)=-kx.$$

Ecuația liniară omogenă atașată este $y - xy' = 0$ echivalentă cu $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ deci $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$ și avem $ln\, y = ln\, x + ln\, c$, de unde $y = cx$, c constant.

Căutăm acum soluția ecuației neomogene variind constanta c prin metoda lui Lagrange, deci de forma $y = c(x)x$. Obținem $y' = c'x + c$ și înlocuind în ecuația inițială avem $cx - c'x^2 - cx = kx^2$, deci $c'x^2 = -kx^2$ și prin urmare $c' = -k$. Integrând, rezultă $c = -kx + q$ și soluțiile sunt

$y = -kx^2 + qx$, unde k și q sunt constante.

1.2.11. Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} (1+x^2)y' - 2xy = x \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluție: Ecuația este liniară neomogenă, având

$$P(x) = -\frac{2x}{1+x^2} \text{ și } Q(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Rezolvând ecuația liniară omogenă atașată obținem o ecuație cu variabile separabile

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{1+x^2}dx$$

cu soluția $ln\, y = ln(1+x^2) + ln\, c$, deci $y = c(1+x^2)$, c constantă.

Pentru aflarea soluției ecuației neomogene, aplicăm metoda lui Cauchy de variație a constantei:

$$y(x) = c(x)(1+x^2)$$

și obținem
$$y(x) = -\frac{1}{2} + c(1+x^2).$$

Din condiția $y(0) = \frac{1}{2}$ rezultă că $c = \frac{1}{2}$, iar soluția problemei Cauchy este

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{2}.$$

Problema mai poate fi soluționată și prin utilizarea formulei pentru soluția generală a ecuației liniare de ordinul 1.

1.2.12. Determinați soluția problemei Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 1 = y + e^{2x} \\ \quad y(0) = 3 \end{cases}$$

Soluție: Ecuația se poate scrie sub forma

$$\frac{dy}{dx} = y + e^{2x} - 1,$$

fiind o ecuație liniară neomogenă cu $P(x) = -1$ şi $Q(x) = e^{2x} - 1$. Soluțiile vor fi date de $y(x) = [C + \int (e^{2x} - 1)e^{-x}dx]e^{x}$, de unde rezultă $y(x) = (C + e^{x} + e^{-x})e^{x}$. Ținând cont de condiția $y(0) = 3$, obținem soluția problemei Cauchy

$$y(x) = e^{x} + e^{2x} + 1.$$

1.2.13. Să se rezolve ecuația:

$$y = (2x + y^3)y'.$$

Soluție: Schimbând rolul variabilelor, considerând deci ecuația în necunoscuta $x(y)$ obținem $\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{2}{y}x = y^2$, care este o ecuație liniară neomogenă cu $P(y) = -\dfrac{2}{y}$ şi $Q(y) = y^2$. Obținem soluțiile

$$x = y^3 + Cy^2,\ C \text{ constant.}$$

1.2.14. Determinați funcția f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ astfel încât tangenta în punctul $M_0(x_0, y_0)$ al graficului funcției să intersecteze axa Oy într-un punct de ordonată $-x_0$.

Soluție: Ținând cont de ecuația tangentei într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ al graficului unei funcții $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ şi de faptul că punctul de intersecție cu axa Oy este $A(0, -x_0)$ obținem următoarea relație

$$f'(x_0) = 1 + \frac{f(x_0)}{x_0},\ \forall x_0 \in \boldsymbol{R}.$$

Prin rezolvarea acestei ecuații diferențiale de ordinul 1 liniare şi neomogene se obține funcția f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dată de $f(x) = (C + \ln x)x$, C constant.

1.2.15. Să se rezolve ecuaţia:

$$y' - xy = y^{\frac{1}{2}}.$$

Soluţie: Cum $\alpha = \frac{1}{2}$, făcând schimbarea de funcţie

$$u = y^{1-\frac{1}{2}}$$

obţinem $y = u^2$ şi, prin urmare, $y' = 2uu'$, de unde avem $2uu' - xu^2 = u$ şi $u(2u' - xu - 1) = 0.$

Deoarece $y = 0$ este soluţie şi se obţine pentru $u = 0$, considerăm cazul $2u' - xu - 1 = 0,$ deci $2u' - xu = 1$, care este ecuaţie liniară neomogenă cu soluţia

$$u(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{4}}\int e^{-\frac{x^2}{4}}dx,$$

iar soluţia ecuaţiei Bernoulli va fi

$$y(x) = [u(x)]^2.$$

1.2.16. Să se rezolve ecuaţia:

$$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}.$$

Soluţie: Ecuaţia este de tip Bernoulli cu $\alpha = \frac{1}{2}$. Făcând schimbarea de funcţie $u = \sqrt{y}$ obţinem $2ux\frac{du}{dx} - 4u^2 = x^2u$, deci ecuaţia liniară neomogenă u' - $2\frac{u}{x} = xu$ cu $P(x) = -\frac{2}{x}$ şi $Q(x) = x$. Soluţia acestei ecuaţii este $u = x^2(\frac{1}{2}ln|x| + C)$, de unde

$$y = x^4(\frac{1}{2}ln|x| + C)^2, \text{ } C \text{ constant.}$$

1.2.17. Determinați soluția problemei Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^3}{xy^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Soluție: Ecuația se scrie sub forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + xy^{-2}.$$

Cum α = -2, facem schimbarea de funcție $u = y^{-3}$, de unde $y = \sqrt[3]{u}$. Atunci $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\dfrac{du}{dx}$ şi prin înlocuire în ecuația dată se obține $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{3}{x}u + 3x$, adică o ecuație liniară neomogenă cu $P(x) = -\dfrac{3}{x}$ şi $Q(x) = 3x$. Soluția acestei ecuații este $u(x) = Cx^3 - 3x^2$, C constant.

Prin urmare, soluția generală a ecuației Bernoulli va fi

$$y(x) = \sqrt[3]{Cx^3 - 3x^2}.$$

Ținând cont că $y(1) = 1$ rezultă $C = 4$, de unde rezultă soluția problemei Cauchy

$$y(x) = (4x^3 - 3x^2)^{\frac{1}{3}}.$$

1.2.18. Determinați soluția ecuației de tip Bernoulli ce trece prin punctul $M(1,5)$:

$$xy' + y + 3y^2 x \ln x = 0.$$

Soluție: Cum $\alpha = 2$ se face schimbarea de funcție $u = \dfrac{1}{y}$, ceea ce conduce la o ecuație liniară neomogenă $u' - \dfrac{1}{x}u = 3\ln x$, cu soluția

$$u(x) = x(C + \frac{3}{2}\ln^2 x), \ C \text{ constant.}$$

Atunci $$y(x)=\frac{1}{x(C+\frac{3}{2}ln^2 x)}.$$

Din $y(1) = 5$ rezultă soluția problemei Cauchy
$$y(x)=10[x(2+15ln^2 x)]^{-1}.$$

1.2.19. Să se rezolve ecuația diferențială
$$y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}$$

știind că $4ab < 1$ și că funcția $y=\frac{\alpha}{x}$, unde α este rădăcină a ecuației $a\alpha^2 + \alpha + b = 0$, verifică ecuația dată.

Soluție: Facem schimbarea de funcție $y=\frac{1}{u}+\frac{\alpha}{x}$, de unde obținem $y' = -\frac{u'}{u^2}-\frac{\alpha}{x^2}$. Atunci
$$-\frac{u'}{u^2}-\frac{\alpha}{x^2}=\frac{a}{u^2}+\frac{2a\alpha}{ux}+\frac{\alpha^2 a}{x^2}+\frac{b}{x^2}$$
și ținând seama că $\frac{\alpha}{x}$ verifică ecuația dată rezultă
$$u' + \frac{2a\alpha}{x}u = -a.$$

Ecuația este liniară neomogenă cu $P(x)=\frac{2a\alpha}{x}$ și $Q(x)=-a$ având soluțiile
$$u=(c-\frac{a}{2a\alpha+1}x^{2a\alpha+1})x^{-2ax},\ c \text{ constant},$$
de unde obținem soluțiile ecuației Riccati
$$y(x)=\frac{(a\alpha+1)x^{2a\alpha+1}+\alpha(2a\alpha+1)c}{[(2a\alpha+1)c-ax^{2a\alpha+1}]x}.$$

1.2.20. Să se rezolve ecuaţia:

$$y' - y^2 - xy - x + 1 = 0,$$

cunoscând că admite o soluţie particulară de forma unui polinom de gradul I.

Soluţie: Ecuaţia este de tip Riccati cu

$$P(x) = 1,\ Q(x) = x,\ R(x) = x - 1.$$

Soluţia particulară fiind un polinom de gradul I, de forma $ax + b$, care verifică ecuaţia, se obţine $a = 0$ şi $b = -1$, deci soluţia particulară este -1. Facem schimbarea de funcţie $y = -1 + \frac{1}{u}$ şi obţinem ecuaţia diferenţială liniară neomogenă

$$u' + (x - 2)u = -1.$$

Soluţiile vor fi date de

$$y = \frac{1}{e^{-\frac{x^2}{2}+2x}\left(c - \int e^{\frac{x^2}{2}-2x}dx\right)} - 1,\ c \text{ constant.}$$

1.2.21. Rezolvaţi următoarea ecuaţie diferenţială

$$xy' + 2y^2 - 3y - 2 = 0,$$

ştiind că admite soluţia particulară $y_p = 2$.

Soluţie: Ecuaţia este de tip Riccati cu $P(x) = -\frac{2}{x}$, $Q(x) = \frac{3}{x}$, $R(x) = \frac{2}{x}$. Se face schimbarea de funcţie $y = 2 + \frac{1}{u}$ de unde $y' = -\frac{u'}{u^2}$ şi prin urmare se ajunge la o ecuaţie liniară neomogenă $u' - \frac{5}{x}u - \frac{2}{x} = 0$, care are soluţiile $u(x) = Cx^5 - \frac{2}{5}$, C constant. Soluţiile ecuaţiei date vor fi de forma

$$y(x) = 2 + \frac{5}{5Cx^5 - 2}.$$

1.2.22. Rezolvați ecuația

$$\frac{dy}{dx} = 2xy - y^2 + 5 - x^2.$$

Soluție: Ecuația este de tip Riccati cu

$$P(x) = -1,\ Q(x) = 2x,\ R(x) = 5 - x^2.$$

Căutăm soluții particulare sub forma unui polinom de gradul 1, $z(x) = ax + b$. Prin înlocuire în ecuație rezultă $a = 1$ și $b = 2$. Se face schimbarea de funcție $u = y - x - 2$. Ecuația dată devine o ecuație cu variabile separabile

$$\frac{du}{u^2 + 4u} = -dx,$$

cu soluțiile $u(x) = \dfrac{4Ce^{-4x}}{Ce^{-4x} - 1}$, C constant. Prin urmare soluțiile ecuației inițiale vor fi

$$y(x) = x + 2 + \frac{4Ce^{-4x}}{Ce^{-4x} - 1}.$$

1.2.23. Să se integreze ecuația diferențială

$$(2x - y \sin xy)dx - x \sin xy\, dy = 0.$$

Soluție: Obținem $P(x, y) = 2x - y \sin xy$ și $Q(x, y) = -x \sin xy$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin xy - xy \cos xy$$

deci ecuația este cu diferențială totală exactă. Soluția va fi dată de funcția

$$U(x, y) = \int_0^x (2t - 0 \sin 0x)dt - \int_0^y x \sin xt dt = x^2 + \cos xy - 1$$

și se va exprima implicit prin

$$x^2 + \cos xy = C,\ C \text{ constant.}$$

1.2.24. Să se rezolve ecuația:

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0.$$

Soluție: Avem $P(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$ și $Q(x, y) = 2xy$. Atunci

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y,$$

deci ecuația este cu diferențială totală exactă. Soluția va fi dată de funcția

$$U(x,y)=\int_0^x (t^2+2t)dt+\int_0^y 2xtdt=\frac{x^3}{3}+x^2+xy^2,$$

şi se va exprima implicit prin

$$\frac{x^3}{3}+x^2+xy^2=C,\ C \text{ constant.}$$

1.2.25. Determinați soluția problemei Cauchy:

$$\begin{cases}(x^m+2xy^2+\frac{1}{x})dx+(y^n+2x^2y+\frac{1}{y})dy=0 \\ y(1)=1\end{cases},\ m,\ n\in \mathbf{N}$$

Soluție: Cum $P(x, y) = x^m+2xy^2+\frac{1}{x}$, $Q(x, y) = y^n+2x^2y+\frac{1}{y}$ şi $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=4xy$, ecuația este cu diferențială totală exactă. Soluțiile vor fi date de relația

$$\int_{x_0}^{x}(t^m+2ty_0^2+\frac{1}{t})dt+\int_{y_0}^{y}(t^n+2x^2t+\frac{1}{t})dt=C,\ C \text{ constant.}$$

Având însă în vedere condiția $y(1) = 1$, adică $x_0 = 1$ şi $y_0 = 1$, se obține soluția implicită a problemei Cauchy

$$\frac{x^{m+1}-1}{m+1}+\frac{y^{n+1}-1}{n+1}+ln|xy|+x^2y^2=1.$$

1.2.26. Să se integreze ecuația

$$(x^2y + y^2 + 2xy)dx + (x^2 + x)(x + 2y)dy = 0,$$

căutând un factor integrant funcție de x, de forma $\mu(x)$.

Soluție: Pentru $P(x, y) = (x^2y+y^2+2xy)$ şi $Q(x, y) = (x^2+ x)(x+2y)$ avem $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$. Prin urmare se va determina un factor integrant $\mu(x)$ care să îndeplinească condițiile:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x^2+x)(x+2y)]=\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x^2y+y^2+2xy)] \text{ şi } \frac{\partial \mu}{\partial y}=0$$

Relația

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}(x^2+x)(x+2y)+\mu(2x+1)(x+2y)+\mu(x^2+x)=\mu(x^2+2y+2x)$$

conduce la ecuația diferențială cu variabile separabile $\frac{d\mu}{\mu}=-2\frac{dx}{x+1}$ cu soluțiile $\mu=\frac{k}{(x+1)^2}$, k constant. Prin urmare factorul integrant al ecuației poate fi considerat $\mu(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$. Înmulțind ecuația dată cu factorul integrant determinat, se obține ecuația cu diferențiale totale exacte

$$\frac{x^2y+y^2+2xy}{(x+1)^2}dx+\frac{x(x+2y)}{x+1}dy=0\,.$$

Soluția este dată de $\int\limits_{x_0}^{x}\frac{t^2y_0+y_0^2+2ty_0}{(t+1)^2}dt+\frac{x}{x+1}\int\limits_{y_0}^{y}(x+2t)dt=C$. Luând $x_0=y_0=0$ obținem ca soluții ale ecuației inițiale curbele integrale de ecuație $xy(x+y)=C(x+1)$, C constant.

1.2.27. Să se rezolve ecuația:

$$y=\frac{1}{2}xy'+\frac{y}{y'}$$

Soluție: Avem $A(y')=\frac{1}{2}y'$ și $B(y')=\frac{1}{y'}$, ecuația fiind de tip Lagrange. Obținem forma echivalentă $y=\frac{xy'^2}{2(y'-1)}$. Cum $A(y')\neq y'$, notăm $dy=pdx$ sau $y'=p$ și obținem $y=\frac{xp^2}{2(p-1)}$. Prin derivare rezultă

$$(p^2-2p)(\frac{x}{p-1}\frac{dp}{dx}-1)=0.$$

Avem două posibilități, și anume

a. $p=2$ (deoarece $p=y'\neq 0$), prin urmare se obține soluția singulară $y=2x$;

b. $\dfrac{dp}{p-1}=\dfrac{dx}{x}$, de unde $x = c(p\text{-}1)$, c constant.

Soluțiile generale ale ecuației le scriem sub forma parametrică

$$x = c(p-1),\ y = \frac{cp^2}{2},\ p \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

1.2.28. Determinați soluția ecuației diferențiale $y'^2 + 2xy' + 2y = 0$ care intersectează axa Ox sub un unghi de măsură $\dfrac{\pi}{4}$.

Soluție: Ecuația se poate scrie sub forma $y = -xy' - \dfrac{y'^2}{2}$, fiind o ecuație de tip Lagrange cu $A(y') = -y'$ și $B(y') = -\dfrac{y'^2}{2}$. Cum $A(y') \neq y'$, se notează $dy = pdx$ sau $y' = p$ și se obține ecuația $\dfrac{dx}{dp}+\dfrac{1}{2p}x+\dfrac{1}{2}=0$, ecuație liniară în x ca funcție de p. Atunci va rezulta

$$x=\left(C+\int -\frac{1}{2}e^{\int\frac{1}{2p}dp}dp\right)e^{-\int\frac{1}{2p}dp},\ \text{de unde } x=\frac{C}{\sqrt{p}}-\frac{1}{3}p,\ C \text{ constant.}$$

Prin urmare, ecuațiile parametrice ale curbelor integrale sunt

$$\begin{cases} x=\dfrac{C}{\sqrt{p}}-\dfrac{p}{3} \\ y=-C\sqrt{p}-\dfrac{p^2}{6} \end{cases}.$$

Curba integrală care taie axa Ox sub un unghi de măsură $\dfrac{\pi}{4}$ se obține pentru $C = \dfrac{1}{6}$ și are ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-2p\sqrt{p}}{6\sqrt{p}} \\ y=-\dfrac{\sqrt{p}+p^2}{6} \end{cases},\ p \in \mathbf{R}.$$

1.2.29. Să se rezolve ecuația:

$$y = xy' + \sqrt{1+y'^2}\ .$$

Soluție: Ecuația este de tip Clairaut cu $A(y') = \sqrt{1+y'^2}$. Notând $dy = pdx$, se obține $(x+\sqrt{1+p^2})\frac{dp}{dx} = 0$, de unde rezultă soluția generală sub formă parametrică

$$x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\ y = -\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}},\ p \in \boldsymbol{R}.$$

1.2.30. Rezolvați ecuația

$$y = y'(\sin y' + x).$$

Soluție: Ecuația, care se mai scrie sub forma $y = x\,y' + y' \sin y'$, este de tip Clairaut cu $A(y') = y' \sin y'$. Notăm $dy = pdx$ şi obținem ecuația $(x + p\sin p)\frac{dp}{dx} = 0$, de unde rezultă integrala generală a ecuației lui Clairaut $y = Cx + C\sin C$, $C \in \boldsymbol{R}$ sau soluția generală sub formă parametrică $x = -\sin p - p\cos p$, $y = -p^2 \cos p$, $p \in \boldsymbol{R}$.

1.2.31. Să se rezolve ecuația:

$$x(1 + y'^2) = 1.$$

Soluție: Ecuația este de forma $F(x, y') = 0$ şi se rezolvă prin metoda Sophus Lie. Notăm $y' = z$ şi obținem $x = \frac{1}{1+z^2}$. Cum $z = \frac{dy}{dx}$ rezultă $dy = zdx = -\frac{2z^2}{1+z^2}dz$, de unde

$$y = -2\int \frac{z^2}{1+z^2}dz + C,\ C \text{ constant}.$$

Soluțiile generale ale ecuației sunt

$$x = \frac{1}{1+z^2},\ y = -2z + 2\,\mathrm{arctg}\,z + C,\ z \in \boldsymbol{R}.$$

1.2.32. Determinați soluțiile ecuației:

$$y'^2 - xy' - y + \frac{x^2}{2} = 0$$

Soluție: Ecuația fiind de forma $y = F(x, y')$, metoda Sophus Lie conduce la suprafața cu reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = x \\ y = p^2 - xp + \dfrac{x^2}{2}, \ (x, p) \in \mathbf{R}^2 \\ z = p \end{cases}$$

unde $z = \dfrac{dy}{dx}$. Prin urmare, se notează $y' = p$ şi se obține ecuația

$$p^2 - xp - y + \frac{x^2}{2} = 0 .$$

Derivând rezultă $2pp' - p - xp' - p - x = 0$, adică $(2p - x)(\dfrac{dp}{dx} - 1) = 0$.

Se obțin două cazuri, şi anume:

a. $x = 2p$, $y = p^2$, $p \in \mathbf{R}$, care reprezintă soluția singulară a ecuației;

b. $\dfrac{dp}{dx} = 1$, de unde $p = x + C$, C constant şi atunci $y = \dfrac{x^2}{2} + Cx + C^2$, care este soluția generală a ecuației.

1.2.33. Să se rezolve ecuația:

$$x = yy' + \ln y'.$$

Soluție: Ecuația este de tipul $x = F(y, y')$ şi se rezolvă prin metoda Sophus Lie, punând $y' = p$. Se obține ecuația $x = yp + \ln p$, de unde prin derivare în raport cu y (considerăm x şi p funcție de y), rezultă

$$\frac{1}{p} = p + y\frac{dp}{dy} + \frac{1}{p}\frac{dp}{dy}.$$

În continuare se obține o ecuație liniară în y, neomogenă

$$\frac{dy}{dp} = \frac{p}{1 - p^2}y + \frac{1}{1 - p^2},$$

cu soluția $y = (C + \arcsin p)\dfrac{1}{\sqrt{1 - p^2}}$, $p \in (-1,1)$. Soluția generală a ecuației inițiale va fi atunci:

$$\begin{cases} x = \dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}(C + arcsin\, p) + ln\, p \\ y = (C + arcsin\, p)\dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}} \end{cases}, p \in (-1,1),\ C \text{ constant.}$$

1.3. Probleme propuse

Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale şi probleme Cauchy:

1.3.1. $xy' - 2\sqrt{y}\, ln\, x = 0$, $x > 0$, $y(e) = 1$

Răspuns: $2\sqrt{y} - ln^2 x - 1 = 0$.

1.3.2. $x + xy + y'(1+x)y = 0$

Răspuns: $e^{x+y} = c(x+1)(y+1)$, c constant.

1.3.3. $y' + cos\dfrac{x+y}{2} = cos\dfrac{x-y}{2}$

Răspuns: $ln\left|tg\dfrac{y}{4}\right| + 2cos\dfrac{x}{2} + c = 0$, c constant.

1.3.4.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{sin\, 2x} \\ y(\dfrac{\pi}{4}) = 1 \end{cases}$$

Răspuns: $y(x) = tgx$.

1.3.5. $xy' + 1 = e^y$

Răspuns: $y = -ln|cx - 1|$, c constant.

1.3.6.

$$\begin{cases} (1+x)e^y y' = 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Răspuns: $e^y = e^{y_0} + ln(1+x)$.

1.3.7.

$$\begin{cases} y' = 3(ye^x)^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Răspuns: $y(x) = (3 - 2e^{3x})^{-\frac{1}{2}}$.

1.3.8. $$x(1 + y^2)dx = 2e^x y dy$$

Răspuns: $e^{-x}(1 + x) + ln(1 + y^2) = c$, c constant.

1.3.9. $$xy' = x + y + xe^{\frac{y}{x}}.$$

Răspuns: $e^{\frac{y}{x}} = \dfrac{cx}{1 - cx}$, c constant.

1.3.10. $$4x^3yy' + x^4 = 4x^2y^2 + y^4$$

Răspuns: $x^2 - y^2 + cx(x^2 + y^2) = 0$**,** c constant.

1.3.11. $$2x^4yy' + y^4 = 4x^6$$

Răspuns: $y^2 + 4x^3 = cx^5(y^2 - x^3)$**,** c constant.

1.3.12. Determinați soluția ecuației $x^2 - y^2 = 5xyy'$, care trece prin punctul $M(1, 3)$.

Răspuns: $2ln|x| + 5ln\left|x^2 - 6y^2\right| = 5ln53.$

1.3.13.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y}{3x + 2y}$$

Răspuns: $(x^2 - y^2)^2(x - y)^3 = c(x + y)^3$**,** c constant.

1.3.14. $$(y sin\frac{y}{x} - x cos\frac{y}{x})xy' - (x cos\frac{y}{x} + y sin\frac{y}{x})y = 0$$

Răspuns: $xy cos\dfrac{y}{x} = c$**,** c constant.

1.3.15. $$(x + 2y - 5)dy - (2x - y)dx = 0$$

Răspuns: $y^2 - x^2 + xy - 5y = c$, c constant.

1.3.16. $$y'+ytgx = 2\cos^2 x$$

Răspuns: $y = \sin 2x + c\cos x$, c constant.

1.3.17. $$y' = \frac{2}{x}y + x^3$$

Răspuns: $y = cx^2 + \frac{x^4}{2}$, c constant.

1.3.18. $$y'\cos x + y\sin x + 4\cos^3 x = 0$$

Răspuns: $y = c\cos x - 4\sin x\cos x$, c constant.

1.3.19. $$x^2 y'+(1-2x)y - x^2 = 0$$

Răspuns: $y = cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$, c constant.

1.3.20. $$y' = ytgx + \cos x$$

Răspuns: $y = \frac{c}{\cos x} + \frac{\sin x}{2} + \frac{x}{2\cos x}, c = const.$

1.3.21. $$y = (x^3 - x)y'$$

Răspuns: $y = \frac{c}{x} + \frac{x^4}{4} c = const.$

1.3.22. $$y'+y\cos x - \sin x\cos x = 0$$

Răspuns: $y = ce^{-\sin x} + \sin x - 1, c = const.$

1.3.23. $$y'\sin 2x - 2y + 2\cos x = 0$$

Răspuns: $y = Ctgx - \frac{1}{\cos x}, C = const.$

1.3.24.

$$\begin{cases} y'+\dfrac{2y}{x^2-1} = 2x+2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Răspuns: $y = \frac{x^3 - x^2 + x + 3}{x-1}$.

1.3.25.

$$\begin{cases} (1+x^3)y'+3x^2y=\sin x \\ y(0)=-1 \end{cases}$$

Răspuns: $y=-\dfrac{\cos x}{1+x^3}$

1.3.26. $$xy'+y=y^2\ln x$$

Răspuns: $(1+cx+\ln|x|)y=1, c=const.$

1.3.27.

$$\begin{cases} y'=\dfrac{2y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2} \\ y(1)=1 \end{cases}$$

Răspuns: $y=\dfrac{x^2}{2-x}$**.**

1.3.28. $$y'=y(y+1)\cos x$$

Răspuns: $y=\dfrac{1}{ce^{-\sin x}-1}, c=const.$

1.3.29. Să se rezolve ecuația diferențială

$$2y'\cos x+y^2\sin 2x=4tgx$$

ştiind că admite soluția particulară $y_p=\dfrac{1}{\cos x}$.

Răspuns: $y=\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{3\cos^2 x}{3c-\cos^3 x}, c=const.$

1.3.30. Să se rezolve ecuația diferențială $y'-y^2+2ye^x=e^{2x}+e^x$ ştiind că o soluție particulară este $y_p=e^x$**.**

Răspuns: $y=e^x+\dfrac{1}{c-x}, c=const.$

1.3.31. Rezolvați ecuația diferențială $y' = y^2 + 6y - 4x^2 + 11$ dacă admite ca soluție un polinom de gradul 1.

Răspuns: $y = \dfrac{1}{(c - \int e^{2x^2} dx)e^{-2x^2}} + 2x - 3, c = const.$

1.3.32. $$(2x + y - y^{-1})dx + (x + 2y + xy^{-2})dy = 0$$

Răspuns: $x^2 + y^2 + xy - \dfrac{x}{y} = c, c = const.$

1.3.33. $$(xy)^3(xdy + ydx) = dx + dy$$

Răspuns: $(xy)^4 - 4(x + y) = c, c = const.$

1.3.34. $$x^2dy + 2xydx = xdx$$

Răspuns: $2x^2y - x^2 = c, c = const.$

1.3.35. $$2xdx = (xy)^2(xdy + ydx)$$

Răspuns: $x^3y^3 = 3x^2 + c, c = const.$

1.3.36.

$$\begin{cases} (ye^{xy} - 4xy)dx + (xe^{xy} - 2x^2)dy = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

Răspuns: $e^{xy} - 2x^2y = e^2 - 8.$

1.3.37. $$(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$$

Răspuns: $(x\sin y + y\cos y - \sin y)e^x = c.$

1.3.38. $$xdy = (y + x^4)dx + x^4y^2d(xy)$$

Răspuns: $3\dfrac{x}{y} - x^3 - (xy)^3 = c, c = const.$

1.3.39. $$2y'^2(y - xy') = 1$$

Răspuns: Soluția generală $y = cx + \frac{1}{2c^2}, c = const.$ sau soluție singulară definită parametric $x = \frac{1}{p^3}, y = \frac{3}{2p^2}, p \in \mathbf{R}^*$.

1.3.40. $$y = xy' - \ln y'$$

Răspuns: Integrala generală $y = cx - \ln|c|, c = const.$ sau integrala singulară dată parametric $x = \frac{1}{p}, y = 1 - \ln p, p > 0.$

1.3.41. $$y - 2xy' = \sin y'$$

Răspuns: Soluția singulară definită parametric $x = \frac{c}{p^2} - \frac{\sin p}{p} - \frac{\cos p}{p^2}$, $y = \frac{2}{p}(c - \cos p) - \sin p, c = const, p \in \mathbf{R}^*$

1.3.42. $$y = x(y')^2 + 2(y')^3$$

Răspuns: $x = 2p + 3p^2 + c, y = p^2 + 2p^3, c = const.$ și $y = 0$ sau $y = x+2$. .

1.3.43. $$y'^2 + 5y = x(y' + x)$$

Răspuns: $y = \frac{x^2}{4}, y = -x^2 + cx - \frac{1}{5}c^2, c = const.$

1.3.44. $$y = y'^2 e^{y'}$$

Răspuns: $x = pe^p + e^p + c, y = p^2 e^p, c = const, p \in \mathbf{R}$

1.3.45.

$$x(y+1)y' = x^2 y' + (y+1)^2$$

Răspuns: $y + 1 = cx + \ln|y+1|, c = const.$

1.3.46.

$$x = \sin y' + \ln y'$$

Răspuns: Soluție parametrică

$$\begin{cases} x = \sin p + \ln p \\ y = p\sin p + \cos p + p + C \end{cases}$$

$p \in \boldsymbol{R}, p > 0$, C constant.

1.3.47. Arătați că polinomul $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} x^k$ satisface o anumită ecuație diferențială de ordinul 1 care va fi determinată.

Răspuns: $P_{n-1}(x) = \frac{1}{2} P_n'(x) - 2xP_{n-1}'(x)$.

Se folosește identitatea $kC_{2k}^{k} = 2(2k-1)C_{2(k-1)}^{k-1}$, $k \in \boldsymbol{N}^*$.

1.3.48. Determinați funcțiile $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ derivabile pe $\boldsymbol{R}$ care satisfac relația

$$f'(x) \cdot f(-x) = 1, \ \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

Răspuns: $f(x) = e^x$ și $f(x) = -e^x$.

1.3.49. Fie a, b numere reale date. Determinați funcțiile $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ derivabile pe $\boldsymbol{R}$ care satisfac relația

$$f'(x) = bf(x - a).$$

Răspuns: $f(x) = \sum_{n=0}^{[x]} b^n \frac{1}{n!}(x - an)^2$.

1.3.50. Determinați ecuația curbei din plan astfel încât lungimea segmentului determinat pe tangenta la curbă într-un punct oarecare al acesteia de axele de coordonate să fie egală cu 1.

Răspuns: $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$.

Capitolul 2. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR

2.1. Considerații teoretice

Fie ecuația diferențială de ordinul n

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

unde $F:D\to \mathbf{R}$, $D\subset \mathbf{R}^{n+2}$, $y:[a, b]\to \mathbf{R}$ derivabilă de n ori pe $[a, b]$.

2.1.1. Ecuații diferențiale de ordin superior integrabile prin cuadraturi

Ecuațiile diferențiale de ordinul n a căror soluție generală se poate determina prin una sau mai multe integrări se numesc *integrabile prin cuadraturi*.

1. Ecuații diferențiale de forma

$$y^{(n)} = f(x)$$

unde $f:[a, b]\to \mathbf{R}$ este o funcție continuă.

Prin n integrări succesive se obține:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dt_n \int_{x_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{x_0}^{t_2} f(t)dt + \frac{c_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{c_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \dots + c_{n-1}$$

unde c_i, $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ sunt constante.

2. Ecuații diferențiale de forma

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}).$$

Notând $y^{(n-1)} = z$, ecuația se aduce la forma

$$z' = f(z)$$

care este o ecuație de ordinul 1 cu variabile separabile.

3. Ecuații de forma

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}).$$

Notăm $z = y^{(n-2)}$ şi în ipoteza $y(x_0) = y_0$ ecuația devine

$$\begin{cases} z'' = f(z) \\ z(x_0) = z_0 = y_0^{(n-2)} \\ z'(x_0) = z_0' = y_0^{(n-1)} \end{cases}.$$

Se obține

$$y^{(n-2)} = \Phi(x, y_0^{(n-2)}, y_0^{(n-1)})$$

care este o ecuație de tipul anterior.

2.1.2. Ecuații diferențiale de ordin superior care admit reducerea ordinului

1. Ecuații diferențiale în care membrul stâng este derivata în raport cu x a unei ecuații diferențiale

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

unde

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

De aici rezultă că

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = c,\ c \text{ constant}$$

şi deci integrarea ecuației de ordinul n se reduce la integrarea unei ecuații de ordinul $n - 1$.

2. Ecuații diferențiale de forma

$$y^{(n)} = f(x, y^{(p)} + y^{(p+1)}, \dots, y^{(n-1)}), \text{ unde } p < n.$$

Notând

$$y^{(p)} = z$$

obținem o ecuație de ordin $(n - p)$

$$z^{(n-p)} = f(x, z, z', \dots, z^{(n-p-1)}).$$

3. Ecuații diferențiale care nu conțin variabilă independentă

$$y^{(n)} = f(y, y', \dots , y^{(n-1)}).$$

Prin substituția $y' = z$ se obține

$$y'' = \frac{dz}{dy} y' = z\frac{dz}{dy}$$

$$y''' = (\frac{dz}{dy})^2 z + z^2 \frac{d^2 z}{dy^2} \text{ ş.a.m.d.}$$

Ecuația devine:

$$\frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} = F(y, z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-2} z}{dy^{n-2}}),$$

deci ordinul a scăzut cu o unitate.

4. Ecuații diferențiale omogene în raport cu funcția şi cu derivatele sale

Ecuația diferențială

$$f(x, y, y', \dots , y^{(n)}) = 0$$

unde f satisface relația

$f(x, ky, ky', \dots , ky^{(n)}) = k^m f(x, y, y', \dots , y^{(n)})$ pentru orice $k \in \mathbf{R}$

se numeşte *omogenă* în raport cu funcția şi derivatele ei.

Făcând substituția

$$y = e^{\int z dx}$$

se obține prin calcul

$$y' = z e^{\int z dx}$$

$$y'' = z' e^{\int z dx} + z^2 e^{\int z dx}$$

$$y''' = z'' e^{\int z dx} + 3zz' e^{\int z dx} + z^3 e^{\int z dx}$$

şi în continuare o ecuație de ordinul $n - 1$.

5. Ecuații diferențiale omogene în $x, y, dx, d^2y, \dots, d^k y$.

Ecuația diferențială

$$f(x, y, dx, dy, d^2y, \dots) = 0$$

în care

$$f(kx, ky, kdx, kdy, ...) = k^m f(x, y, dx, dy, d^2y, ...) \text{ pentru orice } k \in \mathbf{R}$$

se numește ecuație diferențială *omogenă* în $x, y, dx, dy, d^2y, ..., d^ky$.

Făcând substituțiile

$$x = e^t, \ y = ue^t$$

obținem

$$dx = e^t dt$$

$$dy = (du + udt)e^t$$

$$d^2y = [d^2u + 2dudt + u(dt)^2]e^t$$

Rezultă o ecuație care nu conține explicit pe t, deci căreia i se poate diminua ordinul.

2.1.3. Ecuații diferențiale de ordin superior liniare

Ecuația diferențială de forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x),$$

unde $a_1, a_2, ... , a_n , f: [a, b] \to \mathbf{R}$ sunt funcții continue, se numește *ecuație diferențială liniară de ordinul n.*

Dacă $f \equiv 0$ ecuația se numește *omogenă.*

Dacă $f \neq 0$ ecuația se numește *neomogenă.*

Soluția generală a ecuației diferențiale liniare și omogene este

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$$

unde $c_1, c_2, ..., c_n$ sunt constante arbitrare, iar $y_1, y_2, ..., y_n$ este sistem fundamental de soluții al ecuației date.

Pentru a integra ecuația diferențială și neomogenă se folosește *metoda variației constantelor a lui Lagrange.* Vom căuta soluția ecuației sub forma

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + ... + c_n(x)y_n.$$

Pe lângă condiția ca funcția y să verifice ecuația care conține n funcții necunoscute $c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$, vom mai impune $n-1$ condiții care vor face ca în calculul derivatelor $y', y'', ..., y^{(n-1)}$ să nu figureze derivatele funcțiilor $c_1, c_2, ..., c_n$, deci

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + \ldots + c_n'y_n = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + \ldots + c_n'y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'y_1^{(n-2)} + c_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n'y_n^{(n-2)} = 0 \end{cases}$$

Se obțin următoarele relații

$$c_1(x) = \int f_1(s)ds + k_1$$
$$c_2(x) = \int f_2(s)ds + k_2$$
$$\ldots$$
$$c_n(x) = \int f_n(s)ds + k_n$$

unde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sunt constante oarecare.

Soluția generală a ecuației neomogene este

$$y = k_1y_1 + k_2y_2 + \ldots + k_ny_n + y_1\int f_1(s)ds + \ldots + y_n\int f_n(s)ds,$$

adică suma dintre soluția generală a ecuației omogene corespunzătoare şi o soluție particulară a ecuației neomogene.

Vom prezenta o metodă de găsire a unui sistem fundamental de soluții în cazul ecuațiilor diferențiale liniare şi omogene cu coeficienți constanți. O astfel de ecuație este de forma

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere reale sau complexe.

Acesteia i se ataşează ecuația caracteristică

$$r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Funcția $y = e^{rx}$ este soluție a ecuației diferențiale dacă şi numai dacă r este o soluție a ecuației caracteristice.

Sunt posibile mai multe cazuri.

a. Rădăcinile $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sunt simple şi reale. Atunci $y_1(x) = e^{r_1x}$, $\ldots$, $y_n(x) = e^{r_nx}$ reprezintă un sistem fundamental de soluții.

Integrala generală a ecuației este

$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \ldots + c_ne^{r_nx}$, unde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sunt constante.

b. Cel puțin o rădăcină simplă este complexă. Fie aceasta $r_1 = a+bi$. Când coeficienții ecuației sunt reali, atunci şi $r_2 = a - bi$ este soluție.

Funcțiile

$$y_1 = e^{ax} \cos bx \text{ și } y_2 = e^{ax} \sin bx$$

vor fi soluții reale ale ecuației diferențiale, care, împreună cu cele găsite pentru soluțiile reale ale ecuației caracteristice, formează tot un sistem fundamental de soluții.

c. Dacă o rădăcină $r_1 \in \boldsymbol{R}$ este multiplă de ordinul p atunci acestei rădăcini îi vor corespunde soluțiile din sistemul fundamental

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = xe^{r_2 x}, y_3 = x^2 e^{r_3 x}, \ldots, y_p = x^{p-1} e^{r_p x}.$$

d. Dacă o rădăcină $r_1 = a + bi \in \boldsymbol{C}$ este multiplă de ordinul p, atunci în sistemul fundamental vom obține soluțiile

$$\begin{array}{ll} y_1 = e^{ax} \cos bx & y_2 = e^{ax} \sin bx \\ y_3 = xe^{ax} \cos bx & y_4 = xe^{ax} \sin bx \\ \ldots & \ldots \\ y_{2p-1} = x^{p-1} e^{ax} \cos bx & y_{2p} = x^{p-1} e^{ax} \sin bx \end{array}$$

Integrala generală a unei astfel de ecuații va fi combinația liniară a integralelor sistemului fundamental, coeficienții fiind constantele c_1, c_2, ..., c_n.

Ecuația liniară și neomogenă cu coeficienți constanți se rezolvă prin metoda variației constantelor.

Dacă termenul liber este de forma

$$f(x) = e^{\alpha x}[P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x],$$

unde α, $\beta \in \boldsymbol{R}$, iar $P(x)$ și $Q(x)$ sunt polinoame, atunci ecuația liniară și neomogenă admite o soluție patriculară de forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x}[P_1(x) \cos \beta x + Q_1(x) \sin \beta x]\, x^q,$$

unde $P_1(x)$ și $Q_1(x)$ sunt polinoame astfel încât

$$grad\, P_1(x) = grad\, Q_1(x) = \max \{ grad\, P(x), grad\, Q(x)\},$$

iar q este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\alpha + i\beta$ a ecuației caracteristice a ecuației diferențiale.

2.1.4. Ecuații diferențiale de tip Euler

O ecuație diferențială de forma

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} +\ldots+ a_{n-1}xy' + a_ny = f(x)$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt constante, $a_0 \neq 0$, se numeşte *ecuație de tip Euler*.

