# Capitolul 6

# ECUAŢII DIFERENŢIALE ŞI CALCULUL VARIAŢIONAL

*Moto: Când ştii ce urmăreşti,*
*înfăptuirea devine o problemă de tim*p.

**1. 1. Modele matematice reprezentate prin ecuaţii diferenţiale**

a. În faza actuală obiectul cursului este sesizat mai mult intuitiv. Cu cunoştinţe elementare putem astfel răspunde la următorul test:

Prin ce se aseamănă şi prin ce diferă următoarele:

(1) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

(2) $x^3 - x + 1 = 0$

(3) $ff = x^2 - x + 1$

(4) $a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

(5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin x$

(6) $x'' - 3x' + 3x = t^2 + 1$ cu $x'(0) = a, x(0) = b$?

Punând această întrebare unei serii de anul al doilea, am primit răspunsuri cât se poate de încurajatoare pentru a putea ilustra obiectul temei.

Toate cinci sunt ecuaţii. Deci se pune problema găsirii unei “mărimi” care verifică ecuaţia. În ecuaţiile (1) şi (2) această mărime este o variabilă, pe când în ecuaţiile (3) – (6) ea este o funcţie. Ecuaţiile (1) şi (2) sunt ecuaţii algebrice, iar ecuaţiile (3) – (6) sunt ecuaţii diferenţiale. În ecuaţiile (3) şi (6) funcţia căutată depinde de o singură variabilă, deci este ecuaţie diferenţială ordinară, iar în (4) şi (5) funcţia necunoscută depinde de mai multe variabile, deci este ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale ((4) de ordinul I, (6) de ordinul II).

Ecuaţiei (1) îi putem calcula toate soluţiile reale, pe când în ecuaţia (2) (ecuaţia lui Newton) putem calcula rădăcina reală cu aproximaţie.

Observăm că ecuaţia (3) poate fi scrisă $\left(f^2\right)' = 2\left(x^2 - x + 1\right)$, deci

$$f^2 = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x + C$$

care se obţine printr-o operaţie de integrare, operaţia numită şi quadratură.

În celelalte cazuri încă nu putem şti dacă există soluţie, respectiv dacă soluţia este unică. În ce condiţii soluţia este unică ? Pe ce interval este definită soluţia? Cum putem formaliza ecuaţiile date? Cum le închidem într-o clasă largă de probleme pentru care avem metode de rezolvare – printr-un algoritm care conduce direct la soluţia algoritm de integrare) respectiv printr-u “algoritm de aproximare” a soluţiei.

Asupra “soluţiei” unei ecuaţii diferenţiale venim cu precizări în paragraful 2.

b. Nu este greu să sesizăm deci că principalele probleme sunt:

(a) - existenţă (a soluţiei)

(b) - unicitate

(c) - determinarea soluţiei (prin metode elementare de integrare respectiv prin “metode aproximative”)

(d) - calităţile soluţiei (teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale)

(e) - stabilitatea soluţiei.

Cum problemele de tipul ( c ) conduc la simpli algoritmi de rezolvare, ele fac obiectul seminarului. În diferite discipline aplicative, acordându-se o atenţie deosebită ecuaţiilor diferenţiale ordinare, cursul tratează aceste ecuaţii, ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul I fiind obiectul seminarului, iar ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul al doilea studiindu-se la matematici speciale.

c. Cum ajungem la un model ? Experimental, prin măsurători, utilizând rezultatele sesizăm "tendinţa" fenomenelor, "tendinţă" pe care o descriem într-un anumit limbaj statistic, sau de altă natură (ca să nu zicem un limbaj matematic şi astfel statisticienii să se simtă jigniţi).

De exemplu, s-a determinat experimental că radioactivitatea este direct proporţională cu numărul de atomi din substanţa radioactivă. Astfel, dacă x(t) este cantitatea de materie nedezintegrată la momentul t, viteza de dezintegrare $x'(t)$ este proporţională cu x(t), adică $-x'(t) = \alpha x(t)$ unde $\alpha$ este o constantă pozitivă depinzând de materialul radioactiv.

## 1.2. Soluţie generală. Soluţie particulară. Soluţie singulară. Metode elementare de integrare a ecuaţiilor diferenţiale.

*Definirea termenilor este*
*primul pas spre înţelegere.*

**a. Noţiunea de ecuaţie diferenţială.**

În termeni expeditivi (de primă impresie), o ecuaţie diferenţială este o ecuaţie a cărei necunoscută este o funcţie de una sau mai multe variabile şi în care intervin atât funcţia necunoscută cât şi derivatele sale până la un anumit ordin.

Ordinul maxim al acestor derivate se numeşte ordinul ecuaţiei. Dacă funcţia necunoscută este funcţie de mai multe variabile, atunci ecuaţia se numeşte cu derivate parţiale. Dacă depinde de un singur argument, atunci ecuaţia diferenţială se numeşte ordinară. Ne vom ocupa de ecuaţii diferenţiale ordinare.

b. **Forma generală a ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordinul unu** este următoarea:

$$F(t, x, x') = 0 \tag{1}$$

unde t este argumentul funcţiei necunoscute $x = x(t),\ x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$ este derivata sa, iar F este o funcţie reală continuă pe un domeniu al spaţiului $R^3$. În general $t \in I = (a, b)$, deci aleargă într-un interval deschis al axei reale (I putând fi finit sau infinit).

Vom numi soluţie a ecuaţiei (1), pe I, o funcţie $x : I \to R$ continuu diferenţiabilă pe I şi care verifică ecuaţia (1) pe I, adică:

$F(t, x(t), x'(t)) = 0,\ (\forall) t \in I.$

În anumite situaţii, care pot fi precizate cu ajutorul teoremei funcţiilor implicite, ecuaţia (1) se poate scrie sub forma $x' = f(t, x)$ unde $f : \Omega \to R,\ \Omega$ fiind o mulţime deschisă din $R^2$. Forma (2) o vom numi forma normală şi va fi forma pe care o vom întâlni în general. Vom spune că f defineşte ecuaţia diferenţială pe $\Omega$.

Obiectul teoriei ecuaţiilor diferenţiale îl constituie următoarele probleme fundamentale:

(1) Existenţa soluţiilor. Să se găsească condiţii asupra lui f din (2) pentru ca (2) să admită soluţii.

(2) Unicitatea soluţiilor

(3) Rezolvarea efectivă a ecuaţiei diferenţiale

(4) Stabilitatea soluţiilor

(5) Proprietăţi ale soluţiilor (probleme calitative).

Forma generală a ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordinul **"n"** este următoarea:

$$F(t, x, x',..., x^{(n)}) = 0 \qquad (1')$$

unde F este presupusă continuă în raport cu ansamblul variabilelor $t, x, x',\ldots,x^{(n)}$ pe un domeniu din $R^{n+2}$.

În ipoteza că $\dfrac{\partial F}{\partial x^{(n)}} \neq 0$, numărul "n" se numeşte ordinul ecuaţiei diferenţiale. Dacă în particular, ecuaţia este explicită în raport cu $x^{(n)}$.

$$x^{(n)} = f(t, x, x',..., x^{(n-1)}) \qquad (2')$$

ecuaţia diferenţială ( $2'$ ) se numeşte "formă normală".

