

UNIVERSITATEA SPIRU HARET

L. BUDA

ROȘCA TRĂNCOIȚĂ

**ELEMENTE
DE ANALIZĂ
MATEMATICĂ**
CULEGERE
DE PROBLEME

\int \mathbb{R}

$\sum_{k=1}^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty}$

$\lim_{x \rightarrow a}$



EDITURA TEHNICĂ

CALEA PLOȘTEȘTEI, 116 BUCUREȘTI



I. DUDA RODICA TRANDAFIR
ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
CULEGERE DE PROBLEME

© Editura Fundației *România de Măine*, 2007
Editură acreditată de Ministerul Educației și Cercetării
prin *Consiliul Național al Cercetării Științifice din Învățământul Superior*

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

DUDA, I

Elemente de analiză matematică. Culegere de probleme. /

I. Duda, Rodica Trandafir – București, Editura Fundației *România de Măine*, 2007

ISBN 978-973- 725-992-9

I. Trandafir, Rodica

517(075.8)

Reproducerea integrală sau fragmentară, prin orice formă și prin orice mijloace tehnice, este strict interzisă și se pedepsește conform legii.

Răspunderea pentru conținutul și originalitatea textului revine exclusiv autorului/autorilor

Redactor: Mihaela ȘTEFAN
Tehnoredactor: Marcela OLARU
Coperta: Cornelia PRODAN

Bun de tipar: 13.11.2007; Coli tipar: 7,75
Format: 16/61×86

Editura Fundației *România de Măine*
Bulevardul Timișoara nr. 58, București, Sector 6
Tel./Fax: 021/444.20.91; www.spiruharet.ro
e-mail: contact@edituraromaniademaine.ro

UNIVERSITATEA SPIRU HARET
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Prof. univ. dr. I. DUDA
Prof. univ. dr. RODICA TRANDAFIR

**ELEMENTE
DE
ANALIZĂ MATEMATICĂ
CULEGERE DE PROBLEME**

EDITURA FUNDAȚIEI ROMÂNIA DE MÂINE
București, 2007

CUPRINS

1. ȘIRURI DE NUMERE	9
1.1. Preliminarii	9
1.2. Criterii de convergență	10
1.3. Proprietăți	10
1.4. Alte criterii de convergență	10
1.5. Exerciții rezolvate	11
1.6. Exerciții propuse	19
2. SERII DE NUMERE	21
2.1. Proprietăți generale.....	21
2.2. Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare	22
2.3. Criterii de convergență pentru serii alternate	23
2.4. Criterii de convergență absolută	23
2.5. Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi	23
2.6. Exerciții rezolvate	26
2.7. Exerciții propuse	36

3. FUNCȚII REALE DE O VARIABILĂ REALĂ	39
3.1. Limite de funcții	39
3.2. Continuitatea funcțiilor de o variabilă reală	41
3.3. Uniform continuitatea funcțiilor de o variabilă reală ...	42
3.4. Derivabilitatea funcțiilor de o variabilă reală	43
3.5. Diferențiabilitatea funcțiilor de o variabilă reală	45
3.6. Probleme rezolvate	46
3.7. Probleme propuse	65
4. SERII DE FUNCȚII	69
4.1. Preliminarii	69
4.2. Convergență simplă.....	69
4.3. Convergența uniformă	70
4.4. Criterii de convergență pentru serii de funcții	70
4.5. Continuitatea, derivabilitatea și integrabilitatea seriilor uniform convergente	72
4.6. Exerciții rezolvate	72
4.7. Exerciții propuse	77

5. SERII DE PUTERI	78
5.1. Preliminarii	78
5.2. Proprietăți ale seriilor de puteri	79
5.3. Exerciții rezolvate	80
5.4. Exerciții propuse	89
6. FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE	91
6.1. Continuitatea funcțiilor de mai multe variabile reale ...	91
6.2. Derivate parțiale. Diferențiale	93
6.3. Formula lui Taylor	96
6.4. Derivarea funcțiilor compuse	96
6.5. Derivarea funcțiilor implicite	97
6.6. Extremele funcțiilor de două variabile	98
6.7. Extreme cu legături	98
6.8. Exerciții rezolvate	99
6.9. Exerciții propuse	112
7. EXERCITII SUPLIMENTARE	116

1. ȘIRURI DE NUMERE

Fie E o mulțime de elemente, I o submulțime de indici, $I \subset \square$.

Definiție: Numim **șir de numere reale** o familie de numere reale cu indici numere naturale, pe care îl vom nota cu $(a_n)_{n \in \square}$; a_n se numește termenul general al șirului.

Un șir de elemente ale unei mulțimi E este o funcție definită pe mulțimea \square cu valori în mulțimea E .

1.1.1 **Definiție:** Un șir $(a_n)_{n \in \square}$ se numește **mărginit** dacă există un număr real $M > 0$ astfel încât, pentru orice $n \in \square$, $|a_n| \leq M$.

1.1.2 **Definiție:** Un șir $(a_n)_{n \in \square}$ se numește: **monoton crescător** dacă pentru orice $n \in \square$ avem: $a_n \leq a_{n+1}$, i.e. fiecare termen al șirului este mai mic decât următorul, respectiv **monoton descrescător** dacă pentru orice $n \in \square$ avem: $a_n \geq a_{n+1}$, i.e. fiecare termen este mai mare decât următorul.

1.1.3 **Definiție:** Un **subșir al unui șir** $(a_n)_{n \in \square}$ este un șir $(a_{n_p})_{p \in \square}$ astfel încât $n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$

1.1.4 Un număr $a \in \square$ (finit sau infinit) se numește **limita unui șir** $(a_n)_{n \in \square}$ dacă în afara oricărei vecinătăți V a lui a se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului $(a_n)_{n \in \square}$.

Șirurile de numere reale care au limită finită se numesc **șiruri convergente**. Șirurile care nu sunt convergente se numesc **divergente**.

1.1.5 **Teoremă:** Un șir $(a_n)_{n \in \square}$ este convergent către numărul real a dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $n_\varepsilon \in \square$ astfel încât oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$ avem: $|a_n - a| < \varepsilon$

1.2 CRITERII DE CONVERGENȚĂ

1.2.1 Dacă $(\alpha_n)_{n \in \square}$ este un șir convergent către 0 și $|a_n - a| < \alpha_n$, atunci șirul $(a_n)_{n \in \square}$ converge către a .

1.2.2 Dacă $\alpha_n \rightarrow \infty$ și $a_n \geq \alpha_n$, atunci $a_n \rightarrow \infty$.

1.2.3 Dacă $\alpha_n \rightarrow -\infty$ și $a_n \leq \alpha_n$, atunci $a_n \rightarrow -\infty$.

1.2.4 Dacă $a_n \rightarrow 0$ iar $|b_n| < M$ pentru orice $n \in \square$, atunci $a_n b_n \rightarrow 0$.

1.3 PROPRIETĂȚI

1.3.1 Dacă $a_n \rightarrow a$ atunci $|a_n| \rightarrow |a|$

1.3.2 Orice șir convergent este mărginit.

1.3.3 Dacă $a_n \rightarrow a$ atunci orice subșir al lui $(a_n)_{n \in \square}$ are tot limita a .

1.3.4 **Lema lui Cesaro:** Orice șir mărginit conține un subșir convergent.