Notând $x = e^t$ şi observând prin calcul că

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right), \ldots,$$

după înlocuire ecuația se transformă într-o ecuație liniară cu coeficienți constanți

$$b_0\frac{d^ny}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_ny = f_1(t)$$

Analog, pentru ecuația

$$a_0(a+x)^n\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(a+x)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_ny = f(x),$$

se practică schimbarea de variabilă $a + x = e^t$ pentru a obține o ecuație liniară cu coeficienți constanți.

2.2. Probleme rezolvate

2.2.1. Să se studieze mişcarea pe o dreaptă a unui mobil cu masa unitară, ştiind că el este respins față de un punct fix cu o forță proporțională cu distanța la acest punct fix.

Soluție: Luând punctul fix drept origine, iar $x(t)$ funcția descriind distanța de la punct la mobil, ecuația diferențială a mişcării este

$$x'' = kx,\ k > 0.$$

Înmulțind ambii membri cu $x'dt = dx$, rezultă $x''x'dt = kxdx$ de unde, integrând, obținem $\frac{1}{2}x'^2 = k\frac{x^2}{2} + c_1$, iar mai departe $\frac{dx}{\sqrt{kx^2 + 2c_1}} = dt$.

Pentru $2c_1 = k$ deducem $ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \sqrt{k}(t - t_0)$, t_0 constant. Din această relație avem

$$x + \sqrt{x^2+1} = e^{\sqrt{k}(t-t_0)} \text{ şi } x - \sqrt{x^2+1} = -e^{-\sqrt{k}(t-t_0)}$$

pentru că înmulțind membru cu membru aceste două egalități obținem o identitate. Prin adunarea lor rezultă

$$x = sh\sqrt{k}(t - t_0),$$

care este legea de mișcare căutată.

2.2.2. Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} y''' = \ln x, x > 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 1 \\ y''(1) = 0 \end{cases}$$

Soluție: Prin integrări succesive se obțin derivatele de ordinul 1 și 2 ale funcției y, date de următoarele relații

$$y'' = x\ln x - x + C_1,$$

$$y' = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2 + C_1 x + C_2,$$

de unde $$y = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{11}{36}x^3 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Din condițiile inițiale se obțin următoarele valori ale constantelor $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{3}{4}$, $C_3 = \frac{19}{18}$. Prin urmare, soluția problemei Cauchy este

$$y = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{11}{36}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{19}{18}.$$

2.2.3. Determinați soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} y''' = \sqrt{1 + y''^2} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$$

Soluție: Notând $y'' = z$, se obține ecuația cu variabile separabile $\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = dx$, cu soluțiile $\ln(z + \sqrt{1+z^2}) = x + C$, C constant, de unde $z + \sqrt{1+z^2} = e^{x+C}$. Rezultă $z = \frac{e^{2(x+C)} - 1}{2e^{x+C}}$ sau $z = sh(x + C)$. Revenind la notația făcută obținem $y'' = sh(x+C)$, de unde prin integrări succesive rezultă $y = sh(x + C) + C_1x + C_2$. Din condițiile inițiale se obțin valorile constantelor $C = C_1 = C_2 = 0$. Soluția problemei Cauchy va fi $y = shx$.

2.2.4. Să se rezolve ecuația

$$y^{(5)} + y^{(4)} = 0$$

Soluție: Notând $y^{(4)} = z$ se obține ecuația cu variabile separabile $\frac{z'}{z} = -1$ cu soluția $z = C_1e^{-x}$. Prin urmare $y^{(4)} = C_1e^{-x}$ şi în continuare, prin integrări succesive, rezultă soluția generală

$$y = C_1e^{-x} + C_2\frac{x^3}{6} + C_3\frac{x^2}{2} + C_4x + C_5,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5 \text{ constante.}$$

2.2.5. Să se rezolve ecuația

$$\frac{(y^{(4)})^2}{9} - \frac{(y''')^2}{4} = 1$$

Soluție: Considerăm parametrizarea $y''' = 2sht$ şi $y^{(4)} = 3cht$. Atunci, din $y^{(4)}dx = d(y''')$, rezultă $3cht\ dx = 2cht\ dt$ şi apoi se obține ecuația cu variabile separabile $3dx = 2dt$ cu soluția $t = \frac{3}{2}x + C_1$. Prin urmare $y''' = 2sh(\frac{3}{2}x + C_1)$. Prin integrări succesive se obține soluția generală a ecuației inițiale

$$y = \frac{16}{27}ch(\frac{3}{2}x + C_1) + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \text{ constante.}$$

2.2.6. Rezolvați ecuația diferențială

$$y'^2 + y''^2 = 1.$$

Soluție: Fie parametrizarea $y' = cost$ şi $y'' = sint$. Atunci, din relația $y''dx = -\ d(y')$ se obține ecuația cu variabile separabile $dt = -\ dx$, care are soluția $t = -\ x + C_1$. Prin urmare $y' = cos(-\ x + C_1)$, de unde, prin integrare, rezultă soluția generală a ecuației date

$$y = -\ sin(-\ x + C_1) + C_2,\ \text{cu } C_1,\ C_2 \text{ constante.}$$

2.2.7. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y'' + y^2 = 0$$

Soluție: Prin înmulțire cu y' ecuația devine

$$y''y' + y^2y' = 0$$

cu condiția $y \neq$ const $\neq 0$. Dar această relație se mai scrie $\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{3}y^3) = 0$, deci $3y'^2 + 2y^3 = 0$ este o ecuație echivalentă cu prima, dar având ordinul mai mic cu o unitate.

2.2.8. Să se rezolve ecuația

$$e^{y''} - (y'')^2 = x$$

Soluție: Notând $y'' = t$, se obține $x = e^t - t^2$ şi $dx = (e^t - 2t)dt$. În continuare, prin integrări succesive, rezultă

$$y' = \int y''dx = \int t(e^t - 2t)dt = te^t - e^t - \frac{2}{3}t^3 + C_1,\ C_1 \text{ constant,}$$

$$y = \int y'dx = \int (te^t - e^t - \frac{2}{3}t^3 + C_1)(e^t - 2t)dt\,,$$

de unde rezultă soluția ecuației, sub formă parametrică,

$$\begin{cases} x = e^t - t^2 \\ y = (\frac{t}{2} - \frac{3}{4})e^{2t} - (\frac{2}{3}t^3 - 2t + 2 - C_1)e^t + \frac{4}{15}t^5 - C_1t^2 + C_2 \end{cases}$$

cu $t \in \boldsymbol{R}$, C_1, C_2 constante.

2.2.9. Rezolvați ecuația

$$(y')^3 y''' = 1$$

Soluție: Considerăm reprezentarea parametrică

$$y' = \frac{1}{t},\ y''' = t^3,\ t \neq 0.$$

Din relația $\frac{dy''}{y'''} = \frac{dy'}{y''}$ rezultă $y''dy'' = y'''dy' = -\,tdt$, deci $y'' = \sqrt{C - t^2}$, C constant. Cum $y''dx = -\frac{1}{t^2}dt$ se obține $dx = -\frac{1}{t^2\sqrt{C - t^2}}dt$, de unde

$x = -\int \frac{dt}{t^2\sqrt{C-t^2}} + C_1$. Atunci $y = \int y'dx = \int \frac{dt}{t^3\sqrt{C-t^2}} + C_2$, cu C_1, C_2 constante. Familia de curbe definite parametric prin relațiile obținute pentru x şi y reprezintă soluția generală a ecuației inițiale.

2.2.10. Să se integreze ecuația diferențială a parabolelor din planul *xOy*

$$5y'''^2 = 3y''y^{(4)}, \text{ cu condiția } y'' \neq 0$$

Soluție: Considerăm două cazuri:

a. Dacă $y''' = 0$, prin integrări succesive rezultă soluția generală a ecuației date $y = C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$, unde C_1, C_2, C_3 constante. S-au obținut ecuațiile parabolelor cu axele de simetrie paralele cu axa Oy.

b. Dacă $y''' \neq 0$, ecuația inițială se poate scrie sub forma următoarei relații $\frac{y^{(4)}}{y'''} = \frac{5}{3}\frac{y'''}{y''}$, de unde $y''' = Cy''^{\frac{5}{3}}$, C constantă. Notând $y'' = z$ se obține ecuația cu varibile separabile $z^{-\frac{5}{3}}dz = Cdx$, cu soluțiile

$$z = \pm\frac{1}{(C_1x + C_2)^{\frac{3}{2}}}, \; C_1, C_2 \text{ constante.}$$

Revenind la schimbarea de variabile efectuată, ecuația diferențială

$$y'' = \frac{1}{(C_1x + C_2)^{\frac{3}{2}}}$$

conduce prin integrări succesive la soluția generală

$$y = -\frac{4}{C_1}\sqrt{C_1x + C_2} + C_3x + C_4,$$

iar ecuația $y'' = -\frac{1}{(C_1x + C_2)^{\frac{3}{2}}}$ la soluția generală

$$y = \frac{4}{C_1^2}\sqrt{C_1x + C_2} + C_3x + C_4, \text{ unde } C_1, C_2, C_3, C_4 \text{ sunt constante.}$$

Soluțiile generale obținute reprezintă ecuațiile parabolelor din planul xOy ale căror axe de simetrie nu sunt paralele cu axa Oy.

2.2.11. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y''' = \frac{y''}{x}$$

Soluție: Făcând substituția $y'' = z$, ecuația se reduce la $z' = \frac{z}{x}$ care are soluția $z = Cx$, C = const. Înlocuind pe z rezultă ecuația $y'' = Cx$ care, după două cuadraturi succesive, are soluția

$$y(x) = \frac{C}{6}(x - x_0)[x(x + x_0) - 2x_0^2] + C_1(x - x_0) + C_2,$$

unde C, C_1, C_2 sunt constante.

2.2.12. Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} 2y'' \ln y' = y' \\ y(1) = -6e^{-2}, y(1) = e^{-2} \end{cases}$$

Soluție: Notăm $y' = z$ și obținem, prin înlocuire în ecuația inițială, relația $2z' \ln z = z$, care este o ecuație cu variabile separabile, putând fi scrisă sub forma $\frac{2\ln z}{z}dz = dx$. Prin integrare rezultă $ln^2 x = x + C_1$, C_1 constantă, de unde se obține mai departe $y' = e^{\pm\sqrt{x+C_1}}$. Soluțiile generale ale ecuației date sunt

$$y = 2e^{\sqrt{x+C_1}}(\sqrt{x + C_1} - 1) + C_2 \text{ și } y = -2e^{-\sqrt{x+C_1}}(\sqrt{x + C_1} + 1) + C_3.$$

Ținând însă cont de condițiile inițiale se obține soluția problemei Cauchy

$$y = -2e^{-\sqrt{x+3}}(\sqrt{x + 3} + 1).$$

2.2.13. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y'' + yy' = 0$$

Soluție: Facem substituția $y' = z$ și obținem $\frac{dz}{dy} + yz = 0$, deci o ecuație de ordinul 1 cu variabile separabile. Soluția sa este $z = C_1 e^{-\frac{y^2}{2}}$

şi apoi înlocuind z avem $y' = C_2 e^{-\frac{y^2}{2}}$ cu soluţia

$$\int_{y_0}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = C_1 x + C_2,\ C_1,\ C_2 \text{ constante.}$$

2.2.14. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$yy''' + 3y'y'' = 0$$

Soluţie: Fie $y' = p$, atunci $y'' = p\frac{dp}{dy}$ şi $y''' = p[\,p\frac{d^2p}{dy^2} + (\frac{dp}{dy})^2\,]$.

Înlocuind în ecuaţia dată se obţine $yp[\,p\frac{d^2p}{dy^2} + (\frac{dp}{dy})^2\,] + 3p^2\frac{dp}{dy} = 0.$

Avem prin urmare două cazuri:

a. $p = 0$, de unde soluţia ecuaţiei va fi $y = C$, C constant;

b. $p \neq 0$, ceea ce conduce la $y(p\frac{dp}{dy})' + 3(p\frac{dp}{dy}) = 0$. Notând $u = p\frac{dp}{dy}$ se obţine $yu' + 3u = 0$, de unde $\frac{u'}{u} = -\frac{3}{y}$. Prin integrare rezultă $\ln u = -3\ln y + \ln C$, C constant, apoi $u = \frac{C}{y^3}$ şi $y'' = \frac{C}{y^3}$. Revenind la notaţia $u = pp' = (\frac{1}{2}p^2)'$ se obţine $(\frac{1}{2}p^2)' = \frac{C}{y^3}$ şi, integrând, rezultă $p^2 = -Cy^{-2} + C_1$, C_1 constant, adică $p = \pm\sqrt{C_1 - Cy^{-2}}$. Cum $p = y'$, relaţia anterioară conduce la ecuaţia cu variabile separabile $\frac{y'}{\sqrt{C_1 - Cy^{-2}}} = \pm 1$, cu soluţia implicită $\pm\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1 y^2 - C} + C_2 = x$, C_2 constant, de unde rezultă soluţia ecuaţiei iniţiale

$$C_1 y^2 - C = C_1^2 (x - C_2)^2,\ C_1,\ C_2,\ C \text{ constante.}$$

2.2.15. Să se integreze ecuaţia

$$y''(e^x + 1) + y' = 0$$

Soluţie: Notând $y' = z$, se obţine $z'(e^x + 1) + z = 0$, de unde rezultă ecuaţia cu variabile separabile $\frac{z'}{z} = -\frac{e^x}{e^x(e^x + 1)}$ cu soluţia $z = C_1\frac{e^x + 1}{e^x}$,

C_1 constant. Prin urmare, $y' = C_1(1 + e^{-x})$, de unde prin integrare se obțin soluțiile ecuației inițiale

$$y = C_1(x - e^{-x}) + C_2,\ C_1,\ C_2 \text{ constante.}$$

2.2.16. Rezolvați ecuația diferențială

$$y'' - 2yy' = 0$$

Soluție: Ecuația mai poate fi scrisă sub forma $(y')' = (y^2)'$, de unde, prin integrare se obține $y' = y^2 + C$, C constant, ceea ce conduce la ecuația diferențială cu variabile separabile $\frac{y'}{y^2 + C} = 1$. Se disting trei cazuri, relativ la valorile posibile ale constantei C:

a. dacă $C > 0$, soluțiile ecuației inițiale vor fi de forma

$$\frac{1}{\sqrt{C}} arctg \frac{y}{\sqrt{C}} = x + C_1,\ C_1 \text{ constant;}$$

b. dacă $C = 0$, obținem $y = -\frac{1}{x + C_2}$, C_2 constant;

c. dacă $C < 0$, notăm $C_0 = - C > 0$ şi soluțiile ecuației date vor fi date implicit prin

$$\frac{1}{2\sqrt{C_0}} ln \frac{y - \sqrt{C_0}}{y + \sqrt{C_0}} = x + C_3,\ C_3 \text{ constant.}$$

2.2.17. Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} xy'' + y' + x = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluție: Dacă se notează $y' = z$, se obține ecuația liniară neomogenă $z' + \frac{1}{x} z = -1$, cu soluțiile $z = (C - \int x dx)\frac{1}{x}$, C constant, iar mai departe $xz = C - \frac{x^2}{2}$. Ținând cont că $y'(0) = 0$, rezultă $z(0) = 0$, deci $C = 0$. Atunci $z = -\frac{x}{2}$ şi $y' = -\frac{x}{2}$, de unde prin integrare $y = -\frac{x^2}{4} + C_1$. Cum $y(0) = 0$, obținem $C_1 = 0$, de unde soluția problemei Cauchy este

$$y = -\frac{x^2}{4}.$$

2.2.18. Determinaţi soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} yy''-y'^2=y^4 \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}$$

Soluţie: Notând $y' = p$ se obţine $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ şi prin înlocuire în ecuaţia dată rezultă $\dfrac{dp}{dy}-\dfrac{1}{y}p=y^3p^{-1}$, care este o ecuaţie de tip Bernoulli în p ca funcţie de y, cu $P(y) = -\dfrac{1}{y}$, $Q(y) = y^4$ şi $\alpha = -1$. Se impune atunci schimbarea de variabilă $p=u^{\frac{1}{2}}$, de unde $p'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ Ecuaţia de tip Bernoulli devine $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}-\dfrac{1}{y}\sqrt{u}=y^3\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ sau $u'-\dfrac{2}{y}u=2y^3$, care este o ecuaţie liniară şi neomogenă, cu soluţia $u=(C+y^2)y^2$, C constant. Prin urmare $p=\pm y\sqrt{y^2+C}$. Ţinând cont de relaţia $p = y'$ şi de condiţiile iniţiale, rezultă $C = -1$, de unde se obţine ecuaţia cu variabile separabile

$$\frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}=\pm dx \text{ sau } \frac{\frac{1}{y^2}dy}{\sqrt{1-(\frac{1}{y})^2}}=\pm dx,$$

având soluţiile $arccos\dfrac{1}{y}=\pm x+C_1$. Din condiţia $y(0) = 1$ rezultă $C_1 = 0$, de unde soluţia problemei Cauchy este

$$y = (\cos x)^{-1} \text{ sau } y = \sec x.$$

2.2.19. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, x \neq 0$$

Soluţie: Împărţind ecuaţia prin x^2 se obţine $y''-2\dfrac{y'}{x}+2\dfrac{y}{x^2}=0$, relaţie care mai poate fi scrisă şi sub forma $(y'-2\dfrac{y}{x})'=0$. Integrând se obține $y' - \frac{2}{x}y = C$, adică o ecuație liniară neomogenă cu soluțiile $y = (C_1 + C\int \frac{1}{x^2}dx)x^2$, de unde rezultă și soluțiile ecuației inițiale

$$y = C_1x^2 - Cx,\ C,\ C_1 \text{ constante.}$$

2.2.20. Să se integreze ecuația diferențială

$$yy'' - 2xyy' + (y')^2 = \frac{1}{x}yy'$$

Soluție: Ecuația poate fi scrisă și sub forma $\frac{y''}{y'} - 2x - \frac{1}{x} + \frac{y'}{y} = 0$ sau $d(ln|y'| - x^2 - ln|x| + ln|y|) = 0$, de unde prin integrare rezultă

$$ln\, yy' = ln\, C_1 + ln\, x + x^2 \text{ sau } yy' = C_1xe^{x^2}.$$

Prin urmare, rezolvarea ecuației cu variabile separabile $ydy = C_1xe^{x^2}dx$ conduce la soluțiile implicite ale ecuației inițiale

$$y^2 = C_1e^{x^2} + C_2,\ C_1,\ C_2 \text{ constante.}$$

2.2.21. Să se rezolve ecuația diferențială

$$x^2yy'' = (y - xy')^2$$

Soluție: Ecuația este omogenă în y, y', y''. Făcând schimbarea de variabilă $y' = yu$, se obține ecuația de ordinul 1 liniară și neomogenă $x^2u' + 2xu - 1 = 0$ care mai poate fi scrisă și sub forma $u' + \frac{2}{x}u = \frac{1}{x^2}$ și care are soluția

$$y = C_1xe^{-\frac{C_2}{x^2}},\ C_1, C_2 \text{ constante.}$$

2.2.22. Să se rezolve ecuația

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$$

Soluție: Ecuația este omogenă în raport cu x, y, y' și y''. Facem substituția $y' = uy$, care conduce la $y'' = u'y + uy' = y(u' + u^2)$, și prin înlocuire în ecuația dată la $xy^2(u' + u^2) + xy^2u^2 - uy^2 = 0$, echivalentă cu ecuația de tip Bernoulli $u' - \frac{1}{x}u = -2u^2$ cu $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = -2$ și $\alpha = 2$.

Se impune schimbarea de funcție $u = z^{\frac{1}{1-2}}$ sau $z = \frac{1}{u}$, de unde obținem ecuația liniară neomogenă $z' + \frac{1}{x}z = 2$, cu soluțiile $z = \frac{1}{x}(C + x^2)$, C constantă. De aici $u = \frac{x}{C + x^2}$ și mai departe $\frac{dy}{y} = \frac{x}{C + x^2}dx$. Prin integrare rezultă soluția ecuației inițiale

$$y = C_1\sqrt{C + x^2}\text{, } C, C_1 \text{ constante.}$$

2.2.23. Să se rezolve ecuația

$$x^2yy'' + x^2y'^2 - 5xyy' + 4y^2 = 0$$

Soluție: Ecuația este omogenă în *x*, *y*, *y'* și *y''*. Se face schimbarea de variabilă $y = e^{\int zdz}$, de unde $y' = ze^{\int zdz}$ și $y'' = e^{\int zdz}(z' + z^2)$. Atunci ecuația dată devine

$$x^2e^{2\int zdz}(z' + z^2) + x^2e^{2\int zdz}z^2 - 5xe^{2\int zdz}z + 4e^{2\int zdz} = 0,$$

prin urmare o ecuație de tip Riccati $z' = -2z^2 + \frac{5}{x}z - \frac{4}{x^2}$ cu $P(x) = -2$, $Q(x) = \frac{5}{x}$, $R(x) = -\frac{4}{x^2}$. Se observă că o soluție particulară a ecuației Riccati este $z_0 = \frac{1}{x}$. Vom căuta soluții de forma $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{u}$, cu $z' = -\frac{1}{x^2} - \frac{u'}{u^2}$. Ecuația va deveni $u' + \frac{1}{x}u = 2$, liniară și neomogenă, cu soluții de forma $u = (C + x^2)\frac{1}{x}$, C constantă, de unde se obține $u = (C + x^2)\frac{1}{x}$ și prin urmare $z = \frac{1}{x} + \frac{x}{C + x^2}$. Atunci obținem $y = e^{\int(\frac{1}{x} + \frac{x}{C + x^2})dx}$ iar soluțiile ecuației inițiale vor fi de forma

$$y = C_1x\sqrt{x^2 + C}\text{, } C, C_1 \text{ constante.}$$

2.2.24. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Soluție: Ecuației diferențiale liniare și omogene de ordinul 2, cu coeficienți constanți, i se asociază ecuația caracteristică $r^2 - 5r + 6 = 0$, care are rădăcini reale și distincte $r_1 = 2$ și $r_2 = 3$. Atunci soluțiile ecuației inițiale vor fi de forma

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x},\ C_1,\ C_2 \text{ constante.}$$

2.2.25. Rezolvați ecuația diferențială

$$y^{(4)} - y = 0$$

Soluție: Ecuația diferențială de ordinul 4 este liniară și omogenă, având ecuația caracteristică $r^4 - 1 = 0$, cu rădăcinile $r_{1,2} = \pm 1$ și $r_{3,4} = \pm i$. Soluțiile ecuației date sunt atunci de forma

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \text{ constante.}$$

2.2.26. Să se integreze ecuația

$$y''' + 2y'' - y' + 6y = 0$$

Soluție: Ecuația caracteristică atașată ecuației liniare și omogene de ordinul 3 este $r^3 + 2r^2 - r + 6 = 0$ și are rădăcinile $r_1 = -3$ și $r_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Soluțiile ecuației inițiale sunt

$$y = C_1 e^{-3x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right),\ C_1,\ C_2,\ C_3 \text{ constante.}$$

2.2.27. Să se rezolve ecuația

$$y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$$

Soluție: Ecuația caracteristică este $r^4 - 2r^3 + r^2 = 0$ și are rădăcinile $r_{1,2} = 0$ și $r_{3,4} = 1$. Atunci, ecuația inițială are soluțiile de forma

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{x} + C_4 x e^{x},\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \text{ constante.}$$

2.2.28. Determinați soluțiile ecuației diferențiale

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$$

Soluție: Ecuația este liniară și neomogenă, de ordinul 2, cu coeficienți constanți, și determinarea soluțiilor presupune parcurgerea a două etape:

a. se rezolvă ecuația omogenă atașată $y'' + 4y = 0$, care are soluțiile de forma $y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, C_1, C_2 constante;

b. se aplică metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange şi anume se determină soluţii de forma $y(x) = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$ pentru ecuaţia neomogenă. Funcţiile C_1 şi C_2 se obţin din relaţiile

$$C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x = 0$$
$$-2C_1'\sin 2x + 2C_2'\cos 2x = \frac{1}{\cos 2x}$$

Prin urmare $C_1' = -\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$ şi $C_2' = \frac{1}{2}$, de unde $C_1(x) = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + k_1$, $C_2 = \frac{1}{2}x + k_2$, k_1 şi k_2 constante. Soluţia ecuaţiei iniţiale va fi de forma

$$y = (\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + k_1)\cos 2x + (\frac{1}{2}x + k_2)\sin 2x.$$

2.2.29. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(1 + e^{2x})^{-1}$$

Soluţie: Ecuaţia este liniară şi neomogenă, de ordinul 2, cu coeficienţi constanţi. Ecuaţia omogenă ataşată $y'' - 3y' + 2y = 0$ are soluţiile de forma $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, C_1, C_2 constante. Aplicând metoda variaţiei constantelor, căutăm pentru ecuaţia neomogenă soluţii de forma $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}$. Funcţiile C_1 şi C_2 se determină din relaţiile

$$C_1'e^x + C_2'e^{2x} = 0$$
$$C_1'e^x + 2C_2'e^{2x} = \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$$

Se obţine atunci $C_1' = -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ şi $C_2' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$, de unde rezultă $C_1 = -\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + k_1$ şi $C_2 = \operatorname{arctg} e^x + k_2$. Soluţiile ecuaţiei iniţiale vor fi de forma

$$y = [-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + k_1]e^x + (\operatorname{arctg} e^x + k_2)e^{2x},\ k_1,\ k_2 \text{ constante.}$$

2.2.30. Rezolvaţi ecuaţia diferenţială

$$2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$$

Soluție: Pentru determinarea soluțiilor ecuației de ordinul 2, liniare şi neomogene, cu coeficienți constanți, se parcurg următorii paşi:

a. se rezolvă ecuația liniară omogenă asociată $2y'' - y' - y = 0$, căreia i se determină soluțiile de forma $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$, C_1, C_2 constante.

b. Ținând cont de forma termenului liber al ecuației neomogene, $f(x) = 4xe^{2x}$, se caută pentru ecuația neomogenă o soluție particulară de forma $y_p = e^{2x}(Ax + B)$, având în vedere că ecuația caracteristică a ecuației omogene are rădăcini distincte, $r_1 = 1$ şi $r_2 = -\frac{1}{2}$. Coeficienții A şi B se calculează prin metoda coeficienților nedeterminați, după cum urmează: se înlocuiesc în ecuația inițială y_p, $y_p' = 2e^{2x}(Ax + B) + A e^{2x}$, $y_p'' = 4e^{2x}(Ax + B) + 4A e^{2x}$ şi se obține $5Ax + 7A + 5B = 4x$. Prin identificarea coeficienților rezultă $A = \frac{4}{5}$ şi $B = -\frac{28}{25}$. Soluția particulară a ecuației neomogene date este

$$y_p = e^{2x}(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}),$$

iar soluția ei generală poate fi scrisă sub forma

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-\frac{x}{2}} + e^{2x}(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}),\ C_1,\ C_2 \text{ constante.}$$

2.2.31. Rezolvați ecuația

$$y''' - 5y'' = x$$

Soluție: Ecuația omogenă ataşată $y''' - 5y'' = 0$ admite soluțiile $y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 e^{5x}$, C_1, C_2, C_3 constante. Cum termenul liber al ecuației neomogene este $f(x) = x e^{0x}$, soluția particulară a ecuației date este de forma $y_p = (Ax + B)x^2e^{0x}$, adică $y_p = Ax^3 + Bx^2$. Prin metoda coeficienților nedeterminați, se obține $A = -\frac{1}{30}$ şi $B = -\frac{1}{50}$, de unde soluțiile ecuației neomogene inițiale sunt

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{5x} - (\frac{1}{30}x^3 + \frac{1}{50}x^2),\ C_1,\ C_2,\ C_3 \text{ constante.}$$

2.2.32. Să se rezolve ecuația

$$y'' - 2y' + y = xe^x$$

Soluție: Ecuația omogenă atașată $y'' - 2y' + y = 0$ are soluțiile $y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x$, C_1, C_2 constante. În continuare se caută pentru ecuația neomogenă o soluție particulară de forma $y_p = e^x(Ax + B)x^2$, având în vedere că ecuația caracteristică atașată ecuației omogene are rădăcina 1 cu ordinul de multiplicitate 2. Aplicând metoda coeficienților nedeterminați, se obține $A = \frac{1}{3}$ și $B = 0$. Atunci $y_p = \frac{1}{3}e^x x^3$, de unde soluția generală a ecuației inițiale este

$$y = e^x(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{3}e^x x^3,\ C_1,\ C_2 \text{ constante.}$$

2.2.33. Să se rezolve ecuația

$$y'' - 2y' + 2y = x \cos x$$

Soluție: Soluțiile ecuației omogene atașate $y'' - 2y' + 2y = 0$ sunt $y_0 = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, C_1, C_2 constante. Termenul liber al ecuației neomogene este $f(x) = x \cos x$, prin urmare se determină pentru ecuația neomogenă o soluție particulară de forma

$$y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

Atunci $\quad y_p' = (Cx + A + D)\cos x + (-Ax - B + C)\sin x$

și $\quad y_p'' = (-Ax - B + 2C)\cos x - (Cx + 2A + D)\sin x.$

Prin înlocuire în ecuația inițială și prin identificarea coeficienților se obține sistemul

$$\begin{cases} A - 2C = 1 \\ -2A + B + 2C - 2D = 0 \\ 2A + C = 0 \\ -2A + 2B - 2C + D = 0 \end{cases}$$

cu soluțiile $A = \frac{1}{5}, B = \frac{2}{25}, C = -\frac{2}{5}, D = -\frac{14}{25}$, de unde

$$y_p = \left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{25}\right)\cos x - \left(\frac{2}{5}x + \frac{14}{25}\right)\sin x$$

și atunci ecuația dată are soluțiile

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{25}\right)\cos x - \left(\frac{2}{5}x + \frac{14}{25}\right)\sin x$$

unde C_1, C_2 sunt constante.

2.2.34. Să se integreze ecuația

$$y''' - 3y' - 2y = 10(\sin x + x\cos x) - 8x^3$$

Soluție: Ecuația caracteristică $r^3 - 3r - 2 = 0$ a ecuației omogene atașate are soluțiile $r_{1,2} = -1$ și $r_3 = 2$, deci $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 xe^{-x} + C_3 e^{2x}$, C_1, C_2, C_3 constante. Termenul liber este $f(x) = 10(\sin x + x\cos x) - 8x^3$, deci $y_p = (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H$ va fi forma soluției particulare a ecuației neomogene date. Prin înlocuire în ecuație și după identificarea coeficienților rezultă $A = \frac{7}{5}$, $B = -2$, $C = \frac{1}{5}$, $D = -1$, $E = 4$, $F = -18$, $G = 54$, $H = -69$.

Atunci soluțiile ecuației inițiale vor fi de forma

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 xe^{-x} + C_3 e^{2x} + (\frac{7}{5}x - 2)\sin x + (\frac{1}{5}x - 2)\cos x + 4x^3 - 18x^2 +$$
$$+ 54x - 69,\ C_1,\ C_2,\ C_3 \text{ constante.}$$

2.2.35. Să se verifice dacă funcțiile $y_1 = x^2$ și $y_2 = x^3$ formează un sistem fundamental de soluții pe orice interval ce nu conține originea și să se construiască ecuația diferențială liniară și omogenă cu soluțiile particulare y_1 și y_2.

Soluție: Se verifică liniar independența sistemului de funcții, prin condiția ca wronskianul lor să nu fie nul pe orice interval ce nu conține originea.

$$w[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = x^4 \neq 0 \text{ pentru } x \neq 0,$$

de unde rezultă că funcțiile date formează un sistem fundamental de soluții. Ecuația care are ca soluții particulare funcțiile $y_1 = x^2$ și $y_2 = x^3$ este $w[y_1, y_2, y] = 0$, echivalentă cu

$$\begin{vmatrix} x^2 & x^3 & y \\ 2x & 3x^2 & y' \\ 2 & 6x & y'' \end{vmatrix} = 0$$

de unde se obține ecuația diferențială de ordinul 2, liniară și omogenă, cu coeficienți variabili

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Soluțiile generale ale acestei ecuații sunt de forma $y = C_1 x^2 + C_2 x^3$, C_1 şi C_2 fiind constante.

2.2.36. Să se integreze ecuația

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x^2$$

Soluție: Pentru a determina soluțiile acestei ecuații diferențiale de ordinul 2, liniare şi nemogene, cu coeficienți variabili, se rezolvă mai întâi ecuația omogenă ataşată $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$. Conform problemei anterioare, soluțiile acestei ecuații sunt de forma $y = C_1 x^2 + C_2 x^3$, C_1 şi C_2 fiind constante. În continuare, aplicând metoda variației constantelor, se caută soluții de forma $y = C_1(x)x^2 + C_2(x)x^3$. Funcțiile C_1 şi C_2 se determină din relațiile

$$C_1' x_2 + C_2' x^3 = 0$$

$$2C_1' x + 3C_2' x^2 = 2.$$

Rezultă atunci că $C_1' = -2x^{-1}$ şi $C_2' = 2x^{-2}$, de unde $C_1 = -2\ln x + k_1$ şi $C_2 = -\dfrac{2}{x} + k_2$. Soluțiile ecuației date vor fi de forma

$$y = k_1x^2 + k_2x^3 - 2(\ln x + 1)x^2,\ k_1 \text{ şi } k_2 \text{ fiind constante.}$$

2.2.37. Să se determine ecuația liniară şi omogenă care admite ca soluții particulare funcțiile $y_1 = 1$, $y_2 = e^{2x}\cos x$, $y_3 = e^{-2x}\sin x$.

Soluție: Se arată că sistemul de funcții este liniar independent, de unde rezultă că este sistem fundamental de soluții al ecuației

$$w[y_1, y_2, y_3, y] = 0,$$

care este wronskianul funcțiilor y_1, y_2, y_3, y. Ecuația va fi echivalentă cu

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{-2x}\cos x & e^{-2x}\sin x & y \\ 0 & -2e^{-2x}\cos x - e^{-2x}\sin x & e^{-2x}\cos x - 2e^{-2x}\sin x & y' \\ 0 & 3e^{-2x}\cos x + 4e^{-2x}\sin x & -4e^{-2x}\cos x + 3e^{-2x}\sin x & y'' \\ 0 & -2e^{-2x}\cos x - 11e^{-2x}\sin x & 11e^{-2x}\cos x - 2e^{-2x}\sin x & y''' \end{vmatrix} = 0,$$

obținându-se în final ecuația diferențială de ordinul 3, liniară şi omogenă

$$y''' + 4y'' + 5y' = 0.$$

Soluțiile generale ale acestei ecuații sunt de forma

$$y = C_1 + e^{-2x}(C_2\cos x + C_3\sin x),\ C_1, C_2, C_3 \text{ constante.}$$

2.2.38. Să se integreze ecuația

$$xy'' + y' = x^2$$

Soluție: Se consideră ecuația omogenă ataşată $xy'' + y' = 0$, care mai poate fi scrisă şi sub forma $\frac{y''}{y'} = -\frac{1}{x}$ şi care conduce prin două integrări succesive la soluția $y = C_1 \ln x + C_2$. Pentru a determina soluțiile ecuației neomogene date se aplică metoda variației constantelor. Luăm $y = C_1(x) \ln x + C_2(x)$, funcțiile C_1 şi C_2 obținându-se din relațiile

$$C_1' \ln x + C_2' = 0$$

$$C_1' \frac{1}{x} = x.$$

Rezultă că $C_1' = x^2$ şi $C_2' = x^2 \ln x$, de unde $C_1 = \frac{x^3}{3} + k_1$ şi $C_2 = -\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + k_2$. Prin urmare, soluțiile ecuației inițiale sunt

$$y = (\frac{x^3}{3} + k_1)\ln x - \frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + k_2,\ k_1 \text{ şi } k_2 \text{ constante.}$$

2.2.39. Rezolvați ecuația diferențială

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = 0$$

Soluție: Făcând schimbarea de variabilă $x = \cos t$ (sau $x = \sin t$) ecuația se reduce la o ecuație liniară omogenă. Prin urmare $dx = -\sin t$,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt} \text{ şi}$$

$$y'' = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = -\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Înlocuind în ecuația dată se obține ecuația diferențială de ordinul 2, liniară şi omogenă,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 9y = 0,$$

cu soluțiile $y = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$. Atunci, soluțiile ecuației inițiale sunt

$$y = C_1 \cos 3(\arccos x) + C_2 \sin 3(\arccos x),\ C_1,\ C_2 \text{ constante.}$$

2.2.40. Să se integreze ecuația diferențială

$$x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$$

Soluție: Făcând schimbarea de funcție $y=\frac{z}{\sqrt{x}}$ rezultă

$$y'=\frac{2z'x-z}{2x\sqrt{x}} \text{ şi } y''=\frac{2x(2xz''+z')-3(2xz'-z)}{4x^2\sqrt{x}}.$$

Prin înlocuire în ecuația dată se obține ecuația diferențială de ordinul 2, liniară şi omogenă, $z''+z=0$, cu soluțiile $z=C_1\cos x+C_2\sin x$. Revenind la schimbarea de funcție făcută, rezultă soluțiile ecuației inițiale

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}(C_1\cos x+C_2\sin x),\ C_1,\ C_2 \text{ constante.}$$

2.2.41. Să se rezolve ecuația diferențială

$$xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=0$$

ştiind că admite o soluție particulară de forma $y_p=e^{rx}$, $r\in\boldsymbol{R}$.

Soluție: Pentru început determinăm soluția particulară, prin calcularea valorii lui r. Avem $y'=re^{rx}$, $y''=r^2e^{rx}$ şi prin înlocuire în ecuația dată se obține relația $x(r^2-r-2)-r+2=0$, de unde, identificând coeficienții, rezultă $r=2$. Deci $y_p=e^{2x}$ este soluția particulară a ecuației date. În continuare, făcând schimbarea de funcție $y=ze^{2x}$, rezultă $y'=z'e^{2x}+2ze^{2x}$, $y''=z''e^{2x}+4z'e^{2x}+4ze^{2x}$, iar prin înlocuire în ecuația dată se obține ecuația $xz''+(3x-1)z'=0$, care mai poate fi scrisă $\frac{z''}{z'}=\frac{1}{x}-3$ sau $\frac{dz'}{z'}=(\frac{1}{x}-3)dx$ şi care are soluția $z'=C_1xe^{-3x}$. Atunci $z=-\frac{1}{9}C_1(3x+1)e^{-3x}+C_2$, de unde soluțiile ecuației inițiale vor fi

$$y=-\frac{1}{9}C_1(3x+1)e^{-x}+C_2e^{2x},\ C_1,\ C_2 \text{ constante.}$$

2.2.42. Să se rezolve ecuația

$$x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0,$$

ştiind că admite soluția particulară $y_p=x$.

Soluție: Cunoscând o soluție particulară a ecuației, se face schimbarea de funcție $y=zy_p$, în cazul de față $y=zx$. Atunci $y'=z'x+z$

şi $y'' = z''x + 2z'$. Înlocuind în ecuația dată, se obține ecuația diferențială cu variabile separabile

$$x^3(\ln x - 1)z'' + x^2(2\ln x - 3)z' = 0 \text{ sau } \frac{z''}{z'} = -\frac{2\ln x - 3}{x(\ln x - 1)}.$$

După o prima integrare se obține $z' = C_1 \frac{\ln x - 1}{x^2}$, care este tot o ecuație cu variabile separabile, de unde, prin integrare, rezultă în continuare că $z = -C_1 \frac{1}{x} \ln x + C_2$, cu C_1, $C_2 \in \boldsymbol{R}$. Revenind la schimbarea de funcție efectuată, soluția ecuației inițiale va fi

$$y = -C_1 \ln x + C_2 x, \ C_1, C_2 \text{ constante.}$$

2.2.43. Rezolvați ecuația diferențială

$$4xy'' + 2y' - y = 0$$

Soluție: Se face schimbarea de variabilă $x = t^2$. Se obțin relațiile

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t} \cdot \frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{4t^3} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{4t^2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}.$$

După înlocuirea acestora în ecuația dată rezultă ecuația liniară omogenă de ordinul 2 cu coeficienți constanți

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

având soluția generală $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$, C_1, C_2 constante. Atunci soluția generală a ecuației date va fi

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{x}} + C_2 e^{-\sqrt{x}}, \ C_1, C_2 \text{ constante.}$$

2.2.44. Determinați funcția $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ astfel încât $f(x) = f''(-x)$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

Soluție: Se derivează relația dată de două ori şi se substituie x prin $-x$. Ținându-se cont de egalitatea dată se ajunge la ecuația liniară omogenă de ordinul 4 cu coeficienți constanți

$$f^{(4)}(x) - f(x) = 0$$

cu soluțiile $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$, C_1, C_2, C_3, C_4 constante. Prin înlocuire în relația dată se obține $C_1 = C_2$ şi $C_3 = 0$. Funcțiile căutate vor fi

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = k_1(e^x + e^{-x}) + k_2 \sin x,\ k_1, k_2 \text{ constante.}$$

2.2.45. Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} (x\dfrac{y'}{y})' - xy = 0 \\ y(1) = 2, y'(1) = 0 \end{cases}$$

Soluție: Dacă notăm $x = e^s$, obținem $dx = e^s ds$ sau $ds = \dfrac{dx}{x}$. Atunci $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{ds}$ şi $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x^2}(\dfrac{d^2y}{ds^2} - \dfrac{dy}{ds})$. Ecuația devine $\dfrac{d}{ds}(\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{ds}) = e^{2s}y$. Facem schimbarea de variabilă $y = e^{-2s+z}$, de unde $\dfrac{dy}{ds} = e^{-2s+z}(\dfrac{dz}{ds} - 2)$. Prin urmare obținem $\dfrac{d^2z}{ds^2} = e^z$. Cum $\dfrac{dz}{ds} = p$, rezultă $\dfrac{d^2z}{ds^2} = p\dfrac{dp}{dz}$. Atunci $p\dfrac{dp}{dz} = e^z$, care este o ecuație cu variabile separabile, cu soluția implicită $p^2 = 2e^z + C$, C constant. Din condițiile inițiale rezultă $C = 0$, de unde se obține $p^2 = 2e^z$ sau $(\dfrac{dz}{ds})^2 = 2e^z$, şi mai departe $\dfrac{dz}{ds} = \pm\sqrt{2e^z}$. Atunci $2e^{-\frac{z}{2}} = -\sqrt{2}\ln x + C$, C constant. Dar $y = e^{-2\ln x}e^z$, de unde $e^{-\frac{z}{2}} = \dfrac{1}{x\sqrt{y}}$.