Forma:

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)x = f(t), \qquad (3')$$

unde $a_k(t)$, f(t) sunt funcţii date cu $a_0(t) \neq 0$ se numeşte ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n. Se numeşte soluţie particulară a ecuaţiei ( $1'$ ) o funcţie de n ori derivabilă pe un anumit interval I, x = x(t) pentru care

$$F(t, x(t), x'(t),..., x^{(n)}(t)) = 0 \ (\forall) t \in I \qquad (4)$$

O soluţie

$$x = x(t, c_1, c_2,..., c_n) \qquad (5)$$

ce depinde de n constante independente se numeşte **"soluţie generală"** sau **"integrală generală".** Ecuaţia (5) reprezintă ecuaţia unei familii de curbe ce depinde de **"n"** constante arbitrare. De aceea, soluţia generală poartă şi numele **de familia de curbe integrale ale ecuaţiei**. O soluţie particulară se obţine prin particularizarea constantelor şi se numeşte şi **curbă integrală a ecuaţiei diferenţiale**. Soluţia singulară a ecuaţiei diferenţiale este o soluţie care poate fi obţinută prin particularizarea constantelor din soluţia generală. De exemplu $x(y')^2 - yy' + 1 = 0$ are soluţia generală

$y(x) = cx + \frac{1}{c}$ $\qquad y(x) = 2\sqrt{x}$ este soluţie singulară.

În principiu, problema rezolvării unei ecuaţii diferenţiale revine la determinarea soluţiei generale pentru ecuaţia considerată. Preocupările sunt pe două direcţii:

- analiza proprietăţilor soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale şi studierea unor tipuri de ecuaţii pentru care determinarea soluţiei generale se reduce la calculul de primitive;
- metode de rezolvare aproximativă sau de rezolvare numerică a ecuaţiilor diferenţiale.

Probleme particulare – problema Cauchy, problema polilocală şi problema mixtă.

**Problema Cauchy** pentru ecuaţia $(1')$ constă în determinarea constantelor $c_1, c_2, ..., c_n$ din soluţia generală prin condiţiile iniţiale:

$$(\text{c.i.}) \quad \begin{cases} x(t_0, c_1, ..., c_n) = x_0 \\ x'(t_0, c_1, ..., c_n) = x_0 \\ .......... .......... .......... .. \\ x^{(n-1)}(t_0, c_1, ..., c_n) = x_0^{(n-1)} \end{cases}$$

unde $t_0, x_0, x'_0, \ldots, x_0^{(n-1)}$ sunt valori iniţiale date.

Un alt mod de a determina din familia de curbe integrale, o anumită curbă integrală, o constituie problema polilocală: de a determin $c_1, ..., c_n$ punând condiţia găsirii curbei integrale care trece prin n puncte $M_0(t_i, x_i),\ i = \overline{1, n}$ ale planului. Deci

$$\begin{cases} x(t_0, c_1, ..., c_n) = x_1 \\ x(t_1, c_1, ..., c_n) = x_2 \\ .......... .......... .......... . \\ x(t_n, c_1, ..., c_n) = x_n \end{cases}$$

(Condiţii polilocale).

**Problemă mixtă:** în anumite puncte să fie cunoscute valorile integralei iar în altele valorile anumitor derivate, încât sistemul care se formează să admită soluţie unică pentru $c_1, c_2, ..., c_n$.

**d. Istoricul ecuaţiilor diferenţiale.**

Ecuaţiile diferenţiale au apărut după descoperirea calculului diferenţial şi integral, adică după lucrările lui Newton şi Leibniz.

În 1693, Leibniz a integrat o ecuaţie liniară şi omogenă de ordinul întâi. Soluţia ecuaţieie liniare cu coeficienţi constanţi de ordinul n a fost găsită de Euler în 1739. Metoda variaţiei constante a fost elaborată de Lagrange în 1775. În secolul al XVIII-lea, teoria ecuaţiilor diferenţiale determină progresul decisiv în mecanica ordinară şi celestă, teoria mareelor, meteorologie şi a diferitelor domenii din fizică.

Wronski, matematician şi filozof introduce determinantul său în 1812.

Punerea problemei generale de existenţă şi unicitate a soluţiei unei ecuaţii diferenţiale este opera secolului al XIX-lea. Prima demonstraţie a existenţei soluţiei a fost dată de Cauchy în 1884. Lipschitz simplifică esenţial condiţia care-i poartă numele. Metoda aproximaţiilor succesive este propusă de Picard în 1890. Această metodă este prezentată sub formă generală într-un spaţiu metric prin utilizarea unui operator contractant, de către Banach în 1892.

## 1.3. Metode elementare de integrare a ecuaţiilor diferenţiale

*Pentru a finaliza un lucru,*
*Trebuie mai întâi început.*

Întreg secolul XVIII şi o parte din secolul XIX au fost dominate de efortul unor matematicieni, printre care L.Euler (1707-1783), J.Bernoulli (1667-1748), J.Lagrange (1736-1813) şi alţii, de a da soluţii prin quadraturi unui număr cât mai mare de ecuaţii diferenţiale. Se pune problema exprimării soluţiei generale a ecuaţiilor diferenţiale ca funcţii elementare sau ca primitive de funcţii elementare.

**1. Ecuaţii cu variabile separabile**

*a. Numim astfel, ecuaţiile de forma:*

$$x' = f(x)\cdot g(x), t \in I = (a,b) \tag{1}$$

unde $f \in C(I), g \in C(x_1, x_2)$ cu $g(x) \neq 0$ pe $(x_1, x_2)$. Considerând $x(t_0) = x_0$ separând variabilele şi integrând de la $t_0$ la t ( $t_0$ fiind arbitrar în I) obţinem:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\tau}{g(\tau)} = \int_{t_0}^{t} f(s)ds, t \in I \tag{2}$$

Notând

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tau}{g(\tau)}, x \in (x, x) = J \tag{3}$$

G este continuă şi monotonă pe J, deci inversabilă. Din (3) şi (2) obţinem:

$$x(t) = G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right), t \in I \tag{4}$$

Am obţinut astfel expresia soluţiei x a ecuaţiei (1) cu condiţia Cauchy $x(t_0)=x_0$. Reciproc, funcţia dată de (4) este continuu diferenţiabilă pe I şi derivata sa este $x(t)=\frac{f(t)}{G(x)}=f(t)g(x)$, deci este soluţie pentru (1). Evident că x(t) este definită doar pentru acele valori ale lui t pentru care $\int_{t_0}^{t} f(s)ds$ se află în domeniul funcţiei $G^{-1}$.

*b. Aplicaţii.* Integraţi ecuaţiile următoare , cu problema Cauchy acolo unde se specifică aceasta.

1. $y'\sin 2x+\sin 2y=0$

R: Ecuaţia se scrie: $\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin 2y}{\sin 2x}$. Pentru $\sin 2y\neq 0, \sin 2x\neq 0$ avem

$\frac{dy}{\sin 2y}=-\frac{dx}{\sin 2x}$ (*)

*Metoda I.* Integrând între $x_0$ şi x avem: $\int_{y_0}^{y(x)}\frac{d\tau}{\sin 2\tau}=-\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sin 2t}$ sau Intgy + Intgx = $\text{Intgx}_0+\text{Intgy}_0$ care se mai scrie: $\text{tgxtgy}=\text{tgx}_0\text{tgy}_0$.