1.3.5 Dacă $a_n \rightarrow a$ atunci: prin schimbarea ordinii termenilor, prin înlăturarea sau adăugarea unui număr finit de termeni se obține un șir care are tot limita a .

1.3.6 **Definiție:** Se numește *șir Cauchy* sau *șir fundamental* un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu proprietatea: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n, m \geq N_\varepsilon$ avem: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

1.3.7 **Criteriul de convergență Cauchy:** Un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent dacă și numai dacă este fundamental.

1.4.1 **Teoremă:** Orice șir monoton și mărginit este convergent. Orice șir nemărginit și monoton este divergent.

Observație: Reciproca teoremei 1.5.1 nu este adevărată (a se vedea proprietatea 1.3.2)

1.4.2 **Criteriul de convergență Cesaro-Stolz:** Fie șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ care îndeplinesc condițiile:

i. șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător și nemărginit

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$ (finit)

Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

1.4.3 **Criteriul de convergență D'Alembert:** Dacă șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are toți termenii pozitivi și

există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, atunci: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1.5 EXERCIȚII REZOLVATE

1.5.1 Să se arate că următoarele șiruri sunt convergente și să se calculeze limita lor:

a. $a_n = \frac{n}{n+1}$

b. $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n}$

Rezolvare: a. Vom arăta că șirul este monoton și mărginit. Avem:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}$$

de unde rezultă $a_{n+1} > a_n$, deci șirul este monoton crescător.

Șirul este mărginit (vezi 1.1.1) pentru că $a_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și

$$a_n = \frac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $0 < a_n < 1$. Atunci, conform 1.5.1, șirul este convergent fiind monoton și mărginit. Pentru calculul limitei avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

pentru că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

b. Se știe că $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, deci $a_n = \frac{n+1}{2n}$. Vom arăta că șirul este monoton și mărginit:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{2n}{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$$

de unde rezultă $a_{n+1} < a_n$, deci șirul este monoton descrescător. Se observă ușor că $0 < a_n < 1$, deci șirul este mărginit. Atunci, conform 1.5.1, șirul este convergent și:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

1.5.2 Să se arate folosind teorema 1.6.2 că:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n^2+2} = 0$

Rezolvare: a. Se observă că:

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Inegalitatea $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$ este echivalentă cu $\frac{1}{4\varepsilon^2} < n$. Prin urmare, dacă $n \geq n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{4\varepsilon^2} \right\rceil + 1$, atunci $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$ și cu atât mai mult $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$, deci conform 1.1.5 obținem: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

b. Fie $\varepsilon > 0$. Inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$ devine:

$$\left| \frac{n+1}{3n^2+2} \right| = \frac{n+1}{3n^2+2} < \varepsilon$$

Dar, pentru orice $n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, avem:

$$\varepsilon > \frac{1}{n} > \frac{n+1}{3n^2+2}$$

de unde, pentru orice $n \geq n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, obținem: $\left| \frac{n+1}{3n^2+2} \right| < \varepsilon$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n^2+2} = 0$ conform 1.1.5.

1.5.3 Să se arate folosind definiția limitei că:

a. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu $a_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$ nu are limita 2.

b. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ nu are limită.

Rezolvare:

a. Fie $\varepsilon = 1/2$. Dacă șirul $a_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$ ar avea limita 2, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem:

$$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} < 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$3n^2 - 3 < 2n^2 + 2 < 5n^2 - 5 \Leftrightarrow n^2 < 5 < 3n^2 - 2$$

Din prima inegalitate obținem $n \leq 2$ ceea ce contrazice presupunerea că limita șirului este 2. De fapt limita șirului considerat este 1.

b. Să presupunem că șirul $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ este convergent. Atunci, conform 1.4, șirul considerat este șir Cauchy, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$ să avem: $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Fie atunci $\varepsilon = 1/2$ și $n, m \in \mathbb{N}$ suficient de mari, cu n par și m impar. Atunci:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| (-1)^n + \frac{1}{n} - (-1)^m - \frac{1}{m} \right| \geq \\ &\geq \left| (-1)^n - (-1)^m \right| - \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \geq 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

contradicție, deci șirul considerat nu este șir Cauchy, prin urmare nu poate fi nici convergent.

1.5.4 Să se arate că șirurile de mai jos sunt șiruri Cauchy:

- a. $u_n = a_0 + a_1q + a_2q^2 + \dots + a_nq^n$, unde $|q| < 1$ și există $M > 0$ astfel încât $|a_k| \leq M$
- b. $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

Rezolvare: a. Avem:

$$u_{n+p} - u_n = a_{n+1}q^{n+1} + a_{n+2}q^{n+2} + \dots + a_{n+p}q^{n+p}$$

deci:

$$(*) \left| u_{n+p} - u_n \right| \leq |a_{n+1}| \cdot |q|^{n+1} + |a_{n+2}| \cdot |q|^{n+2} + \dots + |a_{n+p}| \cdot |q|^{n+p}$$

(conform inegalității $|a+b| \leq |a|+|b|$). Dar $|a_k| \leq M$ și atunci relația (*) devine:

$$\begin{aligned} (**) \left| u_{n+p} - u_n \right| &\leq |a_{n+1}| \cdot |q|^{n+1} + |a_{n+2}| \cdot |q|^{n+2} + \dots + |a_{n+p}| \cdot |q|^{n+p} \leq \\ &\leq M |q|^{n+1} (1 + |q| + \dots + |q|^{p-1}) = M |q|^{n+1} \frac{1 - |q|^p}{1 - |q|} \leq M |q|^{n+1} \frac{1}{1 - |q|} \end{aligned}$$

deoarece $1 + |q| + \dots + |q|^{p-1}$ este suma unei progresii geometrice de rație $|q|$ cu p termeni și

$|q| < 1$. Am obținut așadar: $\left| u_{n+p} - u_n \right| < \frac{M}{1 - |q|} \cdot |q|^{n+1}$. Fie $\varepsilon > 0$; cum $|q| < 1$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel

încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, $|q|^{n+1} < \frac{1 - |q|}{M} \varepsilon$. Atunci, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și orice $p \in \mathbb{N}$, relația (**) devine:

$$\left| u_{n+p} - u_n \right| < \varepsilon$$

ceea ce înseamnă că șirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir Cauchy.

1.5.5 Să se demonstreze folosind criteriul lui Cauchy că șirul

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

este divergent.

Rezolvare: Fie $n, p \in \mathbb{N}$. Avem:

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p}$$

Luând $n=p$ relația devine:

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Cum $\frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}$ pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, obținem:

$$|a_{2n} - a_n| \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_n = \frac{1}{2}$$

Am obținut așadar că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $p = n \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_{n+p} - a_n| \geq \frac{1}{2}$ ceea ce înseamnă că $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu este șir Cauchy.

Observație: Cum șirul $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ nu este șir Cauchy, nu este nici convergent (acest fapt va folosi pentru a demonstra divergența seriei armonice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

1.5.6 Să se arate, folosind teorema de convergență cu ε (1.1.5), că șirul $a_n = \frac{n^2}{n^2 - 1}$ are limita 1.

Rezolvare: Fie $\varepsilon > 0$. Inegalitatea (*) $\left| \frac{n^2}{n^2 - 1} - 1 \right| < \varepsilon$ se mai poate scrie:

$$\left| \frac{n^2}{n^2 - 1} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{n^2 - n^2 + 1}{n^2 - 1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2 - 1} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + 1} < n$$

Atunci luând $n_\varepsilon = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + 1} \right\rceil + 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$, inegalitatea (*) este satisfăcută, deci

conform 1.1.5 limita șirului $a_n = \frac{n^2}{n^2 - 1}$ este 1.