Rezultă atunci $\dfrac{2}{x\sqrt{y}} = C - \sqrt{2}\ln x$. Din condițiile inițiale, cum $y(1) = 2$, obținem C = $\sqrt{2}$. Soluția problemei Cauchy va fi

$$y = \frac{2}{x^2(1 - \ln x)^2}.$$

2.2.46. Să se rezolve ecuația diferențială

$$x^2y'' - 3xy' + 5y = 0, x > 0$$

Soluție: Se face schimbarea de variabilă $x = e^s$, cu $s = \ln x$ şi Avem atunci $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{ds}$ şi $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x^2}(\dfrac{d^2y}{ds^2} - \dfrac{dy}{ds})$. Ecuația inițială se va scrie sub forma $\frac{d^2y}{ds^2} - 4\frac{dy}{ds} + 5y = 0$ sau $y'' - 4y' + 5y = 0$, care este o ecuație de ordinul 2, liniară și omogenă, cu coeficienți constanți, cu soluția $y = e^{2s}(C_1 \cos s + C_2 \sin s)$, de unde rezultă soluția ecuației date

$$y = x^2(C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x),\ C_1,\ C_2 \text{ constante.}$$

2.2.47. Să se integreze ecuația

$$x^2yy'' + x^2y'^2 - 2xyy' = 0$$

Soluție: Fie $x = e^s$ și $s = \ln x$. Atunci, cum $y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{ds}$ și $y'' = \frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds})$, se obține $y\frac{d^2y}{ds^2} - 3y\frac{dy}{ds} + (\frac{dy}{ds})^2 = 0$. Dacă notăm $y' = p$, atunci $y'' = p\frac{dp}{dy}$ și ecuația devine $yp\frac{dp}{dy} - 3yp + p^2 = 0$. Distingem două cazuri:

a. dacă $p = 0$ rezultă y = constant;

b. dacă $p \neq 0$ atunci $y\frac{dp}{dy} - 3y + p = 0$ sau $y(\frac{dp}{dy} - 3) = -p$, de unde rezultă $\frac{dp}{dy} + \frac{1}{y}p = 3$, care este o ecuație liniară neomogenă, cu soluția $p = (\frac{3}{2}C + \frac{3}{2}y^2)\frac{1}{y}$. De aici rezultă ecuația cu variabile separabile $\frac{2yy'}{y^2 + C} = 3ds$, cu soluțiile $\ln(y^2 + C) = 3s + C_1$, de unde, ținând cont de schimbarea de variabilă făcută, obținem soluțiile implicite ale ecuației inițiale

$$y^2 + C = C_1x^3,\ C,\ C_1 \text{ constante.}$$

2.2.48. Să se rezolve ecuația

$$x^2y''' + 5xy'' + 4y' = \ln x,\ x > 0$$

Soluție: Se înmulțește ecuația cu x și se notează $x = e^s$. Se obține $s = \ln x$ și $y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{ds}$, $y'' = \frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds})$, $y''' = \frac{1}{x^3}(\frac{d^3y}{ds^3} - 3\frac{d^2y}{ds^2} + 2\frac{dy}{ds})$. Ecuația inițială va deveni o ecuație diferențială de ordinul 3, liniară și neomogenă, de forma

$$\frac{d^3y}{ds^3}+2\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dy}{ds}=se^s \text{ sau } y''' + 2y''+ y' = se^s,$$

cu soluția generală $y(s) = C_1 + C_2 e^{-s} + C_3 se^{-s}$. O soluție particulară este de forma $y_p = e^s(As + B)$, de unde prin înlocuire în ecuație rezultă $A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{2}$, deci $y_p = \frac{1}{4}e^s(s-2)$. Atunci, soluția ecuației date este

$$y=C_1+C_2\frac{1}{x}+C_3\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{4}x(\ln x-2),\ C_1, C_2, C_3 \text{ constante.}$$

2.2.49. Să se rezolve ecuația diferențială

$$(3x + 2)^2y'' + 7(3x + 2)y' = - 63x + 18$$

Soluție: Facem schimbarea de variabilă $3x + 2 = e^s$, de unde $x=\frac{e^s-2}{3}$ și $\frac{ds}{dx}=\frac{3}{3x+2}$. Atunci se obține $y'=\frac{3}{3x+2}\frac{dy}{ds}$ și $y''=\frac{9}{(3x+2)^2}(\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds})$. Înlocuind în ecuația dată rezultă ecuația de ordinul 2, liniară și neomogenă $9\frac{d^2y}{ds^2}+12\frac{dy}{ds}=-21e^s+60$. Ecuația liniară omogenă atașată $9y'' + 12y'= 0$ are soluția $y_0=C_1+C_2e^{-\frac{4}{3}s}$, iar o soluție particulară a ecuației neomogene este de forma $y_p = Ae^s+Bs+C$. Prin înlocuire în ecuația neomogenă și identificarea coeficienților se obține $A = -1$, $B = 5$ și $C = 0$, de unde rezultă că soluția ecuației liniare și neomogene va fi $y=C_1+C_2e^{-\frac{4}{3}s}-e^s+5s$. Revenind la schimbarea de variabilă făcută, obținem soluția ecuației inițiale

$$y=C_1+C_2(3x+2)^{-\frac{4}{3}}-3x-2+5\ln|3x+2|,\ C_1, C_2 \text{ constante.}$$

2.2.50. Rezolvați ecuația diferențială.

$$yy'' = y'^2 + 1$$

Soluție: Derivând ecuația inițială rezultă $y'y'' + yy''' = 2y'y''$, de unde se obține $\frac{y'''}{y''}=\frac{y'}{y}$ și mai departe relația $y'' - Cy = 0$, $C > 0$, care este o ecuație diferențială de ordinul 2, liniară și omogenă, cu coeficienți constanți, și ale cărei soluții sunt

$$y = C_1 e^{\sqrt{C}x} + C_2 e^{-\sqrt{C}x}, \ C_1, C_2 \text{ constante.}$$

Înlocuind soluțiile obținute în ecuația inițială, se obține următoarea relație între constante $4C\,C_1\,C_2 = 1$, de unde rezultă

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2\sqrt{C_1 C_2}}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2\sqrt{C_1 C_2}}x}, \ C_1, C_2 \text{ constante.}$$

2.3. Probleme propuse

Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale şi probleme Cauchy:

2.3.1. $$y'' = (y')^2$$

Răspuns: $y = -ln|x + c_1| + c_2, c_1, c_2 = const.$

2.3.2. $$y^{(5)} - 2\,y^{(4)} = 0$$

Răspuns: $y = c_1 e^{2x} + c_2 \dfrac{x^3}{6} + c_3 \dfrac{x^2}{2} + c_4 x + c_5, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 = const.$

2.3.3. $$y'''y^{(4)} = 1$$

Răspuns: $x = \dfrac{t^2}{2} + c_1, y = \dfrac{t^7}{105} + c_2 \dfrac{t^4}{8} + c_3 \dfrac{t^2}{2} + c_4, c_1, c_2, c_3, c_4 = const.$

2.3.4.

$$\begin{cases} y^{(4)} = e^x - x \\ y(0) = 3, y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0, y'''(0) = 1 \end{cases}$$

Răspuns: $y = e^x - \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^2}{2} + 2$.

2.3.5. $$x = y'' + (y'')^2$$

Răspuns: $\begin{cases} x = t + t^3 \\ y = \dfrac{9}{28}t^7 + \dfrac{9}{20}t^5 + (\dfrac{1}{6} + c_1)t^3 + c_1 t + c_2 \end{cases}$ $t \in \mathbf{R}$, $c_1, c_2 = const.$

2.3.6. $$shy'' + y'' = x$$

Răspuns: $\begin{cases} x = sht + t \\ y = \dfrac{t^2 - 2}{2}sht + \dfrac{t}{2}cht - \dfrac{3}{8}sh2t + \dfrac{t^3}{6} + c_1 t + c_2 \end{cases}$ $t \in \mathbf{R}$, $c_1, c_2 = const.$

2.3.7. $$y'' = y'[1 + (y')^2]$$

Răspuns: $y = \pm arcsin e^{x+c_1} + c_2, c_1, c_2 = const.$

2.3.8. $$\begin{cases} y'' = y' \ln y' \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Răspuns: $y = x$.

2.3.9. Să se integreze ecuația diferențială a cercurilor din planul xOy

$$y''' = \frac{3y'y''^2}{1 + y'^2}$$

Răspuns: $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = c_3^2, c_1, c_2, c_3 = const.$

2.3.10. Determinați integrala generală a ecuației diferențiale a hiperbolelor din planul xOy

$$4(y''')^2 - 3y''y^{IV} = 0$$

Răspuns: $y = c_1 x + c_2 + \dfrac{c_3}{x - c_4}, c_1, c_2, c_3, c_4 = const.$

2.3.11. Fie ecuația diferențială $yy'y'' = (y')^3 + (y'')^2$. Determinați curba integrală din planul xOy, ce trece prin punctul $O(0, 0)$ și este tangentă la dreapta de ecuație $x + y = 0$.

Răspuns: $y = 1 - e^x$, $y = -1 + e^{-x}$.

2.3.12. $$y'' - 3x^2y' - 6xy = 0$$

Răspuns: $y = (c_1 + c\int e^{-x^3}dx)e^{x^3}, c, c_1 = const.$

2.3.13. $$x^2y'' + xy' + y = 0$$

Răspuns: $y = c_1 sin(ln|x| - c_2), c_1, c_2 = const.$

2.3.14. $$x^2y'' - 3xy' + 2y = 0$$

Răspuns: $y = c_1(-x)^{2+\sqrt{2}} + c_2(-x)^{2-\sqrt{2}}, c_1, c_2 = const.$

2.3.15. $$(1+x)^2y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$$

Răspuns: $y = (c_1 + c_2 \ln|1 + x|)(1 + x)^2 + (1 + x)^3, c_1, c_2 = const.$

2.3.16. $$(x - 2)^2 y'' - 3(x - 2)y' + 4y = x$$

Răspuns: $y=(x-2)^2(c_1 ln|x-2|+c_2)+x-\frac{3}{2}, c_1, c_2 = const.$

2.3.17. $$4y'' + 4y' + y = 0$$

Răspuns: $y=e^{-\frac{1}{2}x}(c_1+c_2x), c_1, c_2 = const.$

2.3.18. $$y''' - 13y'' + 12y' = 0$$

Răspuns: $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{12x}$, $c_1, c_2, c_3 = const.$

2.3.19. $$y''+ \omega^2 y = 0, \omega > 0$$

Răspuns: $y = c_1 cos\omega x + c_2 sin\omega x$, $c_1, c_2 = const.$

2.3.20. $$\begin{cases} y''+2y'-3y=0 \\ y(0)=1, y'(0)=-3 \end{cases}$$

Răspuns: $y = e^{-3x}$

2.3.21. $$y''+y' tgx = sin 2x$$

Răspuns: $y=c_1 sin x - x - \frac{1}{2} sin 2x + c_2, c_1, c_2 = const.$

2.3.22. $$y''+y=\frac{1}{cos 2x\sqrt{cos 2x}}, cos 2x > 0$$

Răspuns: $y=c_1 cos x + c_2 sin x - \sqrt{cos 2x}, c_1, c_2 = const.$

2.3.23. $$y'' + 2y'+ 7y = 0$$

Răspuns: $y = e^{-x}(c_1 cos\sqrt{6}x + c_2 sin\sqrt{6}x), c_1, c_2 = const.$

2.3.24. $$y^{(4)} + 8y''+ 16y = 0$$

Răspuns: $y = (c_1 + c_2 x)cos2x + (c_3 + c_4 x)sin2x$

2.3.25. $$y''-6y'+9y=\frac{9x^2+6x+2}{x^3}$$

Răspuns: $y=(c_1+c_2x)e^{3x}+\frac{1}{x}, c_1, c_2 = const.$

2.3.26. $$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

Răspuns: $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^x$, $c_1, c_2, c_3 = const.$

2.3.27. $$y'' + 3y' + 5y = 0$$

Răspuns: $y = e^{-\frac{3}{2}x}(c_1 \cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{11}}{2}x), c_1, c_2 = const.$

2.3.28. $$x^3 y''' + xy' - y = 0$$

Răspuns: $y = x(c_1 + c_2 \ln|x| + c_3 \ln^2|x|), c_1, c_2, c_3 = const, x \neq 0.$

2.3.29. $$y''' - y = x^3 - 1$$

Răspuns:

$$y = c_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) - x^3 - 5, c_1, c_2, c_3 = const.$$

2.3.30. $$y^{II} y^{IV} - 2(y^{III})^2 = 0$$

Răspuns: $y = -\frac{c_1 x + c_2}{c_1} \ln|c_1 x + c_2| + c_3 x + c_4, c_1, c_2, c_3, c_4 = const.$

2.3.31. Să se verifice dacă funcțiile $y_1 = x$ şi $y_2 = x^2$ formează un sistem fundamental de soluții pe orice interval ce nu conține originea şi să se construiască ecuația diferențială liniară şi omogenă cu soluțiile particulare y_1 şi y_2.

Răspuns: $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$

2.3.32. $$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2, x \neq 0$$

Răspuns: $y = c_1 x + c_2 x^2 + x^2 \ln(|x| - 1), c_1, c_2 = const.$

2.3.33. Să se determine ecuația liniară şi omogenă care admite ca soluții particulare funcțiile:

a. $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x$;

b. $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{2x}$.

Răspuns: **a.** $y'' + y = 0$;

b. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$

2.3.34. $$x^2y'' - xy' = 3x^3$$

Răspuns: $y = c_1 + c_2 x^2 + x^3, c_1, c_2 = const.$

2.3.35. $$y'' + \omega^2 y = A \sin qx, \omega > 0, A, q \in \mathbf{R}$$

Răspuns: **a.** dacă $q = \omega$, atunci $y = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x - \frac{A}{2\omega} x \cos\omega x$, c_1, $c_2 = const;$

b. dacă $q \neq \omega$, atunci $y = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x + \dfrac{A}{\omega^2 - q^2}\sin qx$, $c_1, c_2 = const.$

2.3.36. $$y''-4y'+5y=\frac{e^{2x}}{\cos x}, x\in \mathbf{R}-\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$$

Răspuns:

$$y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)+e^{2x}(\cos x\ln|\cos x|+x\sin x), c_1,c_2=const.$$

2.3.37. $$y'' + y = x\sin x$$

Răspuns: $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\dfrac{x^2}{4}\cos x+\dfrac{x}{4}\sin x, c_1,c_2=const.$

2.3.38. $$y'' - y = shx$$

Răspuns: $y = (c_1 + \frac{1}{4}x)e^x + (c_2 + \frac{1}{4}x)e^{-x}$, $c_1, c_2 = const.$

2.3.39. $$y^{(4)} - 3y'' - 4y = x^2 + 1 + e^{3x} + 4\cos x$$

Răspuns:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{50}e^{3x} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8} - \frac{2}{5}x\sin x,$$

$$c_1, c_2 = const.$$

2.3.40. $$\begin{cases} x^2y''-xy'+y=2x \\ y(1)=0, y'(1)=1 \end{cases}$$

Răspuns: $y = x\ln x(\ln x + 1)$, $x > 0$.

2.3.41. $$\begin{cases} y''-y'\cos x+y\sin x=0 \\ y(0)=1, y'(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$$

Răspuns: $y(x)=e^{\sin x}$.

2.3.42. $$\begin{cases} x^2y''+xy'-4y=4x^2 \\ y(1)=0, y'(e)=3e \end{cases}$$

Răspuns: $y(x) = x^2\ln x$, $x > 0$.

2.3.43. $$y'' - y' + e^{2x}y = 0$$

Răspuns: $y(x) = c_1 \cos e^x + c_2 \sin e^x$, $c_1, c_2 = const.$

2.3.44. $$\begin{cases} xy'''+3y''-x^2y'=1 \\ y(1)=1, y'(1)=-1 \end{cases}$$

Răspuns: $y(x)=\dfrac{1}{x}$.

2.3.45. $$\begin{cases} y''\cos x - 2y'\sin x - 1 = 0 \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}$$

Răspuns: $y(x) = \sin x \operatorname{tg} x + \cos x$.

2.3.46. $$xy''' + y'' = x + 1$$

Răspuns: $y = c_1 x(\ln x - 1) + \dfrac{1}{12} x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + c_2 x + c_3$, $c_1, c_2, c_3 = const.$

2.3.47. $$18xy'' + 9y' + 2y = 0$$

Răspuns: $y(x) = c_1 \cos\dfrac{2}{3}\sqrt{x} + c_2 \sin\dfrac{2}{3}\sqrt{x}$, $c_1, c_2 = const.$

2.3.48. $$y'' + \left(1-\frac{2}{x}\right)y' - 2y = 0$$

ştiind că admite soluția particulară e^{-x}.

Răspuns: $y = c_1(x^2 - 2x + 2) + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 = const.$

2.3.49. $$(x + 1)^3y'' + 3(x + 1)^2y' + (x + 1)y = 6 \ln(x + 1)$$

Răspuns: $y(x) = (x + 1)^{-1}[c_1 + c_2 \ln(x + 1)+ \ln^3(x + 1)]$, $c_1, c_2 = const.$

2.3.50. Fie ecuația diferențială

$$y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' = -\frac{a}{x^2+1}y,\ a \in \mathbf{R}.$$

Determinați valoarea parametrului a astfel încât ecuația să admită ca soluție nebanală un polinom. Rezolvați ecuația ştiind că admite un polinom de gradul I ca soluție particulară.

Răspuns: $a = 2$ şi $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x - c_1$, $c_1, c_2 = const.$

Capitolul 3. SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

3.1. Considerații teoretice

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \qquad \qquad ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

unde $f_1, f_2, ..., f_n: D \to \boldsymbol{R}$ sunt funcții continue pe D, $D \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ fiind un domeniu, iar funcțiile necunoscute $y_1, y_2, ..., y_n: [a, b] \to \boldsymbol{R}$ sunt derivabile pe domeniul lor de definiție se numeşte *sistem de ecuații diferențiale de ordinul 1.*

3.1.1. Reducerea la o singură ecuație de ordin superior

Fie sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \qquad \qquad ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

şi presupunem că funcțiile $f_1, f_2, ... , f_n$ au derivate parțiale continue până la ordinul $n - 1$ în raport cu toate argumentele.

Prin derivări succesive şi renotări ale funcțiilor nou obținute rezultă

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ .... \\ \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

Considerăm sistemul în necunoscutele $y_1, y_2, ..., y_n$ şi determinăm aceste necunoscute în funcție de $x, \dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{d^2 y_1}{dx^2}, ..., \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$. Suntem conduşi la

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, ..., \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}})$$

deci funcția y_1 satisface o ecuație diferențială de ordinul n.

3.1.2. Sisteme simetrice, combinații integrabile

Fie sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n), \; i = 1, 2, \ldots, n$$

O *combinație integrabilă* a sistemului este o ecuație diferențială care este o consecință a ecuațiilor sistemului dar care este integrabilă, sau care printr-o schimbare de variabilă devine integrabilă. Ea permite ca prin integrare să se obțină o ecuație

$$\Phi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = c, \; c \text{ constant}$$

care se numeşte *integrală primă* a sistemului.

Dacă presupunem că am determinat k combinații integrabile ale sistemului, le-am integrat şi am obținut integralele prime

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) = c_1 \\ \Phi_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) = c_2 \\ .... \\ \Phi_k(x, y_1, y_2, ..., y_n) = c_k \end{cases}.$$

Dacă

$$\frac{D(\Phi_1,\Phi_2,...,\Phi_k)}{D(y_{j1},y_{j2},...,y_{jk})}\neq 0.$$

unde y_{ji} , $i = 1, 2, ... , k$ sunt k funcţii necunoscute, atunci este posibil să se determine aceste funcţii în funcţie de celelalte. Se va obţine un sistem de $n - k$ ecuaţii cu $n - k$ necunoscute.

Pentru găsirea combinaţiilor integrabile este adesea convenabilă folosirea formei simetrice a sistemului. Aceasta este:

$$\frac{dy_1}{\varphi_1(x,y_1,...,y_n)}=\frac{dy_2}{\varphi_2(x,y_1,...,y_n)}=...=\frac{dy_n}{\varphi_n(x,y_1,...,y_n)}=\frac{dx}{\varphi_0(x,y_1,...,y_n)}$$

unde

$$f_i(x,y_1,...,y_n)=\frac{\varphi_i(x,y_1,...,y_n)}{\varphi_0(x,y_1,...,y_n)},\ i = 1, 2,..., n.$$

3.1.3. Sisteme diferenţiale liniare

Forma normală a unui sistem *liniar* de n ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 este

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y_j+f_i(x),i=1,2,...,n,$$

unde funcţiile $a_{ij}: [a, b]\to \mathbf{R}$ şi $f_i: [a, b]\to \mathbf{R}$ sunt continue.

Dacă toate funcţiile f_i sunt identic nule, atunci sistemul se numeşte *omogen*.

Notând

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\...\\y_n\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\...\\f_n\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&...&a_{2n}\\...&...&...&...\\a_{n1}&a_{n2}&...&a_{nn}\end{pmatrix},\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix}\frac{dy_1}{dx}\\\frac{dy_2}{dx}\\...\\\frac{dy_n}{dx}\end{pmatrix},$$

obţinem forma vectorială a sistemului

$$\frac{dY}{dx} = AY + F.$$

Pe mulțimea funcțiilor vectoriale $Y: [a, b] \to \boldsymbol{R}^n$ derivabile pe $[a, b]$ definim operatorul L prin

$$L(Y) = \frac{dY}{dx} - AY$$

Soluția generală a unui sistem de ecuații diferențiale liniare neomogene cu coeficienți continui pe $[a, b]$ este suma soluției generale a sistemului omogen corespunzător cu o soluție particulară a sistemului neomogen.

Deci soluția generală a unui sistem neomogen are forma

$$Y = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i + Y_0 \, ,$$

unde $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sunt n soluții liniar independente ale ecuației $L(Y) = 0$, cu coeficienții $a_{ij}: [a,b] \to \boldsymbol{R}$ funcții continue pe $[a,b]$ şi combinația liniară

$$Y = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i$$

cu c_i, $i = \overline{1, n}$ constante, este soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale liniare şi omogene. $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ formează un sistem fundamental de soluții. Y_0 desemnează o soluție particulară a sistemului neomogen.

3.1.4. Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți

Fie sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + f_i(x), i = \overline{1,n}$$

unde a_{ij} sunt numere reale sau complexe.

Pentru găsirea soluției generale a sistemului omogen corespunzător

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} y_j \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} y_j \\ \dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} y_j \end{cases}$$

se foloseşte metoda valorilor proprii.

Ecuația caracteristică a sistemului este

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0$$

Când rădăcinile sale k_i, $i = 1, n$ sunt distincte atunci se obțin n soluții ale sistemului

$$y_j^{(i)} = b_j^{(i)} e^{k_i x}\ j = 1, n$$

Folosind notația vectorială

$$\frac{dY}{dx} = AY$$

căutăm soluția sub forma:

$$Y = De^{kx}, \text{ unde } D = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ecuația caracteristică

$$det(A - kI_n) = 0$$

are drept soluții valorile proprii ale matricei A. Când aceste rădăcini k_i, $i = 1, n$ sunt distincte atunci obținem n soluții liniar independente

$$Y_i = D^{(i)} e^{k_i x}, i = 1, n$$

unde

$$D^{(i)} = \begin{pmatrix} b_1^{(i)} \\ b_2^{(i)} \\ \dots \\ b_n^{(i)} \end{pmatrix}$$

Soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene este

$$Y = \sum_{i=1}^{n} c_i D^{(i)} e^{k_i x}$$

unde c_i, $i = 1, n$ sunt constante arbitrare.

Când ecuaţia caracteristică are coeficienţi reali şi rădăcina complexă $k_1 = d + ig$, căreia îi corespunde soluţia complexă a sistemului $b_i = b_i' + ib_i''$, $i = 1, n$, atunci soluţia complexă a sistemului de ecuaţii diferenţiale se poate scrie trigonometric:

$$Y^{(i)} = (e^{dx}[b_1' \cos gx - b_1'' \sin gx + i(b_1'' \cos gx + b_1' \sin gx)],..$$
$$.., e^{dx}[b_n' \cos gx - b_n'' \sin gx + i(b_n'' \cos gx + b_n' \sin gx)])$$

Aceasta, conform observaţiei făcute în paragraful precedent, se reduce la două soluţii reale, prin separarea părţii reale şi a părţii imaginare, după cum urmează:

$$Y^{(1w)} = (e^{dx}(b_1' \cos gx - b_1'' \sin gx),...,e^{dx}(b_n' \cos gx - b_n'' \sin gx))$$

$$Y^{(2w)} = (e^{dx}(b_1'' \cos gx + b_1' \sin gx),...,e^{dx}(b_n'' \cos gx + b_n' \sin gx))$$

Când ecuaţia caracteristică are rădăcina k_1 multiplă de ordinul p, atunci sistemul de ecuaţii diferenţiale are soluţiile

$$\begin{cases} y_1 = Q_1(x)e^{k_1 x} \\ y_2 = Q_2(x)e^{k_1 x} \\ \quad \dots \\ y_n = Q_n(x)e^{k_1 x} \end{cases}$$

unde Q_i, $i = 1, n$ sunt polinoame de grad cel mult $p - 1$ ai căror coeficienţi se determină ca fiind funcţii liniare şi omogene de p constante oarecare $c_1, c_2, \dots, c_p$.

3.1.5. Stabilitatea soluțiilor sistemelor

Fie sistemul de ecuații diferențiale de ordinul 1

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n), \ i = \overline{1, n}$$

în care interpretăm variabila independentă t ca fiind timpul, $t \in [t_0, \infty)$, iar $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ca fiind coordonatele unui punct M dintr-un domeniu D. Presupunem că funcțiile f_i sunt continue și au derivate parțiale continue pe domeniul lor de definiție, în raport cu fiecare argument.

Fie condițiile inițiale $x_i(t_0) = x_i^0$, $i = \overline{1, n}$ și soluția sistemului

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

punând în evidență că aceasta satisface condițiile inițiale prin notația

$$x_i = x_i(t; t_0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0), i = \overline{1, n}.$$

Un astfel de sistem este des întâlnit în mecanică și se numește *mișcare.*

Păstrând momentul inițial t_0 fix se poate schimba poziția inițială $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ cu $N_0(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$. Se obține atunci o nouă soluție a sistemului, adică o altă mișcare

$$Y = (y_1(t; t_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0), ..., y_n(t; t_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)).$$

Pentru a studia abaterea celei de a doua mișcări de la prima se folosește noțiunea de *stabilitate după Liapunov.*

Mișcarea definită de relația anterioară se numește *stabilă după Liapunov* dacă la orice număr $\varepsilon > 0$ se poate asocia un număr pozitiv $\delta(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $t \geq t_0$

$$\left| x_i(t; t_0, x_1^0, ..., x_n^0) - x_i(t; t_0, y_1^0, ..., y_n^0) \right| < \varepsilon$$

pentru datele inițiale astfel luate ca $\left| y_i^0 - x_i^0 \right| < \delta(\varepsilon)$, pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Mișcarea se numește *instabilă* dacă ea nu este stabilă, prin urmare dacă există un număr $\varepsilon_0 > 0$, un moment $t = T$ și un indice i astfel ca pentru orice număr pozitiv δ să avem

$$\left| x_i(t; t_0, x_1^0, ..., x_n^0) - x_i(t; t_0, y_1^0, ..., y_n^0) \right| \geq \varepsilon_0$$

deși avem $\left| y_k^0 - x_k^0 \right| < \delta, k = \overline{1, n}.$

Teorema de stabilitate a lui Liapunov. Dacă există o funcție diferențiabilă $v(x_1, x_2, ..., x_n)$ numită *funcția lui Liapunov* care satisface condițiile următoare în vecinătatea originii

(1) $v(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$ şi $v = 0$ numai pentru $x_i = 0, i = 1, 2, ..., n,$ adică dacă v are un minimum strict în origine

(2) $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, ..., x_n) \leq 0$ pentru $t \geq t_0$, atunci punctul $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ este stabil.

Mişcarea definită de

$$Y = (y_1(t; t_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0), ..., y_n(t; t_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)).$$

se numeşte *asimptotic stabilă* dacă

$$\lim_{t \to \infty} \left| x_i(t; t_0, x_1^0, ... x_n^0) - x_i(t; t_0, y_1^0, ..., y_n^0) \right| = 0$$

pentru datele inițiale luate astfel ca $\left| y_i^0 - x_i^0 \right| < \delta$, $\delta > 0$.

În caz contrar, mişcarea este *asimptotic instabilă.*

Teorema de stabilitate asimptotică a lui Liapunov. Dacă există o funcție Liapunov diferențiabilă $v(x_1, x_2, ..., x_n)$ care satisface condițiile

(1) $v(x_1, x_2, ..., x_n)$ are un minimum strict în origine, $v(0, 0, ..., 0) = 0$

(2) derivata funcției v, calculată de-a lungul curbelor integrale ale sistemului dat

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f(t, x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0$$

şi pentru

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \delta^2 \geq 0, t \geq T_0 \geq t_0$$

derivata

$$\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0$$

unde β este o constantă, atunci punctul $x_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$ este asimptotic stabil.

Teorema de instabilitate a lui Chetayev. Dacă există o funcție diferențiabilă $v(x_1, x_2, ..., x_n)$ care satisface următoarele condiții într-o α - vecinătate închisă a originii

(1) într-o vecinătate U oricât de mică a originii există o regiune, $(v > 0)$, în care $v > 0$ *şi* $v = 0$ într-o submulțime a frontierei regiunii $(v > 0)$ din U;

(2) în regiunea $(v > 0)$ derivata

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, ..., x_n) > 0,$$

şi în regiunea $(v \geq \alpha)$, $\alpha > 0$, derivata $\frac{dv}{dt} \geq \beta > 0$, atunci punctul $x_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, este stabil pentru sistemul dat.

Aceste teoreme se pot folosi pentru studiul stabilității oricărei mişcări, deoarece investigarea stabilității soluției

$$x_i = x_i(t),\ i = 1,2,...,n$$

a sistemului de ecuații

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, ..., x_n), i = 1,2,...,n$$

poate fi redusă la investigarea stabilității soluției banale $(0, 0, ..., 0)$.

3.2. Probleme rezolvate

3.2.1. Să se rezolve **s**istemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 \end{cases}$$

Soluție: Sistemul are următoarea familie de soluții:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 \cos(x - c_2) \\ y_2 = -c_1 \sin(x - c_2) \end{cases}$$ unde c_1, c_2 sunt constante.

Privind pe x drept parametru se obține familia de cercuri concentrice cu centrul în originea sistemului de coordonate xOy din $\boldsymbol{R}^2$, de ecuații

$$y_1^2 + y_2^2 = c_1^2.$$

3.2.2. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Soluție: Derivând prima ecuație în funcție de t obținem $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt}$ şi folosind a doua ecuație rezultă $\dfrac{d^2x}{dt^2} = x$, deci $\dfrac{d^2x}{dt^2} - x = 0$, care este o ecuație diferențială de ordinul 2, liniară şi omogenă. Ecuația caracteristică $r^2 - 1 = 0$ are rădăcinile $r_1 = -1$ şi $r_2 = 1$, deci soluțiile ecuației diferențiale sunt $x = c_1e^t + c_2e^{-t}$. Folosind prima ecuație găsim

$$y = \frac{dx}{dt} = c_1e^t - c_2e^{-t},\ c_1, c_2 \text{ constante,}$$

determinând astfel y fără integrare. Dacă l-am fi determinat integrând ecuația a doua cu x cunoscut, rezulta soluția

$$y = c_1e^t - c_2e^{-t} + c_3$$

şi verificând prima ecuație obținem $c_3 = 0$.

3.2.3. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = z - x \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y \end{cases}$$

Soluție: Adunând membru cu membru ecuațiile sistemului obținem $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dz}{dt} = 0$, deci $\dfrac{d}{dt}(x + y + z) = 0$, aceasta fiind o combinație integrabilă a sistemului dat. Integrala primă corespunzătoare este:

$$x + y + z = c_1,\ c_1 \text{ constant.}$$

Înmulțind acum prima ecuație cu x, a doua cu y, a treia cu z şi adunând se găseşte $x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt} + z\dfrac{dz}{dt} = 0$, ceea ce este echivalent cu

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

având integrala primă

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2.$$

Ținând cont de cele două integrale prime obținute

$$\begin{cases} x + y + z = c_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = c_2 \end{cases}$$

se poate obține $x = f(t, z)$, $y = g(t, z)$ şi atunci din a treia ecuație a sistemului rezultă

$$\frac{dz}{dt} = f(t,z) - g(t,z),$$

care, prin integrare, conduce la determinarea funcției z.

3.2.4. Să se rezolve sistemul simetric de ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$$

Soluție: Integrând ecuația $\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$ găsim $\ln y = \ln z + \ln c_1$, de unde rezultă $y = c_1 z$.

Amplificând prima fracție cu x, a doua cu y, a treia cu z şi folosind proprietatea fundamentală a şirului de rapoarte egale rezultă

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy}$$

Aceasta se mai scrie

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy}$$

şi de aici rezultă prin integrare

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln|y| + \ln c_2 \text{ sau } \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = c_2.$$

Integralele prime independente astfel găsite

$$\begin{cases} \dfrac{y}{z} = c_1 \\ \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = c_2 \end{cases}$$

unde c_1, c_2 sunt constante, descriu curba integrală căutată.

3.2.5. Să se integreze sistemul simetric de ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{2y+z} = \frac{dy}{z-2x} = -\frac{dz}{x+y}$$

Soluție: Scăzând primele două rapoarte se obține relația $\frac{dx-dy}{2y+2x} = -\frac{dz}{x+y}$, de unde rezultă prima combinație integrabilă a sistemului, şi anume $dx - dy + 2dz = 0$.

În continuare, amplificând a doua fracție cu y, pe a treia cu z şi adunându-le rezultă relația $-\frac{ydy+zdz}{x(2y+z)} = \frac{dx}{2y+z}$, de unde se obține a doua combinație integrabilă a sistemului $xdx + ydy + zdz = 0$.

Prin integrare, cele două combinații integrabile conduc la integralele prime ale sistemului

$$\begin{cases} x - y + 2z = c_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = c_2 \end{cases}, \text{ unde } c_1, c_2 \text{ sunt constante.}$$

3.2.6. Rezolvați sistemul simetric de ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$$

Soluție: Din prima egalitate de rapoarte rezultă combinația integrabilă $x\,dx - y\,dy = 0$, cu integrala primă $x^2 - y^2 = c_1$, c_1 constant. În continuare, scriem sistemul dat sub o altă formă

$$\frac{\frac{dx}{x}}{y^2} = \frac{\frac{dy}{y}}{x^2} = \frac{\frac{dz}{z}}{x^2+y^2}$$

de unde, aplicând o proprietatea şirului de rapoarte, rezultă

$$\frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}}{y^2+x^2}=\frac{\frac{dz}{z}}{x^2+y^2}.$$

Prin urmare, se obține combinația integrabilă $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$ cu integrala primă $xy = c_2 z$, c_2 constant. Deci, integrala generală a sistemului dat este

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = c_1 \\ \frac{xy}{z} = c_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.2.7. Să se rezolve sistemul simetric de ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{cy-bz}=\frac{dy}{az-cx}=\frac{dz}{bx-ay},\ a, b, c \in \mathbf{R}$$

Soluție: Înmulțind rapoartele cu, respectiv, x, y şi z se obține

$$\frac{xdx}{cxy-bxz}=\frac{ydy}{ayz-cxy}=\frac{zdz}{bxz-ayz}$$

de unde rezultă combinația integrabilă $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$, având integrala primă $x^2 + y^2 + z^2 = c_1$. În continuare, prin înmulțirea rapoartelor cu, respectiv, a, b şi c, se obține şirul de rapoarte

$$\frac{adx}{acy-abz}=\frac{bdy}{abz-bcx}=\frac{cdz}{bcx-acy}.$$

Atunci, combinația integrabilă $adx + bdy + cdz = 0$ conduce la integrala primă $ax + by + cz = c_2$. Prin urmare, integrala generală a sistemului este

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c_1 \\ ax + by + cz = c_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.2.8. Să se rezolve sistemul liniar omogen de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 2z \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 3z \end{cases}$$

Soluție: Ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} 1-r & 2 \\ 4 & 3-r \end{vmatrix} = 0$$

şi dezvoltând obținem $r^2 - 4r - 5 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 5$, $r_2 = -1$. În continuare vom căuta soluțiile sub forma

$$y_1 = \alpha_1^{(1)} e^{5x}, z_1 = \alpha_2^{(1)} e^{5x}$$

$$y_2 = \alpha_1^{(2)} e^{-x}, z_2 = \alpha_2^{(2)} e^{-x}$$

Înlocuind în sistem obținem

$$-4\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0$$

de unde rezultă pentru $\alpha_1^{(1)}$ necunoscută secundară $\alpha_2^{(1)} = 2\alpha_1^{(1)}$ şi atunci

$$y_1 = c_1 e^{5x},\ z_1 = 2c_1 e^{5x},\ c_1 = \alpha_1^{(1)} \in \mathbf{R}$$

Analog, soluțiile y_2 şi z_2 conduc la $2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0$ şi soluția sistemului este

$$y_2 = c_2 e^{-x},\ z_2 = -c_2 e^{-x},\ c_2 = \alpha_1^{(2)} \in \mathbf{R}$$

Soluția generală a sistemului este

$$\begin{cases} y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x} \\ z = 2c_1 e^{5x} - c_2 e^{-x} \end{cases}$$ unde c_1, c_2 sunt constante.

3.2.9. Să se rezolve sistemul liniar omogen de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 5z \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - z \end{cases}$$

Soluție: Ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} 1-r & -5 \\ 2 & -1-r \end{vmatrix} = 0$$

devine $r^2 + 9 = 0$ cu soluțiile $r_{1,2} = \pm 3i$, deci

$$\begin{cases} y_1 = \alpha_1 e^{3it} \\ z_1 = \alpha_2 e^{3it} \end{cases}$$

Înlocuind în sistem obținem $(1-3i)\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0$, de unde obținem, de exemplu, $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 1 - 3i$, care verifică această relație.

Prin urmare, soluțiile sistemului se pot scrie sub forma

$$\begin{cases} y_1 = 5e^{3ix} = 5(\cos 3x + i \sin 3x) \\ z_1 = (1-3i)e^{3ix} = (1-3i)(\cos 3x + i \sin 3x) \end{cases}$$

Separând partea reală și partea imaginară obținem soluția generală

$$\begin{cases} y = 5c_1 \cos 3x + 5c_2 \sin 3x \\ z = c_1(\cos 3x + 3\sin 3x) + c_2(\sin 3x - 3\cos 3x) \end{cases}$$

c_1, c_2 fiind constante.

3.2.10. Să se rezolve sistemul liniar omogen de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 3z \end{cases}$$

Soluție: Deoarece ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0$$

este $r^2 - 4r + 4 = 0$ cu rădăcina dublă $r_1 = r_2 = 2$, soluția se va căuta sub forma:

$$\begin{cases} y = (\alpha_1 + \beta_1 x)e^{2x} \\ z = (\alpha_2 + \beta_2 x)e^{2x} \end{cases}$$

Înlocuind în sistem găsim, identificând coeficienții

$$\begin{cases} \beta_2 = -\beta_1 \\ \alpha_2 = -\alpha_1 - \beta_1 \end{cases}$$

și notând $\alpha_1 = c_1 \in \boldsymbol{R}$, $\beta_1 = c_2 \in \boldsymbol{R}$, rezultă soluția generală:

$$\begin{cases} y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} \\ z = -(c_1 + c_2 + c_2 x)e^{2x} \end{cases}$$ unde c_1, c_2 sunt constante.