*Metoda a II-a.* Calculând primitivele în (*) obţinem: Intgy + Intgx = Inc sau tgytgx = c. (**). Soluţia este exprimată implicit în ambele cazuri (**) reprezintă integrala generală.

2. $\sqrt{1+x^2}\,y+\sin y=0.$

**R:** Ecuaţia se mai scrie $\frac{dy}{\sin y}+\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=0$ Integrând obţinem:

$\text{Intg}\frac{y}{2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\text{Inc}$ sau $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\text{tg}\frac{y}{2}=c.$

3. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0.$ Aflăm curba care trece prin (0;1)

**R:** Integrala generală este $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=c.$ Cu condiţia iniţială găsim c = 1.

4. $y = \sqrt{1+x+y}.$

*Indicaţie:* Notând 1+x+y = $u^2$ obţinem ecuaţie cu variabile separabile. *Obţinem:* $2\left(\sqrt{1+x+y}-\ln\left(1+\sqrt{1+x+y}\right)\right)=x+c.$

5. $(x+y)^2 y' = a^2.$

*Indicaţie:* Notăm x + y = u

6. $(1+e^x)yy' = e^x, y(0) = 1.$

**R:** $\frac{y^2}{2} = \ln\left(1+e^x\right)+c.$ Din y(0)=1 obţinem $c=\frac{1}{2}.$ Deci soluţia particulară este $\frac{y^2-1}{2}=\ln\left(1+e^x\right).$

7. $1+y^2+xyy'=0$ cu $y(1)=0.$

**R:** $x\sqrt{1+y^2}=1.$

8. $y' = xe^x(y^2+2y+2).$ Curba integrală care trece prin M(0, -1).

**R:** $y=-1+tg(1+(x-1)e^x).$

**2. Ecuaţii diferenţiale omogene:**

a. Spunem că f(x,y) este omogenă de grad m de omogenitate, dacă pentru orice t este verificată relaţia: $f(tx,ty)' = t^m f(x,y).$

În particular, pentru m=0 avem: $f(tx,ty)=f(x,y).$ Luând $t=\frac{1}{x}$ obţinem:

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y).$$

deci funcţia omogen[ de gradul zero poate fi pus[ sub forma: $f(x, y) = f(1, \frac{y}{x})$.

Să rezolvăm deci ecuaţia diferenţială cu f(x,y) omogenă de gradul zero (numită şi ecuaţie omogenă în sensul Euler). Deci

$$y = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \tag{5}$$

Să facem schimbarea de funcţie $y(x) = x \cdot u(x)$ (deci noua funcţie să fie u(x).

$y' = xu' + u.$ Ecuaţia (5) devine cu variabile separabile pe care o ştim integra. Astfel: $xu' + u = f(1, u)$ sau $u' = \frac{f(1, u) - u}{x}$; $\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}$ de unde

$\ln x = \int \frac{du}{f(1, u) - u}$. Dacă F(u) este o primitivă a funcţiei $\frac{1}{f(1, u) - u}$, atunci integrala generală a ecuaţiei (5) este dată de relaţia $\ln x = F\left(\frac{y}{x}\right) + c.$

b. Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii diferenţiale omogene. Ecuaţii de forma $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{ax + by + c}\right)$

(a) dacă $(x_0, y_0)$ este soluţia sistemului $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$

(b) dacă $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.

În cazul (a), prin schimbarea de variabilă şi de funcţie $x = x + x_0$, $y = y + y_0$ obţinem o ecuaţie diferenţială omogena de gradul zero.

În cazul (b) în care notând u = x+y obţinem o ecuaţie cu variabile separabile.

*Observaţie:* Pentru rigurozitate să observăm că $f(1,u) \neq u$ pe intervalul pe care calculăm primitiva F(u). În plus f continuă pentru asigurarea existenţei lui F.

**Aplicaţii:**

1. $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

**R:** Notăm $y = ux, y' = u'x + u$.

Ecuaţia devine $u'x + u = \dfrac{u}{1+u^2}$ sau $x = -\dfrac{u^3}{1+u^2}$ De unde $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{(1+u^2)du}{u^3}$.

Prin integrare pe intervalul pozitiv se obţine:

$\ln x = \dfrac{1}{2u^2} - \ln u + \ln c$, de unde $y = ce^{y^2/2x^3}$.

2. $y = \dfrac{x+y-3}{x-y+1}$

**R:** $\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ admite soluţia (1,2). Efectuând schimbarea de funcţie şi de variabile y=y+2 şi x = x+1 obţinem $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$. Integrala generală va fi

$\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2+y^2} = c.$

3. $y = \dfrac{2(x+y)-1}{x+y-2}$.

**R**: Familia de curbe integrale $2x - y + \ln(x+y-1) = c$ se obţine prin substituţia $u = x + y$ (care reprezintă o schimbare de funcţie).

4. $(xy - y)\cos\dfrac{2y}{x} + x = 0, x \neq 0$

**R:** Notând y = ux obţinem $u\cos^2 u + \frac{1}{x} = 0$ cu soluţia generală $cx = e^{-\frac{1}{4}(2u+\sin 2u)}$. Revenind la funcţia iniţială avem: $cx = e^{\frac{1}{4}\left(2\frac{y}{x}+\sin 2\frac{y}{x}\right)}$.

5. $y = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ cu $y(1) = 0$

**R:** $y^2 - 2x^2 \ln|x|$

6. $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$

**R:** $\ln|y| + (x/y)^{1/2} = c$

3. **Ecuaţii diferenţiale afine (liniare şi neomogene) de ordinul I** sunt ecuaţiile de forma:

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{6}$$

unde $a, b - C(I)$.

Pentru accesibilitate, prezentăm de la început algoritmul cunoscut sub numele de metoda variaţiei constantei pentru obţinerea integralei generale.

(a), Ecuaţia omogenă ataşată ecuaţiei afine.

$x' = a(t)x$ are soluţia generală

$$x(t) = ce^{\int a(t)dt} \tag{*}$$

(b) Căutăm şi determinăm c = c(t) încât (*) să fie soluţie pentru (6).

$$x(t) = c(t)e^{\int a(t)dt} + ca(t)e^{\int a(t)dt}$$

Înlocuind în (6) avem:

$$c(t)e^{\int a(t)dt} + ca(t)e^{\int a(t)dt} = ca(t)e^{\int a(t)dt} + b(t)$$

Deci

$c(t) = b(t)e^{-\int a(t)dt}$, de unde

$$c(t) = \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt + K \tag{7}$$

Înlocuind (7) în (*) avem:

$$x(t) = e^{\int a(t)dt}\left(\int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt + K\right) \tag{8}$$

Se verifică uşor că (8) este soluţie generală pentru (6).

**4. Ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli:**

$$x' = a(t)x + b(t)x^{\alpha} \quad \text{cu} \quad \alpha \in R \setminus \{0,1\},\ a, b \in C(I)$$

*Exerciţiu:* Arătaţi că prin substituţia $y = x^{1-\alpha}$ ecuaţia Bernoulli devine liniară.