Observație: Numărul n_ε arată că în afara vecinătății $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se află cel mult n_ε termeni ai șirului considerat. De exemplu, în exercițiul anterior, dacă luăm $\varepsilon = 0.01$, atunci în afara vecinătății $(1 - 0.01, 1 + 0.01)$ se găsesc cel mult $n_\varepsilon = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{0.01} + 1} \right\rceil + 1 = 11$ dintre primii termeni ai șirului, restul termenilor găsindu-se în vecinătatea $(1 - 0.01, 1 + 0.01)$.

1.5.7 Fie $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $x_1 = a^{1/a}, x_{n+1} = x_n^{x_n}$.

Rezolare: Dacă $a = 1$, atunci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este șirul constant $x_n = 1$, deci convergent către 1.

Dacă $a > 1$ atunci: $x_1 = a^{1/a} > 1$, $x_2 = x_1^{x_1} = (a^{1/a})^{a^{1/a}} = a^{a^{1/a-1}}$, de unde:

$$\frac{x_2}{x_1} = a^{\frac{1}{a}(a^{1/a}-1)} > 1$$

deci $x_2 > x_1$. Vom demonstra prin inducție completă după n că $x_n > x_{n-1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pentru $n=1$ proprietatea a fost verificată. Presupunem relația adevărată pentru n , $x_n > x_{n-1}$. Atunci:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n^{x_n}}{x_n^{x_{n-1}}} = x_n^{x_n - x_{n-1}}$$

Cum $x_n > x_{n-1}$ și $x_n > 1$, obținem $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, deci $x_{n+1} > x_n$. Conform principiului inducției complete relația $x_n > x_{n-1}$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci șirul este monoton crescător.

Acum, $\frac{1}{a} < 1$, deci $x_1 = a^{1/a} < a$. Presupunem că $x_n < a$. Atunci $x^{n+1} = x_n^{x_n} < (a^{1/a})^a = a$. Conform principiului inducției complete, am obținut așadar că $x_n < a$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Am demonstrat așadar că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir monoton crescător și mărginit superior, deci conform 1.5.1 este convergent. Fie $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{x_n} \Leftrightarrow x = x^{x^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}} \Leftrightarrow x = x^x \Leftrightarrow x = a^{\frac{x}{a}}$$

de unde obținem că $x = a$.

În mod analog se tratează și cazul $0 < a < 1$, pentru care vom obține de asemenea că șirul este convergent (fiind monoton descrescător și mărginit inferior) și are limita 1.

1.5.8 Să se studieze convergența șirului:

$$a_1 = 1$$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Rezolare: Avem:

$$a_n = \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$$

Șirul obținut, $a_n = \frac{n+1}{2n}$, este convergent și are limita $\frac{1}{2}$.

1.5.9 Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$$

Rezolvare: Fie $a_n = 1^p + 2^p + \dots + n^p$ și $b_n = n^{p+1}$. Șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător și nemărginit, deci, conform criteriului de convergență Cesaro-Stolz (1.5.2), dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ și este finită,

atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. Avem:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^p + 2^p + \dots + (n+1)^p) - (1^p + 2^p + \dots + n^p)}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p}{\left(\sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k n^k\right) - n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}{n^p \left(\sum_{k=0}^p C_{p+1}^k n^{k-p}\right)} = \frac{1}{C_{p+1}^1} = \frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$.

1.5.10 Să se calculeze:

i. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Rezolvare: i. Fie $a_n = n$. Șirul (a_n) are numai termeni pozitivi și atunci, conform 1.5.3, obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

ii. Fie $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Șirul (a_n) are numai termeni pozitivi și atunci, conform 1.5.3, obținem:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

1.5.11 Fie a, b numere reale strict pozitive cu $a > b > 0$. Definim recursiv șirurile

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel: $a_1 = a, b_1 = b, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$. Să se arate că

șirurile sunt convergente și să se calculeze limita lor.

Rezolvare: Avem: $a_2 - a_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} - a_1 = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} < 0$, pentru că $a > b$.

$$b_2 - b_1 = \frac{2a_1 b_1}{a_1 + b_1} - b_1 = \frac{2ab}{a+b} - b = \frac{ab - b^2}{a+b} = \frac{b(a-b)}{a+b} > 0, \text{ pentru că } a > b \text{ și } a, b > 0.$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + b_1}{2} \cdot \frac{a_1 + b_1}{2a_1b_1} = \frac{(a_1 + b_1)^2}{4a_1b_1} > 1, \text{ pentru } c\acute{a} \ a, b > 0. \text{ Am obținut așadar c\acute{a}}$$

$0 < b_1 < b_2 < a_2 < a_1$. Presupunem c\acute{a} $0 < b_{n-1} < b_n < a_n < a_{n-1}$. Atunci:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} < 0 \text{ pentru c\acute{a} } b_n < a_n$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} - b_n = \frac{2a_nb_n - b_n^2}{a_n + b_n} = \frac{a_nb_n - b_n^2}{a_n + b_n} = \frac{b_n(a_n - b_n)}{a_n + b_n} > 0 \text{ pentru c\acute{a}}$$

$0 < b_n < a_n$ și

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n - b_n)^2}{a_n + b_n} > 0, \text{ deci } 0 < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n. \text{ Atunci,}$$

conform principiului inducției complete, am obținut c\acute{a} $0 < b_l = b < \dots < b_{n-1} < b_n < a_n < a_{n-1} < \dots < a_l = a$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cu alte cuvinte am obținut c\acute{a}: șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir descresc\acuter și m\acuterghinit inferior (de b) iar șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir cresc\acuter și m\acuterghini superior (de a). Atunci, conform 1.5.1, șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt convergente. Fie $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \Leftrightarrow \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

și de asemenea avem

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} \cdot \frac{a_n + b_n}{2} = a_nb_n \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, \text{ deci}$$

$$a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n = \dots = a_1b_1 = ab$$

de unde: $\alpha\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n = ab$, și cum $\alpha = \beta > 0$, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{ab}$.

1.6 EXERCIȚII PROPUSE:

S\acuter se arate c\acuter urm\acuteratoarele șiruri sunt convergente și s\acuter s\acuter calculeze limitele lor:

$$1.6.1 \ a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln(n)}$$

Indicație: Se folosește criteriul de convergență Cesaro Stolz. R: 1

$$1.6.2 \ a_n = \sqrt[n]{n}$$

Indicație: Se folosește criteriul lui D'Alembert. R: 1

$$1.6.3 \ a_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}} \quad \text{R: } 1/2$$

$$1.6.4 \ a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{R: } 1$$

$$1.6.5 \ a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{R: } 1/2$$

$$1.6.6 \quad a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}}$$

R: $4/3$

Folosind criteriul de convergență Cauchy, să se demonstreze convergența șirurilor:

$$1.6.7 \quad u_n = \frac{\sin(1)}{2} + \frac{\sin(2)}{2^2} + \dots + \frac{\sin(n)}{2^n}$$

$$1.6.8 \quad u_n = \frac{\cos(1)}{1 \cdot 2} + \frac{\cos(2)}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos(n)}{n(n+1)}$$

Să se calculeze:

$$1.6.9 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$$

R: 0

$$1.6.12 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$$

R: ∞

$$1.6.10$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{\ln(3)} + \dots + \frac{1}{\ln(n)}}{n}$$

R: 0

$$1.6.13$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$$

R: $\frac{4}{e}$

$$1.6.11 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n}$$

R: 0

2. SERII DE NUMERE

Definiție: Se numește **serie de numere** reale perechea $\left((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \right)$ unde $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt șiruri de numere reale iar

$$s_1 = u_1$$

$$s_2 = u_1 + u_2$$

...