3.2.11. Să se rezolve sistemul liniar omogen de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + 4z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z \end{cases}$$

Soluție: Ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 & 0 \\ 0 & 2-r & 4 \\ 1 & 0 & -1-r \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } r^3 - 3r^2 = 0,$$

care are rădăcinile $r_{1,2} = 0$ şi $r_3 = 3$. Vom căuta prin urmare soluții ale sistemului inițial de forma

$$\begin{cases} x^1(t) = (a_1 t + b_1)e^{0t} \\ y^1(t) = (a_2 t + b_2)e^{0t} \\ z^1(t) = (a_3 t + b_3)e^{0t} \end{cases} \text{ respectiv } \begin{cases} x^2(t) = d_1 e^{3t} \\ y^2(t) = d_2 e^{3t} \\ z^2(t) = d_3 e^{3t} \end{cases}.$$

După înlocuirea în sistemul dat şi perfectarea calculelor, se obține

$$\begin{cases} a_1 = c_1, a_2 = -2c_1, a_3 = c_1 \\ b_1 = c_1 + c_2, b_2 = -c_1 - 2c_2, b_3 = c_2 \end{cases}$$ respectiv $d_1 = 4c_3$, $d_2 = 4c_3$, $d_3 = c_3$,

unde c_1, c_2 şi c_3 sunt constante.

Atunci, soluțiile sistemului inițial sunt de forma

$$\begin{cases} x(t) = c_1 t + c_1 + c_2 + 4c_3 e^{3t} \\ y(t) = -2c_1 t - c_1 - 2c_2 + 4c_3 e^{3t} \\ z(t) = c_1 t + c_2 + c_3 e^{3t} \end{cases} \quad c_1, c_2, c_3 \text{ constante.}$$

3.2.12. Să se rezolve sistemul liniar omogen de ecuații diferențiale de ordinul doi

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2y \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2x \end{cases}$$

Soluție: Notăm derivatele de ordinul 1 ale funcțiilor x și y în variabila t după cum urmează $\dfrac{dx}{dt} = u$ și $\dfrac{dy}{dt} = v$.

În continuare vom rezolva următorul sistem liniar omogen de ecuații diferențiale de ordinul 1

$$\begin{cases} x' = u \\ y' = v \\ u' = 2y \\ v' = -2x \end{cases}.$$

Ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} -r & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -r & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -r & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -r \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } r^4 + 4 = 0$$

și are rădăcinile $r_{1,2} = 1 \pm i$, $r_{3,4} = -1 \pm i$. Se obțin prin urmare soluții pentru cel de-al doilea sistem de forma

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{(1+i)t} \\ y_1(t) = ie^{(1+i)t} \\ u_1(t) = (1+i)e^{(1+i)t} \\ v_1(t) = (-1+i)e^{(1+i)t} \end{cases} \text{ respectiv } \begin{cases} x_2(t) = e^{(1-i)t} \\ y_2(t) = -ie^{(1-i)t} \\ u_2(t) = (1-i)e^{(1-i)t} \\ v_2(t) = -(1+i)e^{(1-i)t} \end{cases}.$$

Atunci soluțiile sistemului inițial vor fi date de

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^t \cos t + c_2e^t \sin t + c_3e^{-t} \cos t + c_4e^{-t} \sin t \\ y(t) = -c_1e^t \sin t + c_2e^t \cos t - c_3e^{-t} \sin t + c_4e^{-t} \cos t \end{cases}$$

unde c_1, c_2, c_3, c_4 sunt constante.

3.2.13. Să se rezolve sistemul liniar neomogen de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} x' = 2y + 1 \\ y' = x - y + e^t \end{cases}$$

Soluție: Se rezolvă mai întâi sistemul liniar omogen atașat

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = x - y \end{cases}$$

a cărui ecuație caracteristică

$$\begin{vmatrix} -r & 2 \\ 1 & -r-1 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } r^2 + r - 2 = 0$$

are rădăcinile $r_1 = 1$ și $r_2 = -2$, ceea ce conduce la următoarele soluții ale sistemului omogen

$$\begin{cases} x = 2c_1 e^t + c_2 e^{-2t} \\ y = c_1 e^t - c_2 e^{-2t} \end{cases} \text{ unde } c_1,\, c_2 \text{ sunt constante.}$$

Pentru determinarea soluțiilor sistemului neomogen, aplicăm metoda variației constantelor și prin urmare vom căuta soluții de forma

$$\begin{cases} x = 2c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-2t} \\ y = c_1(t)e^t - c_2(t)e^{-2t} \end{cases}.$$

Acestea vor satisface următoarele două relații

$$\begin{cases} 2c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-2t} = 1 \\ c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-2t} = e^t \end{cases}$$

de unde se obține

$$c_1'(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-t} \text{ și } c_2'(t) = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{3t}$$

și, în continuare

$$c_1(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}e^{-t} + k_1 \text{ și } c_2(t) = \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{2}{9}e^{3t} + k_2,\ k_1,\, k_2 \text{ constante.}$$

Atunci, soluțiile sistemului neomogen sunt date de

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{3}(t - \frac{1}{3})e^t - \frac{1}{2} + 2k_1e^t + k_2e^{-2t} \\ y(t) = \frac{1}{3}(t + \frac{2}{3})e^t - \frac{1}{2} + k_1e^t - k_2e^{-2t}. \end{cases}$$

3.2.14. Să se construiască sistemul de ecuații diferențiale care admite sistemul fundamental de soluții

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} e^{-t} \text{ și } X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Soluție: Se verifică dacă wronskianul celor două funcții este nenul pe ***R***

$$W[X_1, X_2] = \begin{vmatrix} 2e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 4e^t \neq 0 \text{ pe } \boldsymbol{R},$$

de unde rezultă că funcțiile formează un sistem fundamental de soluții.

Sistemul de ecuații diferențiale care admite funcțiile X_1 și X_2 ca soluții, sau mai exact soluțiile particulare $x(t) = 2e^{-t}$ și $y(t) = te^{-t} + 2e^{2t}$, este dat de următoarele relații:

(1) $$\begin{vmatrix} x' & -2e^{-t} & 0 \\ x & 2e^{-t} & 0 \\ y & te^{-t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 0$$ sau, echivalent, $4x'e^t + 4xe^t = 0$,

de unde se obține $x' = -x$.

(2) $$\begin{vmatrix} y' & (-t+1)e^{-t} & 4e^{2t} \\ x & 2e^{-t} & 0 \\ y & te^{-t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 0$$ sau, echivalent, $4y' - 2x - 8y + 6tx = 0$,

de unde rezultă $y' = (-\frac{3}{2}t + \frac{1}{2})x + 2y$.

Prin urmare, sistemul de ecuații diferențiale căutat este

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = (-\frac{3}{2}t + \frac{1}{2})x + 2y \end{cases}$$

care are soluțiile generale de forma

$$\begin{cases} x(t) = 2c_1e^{-t} \\ y(t) = c_1te^{-t} + 2c_2e^{2t} \end{cases}$$ unde c_1, c_2 sunt constante.

3.2.15. Fie următorul sistem de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 6y - 7y + 10 \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2z + e^t - 2 \\ \dfrac{dz}{dt} = -z + 1 \end{cases}$$

Să se arate că funcțiile

$$X_1 = \begin{pmatrix} 3t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ t+1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \text{ şi } X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

formează pe $\boldsymbol{R}$ un sistem fundamental de soluții pentru sistemul dat şi să se scrie soluția generală a sistemului.

Soluție: Se verifică că wronskianul funcțiilor este nenul pe $\boldsymbol{R}$, după cum urmează:

$$W[X_1, X_2, X_3] = \begin{vmatrix} 3t & 0 & 1 \\ 2e^t & (t+1)e^t & 0 \\ -e^{-t} & e^{-t} & e^{-t} \end{vmatrix} = 3t^2 + 4t + 3 > 0, \ \forall t \in \boldsymbol{R}.$$

Cum $W[X_1, X_2, X_3] \neq 0$ pe $\boldsymbol{R}$, rezultă că funcțiile date reprezintă un sistem fundamental de soluții pentru sistemul dat.

Soluția generală a sistemului inițial este dată de

$$\begin{cases} x(t) = 3c_1t + 2c_2e^t - c_3e^{-t} \\ y(t) = c_2(t+1)e^t + c_3e^{-t} \\ z(t) = c_1 + c_3e^{-t} \end{cases}$$ c_1, c_2 şi c_3 constante.

3.2.16. Să se integreze sistemul diferențial neliniar sub formă simetrică

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}$$

Soluţie: Obţinem următorul sistem echivalent

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{1}=\dfrac{dz}{2} \\ \dfrac{d(z-x-y)}{-\sqrt{z-x-y}}=\dfrac{dy}{1} \end{cases}$$

de unde obţinem soluţia sistemului sub forma

$$2y-z=c_1,\, y+2\sqrt{z-x-y}=c_2, \text{ unde } c_1,\, c_2 \in \boldsymbol{R}.$$

3.2.17. Să se integreze sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=2z \\ \dfrac{d^3z}{dx^3}=2y \end{cases}$$

Soluţie: Prin derivarea de trei ori a primei relaţii din sistem, scrise sub forma $z=\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}$, se obţine $\frac{d^3z}{dx^3}=\frac{1}{2}\frac{d^4y}{dx^4}$ şi prin înlocuirea în a doua relaţie rezultă ecuaţia diferenţială de ordinul patru, liniară şi omogenă

$$y^{(4)}-4y=0,$$

a cărei ecuaţie caracteristică $r^4-4=0$ are rădăcinile $r_{1,2}=\pm\sqrt{2}$ şi $r_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$. Atunci, se obţine soluţia generală

$y(x)=c_1e^{\sqrt{2}x}+c_2e^{-\sqrt{2}x}+c_3\cos\sqrt{2}x+c_4\sin\sqrt{2}x$, c_1, c_2, c_3 şi c_4 fiind constante.

Ţinând apoi cont de prima ecuaţie din sistem vom avea

$$y(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}c_1e^{\sqrt{2}x}-\frac{\sqrt{2}}{2}c_2e^{-\sqrt{2}x}-\frac{\sqrt{2}}{2}c_3\sin\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}c_4\cos\sqrt{2}x.$$

3.2.18. Să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} y' = z + 1 \\ x^2 z' = 2y + x^3 \end{cases}$$

Soluție: Derivând prima ecuație se obține $y'' = z'$ și înlocuind în cea de-a doua relație rezultă o ecuație de tip Euler

$$x^2 y'' - 2y = x^3.$$

Se rezolvă mai întâi ecuația omogenea atașată $x^2 y'' - 2y = 0$, făcând schimbarea de variabilă $x = e^s$. Atunci $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{ds}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\right)$ și astfel ecuația va deveni

$$\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} - 2y = 0,$$

care este o ecuație liniară omogenă de ordinul 2, cu soluția generală $y(s) = c_1 e^{-s} + c_2 e^{2s}$, de unde revenind la schimbarea de variabilă efectuată, $y(x) = \frac{c_1}{x} + c_2 x^2$, c_1, c_2 constante. Pentru aflarea soluțiilor ecuației neomogene, aplicăm metoda variației constantelor, căutând soluții de forma $y(x) = \frac{c_1(x)}{x} + c_2(x)x^2$. Sunt verificate relațiile

$$\begin{aligned} c_1'(x)\frac{1}{x} + c_2'(x)x^2 &= 0 \\ -c_1'(x)\frac{1}{x^2} + 2xc_2'(x) &= \frac{x^3}{x^2} \end{aligned}$$

de unde rezultă $c_1'(x) = -\frac{x^3}{3}$ și $c_2'(x) = \frac{1}{3}$, și apoi prin integrare, se obțin funcțiile $c_1(x) = -\frac{x^4}{12} + k_1$ și $c_2(x) = \frac{x}{3} + k_2$, k_1, k_2 fiind constante.

Prin urmare,

$$y(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{k_1}{x} + k_2 x^2$$

și, ținând cont că $z(x) = y'(x) + 1$, se obține

$$z(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{k_1}{x^2} + 2k_2 x + 1.$$

3.2.19. Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = -y + z + 1 \\ x(0) = 1 \\ y(0) = z(0) = -1 \end{cases}$$

Soluţie: Ecuaţia caracteristică a sistemului omogen ataşat este

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & -1 \\ 2 & 1-r & 1 \\ 0 & -1 & 1-r \end{vmatrix} = 0 \text{ sau, echivalent, } r^2 (r - 2) = 0,$$

care are rădăcinile $r_1 = r_2 = 0$ şi $r_3 = 2$. Atunci, soluţia sistecmului va fi de forma

$$\begin{cases} x(t) = a_1 + a_2 t + a_3 e^{2t} \\ y(t) = b_1 + b_2 t + b_3 e^{2t} \\ z(t) = d_1 + d_2 t + d_3 e^{2t}. \end{cases}$$

După înlocuirea în sistemul omogen şi efectuarea calculelor rezultă

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t} \\ y(t) = -c_1 - c_2 t + c_3 e^{2t} \\ z(t) = -c_1 - c_2 - c_2 t - c_3 e^{2t} \end{cases} \quad c_1, c_2 \text{ şi } c_3 \text{ constante.}$$

Având însă în vedere că sistemul iniţial este neomogen, aplicând metoda variaţiei constantelor, rezultă că funcţiile $c_1(t)$, $c_2(t)$ şi $c_3(t)$ satisfac relaţiile

$$\begin{aligned} c_1' + c_2' t + c_3' e^{2t} &= 0 \\ -c_1' - c_2' t + c_3' e^{2t} &= 0 \\ -c_1' - c_2' - c_2' t - c_3' e^{2t} &= 1 \end{aligned}$$

obținându-se $c_1' = t$, $c_2' = -1$, $c_3' = 0$. Apoi, prin integrare, rezultă $c_1(t) = \frac{t^2}{2} + k_1$, $c_2(t) = -t + k_2$, $c_3(t) = k_3$, k_1, k_2, k_3 fiind constante.

Prin urmare, soluțiile sistemului inițial sunt de forma

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{t^2}{2} + k_1 + k_2 t + k_3 e^{2t} \\ y(t) = \frac{t^2}{2} - k_1 - k_2 t + k_3 e^{2t} \\ z(t) = \frac{t^2}{2} - k_1 - k_2 + (1 - k_2)t - k_3 e^{2t}. \end{cases}$$

Ținând cont de condițiile Cauchy inițiale, se obține $k_1 = 1$, $k_2 = -2$, $k_3 = 0$. Atunci, soluția sistemului se scrie

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{t^2}{2} + 1 \\ y(t) = \frac{t^2}{2} - 1 \\ z(t) = \frac{t^2}{2} + t - 1. \end{cases}$$

3.2.20. Să se testeze stabilitatea soluției ecuației

$$\frac{dy}{dt} = a^2 y, a \neq 0, \text{ cu condiția } y(t_0) = y_0.$$

Soluție: Soluția $y = y_0 e^{a^2(t-t_0)}$ este instabilă deoarece este imposibil să alegem $\delta > 0$ astfel încât din inegalitatea $\left| y_0 - y_0' \right| < \delta(\varepsilon)$ să rezulte

$$\left| y_0 e^{a^2(t-t_0)} - y_0' e^{a^2(t-t_0)} \right| < \varepsilon$$

pentru orice $t \geq t_0$.

3.2.21. Să se testeze stabilitatea soluției ecuației diferențiale

$$\frac{dy}{dt} = -a^2 y, a \neq 0$$

definită de condițiile inițiale $y(t_0) = y_0$.

Soluție: Soluția

$$y = y_0 e^{-a^2(t-t_0)}$$

este stabilă deoarece

$$\left| y_0 e^{-a^2(t-t_0)} - y_0' e^{-a^2(t-t_0)} \right| = e^{-a^2(t-t_0)} \left| y_0 - y_0' \right| < \varepsilon$$

pentru $t > t_0$ dacă $\left| y_0 - y_0' \right| < \varepsilon e^{-a^2 t_0}$, deci $\delta(\varepsilon) = \varepsilon e^{-a^2 t_0}$.

3.2.22. Să se studieze stabilitatea soluției nule a sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y^3 \end{cases}$$

Soluție: Funcția $v(x, y) = x^2 + y^2$ satisface condițiile

(1) $v(x, y) \geq 0$, $v(0,0) = 0$;

(2) $\dfrac{dv}{dt} = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leq 0$.

În afara unei vecinătăți a originii

$$\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0$$

Prin urmare soluția $x \equiv 0, y \equiv 0$ este asimptotic stabilă.

3.2.23. Studiați stabilitatea soluției nule a sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -xy^4 \\ \dfrac{dy}{dt} = yx^4 \end{cases}$$

Soluție: Funcția $v(x, y) = x^4 + y^4$ satisface

(1) $v(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0$, $v(0,0) = 0$;

(2) $\frac{dv}{dt} = -4x^4 y^4 + 4x^4 y^4 \equiv 0$;

Prin urmare soluția nulă $x \equiv 0, y \equiv 0$ este stabilă.

3.2.24. Testați stabilitatea soluției nule a sistemului

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^3 + x^5 \\ \frac{dy}{dt} = x^3 + y^5 \end{cases}$$

Soluție: Funcția $v(x, y) = x^4 - y^4$ satisface condițiile lui Chetayev

(1) $v > 0$ pentru $|x| > |y|$;

(2) $\frac{dv}{dt} = 4x^3(y^3 + x^5) - 4y^3(x^3 + y^5) = 4(x^8 - y^8) > 0$ pentru $|x| > |y|$;

şi pentru $v \geq \alpha > 0$, $\frac{dv}{dt} \geq \beta > 0$. Deci soluția $x \equiv 0, y \equiv 0$ nu este stabilă.

3.2.25. Să se afle pentru ce valori ale lui $a \in \boldsymbol{R}$ soluția $x = y = z = 0$ a sistemului

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + y + z^2 \\ \frac{dy}{dt} = (2 + a)x + ay + \cos y - 1 \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$$

este asimptotic stabilă.

Soluție: Scriem sistemul sub forma liniarizată

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + y \\ \dfrac{dy}{dt} = (2+a)x + ay \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$$

de unde rezultă că ecuația caracteristică poate fi scrisă astfel

$$\begin{vmatrix} a-r & 1 & 0 \\ 2+a & a-r & 0 \\ 1 & 1 & -1-r \end{vmatrix} = 0 .$$

Se obține de aici $r = -1$ sau $r^2 - 2ar + a^2 - a - 2 = 0$, ecuație care are ambele soluții negative dacă $a \in (-\infty, -1)$.

3.3. Probleme propuse

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații diferențiale:

3.3.1.

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y \end{cases}$$

Răspuns:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 t e^{-t};\ y(t) = -c_3 e^{-t} + c_2 e^{2t};$$
$$z(t) = (c_3 - c_1 t)e^{-t} + c_2 e^{2t},$$

c_1, c_2, c_3 constante.

3.3.2.

$$\begin{cases} y' - z' + x = 0 \\ z' - x' + y = 0 \\ x' - y' - + z = 0 \end{cases}$$

Răspuns:

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} c_1 \sin\frac{1}{\sqrt{3}}(t - c_2),$$

$$y(t) = -\frac{1}{\sqrt{3}} c_1 \sin\frac{1}{\sqrt{3}}(t - c_2) + c_1 \cos\frac{t - c_2}{\sqrt{3}}$$

$$z(t) = -\frac{1}{\sqrt{3}} c_1 \sin\frac{t-c_2}{\sqrt{3}} - c_1 \cos\frac{t-c_2}{\sqrt{3}}, \; c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.3.3.

$$\begin{cases} x' = 3x - y + \sin t \\ y' = 3y - 4x + \cos t \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = -1$$

Răspuns:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{5}{8}e^t + \frac{75}{104}e^{5t} - \frac{1}{26}(6\sin t + 9\cos t), \\ y(t) &= \frac{5}{4}e^t - \frac{75}{52}e^{5t} - \frac{1}{26}(\sin t + 21\cos t) \end{aligned} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.3.4.

$$\begin{cases} x' + 4x + 3y = t \\ y' + 2x + 5y = e^t \end{cases}$$

Răspuns:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-7t} + c_2 e^{-2t} + \frac{5}{14}t - \frac{1}{8}e^t - \frac{31}{196}, \\ y(t) &= c_1 e^{-7t} - \frac{2}{3}c_2 e^{-2t} + \frac{9}{98} - \frac{1}{7}t + \frac{5}{24}e^t \end{aligned} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.3.5. $$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} x^2 - z^2 = c_1 \\ \dfrac{y}{e^z} = c_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.3.6. $$\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = c_1 \\ x - yz = c_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.3.7.

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c_1 \\ x + y + z = c_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.3.8.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - x^2 - y^2}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = c_1 \\ \dfrac{x^2 + y^2 + z}{x} = c_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.3.9.

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2 + 1}}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = c_1 \\ xy - \sqrt{z^2 - 1} = c_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.3.10.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y - 3z \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + y + 2z \end{cases}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} x(t) = -c_1 + (c_2 + c_3 t)e^t \\ y(t) = -3c_1 + c_2 e^t \\ z(t) = c_1 + c_3 e^t \end{cases} \quad c_1, c_2, c_3 \text{ constante.}$$

3.3.11.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 3z \end{cases}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} y(x) = (c_1 x + c_2)e^{2x} \\ z(x) = -(c_1 x + c_1 + c_2)e^{2x} \end{cases} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.3.12.

$$\begin{cases} x' = 3x + e^{3t} \\ y' = x + 3y - 2e^{3t} \end{cases}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} x(t) = te^{3t} \\ y(t) = (\dfrac{t^2}{2} - 2t)e^{3t} \end{cases}$$

3.3.13. Să se construiască sistemul de ecuații diferențiale care admite sistemul fundamental de soluții

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ și } X_2 = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ 2t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Răspuns: $W[X_1, X_2] = 3(t^2 + 1) \neq 0$ pe $\boldsymbol{R}$ și sistemul este

$$\begin{cases} 3(t^2 + 1)x'(t) = -2t(t^2 - 1)x(t) + 4ty(t) \\ 3(t^2 + 1)y'(t) = -4t(t^2 - 1)x(t) + 8ty(t) \end{cases}.$$

3.3.14. Să se determine sistemul de ecuații diferențiale care admite sistemul fundamental de soluții

$$X_1 = \begin{pmatrix} \cos t + 2 \\ -\sin t \end{pmatrix} \text{ şi } X_2 = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 2 \end{pmatrix}$$

Răspuns: $W[X_1, X_2] = -3 \neq 0$ pe ***R*** şi sistemul este

$$\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{2}{3}[\sin t x(t) + 2\cos t y(t)] \\ y'(t) = -\dfrac{1}{3}[(2\cos t - 1)x(t) + 2\sin t y(t)] \end{cases}.$$

3.3.15. Fie următorul sistem de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

Să se arate că funcțiile

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \text{ şi } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

formează pe ***R*** un sistem fundamental de soluții pentru sistemul dat şi să se scrie soluția generală a sistemului.

Răspuns: $W[X_1, X_2] = -1 \neq 0$ pe ***R*** şi soluția generală a sistemul este de forma

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-t} \\ y(t) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} \\ z(t) = c_1 e^{2t} - c_3 e^{-t} \end{cases} \qquad c_1, c_2 \text{ şi } c_3 \text{ constante.}$$

3.3.16.

$$\begin{cases} y' = 3y \\ z' = y + 3z \end{cases}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} y = c_1 e^{3x} \\ z = (c_1 x + c_2)e^{3x} \end{cases} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.3.17.

$$\begin{cases} y' = 2y - z + x \\ z' = -y + 2z + 1 \end{cases}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{8}{9} \\ z = c_1 e^{x} - c_2 e^{3x} - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{10}{9} \end{cases} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.3.18.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 15e^{t}\sqrt{t} \end{cases}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} x(t) = [c_1(2t+1) - 2c_2 t - 8t^2\sqrt{t}]e^{t} \\ y(t) = [2c_1 t - c_2(2t-1) - 8t^2\sqrt{t} + 10t\sqrt{t}]e^{t} \end{cases} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.3.19.

$$\begin{cases} x^2 y' = -2z + x^2 \ln x \\ z = -y + 1 \end{cases}$$

Răspuns:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{c_1}{x^2} - 2c_2 x + \frac{x}{3}\ln^2 x + \frac{x}{9}(\ln x - 1) + 1 \\ z(x) &= \frac{c_1}{x} + c_2 x^2 - \frac{x^2}{3}\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{3}\right) \end{aligned} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.3.20.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = 9x \end{cases}$$

Răspuns:

$$x(t) = c_1 e^{3t} + e^{-\frac{3}{2}t}\left(c_2 \cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t + c_3 \sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$y(t) = c_1 e^{3t} + e^{-\frac{3}{2}t}\left(\frac{c_2 + c_3\sqrt{3}}{2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t - \frac{c_2\sqrt{3} - c_3}{2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right)$$

unde c_1, c_2 şi c_3 sunt constante.

3.3.21. Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z \\ x(0) = y(0) = z(0) = 1 \end{cases}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} x(t) = -e^{2t} + 2 \\ y(t) = \dfrac{2}{3}e^{2t} + \dfrac{1}{3}e^{-t} \\ z(t) = -\dfrac{1}{3}e^{2t} - \dfrac{2}{3}e^{-t} + 2 \end{cases}$$

3.3.22.

$$\begin{cases} x'' + \dfrac{5}{3}x' - \dfrac{10}{3}x = 4y \\ 3x' = y'' + 2y \end{cases}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \\ y(t) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} \end{cases} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

3.3.23.

$$\begin{cases} y'' + 2y + 4z = e^x \\ z'' - y - 3z = -x \end{cases}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} y(x) = c_1 e^{x\sqrt{2}} + c_2 e^{-x\sqrt{2}} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + e^x - 2x \\ z(x) = -c_1 e^{x\sqrt{2}} - c_2 e^{-x\sqrt{2}} - \dfrac{c_3}{4}\cos x - \dfrac{c_4}{4}\sin x - \dfrac{1}{2}e^x + x \end{cases}$$

c_1, c_2, c_3, c_4 constante.

Testați stabilitatea soluției nule a următoarelor sisteme de ecuații diferențiale

3.3.24.

$$\begin{cases} x' = 2e^{-x} + \ln(y^2 + 1) \\ y' = 3x - e^{y^2 - 1} - 2y \end{cases}$$

Răspuns: Soluția banală este asimptotic stabilă.

3.3.25.

$$\begin{cases} x' = x + 2y^2 - z \\ y' = \ln(x^2 + 2) + \sin 2y - z^2 \\ z' = \sin x + e^{y^2} + 4z \end{cases}$$

Răspuns: Soluția banală nu este stabilă.

3.3.26. Să se determine valorile parametrilor reali a şi b astfel încât soluția nulă a următorului sistem de ecuații diferențiale să fie asimptotic stabilă

$$\begin{cases} x' = ax^2 - be^y - 3x + y \\ y' = ax + 2bxy - 3y^2 \end{cases}$$

Răspuns: Condiția care se impune asupra parametrilor reali este

$$a(b-1) > 0.$$

Capitolul 4. ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL 1

4.1. Considerații teoretice

Problema determinării unei funcții z cu n variabile, admițând derivate parțiale în raport cu fiecare variabilă şi satisfăcând condiția:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0$$

unde $F: D \rightarrow \mathbf{R}$ şi $D \subset \mathbf{R}^{2n+1}$ este domeniu, se numeşte *ecuație cu derivate parțiale de ordinul 1.*

4.1.1. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul 1 liniare şi omogene

O ecuație cu derivate parțiale de ordinul 1 *liniară şi omogenă* este de forma

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2} + ... + X_n(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

unde coeficienții X_i sunt funcții care nu depind de funcția necunoscută z, $i=1, 2, ..., n$ şi admit derivate parțiale continue pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^n$.

Direcțiile definite de

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = ... = \frac{dx_n}{X_n}, |X_i| \geq m > 0, i = 1,2,...,n$$

câte una în fiecare punct $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$, se numesc *direcții caracteristice* şi sunt independente de existența suprafeței integrale.

Dacă vreuna dintre componentele X_i este nulă atunci şi $dx_i = 0$ şi raportul corespunzător lor nu va figura în şirul de rapoarte.

Relațiile anterioare se mai scriu şi sub forma

$$\frac{dx_k}{dx_1} = \frac{X_k(x_1, x_2, ..., x_n)}{X_1(x_1, x_2, ..., x_n)}, k = 2, 3, ..., n.$$

şi se numesc *ecuațiile diferențiale ale caracteristicelor.* Curbele integrale ale acestor ecuații diferențiale se numesc *curbe caracteristice.* Se poate demonstra că prin fiecare punct din D trece o caracteristică şi numai una. O familie uniparametrică de astfel de caracteristici formează o *suprafață integrală.*

Găsim n - 1 integrale prime ale ecuației care sunt independente

$$\Psi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1$$
$$\Psi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = c_2$$
$$...$$
$$\Psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n) = c_{n-1}$$

$c_1, c_2, ..., c_{n-1}$ fiind constante.

Evident, $\Phi(\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_{n-1}) = c$, unde Φ este o funcție arbitrară şi c constant, este o integrală primă a sistemului deoarece fiecare dintre funcțiile $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_{n-1}$ devin constante de-a lungul unei curbe integrale ale acestui sistem, deci la fel şi $\Phi(\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_{n-1})$. Prin urmare $z = \Phi(\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_{n-1})$, unde Φ este o funcție diferențiabilă arbitrară, este o soluție a ecuației omogene date. Aceasta înseamnă că pentru integrarea ecuației se caută n - 1 integrale prime.

4.1.2. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul 1 cvasiliniare

O ecuație cu derivate parțiale de ordinul 1 *cvasiliniară* (sau liniară neomogenă) este de forma :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, ... x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_i} = Z(x_1, x_2, ..., x_n, z)$$

unde Z şi X_i , $i=1, 2, ..., n$ sunt funcții continuu diferențiabile care nu se anulează simultan.

Căutăm soluția z a ecuației date sub forma implicită

$$U(x_1, x_2, ..., x_n, z) = 0,$$

unde $$\frac{\partial U}{\partial z} \neq 0.$$

Ecuația cvasiliniară se integrează reducând-o la o ecuație liniară şi omogenă. Se obține

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1,x_2,...x_n,z)\frac{\partial U}{\partial x_i}+Z(x_1,x_2,...,x_n,z)\frac{\partial U}{\partial z}=0$$

Se găsesc n integrale prime independente

$$\Psi_1(x_1,x_2,...,x_n,z)=c_1$$
$$\Psi_2(x_1,x_2,...,x_n,z)=c_2$$
$$...$$
$$\Psi_n(x_1,x_2,...,x_n,z)=c_n$$

$c_1, c_2, ..., c_n$ fiind constante.

Soluția generală a ecuației este de forma

$$U = \Phi(\Psi_1, \Psi_2,..., \Psi_n)$$

unde Φ este o funcție arbitrară diferențiabilă.

Soluția z a ecuației date se determină din relația

$$U(x_1, x_2, ..., x_n, z) = 0$$

sau, altfel scris,

$$\Phi(\Psi_1(x_1, x_2, ..., x_n, z), \Psi_2(x_1, x_2, ..., x_n, z),..., \Psi_n(x_1, x_2, ..., x_n, z)) = 0.$$

4.2. Probleme rezolvate

4.2.1. Să se integreze ecuația

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}=0$$

Soluție: Sistemul de ecuații care defineşte caracteristicile este

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=...=\frac{dx_n}{x_n}$$

Integralele prime independente sunt

$$\frac{x_1}{x_n}=c_1,\frac{x_2}{x_n}=c_2,...,\frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1},$$ $c_1, c_2, ..., c_{n-1}$ constante.

Soluția generală a ecuației este deci

$$z = \Phi(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}).$$

4.2.2. Să se găsească suprafața integrală a ecuației

$$\sqrt{x^2+1}\frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

care trece prin curba

$$\begin{cases} y = x \\ z = 2x \end{cases}$$

Soluție: Ecuațiile diferențiale ale caracteristicelor sunt

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+1}} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$$

de unde rezultă

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y}{z}.$$

Integrând această ecuație cu variabile separabile se deduce $z^2 = y^2 + k$, k constant și înlocuind în prima ecuație diferențială a caracteristicelor rezultă ecuația cu variabile separabile

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2+k}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Prin integrarea acesteia obținem $y + \sqrt{y^2+k} = c(x + \sqrt{x^2+1})$, unde c constant, de unde se deduce și egalitatea

$$y - \sqrt{y^2+k} = \frac{k}{c}(x - \sqrt{x^2+1})$$

Din acestea două avem

$$y = \frac{1}{2}c(x + \sqrt{x^2+1}) + \frac{k}{2c}(x - \sqrt{x^2+1})$$

deci

$$z=\sqrt{y^2+k}=c(x+\sqrt{x^2+1})-y=\frac{1}{2}c(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{k}{2c}(x-\sqrt{x^2+1}).$$

Acestea sunt ecuațiile caracteristicelor. Ținând cont că se cer acele caracteristice care conțin curba dată obținem

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}c(x_0+\sqrt{x_0^2+1})+\dfrac{k}{2c}(x_0-\sqrt{x_0^2+1}) \\ 2y=\dfrac{1}{2}c(x_0+\sqrt{x_0^2+1})-\dfrac{k}{2c}(x_0-\sqrt{x_0^2+1}) \end{cases}$$

de unde

$$c=\frac{3x_0}{x_0\sqrt{x_0^2+1}},k=3x_0$$

şi deci ele sunt

$$\begin{cases} y=\dfrac{3x_0}{2(x_0+\sqrt{x_0^2+1})}(x+\sqrt{x^2+1})+\dfrac{x_0(x_0+\sqrt{x_0^2+1})}{2}(x-\sqrt{x^2+1}) \\ z=\dfrac{3x_0}{2(x_0+\sqrt{x_0^2+1})}(x+\sqrt{x^2+1})-\dfrac{x_0(x_0+\sqrt{x_0^2+1})}{2}(x-\sqrt{x^2+1}) \end{cases}$$

Suprafața integrală se obține eliminând x_0 între aceste ecuații şi are ecuația

$$y+z=\frac{3\sqrt{z^2-y^2}}{\sqrt{z^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2+3}}(x+\sqrt{x^2+1}).$$

4.2.3. Să se rezolve ecuația

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\partial u}{\partial x_k}=0$$

Soluție: Sistemul caracteristic al ecuației cu derivate parțiale este

$$\frac{dx_1}{a_1}=\frac{dx_2}{a_2}=\ldots=\frac{dx_n}{a_n}$$

şi admite combinațiile integrabile $\frac{dx_1}{a_1} - \frac{dx_k}{a_k} = 0, k = \overline{2,n}$, cu integralele prime $\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_k}{a_k} = c_k, k = \overline{2,n}$, echivalente cu $a_k x_1 - a_1 x_k = C_k$, $k = \overline{2,n}$, C_k constante.

Prin urmare, soluția generală a ecuației este dată de

$$u = \Phi(a_2x_1 - a_1x_2, a_3x_1 - a_1x_3, ..., a_nx_1 - a_1x_n).$$

4.2.4. Rezolvați ecuația

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Soluția: Sistemul caracteristic este

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Combinația integrabilă $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ conduce la integrala primă de forma

$$\frac{x}{y} = c_1,\ c_1 \text{ constant.}$$

În continuare se consideră sistemul echivalent cu cel anterior

$$\frac{-xdx - ydy}{-x^2 - y^2} = \frac{(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})dz}{-(x^2 + y^2)},$$

de unde $xdx + yd + zdz = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dz$ şi de aici rezultă combinația integrabilă

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + dz = 0$$

având integrala primă $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z = c_2$, c_2 constant.

Soluția generală a ecuației inițiale va fi

$$u = \Phi(\frac{x}{y}, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z).$$

4.2.5. Să se rezolve ecuația

$$(x-z)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial u}{\partial y}+2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

Soluție: Sistemul caracteristicilor este

$$\frac{dx}{x-z}=\frac{dy}{y-z}=\frac{dz}{2z}.$$

Având în vedere primul și ultimul raport se obține $\frac{dx+dz}{x+z}=\frac{dz}{2z}$, care conduce la combinația integrabilă $\frac{d(x+z)}{x+z}=\frac{1}{2}\frac{dz}{z}$ și la integrala primă $\frac{(x+z)^2}{z}=c_1$, c_1 constant.

Analog, din ultimele două rapoarte rezultă combinația integrabilă $\frac{d(y+z)}{y+z}=\frac{1}{2}\frac{dz}{z}$ cu integrala primă $\frac{(y+z)^2}{z}=c_2$, c_2 constant.

Soluția generală va fi dată prin urmare de

$$u=\Phi\left(\frac{(x+z)^2}{z},\frac{(y+z)^2}{z}\right).$$

4.2.6. Să se integreze ecuația

$$(x_1-x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+(x_1-x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}+(x_1-x_2+1)(x_3-x_4)\frac{\partial u}{\partial x_3}+(x_3-x_4)\frac{\partial u}{\partial x_4}=0$$

Soluție: Sistemul caracteristic de ecuații diferențiale

$$\frac{dx_1}{x_1-x_2}=\frac{dx_2}{x_1-x_2}=\frac{dx_3}{(x_1-x_2+1)(x_3-x_4)}=\frac{dx_4}{x_3-x_4}$$

conduce, ținând cont de primele două rapoarte, la integrala primă de forma $x_1-x_2=c_1$, c_1 constant, și, scăzând ultimele două rapoarte, la egalitatea

$$\frac{dx_3-dx_4}{(x_1-x_2)(x_3-x_4)}=\frac{dx_2}{x_1-x_2}$$

de unde rezultă combinația integrabilă $\dfrac{d(x_3 - x_4)}{x_3 - x_4} = dx_2$ cu integrala primă $(x_3 - x_4)e^{-x_2} = c_2$, c_2 constant. Ținând cont de sistemul caracteristic, rezultă şi următoarea combinație integrabilă

$$\frac{x_4 d(x_1 - x_2 + 1) + (x_1 - x_2 + 1)dx_4}{(x_1 - x_2 + 1)(x_3 - x_4)} = \frac{dx_2}{(x_1 - x_2 + 1)(x_3 - x_4)},$$

care conduce la integrala primă $(x_1 - x_2 + 1)x_4 - x_3 = c_3$, c_3 constant.

Atunci, soluția generală a ecuației inițiale va fi dată de

$$u = \Phi(x_1 - x_2, (x_3 - x_4)e^{-x_2}, (x_1 - x_2 + 1)x_4 - x_3).$$

4.2.7. Să se rezolve ecuația

$$(y^m - z^p)\frac{\partial u}{\partial x} + (z^p - x^n)\frac{\partial u}{\partial y} + (x^n - y^m)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,\ m, n, p \in \mathbf{R} - \{-1\}$$

Soluție: Scriem sistemul simetric al caracteristicilor

$$\frac{dx}{y^m - z^p} = \frac{dy}{z^p - x^n} = \frac{dz}{x^n - y^m}.$$

Ținând cont, pe rând, de proprietățile unui şir de rapoarte egale se obțin combinațiile integrabile $dx + dy + dz = 0$ şi $x^n\, dx + y^m\, dy + z^p\, dz = 0$, care conduc, respectiv, la integralele prime $x + y + z = c_1$ şi $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \dfrac{y^{m+1}}{m+1} + \dfrac{z^{p+1}}{p+1} = c_2$, unde c_1 şi c_2 sunt constante.

Soluția generală a ecuației inițiale va fi dată deci de

$$u = \Phi\left(x + y + z, \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{y^{m+1}}{m+1} + \frac{z^{p+1}}{p+1}\right).$$

4.2.8. Să se rezolve problema Cauchy corespunzătoare următoarei ecuații cu derivate parțiale

$$(z - y)^2 \frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial z} = 0, f(0, y, z) = 2y(y - z).$$

Soluție: Sistemul caracteristic de ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{(z - x)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

este echivalent cu următoarele relații $ydy = zdz$ și $(z - y)d(y - z) = dx$. Prin integrare se obține $y^2 - z^2 = c_1$ și $(y - z)^2 + 2x = c_2$.

Atunci, soluția generală a ecuației este dată de

$$f(x, y, z) = F(y^2 - z^2, (y - z)^2 + 2x).$$

4.2.9. Să se integreze ecuația cu derivate parțiale

$$u(x+u)\frac{\partial u}{\partial x} - y(y+u)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

știind că pentru $x = 1$ se reduce la $u = \sqrt{y}$.

Soluție: Sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{u(x+u)} = \frac{dy}{-y(y+u)}$$

mai poate fi scris sub următoarea formă

$$\frac{1}{x+u}dx = \frac{1}{y+u}dy - \frac{1}{y}dy,$$

de unde, prin integrare, rezultă

$ln(x+u) = ln\frac{y+u}{y} + lnC$ sau, echivalent, $\frac{y(x+u)}{y+u} = C$, C constant.

Ținând cont de condițiile inițiale, pentru $x = 1$ și $y = u^2$ se obține relația $(1 + u)u^2 = C(u + u^2)$ care conduce la $u = C$, C constant. Atunci, din egalitatea $y(x + u) = u(y + u)$, se obține integrala ecuației date

$$u^2 = xy.$$

4.2.10. Să se determine integrala generală a ecuației

$$\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

și apoi soluția particulară, care, pentru $z = 1$, verifică relația $u = x - y$.