**5. Ecuaţia diferenţială de tip Riccati (1676-1754).**

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \tag{9}$$

$a, b, c \in c(I)$.

În general, nu este integrabilă prin cuadraturi. Să observăm că dacă $\varphi(t)$ esteo soluţie particulară pentru (9), atunci prin $y = x - \varphi, (9)$ devine ecuaţie de tip Bernoulli în y.

**6. Ecuaţii de tip Lagrange sunt cele de tipul**

$$x = t\varphi(x') + \psi(x') \tag{10}$$

cu $\varphi$ şi $\psi$ continuu diferenţiabile pe un anumit interval al axei reale şi $\varphi(p) \neq p, (\forall)p$ în acest interval.

Să observăm că prin substituţia după $x' = p$ ecuaţia (10) poate fi modificată prin derivare la o ecuaţie liniară în t de variabilă p. Într-adevăr, derivând (10), obţinem:

$$x' = \varphi(x') + t\varphi'(x')x'' + \psi'(x') \cdot x''$$

sau

$$p - \varphi(p) = t\varphi'(p) \cdot \frac{dp}{dt} + \psi \frac{dp}{dt}$$

de unde

$$\frac{dt}{dp} = \frac{\varphi(p) \cdot t}{p - \varphi(p)} + \frac{\psi(p)}{p - \varphi(t)} \qquad (11)$$

Soluţia generală a lui (11) fiind de forma: $t = h(p, c)$, înlocuind în (10) obţinem:

$x = h(p, c)\varphi(p) + \psi(p)$ - forma parametrică a integralei generale.

**7. Ecuaţii de tip Clairaut (1713-1765)** sunt cazul particular când $\varphi(p) = p$ în (10). Deci

$$x = tx' + \psi(x') \qquad (12)$$

Procedând ca în cazul (10), derivând în (12) obţinem:

$$x' = x' + tx'' + \psi'(x') \cdot x'' \qquad (13)$$

Deci

$$x''(t + \psi'(x')) = 0 \qquad (14)$$

(14) are două categorii de soluţii: Prima este definită de ecuaţia $x'' = 0$, care prin integrare dă

$$x = c_1 t + c_2 \qquad (15)$$

Înlocuind (15) în (12) găsim că $c_2 = \psi(c_1)$. Deci $x = c_1 t + \psi(c_1)$ este soluţia generală a ecuaţiei Clairaut. A doua categorie de soluţii se obţine din $1 + \psi'(x') = 0$. Procedând ca în cazul ecuaţiei Lagrange, notând $x' = p$, obţinem ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} t = -\psi(p) \\ x = -\psi(p) \cdot p + \psi(p) \end{cases} \qquad (16)$$

ale unei funcţii pe care o numim soluţie singulară a ecuaţiei Clairaut. Ea este înfăşurătoarea familiei de drepte reprezentată de integrala generală.

**8. Alte tipuri de ecuaţii** rezolvabile prin quadraturi sunt ecuaţiile care provin din anularea unei diferenţiale totale şi ecuaţii rezolvabile prin metoda factorului integrant. Ecuaţiile de primul tip sunt rezolvate prin următoarea:

**Teoremă**. Fie ecuaţia diferenţială

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{17}$$

unde P(x,y),Q(x,y) sunt de clasă $C^1$ pe domeniul $D \subset R^2$, care pe D verifică relaţia

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{18}$$

Integrala generală a lui (17) este dată de

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C,\ (x_0,y_0) \in D \tag{19}$$

***Demonstraţie:*** Conform condiţiei (18), P şi Q sunt derivatele parţiale ale unei funcţii g(x,y) încât $dg = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ şi deci

$$g(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt \tag{20}$$

din (17) obţinem integrala generală g(x, y)=C. Din (20) şi ultima relaţie obţinem (19). În cazul în care Pdx+Qdy nu este o diferenţială totală în D, căutăm o funcţie $\mu(x,y)$ cu derivate parţiale de ordinul întâi continue pe D, încât $\mu(x,y)\cdot(Pdx + Qdy)$ să reprezinte o diferenţială totală exactă. Funcţia $\mu$ se numeşte factor integrant. Determinarea lui $\mu$ se face uşor după cum vom vedea în aplicaţie în cazul în care căutăm $\mu = \mu(x)$ sau $\mu = \mu(y)$.

**9. Aplicaţii la ecuaţiile de tipurile 3 – 8.** Să se rezolve problema Cauchy (a) şi (b) unde:

1. $y'\cos x + y\sin x + 4\cos^3 x = 0$ (a)
$y(\pi) = 1$ (b)

*Soluţie:* Integrând ecuaţia omogenă $y'\cos x + y\sin x = 0$ obţinem $y = c\cos x$. Aplicând variaţia constantei, considerăm $y = u(x)\cos x$ obţinem $u(x) = -4\sin x + k$.

Soluţia generală este $y = k\cos x - 4\sin x\cos x, x \in R$. Cu (b) determinăm k=-1.

2. $xy' + y + 3y^2 x\ln x = 0, x > 0$ (a)
$y(1) = 5$ (b)

*Soluţie:* Este o ecuaţie Bernoulli cu $\alpha = 2$. Cu $z = \frac{1}{y}$ obţinem $z - \frac{1}{x}z - 3\ln x = 0$ cu soluţia generală $z = x\left(c + \frac{3}{2}\ln^2 x\right), x > 0$. Revenind la funcţia y şi utilizând (b) obţinem: $y = \frac{10}{x\left(2 + 15\ln^2 x\right)}, x > 0$.

3. Să se rezolve ecuaţia $xy' + 2y^2 - 3y - 2 = 0$, ştiind că admite soluţia $y_1 = 2$.

*Soluţie*: Prin substituţia $y = 2 + \frac{1}{z}$ ecuaţia Riccati devine $z - \frac{8}{x}z - \frac{2}{x} = 0$ cu soluţia generală $z = x^8\left(c - \frac{1}{4x^8}\right)$. Deci $y = 2 + \frac{4}{4cx^8 - 1}$.

4. Integraţi ecuaţia $y = xy'^2 + \ln y', y' > 0$.

*Soluţie:* Notând $y' = p$, ecuaţia Lagrange devine: $y = xp^2 + \ln p$ care derivată în raport cu x devine $\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x + \frac{1}{p^2(p-1)} = 0$ cu soluţia generală: $x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(c - \ln p - \frac{1}{p}\right)$. În plus $y = xp^2 + \ln p, p > 0, p \neq 1,$ sistem care reprezintă integrala generală.

5. Integraţi ecuaţia $y = xy' + y'2$ (Clairaut).

*Soluţie:* Notând $y' = p$ şi derivând în raport cu x, ecuaţia Clairaut devine: $p = xp' + p + 2pp'$, sau $p'(x + 2p) = 0$. $p' = 0, p = c$ ne dă soluţia generală, $y = xc + c^2, x \in R$ care reprezintă o familie de drepte. Integrala singulară este dată de $x = -2p, y = -p^2, p \in R$ care prin eliminarea lui p devine: $x^2 + 4y = 0$ care reprezintă înfăşurătoarea familiei de drepte dată de soluţia generală.