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Termenii șirului $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numesc **termenii seriei** iar șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește **șirul sumelor parțiale**.

Dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, atunci vom defini

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ nu există, atunci seria se numește **oscilantă**.

O serie se numește **convergentă** dacă șirul sumelor parțiale este convergent, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ există și este

finită. În acest caz, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ se numește **suma seriei**. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm\infty$, spunem că seria este **divergentă**.

Observație: Se obișnuiește ca seria $\left((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \right)$ să se definească prin notația $\sum u_n$.

2.1 Proprietăți generale:

- 2.1.1 Dacă într-o serie schimbăm ordinea unui număr finit de termeni, se obține o nouă serie de aceeași natură cu seria inițială; Dacă seria inițială are sumă, atunci seria obținută are aceeași sumă.
- 2.1.2 Dacă la o serie convergentă adăugăm sau înlăturăm un număr finit de termeni se obține de asemenea o serie convergentă, dar, în general, cu altă sumă.
- 2.1.3 Dacă o serie este convergentă, atunci șirul sumelor parțiale este mărginit (reciproca nu este adevărată).
- 2.1.4 Dacă termenii unei serii sunt pozitivi iar șirul sumelor parțiale este mărginit, atunci seria este convergentă.
- 2.1.5 **Definiție:** Se numește **rest de ordin p** al unei serii convergente $\left((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \right)$ șirul definit prin:

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} u_n$$

- 2.1.6 Resturile unei serii convergente formează un șir convergent către 0.
- 2.1.7 Dacă $\left((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \right)$ este o serie convergentă, atunci șirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al termenilor săi este convergent către 0. (Aceasta este o condiție necesară, dar nu și suficientă de convergență)
- 2.1.8 Seriiile având ca termeni șirurile $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ respectiv $(\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}^*$, au aceeași natură.

2.2 CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII CU TERMENI OARECARE:

2.2.1 **Criteriul general al lui Cauchy:** O serie $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}})$ este convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq N_\varepsilon$ și orice $p \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

2.2.2 **Criteriului lui Abel:** Fie $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}})$ o serie cu proprietatea că șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al sumelor parțiale este mărginit și $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir descrescător de numere reale pozitive, convergent către 0. Atunci seria $\sum \alpha_n u_n$ este convergentă.

2.3 CRITERII DECONVERGENȚĂ PENTRU SERII ALTERNATE

2.3.1 **Definiție:** Se numește **serie alternată** o serie de numere reale pentru care produsul a doi termeni consecutivi este negativ.

2.3.2 **Criteriul lui Abel:** Fie $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir descrescător de numere reale pozitive, convergent către 0. Atunci seria $\sum (-1)^n u_n$ este convergentă.

2.4 CRITERII DE CONVERGENȚĂ ABSOLUTĂ

2.4.1 **Definiție:** Seria $\sum u_n$ se numește **absolut convergentă** dacă seria $\sum |u_n|$ este convergentă. O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numește **serie semiconvergentă**.

2.4.2 **Teoremă:** Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor, se obține tot o serie absolut convergentă cu aceeași sumă.

2.4.3 **Teoremă (Riemann):** Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor astfel încât seria astfel obținută să aibe ca sumă un număr real, finit sau infinit, diferit de suma seriei inițiale, sau ca seria să fie oscilantă.

2.4.4 **Criteriul comparației:** Fie $\sum u_n, \sum v_n$ două serii pentru care există un număr natural $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $|u_n| \leq |v_n|$ pentru orice $n > N$. Atunci dacă seria $\sum v_n$ este absolut convergentă, seria $\sum u_n$ este absolut convergentă.

2.5 CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII CU TERMENI POZITIVI

Observație: O serie cu termeni pozitivi poate fi convergentă sau divergentă, cu suma ∞ . Pentru o serie cu termeni pozitivi proprietatea de convergență este echivalentă cu proprietatea de absolut convergență.

2.5.1 **Primul criteriu al comparației:** Fie $\sum u_n, \sum v_n$ două serii cu termeni pozitivi pentru care există un număr natural $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $u_n \leq v_n$ pentru orice $n > N$. Atunci:

- a. dacă seria $\sum v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum u_n$ este convergentă
- b. dacă seria $\sum u_n$ este divergentă, atunci seria $\sum v_n$ este divergentă

2.5.2 **Al doilea criteriu al comparației:** Fie $\sum u_n, \sum v_n$ două serii cu termeni pozitivi pentru care există un număr natural $N \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

pentru orice $n > N$. Atunci:

- a. dacă seria $\sum v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum u_n$ este convergentă
- b. dacă seria $\sum u_n$ este divergentă, atunci seria $\sum v_n$ este divergentă

2.5.3 **Al treilea criteriu al comparației:** Fie $\sum u_n, \sum v_n$ două serii cu termeni pozitivi astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$$

- a. dacă $0 < k < \infty$, atunci cele două serii au aceeași natură
- b. dacă $k = 0$ iar seria $\sum v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum u_n$ este convergentă
- c. dacă $k = \infty$ iar seria $\sum v_n$ este divergentă, atunci seria $\sum u_n$ este divergentă

Observație: Aceste criterii ne oferă posibilitatea de a stabili natura unei serii cu termeni pozitivi comparând-o cu o altă serie a cărei natură o cunoaștem. De obicei, pentru comparație se folosește seria geometrică sau seria $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (seria armonică generalizată).

Observație: Seria armonică generalizată $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă dacă $\alpha > 1$ și divergentă dacă $\alpha \leq 1$.

Observație: Seria $\sum \frac{1}{n!}$ este convergentă și are suma e (numărul lui Euler).

2.5.4 **Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy):** Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

- a. Dacă există un număr natural N și un număr $0 < k < 1$ astfel încât pentru orice $n \geq N$ să avem $\sqrt[n]{u_n} \leq k$, atunci seria este convergentă
- b. Dacă $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ pentru o infinitate de termeni, atunci seria este divergentă

Corolar: Dacă pentru seria $\sum u_n$ cu termeni pozitivi există $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = k$, atunci această serie converge dacă $k < 1$ și diverge dacă $k > 1$.

2.5.5 **Criteriul raportului (al lui D'Alembert):** Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

- a. Dacă există un număr natural N și un număr $0 < k < 1$ astfel încât pentru orice $n \geq N$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$, atunci seria este convergentă.

- b. Dacă există un număr natural N astfel încât pentru orice $n \geq N$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, atunci seria este divergentă.

Corolar:

Dacă pentru seria $\sum u_n$ cu termeni pozitivi există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, atunci această serie converge dacă $k < 1$ și diverge dacă $k > 1$.

2.5.6 **Criteriul Raabe-Duhamel:** Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

- a. Dacă există un număr $k > 1$ și un număr natural N astfel încât

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq k$$

pentru orice $n \geq N$, atunci seria este convergentă.

