11. Ecuații transcendente

Această temă constituie o continuare firească a temei 7: "Ecuații exponențiale și logaritmice nestandard", din *Matematică pentru grupele de performanță*, pentru clasa a X-a.

Considerăm ecuația $f(x)=0$, unde $f : D \to R, D \subseteq R$ este o funcție dată. Dacă *f* este o funcție polinomială nenulă, atașată unui polinom din $C[X]$, ecuația se numește **algebrică**. O ecuație care nu poate fi redusă la o ecuație algebrică, folosind operațiile: adunare, înmulțire, ridicare la putere, etc., se numește **transcendentă**.

De exemplu $x^3-5x+2=0$ reprezintă o ecuație algebrică de gradul 3; arătăm că ecuația $\ln(1+x)=2-2x,\ x>-1$ este transcendentă. Presupunem contrariul: există un polinom nenul $P \in R[X]$ astfel încât pentru funcția sa polinomială *f*, avem: $f(x)=\ln(1+x)+2x-2$, pentru orice $x>-1$. Evident P nu este un polinom constant. Fie grad $P = n \in N^*$. Derivând de n+1 ori în ambii membri ai relației de mai sus, obținem: $0=\dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$, pentru orice $x>-1$.

Punând x = 0, obținem: $0=(-1)^n \cdot n!$, care evident reprezintă o contradicție.

Nu ne propunem să verificăm că anumite ecuații sunt sau nu transcendente, scopul nostru este de a rezolva astfel de ecuații.

Nu există metode generale de rezolvare. Fiecare ecuație propusă trebuie examinată aparte: i se caută caracteristicile și pe baza lor se elaborează un mod de rezolvare.

Vom indica câteva moduri de abordare a acestor ecuații. În mare parte, acestea au fost expuse în tema mai sus amintită, dar de data aceasta având la îndemână puternicul instrument oferit de aparatul analizei matematice.

11.1. Utilizarea monotoniei unor funcții

Amintim câteva rezultate cunoscute din teoria funcțiilor.

11.1.1. Propoziție : Fie $f, g : A \to R, A \subseteq R$.

a) Dacă funcțiile *f* și g sunt strict crescătoare (descrescătoare) pe A, atunci *f*+g este o funcție strict crescătoare (descrescătoare) pe A.

b) Dacă $f, g : A \to (0,\infty)$ sunt strict crescătoare (descrescătoare), atunci $f \cdot g$ este funcție strict crescătoare (descrescătoare).

11.1.2. Propoziţie : Fie $f : A \to B$, $g : B \to C$.

a) Dacă f şi g sunt funcţii strict monotone, de aceeaşi monotonie, atunci $g \circ f$ este strict crescătoare.

b) Dacă f, g sunt funcţii strict monotone, de monotonii diferite, atunci $g \circ f$ este strict descrescătoare.

11.1.3. Propoziţie : Dacă $I \subseteq R$ este interval şi $f : I \to R$ este o funcţie derivabilă pe I, atunci sunt adevărate următoarele afirmaţii:

a) f este crescătoare dacă şi numai dacă $f'(x) \geq 0, \ \forall \ x \in I$.

b) f este descrescătoare dacă şi numai dacă $f'(x) \leq 0, \ \forall x \in I$.

11.1.4. Propoziţie Dacă funcţia f este strict monotonă pe un interval I, iar c este o constantă reală, atunci ecuaţia $f(x) = c$ are pe intervalul I cel mult o soluţie.

Demonstraţie : Fie f o funcţie strict crescătoare. Presupunem că ecuaţia $f(x) = c$ are cel puţin două soluţii diferite x_1, x_2 pe intervalul I. Fie $x_1 < x_2$. Din f strict crescătoare rezultă $f(x_1) < f(x_2)$. Contradicţie cu $f(x_1) = f(x_2) = c$.

11.1.5. Teoremă : Dacă funcţiile f şi g sunt monotone pe intervalul I, de monotonii diferite, cel puţin una dintre ele strict monotonă, atunci ecuaţia $f(x) = g(x)$ are cel mult o soluţie în intervalul I.