6. Să se integreze ecuaţia: $\left(\ln(2x - y) + \frac{2x}{2x - y}\right)dx - \frac{x}{2x - y}dy = 0.$

*Soluţie:* Cum $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, forma diferenţială din enunţ este o diferenţială totală. Putem scrie: $\int_{x_0}^{x}\left(\ln(2x - y_0) + \frac{2x}{2x - y_0}\right)dx - \int_{y_0}^{y}\frac{x}{2x - y}dy = c$ sau $x\ln(2x - y) = c,\ 2x - y > 0$ care reprezintă integrala generală.

7. Să se integreze ecuaţia diferenţială $(y^2 \sin x - x)dy + (y^3 \cos x + y)dx = 0$ ştiind că admite un factor integrant numai de y.

*Soluţie:* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(y^2\sin x - x\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(y^3\cos x + y\right)\right)$ şi $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ sau $\mu\left(y^2\cos x - 1\right) = \frac{\partial \mu}{\partial y}\left(y^3\cos x + y\right) + \mu\left(1 + 3y^2\cos x\right)$ deci înmulţind ecuaţia dată cu $\frac{1}{y^2}$ ea devine o diferenţială totală cu soluţia $\int_{x_0}^{x}\left(y_0\cos t + \frac{t}{y_0}\right)dt + \int_{y_0}^{y}\left(\sin\frac{x}{t^2}\right)dt = c.$ Obţinem astfel integrală generală:

$y\sin x + \frac{x}{y} = c, y \neq 0.$

## 1.2. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n cu coeficienţi constanţi

*Forma desăvârşită este*
*Atinsă de abstract.*

a. Din rezultatele anterioare, observăm că odată găsit un sistem fundamental de soluţii, găsirea soluţiei generale rămâne o chestiune de calcul (care se reduce la un algoritm simplu, conţinut de metoda variaţiei constantelor). În cele ce urmează ne ocupăm de găsirea unui sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0 \tag{1}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt constante reale. Deoarece expresia din (1) apare suficient de frecvent, este practic să utilizăm operatorul diferenţial:

$$L(D)(x) = x^{(n)} + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n x \tag{2}$$

definit pe clasa $C^n(R)$ şi să-i studiem proprietăţile. Să notăm cu

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n, \lambda \in C. \tag{3}$$

Să observăm că

$$L(D)(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} L(\lambda), \tag{4}$$

$(\forall)\ t \in R,\ \lambda \in C.$

Să observăm că dacă $L(\lambda) = 0$. $i = \overline{1, n}$ atunci conform lui (4) $L(D)\left(e^{\lambda_i t}\right) = 0.$ Deci dacă $\lambda$ este rădăcină a polinomului caracteristic (3), atunci $e^{\lambda t}$ este soluţie pentru (1).

**Teorema 1.** Fie $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ rădăcinile ecuaţiei caracteristice $L(\lambda) = 0,$ cu multiplicităţile $m_1, ..., m_k\ (m_1 + ... + m_k = n).$ Atunci, sistemul fundamental se soluţii pentru (1) este:

$$\begin{array}{l} e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, ..., t^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, ..., t^{m_2 - 1} e^{\lambda_2 t} \\ \text{.......... .......... .......... ......} \\ e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, ..., t^{m_k - 1} e^{\lambda_k t} \end{array} \tag{5}$$

**Remarca 1:** În cazul în care unele rădăcini caracteristice sunt complexe, sistemul (8) conţine şi funcţii complexe. Evităm această situaţie, înlocuind acest sistem fundamental prin altul conţinând numai funcţii reale. Într-adevăr, să presupunem că $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$ $\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_j,$ sunt complexe $(2 \le 2j \le k),$ restul rădăcinilor fiind reale. Cu alte cuvinte:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1, ..., \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \\ \overline{\lambda}_1 = \alpha_1 + i\beta_1, ..., \overline{\lambda}_j = \alpha_j + i\beta_j \end{array} \tag{6}$$

Ţinând seama de relaţia Euler $e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \sin\beta t)$ vom înlocui în tabloul (8) seriile de funcţii corespunzătoare rădăcinilor $\lambda_1$ şi $\lambda_j$ prin:

$$\begin{array}{l} e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t,\ te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t,...,\ t^{m_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t \\ e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t,\ te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t,...,\ t^{m_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t \end{array} \tag{7}$$

În mod similar se procedează cu $(\lambda_2, \overline{\lambda}_2), \ldots, (\lambda_j, \overline{\lambda}_j)$.

Întrucât prin aceasta s-au efectuat operaţii liniare (semisuma şi semidiferenţa pe i), între liniiile tabloului (8) noul sistem de funcţii va fi format tot din soluţii ale ecuaţiei (1) şi va fi tot liniar independent (deci tot fundamental).

**Remarca 2.** În cazul în care f(t) din ecuaţia neomogenă asociată lui (1) este un cvasipolinom, adică:

$f(t) = e^{\lambda t}P(t), (a)$ sau

$f(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t P_1(t) + \sin\beta t P_2(t);\quad (b)$

unde P(t), $P_1(t)$, $P_2(t)$ sunt polinoame, determinarea soluţiei particulare poate evita metoda variaţiei constantelor căutând soluţie particulară pentru ecuaţia neomogenă

$$x^{(n)} + a, x^{(n-1)} + .... + a_n x,\ t \in I \tag{8}$$

de forma

$$\tilde{x}(t) = t^1 e^{\lambda t} Q(t) \tag{9}$$

în cazul (a) cu $\lambda$ rădăcină de multiplicitate 1 a ecuaţiei caracteristice $L(\lambda) = 0$, (I=0 dacă $\lambda$ nu este rădăcină caracteristică). Q având gradul lui P şi:

$$\tilde{x}(t) = t^1 e^{\lambda t}\left(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t\right)$$

în cazul (b), $Q_1$ şi $Q_2$ fiind polinoame algebrice de grad egal cu max (grad $P_1$, grad $P_2$) iar 1 este ordinul de multiplicitate a lui $\gamma = \alpha + i\beta$ ca rădăcină caracteristică.

# CALCULUL VARIAŢIONAL

**1. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior.**

**I. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n cu coeficienţi variabili. Fie**

$$Ly \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y, a_0(x) \neq 0, \tag{1}$$

unde $a_i(x)$, $x \in [a, b]$, $i = 0,1,..., n$ sunt funcţii continue date. Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul n, omogenă, are forma

$$Ly = 0. \tag{2}$$

1. Dacă $y_1, y_2,..., y_n$ este un sistem fundamental de soluţii pentru (2), atunci

$$y^0 = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n \tag{3}$$

$C_i$, $i = 1,2,..., n$, fiind constante arbitrare, reprezintă soluţia generală a ecuaţiei omogene (2).

Ecuaţia omogenă, care admite sistemul fundamental de soluţii $y_1, y_2,..., y_n$ este

$$W(y_1, y_2,..., y_n, y) = 0 \tag{4}$$

unde

$$W(y_1, y_2,..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

reprezintă wronskianul sistemului de funcţii $y_1, y_2,..., y_n$.