Soluție: Prin integrarea ecuațiilor diferențiale ale caracteristicilor care formează următorul sistem simetric

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

se obțin integralele prime $\sqrt{x} - \sqrt{z} = c_1$ și $\sqrt{y} - \sqrt{z} = c_2$, c_1, c_2 constante.

Prin urmare, integrala generală a ecuației inițiale va fi dată de

$$u = \Phi(\sqrt{x} - \sqrt{z}, \sqrt{y} - \sqrt{z}).$$

În cazul în care $z = 1$, se obține $x = (c_1 + 1)^2$ şi $y = (c_2 + 1)^2$. Cum însă $u = x - y$, va rezulta soluția particulară a ecuației date, şi anume

$$u = (\sqrt{x} - \sqrt{z} + 1)^2 - (\sqrt{y} - \sqrt{z} + 1)^2.$$

4.2.11. Să se rezolve ecuația

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z\sqrt{x^2 + y^2}$$

Soluție: Sistemul caracteristic este

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z\sqrt{x^2 + y^2}},$$

deci din egalitatea primelor două rapoarte rezultă integrala primă $\frac{x}{y} = c_1$, c_1 constant. În continuare, amplificând primul raport cu x şi pe al doilea cu y şi adunând numărătorii, respectiv numitorii, rezultă

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}dz}{z(x^2 + y^2)} \text{ sau } \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{dz}{z},$$

care conduce la integrala primă $\sqrt{x^2 + y^2} = \ln z + c_2$, c_2 constant.

Atunci, integrala generală a ecuației date este dată de

$$\Phi(\frac{x}{y}, \sqrt{x^2 + y^2} - \ln z) = 0.$$

4.2.12. Să se integreze ecuația

$$(y + z + u)\frac{\partial u}{\partial x} + (z + u + x)\frac{\partial u}{\partial y} + (u + x + y)\frac{\partial u}{\partial z} = x + y + z$$

Soluție: Sistemul caracteristic de ecuații diferențiale este

$$\frac{dx}{y + z + u} = \frac{dy}{z + u + x} = \frac{dz}{u + x + y} = \frac{du}{x + y + z}.$$

Având în vedere primele două şi ultimele rapoarte, prin scăderea numărătorilor şi numitorilor, rezultă combinația integrabilă

$\frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{d(z-u)}{z-u}$ şi în continuare integrala primă $\frac{x-y}{z-u} = c_1$, c_1 fiind constant.

Analog, combinând tot câte două rapoartele din sistemul caracteristicilor, se obțin încă două combinații integrabile, cu integralele prime corespunzătoare

$$\frac{d(x-z)}{x-z} = \frac{d(y-u)}{y-u}, \text{ de unde } \frac{x-z}{y-u} = c_2, \ c_2 \text{ constant.}$$

$$\frac{d(x-u)}{x-u} = \frac{d(y-z)}{y-z}, \text{ de unde } \frac{x-u}{y-z} = c_3, \ c_3 \text{ constant.}$$

Integrala generală a ecuației inițiale va fi dată de

$$\Phi\left(\frac{x-y}{z-u}, \frac{x-z}{y-u}, \frac{x-u}{y-z}\right) = 0.$$

4.2.13. Să se rezolve ecuația

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = -x(1+x^2)$$

Soluție: Având în vedere sistemul caracteristicilor

$$\frac{dx}{xy} = -\frac{dy}{y^2} = -\frac{dz}{x(1+x^2)},$$

din prima egalitate de rapoarte se obține combinația integrabilă $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$, cu integrala primă $xy = c_1$, c_1 constant.

Privind primul și ultimul raport și ținând cont de rezultatul anterior, avem egalitatea $\frac{dx}{c_1} = -\frac{dz}{x(1+x^2)}$, echivalentă cu combinația integrabilă $(x + x^3)dx = -c_1\,dz$, care conduce la integrala primă $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + c_1 z = c_2$, c_2 constant. Prin urmare, soluția generală a ecuației inițiale va fi dată de

$$\Phi\left(xy, \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + xyz\right) = 0.$$

4.2.14. Să se integreze ecuația

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = pz$$

unde p este o constantă.

Soluție: Sistemul caracteristic de ecuații diferențiale

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{pz}$$

are următoarele integrale independente

$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \frac{x_2}{x_n} = c_2, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}, \frac{z}{x_n^p} = c_n$, $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n$ constante.

prin urmare soluția z a ecuației inițiale se determină din

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{z}{x_n^p}\right) = 0$$

de unde rezultă

$$z = x_n^p \Psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

4.2.15. Să se afle suprafața integrală a ecuației

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

care satisface ecuația

$$z = \frac{1}{y^2} \quad \text{pentru } x = 1$$

Soluție: Ecuațiile diferențiale ale caracteristicelor sunt

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2} \end{cases}$$

Din acestea rezultă ecuațiile caracteristicelor

$$\begin{cases} z = -\dfrac{1}{x} + c_1 \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x} + c_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

Caracteristicele care satisfac condiția dată îndeplinesc $c_1 = c_2^2 + 2c_2 + 2$ şi deci ele sunt de forma

$$\begin{cases} z = -\dfrac{1}{x} + c_2^2 + 2c_2 + 2 \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x} + c_2 \end{cases}$$

Suprafața integrală se obține eliminând c_2 între aceste două ecuații şi va fi

$$z = -\frac{1}{x} + 1 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} + 1\right)^2$$

deci

$$z = \frac{1}{y^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{2}{y} + 2.$$

4.2.16. Determinați suprafețele integrale ale ecuației cu derivate parțiale

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = -xy$$

care trec prin curbele de ecuații $y = x^2$ şi $z = x^3$.

Soluție: Sistemul caracteristicilor se scrie

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = -\frac{dz}{xy}.$$

Din combinația integrabilă $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$ rezultă integrala primă $\dfrac{x}{y} = c_1$, c_1 constant şi, în continuare, ştiind că integrala generală trece prin curba de ecuație $y = x^2$, rezultă că $\dfrac{1}{x} = c_1$.

Amplificând primul raport cu y, pe al doilea cu x şi ținând cont de o proprietate a unui şir de rapoarte egale obținem

$$\frac{ydx + xdy}{2xyz} = -\frac{dz}{xy} \text{ sau } d(xy) = -2zdz,$$

de unde, prin integrare, rezultă a doua integrală primă $xy + z^2 = c_2$, c_2 constant.

Prin urmare s-au obținut următoarele ecuații ale caracteristicilor, având în vedere şi ecuațiile curbelor prin care trece integrala generală a ecuației inițiale

$$x = \frac{1}{c_1},\ xy + z^2 = c_2,\ y = \frac{1}{c_1^2}\ ,\ z = \frac{1}{c_1^3},\ c_1,\ c_2 \text{ constante.}$$

Se urmăreşte eliminarea constantelor între ecuațiile anterioare şi, prin urmare, se obține următoarea relație între c_1 şi c_2

$$\frac{1}{c_1^3} + \frac{1}{c_1^6} = c_2,$$

de unde, în continuare, se obțin suprafețele integrale ale ecuației inițiale, în condițiile date

$$(\frac{y}{x})^3 + (\frac{y}{x})^6 = xy + z^2.$$

4.2.17. Să se integreze ecuația

$$2chx\frac{\partial z}{\partial x} + 2yshx\frac{\partial z}{\partial y} = zshx$$

şi să se afle suprafața integrală care conține dreapta de ecuație $x = y = z$.

Soluție: Scriem sistemul caracteristicilor ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{dx}{2chx} = \frac{dy}{2yshx} = \frac{dz}{zshx},$$

de unde se obțin două combinații integrabile

$$\frac{shx}{chx}dx = \frac{1}{y}dy \text{ şi } \frac{1}{y}dy = 2\frac{1}{z}dz,$$

având integralele prime

$$y = c_1\, chx, \text{ respectiv } z^2 = c_2\, y,\ c_1,\ c_2 \text{ constante.}$$

Integrala generală a ecuației inițiale este prin urmare

$$\Phi(\frac{y}{chx},\frac{z^2}{y})=0 \text{ sau } z^2 = y\Psi(\frac{y}{chx}).$$

Pentru determinarea suprafeței particulare ce trece prin dreapta dată de $x = y = z$, considerând integralele prime determinate anterior, se obține $x^2 = c_2 x$, de unde $x = c_2$. Între constantele c_1 și c_2 vom avea deci relația $c_2 = c_1 chx$, obținându-se de aici suprafața de ecuație

$$z^2 = \frac{y^2}{chx} ch\frac{z^2}{y}.$$

4.2.18. Rezolvați ecuația

$$x(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2y^2(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - u) = 0$$

și determinați apoi o suprafață integrală care conține cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 1, u = 2$.

Soluție: Ecuația mai poate fi scrisă sub forma

$$(x^3 + 3xy^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3\frac{\partial u}{\partial y} = 2y^2 u,$$

fiind o ecuație cu derivate parțiale cvasiliniară. Sistemul caracteristic este

$$\frac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{du}{2y^2 u}.$$

Combinația integrabilă $\frac{dy}{y} = \frac{du}{u}$ conduce la integrala primă $\frac{u}{y} = c_1$, c_1 constant. Amplificăm primul raport cu y, pe al doilea cu x și dintr-o proprietate a proporțiilor va rezulta

$$\frac{ydx - xdy}{xy(x^2 + y^2)} = \frac{dy}{2y^3}.$$

Făcând schimbarea de variabilă $y = tx$ se obține $x = \frac{y}{t}$ și $dx = \frac{tdy - y}{t^2}$.

Atunci, prin înlocuire în egalitatea anterioară, rezultă

$$\frac{y\dfrac{tdy-y}{t^2}-\dfrac{y}{t}dy}{\dfrac{y^2}{t}\left(\dfrac{y^2}{t^2}+y^2\right)}=\frac{dy}{2y^3},$$

iar după efectuarea calculelor se obține ecuația cu variabile separabile

$$\frac{dy}{y}=-\frac{2t}{1+t^2}.$$

Prin integrarea acesteia rezultă $y(1 + t^2) = c_2$, c_2 constant şi, mai departe, prin revenire la schimbarea de variabilă efectuată

$$y(x^2 + y^2) = c_2x^2.$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației inițiale este

$$\Phi\left(\frac{u}{y},\frac{y(x^2+y^2)}{x^2}\right)=0 \text{ sau } u=y\Psi\left(\frac{y(x^2+y^2)}{x^2}\right).$$

Pentru obținerea soluției particulare luăm în considerare relațiile $x^2 + y^2 = 1$, $u = 2$ de unde rezultă $\frac{2}{y}=c_1$, deci $y=\frac{2}{c_1}$, şi $y=c_2\left(1-\frac{4}{c_1^2}\right)$. Se obține de aici legătura dintre constantele c_1 şi c_2 dată de egalitatea

$$\frac{2}{c_1}=c_2\left(1-\frac{4}{c_1^2}\right).$$

Va rezulta în continuare ecuația integralei particulare

$$\frac{2}{\dfrac{u}{y}}=\frac{y(x^2+y^2)}{x^2}\left(1-\frac{4}{\dfrac{u^2}{y^2}}\right)$$

sau, echivalent, după efectuarea calculelor

$$x^2u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(u^2-4y^2).$$

4.2.19. Scrieți ecuația cu derivate parțiale pentru următoarea suprafață $u(x, y) = x^3 y^2 - xy$, $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$.

Soluție: Se calculează derivatele parțiale ale funcției u în raport cu x şi y, obținându-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2 - y \text{ şi } \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y - x.$$

Prin urmare ecuația cu derivate parțiale a cărei soluție este suprafața dată este

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} - 3y\frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

4.2.20. Să se determine ecuația cu derivate parțiale ale familiei de suprafețe $u(x, y) = 2axy + by^2$, a şi b fiind parametri reali.

Soluție: Rezolvarea constă în eliminarea parametrilor a şi b din următorul sistem de ecuații

$$\begin{cases} u = 2axy - by^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2ay \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2ax + 2by \end{cases}.$$

Din a doua ecuație se obține $a = \frac{1}{2y}\frac{\partial u}{\partial x}$ şi apoi, după înlocuirea în a treia relație, rezultă $b = -\frac{1}{2y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{x}{2y^2}\frac{\partial u}{\partial x}$. Prin urmare, înlocuind pe a şi b în prima egalitate, se deduce că ecuația cu derivate parțiale căutată este

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u.$$

4.2.21. Rezolvați următorul sistem de ecuații

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = ux - x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = uy - y \end{cases}$$

necunoscuta fiind funcția u de variabile independente x şi y.

Soluție: Verificăm dacă sistemul are soluție, adică dacă este îndeplinită condiția de compatibilitate a sistemului

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Se observă că $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x\frac{\partial u}{\partial y} = xyu - xy$ şi $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = y\frac{\partial u}{\partial x} = xyu - xy$, prin urmare sistemul este compatibil.

Considerăm prima ecuație pe care o rezolvăm în raport cu x, presupunând că y este un parametru şi obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x(u-1) \text{ sau } u' - xu = x,$$

care este o ecuație liniară neomogenă, cu soluțiile de forma $u = \varphi(y)e^{\frac{x^2}{2}} + 1$, φ fiind o funcție arbitrară în necunoscuta y.

Ținând cont că funcția u determinată anterior satisface şi a doua ecuație a sistemului avem $u' = \varphi'(y)e^{\frac{x^2}{2}}$ şi în continuare

$$\varphi'(y)e^{\frac{x^2}{2}} = y\varphi(y)e^{\frac{x^2}{2}} \text{ sau } \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = y,$$

care este o ecuație cu variabile separabile cu soluția $\varphi(y) = Ce^{\frac{y^2}{2}} + 1$.

Prin urmare, soluțiile sistemului inițial sunt

$$u(x,y) = Ce^{\frac{x^2+y^2}{2}} + 1, \ C \text{ constant.}$$

4.2.22. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = u + xy \\ \frac{\partial u}{\partial y} = u - \frac{x^2 y}{2} \end{cases}$$

Soluție: Verificăm condiția de compatibilitate a sistemului

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Cum $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + y = u - \frac{x^2 y}{2} + y$ şi $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - xy = u$, ar rezulta $y = \frac{x^2 y}{2}$, ceea ce nu convine. Prin urmare sistemul nu este compatibil.

4.2.23. Determinaţi soluţiile sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u^2}{2} + uy \\ \frac{\partial u}{\partial y} = ux + u \end{cases}$$

Soluţie: Din condiţia de compatibilitate a sistemului

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

cum $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u\frac{\partial u}{\partial y} + u$ şi $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u + x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}$, se obţine în continuare

$$u^2 x + u^2 + u = u + \frac{xu^2}{2} + uxy + \frac{u^2}{2} + uy$$

de unde rezultă $\quad u[u(x + 1) - 2xy - 2y] = 0.$

Se deduce de aici că funcţiile care ar putea fi soluţii ale sistemului dat sunt $u(x, y) = 0$ şi $u(x, y) = 2y$. Printr-o verificare simplă rezultă că singura soluţie este $u(x, y) = 0$.

4.3. Probleme propuse

Să se rezolve următoarele ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul 1, liniare, omogene şi neomogene:

4.3.1. $\quad x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0, f(1, y) = y^2$

Răspuns: $f(x, y) = x^2 y^2$.

4.3.2. $\quad (1 + x^2)\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} = 0, f(0, y) = y^2$

Răspuns: $f(x,y) = \dfrac{y^2}{1+x^2}$.

4.3.3. $bxy^2 \dfrac{\partial f}{\partial x} - ax^2 y \dfrac{\partial f}{\partial y} + z(by^2 - ax^2)\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, a,b = const, xy \neq 0$

Răspuns: $f(x,y,z) = \Phi(ax^2 + by^2, \dfrac{z}{xy})$.

4.3.4. $$z\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0, z \neq 0$$

Răspuns: $\Phi(z, \dfrac{x}{z} + y) = 0$.

4.3.5. $y(3x^2 + y^2 + z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2x(x^2 + z^2)\dfrac{\partial z}{\partial y} - 2xyz = 0, z \neq 0$

Răspuns: $x^2 + y^2 + z^2 = z\Phi(\dfrac{2x^2 + y^2}{z^2})$.

4.3.6. $$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0, a, b \in \mathbf{R}$$

Răspuns: $u = \Phi(bx + ay)$.

4.3.7. $$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Răspuns: $u = \Phi(\dfrac{x}{y})$.

4.3.8. $$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Răspuns: $u = \Phi(x^2 + y^2)$.

4.3.9. $$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

Răspuns: $u = \Phi(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}, \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_3}, \ldots, \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_n})$.

4.3.10. $$z\frac{\partial u}{\partial x}+xy\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

Răspuns: $u = \Phi(x^2 - z^2 , ye^{-z}).$

4.3.11. $$2x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}+z^3\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

Răspuns: $u = \Phi(y\sqrt{x}, xe^{\frac{1}{z^2}}).$

4.3.12. Să se afle suprafața integrală a ecuației $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$ care satisface ecuația $z=y^2+1$ pentru $x = 2$.

Răspuns: $z=\frac{4y^2+x^2}{2x}-2y\ln\frac{2y}{x}+xy\ln y.$

4.3.13. $$8xz\frac{\partial u}{\partial x}+2yz\frac{\partial u}{\partial y}+(4x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

Răspuns: $u = \Phi(\frac{x}{y^4}, x^2+y^2-2z^2).$

4.3.14. $$\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x}+2\sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z+1}\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

Răspuns: $u = \Phi(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{y}}{2}, \sqrt{x}-\sqrt{z+1}).$

4.3.15. Să se determine suprafața integrală a ecuației

$$z\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial z}{\partial y}=y-x$$

care satisface ecuația $z=y^2$ pentru $x = 1$.

Răspuns: $z^2 - (y + x - 1)^4 + 2(y + x - 1) - 2xy = 0.$

4.3.16. Determinați soluția ecuației $2x\frac{\partial u}{\partial x}-3y\frac{\partial u}{\partial y}=0$ care îndeplineşte condiția inițială $u(2, y) = y^2 + 1$.

Răspuns: $u(x,y)=\frac{1}{8}x^3y^2+1.$

4.3.17. $$xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = x$$

Răspuns: $\Phi(\frac{x}{y}, u^2 - 2x) = 0$.

4.3.18. Să se rezolve ecuația cu derivate parțiale $xy\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} = x^2$ știind că dacă $y = x^2$ avem $u = e^x$.

Răspuns: $u = \frac{x^2}{3y} - \frac{1}{3} + e^{\sqrt[3]{xy}}$.

4.3.19. Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = -xy \\ u(x,2) = x \end{cases}$$

Răspuns: $u^2 = 4\frac{x^2}{y^2} + 4\frac{x}{y} - xy$.

4.3.20. Determinați soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} 2xu\frac{\partial u}{\partial x} + 2yu\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 - x^2 - y^2 \\ u(x,1) = x \end{cases}$$

Răspuns: $u^2 = 2\frac{x^2}{y} - x^2 - y^2 + y$.

4.3.21. Să se rezolve sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = u \\ \frac{\partial u}{\partial y} = ux \end{cases}$$

Răspuns: $u(x, y) = 0$.

4.3.22. Rezolvați sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = u - y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = ux + x \end{cases}$$

Răspuns: Sistemul este incompatibil.

4.3.23. Să se rezolve următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2\dfrac{u}{x} + 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 \end{cases}$$

Răspuns: $u(x, y) = x^2 y - x + Cx^2$, C constant.

4.3.24. Să se scrie ecuația cu derivate parțiale care are soluția de forma $u(x, y) = x \ln y - \dfrac{y}{x}$.

Răspuns: $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x.$

4.3.25. Să se determine ecuația cu derivate parțiale ale familiei de suprafețe $u(x, y) = a(x^2 - 1) + (b - 1)y$, a și b fiind parametri reali.

Răspuns: $(x^2 - 1)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xu.$

Capitolul 5. ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL DOI. ECUAȚIILE FIZICII MATEMATICE

5.1. Probleme rezolvate

Ecuații cu derivate parțiale de ordinul 2 de tip hiperbolic

5.1.1. Să se rezolve problema oscilațiilor libere ale coardei de lungime l, cu capete fixe, ştiind că vitezele inţiale ale punctelor sale sunt egale cu zero, iar deplasarea inițială are forma sinusoidei de ecuație

$$u_0(x) = A\,sin\frac{n\pi x}{l},\ n \in \mathbf{Z},\ A \in \mathbf{R}.$$

Soluție: Suntem în cazul problemei omogene a coardei, nesupusă la forțe exterioare şi fixată la extremități. Atunci, ecuația coardei, împreună cu condițiile Cauchy – Dirichlet, va fi de forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = A\,sin\dfrac{n\pi x}{l} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases} \quad \text{unde } x \in [0,l], t \geq 0, n \in \mathbf{Z}.$$

Pentru a rezolva ecuația aplicăm metoda lui Fourier, numită şi metoda separării variabilelor. Prin urmare, căutăm soluții de forma

$$u(t, x) = T(t)\,X(x).$$

Atunci se obține

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = T'X$, de unde $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T''X$, respectiv $\dfrac{\partial u}{\partial x} = TX'$ şi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = TX''$.

Ecuația coardei se poate scrie $T''X = a^2 TX''$. Prin separarea vabiabilelor va rezulta $\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X}$. Cum membrul stâng este o funcție în *t*, iar membrul drept o funcție în *x*, pentru ca egalitatea fie adevărată, se impune ca ambii membri ai egalității să fie egali cu o constantă, pe care o notăm $-\lambda a^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$ .Va rezulta atunci

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X} = -\lambda a^2,$$

iar în continuare

(1) $$X'' + \lambda X = 0$$

(2) $$T'' + a^2 \lambda T = 0.$$

În cele ce urmează, vom determina pentru ecuația coardei soluții nenule, deoarece am exclus poziția de repaus a coardei, pentru că nu verifică condițiile Cauchy - Dirichlet.

Problema determinării soluțiilor ecuației (1) cu condițiile la limită $X(0) = X(l) = 0$ se numeşte problema valorilor proprii sau problema Sturm - Liouville.

Pentru rezolvarea ecuației (1) se determină soluțiile ecuației caracteristice $r^2 + \lambda = 0$. Se tratează în continuare următoarele cazuri:

a. dacă $\lambda < 0$, rădăcinile ecuației caracteristice sunt $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$, iar soluțiile ecuației (1) vor fi de forma $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, unde c_1, c_2 sunt constante. Din condițiile la limită nule $X(0) = X(l) = 0$ va rezulta $c_1 = c_2 = 0$, ceea ce conduce la soluția nulă a problemei, care nu convine;

b. dacă $\lambda = 0$, rădăcinile ecuației caracteristice sunt $r_{1,2} = 0$, soluțiile ecuației (1) fiind de forma $X(x) = c_1 + c_2 x$, c_1, c_2 constante. Condițiile la limită nule $X(0) = X(l) = 0$ vor conduce la $c_1 = c_2 = 0$, deci din nou la soluția banală a problemei, ceea ce nu convine;

c. dacă $\lambda > 0$, rădăcinile ecuației caracteristice vor fi $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$, de unde soluțiile ecuației (1) se scriu

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \; c_1, c_2 \text{ fiind constante.}$$

Ținând cont de condițiile la limită nule $X(0) = X(l) = 0$, rezultă $c_1 = 0$ și $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, de unde $\sqrt{\lambda}l = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Cum $\lambda > 0$ și $l > 0$, vom avea $k \geq 1$. Atunci, valorile proprii obținute vor fi de forma

$$\lambda_k = (\frac{k\pi}{l})^2, k \geq 1,$$

iar funcțiile proprii corespunzătoare

$$X_k(x) = c_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$, c_k constante, $k \geq 1$.

Cu valorile proprii determinate anterior vom rezolva în continuare ecuația (2). Ecuația sa caracteristică $r^2 + (\frac{ak\pi}{l})^2 = 0$ are rădăcinile $r_{1,2} = \pm i\frac{ak\pi}{l}$. Soluțiile ecuației (2) vor fi atunci de forma

$$T_k(t) = A_k' \cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k' \sin\frac{ak\pi t}{l},\ A_k', B_k' \text{ constante, } k \geq 1.$$

Cum funcțiile $u_k(t, x) = T_k(t)\, X_k(x)$ verifică ecuația coardei şi condițiile la limită, soluția acesteia va fi scrisă sub forma

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin\frac{ak\pi t}{l}) \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Coeficienții A_k şi B_k se determină, având-se în vedere condițiile Cauchy, din relațiile

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l u(0,x) \sin\frac{k\pi x}{l} dx$$

şi
$$B_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) \sin\frac{k\pi x}{l} dx.$$

În cazul problemei de față vom obține

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l A \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{k\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, k \neq n \\ A, k = n \end{cases}$$

şi
$$B_k = 0.$$

Deci, ecuația coardei va avea soluția

$$u(t,x) = A \cos\frac{an\pi t}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

5.1.2. Rezolvaţi problema oscilaţiilor libere ale unei coarde vibrante omogene de lungime l, cu capetele fixate, ştiind că deplasarea iniţială are forma parabolei a cărei axă de simetrie este dreapta de ecuaţie $x = \frac{l}{2}$ şi al cărei vârf este punctul $M(\frac{l}{2}, h)$, $h > 0$ iar vitezele inţiale ale punctelor sunt nule.

Soluţie: Se determină pentru început ecuaţia parabolei care descrie poziţia inţială a coardei, şi anume $y = ax^2 + bx + c$, a, b, $c \in \boldsymbol{R}$, unde $x \in [0, l]$, lungimea coardei fiind l. Punând condiţiile din problemă şi ştiind că este vorba de o coardă fixată la capete, adică în punctele $O(0, 0)$ şi $A(l, 0)$, se obţine următorul sistem

$$\begin{cases} a\dfrac{l^2}{4} + b\dfrac{l}{2} + c = h \\ c = 0 \\ al^2 + bl + c = 0. \end{cases}$$

Rezultă de aici că $a = -\frac{4h}{l^2}$, $b = \frac{4h}{l}$ şi $c = 0$, de unde se obţine deplasarea inţială a punctelor coardei de ecuaţie

$$u(0,x) = -\frac{4h}{l}\left(\frac{x^2}{l} - x\right).$$

Prin urmare, ecuaţia coardei împreună cu condiţiile Cauchy–Dirichlet, se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = -\dfrac{4h}{l^2} x(x-l) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0. \end{cases} \text{ unde } t \ge 0, x \in [0,l], h > 0$$

Pentru rezolvarea problemei, se aplică metoda lui Fourier, căutându-se soluţii de forma $u(t, x) = T(t)\, X(x)$. Ecuaţia coardei se va scrie atunci $T''X = a^2 TX''$, de unde vom nota $\frac{T''}{T} = a^2\frac{X''}{X} = -\lambda a^2$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$. Se obţin de aici ecuaţiile

(1) $$X'' + \lambda X = 0$$

(2) $$T'' + a^2\lambda T = 0.$$

Pentru rezolvarea ecuației (1) se scrie ecuația sa caracteristică $r^2 + \lambda = 0$. Se obține soluție nenulă pentru problema coardei doar în cazul dacă $\lambda > 0$, de unde $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$. Atunci, soluțiile ecuației (1) se scriu

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x,\ c_1,\ c_2 \text{ fiind constante.}$$

Din condițiile la limită nule $X(0) = X(l) = 0$, rezultă $c_1 = 0$ și $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, de unde $\sqrt{\lambda}l = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Atunci, valorile proprii obținute vor fi de forma

$$\lambda_k = (\frac{k\pi}{l})^2, k \geq 1,$$

iar funcțiile proprii corespunzătoare

$$X_k(x) = c_k \sin\frac{k\pi x}{l},\ c_k \text{ constante, } k \geq 1.$$

Vom rezolva în continuare ecuația (2), având în vedere valorile proprii determinate anterior. Ecuația sa caracteristică $r^2 + (\frac{ak\pi}{l})^2 = 0$ are rădăcinile $r_{1,2} = \pm i\frac{ak\pi}{l}$. Soluțiile ecuației (2) vor fi atunci de forma

$$T_k(t) = A_k' \cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k' \sin\frac{ak\pi t}{l},\ A_k', B_k' \text{ constante, } k \geq 1.$$

Soluția problemei coardei va fi scrisă sub forma

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin\frac{ak\pi t}{l}) \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Avându-se în vedere condițiile Cauchy, coeficienții A_k și B_k se determină astfel

$$A_k = -\frac{8h}{l^2}\int_0^l (\frac{x^2}{l} - x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = -\frac{16h}{k^3\pi^3}[(-1)^k - 1],$$

de unde se disting cazurile $A_{2p} = 0$ și $A_{2p+1} = \frac{32h}{(2p+1)^3\pi^3}$, $p \in \mathbf{N}^*$;

$$B_k = 0.$$

Soluţia problemei iniţiale va fi atunci

$$u(t,x)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

5.1.3. Rezolvaţi problema oscilaţiilor coardei de lungime $l = 1$, fixată la capete, nesupusă la forţe exterioare, ştiind că în poziţia iniţială coarda este în repaus, iar viteza iniţială a punctelor coardei este

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\begin{cases} v_0, x\in[\alpha,\beta] \\ 0, x\notin[\alpha,\beta]\end{cases} \text{ unde } 0\le\alpha<\beta\le 1.$$

Soluţie: Ecuaţia coardei, împreună cu condiţiile Cauchy–Dirichlet, se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0)=u(t,1)=0 \\ u(0,x)=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\begin{cases} v_0, x\in[\alpha,\beta] \\ 0, x\notin[\alpha,\beta]\end{cases}\end{cases}$$

unde $t\ge 0, x\in[0,1], h>0$ şi $0\le\alpha<\beta\le 1$.

Căutând soluţii de forma $u(t, x) = T(t)\,X(x)$, ecuaţia coardei se va scrie $T''X=a^2TX''$, iar apoi vom nota $\dfrac{T''}{T}=a^2\dfrac{X''}{X}=-\lambda a^2$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$. Se obţin de aici ecuaţiile

(1) $$X'' + \lambda X = 0$$

(2) $$T'' + a^2\lambda T = 0.$$

Prima ecuaţie are soluţiile

$X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$, c_1, c_2 fiind constante şi $\lambda>0$.

Condiţiile la limită nule $X(0) = X(1) = 0$, conduc la $c_1 = 0$ şi $\sin\sqrt{\lambda}=0$, de unde $\sqrt{\lambda}=k\pi$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Atunci, valorile proprii obţinute vor fi de forma

$$\lambda_k=k^2\pi^2, k\ge 1,$$

iar funcţiile proprii corespunzătoare

$X_k(x)=c_k\sin k\pi x$, c_k constante, $k\ge 1$.

Având în vedere valorile proprii determinate anterior, soluțiile celei de-a doua ecuații vor fi de forma

$$T_k(t) = A_k' \cos ak\pi t + B_k' \sin ak\pi t\,,\ A_k', B_k' \text{ constante, } k \geq 1.$$

Soluția problemei coardei va fi scrisă sub forma

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos ak\pi t + B_k \sin ak\pi t) \sin k\pi x\,.$$

Pentru a calcula coeficienții A_k şi B_k se au în vedere condițiile Dirichlet, de unde rezultă

$$A_k = 0$$

şi $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} v_0 \sin k\alpha\pi dx = -\dfrac{4v_0}{k^2\pi^2 a}\sin\dfrac{k\pi(\alpha+\beta)}{2}\sin\dfrac{k\pi(\alpha-\beta)}{2}$.

Se va obține astfel soluția problemei date

$$u(t,x) = \sum_{n\geq 1} -\frac{4v_0}{n^2\pi^2 a}\sin\frac{n\pi(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{n\pi(\alpha-\beta)}{2}\sin an\pi t \sin n\pi x\,.$$

5.1.4. Să se determine soluția ecuației coardei cu condițiile Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = 2t+1 \\ u(t,1) = t+2 \quad \text{unde } x \in [0,1], t \geq 0 \\ u(0,x) = x+1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases}$$

Soluție: Problema este omogenă, bara nu este supusă unor forțe exterioare, dar capetele nu mai sunt fixe, ci se deplasează după dreptele de ecuații $y = 2t + 1$, respectiv $y = t + 2$.

Căutăm soluția problemei sub forma $u = v + w$, unde funcția w este definită de relația

$$w(t, x) = 2t + 1 + x[(t + 2) - (2t + 1)] = 2t + 1 - tx + x.$$

Atunci, funcția v va fi de dată de

$$v(t, x) = u(t, x) - 2t - 1 + tx - x$$

şi, după înlocuirea în problema iniţială, va rezulta că este soluţia următoarei probleme omogene a coardei cu condiţiile la limită nule:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(t,0) = v(t,1) = 0 \\ v(0,x) = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(0,x) = x - 2 \end{cases}$$

Această problemă are soluţia de forma

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\pi t + B_k \sin k\pi t) \sin k\pi x,$$

unde

$$A_k = 0 \text{ şi } B_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^1 (x-2) \sin k\pi x dx = \frac{2(-1)^k - 4}{k^2\pi^2}.$$

Atunci

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^k - 2]}{k^2\pi^2} \sin k\pi t \sin k\pi x,$$

rezultând apoi soluţia problemei iniţiale

$$u(t,x) = (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^k - 2]}{k^2\pi^2} \sin k\pi t \sin k\pi x) + 2t - tx + x + 1.$$

5.1.5. Determinaţi soluţia următoarei probleme a coardei vibrante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{unde } x \in [0,\pi], t \geq 0$$

Soluţie: Căutăm soluţii de forma $u(t, x) = T(t) X(x)$ şi atunci ecuaţia coardei se va scrie $T''X = TX'' + TX$, de unde, separând variabilele, vom avea $\dfrac{T''}{T} = \dfrac{X'' + X}{X} = -\lambda$, cu $\lambda \in \mathbf{R}$. Se obţin de aici ecuaţiile

(1) $$X'' + (\lambda + 1)X = 0$$

(2) $$T'' + \lambda T = 0.$$

Prima ecuație are soluțiile

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda+1}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda+1}x,$$

unde $\lambda + 1 > 0$, c_1, c_2 fiind constante. În cazul $\lambda \leq -1$ se obține soluția nulă pentru ecuația inițială, care nu convine.

Condițiile la limită nule $X(0) = X(\pi) = 0$, conduc la $c_1 = 0$ şi $\sin\sqrt{\lambda+1}\pi = 0$, de unde $\sqrt{\lambda+1} = k$, $k \in \mathbf{Z}$. Atunci, valorile proprii obținute vor fi de forma

$$\lambda_k = k^2 - 1, k \geq 1,$$

iar funcțiile proprii corespunzătoare

$$X_k(x) = c_k \sin kx,\ c_k \text{ constante, } k \geq 1.$$

Având în vedere valorile proprii determinate anterior, cea de-a doua ecuație devine $T'' + (k^2 - 1)T = 0$, iar $r_{1,2} = \pm i\sqrt{k^2-1}$ sunt rădăcinile ecuației caracteristice $r^2 + (k^2 - 1) = 0$. Atunci, soluțiile celei de-a doua ecuații vor fi de forma

$$T_k(t) = A_k' \cos t\sqrt{k^2-1} + B_k' \sin t\sqrt{k^2-1},\ A_k', B_k' \text{ constante, } k \geq 1.$$

Soluția ecuației coardei cu condițiile la limită va fi scrisă sub forma

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos t\sqrt{k^2-1} + B_k \sin t\sqrt{k^2-1}) \sin kx,$$

coeficienții A_k şi B_k determinându-se astfel, din condițiile Cauchy

$$A_k = 0 \text{ şi } B_k = \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin kx dx = \frac{1-(-1)^k}{k^2},$$

de unde, funcție de paritatea lui k, avem $B_{2p} = 0$ şi $B_{2p+1} = \dfrac{2}{(2p+1)^2}$.

Prin urmare, soluția problemei date este

$$u(t,x) = 2\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} \sin t\sqrt{(2p+1)^2 - 1} \sin(2p+1)x.$$

5.1.6. Să se determine soluția următoarei probleme a coardei

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4t \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \\ u(0,x) = x^2 - x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases} \quad \text{unde } x \in [0,1], t \geq 0$$

Soluție: Suntem în cazul ecuației neomogene a coardei, supuse la oscilații forțate și având capetele fixe.

Căutăm soluții de forma $u = v + w$, unde v este o soluție a ecuației neomogene care satisface condițiile la limită nule și condițiile inițiale nule

$$v(0,x) = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = 0$$

iar w este soluția ecuației omogene cu condițiile inițiale

$$w(t,0) = w(t,1) = 0$$
$$w(0,x) = x^2 - x$$
$$w_t'(0,x) = 0$$

Soluția w a ecuației omogene este de forma

$$w(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\pi t + B_k \sin k\pi t) \sin k\pi x$$

unde coeficienții A_k și B_k sunt dați de relațiile

$$A_k = 2\int_0^1 (x^2 - x) \sin k\pi x dx = \frac{4(-1)^k}{k^3 \pi^3} \text{ și } B_k = 0,$$

deci

$$w(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^3 \pi^3} \cos k\pi t \sin k\pi x.$$

Dezvoltând funcția $g(t, x) = -4t$ pe intervalul $(0,1)$ în serie Fourier obținem

$$g(t,x) = -4t = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t,x) \sin k\pi x,$$

unde

$$g_k(t,x) = 2\int_0^1 (-4t)\sin k\pi x dx = \frac{8[(-1)^k - 1]}{k\pi} t,$$

deci, funcție de paritatea lui *k*,

$$g_{2l}(t,x) = 0$$

$$g_{2l+1}(t,x) = \frac{16t}{(2l+1)\pi}$$

şi prin urmare funcția *v* se va exprima prin

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin k\pi x$$

unde

$$T_k(t) = \int_0^t g_k(\tau,x)\sin k\pi(t-\tau)d\tau = \frac{t}{k\pi} - \frac{\sin t}{k^2\pi^2}.$$

Soluția problemei date va fi deci

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\{\frac{4(-1)^k}{k^3\pi^3}\cos k\pi t\sin k\pi x + \frac{8[(-1)^k - 1]}{k\pi}(t - \sin t)\sin k\pi x\}.$$

5.1.7. Rezolvați problema coardei vibrante de lungime infinită şi care nu este supusă la perturbații exterioare

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = e^{3x} \quad \text{unde } t \geq 0, x \in \boldsymbol{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = x + 1 \end{cases}$$

Soluție: Pentru determinarea soluției se aplică prima formulă D'Alembert-Euler

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)ds.$$

În cazul problemei de față, $a = 3$, $f(x) = e^{3x}$ şi $g(x) = x + 1$. Va rezulta atunci

$$u(t,x)=\frac{1}{2}[e^{3(x+3t)}+e^{3(x-3t)}]+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t}(s+1)ds=e^{3x}\frac{e^{9t}+e^{-9t}}{2}+xt+t$$

de unde soluţia problemei date va fi

$$u(t,\, x) = e^{3x}\, ch9t + xt + t.$$

5.1.8. Găsiţi soluţia problemei coardei de lungime infinită, supusă la vibraţii întreţinute

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+tx \\ u(0,x)=2-x \qquad \text{unde } t\ge 0, x\in \boldsymbol{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x)=1 \end{cases}$$

Soluţie: Fiind vorba despre ecuaţia neomogenă a coardei vibrante de lungime infinită, aplicăm a doua formulă D'Alembert-Euler

$$u(t,x)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(s)ds+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\varphi(s,y)dyds$$

Pentru problema dată avem $a = \dfrac{1}{2}, f(x) = 2 - x, g(x) = 1$ şi $\varphi(t, x) = tx$.

Atunci vom obţine

$$u(t,x)=\frac{1}{2}(2-x-\frac{t}{2}+2-x+\frac{t}{2})+\int_{x-\frac{t}{2}}^{x+\frac{t}{2}}ds+\int_0^t(\int_{x-\frac{t-s}{2}}^{x+\frac{t-s}{2}}sydy)ds$$

de unde soluţia problemei date va fi

$$u(t,x)=\frac{xt^3}{6}+t-x+2.$$

Ecuații cu derivate parțiale de ordinul 2 de tip parabolic

5.1.9. Să se rezolve problema propagării căldurii într-o bară de lungime l, cunoscând temperatura la momentul inițial în bară şi temperaturile la extremitățile acesteia

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \text{ unde } x \in [0,l], t \geq 0 \\ u(0,x) = x^2 + x \end{cases}$$

Soluție: Problema se referă la ecuația omogenă a căldurii, cu condițiile la limită nule, bara având capete fixe.