- b. Dacă există un număr natural N astfel încât

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1$$

pentru orice $n \geq N$, atunci seria este divergentă.

Corolar: Dacă pentru seria cu termeni pozitivi $\sum u_n$ există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lambda$$

atunci seria converge dacă $\lambda > 1$ și diverge dacă $\lambda < 1$.

2.5.7 **Criteriul logaritmic:** Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a. Dacă există un număr natural N astfel încât pentru orice $n \geq N$

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} > 1$$

atunci seria este convergentă.

b. Dacă există un număr natural N astfel încât pentru orice $n \geq N$

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} < 1$$

atunci seria este divergentă.

Corolar: Dacă pentru seria cu termeni pozitivi există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} = \lambda$$

atunci această serie converge dacă $\lambda > 1$ și diverge dacă $\lambda < 1$.

2.6 EXERCIȚII REZOLVATE

2.6.1 Să se studieze convergența seriei

$$\sum_n u_n = \sum_n \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

calculând suma ei.

Rezolvare: Termenul general al sumei este:

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

Atunci șirul sumelor parțiale se mai poate scrie:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

Conform definiției, seria data este convergentă dacă șirul sumelor parțiale este convergent și are ca sumă limita acestui șir, dacă aceasta există. Avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

de unde obținem că seria $\sum_n u_n$ este convergentă și are suma $\frac{1}{2}$.

2.6.2 Să se calculeze suma seriei:

$$\sum_n \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Rezolvare: Termenul general al seriei este:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Ne propunem să scriem termenul general al seriei ca o sumă de fracții simple, i.e.:

$$u_n = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

Obținem:

$$\begin{aligned} \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} &= \frac{A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n^2(A+B+C) + n(3A+2B+C) + (2A+2B+C)}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Prin trecere la identificarea coeficienților obținem sistemul:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A+2B+C=1 \end{cases}$$

cu soluția $A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{1}{2}$. Așadar termenul general al seriei se mai poate scrie:

$$u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

Șirul sumelor parțiale devine:

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n^2 + 3n}{4n^2 + 12n + 8}$$

Cum suma seriei este egală cu limita șirului sumelor parțiale, obținem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{4n^2 + 12n + 8} = \frac{1}{4}$$

2.6.3 Să se calculeze suma seriei:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots$$

Rezolvare: Se observă că termenii generali ai seriei sunt termenii unei progresii geometrice al cărei prim termen este $u_0 = \frac{2}{3}$ rația $q = \frac{1}{2}$. Prin urmare, șirul sumelor parțiale este:

$$s_n = u_0 + u_0q + u_0q^2 + \dots + u_0q^{n-1} = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$

adică:

$$s_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

de unde obținem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = \frac{4}{3}$$

2.6.4 Să se calculeze suma seriei:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^3}{n!}$$

Rezolvare: Conform observației 3, 2.5.3, seria $\sum_n \frac{1}{n!}$ este convergentă și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$. Vom scrie

termenul general al seriei $\sum_n \frac{n^3}{n!}$ în raport de termenul general al seriei $\sum_n \frac{1}{n!}$. Avem, pentru $n > 2$:

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + an(n-1) + bn = n^3 + (a-3)n^2 + (2-a+b)n$$

de unde, prin identificarea coeficienților, obținem: $a-3=0, 2+a+b=0$, deci $a=3, b=1$. Atunci termenul general al seriei devine:

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + \frac{3n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

Șirul sumelor parțiale se mai poate scrie așa:

$$s_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-3)!} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!}$$

și cum suma seriei este egală cu limita șirului sumelor parțiale, avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 5e$$

Stabiliți natura seriilor:

2.6.5
$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

Rezolvare: Am demonstrat la 1.5.10 că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Atunci limita șirului termenului general al seriei este:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = 1$$

deci seria nu este convergentă, conform 2.1.7 (șirul termenului general nu converge la 0).

2.6.6
$$\sum_{n \geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$$

Rezolvare: Suma parțială a acestei serii este:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$, obținem că seria $\sum_{n \geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$ este divergentă și are suma ∞ .

Observație: Șirul termenilor acestei serii, $u_n = \ln \frac{n+1}{n}$, converge la 0, ($\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{n} = 0$), cu toate că seria este divergentă. Acest fapt demonstrează că proprietatea 2.1.7 nu este și o condiție suficientă de convergență pentru serii.

$$2.6.7 \quad \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

Rezolvare: Deoarece pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $\ln n < n$, obținem de asemenea $\sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{n}$, și deci:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \text{ pentru orice } n \geq 2.$$

Conform exercițiului 2.6.1, seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ este divergentă. Din primul criteriu al comparației 2.5.1

obținem atunci că seria $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ este divergentă.

$$2.6.8 \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n + n}$$

Rezolvare: Cum $2^n + n \geq 2^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, obținem că: $0 < \frac{1}{2^n + n} < \frac{1}{2^n}$. Cum seria cu termenul

general $v_n = \frac{1}{2^n}$ este convergentă (este o serie geometrică cu rația $q = 1/2$ subunitară) și seria dată are termenii pozitivi, din primul criteriu al comparației 2.5.1 obținem că seria cu termenul general

$u_n = \frac{1}{2^n + n}$ este de asemenea convergentă.

$$2.6.9 \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

Rezolvare: Vom folosi criteriul al treilea al comparației, 2.5.3, în care:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad v_n = \frac{1}{n^2}$$

Conform observației 2, 2.5.3, seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$, deci seria care are ca termen

general $v_n = \frac{1}{n^2}$ este convergentă. Avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n} = 1$$

Cum limita este finită, conform criteriului al treilea al comparației, cele două serii au aceeași natură,

prin urmare și seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă..

$$2.6.10 \quad \sum_{n \geq 1} \left(a \frac{n^2 + n + 1}{n^2} \right)^n, \quad a > 0$$

Rezolvare: Folosind corolarul criteriului rădăcinii, 2.5.4, se obține:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{n^2 + n + 1}{n^2} = a$$

și deci seria este divergentă dacă $a > 1$ și convergentă dacă $0 < a < 1$. Pentru $a = 1$ criteriul rădăcinii nu precizează natura seriei, deci va trebui să determinăm natura seriei în acest caz prin alte metode. Fie așadar $a = 1$. Termenul general al seriei devine în acest caz:

$$u_n = \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2} \right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n^2} \right)^n$$

și deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+1}{n^2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{n+1}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n^2} n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}} = e$$

Cum limita șirului termenului general al seriei este diferită de zero, conform observației 2.1.7 seria este divergentă și în acest caz.

$$2.6.11 \quad \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

Rezolvare: În acest caz este comod de aplicat criteriu rădăcinii, 2.5.4, și obținem:

$$u_n = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

și deci seria este convergentă.

$$2.6.12 \quad \sum_{n \geq 1} \frac{2^n n!}{n^n}$$

Rezolvare: Aplicând criteriul raportului, 2.5.5, se obține:

$$u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{2}{e}$$

Dar $\frac{2}{e} < 1$, deci, conform criteriului mai sus amintit, seria este convergentă.

$$2.6.13 \quad \sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{2^n + 5^n}, a > 0$$

Rezolvare: Vom folosi criteriul raportului, 2.5.5. Avem:

$$u_n = \frac{a^n}{2^n + 5^n} > 0$$

și deci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+1}} \cdot \frac{2^n + 5^n}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{5^n \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n + 1 \right)}{5^{n+1} \left(\left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} + 1 \right)} = \frac{a}{5}$$