Dacă se cunoaşte o soluţie particulară a ecuaţiei omogene (2), fie aceasta $y_1(x)$, atunci prin schimbarea de funcţie

$$y(x) = y_1(x) \cdot z(x) \tag{5}$$

se obţine o ecuaţie în necunoscuta z, cu ordinul micşorat cu o unitate.

2. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene

$$Ly = f(x), \text{ cu } f(x) \text{ continuă,} \tag{6}$$

este

$$y = y^0 + \bar{y}, \tag{7}$$

unde $y^0$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene (2), iar $\bar{y}$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (6).

**Metoda variaţiei constantelor (metoda lui Lagrange):** dacă se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii $y_1, y_2, ..., y_n$ al ecuaţiei omogene (2), atunci o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene se determină după formula

$$\bar{y}(x) = K_1(x)y_1 + K_2(x)y_2 + ... + K_n(x)y_n \tag{8}$$

unde funcţiile $K_i(x), i = 1,2,..., n,$ se deduc din sistemul

$$\begin{cases} K_1'y_1 + K_2'y_2 + ... + K_n'y_n = 0 \\ K_1'y_1' + K_2'y_2' + ... + K_n'y_n' = 0 \\ .......... .......... .......... .......... ....... \\ K_1'y_1^{(n-1)} + K_2'y_2^{(n-1)} + ... + K_n'y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_0(x)}, \end{cases}$$

prin n cvadraturi.

II. **Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n cu coeficienţi constanţi.** 3. Pentru determinarea unui sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei diferenţiale liniare omogene de ordinul n cu coeficienţii $a_i, \ i = 0,1,..., n,$ constanţi

$$Ly = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 \tag{10}$$

se caută soluţii de forma $y = e^{rx}$, ajungându-se astfel la ecuaţia caracteristică

$$F(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_n = 0 \tag{11}$$

a) Dacă $F(r)$ are rădăcinile reale si distincte $r_1, r_2, ..., r_n$, atunci un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (10) este

$$y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, y_n = e^{r_n x} \tag{12}$$

astfel că soluţia generală a ecuaţiei omogene (10) este

$$y^0 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x} \tag{13}$$

b) Dacă printre rădăcinile ecuaţiei caracteristice există şi rădăcini complexe simple, de exemplu $r = \alpha \pm i\beta$, atunci fiecărei perechi de rădăcini complexe conjugate îi corespund două soluţii liniar independente:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,\ y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \tag{14}$$

c) Dacă printre rădăcinile ecuaţiei caracteristice există şi rădăcini reale multiple (de exemplu $r_1$ este rădăcină multiplă de ordin p+1), atunci fiecărei astfel de rădăcini îi corespund soluţii liniar independente (în număr egal cu ordinul de multiplicitate al rădăcinii) de forma

$$y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = e^{r_2 x}, \ldots,\ y_{p+1} = x^p e^{r_1 x} \tag{15}$$

d) Dacă printre rădăcinile ecuaţiei caracteristice există şi rădăcini complexe multiple (de exemplu

$r_1 = r_2 = \ldots = r_{p+1} = \alpha + i\beta, \bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \ldots = \bar{r}_{p+1} = \alpha - i\beta$), atunci fiecărei astfel de rădăcini îi corespunde un număr de soluţii liniar independente egal cu dublul numărului ce indică ordinul de multiplicitate:

$$\begin{aligned} &y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = x e^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, y_{p+1} = x^p e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ &y_1^* = e^{\alpha x} \sin \beta x, y_2^* = x e^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, y_{p+1}^* = x^p e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned} \tag{16}$$

3. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene de ordinul n cu coeficienţii constanţi

$$Ly = f(x), \text{ cu } f \text{ funcţie continuă,} \tag{17}$$

este

$$y = y^0 + \bar{y} \tag{18}$$

unde $y^0$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene (10), iar $\bar{y}$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (17).

În multe situaţii se alege soluţia particulară $\bar{y}$ după forma lui f(x). Se foloseşte metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

a) Fie $f(x) = P_m(x)$, polinomul de gradul m în x. Dacă r=0 nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, se caută $\bar{y}$ de forma

$$\bar{y} = Q_m(x) \tag{19}$$

unde $Q_m(x)$ este un polinom oarecare, de grad m. Dacă r=0 este rădăcină multiplă de ordin k, atunci se caută soluţia particulară de forma

$$\bar{y} = x^k Q_m(x) \tag{20}$$

b) Fie $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$. Dacă $r = \alpha$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, se caută soluţia particulară de forma

$$\bar{y} = e^{\alpha x} Q_m(x) \tag{21}$$

iar dacă $r = \alpha$ este rădăcină multiplă de ordin k, se ia

$$\bar{y} = x^k e^{\alpha x} Q_m(x) \tag{22}$$

c) Fie $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_{m1}(x)\cos\beta x + P^*_{m_1}(x)\sin\beta x\right]$şi fie

$m = \max(m_1, m_2)$. Dacă $r = \alpha \pm i\beta$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, atunci se caută soluţia particulară de forma

$$\bar{y} = e^{\alpha x}[Q_m(x)\cos\beta x + Q^*_m(x)\sin\beta x] \tag{23}$$

iar dacă $r = \alpha \pm i\beta$ este rădăcină multiplă de ordin k, se ia

$$\bar{y} = x^k e^{\alpha x}[Q_m(x)\cos\beta x + Q^*_m(x)\sin\beta x] \tag{24}$$

d) Dacă $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+...$, unde $f_1(x)$ au una din formele menţionate, atunci se caută soluţia particulară $\bar{y}(x)=\bar{y}_1(x)+\bar{y}_2(x)+...$, cu $\bar{y}_i(x)$ corespunzător formei lui $f_1(x)$.

**Exerciţii.**

1. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:

a) $y''-y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=0$

b) $y''+2y'+y=0, y(0)=0, y'(0)=1$

c) $y'''-y''+y'-y=0$

d) $64y^{(8)}+48y^{(6)}+12y^{(4)}+y''=0$

e) $y^{(4)}+2y^{(3)}+3y''+2y'+y=0$

***Rezolvare***

a) Ecuaţia caracteristică $r^2-1=0$ are rădăcini reale şi distincte $r_1=-1, r_2=1$ astfel că $y^0=C_1e^{-x}+C_2e^x$. Din condiţiile iniţiale obţinem $C_1=C_2=1$ şi deci soluţia particulară căutată este $y^0=e^{-x}+e^x$.

b) Avem $r^2+2r+1=0, r_1=r_2=-1$. După (15) rezultă că sistemul fundamental de soluţii este $y_1=e^{-x}, y_2=xe^{-x}$, astfel că $y^0=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$. Din condiţiile iniţiale deducem $C_1=0$ şi $C_2=1$ şi $y^0=xe^{-x}$. y

c) $r^3-r^2+r-1=0 \Leftrightarrow r_1=1, r_2=-i, r_3=i$. Deci, după (14), avem

$y^0=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x.$

d)

$$64r^8 + 48r^6 + 12r^4 + r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2(4r^2+1)^3 = 0 \Rightarrow$$