Soluția căutată este de forma $u(t, x) = T(t) X(x)$. Ecuația inițială se va scrie scrie atunci $T'X = TX''$, de unde vom nota $\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$, cu $\lambda \in \boldsymbol{R}$. Se obțin de aici ecuațiile

(1) $$X'' + \lambda X = 0$$

(2) $$T' + \lambda T = 0.$$

Pentru rezolvarea ecuației (1) se scrie ecuația sa caracteristică $r^2 + \lambda = 0$. Se obține soluție nenulă pentru problema coardei doar în cazul dacă $\lambda > 0$, de unde $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$. Atunci, soluțiile ecuației (1) se scriu

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \; c_1, c_2 \text{ fiind constante.}$$

Din condițiile la limită nule $X(0) = X(l) = 0$, rezultă $c_1 = 0$ şi $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, de unde $\sqrt{\lambda}l = k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Atunci, valorile proprii obținute vor fi de forma

$$\lambda_k = (\frac{k\pi}{l})^2, k \geq 1,$$

iar funcțiile proprii corespunzătoare

$$X_k(x) = c_k' \sin\frac{k\pi x}{l}, \; c_k' \text{ constante, } k \geq 1.$$

Vom rezolva în continuare ecuația (2). Având în vedere valorile proprii determinate anterior, aceasta se va scrie

$$\frac{T'}{T}=-\frac{k^2\pi^2}{l^2},$$

iar prin integrare se obține

$$T_k(t)=c_k''e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t},\ c_k''\text{ constante, } k\geq 1.$$

Atunci, soluția problemei căldurii va fi scrisă sub forma

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi x}{l},$$

unde coeficienții c_k se determină din condiția Cauchy $u(0, x) = x^2 + x$,

$$c_k=\frac{2}{l}\int_0^l(x^2+x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi}(l^2+l)+\frac{4[(-1)^k-1]}{(k\pi)^3}l^2.$$

5.1.10. Să se determine soluția ecuației căldurii împreună cu condițiile Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-3u\\ u(t,0)=u(t,\pi)=0 \text{ unde } x\in[0,\pi],t\geq 0\\ u(0,x)=x\end{cases}$$

Soluție: Este vorba de problema neomogenă a propagării căldurii într-o bară cu capetele fixate. Căutăm soluția sub forma $u(t, x) = T(t)X(x)$. Notăm

$$\frac{T'}{T}=\frac{X''-3X}{X}=-\lambda,\ \lambda\in\mathbf{R}$$

şi rezolvăm întâi ecuația

$$X''+(\lambda-3)X=0.$$

Problema dată admite soluții nenule doar dacă $\lambda > 3$.

Se obțin valorile proprii

$$\lambda_k=k^2+3, k\geq 1.$$

De asemenea, funcțiile proprii corespunzătoare sunt:

$$X_k(x)=c_k'\sin kx,\ c_k'\text{ constante, } k\geq 1.$$

Rezolvând apoi prin integrare ecuația $T' + \lambda T = 0$ şi ținând cont de valorile proprii determinate, se obține

$$T_k(t) = c_k'' e^{-(k^2+3)t},\ c_k''\ \text{constante},\ k \geq 1.$$

iar apoi soluția problemei inițiale de forma

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-(k^2+3)t} \sin kx,$$

unde

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}.$$

5.1.11. Rezolvați următoarea problemă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = x^2 + 1 \quad \text{unde } x \in [0,1], t \geq 0 \\ u(t,1) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0 \end{cases}$$

Soluția: Funcțiile căutate fiind de forma $u(t, x) = T(t) X(x)$, vom rezolva întâi ecuația $X'' + \lambda X = 0$, obținută în urma aplicării metodei lui Fourier sau a separării variabilelor, cu condițiile la limită $X'(0) = X(1) = 0$.

Problema dată are soluții nenule doar pentru $\lambda > 0$. Se vor obține valorile proprii

$$\lambda_k = [(2k+1)\frac{\pi}{2}]^2,\ k \geq 0.$$

şi funcțiile proprii corespunzătoare

$$X_k(x) = c_k' \cos\frac{(2k+1)\pi}{2} x,\ c_k'\ \text{constante},\ k \geq 0.$$

Ecuația a doua, obținută tot în urma aplicării metodei lui Fourier, $\frac{T'}{T} = -\lambda$, unde λ sunt valorile proprii determinate anterior, are soluțiile

$$T_k(t) = c_k'' e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}t},\ c_k''\ \text{constante},\ k \geq 0.$$

Atunci, soluția problemei date va fi de forma

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}t}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}x,$$

iar coeficienții c_k se vor determina din relația

$$c_k=2\int_0^1(x^2+1)\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}x\,dx=\frac{8(-1)^k}{(2k+1)\pi}-\frac{32(-1)^k}{(2k+1)^3\pi^3}.$$

Prin urmare, rezultă că soluția problemei ințiale este

$$u(t,x)=\sum_{k\ge 0}\left[\frac{8(-1)^k}{(2k+1)\pi}-\frac{32(-1)^k}{(2k+1)^3\pi^3}\right]e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}t}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}x$$

5.1.12. Să se rezolve problema propagării căldurii într-o bară cu capetele nefixate

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u(t,0)=1\\ u(t,1)=1\\ u(0,x)=2\end{cases}\quad \text{unde } x\in[0,1],t\ge 0$$

Soluție: Se caută soluție de forma $u = v + w$, unde

$$w(t, x) = u(t, 0) + x[u(t, 1) - u(t, 0)] = 1.$$

Atunci $u = v + 1$, de unde va rezulta că funcția $v = u - 1$ verifică următoarele relații, adică ecuația căldurii cu condițiile la limită nule

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0\\ v(t,0)=0\\ v(t,1)=0\\ v(0,x)=1\end{cases}$$

Soluția acestei probleme este

$$v(t,x)=\sum_{k\ge 1}c_k e^{-a^2k^2\pi^2t}\sin k\pi x$$

unde

$$c_k = 2\int_0^1 \sin k\pi x dx = \frac{2}{k\pi}[1-(-1)^k].$$

Se va obține atunci soluția problemei ințiale de forma

$$u(t,x) = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2a^2t}\sin(2n+1)\pi x.$$

5.1.13. Să se rezolve problema propagării căldurii într-o bară de lungime infinită

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = e^{-\frac{x^2}{16}} \end{cases} \text{ unde } x \in \boldsymbol{R},\ t \geq 0$$

Soluție: Conform formulei lui Poisson, soluția problemei va fi dată de următoarea relație

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

În cazul problemei date, $a = 2$, $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{16}}$, de unde va rezulta

$$u(t,x) = \frac{1}{4\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{16}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16t}}d\xi$$

şi, prin urmare,

$$u(t,x) = \frac{1}{4\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{16}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16t}}d\xi = \frac{e^{-\frac{x^2}{16t}}}{4\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{16}(\frac{1+t}{t})+\frac{2\xi x}{16t}}d\xi =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{16t}}}{4\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1+t}{t}[\frac{\xi}{4}-\frac{x}{4(1+t)}]^2+\frac{x^2}{16t(1+t)}}d\xi =$$

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{16t}+\frac{x^2}{16t(t+1)}}}{4\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[\sqrt{\frac{t}{1+t}}(\frac{\xi}{4}-\frac{x}{4(1+t)})]^2}d\xi$$

Făcând schimbarea de variabilă $y=\sqrt{\frac{1+t}{t}}[\frac{\xi}{4}-\frac{x}{4(1+t)}]$ se obține $dy=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1+t}{t}}d\xi$ și atunci

$$u(t,x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{16t}}}{\sqrt{t\pi}}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy .$$

Cum $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$, rezultă că soluția problemei inițiale va fi

$$u(t,x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{16(1+t)}}}{\sqrt{1+t}} .$$

5.1.14. Rezolvați problema propagării căldurii într-o bară de lungime infinită

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{unde } x\in \mathbf{R},\ t\geq 0 \\ u(0,x)=2x^3-1 \end{cases}$$

Soluție: Aplicând formula lui Poisson, soluția problemei va fi dată de următoarea relație

$$u(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi ,$$

unde $a = 1$ și $\varphi(x) = 2x^3 - 1$. Vom obține prin urmare

$$u(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(2\xi^3-1)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi .$$

Dacă facem schimbarea de variabilă, $y=\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}}$ se obține $dy=-\frac{1}{2\sqrt{t}}d\xi$ și $\xi=x-2y\sqrt{t}$, iar apoi

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[2(x-2y\sqrt{t})^3-1]e^{-y^2}dy=2x^3-1+12tx .$$

O altă metodă de rezolvare este determinarea soluției problemei conform relației

$$u(t,x)=\sum_{k\geq 0}\frac{t^k}{k!}f^{(2k)}(x),$$

funcția f fiind infinit derivabilă pe $\boldsymbol{R}$. În cazul de față, funcția f este polinomială, şi anume $f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x) = 2x^3 - 1$. Atunci, cum $f''(x) = 12x$ şi $f^{(n)}(x) = 0$, $\forall n \geq 4$ şi $x \in \boldsymbol{R}$, vom obține

$$u(t, x) = 2x^3 + 12tx - 1.$$

Ecuații cu derivate parțiale de ordinul 2 de tip eliptic

5.1.15. Să se scrie ecuația lui Laplace în coordonate polare.

Soluție: Fie ecuația lui Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,,\ u = u(x, y)$$

în coordonatele reale x şi y exprimate în coordonate polare $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$.

Avem relațiile $r^2 = x^2 + y^2$ şi $\varphi = arctg\dfrac{y}{x}$.

Se calculează succesiv derivatele parțiale de ordinul 1 şi ordinul 2 ale funcției u

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi}+$$

$$+\frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{2xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi}+$$

$$+\frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

După înlocuirea în ecuația inițială se obține ecuația lui Laplace în coordonate polare

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0$$

sau echivalent

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0.$$

5.1.16. Să se determine funcția armonică în discul unitate astfel încât pe frontiera acestui disc să ia valoarea $\cos^2\varphi$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

Soluție: Funcția armonică u căutată, în coordonatele reale x şi y, continuă având derivate parțiale de ordinul doi continue, satisface ecuația lui Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Pentru determinarea soluției problemei Dirichlet relative la cerc, aplicăm metoda separării variabilelor. În acest scop vom lucra în coordonate polare (r,φ). Ecuația lui Laplace în coordonate polare, împreună cu condiția Dirichlet pe circumferința discului unitate, se scrie sub forma

$$\begin{cases}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0\\ u(1,\varphi)=\cos^2\varphi\end{cases}\quad \text{unde } 0\le r\le 1,\ \varphi\in[-\pi,\pi].$$

Căutăm soluția problemei sub forma $u(r,\varphi) = Z(r)F(\varphi)$. Înlocuind în ecuația lui Laplace rezultă

$$\frac{1}{r}F\frac{d}{dr}\left(r\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}ZF''=0$$

şi separând variabilele avem

$$r\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dZ}{dr}\right)}{Z}=-\frac{F''}{F}=\lambda,\lambda=const.$$

deoarece membrul stâng depinde numai de r, iar membrul drept numai de φ. Prin urmare, funcțiile Z şi F verifică ecuațiile:

$$\begin{cases} F'' + \lambda F = 0 \\ r\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dZ}{dr}) - \lambda Z = 0 \end{cases}$$

Prima ecuație trebuie să aibă soluție periodică, având perioada 2π, iar aceasta se poate întâmpla numai pentru $\lambda > 0$, când ecuația caracteristică $r^2 + \lambda = 0$ are soluțiile $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$. Atunci obținem

$$F(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi.$$

Din condiția de periodicitate $F(\varphi + 2k\pi) = F(\varphi)$ rezultă că $\sqrt{\lambda}$ este un număr întreg, deci $\sqrt{\lambda} = n \in \mathbf{Z}$. Prin urmare, se va obține

$$F_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\,,\ n \geq 1.$$

Înlocuind acum pe λ în a doua ecuație şi notând $Z(r) = r^{\alpha}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ avem

$$Z'(r) = \alpha r^{\alpha-1}, rZ'(r) = \alpha r^{\alpha}, r(rZ'(r))' = \alpha^2 r^{\alpha},$$

de unde $\alpha^2 r^{\alpha} - n^2 r^{\alpha} = 0$ şi apoi $\alpha^2 = n^2$, deci $\alpha = \pm n$.

Atunci, soluția celei de a doua ecuații va fi

$$Z_n(r) = ar^n + br^{-n}\,,\ n \geq 1.$$

În cazul $n = 0$, rezultă $Z_0(r) = c_0\ln r + c$. Având în vedere că funcția u şi, prin urmare, F şi Z trebuie să fie continue în disc, şi cum

$$\lim_{r\to 0} r^{-n} = \infty$$

$$\lim_{r\to 0} \ln r = -\infty$$

trebuie ca $c_0 = 0$ şi $b = 0$ şi deci

$$Z_0(r) = c,\ Z_n(r) = ar^n,\ n = 1,2,\dots .$$

Prin urmare, vom căuta soluția problemei Dirichlet sub forma seriei

$$u(r,\varphi) = c + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)$$

unde pentru $n \neq 2$ se obține

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos^2 \varphi \cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2\varphi)\cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\varphi d\varphi +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+2)\varphi d\varphi + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-2)\varphi d\varphi = 0$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos^2 \varphi \sin n\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2\varphi)\sin n\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin n\varphi d\varphi +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n+2)\varphi d\varphi + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n-2)\varphi d\varphi = 0$$

$$c = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}$$

iar dacă $n = 2$

$$A_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\varphi\cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2\varphi)\cos 2\varphi d\varphi =$$

$$\frac{1}{4\pi}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 4\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}, B_2 = 0$$

și atunci

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{r^2}{2}\cos 2\varphi .$$

5.1.17. Să se rezolve ecuația

$$\nabla u = - Axy,\ A = const.$$

în discul de rază R cu centrul în origine, cu condiția

$$u\big|_{r=R} = 0$$

Soluție: O soluție particulară a ecuației lui Poisson este

$$v = -\frac{Axy}{12}(x^2+y^2) = -\frac{Ar^4 \sin^2\varphi}{24}$$

și satisface condiția

$$v(R,\varphi) = -\frac{A}{24}R^4 \sin^2 \varphi$$

şi atunci, dacă $u = v + w$, w va fi soluția problemei

$$\nabla w = 0$$

care în coordonate polare revine la

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial w}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0$$

cu condiția la frontieră

$$w(R,\varphi) = \frac{A}{24}R^4 \sin^2 \varphi.$$

După determinarea funcției w după metoda de mai sus avem

$$u(r,\varphi) = \frac{Ar^4}{24}(R^2 - r^2)\sin 2\varphi.$$

Ecuații cu derivate parțiale de ordinul 2 de tip mixt

5.1.18. Să se rezolve următoarea problemă mixtă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \\ u(0,x) = \pi x - x^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases} \quad \text{unde } x \in [0,\pi], t \geq 0$$

Soluție: Fie $u(t, x) = T(t)X(x)$ soluția problemei. Atunci ecuația inițială se va scrie

$$\frac{T'' + 2T'}{T} = \frac{X'' - X}{X} = -\lambda, \lambda \in \mathbf{R}$$

Rezolvăm întâi ecuația

$$X'' + (\lambda - 1)X = 0.$$

Problema dată admite soluții nenule doar dacă $\lambda > 1$.

Se obțin valorile proprii

$$\lambda_k = k^2 + 1, k \geq 1.$$

De asemenea, funcţiile proprii corespunzătoare sunt:

$$X_k(x) = c_k' \sin kx,\ c_k' \text{ constante, } k \geq 1.$$

Rezolvăm apoi ecuaţia $T'' + 2T' + \lambda T = 0$, ţinând cont de valorile proprii determinate, şi obţinem ecuaţia caracteristică $r^2 + 2r + k^2 + 1 = 0$, care are rădăcinile $r_{1,2} = -1 \pm ik$, de unde

$$T_k(t) = e^{-t}(A_k' \cos kt + B_k' \sin kt),\ A_k', B_k' \text{ constante, } k \geq 1.$$

Atunci, soluţia problemei va avea forma

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t}(A_k \cos kt + B_k \sin kt) \sin kx,$$

unde $A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi x - x^2)\sin kx dx = -\frac{4}{k^3\pi}[(-1)^k - 1]$ şi $B_k = 0, k \geq 1.$

Se va obţine atunci

$$u(t,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{e^{-t}}{2n+1}\cos(2n+1)t \sin(2n+1)x.$$

5.1.19. Găsiţi soluţia următoarei probleme mixte

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1 - x \end{cases} \quad \text{unde } x \in [0,1], t \geq 0$$

Soluţie: Dacă $u(t, x) = T(t)X(x)$ este forma căutată a soluţiei problemei, atunci ecuaţia iniţială se va scrie

$$\frac{T'' + T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,\ \lambda \in \mathbf{R}$$

Rezolvăm întâi ecuaţia

$$X'' + \lambda X = 0.$$

Problema dată admite soluţii nenule doar dacă $\lambda > 0$.

Se obţin valorile proprii

$$\lambda_k = k^2\pi^2, k \geq 1.$$

şi funcţiile proprii corespunzătoare vor fi:

$$X_k(x) = c_k' \sin k\pi x,\ c_k' \text{ constante, } k \geq 1.$$

Rezolvăm apoi ecuaţia $T'' + T' + \lambda T = 0$, ţinând cont de valorile proprii determinate, şi obţinem ecuaţia caracteristică $r^2 + r + k^2 \pi^2 = 0$, care are rădăcinile $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{4k^2\pi^2 - 1}}{2}$, de unde

$$T_k(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(A_k' \cos t\sqrt{k^2\pi^2 - \frac{1}{4}} + B_k' \sin t\sqrt{k^2\pi^2 - \frac{1}{4}}\right),$$ unde A_k', B_k' sunt constante, $k \geq 1$.

Atunci, soluţia problemei va avea forma

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\left(A_k \cos t\sqrt{k^2\pi^2 - \frac{1}{4}} + B_k \sin t\sqrt{k^2\pi^2 - \frac{1}{4}}\right)\sin k\pi x,$$

unde $A_k = 0$ şi $B_k = \frac{2}{k\pi}\int_0^1 (1-x)\sin k\pi x dx = \frac{2}{k^2\pi^2}$, $k \geq 1$.

Se va obţine atunci

$$u(t,x) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\frac{1}{k^2}\sin t\sqrt{k^2\pi^2 - \frac{1}{4}}\sin k\pi x.$$

5.1.20. Găsiţi soluţia următoarei probleme mixte

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + 2\sin 2x \sin x \\ u(t, \frac{\pi}{2}) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0 \end{cases} \quad \text{unde } x \in [0, \frac{\pi}{2}], t \geq 0$$

Soluţie: Determinăm soluţia sub forma $u = v + w$, unde v este o soluţie a ecuaţiei neomogene cu $f(t, x) = 2 \sin 2x \sin x$ care satisface condiţia $v(0, x) = 0$, iar w este soluţia problemei

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w \\ w(t,\dfrac{\pi}{2}) = 0 \\ w(0,x) = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}(t,0) = 0 \end{cases}$$

Căutăm soluția de forma $w(t, x) = T(t) X(x)$. Atunci, prin înlocuire în ecuație rezultă

$$\frac{X''}{X} + 1 = \frac{T'}{T} = -\lambda + 1,\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Rezolvând ecuația $X'' + \lambda X = 0$, cu condițiile $X'(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0$, se obțin valorile proprii $\lambda_k = (2k + 1)^2$, $k \geq 0$ şi funcțiile proprii

$$X_k(x) = c_k' cos(2k + 1)x.$$

În continuare, exprimăm funcția v prin seria

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) cos(2k+1)x.$$

Dezvoltăm funcția f în serie Fourier pe intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$ şi obținem

$$f(t,x) = 2 sin\,2x\, sin\,x = cos\,x - cos\,3x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, cos(2k+1)x$$

unde

$$c_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 sin\,2x\, sin\,x\, cos(2k+1)x dx$$

şi prin urmare $c_0 = 1$ şi $c_1 = -1$.

Avem în continuare

$$\sum_{k=0}^{\infty} [T_k'(t) + [(2k+1)^2 - 1]T_k(t)]\, cos(2k+1) = f(t,x),$$

de unde se obține

$$T_k'(t) + [(2k+1)^2 - 1]T_k(t) = c_k(t).$$

Va rezulta

$$T_k(t) = \int_0^t e^{-[(2k+1)^2 - 1](t-\tau)} c_k(\tau) d\tau$$

deci, $T_0(t) = t$ şi $T_1(t) = \frac{1}{8}e^{-8t} + \frac{1}{8}$.

Soluția problemei date va fi

$$u(t,x) = t\cos x + \frac{1}{8}(e^{-8t} - 1)\cos 3x .$$

5.1.21. Să se rezolve următoarea problemă mixtă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\sin 2\pi x + e^{-9\pi^2 t}\sin 3\pi x + x(1-2t) + 2t \\ u(0,x) = \sin \pi x + 2\sin 2\pi x \\ u(t,0) = t^2 \\ u(t,1) = t \end{cases}$$

unde $x \in [0,1], t \geq 0$.

Soluție: Funcția căutată ca soluție a problemei mixte corespunzătoare ecuației neomogene este de forma $u = v + w$, unde $w(t, x) = t^2 + x(t - t^2)$, iar funcția v verifică relațiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + t\sin 2\pi x + e^{-9\pi^2 t}\sin 3\pi x \\ v(0,x) = \sin \pi x + 2\sin 2\pi x \\ v(t,0) = 0 \\ v(t,1) = 0 \end{cases}$$

Pentru această problemă, căutăm soluții de forma $v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin k\pi x$, la care se ajunge aplicând metoda Fourier sau a separării variabilelor pentru ecuația $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, cu condițiile la limită nule $v(t, 0) = v(t, 1) = 0$. Ținând cont de relațiile pe care le verifică funcția v, va rezulta

$$\begin{cases} T_k'(t) + k^2\pi^2 T_k(t) = c_k(t) \\ T_k(0) = a_k \end{cases}$$

unde

$$c_k(t) = \begin{cases} t, k = 2 \\ e^{-9\pi^2 t}, k = 3 \\ 0, k \notin \{2,3\} \end{cases} \text{ și } a_k = \begin{cases} 1, k = 1 \\ 2, k = 2 \\ 0, k \notin \{1,2\} \end{cases}$$

Soluția problemei Cauchy anterioare este

$$T_k(t) = a_k e^{-k^2\pi^2 t} + \int_0^t e^{-k^2\pi^2(t-\tau)} c_k(\tau) d\tau .$$

Ținând cont de valorile coeficienților a_k și c_k obținem

$$T_k(t) = e^{-\pi^2 t} + 2e^{-4\pi^2 t} + \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\tau)} \tau d\tau + \int_0^t e^{-9\pi^2(t-\tau)} e^{-9\pi^2\tau} d\tau .$$

După efectuarea calculelor, va rezulta că soluția problemei mixte inițiale este

$$u(t,x) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + \left(2e^{-4\pi^2 t} + \frac{t}{4\pi^2} - \frac{1}{16\pi^4} + \frac{1}{16\pi^4} e^{-4\pi^2 t}\right) \sin 2\pi x$$
$$+ e^{-9\pi^2 t} t \sin 3\pi x + t^2 + x(t - t^2)$$

5.2. Probleme propuse

5.2.1. Să se determine soluția ecuației coardei

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = 4\left(x - \dfrac{x^2}{l}\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases} \quad \text{unde } x \in [0,l], t \geq 0$$

Răspuns: Caz particular al problemei 5.1.2, cu $h = l$

$$u(t,x) = \frac{32l}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cos\frac{(2k+1)\pi a t}{l} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{l} .$$

5.2.2. Să se rezolve problema omogenă a oscilațiilor libere ale coardei de lungime *l*, cu capetele fixate, știind că vitezele ințiale ale punctelor sunt nule, iar deplasarea inițială are forma liniei frânte *OAB*, unde punctele date au coordonatele *O(0, 0)*, *A(c, h)* și *B(l, 0)*, $c \in (0, l)$, $h > 0$.

Răspuns: Ecuația coardei, împreună cu condițiile Cauchy – Dirichlet, este de forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} \dfrac{h}{c}x, x \in [0,c) \\ \dfrac{h(l-x)}{l-c}, x \in [c,l) \end{cases} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases} \quad \text{unde } x \in [0,l], t \geq 0.$$

iar soluțiile problemei sunt

$$u(t,x) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi c}{l} \cos\frac{na\pi t}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

5.2.3. Rezolvați problema oscilațiilor coardei de lungime *l*, fixată la capete, nesupusă la forțe exterioare, știind că în poziția inițială coarda este în repaus, iar viteza inițială a punctelor coardei este

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0 = \text{constantă}, \ \forall x \in [0, l]$$

Răspuns: Problema coardei se scrie sub forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0 \end{cases} \quad \text{unde } x \in [0,l], t \geq 0.$$

și are soluția

$$u(t,x) = \frac{4lv_0}{a\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin\frac{a(2n+1)\pi t}{l} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

5.2.4. Să se rezolve problema oscilațiilor libere ale unei coarde vibrante omogene de lungime l, fixată la capete, știind că în poziția inițială coarda este în repaus, iar viteza inițială a punctelor coardei este

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\begin{cases} A\cos\dfrac{\pi(x-x_0)}{2\alpha}, x\in[x_0-\alpha, x_0+\alpha] \\ 0, x\notin[x_0-\alpha, x_0+\alpha]\end{cases}$$

unde $0 \le x_0 - \alpha < x_0 + \alpha \le l$, $A \in \mathbf{R}$.

Răspuns:

$$u(t,x)=\frac{4A\alpha l^2}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(l^2-4n^2\alpha^2)}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi\alpha}{l}\sin\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

5.2.5. Să se afle soluția ecuației coardei

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0)=u(t,1)=0 \\ u(0,x)=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x)=2 \end{cases} \quad \text{unde } x\in[0,1], t\ge 0$$

Răspuns: $u(t,x)=\dfrac{8}{k\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin(2k+1)\pi t\sin(2k+1)\pi x$.

5.2.6. Să se găsească soluția problemei coardei

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0)=0, u(t,l)=t \\ u(0,x)=2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0 \end{cases} \quad \text{unde } x\in[0,l], t\ge 0$$

Răspuns:

$$u(t,x)=\frac{x}{l}t+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{8}{(2k+1)\pi}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{l}-\frac{2l}{(2k+1)^2\pi^2}\sin\frac{(2k+1)\pi t}{l}\right]\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$$

5.2.7. Să se determine soluția ecuației coardei

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \\ u(0,x) = \sin 2x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases} \quad \text{unde } x \in [0,\pi], t \geq 0$$

Răspuns: $u(t,x) = \sin 2x \cos 2t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{2}{k^3}(1-\cos kt)\sin kx$

5.2.8. Să se afle soluția ecuației coardei

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos t + 2 \\ u(t,0) = t^2 + 1, u(t,\pi) = t^2 + 2 \\ u(0,x) = \dfrac{x}{\pi} + 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases} \quad \text{unde } x \in [0,\pi], t \geq 0$$

Răspuns: $u(t,x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} t \sin t \sin kx$.

5.2.9. Să se rezolve problema mixtă a coardei vibrante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(t,0) = \sin \pi t \\ u(t,2) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases} \quad \text{unde } x \in [0,2], t \geq 0$$

Răspuns:

$$u(t,x) = -\sin\frac{\pi x}{2}\left[\left(1+\frac{1}{\pi}-\frac{x}{2}\right)\sin \pi t + t\cos \pi t\right] +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n}\left(\frac{1}{n^2-1}\sin \pi t - \frac{1}{n\pi}\sin n\pi t\right)\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

5.2.10. Să se găsească soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2t \\ u(0,x) = 0 \qquad \text{unde } t \geq 0, x \in \boldsymbol{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases}$$

Răspuns: $u(t,x) = -\dfrac{1}{3}t^3.$

5.2.11. Să se găsească soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = e^{2x} \quad \text{unde } t \geq 0, x \in \boldsymbol{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 2x \end{cases}$$

Răspuns: $u(t,x) = e^{2x} ch4t + 2tx.$

5.2.12. Să se rezolve următoarea problemă a propagării căldurii într-o bară

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = 0 \\ u(t,1) = 0 \qquad \text{unde } x \in [0,1], t \geq 0 \\ u(0,x) = x^2 - 1 \end{cases}$$

Răspuns:

$$u(t,x) = \sum_{n \geq 0} -[\frac{2}{(2n+1)\pi} + \frac{8}{(2n+1)^3 \pi^3}] e^{-(2n+1)^2 \pi^2 t} \sin(2n+1)\pi x$$

5.2.13. Să se determine soluția problemei mixte pentru ecuația căldurii

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = t + 1 \\ u(t,1) = t - 1 \\ u(0,x) = -2x \end{cases} \text{ unde } x \in [0,1], t \geq 0$$

Răspuns:

$$u(t,x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t} \sin(2n+1)\pi x - 2x + t + 1.$$

5.2.14. Să se afle soluția problemei

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(t,0) = 0 \\ u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = f(x), \end{cases} \text{ unde } x \in [0,l], t \geq 0$$

unde
$$f(x) = \begin{cases} x, 0 < x < \dfrac{l}{2} \\ l - x, \dfrac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

Răspuns: $u(t,x) = \dfrac{4l}{\pi^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^2}{(2n+1)^2} \sin \dfrac{(2n+1)\pi x}{l} e^{-\frac{a^2(2n+1)^2 \pi^2 t}{l^2}}$.

5.2.15. Să se găsească soluția ecuației căldurii

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \text{ unde } x \in [0,l], t \geq 0 \\ u(0,x) = 1 \end{cases}$$

Răspuns: $u(t,x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-[\frac{(2k+1)^2\pi^2}{l^2}+1]t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$

5.2.16. Să se determine soluția ecuației căldurii

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x+1 \\ u(t,0)=t, u(t,1)=t+1 \quad \text{unde } x\in[0,1], t\geq 0 \\ u(0,x)=x^2+x-1\end{cases}$$

Răspuns:

$$u(t,x)=t+x+te^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x+2\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{2(-1)^k}{(k\pi)^3}-\frac{1}{k\pi}]\sin k\pi x e^{-k^2\pi^2 t}.$$

5.2.17. Să se determine funcția armonică în discul unitate astfel încât pe frontiera acestui disc să ia valoarea $\sin^2\varphi$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$.

Răspuns: $u(r,\varphi)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r^2\cos 2\varphi$.

5.2.18. Rezolvați următoarea problemă a căldurii

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4u \\ u(t,0)=u(t,\pi)=0 \text{ unde } x\in[0,\pi], t\geq 0 \\ u(0,x)=x^2-\pi x\end{cases}$$

Răspuns: $u(t,x)=-\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-[(2n+1)^2-4]t}\sin(2n+1)x$.

5.2.19. Să se găsească soluția problemei coardei

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0)=t^2+1, u(t,1)=t^2+t \quad \text{unde } x\in[0,1], t\geq 0 \\ u(0,x)=x+1 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0\end{cases}$$

Răspuns:

$$u(t,x) = 4\sum_{k\geq 1}[\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\cos k\pi t + \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2}\sin k\pi t]\sin k\pi x + t^2 + 1 + tx - x$$

5.2.20. Să se găsească soluția problemei coardei

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = t-1, u(t,1) = 2t \\ u(0,x) = x+1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases} \text{unde } x \in [0,1], t \geq 0$$

Răspuns:

$$u(t,x) = \sum_{k\geq 1}\{\frac{4[1-(-1)^k]}{k\pi}\cos k\pi t + \frac{6(-1)^k - 2}{k^2\pi^2}\sin k\pi t\}\sin k\pi x +$$
$$+ t - 1 + tx + x$$

5.2.21. Să se rezolve următoarea problemă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = e^{x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \sin x \end{cases} \text{unde } t \geq 0, x \in \boldsymbol{R}$$

Răspuns: $u(t, x) = e^{x^2+t^2} ch2tx + sint\, sinx.$

5.2.22. Rezolvați problema propagării căldurii într-o bară de lungime infinită

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = 3x + 2 \end{cases} \text{unde } x \in \boldsymbol{R}, t \geq 0$$

Răspuns: $u(t, x) = 3x + 2.$

5.2.23. Să se rezolve următoarea problemă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{unde } x \in R,\ t \geq 0 \\ u(0,x) = x^6 - x^3 + 1 \end{cases}$$

Răspuns: $u(t, x) = x^6 + 30tx^4 - x^3 + 180\, t^2x^2 - 6tx + 120t^3 + 1.$

5.2.24. Rezolvaţi următoarea problemă mixtă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0,x) = 0, \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 3 \quad \text{unde } t \geq 0, x \in [0,\ 1] \\ u(t,1) = 0, \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0 \end{cases}$$

Răspuns: $u(t,x) = \dfrac{12}{\pi^2} \sum\limits_{p \geq 0} \dfrac{e^{-t}}{(2p+1)^2} \sin(2p+1)\pi t \cos(2p+1)\pi x$.

5.2.25. Să se determine soluţia următoarei probleme mixte

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \text{unde } x \in [0,\pi], t \geq 0 \\ u(0,x) = 2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = x \end{cases}$$

Răspuns:

$$u(t,x) = -2\sum_{k \geq 0} e^{t-x} \{ \frac{2[(-1)^k - 1]}{k\pi} \cos kt + \frac{(-1)^k}{k^2} \sin kt \} \sin kx .$$

Capitolul 6. METODE OPERAȚIONALE PENTRU REZOLVAREA UNOR ECUAȚII DIFERENȚIALE ŞI SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

6.1. Considerații teoretice

O funcție $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ (sau $\boldsymbol{C}$) care satisface condițiile:

i. $f(x) = 0$ pentru $x<0$

ii. f este derivabilă pe porțiuni

iii. există numerele reale $M > 0$ şi $\alpha \geq 0$ astfel încât $|f(x)| \leq Me^{\alpha x}$,

se numeşte *funcție original.*

Dacă f este o funcție original, atunci cel mai mic număr α care satisface condiția *iii.* se numeşte *indicele de creştere* al funcției f şi se notează cu c.

Pentru o funcție original f numim *transformarea Laplace* a funcției f operația de obținere a funcției F: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ dată de

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx.$$

Domeniul de convergență este reprezentat de $D_c f$.

Transformarea Laplace a funcției f se mai notează şi cu

$$\mathscr{L}[f(x)](s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

iar $\mathscr{L}$ se numeşte *operatorul de transformare Laplace*.

Operatorul de transformare Laplace se notează $\mathscr{L}[f(x)] = F(s)$.

Proprietăți ale transformării Laplace directe şi ale transformării Laplace inverse

P_1. Liniaritatea

$$\mathscr{L}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha\, \mathscr{L}[f(x)] + \beta\, \mathscr{L}[g(x)],\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{C}.$$

Domeniul de convergență $D_c f \cap D_c g \subseteq D_c(\alpha f + \beta g)$.

P_2. Translatarea funcției original în domeniul timp

$$\mathscr{L}[f(x - a)] = e^{-as}\, \mathscr{L}[f(x)],\ \forall\, a > 0.$$

Domeniul de convergență $D_c f$.

P_3. Translatarea imaginii în domeniul frecvenței complexe (amortizarea funcției original)

$$\mathscr{L}[e^{tx} f(x)] = \mathscr{L}[f(x)]|_{s \to s-t},\ t \in \mathbf{C},\ Re\, s > c + Re\, t.$$

Domeniul de convergență $D_c f$ translatat la dreapta cu $Re\, t$.

P_4. Schimbarea scalei timpului

$$\mathscr{L}[f(\frac{x}{a})] = a\, \mathscr{L}[f(x)]|_{s \to as},\ \forall\, a > 0.$$

Domeniul de convergență $\{s \in \mathbf{C}|\ as \in D_c f\}$

P_5. Proprietatea de derivare a imaginii

$$\frac{d}{ds}\mathscr{L}[f(x)] = -\, \mathscr{L}[xf(x)]$$

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}[f(x)] = (-1)^n\, \mathscr{L}[x^n f(x)],\ t \in \mathbf{N}^*$$

Domeniul de convergență $D_c f$.

P_6. Proprietatea de integrare a imaginii

$$\int_s^{\infty} \mathscr{L}[f(x)]\,dp = \mathscr{L}[\frac{f(x)}{x}]$$

Domeniul de convergență $D_c f$.

P_7. Transformarea derivatei de ordinul întâi şi de ordin superior a funcției original continue

$$\mathscr{L}[f'(x)] = s\mathscr{L}[f(x)] - f(0)$$

$$\mathscr{L}[f^{(k)}(x)] = s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - \ldots - f^{(k-1)}(0)$$

Domeniul de convergență $D_c f \subseteq D_c f' \subseteq \ldots \subseteq D_c f^{(k)}$.

P$_8$. Transformarea derivatei de ordinul întâi şi de ordin superior a funcției original cu salturi

$$\mathscr{L}[f'(x)] = s\mathscr{L}[f(x)] - f(0) - \sum_{j=1}^{q} \Delta f(t_j) e^{-t_j s}$$

$$\mathscr{L}[f^{(k)}(x)] = s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - \ldots - f^{(k-1)}(0) -$$

$$- s^{k-1} \sum_{j=1}^{q_0} \Delta f(t_{0j}) e^{-t_{0j} s} - s^{k-2} \sum_{j=1}^{q_1} \Delta f'(t_{1j}) e^{-t_{1j} s} - \ldots -$$

$$- \sum_{j=1}^{q_{k-1}} \Delta f^{(k-1)}(t_{k-1,j}) e^{-t_{k-1,j} s}.$$

Domeniul de convergență $D_c f \subseteq D_c f' \subseteq \ldots \subseteq D_c f^{(k)}$.

P$_9$. Transformarea integralei originalului

$$\mathscr{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{1}{s} \mathscr{L}[f(x)]$$

Domeniul de convergență $D_c f \cap \{s \in \mathbf{C} \mid Re\, s > 0\}$.

P$_{10}$. Transformarea unei funcții periodice f cu perioada $T \in \boldsymbol{N^*}$

$$\mathscr{L}[f(x)] = \frac{1}{1 - e^{sT}} \int_0^T f(x) e^{-sx} dx.$$

P$_{11}$. Formula lui Duhamel

$$s\mathscr{L}[f(x)]\ \mathscr{L}[g(x)] = \mathscr{L}[f(x)g(0) + \int_0^x f(t) g(x-t) dt]$$

Domeniul de convergență $D_c f \cap D_c g \subseteq D_c f \cdot g$.

P$_{12}$. Teorema valorii inițiale

$$\lim_{s \to \infty} s\mathscr{L}[f(x)] = f(0)$$

$$\lim_{s \to \infty} s[s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - \ldots - s f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)] = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} f^{(k)}(t)$$

P$_{13}$**.** Proprietatea produsului de convoluție

$$\mathscr{L}[(f*g)(x)] = \mathscr{L}[f(x)]\ \mathscr{L}[g(x)],$$

unde $(f*g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$.

Domeniul de convergență $D_c f \cap D_c g \subseteq D_c f \cdot g$.

P$_{14}$**.** Transformarea produsului funcțiilor original (convoluția complexă)

$$\mathscr{L}[f(x)g(x)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)G(s-z)dz.$$

Domeniul de convergență $D_c f \cap D_c g$ translatat la dreapta cu a.

P$_{15}$**.** Transformarea Laplace inversă

$$f(x) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{sx}ds = \sum_k Rez\left\{F(s)e^{st}, p_k^f\right\},$$

unde $\{ p_k^f \}_k$ reprezintă mulțimea polilor sau punctelor singulare esențiale izolate ale imaginii $F(s)$.

6.2. Probleme rezolvate legate de transformarea Laplace directă și de transformarea Laplace inversă

6.2.1. Să se determine transformatele Laplace ale funcțiilor $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, definite prin:

a) $f(x) = u(x)$;

b) $f(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ e^x, x\ge 0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ e^{\alpha x}, x\ge 0 \end{cases}$ $\alpha \in \boldsymbol{R}$

d) $f(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ \sin x, x\ge 0 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ \cos x, x\ge 0 \end{cases}$

Soluție: Trebuie demonstrat, în primul rând, că aceste funcții satisfac cerințele impuse unei funcții original, după care se poate trece la aplicarea definiției transformării Laplace.

a) Primele două proprietăţi ale funcţiei original sunt evidente, iar a treia este satisfăcută astfel:

$$|u(x)| = |1| = Me^{cx}, \text{ cu } M = 1 \text{ şi } c = 0.$$

În plus, calculăm astfel pentru $s = p + iq,\ p > c$

b) Primele două proprietăţi ale funcţiei original sunt evident satisfăcute. Pentru a treia proprietate, avem:

$$|e^x| \le Me^{cx} \text{ cu } M = 1 \text{ şi } c = 1.$$

Atunci putem calcula, pentru $s = p + iq,\ p > c = 1,$

$$\mathscr{L}[e^x] = \int_0^\infty e^x e^{-sx}dx = \int_0^\infty e^{(1-s)x}dx = \frac{1}{1-s}e^{(1-s)x}\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{1-s}e^{(1-p)x}e^{-iqx}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-1}$$

c) Primele două proprietăţi ale funcţiei original sunt evidente, iar în ceea ce priveşte indicele de creştere al funcţiei *f*, observăm că pentru $\alpha \in \mathbf{R}$ avem

$$|\alpha| \le \begin{cases} e^{cx}, pentru\, \alpha \ge 0, deci, c = \alpha \\ e^{0x}, pentru\, \alpha < 0, deci, c = 0 \end{cases}.$$

Calculând, obţinem

$$\mathscr{L}[e^{\alpha x}] = \int_0^\infty e^{\alpha x}e^{-sx}dx = \frac{1}{s-\alpha}$$

d) Primele două proprietăţi ale funcţiei original sunt evidente, iar indicele de creştere se obţine având în vedere că

$$|\sin x| \le 1 = Me^{0x}, \text{ deci } M = 1 \text{ şi } c = 0.$$

Atunci, integrând prin părţi, obţinem:

$$\mathscr{L}[\sin x] = \int_0^\infty \sin x e^{-sx}dx = -\cos x e^{-sx}\Big|_0^\infty - s\int_0^\infty \cos x e^{-sx}dx =$$

$$= 1 - s\int_0^\infty \cos x e^{-sx}dx = 1 - s(\sin x e^{-sx}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty \sin x e^{-sx}dx) = 1 - s^2\mathscr{L}[\sin x]$$

Rezultă

$$\mathcal{L}[\sin x] = \frac{1}{1+s^2}$$

e) Funcţia satisface toate condiţiile cerute pentru o funcţie original, având $M = 1$ şi $c = 0$, din aceleaşi motive ca şi funcţia de la d). Integrând prin părţi se obţine

$$\mathcal{L}[\cos x] = \int_0^\infty \cos xe^{-sx}dx = \frac{s}{s^2+1}.$$

6.2.2. Să se determine transformatele Laplace ale funcţiilor:

a) $\sin\omega x, \cos\omega x,$ pentru $\omega > 0$;

b) $x, x^2, x^n, x \sin x, x \cos x, x\, e^x, x^2\, e^x$;

c) $sh\, x, ch\, x, sh\, \omega x, ch\, \omega x$.