Demonstraţie : Fie f strict crescătoare, iar g descrescătoare pe intervalul I. Presupunem că există cel puţin două soluţii diferite x_1, x_2 din intervalul I, ale ecuaţiei $f(x) = g(x)$. Fie $x_1 < x_2$. Atunci $f(x_1) = g(x_1) \geq g(x_2) = f(x_2)$. Contradicţie cu f funcţie strict crescătoare pe intervalul I.

11.1.6. Teoremă : Dacă funcţia f are proprietatea lui Darboux pe intervalul I (în particular dacă f este continuă pe I) şi dacă $a, b \in I$ astfel încât $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci ecuaţia $f(x) = 0$, are cel puţin o soluţie între a şi b.

11.2. Rezolvarea unor ecuații cu ajutorul teoremei lui Rolle şi a teoremei lui Lagrange

11.2.1. Teoremă (Rolle):

Fie $a, b \in R$, $cu\ a < b$, iar $f : [a,b] \to R$ o funcție continuă pe [a,b], derivabilă pe (a,b) şi $f(a) = f(b)$. Atunci există cel puțin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

11.2.2. Consecință : Între două rădăcini ale unei funcții derivabile pe interval se află cel puțin o rădăcină a derivatei.

11.2.3. Teoremă (Lagrange):

Fie $a, b \in R$, $cu\ a < b$, iar $f : [a,b] \to R$ o funcție continuă pe [a,b] şi derivabilă pe (a,b). Atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

11.3. Utilizarea convexității

11.3.1. Definiție : O funcție $f : I \to R$ este convexă pe intervalul $I \subseteq R$ dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$ are loc inegalitatea:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2).$$

Dacă inegalitatea este de sens contrar, funcția se numeşte concavă. Dacă inegalitățile precedente sunt stricte, atunci spunem că *f* este strict convexă (strict concavă).

11.3.2. Observație : Funcția *f* este concavă pe intervalul I dacă şi numai dacă *–f* este convexă.

11.3.3. Teoremă (Jensen): Fie $I \subseteq R$ un interval, iar $f : I \to R$ o funcție. Atunci f este convexă dacă şi numai dacă oricare ar fi $n \in N$, $n \ge 2$, $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ şi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda n \ge 0$,cu $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda n = 1$, are loc:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

11.3.4. Propoziție :

a) Produsul dintre o funcție convexă şi o funcție constantă pozitivă este o funcție convexă.

b) O sumă de funcții convexe este o funcție convexă.

c) Dacă $g : I \to J$ este convexă pe intervalul I, iar $f : J \to R$ este convexă şi crescătoare pe intervalul J, atunci $f \circ g$ este convexă.

d) Dacă $f : I \to J$ este inversabilă pe intervalul I, iar $g : J \to I$ este inversa sa, atunci:

1) f convexă şi crescătoare $\Rightarrow$ g concavă şi crescătoare

2) f convexă şi descrescătoare $\Rightarrow$ g convexă şi descrescătoare

e) Dacă $f : I \to R$ este convexă şi neconstantă pe intervalul I, atunci f nu-şi poate atinge valoarea cea mai mare în interiorul intervalului.

Demonstraţie : Punctele a) şi b) se verifică imediat. Demonstrăm c). Din g convexă pe I, rezultă $g((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)g(x_1) + tg(x_2)$, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I, \forall t \in [0,1]$. Cum f este crescătoare şi convexă, rezultă: $(f \circ g)((1-t)x_1 + tx_2) \le$ $f((1-t)g(x_1) + tg(x_2)) \le (1-t)(f \circ g)(x_1) + t(f \circ g)(x_2)$, deci $f \circ g$ este convexă.

Atenţie : Compusa a două funcţii convexe nu este neapărat o funcţie convexă. Contraexemplu: Fie $g : [-1,1] \to [0,1], g(x) = x^2$, iar $f : [0,1] \to R, f(x) = -x$. Deci f şi g sunt convexe, dar $(f \circ g)(x) = -x^2$ nu este convexă.

d) Demonstrăm numai 1). Dacă f este crescătoare, atunci şi $g = f^{-1}$ este crescătoare. Arătăm că g este concavă. Pentru $y_1\ y_2 \in J$ există $x_1, x_2, x \in I$ astfel încât $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x) = (1-t)y_1 + ty_2$. Din f convexă rezultă: $f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2) = (1-t)y_1 + ty_2$. Dar f este crescătoare şi de aici avem: $(1-t)x_1 + tx_2 \le x$, adică $(1-t)g(y_1) + tg(y_2) \le g((1-t)y_1 + ty_2)$, adică g este concavă.

e) Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că f îşi atinge cea mai mare valoare în x_0 din interiorul intervalului I. Deci există $x_1, x_2 \in I$ astfel încât $x_1 < x_0 < x_2$ şi $f(x_1) < f(x_0)$, $f(x_2) < f(x_0)$. Punem $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$. Înmulţind prima inegalitate cu (1-t) şi a doua cu t şi adunăm: $(1-t)f(x_1) + tf(x_2) < f(x_0) = f((1-t)x_1 + tx_2)$, relaţie care contrazice convexitatea lui f.

11.3.5. Propoziţie : Dacă funcţia $f : I \to R$ este strict convexă pe intervalul I, iar $g : I \to R$ este o funcţie liniară, atunci ecuaţia $f(x) = g(x)$ are cel mult două soluţii pe intervalul I.

Demonstraţie : Admitem că există cel puţin trei soluţii diferite x_1, x_2, x_3. Fie $x_3 \in (x_1, x_2)$. Atunci există $\lambda \in (0,1)$ astfel încât: $x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Dar $f(x_3) = g(x_3) = \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. Contradicţie cu f strict convexă.

11.4. Probleme rezolvate

R11.1.1 Să se rezolve ecuația:

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 6x\ln x + 2 = 0,\ \ x \geq 0.$$

Soluție :

Considerăm funcția $f:(0,\infty) \to R$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 6x\ln x + 2$.

Atunci $f'(x) = 3x^2 - 12x + 6\ln x + 6$ și $f''(x) = 6\dfrac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, pentru orice $x \in (0,\infty)$.

Variația funcției f este redată în tabelul următor:

x	0		1	
$f''(x)$		+ + + +	0	+ + + +
$f'(x)$		- - -	0	+ + + +
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

Deducem că x = 1 este unica soluție.

R11.1.2 Să se rezolve în R ecuația: $\left(\sqrt{3}\right)^x - 2^{x-1} = 1$.

Soluție :

Fie $f: R \to R$, $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x - 2^{x-1}$. Atunci

$f': R \to R$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\left(\sqrt{3}\right)^x \ln 3 - 2^x \ln 2\right)$ cu rădăcina

$x_0 = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$. Se verifică că $x_0 \in (2,4)$.

Variația funcției f dată de prima derivată este redată în tabloul:

x	$-\infty$		2		x_0		4		∞
$f'(x)$		+	+	+	0	-	-	-	
$f(x)$			$\nearrow$		$f(x_0)$		$\searrow$		

Deci f este strict crescătoare pe $(-\infty, x_0]$ şi strict descrescătoare pe $[x_0, \infty)$. Din teorema 11.1.4 deducem că ecuaţia $f(x)=0$ are cel mult câte o soluţie pe fiecare din intervalele $(-\infty, x_0]$, respectiv (x_0, ∞). Se verifică că $x = 2 \in (-\infty, x_0)$ şi $x = 4 \in (x_0, \infty)$ sunt soluţii, deci acestea sunt singurele soluţii ale ecuaţiei date.

R11.1.3 Să se rezolve ecuaţia: $e^{x-1} = x\ln x + 1$, $x \in R_+^*$.

<u>Soluţie</u>:

Funcţia $f:(0,\infty)\to R,\ f(x)=e^{x-1}-x\ln x-1$ are derivatele $f'(x)=e^{x-1}-\ln x-1$, $f''(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$, $f'''(x)=e^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}>0$. Rezultă că f'' este strict crescătoare, aşadar x = 1 este unica soluţie a ecuaţiei $f''(x)=0$. Cum $f'(1)=0$, rezultă că $f'(x)>0$ pentru $x\in(0,1)$ şi $f'(x)>0$ pentru $x\in(1,\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. Cum $f(1)=0$, ecuaţia dată are unica soluţie x=1.

*

* *

R11.2.1 Se consideră funcţia. $f:[0,1]\to R,\ f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x}, & dacă\ x\in(0,1] \\ 0, & dacă\ x=0 \end{cases}$.