şi

$$\Rightarrow r_1 = r_2 = 0, r_3 = r_4 = r_5 = \frac{1}{2}i, r_6 = r_7 = r_8 = -\frac{1}{2}i$$

$$y^0 = C_1 + C_2 x + C_3\cos\frac{x}{2} + C_4\sin\frac{x}{2} + C_5 x\cos\frac{x}{2} + C_6 x\sin\frac{x}{2} +$$
$$+ C_7 x^2\cos\frac{x}{2} + C_8 x^2\sin\frac{x}{2}.$$

e)
$$r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(r^2 + r + 1\right)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, r_3 = r_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

şi

$$y^0 = C_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 x e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x +$$
$$+ C_i x e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

2. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale următoare prin metoda variaţiei constantelor:

a) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$

b) $y'' + y = \mathrm{tg}x$

***Rezolvare***

a) Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei omogene ataşate este $r^4 + 3r + 2 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = -2, r_2 = -1$. Deci $y^0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$. Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene de forma $\overline{y} = K_1(x)e^{-2x} + K_2(x)e^{-x}$. După (9) obţinem

$$K_1' e^{-2x} + K_2' e^{-x} = 0,\ -2K_1' e^{-2x} + K_2' e^{-x} = (1+e^x)^{-1}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$y = K_1 e^{-2x} + K_2 e^{-x} - e^{-x} + \left(e^{-2x} + e^{-x}\right)\ln\left(1 + e^{x}\right).$$

b) $y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -i,\ r_2 = i$ şi $y'' = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

Căutăm soluţia particulară de forma $\bar{y} = K_1(x)\cos x + K_2(x)\sin x.$ Deci

$\bar{y} = \cos x \sin x - \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x \cos x.$ Soluţia generală a ecuaţiei

neomogene este $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$

3. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

a) $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$

b) $y''' - y'' = x, y(1) = 1, y'(1) = 0, y''(1) = -1$

c) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\left(x^2 + x\right)$

d) $y^{(4)} - y^{(3)} - y' + y = e^{x}$

e) $y'' - y = xe^{x} + x + x^3 e^{-x}$

f) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

g) $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$

h) $y''' - 3y' - 2y = 10(\sin x + x\cos x) - 8x^3$

i) $y'' - 4y = e^{2x}(11\cos x - 7\sin x)$

j) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} - e^{-x}\cos x\, y$

k) $y'' - 2y' + 2y = 2e^{x}\cos x - 4xe^{x}\sin x.$

***Rezolvare***

a) Avem $y'' - 5y' + 6Y = 0$, cu $r^2 - 5r + 6 = 0$ şi $r_1 = 2, r_2 = 3$, astfel că $y^0 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. Deoarece r = 0 nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, căutăm soluţia particulară de forma $\overline{y} = Ax^2 + Bx + c$. Derivăm şi înlocuim în ecuaţie. De aici rezultă A=1, B=C=0 şi deci $\overline{y} = x^2$. Soluţia generală este $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + x^2$.

b) Ecuaţia caracteristică $r^3 - r^2 = 0$ are soluţiile $r_1 = r_2 = 0, r_3 = 1$ astfel că $y^0 = C_1 + C_2x + C_3e^x$. Deoarece r=0 este rădăcină dublă pentru ecuaţia caracteristică, conform cu (20), căutăm o soluţie particulară de forma $\overline{y} = x^2(AX + B)$. Derivând şi înlocuind, soluţia cerută este

$$y = \frac{1}{6} + \frac{x}{2} + e^{x-1} - \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2)$$

c) Soluţia generală a ecuaţiei omogene este $y^0 = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Deoarece r=3 nu este soluţie a ecuaţiei caracteristice, conform cu (21), căutăm soluţia particulară de forma $\overline{y} = e^{3x}(Ax^2 + Bx + C)$. Înlocuind în ecuaţie obţinem $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (x^2 - 2x + 2)e^{3x}/2$.

d) Ecuaţia caracteristică $r^4 - r^2 - r + 1 = 0$ are rădăcinile $r_1 = r_2 = 1, r_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este $y = y^0 + \overline{y}$.

e) Ecuaţia caracteristică $r^2 - 1 = 0$ are rădăcinile $r_1 = -1$, $r_2 = 1$ astfel că $y^0 = C_1e^{-x} + C_2e^x$. Se caută soluţia de forma $\overline{y}(x) = \overline{y}_1(x) + \overline{y}_2(x) + \overline{y}_3(x)$.

Înlocuind pe f(x) în ecuaţia diferenţială obţinem soluţia

$\bar{y}(x)=\frac{1}{4}x(x-1)e^{x}-x-\frac{1}{8}x\left(x^{3}+2x^{2}+3x+3\right)e^{-x}$ şi $y=y^{0}+\bar{y}$.

f) Ecuaţia caracteristică $r^{2}-7r+6=0$ are rădăcinile $r_1=1,\ r_2=6$ şi deci $y^{0}=C_1e^{x}+C_2e^{6x}$. Înlocuind în ecuaţia neomogenă obţinem $\bar{y}=(5\sin x+7\cos x)/74$ şi deci soluţia generală a ecuaţiei neomogene este $y=C_1e^{x}+C_2e^{6x}+(5\sin x+7\cos x)/74$ .

g) Ecuaţia caracteristică $r^{4}+2r^{2}+1=0$ are rădăcinile $r_1=r_2=-i, r_3=r_4=i$ . Se obţine A=-1/8, B=0, astfel că soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x-\frac{1}{8}x^{2}\sin x.$

h) Ecuaţia caracteristică $r^{3}-3r-2=0$ are rădăcinile $r_1=r_2=-1,\ r_3=2,$ astfel că $y^{0}=(C_1+C_2x)e^{-x}+C_3e^{2x}$. Deoarece $f(x)=f_1(x)+f_2(x),$ cu $f_1(x)=10(\sin x+x\cos x),\ f_2(x)=-8x^{3}$, se caută soluţia particulară de forma $\bar{y}(x)=\bar{y}_1(x)+\bar{y}_2(x)$ . Înlocuind se obţine soluţia generală

$$y=(C_1+C_2)e^{-x}+C_3e^{2x}+\left(\frac{1}{5}-x\right)\cos x+\left(\frac{7}{5}-2x\right)\sin x+4x^{3}-18x^{2}+54x-69.$$

i) Ecuaţia caracteristică $r^{2}-4=0$ are rădăcinile $r_1=-2,\ r_2=2$ , astfel că $y^{0}=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$. Deoarece $r=2\pm i$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice. Înlocuind se obţine A =1, B=3 şi soluţia generală este $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+e^{2x}(\cos x+3\sin x)$.

j) Ecuaţia caracteristică $r^{2}+2r+2=0$ şi are rădăcinile $r_{1,2}=-1\pm i$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este $y^0 = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x$. Se obţine A = 1, B =0, C =0, D=1/2. Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei neomogene este $y = e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x + x + \frac{1}{2}x\sin x\right)$.

k) Ecuaţia caracteristică $r^2 - 2r + 2 = 0$, cu rădăcinile $r_{1,2} = 1 \pm i$, implică $y^0 = C_1 e^{x}\cos x + C_2 e^{x}\sin x$. Deoarece $r = 1 \pm i$ este rădăcină simplă pentru ecuaţia caracteristică. Se obţine A =1, B=C=D=0. Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei neomogene este $y = e^{x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x + x^2\cos x\right)$.