Soluţie: a) Cu ajutorul proprietăţii de asemănare se obţine:

$$\mathcal{L}[\sin\omega x] = \mathcal{L}[\sin\frac{x}{\frac{1}{\omega}}] = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}[\sin x]\Big|_{s\to\frac{s}{\omega}} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos\omega x] = \mathcal{L}[\cos\frac{x}{\frac{1}{\omega}}] = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}[\cos x]\Big|_{s\to\frac{s}{\omega}} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

b) Din proprietatea de derivare a imaginii rezultă, ţinând cont că

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \text{ şi } \mathcal{L}[e^x] = \frac{1}{s-1}, \text{ că}$$

$$[x] = \mathcal{L}[x\cdot 1] = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s}) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[x^2] = \mathcal{L}[x\cdot x] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[x] = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2}) = \frac{2}{s^3} = \frac{2!}{s^3}$$

$$\mathcal{L}[x^3] = \mathcal{L}[x\cdot x^2] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[x^2] = -\frac{d}{ds}(\frac{2!}{s^3}) = \frac{3!}{s^4}$$

Prin inducţie matematică se demonstrează cu uşurinţă că, pentru $n \in \mathbf{N}$, are loc

$$\mathscr{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Pentru funcţiile următoare avem:

$$\mathscr{L}[x\sin x] = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}[\sin x] = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1}) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathscr{L}[x\cos x] = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}[\cos x] = -\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2+1}) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathscr{L}[xe^x] = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}[e^x] = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s-1}) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\mathscr{L}[x^2e^x] = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}[x\cdot xe^x] = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{(s-1)^2}) = \frac{2}{(s-1)^3}.$$

c) Pentru funcţiile hiperbolice vom folosi formele lor exponenţiale împreună cu proprietatea de liniaritate a transformatei Laplace.

Avem deci

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\mathscr{L}[shx] = \frac{1}{2}(\mathscr{L}[e^x] - \mathscr{L}[e^{-x}]) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}) = \frac{1}{s^2-1}$$

$$\mathscr{L}[chx] = \frac{1}{2}(\mathscr{L}[e^x] + \mathscr{L}[e^{-x}]) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}) = \frac{s}{s^2-1}$$

$$\mathscr{L}[sh\omega x] = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}$$

$$\mathscr{L}[ch\omega x] = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{s+\omega}) = \frac{s}{s^2-\omega^2}.$$

6.2.3. Să se determine transformatele Laplace $\mathscr{L}$ *[f(x)]* pentru următoarele funcţii:

a) $\frac{\sin x}{x}$; b) $e^{ax}\sin\omega x$;

c) $x\sin\omega x$; d) $xe^{ax}\sin\omega x$.

Soluție: a) Aplicând proprietatea transformatei câtului obținem:

$$\mathcal{L}[\frac{\sin x}{x}] = \int_s^\infty \mathcal{L}[\sin x]\,dp = \int_s^\infty \frac{1}{p^2+1}\,dp = \operatorname{arctg} p\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s$$

b) Folosind proprietățile de deplasare în complex şi de asemănare, deducem succesiv:

$$\mathcal{L}[e^{ax}\sin\omega x] = \mathcal{L}[\sin\omega x]\Big|_{s \to s-a} = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}[\sin x]\Big|_{s \to \frac{s}{\omega}}\Big|_{s \to s-a} =$$

$$= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\Big|_{s \to s-a} = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$

c) Folosim proprietatea de derivare a imaginii şi rezultatul din problema precedentă. Astfel,

$$\mathcal{L}[x\sin\omega x] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin\omega x] = -\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

d) Asupra rezultatului de la b) vom aplica derivarea imaginii, obținând:

$$\mathcal{L}[xe^{ax}\sin\omega x] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{ax}\sin\omega x] = -\frac{d}{ds}[\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}] =$$

$$= \frac{2\omega(s-a)}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$$

6.2.4. Să se calculeze transformatele Laplace pentru următoarele funcții:

a) $\sin^2 ax,\ a \in \mathbf{R},\ x > 0$

b) $\sin ax \cos bx,\ a, b \in \mathbf{R},\ x > 0$

c) $\sin^3 x,\ x > 0.$

Soluție: a) Deoarece $\sin^2 ax = \frac{1-\cos 2ax}{2}$, obținem

$$\mathcal{L}[\sin^2 ax] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[u(x)] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2ax] = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4a^2)}$$

$$= \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}, a \in R, x > 0$$

b) Folosim formula $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$ şi avem atunci

$$\mathcal{L}[\sin ax \cos bx] = \frac{1}{2}[\mathcal{L}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]] =$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{a+b}{s^2+(a+b)^2} + \frac{a-b}{s^2+(a-b)^2}].$$

c) Deoarece $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$, avem

$$\mathcal{L}[\sin^3 x] = \frac{3}{4}\mathcal{L}[\sin x] - \frac{1}{4}\mathcal{L}[\sin 3x] = \frac{3}{4}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{4}\frac{3}{s^2+9}.$$

6.2.5. Să se afle imaginea Laplace pentru fiecare dintre funcţiile următoare:

a) $\int_0^x \sin t dt$; b) $\int_0^x t \sin t dt$;

c) $\int_0^x \cos^2 t dt$; d) $\int_0^x t^2 e^{-3t} dt$.

Soluţie: Se foloseşte, în toate cazurile, proprietatea de transformare a integralei originalului şi avem atunci:

a) $\mathcal{L}[\int_0^x \sin t dt] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[\sin x] = \frac{1}{s(s^2+1)}$;

b) $\mathcal{L}[\int_0^x t \sin t dt] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[x \sin x] = \frac{2s}{s(s^2+1)^2} = \frac{2}{(s^2+1)^2}$;

c) $\mathcal{L}[\int_0^x \cos^2 t dt] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[\cos^2 x] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[\frac{1+\cos 2x}{2}] =$

$$= \frac{1}{2s}(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}) = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)};$$

d) $\mathscr{L}[\int_0^x t^2 e^{-3t} dt] = \frac{1}{s}\mathscr{L}[e^{-3x}x^2] = \frac{1}{s}\mathscr{L}[x^2]_{s\to s+3} =$

$$= \frac{1}{s}(\frac{2}{s^3}|_{s\to s+3}) = \frac{2}{s(s+3)^3}.$$

6.2.6. Să se determine transformata Laplace a funcțiilor:

a) $f_1(x) = \int_0^x e^{2t}(x-t)^n dt$

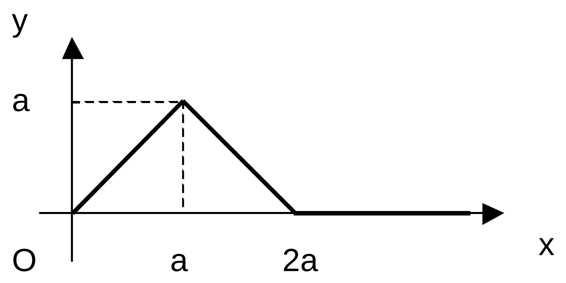
b) $f_2(x) = \int_0^x e^{at}\cos b(x-t)dt$

Soluție: Se observă că ambele funcții sunt de forma produsului de convoluție. Aplicând proprietatea că transformata Laplace a produsului de convoluție a două funcții este produsul transformatelor Laplace ale celor două funcții, găsim că:

$$\mathscr{L}[f_1(x)] = \mathscr{L}[e^{2x} * x^n] = \mathscr{L}[e^{2x}]\cdot\mathscr{L}[x^n] = \frac{1}{s-2}\frac{n!}{s^{n+1}}, n \ge 0$$

$$\mathscr{L}[f_2(x)] = \mathscr{L}[e^{ax} * \cos bx] = \mathscr{L}[e^{ax}]\cdot\mathscr{L}[\cos bx] = \frac{1}{s-a}\frac{s}{s^2+b^2}.$$

6.2.7. Să se expliciteze funcția cu graficul următor şi să se determine imaginea sa Laplace.



Soluție: Căutăm formula funcției f cu ajutorul funcției unitate u, folosind funcția impuls între α şi β, cu valorile

$$\sigma(x,\alpha,\beta) = u(x-\alpha) - u(x-\beta),\ x\in\mathbf{R},\ \beta > \alpha > 0.$$

Pentru $x\in(0, a]$, $y = x$, $\alpha = 0$, $\beta = a$, avem $y = x[u(x) - u(x-a)]$.

Pentru $x \in [a, 2a]$ obţinem $y = (-x+2a)[u(x-a) - u(x-2a)]$, deci

$$f(x) = x[u(x) - u(x-a)] + (-x+2a)[u(x-a) - u(x-2a)] = xu(x) - 2(x-a)u(x-a) + (x-2a)u(x-2a).$$

Atunci

$$\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[x] - 2e^{-as}\mathcal{L}[x] + e^{-2as}\mathcal{L}[x],$$

adică

$$\mathcal{L}[f(x)] = \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-as}}{s^2} + \frac{e^{-2as}}{s^2} = \frac{1}{s^2}(1-e^{-as})^2.$$

6.2.8. Să se calculeze valoarea integralei

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin \omega x dx, a > 0, b > 0, \omega \neq 0.$$

Soluţie: Integrala este convergentă. Distribuind numitorul vom obţine:

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} \sin \omega x dx - \int_0^\infty \frac{e^{-bx}}{x} \sin \omega x dx = \int_0^\infty \mathcal{L}[e^{-ax} \sin \omega x] ds -$$

$$- \int_0^\infty \mathcal{L}[e^{-bx} \sin \omega x] ds = \int_0^\infty \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} ds - \int_0^\infty \frac{\omega}{(s+b)^2 + \omega^2} ds =$$

$$= arctg \frac{b}{\omega} - arctg \frac{a}{\omega}.$$

6.2.9. Să se determine valoarea integralei

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{\sin tx}{x(x^2 + a^2)} dx, a > 0.$$

Caz particular $t = 1$.

Soluţie: Aplicăm asupra integralei $I\ (t)$ operatorul $\mathcal{L}$, schimbăm ordinea de integrare, x devenind parametru, şi recunoaştem imaginile Laplace obţinute:

$$\mathscr{L}[I(t)]=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\frac{\sin txdx}{x(x^2+a^2)}\right)e^{-st}dt=\int_0^\infty\frac{1}{x(x^2+a^2)}\left(\int_0^\infty\sin xte^{-st}dt\right)dx=$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{x(x^2+a^2)}\mathscr{L}[\sin xt]dx=\int_0^\infty\frac{1}{x(x^2+a^2)}\frac{x}{s^2+x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{s^2-a^2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+s^2}\right)dx=\frac{\pi}{2a^2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right),$$

deci

$$\mathscr{L}[I(t)]=\frac{\pi}{2a^2}\mathscr{L}[1-e^{-at}]$$

şi atunci avem

$$I(t)=\frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-at}).$$

Pentru $t = 1$, obținem

$$I(1)=\frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-a}).$$

6.2.10. Calculați valorile integralelor lui Fresnel

$$I_1=\int_0^\infty\sin x^2dx \text{ şi } I_2=\int_0^\infty\cos x^2dx.$$

Soluție: Considerăm funcția $I_1(t)=\int_0^\infty\sin tx^2dx, t>0$, care este o funcție original, şi aplicăm transformarea Laplace:

$$\mathscr{L}[I_1(t)]=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\sin tx^2dx\right)e^{-st}dt=\int_0^\infty\int_0^\infty\sin tx^2e^{-st}dtdx=$$

$$=\int_0^\infty\mathscr{L}[\sin tx^2]dx=\int_0^\infty\frac{x^2}{x^4+s^2}dx.$$

Pentru calculul ultimei integrale, descompunem numitorul şi o scriem ca sumă de două integrale. Atunci

$$\mathcal{L}[I_1(t)] = \frac{1}{2\sqrt{2s}}\left(\int_0^\infty \frac{xdx}{x^2 - x\sqrt{2s} + s} - \int_0^\infty \frac{xdx}{x^2 + x\sqrt{2s} + s}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2s}}\left[\frac{1}{2}ln(x^2 - x\sqrt{2s} + s)\Big|_0^\infty + \frac{\sqrt{2s}}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - x\sqrt{2s} + s}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2s}}\left[\frac{1}{2}ln(x^2 + x\sqrt{2s} + s)\Big|_0^\infty - \frac{\sqrt{2s}}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + x\sqrt{2s} + s}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2s}}\left[\frac{1}{2}ln(x^2 - x\sqrt{2s} + s)\Big|_0^\infty + arctg\frac{x\sqrt{2} - \sqrt{s}}{\sqrt{s}}\Big|_0^\infty\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2s}}\left[\frac{1}{2}ln(x^2 + x\sqrt{2s} + s)\Big|_0^\infty - arctg\frac{x\sqrt{2} + \sqrt{s}}{\sqrt{s}}\Big|_0^\infty\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2s}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2s}}.$$

S-a obţinut, prin urmare,

$$\mathcal{L}[I_1(t)] = \frac{\pi}{2\sqrt{2s}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{s}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right].$$

Va rezulta atunci $I_1(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2t}}$. Particularizând pentru $t = 1$, se va obţine

$$I_1 = \int_0^\infty sin\, x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

În mod analog rezultă şi

$$I_2 = \int_0^\infty cos\, x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

6.2.11. Să se calculeze valoarea integralei

$$I = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx.$$

Soluție: Calculăm mai întâi valoarea integralei $J=\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx$.

Pentru aceasta considerăm funcția $J(t)=\int\limits_0^{\infty} e^{-tx^2}dx, t>0$, care este o funcție original. Aplicând transformarea Laplace, va rezulta

$$\mathscr{L}[J(t)]=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-tx^2}e^{-st}dxdt=\int\limits_0^{\infty}\mathscr{L}[e^{-tx^2}]dx=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+s}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{s}}arctg\frac{x}{\sqrt{s}}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{s}}.$$

Atunci se obține

$$\mathscr{L}[J(t)]=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathscr{L}[\frac{1}{\sqrt{t}}],$$

de unde va rezulta $J(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$ şi, particularizând pentru $t = 1$, vom obține

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ şi } \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

6.3. Probleme propuse, în a căror rezolvare se foloseşte transformata Laplace

6.3.1. Să se determine transformatele Laplace ale următoarelor funcții:

a) $7e^{2x}$; b) $cos2x + sin2x$; c) $e^x(x - sinx)$; d) $(x + e^x)^3$

Răspuns: a) $\frac{7}{s-2}$; b) $\frac{s+2}{s^2+4}$; c) $\frac{1}{(s-1)^4+(s-1)^2}$;

d) $\frac{6}{s^4}+\frac{6}{(s-1)^3}+\frac{3}{(s-2)^2}+\frac{1}{s-3}$.

6.3.2. Determinaţi $\mathscr{L}[f(x)]$ pentru funcţiile:

a) $e^{ax}\cos\omega x$;

b) $e^{ax} ch\omega x, \omega > 0, a \in \mathbf{C}$.

Răspuns: a) $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$; b) $\dfrac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$.

6.3.3. Să se determine $\mathscr{L}[f(x)]$ pentru funcţiile:

a) $x\cos\omega x,\ \omega > 0$;

b) $x\, ch\omega x,\ \omega > 0$.

Răspuns: a) $\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$; b) $\dfrac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}$.

6.3.4. Să se determine $\mathscr{L}[f(x)]$ pentru funcţiile:

a) $x\, e^{ax}\cos\omega x,\ \omega > 0$;

b) $x\, e^{ax}\, ch\omega x,\ \omega > 0,\ a \in \mathbf{C}$.

Răspuns: a) $\dfrac{(s-a)^2-\omega^2}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$; b) $\dfrac{(s-a)^2+\omega^2}{[(s-a)^2-\omega^2]^2}$.

6.3.5. Să se calculeze transformatele Laplace pentru funcţiile:

a) $\cos^2 ax$; b) $\cos ax \cos bx$; c) $\sin ax \sin bx$;

d) $\cos^3 x$; e) $\cos^6 x$, pentru $x > 0$ şi $a, b \in \mathbf{R}$.

Răspuns:

a) $\dfrac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}$; b) $\dfrac{1}{2}[\dfrac{s}{s^2+(a+b)^2}+\dfrac{s}{s^2+(a-b)^2}]$;

c) $\dfrac{1}{2}[\dfrac{s}{s^2+(a-b)^2}-\dfrac{s}{s^2+(a+b)^2}]$;

d) Se foloseşte relaţia $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$;

e) Se foloseşte relaţia $\cos^6 x = (\cos^3 x)^2$.

6.3.6. Să se calculeze transformata Laplace a funcției f_k, unde $k = 1, 2, 3, 4$:

a) $f_1(x)=\int_0^x \cos t dt$; b) $f_2(x)=\int_0^x t\cos t dt$;

c) $f_3(x)=\int_0^x \cos^2 t dt$; d) $f_4(x)=\int_0^x t^2e^{-2t}dt.$

Răspuns: a) $\frac{1}{s^2+1}$; b) $\frac{s^2-1}{s(s^2+1)^2}$; c) $\frac{s^2+2}{s^2(s^2+4)}$; d) $\frac{2}{s(s+2)^3}$.

6.3.7. Să se calculeze transformata Laplace a funcției $f(x) = ln\ x,$ unde $x > 0.$

Răspuns: Plecând de la egalitatea $\ln x=(x\ln x-x)'$ obținem

$$\mathscr{L}[\ln x]=-\frac{\ln s}{s}-\frac{K}{s},$$

unde $K = F(1) = 0,57721\ldots$, pentru $F(s) = \mathscr{L}[\ln x](s).$

6.3.8. Pentru fiecare dintre perechile de funcții definite pe $\boldsymbol{R}$

a) $f_0(x) = x^2,\ f_1(x) = x^2u(x),$

b) $g_0(x) = (x\text{-}3)^2,\ g_1(x) = (x\text{-}3)^2u(x\text{-}3)$

se cere să se reprezinte grafic în același sistem de coordonate, să se precizeze care din ele este funcție original și să se determine transformata Laplace a fiecărei funcții original găsite.

Răspuns: f_1 și g_1 sunt funcții original și se obține

$$\mathscr{L}[f_1(x)]=\frac{2}{s^3},\mathscr{L}[g_1(x)]=e^{-3s}\frac{2}{s^3}.$$

6.3.9. Să se expliciteze următoarele funcții original, să se reprezinte grafic și să se determine transformatele Laplace, u fiind treapta unitate:

a) $f_1(x) = x^2u(x),$

b) $f_2(x) = (x\text{-}a)^2u(x\text{-}a),$

c) $f_3(x) = x^2u(x\text{-}a),$ *unde* $a > 0.$

Răspuns: a) $\frac{2}{s^3}$; b) $e^{-as}\frac{2}{s^3}$; c) $e^{-as}\frac{2+2as+a^2s^2}{s^3}$.

6.3.10. Să se reprezinte grafic funcțiile original f şi g şi să se calculeze imaginea Laplace dacă:

a) $f(x) = x^3[u(x-1) - u(x-2)]$;

b) $g(x) = x[u(x) - u(x-1)] + (-x+2)[u(x-1) - u(x-2)]$.

Răspuns:

a) $(\frac{6}{s^4}+\frac{6}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{1}{s})e^{-s} - (\frac{6}{s^4}+\frac{12}{s^3}+\frac{12}{s^2}+\frac{8}{s})e^{-2s}$;

b) $\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})^2$.

6.3.11. Să se reprezinte folosind treapta unitate legea de definiție a următoarelor funcții original, calculând şi imaginile lor Laplace:

a) $f_1(x) = \begin{cases} 0, x < 2 \\ x-2, x \geq 2 \end{cases}$; b) $f_2(x) = \begin{cases} 0, x < 2 \\ x, x \geq 2 \end{cases}$

c) $f_3(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x+2, x \geq 0 \end{cases}$

Răspuns:

a) $\begin{aligned} & f_1(x) = (x-2)u(x-2) \\ & \mathscr{L}[f_1(x)] = e^{-2s}\frac{1}{s^2} \end{aligned}$; b) $\begin{aligned} & f_2(x) = xu(x-2) \\ & \mathscr{L}[f_2(x)] = e^{-2s}(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}) \end{aligned}$;

c) $\begin{aligned} & f_3(x) = (x+2)u(x) \\ & \mathscr{L}[f_3(x)] = \frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}. \end{aligned}$

6.3.12. Determinați funcțiile f_i ale căror transformate Laplace sunt funcțiile F_i, $i = \overline{1,7}$.

$F_1(s) = \frac{s^2+4}{s^3}$; $F_2(s) = \frac{(7s+1)(s-1)+7}{s^3+4s}$; $F_3(s) = \frac{7(s-3)+16}{(s-3)^2+4}$;

$F_4(s) = \frac{6s-1}{(s+4)^2-25}$; $F_5(s) = \frac{5s^2+13s+14}{(s+1)(s^2+4s+5)}$;

$$F_6(s) = \frac{s+8}{2s^2+8s+26}\ ;\ F_7(s) = \frac{9s+3}{9s^2+6s+19}.$$

Răspuns:

$$f_1(x) = 2x^2 + 1;\ f_2(x) = \frac{11}{2}cos2x - 3sin2x + \frac{3}{2}\ ;$$

$$f_3(x) = e^{3x}(7cos2x + 8sin2x);\ f_4(x) = \frac{e^x + 11e^{-9x}}{2};$$

$$f_5(x) = e^{-2x}(2cosx - 5sinx) + 3e^{-x};\ f_6(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}cos\,3x + sin\,3x\right);$$

$$f_7(x) = e^{-\frac{x}{3}}cos\sqrt{2}x.$$

6.3.13. Să se determine transformatele Laplace ale funcțiilor:

a) $f_1(x) = \int_0^x e^{at}\cos b(x-t)dt$

b) $f_2(x) = \int_0^x e^{x-t}\sin 3t dt, x > 0.$

Răspuns: a) $\frac{2}{s^2+4}\frac{3!}{s^4}$; b) $\frac{3}{s^2+9}\frac{1}{s-1}$.

6.3.14. Să se calculeze valoarea integralei:

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx, a > 0, b > 0.$$

Răspuns: $I = \int_0^\infty \mathscr{L}[e^{-ax}]ds - \int_0^\infty \mathscr{L}[e^{-bx}]ds = ln\frac{b}{a}.$

6.3.15. Să se calculeze integralele:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx;\quad I_2 = \int_0^\infty dx\int_0^x \frac{e^{-x}\sin y}{y}dy;$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}dx, a > 0, b > 0, b \neq a;$$

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{\sin^4 ax - \sin^4 bx}{x} dx, a > 0, b > 0, a \neq b;$$

$$I_5 = \int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx, a > 0, b > 0, a \neq b;$$

$$I_6 = \int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx, a > 0, b > 0, a \neq b;$$

$$I_7 = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx; \; I_8 = \int_0^\infty \frac{\sin^4 tx}{x^4} dx, t > 0;$$

$$I_9 = \int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+1} dx, t > 0; \; I_{10} = \int_0^\infty \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \frac{\sin tx}{x} dx, t > 0.$$

Răspuns: $I_1 = \frac{\pi}{2}$, $I_2 = \frac{\pi}{4}$, $I_3 = \ln\frac{b}{a}$ $I_4 = \frac{3}{8}\ln\frac{b}{a}$, $I_5 = \frac{1}{4}\ln\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$, $I_6 = \frac{\pi}{2}$, $I_7 = \frac{\pi}{2}$, $I_8 = \frac{\pi}{3}$, $I_9 = \frac{\pi}{2e^t}$, $I_{10} = \pi(e^{-at} - \frac{1}{2}), t > 0.$

6.3.16. Să se determine funcția original a cărei transformată Laplace este:

a) $F_1(s) = \frac{6s^3 + 4s + 1}{s^4 + s^2}$;

b) $F_2(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$;

c) $F_3(s) = \frac{3s^2 - 1}{(s^2+1)^2}$;

d) $F_4(s) = \frac{3s}{(s^2+1)^2}$;

e) $F_5(s) = \frac{1}{(s^2+1)^3}$;

f) $F_6(s)=\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}, a>0$;

g) $F_7(s)=\dfrac{s^2-18s+5}{(s-1)^3(s-2)(s-3)}$.

Răspuns: a) Se descompune $F_1(s)$ în fracții simple, obținând:

$$F_1(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{4}{s}+\frac{2s-1}{s^2+1}=\frac{1}{s^2}+\frac{4}{s}+\frac{2s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}$$

şi folosind tabelele transformatelor Laplace găsim:

$$f_1(x)=x+4+2\cos x-\sin x.$$

b) Avem

$$\frac{1}{(s^2+1)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{2}\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)'$$

Atunci $f_2(x)=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$. S-a ținut cont de faptul că

$$\left(\frac{s}{s^2+1}\right)'=\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\cos x]=-\mathcal{L}[x\cos x].$$

Propunem şi o altă metodă de rezolvare, folosind proprietatea produsului de convoluție

$$\mathcal{L}[(f*g)(x)]=\mathcal{L}[f(x)]\ \mathcal{L}[g(x)],$$

unde $(f*g)(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)dt$.

Considerăm $f(x)=g(x)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]=\sin x$. Avem

$$\left(\frac{1}{s^2+1}\right)^2=(\mathcal{L}[\sin x])^2=\mathcal{L}[\sin x]\mathcal{L}[\sin x]=\mathcal{L}[\sin x*\sin x].$$

Atunci

$$f_2(x)=\int_0^x \sin t\sin(x-t)dt=\frac{1}{2}\int_0^x[\cos(2t-x)-\cos x]dt=\frac{1}{2}(\sin x-x\cos x)$$

Analog se obțin şi celelalte funcții original:

c) $f_3(x) = 2x\cos x + \sin x$

d) $f_4(x) = \dfrac{3}{2}x\sin x$

e) $f_5(x) = \dfrac{3-x^2}{8}\sin x - \dfrac{3x}{8}\cos x$

f) $f_6(x) = xchax$

g) $f_7(x) = e^x(-3x^2 - 17x - 22) + 27e^{2x} - 5e^{3x}$

6.4. Rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuații diferențiale liniare

6.4.1. Să se integreze ecuația diferențială

$$2y''(x) - 6y'(x) + 4y(x) = 3e^{3x}$$

cu condițiile $y(0) = 1, y'(0) - 1$.

Soluție: Avem

$$\mathscr{L}[y'(x)] = s\mathscr{L}[y(x)] - y(0) = s\mathscr{L}[y(x)] - 1$$

$$\mathscr{L}[y''(x)] = s^2\mathscr{L}[y(x)] - sy(0) - y'(0) = s^2\mathscr{L}[y(x)] - s + 1$$

aplicând transformarea Laplace asupra ecuației obținem succesiv:

$$2\mathscr{L}[y''(x)] - 6\mathscr{L}[y'(x)] + 4\mathscr{L}[y(x)] = 3\mathscr{L}[e^{3x}]$$

$$2\{s^2\mathscr{L}[y(x)] - s + 1\} - 6\{s\mathscr{L}[y(x)] - 1\} + 4\mathscr{L}[y(x)] = \frac{3}{s-3}$$

$$\mathscr{L}[y(x)](2s^2 - 6s + 4) = \frac{3}{s-3} + 2s - 8$$

$$\mathscr{L}[y(x)] = \frac{2s^2 - 14s + 27}{2(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{15}{4}\frac{1}{s-1} - \frac{7}{2}\frac{1}{s-2} + \frac{3}{4}\frac{1}{s-3}$$

de unde, prin transformarea inversă, se obține

$$y(x) = \frac{15}{4}e^x - \frac{7}{2}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{3x}.$$

6.4.2. Să se rezolve următoarea problemă Cauchy:

$$\begin{cases} y''-2y'+2y = f(x) \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

unde *f* este o funcție original.

Soluție: Facem schimbarea de variabilă $x - 1 = t$, deci $x = t + 1$. Notăm $y(t + 1)$ cu $y(t)$ şi obținem:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot (\frac{dx}{dt})^2 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

deci $y'(t) = y'(x), y''(t) = y''(x)$, aplicând notația de mai sus. Atunci problema devine

$$\begin{cases} y''-2y'+2y = f(t+1) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Aplicând transformarea Laplace, găsim ecuația

$$(s^2 - 2s + 2)\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[f(t+1)] + s - 1,$$

ceea ce conduce la

$$\mathscr{L}[y(t)] = \frac{s-1}{s^2 - 2s + 2} + \frac{1}{s^2 - 2s + 2}\mathscr{L}[f(t+1)] =$$

$$= \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} + \frac{1}{(s-1)^2 + 1}\mathscr{L}[f(t+1)]$$

deci

$$y(t) = e^t \cos t + \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s-1)^2 + 1}\mathscr{L}[f(x)]]$$

Folosind proprietatea produsului de convoluție pentru $\mathscr{L}^{-1}$ obținem:

$$y(t) = e^t \cos t + \int_0^t e^\tau \sin \tau f(t + 1 - \tau)d\tau$$

iar dacă revenim la *x* ajungem la soluția:

$$y(x) = e^{x-1}\cos(x-1) + \int_0^{x-1} e^{\tau}\sin\tau f(x-\tau)d\tau .$$

6.4.3. Să se determine soluţia problemei Cauchy pentru următoarea ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi variabili.

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Soluţie: Aplicând transformarea Laplace şi notând

$$Y(s) = \mathscr{L}[y(x)]$$

obţinem succesiv

$$\mathscr{L}[y''(x)] + \mathscr{L}[xy'(x)] - \mathscr{L}[y(x)] = 0$$

$$sY'(s) - (s^2 - 2)Y(s) + 1 = 0$$

$$Y'(s) - \frac{s^2 - 2}{s}Y(s) = -\frac{1}{s}$$

ceea ce este o ecuaţie diferenţială liniară şi neomogenă, cu soluţia

$$Y(s) = \frac{1 + Ce^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}$$

Din condiţia $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$ rezultă $c = 0$ şi deci $Y(s) = \frac{1}{s^2}$, ceea ce înseamnă, aplicând transformarea inversă, că $y(x) = x$.

6.5. Rezolvarea problemei Cauchy pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare

6.5.1. Să se integreze sistemul de ecuaţii diferenţiale cu funcţiile necunoscute $y = y(x)$ şi $z = z(x)$

$$\begin{cases} y' + 4y + 4z = 0 \\ z' + 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

cu condiţiile iniţiale

$$y(0) = 3, z(0) = 15.$$

Soluţie: Aplicăm transformarea Laplace şi, notând

$Y(s) = \mathcal{L}\ [y(x)],\ Z(s) = \mathcal{L}\ [z(x)],$ obținem

$$\begin{cases} (s+4)Y(s)+4Z(s)=3 \\ 2Y(s)+(s+6)Z(s)=15. \end{cases}$$

De aici rezultă

$$\begin{cases} Y(s)=\dfrac{3s-42}{(s+2)(s+8)}=\dfrac{-8}{s+2}+\dfrac{11}{s+8} \\ Z(s)=\dfrac{15s+54}{(s+2)(s+8)}=\dfrac{4}{s+2}+\dfrac{11}{s+8}. \end{cases}$$

Aplicând transformarea inversă găsim soluția

$$y(x)=-8e^{-2x}+11e^{-8x}$$

$$z(x)=4e^{-2x}+11e^{-8x}.$$

6.5.2. Să se integreze sistemul de ecuații liniare, neomogene, cu coeficienții variabili

$$\begin{cases} 3y''-3z''=3\cos x-xe^{-x} \\ xy''-z'=\sin x \end{cases}$$

cu condițiile

$$\begin{cases} y(0)=-1 \\ y'(0)=2 \\ z(0)=4 \\ z'(0)=0, \end{cases}$$

unde $y = y(x)$ și $z = z(x)$.

Soluție: Notând $Y = \mathcal{L}\ [y(x)]$ și $Z = \mathcal{L}\ [z(x)]$, prin aplicarea transformatei Laplace asupra sistemului de ecuații obținem succesiv:

$$\mathcal{L}[y''(x)]=s^2Y+s-2$$

$$\mathcal{L}[z''(x)]=s^2Z-4s$$

$$\mathcal{L}[xy''(x)]=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[Y'']=-2sY-s^2Y'-1.$$

Sistemul devine

$$\begin{cases} 3s^2Y - 3s^2Z + 15s - 6 = \dfrac{3s}{s^2+1} - \dfrac{1}{(s+1)^2} \\ -2sY - s^2Y - sZ + 3 = \dfrac{1}{s^2+1}. \end{cases}$$

Exprimând pe Z din a doua ecuaţie şi introducând în prima ecuaţie rezultă

$$Z = \frac{1}{s}\left(-2sY - s^2Y' + 3 - \frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$Y' + \frac{3}{s}Y = \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{3s^3(s+1)^2}.$$

Ecuaţia în Y este liniară şi neomogenă şi, aplicînd metoda clasică de integrare deducem

$$Y(s) = \frac{1}{s^3}\left[c + 2s - s^2 + \frac{1}{3(s+1)}\right] = \frac{c}{s^3} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{3s^3(s+1)}.$$

După ce se descompune ultima fracţie în fracţii simple, $Y(s)$ se aduce la forma

$$Y(s) = \frac{3c+1}{3}\frac{1}{s^3} + \frac{5}{3}\frac{1}{s^2} - \frac{2}{3}\frac{1}{s} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1},$$

de unde, prin operatorul invers $\mathcal{L}^{-1}$, găsim

$$y(x) = \frac{3c+1}{6}x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^{-x}.$$

Derivând acum $Y(s)$, obţinem

$$Y'(s) = -\frac{3c+1}{s^4} - \frac{10}{3s^3} + \frac{2}{3s^2} + \frac{1}{3(s+1)^2}$$

şi introducând aceasta în expresia lui $Z(s)$, rezultă

$$Z(s) = \frac{3c+1}{3s^3} + \frac{11}{3s} + \frac{2}{3(s+1)} - \frac{s}{3(s+1)^2} - \frac{1}{s(s^2+1)},$$

sau, după descompunerea ultimei fracţii în fracţii simple,

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s+1},$$

aceasta devine

$$Z(s) = \frac{3c+1}{3s^3} + \frac{8}{3s} + \frac{1}{3(s+1)} + \frac{1}{3(s+1)^2} + \frac{s}{s^2+1}.$$

Deci soluția problemei este

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{3c+1}{6}x^2 + \dfrac{5}{3}x - \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}e^{-x} \\ z(x) = \dfrac{3c+1}{6}x^2 + \dfrac{8}{3} + \dfrac{1}{3}e^{-x} + \dfrac{1}{3}xe^{-x} + \cos x \end{cases} \quad c \in \mathbf{R}.$$

Condițiile Cauchy sunt satisfăcute pentru orice valoare reală a constantei c.

6.6. Ecuații cu argument întârziat

6.6.1. Să se determine soluția ecuației

$$\begin{cases} 3y(x) - 4y(x-1) + y(x-2) = x \\ y(x) = 0, x < 0. \end{cases}$$

Soluție: Interpretăm ecuația astfel:

$$3y(x)u(x) - 4y(x-1)u(x-1) + y(x-2)u(x-2) = xu(x)$$

şi aplicăm transformarea Laplace, folosind deplasarea în real şi notând $Y(s) = \mathscr{L}[y(x)]$. Obținem succesiv

$$(3 - 4e^{-s} + e^{-2s})Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(1 - e^{-s})(3 - e^{-s})Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2s^2}\left(\frac{1}{1-e^{-s}} - \frac{1}{3-e^{-s}}\right) = \frac{1}{2s^2}\left(\frac{1}{1-e^{-s}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-s}}\right).$$

Deoarece

$$\left|e^{-s}\right| = \left|e^{-(x+iy)}\right| = e^{-x} < 1, \left|\frac{1}{3}e^{-s}\right| < 1,$$

obținem

$$Y(s) = \frac{1}{2s^2}[(1 + e^{-s} + e^{-2s} + \ldots + e^{-ns} + \ldots) -$$

$$-\frac{1}{3}(1 + \frac{e^{-s}}{3} + \frac{e^{-2s}}{3^2} + \ldots + \frac{e^{-ns}}{3^n} + \ldots)]$$

$$Y(s) = \frac{1}{2s^2}[\frac{2}{3} + (1 - \frac{1}{3^2})e^{-s} + (1 - \frac{1}{3^3})e^{-2s} + \ldots + (1 - \frac{1}{3^{n+1}})e^{-ns} + \ldots]$$

$$Y(s) = \frac{1}{3s^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{3^{n+1}})e^{-ns}\frac{1}{s^2}$$

şi, aplicând transformarea inversă, rezultă

$$y(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{[x]}(1 - \frac{1}{3^{n+1}})(x - n),$$

unde *[x]* reprezintă partea întreagă a lui *x*.

6.6.2. Să se integreze ecuaţia diferenţială cu argument întârziat

$$\begin{cases} y'(x) + y(x-1) = x^2 \\ y(x) = 0, x \le 0. \end{cases}$$

Soluţie: Deoarece $y(0) = 0$ şi punând $Y(s) = \mathscr{L}[y(x)]$ avem $\mathscr{L}[y'(x)] = sY(s)$ şi $\mathscr{L}[y(x-1)] = e^{-s}Y(s)$, relaţii care se introduc în ecuaţie şi găsim

$$Y(s) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-ns}}{s^{n+4}}.$$

Dar $\mathscr{L}[x^{n+3}] = \frac{(n+3)!}{s^{n+4}}$, de unde $y(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-n)^{n+3}}{(n+3)!}u(x-n),$

deci

$$y(x) = 2\sum_{n=0}^{[x]}(-1)^n \frac{(x-n)^{n+3}}{(n+3)!}.$$

6.7. Ecuații cu derivate parțiale

6.7.1. Să se rezolve ecuația cu derivate parțiale de ordinul 1 cvasiliniară

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial y}{\partial x} = \cos t \\ y(0,x) = (x+1)^2 \end{cases}$$

Soluție: Având condiție în punctul $t = 0$ aplicăm transformarea Laplace funcției $y(t, x)$ în raport cu t, considerând pe x drept parametru. Notăm $\mathscr{L}\ [y(t, x)] = Y(s, x)$ și obținem succesiv

$$Y(s,x) = \int_0^\infty y(t,x)e^{-st}dt$$

$$\mathscr{L}[\frac{\partial y}{\partial t}] + \mathscr{L}[\frac{\partial y}{\partial x}] = \mathscr{L}[\cos t]$$

$$\mathscr{L}[\frac{\partial y}{\partial x}] = \int_0^\infty \frac{\partial y}{\partial x} e^{-st} dt = \frac{\partial Y(s,x)}{\partial x}$$

$$\mathscr{L}[\frac{\partial\ y}{\partial t}] = sY(s,x) - y(0,x).$$

Ecuația inițială se scrie atunci

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + sY = (x+1)^2 + \frac{s}{s^2+1}$$

și devine o ecuație linară de ordinul 1 în variabila independentă x, neomogenă cu coeficienți constanți, s fiind un parametru.

Soluția generală a acestei ecuații va fi

$$Y(s,\ x) = \frac{1}{s}(x+1)^2 - \frac{2}{s^2}(x+1) + \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2+1}.$$

Atunci

$$y(t,\ x) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s,\ x)] = (x+1)^2 - 2(x+1)t + t^2 + \sin t.$$

6.7.2. Să se rezolve ecuația cu derivate parțiale de ordinul doi de tip parabolic

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial y}{\partial t}=0 \text{ cu condițiile } \begin{cases} y(0,x)=\sin \pi x \\ y(t,0)=0 \\ y(t,1)=0. \end{cases} \text{ unde } x\in(0,\ 1),\ t>0.$$

Soluție: Se observă că ecuația modelează problema propagării căldurii într-o bară de lungime finită, $l = 1$, care nu are surse de căldură la extremități. Aplicăm transformarea Laplace funcției $y(t, x)$ în raport cu t (deoarece avem condiție în punctul $t = 0$), considerând pe x drept parametru. Notăm $\mathcal{L}\,[y(t, x)] = Y(s, x)$, $s > 0$ şi obținem succesiv

$$Y(s,x)=\int_0^\infty y(t,x)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}]-\mathcal{L}[\frac{\partial y}{\partial t}]=0$$

$$\mathcal{L}[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}]=\int_0^\infty \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}e^{-st}dt=\frac{\partial^2 Y(s,x)}{\partial x^2}$$

$$\mathcal{L}[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}]=\frac{\partial^2 Y(s,x)}{\partial x^2}$$

$$\mathcal{L}[\frac{\partial\ y}{\partial t}]=sY(s,x)-y(0,x).$$

Avem

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}-sY=-\sin \pi x, s>0,$$

adică o ecuație diferențială în variabila independentă x, liniară şi neomogenă cu coeficienți constanți şi cu s parametru.