Pentru $\frac{a}{5} < 1$, deci pentru $a < 5$, seria este convergentă, iar pentru $\frac{a}{5} > 1$, deci pentru $a > 5$, seria este divergentă, conform criteriului raportului. Pentru $a=5$, criteriul raportului nu ne poate preciza natura seriei. Pentru a stabili totuși natura seriei date și în acest caz putem folosi una din următoarele metode:

- proprietatea 2.1.7, unde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{2^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{5} \right)^n + 1} = 1$$

deci termenul general al seriei nu converge la 0, ceea ce înseamnă că seria este divergentă în acest caz

- criteriul Raabe-Duhamel, pentru care

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2^{n+1} + 5^{n+1}}{5(2^n + 5^n)} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{2^{n+1} - 5^{n+1} - 5 \cdot 2^n + 5^{n+1}}{5(2^n + 5^n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{2^n(2-5)}{5(2^n + 5^n)} = \frac{-3}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + \left(\frac{5}{2} \right)^n} = 0 \end{aligned}$$

și cum această limită este subunitară, seria este divergentă.

2.6.14
$$\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{(\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + n)}, \lambda > 0$$

Rezolvare: Aplicând criteriul lui D'Alembert obținem:

$$u_n = \frac{n!}{(\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + n)} > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + n + 1)} \cdot \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + n)}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\lambda + n + 1} = 1$$

ceea ce înseamnă că acest criteriu nu ne poate da informații asupra naturii seriei. Aplicăm criteriul Raabe-Duhamel și obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\lambda + n + 1}{n + 1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\lambda}{n + 1} = \lambda$$

Prin urmare, dacă $\lambda > 1$, seria este convergentă, iar pentru $0 < \lambda < 1$ seria este divergentă. Dacă $\lambda = 1$, termenul general al seriei devine:

$$u_n = \frac{n!}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

deci am obținut seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1}$, care este divergentă (vezi 2.5.3 observații)

2.6.15
$$\sum_{n \geq 1} a^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}, a > 0$$

Rezolvare: Aplicând criteriul Raabe-Duhamel se ajunge la calcule complicate. Putem aplica criteriul logaritmice:

$$u_n = a^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \ln a}{\ln n} = -\ln a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} = -\ln a$$

(aplicând eventual criteriul Cesaro-Stolz pentru determinarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1$).

Prin urmare, dacă $-\ln a = \ln \frac{1}{a} > 1$, adică $\frac{1}{a} > e \Leftrightarrow a < \frac{1}{e}$, seria este convergentă, iar dacă $\ln \frac{1}{a} < 1$, adică $a > \frac{1}{e}$, seria este divergentă. Dacă $a = \frac{1}{e}$ criteriul logaritmice nu ne poate da informații asupra naturii seriei.

2.6.16 $\sum_{n \geq 1} n^{-\ln a}, a > 0$

Rezolvare: Se aplică criteriul logaritmice, 2.6.5. Obținem:

$$u_n = n^{-\ln a} > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{n^{-\ln a}}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n^{\ln a}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a \cdot \ln n}{\ln n} = \ln a$$

Prin urmare, dacă $\ln a > 1$, adică $a > e$, seria este convergentă. Pentru $\ln a < 1$, adică pentru $a < e$, seria este divergentă. Dacă $a = e$, atunci criteriul logaritmice nu ne poate da informații despre natura seriei. Dacă $a = e$, atunci termenul general al seriei devine:

$$u_n = n^{-\ln e} = n^{-1} = \frac{1}{n}$$

obținându-se seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, serie divergentă.

2.6.17 Să se studieze natura seriei:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3^n}$$

Rezolvare: Seria $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n}$ este convergentă, pentru că termenul general $v_n = \frac{1}{3^n}$ este o progresie geometrică cu rația subunitară. Cum termenul general al seriei date are proprietatea $|u_n| = \frac{1}{3^n}$, obținem așadar că aceasta este absolut convergentă.

2.6.18 Să se studieze convergența seriei:

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 1}$$

Rezolvare: Pentru a verifica dacă seria dată este convergentă vom aplica criteriul lui Abel, 2.3.1. Șirul cu termenul general $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ este descrescător pentru că:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} - \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{n^3 + n^2 + n + 1 - n^3 - 2n^2 - n - 1}{(n^2 + 1)((n+1)^2 + 1)} = \\ &= \frac{-n^2}{(n^2 + 1)((n+1)^2 + 1)} < 0 \end{aligned}$$

și de asemenea $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0$.

Prin urmare, conform criteriului lui Leibniz, seria cu termenul general $u_n = (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$ este convergentă.

Pentru a verifica dacă seria este absolut convergentă, vom aplica criteriul comparației, 2.5.3, unde:

$$\begin{aligned} u_n &= \left| (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1} \right| = \frac{n}{n^2 + 1} \\ v_n &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^2 + 1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$$

deci cele două serii au aceeași natură. Cum seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă, obținem că și seria $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^2 + 1}$ este divergentă, deci seria dată nu este absolut convergentă.

2.7 EXERCIȚII PROPUSE:

2.7.1 Să se stabilească natura următoarelor serii și să calculeze suma lor

$$a. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3} \quad R: \frac{1}{4}, \text{ convergentă}$$

$$b. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\alpha + n)(\alpha + n + 1)}, \text{ unde } \alpha \text{ este un număr real diferit de orice întreg negativ} \quad R: \frac{1}{1 + \alpha} \text{ convergentă}$$

$$c. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n + \sqrt{2})(n + \sqrt{2} + 1)} \quad R: \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \text{ convergentă}$$

$$d. \sum_{n \geq 1} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{5^n} \quad R: \frac{5}{6} \text{ convergentă}$$

Indicație: Se va scrie $\frac{2^n + (-1)^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$, și prin urmare seria dată este suma a două progresii

geometrice de rație $\frac{2}{5}$ și $\frac{-1}{5}$

2.7.2 Să se stabilească natura următoarelor serii:

a. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5}$ R: convergentă

b. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}}$ R: convergentă

c. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{30n + 7}$ R: divergentă

d. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ R: convergentă

e. $\sum_{n \geq 2} \frac{1000}{n^2 - \sqrt{2}}$ R: convergentă

Indicație: se va folosi inegalitatea:

$$\frac{1000}{n^2 - \sqrt{2}} < \frac{1000}{n^2 - n} = \frac{1000}{n(n-1)} < \frac{1000}{(n-1)^2}$$

f. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n + a}$, $a > -2$ R: convergentă

Indicație: se va compara cu seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$, folosind al treilea criteriu al comparației.