**Probleme propuse**

1. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

a) $3y'' - 2y' - y = x^2$

b) $y''' - y = x^2 - 1$

c) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = x^3$

d) $y^{(4)} - y = x^3 + x, y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

e) $y^{(7)} - y^{(2)} = 12x$

f) $y'' + y = xe^{-x}$

g) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$

h) $y'' - 5y' + 6y = \left(x^2 + 1\right)e^{x} + xe^{2x}$

i) $y'' + 2y' = x^2 e^{-2x} + 2x - 1$

j) $y'' - 3y' + 2y = x^2 e^{x}$

k) $y^{(5)} + y^{(3)} = x^2 e^{x}$

l) $y'' + 2y' - 3y = 2xe^{-2x} + (x+1)e^{x}$

m) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' = e^{x}$

n) $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^{x}$

o) $y''' + y'' + y' + y = xe^{x}$

2. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

a) $y'' + y = \cos x$

b) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$

c) $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$

d) $y'' + y' - 2y = (-3x^2 - 23x + 12)\cos 3x + (11x^2 - 5x - 5)\sin 3x$

e) $y'' - 4y = e^{x}[(4-4x)\cos x - (6x+2)\sin x]$

f) $y'' - y = e^{x} x \sin x$

g) $y'' - 2y' + 2y = e^{x}(2\cos x - 4x\sin x)$

h) $y^{(4)} + y^{(3)} = \cos 4x$

3. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

a) $y'' - 4y' + 4y = \sin x \cos 2x$

b) $y''' - 4y' = \cos^2 x$

c) $y^{(4)} - 3y'' - 4y = x^2 + 1 + e^{3x} + 4\cos x$

d) $y'' + y = 2x\cos x \cos 2x$

e) $y'' - 2y' + y = \sin x + \operatorname{sh} x$

f) $y'' - 2y' + 5y = e^{x}(x\cos 2x - x^2 \sin 2x)$

## CALCUL VARIAŢIONAL

## 1. Definiţii. Teoreme. Formule.

**Teorema 1.** Fie

$$J_F(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \qquad (*1)$$

o funcţională. Dintre toate curbele $y = y(x),\ y_{*1} \in C^1[a,b]$, trecând prin punctele $A(a, y(a)), B(b, y(b))$, curba extremală de ecuaţie y = y(x) verifică, în mod necesar, ecuaţia Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y')\right) \qquad (1)$$

(*1 Extremala lui $J_F(.)$ este " punctul " de extrem al funcţionalei $J_F$ (cu aceleaşi caracteristici ca-n cazul funcţiilor)).

**Teorema 2.** Curba $\gamma$ de ecuaţie y = y(x), realizează un extremum al funcţionalei $J_F(y)$, printre toate curbele de clasă $C^1$ care unesc două puncte arbitrare de pe două curbe date $\gamma_1; y = \varphi(x),\ \gamma_2; y = \psi(x)$, dacă verifică ecuaţia (1) şi la extremităţile ei sunt îndeplinite *condiţiile de transversalitate*:

$$[F + (\varphi' - y'(a))F_{y'}]_{x=a} = 0; [F + (\psi' - y'(b))F_{y'}]_{x=b} = 0 \qquad (2)$$

În cazul când curbele $\gamma_1$ şi $\gamma_2$ sunt date implicit prin ecuaţiile $\varphi(x, y) = 0, \psi(x, y) = 0$, atunci condiţiile de transversalitate devin

$$[\varphi_y(F - y'F_{y'}) - \varphi_x F_{y'}]_{x=a} = 0,\ [\psi_y(F - y'F_{y'}) - \psi_x F_{y'}]_{x=b} = 0 \qquad (3)$$

În particular, când curbele $\gamma_1$ şi $\gamma_2$ sunt paralele la axa oy; x = a, x = b, atunci condiţiile de transversalitate se reduc la

$[F_{y'}]_{x=a} = 0,\ [F_{y'}]_{x=b} = 0.$ (4)

**Teorema 3.** Extremalele funcţionalei

$$J_F(\gamma)=\int_a^b F(t,x_1(t),x_2(t),...,x_n(t),x_1'(t),...,x_n'(t)dt \qquad (5)$$

se află printre curbele $\gamma$ (cu capetele fixate), de reprezentare parametrică $x_i=x_i(t),\ i\in\{1,2,...,n\}$, care în mod necesar verifică sistemul Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i'}\right)=\frac{\partial F}{\partial x_i'},\ \ i\in\{1,2,..,n\} \qquad (6)$$

**Teorema 4.** Extremalele funcţionalei

$$\Phi(y)=\int_a^b f(x,y,y',...,y^{(n)})dx \qquad (7)$$

care satisfac condiţiile

$y(a)=a_0, y'(a)=a_1,..., y^{(n-1)}(a)=a_{n-1},$

$y(b)=b_0, y'(b)=b_1,..., y^{(n-1)}(b)=b_{n-1}, a_k, b_k\in R,$

sunt soluţii ale ecuaţiei Euler-Poisson

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)-...+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)=0 \qquad (8)$$

În cazul particular n = 2, pentru ca o curbă $\gamma$, ce uneşte punctul A(a,y(a)) cu punctul B(b,y(b)), să fie extremală trebuie ca la capetele curbei să avem

$[f_{y'}]_{x=a}=0,\ [f_{y'}]_{x=b}=0$ (9)

care sunt condiţiile de transversalitae în acest caz.

**Teorema 5.** Pentru ca o curbă $\gamma$ de clasă $C^1$, care uneşte punctele A(a,y(a)), B(b,(b)), să realizeze un minimum pentru funcţionala

$$J_F=\int_a^b F(x,y,y')dx \qquad (10)$$

este suficient ca

1. curba $\gamma$ să verifice ecuaţia Euler-Lagrange

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$ -

2. curba $\gamma$ să poată fi scufundată într-un câmp de extremale şi de-a lungul curbei $\gamma$ să fie îndeplinită condiţia lui Weierstrass

$$F_{y'y'} > 0$$

3. pentru $F_{y'y'} > 0$ de-a lungul lui $\gamma$, curba integrală a ecuaţiei lui Jacobi $(\eta = \eta(x))$

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right)\eta - \frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}\eta'\right) = 0 \tag{11}$$

care porneşte din punctul (a, 0), să nu intersecteze axa Ox în punctele intervalului a< x <b.

Condiţiile 1) şi 2) sunt suficiente pentru extremum tare (în C [a,b]), iar condiţiile 1), 2) şi 3) sunt suficiente pentru extremum slab (în C [a,b]). Pentru un punct de maxim se inversează semnele inegalităţilor.

$$J_F(u(x,y)) = \int_K F(x,y,u,u_x,u_y)dx\,dy \tag{12}$$

unde F este o funcţie de clasă $C^1$ şi care mai satisface $u_{/c} = g$, C este frontiera domeniului $K \subset R^2$ şi g este o funcţie continuă dată, verifică în mod necesar ecuaţia Euler-Lagrange-Gauss.

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0 \tag{13}$$