Ecuația caracteristică $r^2 - s = 0$ are soluțiile reale $r_1=\sqrt{s}, r_2=-\sqrt{s},$ iar soluția generală a ecuației omogene corespunzătoare este

$$Y_o(s,x)=c_1e^{x\sqrt{s}}+c_2e^{-x\sqrt{s}},\ c_1,\ c_2 \text{ constante.}$$

Prin identificare se găseşte o soluție particulară a ecuației neomogene

$$Y_p = \frac{1}{s+\pi^2} \sin \pi x$$

deci soluția generală a ecuației neomogene este

$$Y(s,x) = Y_o(s,x) + Y_p(s,x) = c_1 e^{x\sqrt{s}} + c_2 e^{-x\sqrt{s}} + \frac{1}{s+\pi^2} \sin \pi x.$$

Prin aplicarea operatorului $\mathcal{L}$ asupra condițiilor la extremități, $y(t, 0) = 0, y(t, 1) = 0,$ rezultă succesiv

$$\mathcal{L}[y(t,0)] = Y(s,0) = 0$$

$$\mathcal{L}[y(t,1)] = Y(s,1) = 0$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0 \end{cases}$$ de unde $c_1 = c_2 = 0$ și

$$Y(s,x) = \frac{1}{s+\pi^2} \sin \pi x.$$

Prin inversa transformării Laplace obținem soluția

$$y(t,x) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

6.7.3. Să se rezolve ecuația cu derivate parțiale de ordinul doi de tip hiperbolic

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, x \in [0, l], t \geq 0$$

știind că

$$\begin{cases} y(0,x) = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 0 \\ y(t,0) = 0 \\ y(t,l) = 7t \end{cases}$$

Soluție: Ecuația modelează problema oscilațiilor libere ale coardei de lungime *l*, fixată la unul din capete, aflată la momentul inițial în repaus și care nu este supusă la perturbații exterioare.

Aplicăm transformarea Laplace funcției $y(t, x)$ în raport cu t considerând pe x drept parametru. Notăm $\mathcal{L}\ [y(t, x)] = Y(s, x)$ și obținem succesiv

$$Y(s,x)=\int_0^\infty y(t,x)e^{-st}dt$$

$$4\mathscr{L}[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}]-\mathscr{L}[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}]=0$$

$$\mathscr{L}[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}]=\int_0^\infty \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}e^{-st}dt=\frac{\partial^2 Y(s,x)}{\partial x^2}$$

$$\mathscr{L}[\frac{\partial y}{\partial t}]=sY(s,x)-y(0,x)=sY(s,x)$$

$$\mathscr{L}[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}]=s\mathscr{L}[\frac{\partial y}{\partial t}]-\frac{\partial y}{\partial t}(0,x)=s^2Y(s,x).$$

Rezultă o ecuație liniară omogenă de ordinul 2 cu coeficienți constanți

$$Y''-\frac{1}{4}s^2Y=0$$

cu soluțiile

$$Y=c_1e^{\frac{1}{2}xs}+c_2e^{-\frac{1}{2}xs}.$$

Din condițiile la limită

$$\mathscr{L}[y(t,0)]=Y(s,0)=0$$

$$\mathscr{L}[y(t,l)]=Y(s,l)=\frac{7}{s^2}$$

se obține

$$c_1=\frac{7}{s^2}\frac{1}{e^{\frac{1}{2}ls}-e^{-\frac{1}{2}ls}} \text{ şi } c_2=-\frac{7}{s^2}\frac{1}{e^{\frac{1}{2}ls}-e^{-\frac{1}{2}ls}}.$$

Prin urmare soluția va fi dată de

$$Y(s,x)=\frac{7}{e^{\frac{1}{2}ls}-e^{-\frac{1}{2}ls}}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}xs}}{s^2}-\frac{e^{-\frac{1}{2}xs}}{s^2}\right).$$

6.8. Probleme propuse

6.8.1. Rezolvați următoarele probleme Cauchy:

a) $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 5, y'(0) = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y' - y = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y' + y = 2\sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y^{(5)} = 6!\,x^2 \\ y^{(k)}(0) = k!, k = \overline{0,4} \end{cases}$

Răspuns: a) $y(x) = 5\cos 2x + 3\sin 2x$; b) $y(x) = e^x (x + 1)$;

c) $y(x) = 2e^{-x} - \cos x + \sin x$; d) $y(x) = \dfrac{2}{7}x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

6.8.2. Să se rezolve problema Cauchy pentru următoarele ecuații diferențiale liniare, neomogene, cu coeficienți constanți:

a) $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = x^3 e^{-2x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 e^x, y = y(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y''' - 2y'' + 4y' - 8y = f(x), y = y(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \\ y''(0) = 8 \end{cases}$ f funcție original

d) $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x \\ y(a) = 1, a > 0 \\ y'(a) = 1, a > 0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} y'' + y = \dfrac{1}{\cos x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y''-y = thx \\ y(0)=1 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$; g) $\begin{cases} y''+2y'+y = \dfrac{e^{-x}}{x+1} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y'''+2y'=u(x-2)-u(x-5) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=-1 \\ y''(0)=2 \end{cases}$; i) $\begin{cases} y''+2y = \dfrac{1}{1-\sin\sqrt{2}x} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

Răspuns:

a) $y(x)=(1+4x+\frac{x^5}{20})e^{-2x}$; b) $y(x)=(1-x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{60})e^{x}$;

c)

$$y(x)=\frac{1}{2}(3\cos 2x-\sin 2x-e^{2x})+\frac{1}{8}\int_0^x(e^{2t}-\cos 2x-\sin 2x)f(x-t)dt;$$

d) $y(x)=(\cos 2x+\frac{x}{4}\sin 2x)e^{x}$; e) $y(x)=2\sin x+x\sin x+\cos x\ln\cos x$;

f) $y(x)=e^{-x}-shx+2ch(arctge^{x}-\frac{\pi}{4})$;

g) $y(x)=e^{-x}[(x+1)\ln(x+1)-x]$;

h)

$$y(x)=(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}x-\cos\sqrt{2}x)u(x)+\frac{1}{2}[x-2-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}(x-2)]$$

$$u(x-2)-\frac{1}{2}[x-5-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}(x-5)]u(x-5)$$

i) $y(x)=-\frac{\sin x\sqrt{2}}{2}[1+\ln(1-\sin x\sqrt{2})]+\frac{1}{2}[(x\sqrt{2}+1)\cos x\sqrt{2}-1]$.

6.8.3. (Ecuația lui Laguerre) Fie ecuația diferențială cu coeficienți variabili

$$xy''(x)+(1-x)y'(x)+ny(x)=0, n\in N$$

Pentru n fixat, această ecuație admite un polinom de gradul n ca soluție. Fie $L_n(x)$ acest polinom.

a) Cunoscând $y(0) = y_0$ şi $y'(0) = y_1$ şi folosind transformata Laplace împreună cu o teoremă de dezvoltare să se determine polinomul $L_n(x)$, ştiind că x^n are coeficientul $(-1)^n$.

b) Să se scrie $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ şi $L_3(x)$.

c) Să se demonstreze relația de recurență

$$L'_{n+1}(x) - (n+1)L'_n(x) + (n+1)L_n(x) = 0$$

Răspuns:

$$L_n(x) = c[1 - C_n^1 \frac{x}{1!} + C_n^2 \frac{x^2}{2!} - C_n^3 \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n C_n^n \frac{x^n}{n!}]$$

şi, conform ipotezei, luăm $c = n!$, obținând

$$L_n(x) = n! - C_n^1 \frac{n!}{1!} x + C_n^2 \frac{n!}{2!} x^2 - C_n^3 \frac{n!}{3!} x^3 + ... + (-1)^n C_n^n x^n$$

de aici rezultă $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = 2 - 4x + x^2$, $L_3(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$.

6.8.4. Să se integreze sistemul diferențial liniar neomogen

$$\begin{cases} y' - z' - 2y + 2z = \sin x \\ y'' + 2z' + y = 0 \end{cases} \text{ cu condițiile } \begin{cases} y(0) = z(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Răspuns:

$$y(x) = \frac{4}{45} e^{2x} + \frac{1}{9} e^{-x} + \frac{1}{3} x e^{-x} - \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x$$

$$z(x) = -\frac{1}{9} e^{2x} + \frac{1}{9} e^{-x} + \frac{1}{3} x e^{-x}.$$

6.8.5. Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2z = 0 \\ z'' - 2y = 0 \end{cases} \text{ cu condițiile } \begin{cases} y(0) = z(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ z'(0) = 1 \end{cases}$$

Răspuns:

$$y(x) = \frac{1}{4}(e^x \cos x + e^x \sin x - e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x)$$

$$z(x)=\frac{1}{4}(e^{x}\sin x-e^{x}\cos x+e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x).$$

6.8.6. Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} y''+y'+z''-z=e^{x} \\ y''+2y-z'-z=e^{-x} \end{cases} \text{ cu condiţiile } \begin{cases} y(0)=z(0)=0 \\ y'(0)=z'(0)=0 \end{cases}$$

Răspuns:

$$y(x)=-\frac{1}{3}+e^{-x}+\frac{1}{5}e^{x}-\frac{13}{3}e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$z(x)=\frac{2}{3}+\frac{79}{5}e^{x}+\frac{3}{5}xe^{x}+\frac{13}{3}e^{-\frac{3}{2}x}.$$

6.8.7. Să se determine soluţia problemei Cauchy pentru următoarea ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi variabili.

$$\begin{cases} xy''(x)+2y'(x)=x-1 \\ y(0)=0 \end{cases}$$

Răspuns: $y(x)=\frac{x^{2}}{6}-\frac{x}{2}$.

6.8.8. Să se integreze ecuaţiile cu argument întârziat

a) $\begin{cases} y'(x)+y(x-1)=x^{2} \\ y(x)=0, x\le 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y''(x)-2y'(x-1)=x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} y''(x)+2y'(x-2)+y(x-4)=x \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$

Răspuns:

a) $y(x)=2\sum_{n=0}^{[x]}\frac{(-1)^{n}(x-n)^{n+3}}{(n+3)!}$

b) $y(x)=\sum_{n=0}^{[x]}\frac{2^{n}(x-n)^{n+3}}{(n+3)!}$

c) $y(x) = \sum_{n=0}^{[\frac{x}{2}]} (-1)^n (n+1) \frac{(x-2n)^{n+3}}{(n+3)!}$.

6.8.9. Să se rezolve ecuația cu derivate parțiale de ordinul 1 cvasiliniară

$$\begin{cases} 2\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} = sin\,3t \\ y(0,x) = (x+1)^2 \end{cases}$$

Răspuns: $y(t, x) = (x+1)^2 - (x+1)t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{6}cos3t + \frac{1}{6}$

6.8.10. Folosind transformarea Laplace să se rezolve ecuația cu derivate parțiale de ordinul doi de forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \text{ cu condițiile } \begin{cases} y(0,x) = 3\,sin\,2\pi x \\ y(t,0) = 0 \\ y(t,1) = 0. \end{cases} \text{ unde } x \in (0, 1),\ t > 0.$$

Răspuns: $y(t,x) = 3e^{-4\pi^2 x} sin\,2\pi x.$

6.8.11. Folosind transformarea Laplace să se integreze ecuația cu derivate parțiale de ordinul 2 cu funcția necunoscută $y(t, x)$, $x \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$, de forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{16}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \text{ cu condițiile } \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x}(t,0) = 0 \\ y(t,\frac{3}{2}) = 0 \\ y(0,x) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 2\cos\pi x + 3\cos 3\pi x \end{cases}$$

Răspuns:

$$y(t,x) = \frac{1}{2\pi} sin\,4\pi t\,cos\,4\pi x + \frac{1}{4\pi} sin\,12\pi t\,cos\,3\pi x.$$

6.8.12. Să se integreze ecuaţia

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, x > 0, t > 0 \text{ ştiind că } \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} y(t,x) = 0 \\ y(t,0) = 10\sin 2t \\ y(0,x) = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases}$$

Răspuns:

$$y(t,x) = \begin{cases} 10\sin 2(t-x), 0 < x < t \\ 0, x \geq t \end{cases}.$$

6.8.13. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale, utilizând transformarea Laplace:

$$\text{a) } \begin{cases} y' = 6y + z \\ z' = 4y + 3z \\ y(0) = 2 \\ z(0) = 7 \end{cases}; \qquad \text{b) } \begin{cases} y'' = 3y - 4z \\ z'' = 2y - 3z \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \\ z(0) = 3, z'(0) = 4 \end{cases};$$

$$\text{c) } \begin{cases} y' + 3y + z' + 2z = e^{-2x} \\ 2y' + 2y + z' + z = 1 \\ y(0) = z(0) = 0 \end{cases};$$

$$\text{d) } \begin{cases} y' + z' = z' + u' = u' + y' \\ y(0) = z(0) = u(0) = 1 \end{cases};$$

$$\text{e) } \begin{cases} y' = 2y - 3z \\ z' = y - 2z \\ y(0) = 8 \\ z(0) = 3 \end{cases}$$

Răspuns:

$$\text{a) } \begin{cases} y(x) = 3e^{7x} - e^{2x} \\ z(x) = 3e^{7x} + 4e^{2x} \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} y(x) = -4e^{x} + 5\cos x + 6\sin x \\ z(x) = -2e^{x} + 5\cos x + 6\sin x \end{cases};$$

c) $\begin{cases} y(x) = e^{-2x} - (x+3)e^{-x} + 2 \\ z(x) = -2e^{-2x} + (2x+5)e^{-x} - 3 \end{cases}$;

d) $y(x) = z(x) = u(x) = e^{\frac{x}{2}}$;

e) $\begin{cases} y(x) = 5e^{-x} + 3e^{4x} \\ z(x) = 5e^{-x} - 2e^{4x} \end{cases}$

Capitolul 7. METODE OPERAŢIONALE DISCRETE. ECUAŢII CU DIFERENŢE FINITE

7.1. Consideraţii teoretice

Se numeşte *diferenţa de ordinul 1* sau *diferenţa finită* a funcţiei f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ în punctul $n \in \boldsymbol{R}$ expresia

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

Se numeşte diferenţa de ordinul $p \geq 2$ a funcţiei f în punctul n expresia

$$\Delta^p f(n) = \Delta(\Delta^{p-1} f(n)) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k f(n+p-k), n \geq 0, p \in \boldsymbol{N}^*.$$

O funcţie f: $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{C}$ se numeşte *funcţie original* dacă îndeplineşte condiţiile:

i. $f(n) = 0$ pentru $n < 0$

ii. există numerele reale pozitive $M = M(f)$ şi $R = R(f)$ astfel încât $|f(n)| \leq MR^n$, oricare ar fi $n \geq 0$.

Se numeşte *transformata z* a funcţiei original f funcţia F: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ cu valorile

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}, z \in D \subset \boldsymbol{C},$$

unde D_f este un domeniu de convergenţă care depinde de f.

Operaţia de determinare a funcţiei F se notează prin operatorul $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I}[f(n)](z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}, n \in \boldsymbol{Z}.$$

În cele ce urmează vom folosi notaţiile $F(z)$ şi $\mathcal{I}[f(n)]$.

Dacă se renunță la prima condiție din definiția funcției original atunci suma din expresia transformatei *z* se extinde de la $-\infty$ la ∞. În acest caz transformarea *z* se mai numeşte *transformarea Laplace discretă*.

Proprietăți ale transformării z directe şi ale transformării z inverse

P₁. Liniaritatea

$\mathcal{J}[\alpha f(n)+\beta g(n)]=\alpha\mathcal{J}[f(n)]+\beta\mathcal{J}[g(n)]$ oricare ar fi scalarii $\alpha,\beta\in\boldsymbol{C}$.

Domeniul de convergență $D_cf\cap D_cg\subseteq D_c(\alpha f+\beta g)$.

P₂. Proprietatea de asemănare (schimbare a scalei)

$$\mathcal{J}[a^{-n}f(n)]=\mathcal{J}[f(n)]\Big|_{z\to az}=F(az),\ n\in\boldsymbol{Z},\ a\in\boldsymbol{C^*}.$$

Domeniul de convergență $D_ca^{-n}f=\{z|\ az\in D_cf\}$.

P₃. Proprietăți de întârziere sau translatarea la dreapta respectiv la stânga cu *p* paşi a funcției original

$$\mathcal{J}[f(n-p)]=z^{-p}[F(z)+\sum_{k=1}^{p}f(-k)z^{k}],\ n\in\boldsymbol{Z},p\in\boldsymbol{N^*}$$

$$\mathcal{J}[f(n+p)]=z^{p}[F(z)-\sum_{k=0}^{p-1}f(k)z^{-k}],\ n\in\boldsymbol{Z},p\in\boldsymbol{N^*}$$

Domeniul de convergență D_cf.

P₄. Proprietatea de derivare a imaginii (modularea cu o rampă sau cu o rampă modulată exponențial)

$$\mathcal{J}[nf(n)]=-z\frac{d}{dz}F(z),\ n\in\boldsymbol{Z}$$

$$\mathcal{J}[n\alpha^{n}f(n)]=-z\frac{d}{dz}F(\frac{z}{\alpha}),\ n\in\boldsymbol{Z},\ \alpha\in\boldsymbol{C^*}$$

Domeniul de convergență $D_c\ tf=D_cf$, iar $z=0$ apare ca un punct singular izolat.

P₅. Proprietatea transformării diferenței finite şi a diferenței de ordinul $p\geq 2$

$$\mathcal{J}[\Delta f(n)]=(z-1)F(z)-zf(0),\ n\in\boldsymbol{Z}$$

$$\mathscr{I}[\Delta^p f(n)] = (z-1)^p F(z) - z\sum_{k=0}^{p-1}(z-1)^{p-k-1}\Delta^k f(0),\ n \in \mathbf{Z}$$

Domeniul de convergență $D_c f \subseteq D_c\Delta f \subseteq \ldots \subseteq Dc\Delta^k f$.

P$_6$. Proprietatea de inversare a timpului (rangului)

$$\mathscr{I}[f(-n)] = F(z^{-1}),\ n \in \mathbf{Z}$$

Domeniul de convergență $D_c f(-n) = \{z \in \mathbf{C} |\ z^{-1} \in D_c f\}$.

P$_7$. Proprietatea sumei

$$\mathscr{I}[\sum_{k=0}^{n} f(k)] = \frac{1}{1-z^{-1}}F(z)$$

Domeniul de convergență $D_c f \subseteq D_c\Sigma f$.

P$_8$. Derivarea în raport cu un parametru

$$\mathscr{I}[\frac{\partial f(n,p)}{\partial p}] = \frac{\partial F(z,p)}{\partial p},\ n \in \mathbf{Z} \text{ și } \mathscr{I}[f(n,p)] = F(z,p)$$

Domeniul de convergență $D_c f$.

P$_9$. Formula sumei unei serii

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \lim_{z\to 1} F(z)$$

P$_{10}$. Formula valorii inițiale

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) \text{ sau } f(0) = \lim_{z\to\infty}(1-z^{-1})F(z)$$

P$_{11}$. Formula valorii finale

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$$

P$_{12}$. Transformarea unei funcții periodice f cu perioada $T \in \mathbf{N}^*$

$$\mathscr{I}[f(n)] = \frac{1}{z^T-1}\sum_{n=0}^{T-1} f(n)z^{T-n}$$

P$_{13}$. Transformarea produsului de convoluție al funcțiilor original

$$(f*g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k)$$

$$\mathscr{I}[(f*g)(n)] = \mathscr{I}[f(n)]\cdot\mathscr{I}[g(n)].$$

P$_{14}$. Convoluția complexă

$$\mathcal{Z}[f(n)g(n)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\lambda)G(\frac{z}{\lambda})\frac{1}{\lambda}d\lambda$$

P$_{15}$. Transformarea z inversă

$$f(n) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} F(z)z^{n-1}dz = \sum_{k=1}^{m} Rez_{\Gamma}\left\{F(z)z^{n-1}, a_k\right\}$$

unde a_k reprezintă polii sau punctele singulare esențiale ale funcției $F(z)z^{n-1}$.

- Formulă alternativă pentru calculul reziduurilor imaginii de argument inversat

$$Rez_{\Gamma}\{F(z)z^{n-1}, a_k\} = Rez_{\Gamma'}\{F(\frac{1}{z})z^{1-n}, a_k\}$$

- Formula seriei tayloriene a imaginii de argument inversat

$$F(n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(F\left(\frac{1}{z}\right)\right)_{z=0}, \ n\in \mathbf{N}$$

- Formula de calcul recurent bazat pe valoarea inițială

$$f(n) = \lim_{z\to\infty} z^n\left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)z^{-k}\right]$$

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

7.2. Probleme rezolvate

7.2.1. Să se determine transformata z a funcției impuls δ şi a funcției unitate u, definite prin:

$$\delta(n) = \begin{cases} 0, n \neq 0 \\ 1, n = 0 \end{cases} \text{ şi } u(n) = \begin{cases} 0, n < 0 \\ 1, n \geq 0 \end{cases}$$

Soluție: Aplicând operatorul $\mathcal{Z}$ obținem

$$\mathcal{Z}[\delta(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = 1$$

$$\mathcal{I}[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}.$$

7.2.2. Să se determine transformata z a funcției

$$f(n) = u(n-5).$$

Soluție: Aplicând teorema de întârziere, se obține

$$\mathcal{I}[f(n)] = z^{-5}\mathcal{I}[u(n)] = z^{-5}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z^4(z-1)},$$

pentru $|z| > 1$.

7.2.3. Să se determine transformatele z ale funcțiilor $\sin \omega n$ şi $\cos \omega n$, pentru $\omega > 0$.

Soluție: Avem $|\sin \omega n| \le 1^n$, deci $R(\sin \omega n) = 1, |z| > 1$. La fel şi pentru $\cos \omega n$.

Pentru calculul transformatelor z cerute folosim următoarele rezultate:

$$\cos \omega n = \frac{e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}}{2}$$

$$\mathcal{I}[e^{\lambda n}] = \frac{z}{z-e^{\lambda}} |z| > e^{Re \lambda}, \lambda \in \mathbf{C}.$$

Avem succesiv:

$$\mathcal{I}[\sin \omega n] = \frac{1}{2i}\mathcal{I}[e^{i\omega n} - e^{-i\omega n}] = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-e^{i\omega}} - \frac{z}{z-e^{-i\omega}}\right) =$$

$$= z\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}\frac{1}{z^2 - 2z\cos \omega + 1} = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z\cos \omega + 1},$$

$$\mathcal{I}[\cos \omega n] = \frac{1}{2}\mathcal{I}[e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}] = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{i\omega}} + \frac{z}{z-e^{-i\omega}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2z^2 - z(e^{i\omega} + e^{-i\omega})}{z^2 - 2z\cos \omega + 1} = \frac{z(z-\cos \omega)}{z^2 - 2z\cos \omega + 1}.$$

7.2.4. Să se determine originalul funcției f al transformatei z de forma

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 1}, z \neq \pm 1.$$

Soluție: Descompunem fracția $\frac{z}{z^2-1}$ în fracții simple și obținem

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{z-1} - \left(1 - \frac{1}{z+1}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\{\mathcal{J}[1] - \mathcal{J}[(-1)^n]\} = \frac{1}{2}\mathcal{J}[1 - (-1)^n],$$

deci
$$\mathcal{J}^{-1}[F(z)] = f(n) = \frac{1}{2}[1 - (-1)^n].$$

7.2.5. Să se rezolve ecuația cu diferențe

$$\Delta^2 y(n) - 4y(n) = 0 \text{ cu condițiile } \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Soluție: Folosind definiția diferenței $\Delta y(n)$ obținem

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$$

$$\Delta^2 y(n) = y(n+2) - 2y(n+1) + y(n)$$

și atunci ecuația devine

$$y(n+2) - 2y(n+1) - 3y(n) = 0.$$

Aplicînd transformata z asupra ecuației, folosind proprietatea de întârziere, cu notațiile $\mathcal{J}[y(n)] = Y(z)$ și luând $p = 1$, găsim succesiv

$$z^2\left[Y(z) - y(0) - \frac{y(1)}{z}\right] - 2z[Y(z) - y(0)] - 3Y(z) = 0$$

$$z^2 Y(z) - z^2 - 3z - 2zY(z) + 2z - 3Y(z) = 0$$

$$Y(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - 2z - 3} = \frac{z}{z-3},$$

și aplicând transformarea inversă găsim

$$y(n) = 3^n, n \geq 0.$$

7.2.6. Să se rezolve următoarea ecuaţie cu diferenţe

$$\begin{cases} \Delta^3 y(n) + 2\Delta^2 y(n) = 0 \\ y(0) = 1, y(1) = -2, y(2) = -1 \end{cases}$$

Soluţie: Exprimăm diferenţele de ordinul doi şi trei care apar în ecuaţie, după cum urmează

$$\Delta^2 y(n) = y(n+2) - 2y(n+1) + y(n)$$

$$\Delta^3 y(n) = y(n+3) - 3y(n+2) + 3y(n+1) - y(n)$$

şi, prin înlocuire, ecuaţia dată devine

$$y(n+3) - y(n+2) - y(n+1) + y(n) = 0.$$

Conform proprietăţii a doua de întârziere, aplicînd transformata z asupra ecuaţiei şi notând $\mathcal{I}[y(n)] = Y(z)$ se obţine succesiv

$$z^3[Y(z) - y(0) - \frac{y(1)}{z} - \frac{y(2)}{z^2}] - z^2[Y(z) - y(0) - \frac{y(1)}{z}] -$$

$$-z[Y(z) - y(0)] + Y(z) = 0,$$

$$(z^3 - z^2 - z + 1)Y(z) = z^3 - 3z^2,$$

$$Y(z) = \frac{z^3 - 3z^2}{z^3 - z^2 - z + 1} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Aplicând transformarea inversă rezultă soluţia ecuaţiei iniţiale

$$y(n) = (-1)^n - n, n \geq 0.$$

7.3. Probleme propuse

7.3.1. Să se determine, pentru următoarele funcţii original, $R(f)$ şi transfomata z.

a) $f(n) = e^{\lambda n}, \lambda \in C, n \geq 0$; b) $f(n) = (-1)^n, n \geq 0$

Răspuns:

a) $\mathcal{I}[e^{\lambda n}] = \dfrac{z}{z - e^{\lambda}}, |z| > Re\,\lambda$

b) $\mathcal{I}[(-1)^n] = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n} = \dfrac{z}{z+1}, |z| > 1.$

7.3.2. Să se determine transformata z a funcțiilor următoare:

a) $f(n)=\begin{cases} 0, n=2k \\ 1, n=2k+1 \end{cases}$; b) $f(n)=\begin{cases} 0, n=0 \\ \frac{1}{n}, n\geq 1 \end{cases}$

Răspuns:

a) $\frac{z}{z^2-1}, \left|\frac{1}{z}\right|<1$; b) $\ln\frac{z}{z-1}$.

7.3.3. Să se determine transformata z a funcției original de forma:

$$f_1(n)=n;\ f_2(n)=n^2;\ f_3(n)=n^3;$$

$$f_4(n)=n^4;\ f_5(n)=(-1)^n n$$

Răspuns: $\mathcal{I}[f_1(n)]=\frac{z}{(z-1)^2}$; $\mathcal{I}[f_2(n)]=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$;

$\mathcal{I}[f_3(n)]=\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$; $\mathcal{I}[f_4(n)]=\frac{z(z^3+11z^2+11z+1)}{(z-1)^5}$;

$$\mathcal{I}[f_5(n)]=-\frac{z}{(z+1)^2}.$$

7.3.4. Să se determine transformatele z ale funcțiilor:

a) $\sin^2 n$; b) $\cos^2 n$;

c) $\sin^3 n$; d) $\cos^3 n$.

Răspuns:

a) $\frac{1}{2}[\frac{z}{z-1}-\frac{z(z\cos 2)}{z^2-2z\cos 2+1}]$;

b) $\frac{1}{2}[\frac{z}{z-1}-\frac{z(z-\cos 2)}{z^2-2z\cos 2+1}]$.

Pentru c) şi d) folosim formulele:

$\sin^3 n=\frac{1}{4}(3\sin n-\sin 3n)$ şi $\cos^3 n=\frac{1}{4}(3\cos n+\cos 3n)$.

7.3.5. Să se determine transformatele z ale funcţiilor:

a) $sh\varpi n$; b) $ch\varpi n$.

Răspuns: a) $\dfrac{zsh\omega}{z^2-2zch\omega+1}$; b) $\dfrac{z(z-ch\omega)}{z^2-2zch\omega+1}$.

7.3.6. Să se determine transformatele z ale funcţiilor:

a) na^{n-1}; b) $ne^{-\lambda n}$;

c) $n^2e^{-\lambda n}$; d) $1-e^{-\lambda n}$

Răspuns: a) $\dfrac{z}{(z-a)^2}$; b) $\dfrac{ze^{-\lambda}}{(z-e^{-\lambda})^2}$;

c) $\dfrac{e^{-\lambda}(z+e^{-\lambda})z}{(z-e^{-\lambda})^3}$; d) $\dfrac{z(1-e^{-\lambda})}{(z-1)(z-e^{-\lambda})}$.

7.3.7. Să se determine transformata z inversă a funcţiilor imagine:

a) $F_1(z)=e^{\frac{a}{z}}$;

b) $F_2(z)=\dfrac{2z}{z^2-1}$;

c) $F_3(z)=\dfrac{z^2+2z}{z^3-1}$.

Răspuns: a) $f_1(n)=\dfrac{a^n}{n!}, a\in R$;

b) $f_2(n)=2u(n)=2\begin{cases}0, n=2k\\1, n=2k+1\end{cases}$;

c) $f_3(n)=\begin{cases}0, n=3k, k\geq 0\\1, n=3k+1\\2, n=3k+2\end{cases}$.

7.3.8. Să se rezolve următoarele ecuații cu diferențe:

$$\text{a) } \begin{cases} 3\Delta y(n) - 2y(n) = 0 \\ y(0) = \dfrac{1}{3} \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} \Delta^2 y(n) - 3\Delta y(n) - 4y(n) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 5 \end{cases};$$

$$\text{c) } \begin{cases} \Delta^3 y(n) + 4\Delta^2 y(n) + 4\Delta y(n) = 0 \\ y(0) = 1, y(1) = 0, y(2) = 3 \end{cases}.$$

Răspuns:

a) $Y(z) = \mathcal{J}[y(n)] = \dfrac{z}{3z-5} = \dfrac{1}{3}\dfrac{z}{z-\frac{5}{3}} \Rightarrow y(n) = \dfrac{1}{3}(\dfrac{5}{3})^n, n \geq 0$;

b) $Y(z) = \mathcal{J}[y(n)] = \dfrac{z}{z-5} \Rightarrow y(n) = 5^n, n \geq 0$;

c) $Y(z) = \mathcal{J}[y(n)] = \dfrac{z^3+z^2+2z}{z^3+z^2-z-1} = \dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z}{(z+1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(n) = u(n) + (-1)^n n, n \geq 0.$

7.3.9. (Șirul lui Fibonacci) Să se determine soluția explicită a ecuației cu diferențe:

$$\begin{cases} y(n+2) = y(n+1) + y(n) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1, n \geq 0 \end{cases}$$

Răspuns: $\mathcal{J}[y(n)] = Y(z) = \dfrac{z}{z^2-z-1}$, de unde rezultă

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n].$$

7.3.10. Să se determine originalul f_i, $i = 1, 2$ al transformatelor z date de relațiile

$$\text{a)}\, F_1(z) = \frac{z}{(z-4)^2}\ ; \quad \text{b)}\, F_2(z) = ln\frac{z+1}{z};$$

$$\text{c)}\ F_3(z) = \frac{z^3+10z^2+z}{(z^2-1)^2}; \quad \text{d)}\ F_4(z) = -\frac{ze^{-\lambda}-2z^2e^{-\lambda}+z^2}{(z-1)(z-e^{-\lambda})^2};$$

$$\text{e)}\ F_5(z) = \frac{sin\,3}{z^3-2z^2\,cos\,3+z}.$$

Răspuns: a) $f_1(n) = 4^{n-1}n$;

b) $f_2(n) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$;

c) $f_3(n) = n[2(-1)^n + 3]$;

d) $f_4(n) = e^{-\lambda n}(n+1) - 1$;

e) $f_5(n) = sin(3n-6)$.

Anexa 1

Transformatele Laplace ale unor funcții uzuale

Nr.	f(x)	$\mathfrak{L}$[f(x)]
1.	$u(x - a),\ a \geq 0$	$\frac{e^{-as}}{s}$
2.	x	$\frac{1}{s^2}$
3.	$x^n,\ n \in \mathbf{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4.	$x^\alpha, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
5.	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
6.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
7.	$e^{ax}, a \in \mathbf{C}$	$\frac{1}{s-a}$
8.	$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{s - \ln a}$
9.	$\sin x$	$\frac{1}{s^2+1}$
10.	$\cos x$	$\frac{s}{s^2+1}$

11.	$sh\,x$	$\dfrac{1}{s^2-1}$
12.	$ch\,x$	$\dfrac{s}{s^2-1}$
13.	$sin^2 x$	$\dfrac{2}{s(s^2+4)}$
14.	$cos^2 x$	$\dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}$
15.	$sin\,\omega x, \omega > 0$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
16.	$cos\,\omega x, \omega > 0$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
17.	$sh\omega x, \omega > 0$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
18.	$ch\omega x, \omega > 0$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
19.	$\dfrac{sin\,x}{x}$	$\dfrac{\pi}{2}-arctgs$
20.	$\dfrac{shx}{x}$	$\dfrac{1}{2}ln\dfrac{s+1}{s-1}$
21.	$\dfrac{1-e^{ax}}{x}$	$ln\dfrac{s-a}{s}$
22.	$\dfrac{e^{\beta x}-e^{\alpha x}}{x}$	$ln\dfrac{s-\alpha}{s-\beta}$
23.	$ln\,x$	$-\dfrac{ln\,s}{s}+\dfrac{k}{s}$

24.	$x\sin\omega x$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
25.	$x\cos\omega x$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
26.	$xsh\omega x$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2-\omega^2)^2}$
27.	$xch\omega x$	$\dfrac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}$
28.	$e^{ax}\sin\omega x, a\in C, \omega>0$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
29.	$e^{ax}\cos\omega x, a\in C, \omega>0$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
30.	$e^{ax}sh\omega x$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$
31.	$e^{ax}ch\omega x$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$
32.	$xe^{ax}\sin\omega x, a\in C, \omega>0$	$\dfrac{2\omega(s-a)}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$
33.	$xe^{ax}\cos\omega x$	$\dfrac{(s-a)^2-\omega^2}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$
34.	$xe^{ax}sh\omega x$	$\dfrac{2\omega(s-a)}{[(s-a)^2-\omega^2]^2}$
35.	$xe^{ax}ch\omega x$	$\dfrac{(s-a)^2+\omega^2}{[(s-a)^2-\omega^2]^2}$

Anexa 2

Transformatele *z* ale unor funcții uzuale

Nr.	f(n)	$\mathfrak{I}$[f(n)]
1.	$\delta(n)$	1
2.	$u(n)=1$	$\frac{z}{z-1}, \lvert z\rvert > 1$
3.	a^n	$\frac{z}{z-a}, \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
4.	$e^{\lambda n}$	$\frac{z}{z-e^{\lambda}}, \lvert z\rvert > Re\,\lambda$
5.	$f(n)=1, n=2k+1$	$\frac{z}{z^2-1}, \lvert z\rvert > 1$
6.	$\frac{1}{n}, n \geq 1$	$ln\frac{z}{z-1}, \lvert z\rvert > 1$
7.	n	$\frac{z}{(z-1)^2}, \lvert z\rvert > 1$
8.	$(-1)^n n$	$-\frac{z}{(z+1)^2}, \lvert z\rvert > 1$
9.	$\sin\omega n$	$\frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$
10.	$\cos\omega n$	$\frac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$

11.	$sin^2 \omega n$	$\frac{1}{2}[\frac{z}{z-1} - \frac{z(z-cos 2)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}]$
12.	$cos^2 \omega n$	$\frac{1}{2}[\frac{z}{z+1} + \frac{z(z-cos 2)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}]$
13.	$sh\omega n$	$\frac{zsh\omega}{z^2 - 2zch\omega + 1}$
14.	$ch\omega n$	$\frac{z(z-ch\omega)}{z^2 - 2zch\omega + 1}$
15.	na^{n-1}	$\frac{z}{(z-a)^2}$
16.	$ne^{-\lambda n}$	$\frac{ze^{-\lambda}}{(z-e^{-\lambda})^2}$
17.	$1-e^{-\lambda n}$	$\frac{z(1-e^{-\lambda})}{(z-1)(z-e^{-\lambda})}$
18.	C_n^{α}	$(1+\frac{1}{z})^{\alpha}, \|z\| > 1$
19.	$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}, \|z\| > 1$

BIBLIOGRAFIE

1. Brînzănescu, V., Stănăşilă, O., *Matematici speciale – teorie, exemple, aplicații*, Ed. ALL EDUCATIONAL, Bucureşti, 1998
2. Bulboacă, T., *Matematici speciale*, Litografia Universității „Aurel Vlaicu” din Arad, Arad, 1993
3. Chiriță, S., *Probleme de matematici superioare*, E.D.P. Bucureşti, 1989
4. Craioveanu, M., Megan, M., *Analiză matematică – conform programelor de perfecționare şi pentru obținerea gradului II în învățământ*, Tipografia Universității din Timişoara, 1981
5. Cristescu, G., *ALGADED*, *Vol. 3 Ecuații diferențiale şi sisteme de ecuații diferențiale*, Litografia Universității „Aurel Vlaicu” din Arad, Arad, 1991
6. Cristescu, G., Bota, C., *Ecuații diferențiale şi cu derivate parțiale*, Ed. Mirton, Timişoara, 2001
7. Crstici, B., şi colectiv, *Matematici speciale*, E.D.P. Bucureşti, 1981
8. Demidovitch, B., *Recueil d'exercices et de problemes d'analyse mathematique*, Editions Mir, Moscou, 1972
9. Drăguşin, L., Drăguşin, C., Radu, C., *Calcul integral şi ecuații diferențiale – exerciții şi probleme*, Ed. DU STYLE, 1996
10. Flondor, D., Donciu, N., *Algebră şi analiză matematică – culegere de probleme*, vol. 2, E.D.P. Bucureşti, 1979
11. Haimovici, A., *Ecuații diferențiale şi ecuații integrale*, E.D.P. Bucureşti, 1965
12. Ionescu, D. V., *Ecuații diferențiale şi integrale*, E.D.P. Bucureşti, 1972
13. Kovacs, A., Stan, I., Anghelescu, R., *Matematici speciale – curs pentru uzul studenților*, vol. 1 şi 2, Centrul de multiplicare, Universitatea Tehnică Timişoara, 1993
14. Mânzatu, E., Struțu, C., *Matematici speciale*, Ed. Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 1972
15. Micula, Gh., Pavel, P., *Ecuații diferențiale şi integrale prin probleme şi exerciții*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1989
16. Mocică, Gh., *Probleme la limită pentru ecuații cu derivate parțiale*, Inst. Politehnic, Bucureşti, 1993

17. Moroşanu, G., *Ecuații diferențiale. Aplicații*, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1989
18. Moț, G., şi colectiv, *Matematici superioare pentru ingineri şi economişti*, vol. 2, Ed. Viața arădeană, Arad, 2000
19. Pavel, G., Tomuța, I., Gavrea, I., *Matematici speciale – aplicații*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1981
20. Popoviciu, N., *Matematici speciale. Teorie şi aplicații*, vol. 1, Ed. Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 1995
21. Popoviciu, N., *Ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi – teorie şi aplicații la ecuațiile fizicii matematice*, Imprimeria Muzeului Național de Artă, Bucureşti, 1996
22. Popoviciu, N., *Matematici speciale – serii Fourier, transformări integrale, transformări discrete*, vol. 3, Imprimeria Muzeului Național de Artă, Bucureşti, 1997
23. Redheffer, R., *Differential Equations – Theory and Applications*, Jones and Bartelett Publishers, Boston, 1991
24. Roşculeț, M., *Analiză matematică*, E.D.P. Bucureşti, 1973
25. Rudner, V., Nicolescu, C., *Probleme de matematici speciale*, E.D.P. Bucureşti, 1982
26. Rus, I. A., *Ecuații diferențiale şi integrale. Întrebări de control*, Litografia Universității Cluj-Napoca, 1975
27. Rus, I. A., Pavel, P., Micula, Gh., *Probleme de ecuații diferențiale şi cu derivate parțiale*, E.D.P. Bucureşti, 1982
28. Şabac, I. Gh., *Matematici speciale*, vol. 1, E.D.P. Bucureşti, 1981
29. Şabac, I. Gh., şi colectiv, *Matematici speciale*, vol. 2, E.D.P. Bucureşti, 1984
30. Trandafir, R., *Probleme de matematici pentru ingineri*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1977