Aplicând teorema lui Rolle pe fiecare interval $\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]$, $n\in N^*$, să se arate că ecuaţia $tgx = x$ are soluţii pe fiecare interval $(n\pi,(n+1)\pi)$.

<u>Soluţie</u>:

Se verifică că f este continuă pe [0,1], derivabilă pe (0,1) şi $f'(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}-\dfrac{\pi}{x}\cos\dfrac{\pi}{x},\ \forall x\in(0,1]$. Cum $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$, suntem în condiţiile din teorema lui Rolle, deci există $c_n\in\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$ astfel încât $f'(c_n)=0$, adică: $\sin\dfrac{\pi}{c_n}-\dfrac{\pi}{c_n}\cos\dfrac{\pi}{c_n}=0$. Obţinem $tg\dfrac{\pi}{c_n}=\dfrac{\pi}{c_n}$, deci $\dfrac{\pi}{c_n}$ este soluţie a ecuaţiei $tgx = x$. Cum $c_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, avem $\frac{\pi}{c_n} \in (n\pi, (n+1)\pi)$, pentru orice $n \in N^*$.

R11.2.2 Să se rezolve în R ecuaţia: $2^x + 3^x + 6^x = 3x^2 + 5x + 3$.
Soluţie :

Observăm că ecuaţia are soluţiile $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Arătăm că acestea sunt singurele soluţii.

Considerăm funcţia $f : R \to R$, $f(x) = 2^x + 3^x + 6^x - 3x^2 - 5x - 3$. Presupunem că există $x_4 \notin \{-1,0,1\}$ astfel încât $f(x_4) = 0$. Conform teoremei lui Rolle, $f'(x) = 0$ ar avea câte o soluţie pe fiecare interval cu capetele soluţii consecutive ale lui $f(x) = 0$. Deci f' ar avea cel puţin 3 soluţii diferite.
De aici, $f''(x) = 0$ ar avea cel puţin două soluţii reale, iar $f'''(x) = 0$ ar avea cel puţin o soluţie reală. Dar $f'''(x) = 2^x(\ln 2)^3 + 3^x(\ln 3)^3 + 6^x(\ln 6)^3 > 0, \forall x \in R$, deci presupunerea făcută este falsă.

R11.2.3 Rezolvaţi ecuaţia: $3^x + 6^x = 4^x + 5^x$.
Soluţie :

Ecuaţia se scrie $\frac{6^x - 5^x}{6-5} = \frac{4^x - 3^x}{4-3}$. Considerăm funcţia $f(t) = t^x$, $t > 0$, căreia îi aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalele [3,4] şi [5,6]. Deducem că există $t_1 \in (3,4)$ şi $t_2 \in (5,6)$ pentru care $4^x - 3^x = xt_1^{x-1}$ şi $6^x - 5^x = xt_2^{x-1}$. Atunci ecuaţia se mai scrie: $xt_1^{x-1} = xt_2^{x-1}$ sau echivalent $x\left(t_2^{x-1} - t_1^{x-1}\right) = 0$. Obţinem $x_1 = 0$ sau $t_2^{x-1} = t_1^{x-1}$. Cum $t_2 > t_1$, din $\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{x-1} = 0$ rezultă $x_2 = 1$. Soluţiile ecuaţiei sunt $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.

R11.2.4 Rezolvaţi ecuaţia: $(x+1)\cdot 3^x = 2^x + x\cdot 4^x$.
Soluţie :

Scriem ecuaţia sub forma $\frac{3^x - 2^x}{3-2} = \frac{x\cdot 4^x - x\cdot 3^x}{4-3}$. Notăm $f : [2,3] \to R$, $f(t) = t^x$ şi $g : [3,4] \to R$, $g(t) = xt^x$. Din teorema lui Lagrange rezultă că există $a \in (2,3)$, $b \in (3,4)$ astfel ca $f'(a) = g'(b)$, de unde

$xa^{x-1} = x^2 b^{x-1}$. Rezultă $x_1 = 0$ sau $a^{x-1} = xb^{x-1}$. Din $x = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{x-1}$ şi $0 < \dfrac{a}{b} < 1$.

Obţinem $x_2 = 1$. În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.