2.7.3 Să se stabilească natura seriilor următoare aplicând criteriul raportului și criteriul rădăcinii:

a. $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$ R: convergentă

b. $\sum_{n \geq 1} \frac{(n^3 + 1)a^n}{(n+1)!}$, $a > 0$ R: convergentă

c. $\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ R: convergentă

d. $\sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$ R: convergentă

e. $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2n^2 + 7n + 5}{6n^2 + 5n + 9} \right)^n$ R: convergentă

f. $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right)^n$ R: convergentă

Indicație: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$g. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\lg n)^n}$$

R: convergentă

$$h. \sum_{n \geq 1} \frac{2n^{n+5}}{(3n+7)^n}$$

R: convergentă

2.7.4 Să se stabilească natura seriilor următoare aplicând criteriul Raabe-Duhamel:

$$a. \sum_{n \geq 1} \frac{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \dots \cdot (2+5(n-1))}{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (3+5(n-1))}$$

R: divergentă

$$b. \sum_{n \geq 1} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}, \quad a > 0$$

R: convergentă pentru $a < e$
divergentă pentru $a \geq e$

$$c. \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n+1)}, \quad \alpha > 0$$

R: convergentă pentru $\alpha > 2$
divergentă pentru $0 < \alpha \leq 2$

2.7.5 Să se stabilească natura seriilor următoare:

$$a. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

R: semiconvergentă

$$b. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n+a)^\alpha} \text{ unde } \alpha \text{ este un număr real diferit de orice întreg negativ}$$

R: absolut convergentă
pentru $\alpha > 1$.
semiconvergentă pentru
 $\alpha < 1$

$$c. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n^3 \sqrt[n]{n}}$$

R: divergentă

2.7.6 Să se studieze convergența seriei:

$$\sum_{n \geq 2} (2 - \sqrt[n]{e})(2 - \sqrt[n]{e}) \dots (2 - \sqrt[n]{e}), \quad a > 0$$

Indicație: Se aplică criteriul lui D'Alembert și criteriul al doilea al comparației.

3. FUNCȚII REALE DE O VARIABILĂ REALĂ

3.1 LIMITE DE FUNCȚII

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 (număr finit sau infinit) un punct de acumulare al mulțimii A (nu neapărat $x_0 \in A$) și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de variabilă reală.

3.1.1 **Definiție:** Vom spune că $l \in \mathbb{R}$ (finit sau infinit) este **limita funcției** f în punctul x_0 relativ la mulțimea A dacă pentru orice șir de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din A , $x_n \neq x_0$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, șirul $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ al valorilor funcției are limita l . Vom scrie atunci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = l \text{ sau } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Petru definiția 3.1.1 sunt echivalente afirmațiile:

3.1.2

a. Numărul $l \in \mathbb{R}$ (finit sau infinit) este **limita funcției** f în punctul x_0 relativ la mulțimea A dacă și numai dacă pentru orice vecinătate V a lui l există vecinătatea U a lui x_0 , depinzând de V , astfel încât pentru orice $x \in A \cap U$, $x \neq x_0$, avem $f(x) \in V$.

b. Dacă x_0 și l sunt finite, atunci l este **limita funcției** f în punctul x_0 relativ la mulțimea A dacă și numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

c. Dacă x_0 este finit și $l = +\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ dacă și numai dacă pentru orice număr $M > 0$ există $\delta_M > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_M$ avem $f(x) > M$.

d. Dacă $x_0 = \infty$ și l este finit, atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ dacă și numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$, $x \neq x_0$, $x > \delta_\varepsilon$ avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

3.1.3 **Operații cu limite de funcții:** Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0 un punct de acumulare pentru mulțimea A . Dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, finite sau infinite, atunci:

a. dacă $l_1 + l_2$ are sens, funcția sumă $f + g$ are limită în punctul x_0 și avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = l_1 + l_2$$

b. dacă $l_1 \cdot l_2$ are sens, funcția produs $f \cdot g$ are limită în punctul x_0 și avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$$

c. dacă $g(x) \neq 0$ pe o vecinătate a lui x_0 și dacă $\frac{l_1}{l_2}$ are sens, atunci funcția

$\frac{f}{g} : \{x \in A \mid g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ are limită în punctul x_0 și avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{l_1}{l_2}$$

d. dacă $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci funcția $\alpha \cdot f : A \rightarrow \mathbb{R}$ are limită în punctul x_0 și avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot l,$$

3.1.4 **Criterii de existență a limitelor de funcții:**

a. dacă $|f(x) - l| \leq g(x)$ pentru orice $x \in A$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

b. dacă $f(x) \geq h(x)$ pentru orice $x \in A$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

c. dacă există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$ pentru orice $x \in A$ (i.e. f este mărginită pe A) și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = 0$

d. **Criteriul lui Cauchy:** Funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ are limită în punctul de acumulare finit x_0 al lui A dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât pentru orice $x', x'' \in V \cap A, x' \neq x''$ avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

3.1.5 În aplicații se folosesc des următoarele limite:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(ax)}{bx}$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a > 1 \\ 0, & \text{dacă } 0 < a < 1 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a > 1 \\ \infty, & \text{dacă } 0 < a < 1 \end{cases}$

3.2 **CONTINUITATEA FUNCȚIILOR DE O VARIABILĂ REALĂ**

3.2.1 **Definiție:** Spunem că funcția f este **continuuă** în punctul de acumulare $x_0 \in A$ dacă pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ convergent la x_0 avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

Următoarele definiții sunt echivalente cu definiția dată mai sus **continuității unei funcții într-un punct:**

a. Pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât pentru orice $x \in V \cap A$ avem $f(x) \in U$.

b. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$, cu $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

3.2.2 **Definiție:** Spunem că funcția $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este **continuuă la stânga (respectiv la dreapta)** în $x_0 \in A$ dacă pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A, x_n \leq x_0$ (respectiv $x_n \geq x_0$), cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ (se mai poate scrie: $\lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = f(x_0)$ (respectiv

$\lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0)$), i.e. **limita laterală** (respectiv la dreapta) ale funcției f în punctul x_0 există și este egală cu $f(x_0)$.

3.2.3 **Propoziție:** Funcția $f : A \rightarrow \square$ este continuă în $x_0 \in A$ dacă și numai dacă este continuă la stânga și la dreapta în x_0 .

3.2.4 **Definiție:** Un punct $x_0 \in A$ se numește **punct de discontinuitate** a lui f dacă f nu este continuă în x_0 . Un punct de discontinuitate pentru funcția f se numește **punct de discontinuitate de speța I** dacă limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 există, sunt finite, dar nu sunt egale. Un punct de discontinuitate pentru funcția f se numește **punct de discontinuitate de speța a II-a** dacă nu este de speța I.

3.2.5 **Definiție:** Fie $I \subset \square$ un interval și $f : I \rightarrow \square$ o funcție. Spunem că funcția f are **proprietatea lui Darboux pe intervalul I** dacă pentru orice $a, b \in I, a \neq b$ și pentru orice $\lambda \in \square, f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ există $c_\lambda \in (a, b)$ astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda$.

3.2.6 **Propoziție:** Orice funcție continuă $f : I \rightarrow \square$ are proprietatea lui Darboux. (Reciproca nu este adevărată).

3.3 UNIFORM CONTINUITATEA FUNCȚIILOR DE O VARIABILĂ REALĂ

3.3.1 **Definiție:** Fie $I \subset \square$ un interval și $f : I \rightarrow \square$. Spunem că f este uniform continuă pe I dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x', x'' \in I$ cu $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

3.3.2 **Propoziție:** Orice funcție uniform continuă este continuă. (Reciproca nu este adevărată)

3.4 DERIVABILITATEA FUNCȚIILOR DE O VARIABILĂ REALĂ

3.4.1 **Definiție:** Fie $I \subset \square$ un interval, $f : I \rightarrow \square$ și $x_0 \in I$. Dacă există și este finită

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

vom spune că funcția f este **derivabilă** în punctul x_0 . Vom nota:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

și o vom numi derivata funcției f în x_0 .