R11.2.5 Să se arate că ecuaţia $\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0$ are în intervalul $(2\pi, 3\pi)$ cel puţin o soluţie.

<u>Soluţie</u>:

Considerăm funcţia $f(x) = \sin x - \dfrac{x-1}{x+1}$, $x \ge 0$. Avem $f(2\pi) < 0$, $f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) > 0$ şi $f(3\pi) < 0$. Deci există $x_1 \in \left(2\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right)$ şi $x_2 \in \left(\dfrac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Rezultă din teorema lui Rolle că există $x_0 \in (x_1, x_2)$ cu $f'(x_0) = 0$. Cum $f'(x) = \cos x - \dfrac{2}{(x+1)^2}$, obţinem rezultatul din enunţ.

* * *

R11.3.1 Să se rezolve în N:
$a^x + (a+2)^x + (a+6)^x = (a+1)^x + (a+3)^x + (a+4)^x$, unde $a > 1$.

<u>Soluţie</u>:

Evident x = 0 şi x = 1 sunt soluţii. Arătăm că ecuaţia nu are alte soluţii. Funcţia $f : [0, \infty) \to R$, $f(t) = t^n$, unde $n \in N$, $n \ge 2$ este strict convexă. Atunci din definiţie obţinem: $\dfrac{a^n + b^n}{2} > \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$, pentru $a, b > 0$, $a \ne b$. Deci:

$$\frac{a^x + (a+2)^x}{2} > \left(\frac{2a+2}{2}\right)^x = (a+1)^x$$

$$\frac{(a+2)^x + (a+6)^x}{2} > \left(\frac{2a+8}{2}\right)^x = (a+4)^x$$

$$\frac{(a+6)^x + a^x}{2} > \left(\frac{2a+6}{2}\right)^x = (a+3)^x$$

Adunând aceste relații, obținem:
$a^x+(a+2)^x+(a+6)^x>(a+1)^x+(a+3)^x+(a+4)^x$. Deci ecuația nu are alte soluții.

R11.3.2 Fie $a>1$, a fixat. Să se rezolve în R ecuația: $a^x+a^{\frac{1}{x}}=a^2+\sqrt{a}$.
<u>Soluție</u> :

Funcția $f:R\to(0,\infty)$, $f(x)=a^x$ este convexă și crescătoare pe R. Funcția $g:(0,\infty)\to R$, $g(x)=a^{\frac{1}{x}}$ este convexă pe $(0,\infty)$, deoarece $g''(x)=\frac{1}{x^3}a^{\frac{1}{x}}\left(2+\frac{1}{x}\ln a\right)\ln a>0$, pe $(0,\infty)$. Rezultă că $f+g$ este convexă pe $(0,\infty)$, prin urmare ecuația dată are cel mult două soluții în $(0,\infty)$. Acestea sunt 2 și $\frac{1}{2}$. În intervalul $(-\infty,0)$, ecuația nu are soluții deoarece $a^x+a^{\frac{1}{x}}<1+1<a^2+\sqrt{a}$, oricare ar fi $x\in(-\infty,0)$.

R11.3.3 Să se rezolve ecuația: $(2x+4)\cdot4^x-(2x^2+6x+5)\cdot2^x+x+1=0$.
<u>Soluție</u> :

Ecuația se scrie în formă echivalentă: $\left[(x+2)\cdot2^{x+1}-1\right]\left[2^x-(x+1)\right]=0$. Obținem: $(x+2)\cdot2^{x+1}=1$ sau $2^x=x+1$. Ecuația $(x+2)\cdot2^{x+1}=1$ nu are soluții pe $(-\infty,-2]$, iar pe $(-2,\infty)$ ecuația se scrie $2^{x+1}=\frac{1}{x+2}$ cu soluție unică $x_1=-1$, deoarece membrul stâng este o funcție strict crescătoare, iar membrul drept este o funcție strict descrescătoare.

Ecuația $2^x=x+1$ are soluțiile $x_2=0$ și $x_3=1$ și nu mai are altele deoarece graficul unei funcții strict convexe și o dreaptă au cel mult două puncte distincte comune (propoziția 11.3.5).

În concluzie, ecuația dată are soluțiile: $x_1=-1$, $x_2=0$ și $x_3=1$.