Limitele

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_s(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

dacă există, se numesc respectiv **derivata la dreapta** și **derivata la stânga a funcției f în punctul x_0** .

3.4.2 **Propoziție:** Funcția $f : I \rightarrow \square$ este derivabilă în x_0 dacă și numai dacă are derivate laterale egale în x_0 .

3.4.3 **Teorema lui Rolle:** Fie funcția $f : I \rightarrow \square$, $a, b \in I, a < b$. Dacă:

i. f este continuă pe $[a, b]$.

ii. f este derivabilă pe (a, b)

iii. $f(a) = f(b)$

atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

3.4.4 **Teorema lui Lagrange:** Fie funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in I, a < b$. Dacă:

i. f este continuă pe $[a, b]$.

ii. f este derivabilă pe (a, b)

atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

3.4.5 **Consecințe:** Dacă $f'(x) > 0$ (respectiv $f'(x) < 0$) pe intervalul I , atunci f este crescătoare (respectiv descrescătoare) pe acest interval.

3.4.6 **Teorema lui Cauchy:** Fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}, a, b \in I$. Dacă:

i. f și g sunt continue pe $[a, b]$

ii. f și g sunt derivabile pe (a, b)

iii. $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

3.4.7 **Regulile lui l'Hospital :** 1. Fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}, c \in I$. Dacă:

i. $f(c) = g(c) = 0$

ii. f și g sunt derivabile în c

iii. $g'(c) \neq 0$

atunci $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

2. Fie $f, g : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$, unde c este un punct de acumulare pentru I . Dacă:

i. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$

ii. f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{c\}$

iii. $g'(x) \neq 0$ pentru $x \in I \setminus \{c\}$

iv. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

atunci $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

3. Fie $f, g : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$, unde c este un punct de acumulare pentru I . Dacă:

i. $\lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = +\infty$

ii. f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{c\}$

iii. $g'(x) \neq 0$ pentru $x \in I \setminus \{c\}$

iv. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

atunci $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

3.4.8 *Observații:* i. Fie $f, g : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$ și

$F = f \cdot g$. Dacă vom scrie $F = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{g}{\frac{1}{f}}$ vom obține unul din cazurile în care se poate aplica regula lui

l'Hospital (2. sau 3.)

ii. Fie $f, g : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty$ și $\Phi = f - g$. Atunci dacă vom scrie

$\Phi = f - g = \frac{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}{\frac{1}{f \cdot g}}$ vom obține unul din cazurile în care se poate aplica regula lui

l'Hospital (2. sau 3.)

iii. Fie $f, g : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \text{ și sau} \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \text{ și } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty \text{ sau} \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \end{aligned}$$

și $\Psi = f^g$, atunci dacă vom scrie $\Psi = f^g = e^{g \ln f}$ se obține cazul i. prezentat mai sus.

3.5 DIFERENȚIABILITATEA FUNCȚIILOR DE O VARIABILĂ REALĂ

3.5.1 *Definiție:* Vom spune că funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval, este **diferențiabilă** în punctul $x_0 \in I$ dacă există un număr $A \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in I$ să avem:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$$

unde $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție cu proprietatea $\alpha(x_0) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

3.5.2 *Consecință:* 1. O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă în $x_0 \in I$ dacă și numai dacă este derivabilă în x_0 . Dacă f este derivabilă în x_0 , atunci

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$$

unde $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție cu proprietatea $\alpha(x_0) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Pentru valori suficient de apropiate ale lui x de x_0 vom putea scrie:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0), \quad x \approx x_0, \quad x \in I$$

3.6 PROBLEME REZOLVATE

Folosind definiția limitei unei funcții într-un punct (3.1.3), să se arate că:

3.6.1 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

Rezolvare: fie $\delta > 0$ un număr real și $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x - 2| < \delta$. Obținem atunci că $-\delta < x - 2 < \delta \Leftrightarrow -\delta < x < \delta + 2$. Cum însă $|x + 2| \leq |x| + 2$ și $-2 - \delta < 2 - \delta$, avem:

$$|x| < 2 + \delta \text{ și}$$

$$|x+2| \leq |x| + 2 < 4 + \delta$$

Atunci:

$$(*) |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2| \cdot |x+2| < \delta(4 + \delta)$$

Fie atunci $\varepsilon > 0$ și $\delta > 0$ astfel încât $\delta(\delta + 4) < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2 + \sqrt{4 + \varepsilon}}$. Pentru $x \in I$, $|x-2| < \delta$ în

relația (*) obținem: $|x^2 - 4| < \varepsilon$. Am obținut așadar:

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2 + \sqrt{4 + \varepsilon}}$ astfel încât pentru orice $x \in I$, cu

$|x-2| < \frac{\varepsilon}{2 + \sqrt{4 + \varepsilon}}$, avem: $|x^2 - 4| < \varepsilon$, ceea ce înseamnă conform definiției 3.1.3 că funcția dată are

limita 4 în $x_0 = 2$.

$$3.6.2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

Rezolvare: Vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x > \delta_\varepsilon$ să avem

$\frac{1}{x^2 + 1} < \varepsilon$. Având în vedere că $x > 0$, inegalitatea $\frac{1}{x^2 + 1} < \varepsilon$ se mai poate scrie:

$$x > \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}}$$

Atunci luând $\delta_\varepsilon = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}}$, pentru $x > \delta_\varepsilon$ inegalitatea $\frac{1}{x^2 + 1} < \varepsilon$ este realizată.

$$3.6.3 \quad \text{Fie } f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \text{ Să se arate că } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Rezolvare: Fie $g, h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin(x), h(x) = \frac{1}{x}$. Avem: $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ și

$|g(x)| = |\sin(x)| \leq 1, \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Atunci conform criteriului 3.1.4, c., obținem că:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \cdot h(x) = 0$$

deci $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

3.6.4 Să se arate că funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (1 + \sin x) \ln x$ nu tinde către ∞ atunci când x tinde către ∞ .

Rezolvare: Să presupunem că funcția dată tinde către ∞ atunci când x tinde către ∞ . Atunci, conform criteriului 3.1.4.b., pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$. Fie atunci șirul

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$. Evident avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. Atunci

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$, conform criteriului mai sus amintit. Dar:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= (1 + \sin(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)) \cdot \ln(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) = \\ &= (1 + \sin \frac{3\pi}{2}) \cdot \ln(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) = (1 - 1) \cdot \ln(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) = 0 \end{aligned}$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$, contradicție, deci presupunerea făcută este falsă, și prin urmare funcția dată nu tinde către ∞ atunci când x tinde către ∞ .

3.6.5 Să se arate că funcția $f: \square \rightarrow \square$, $f(x) = \sin x$ nu are limită când x tinde către ∞ .

Rezolvare: Vom arăta că există șirurile $(x_n)_{n \in \square}$, $(y_n)_{n \in \square}$, cu $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} y_n = \infty$ și

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} f(y_n)$. Fie așadar $x_n = n\pi$, $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Avem evident

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = \infty$$

Dar $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$ și $f(y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 1$, deci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} f(y_n)$$

ceea ce contrazice criteriul 3.1.4, b.

3.6.6 Fie $f: \square \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \square$, $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$. Are această funcție limită în punctele -1 și 1 ?

Rezolvare: O funcție are limită într-un punct dacă și numai dacă limitele laterale în acel punct există și sunt egale. Să remarcăm mai întâi că deși puunțele -1 și 1 nu aparțin domeniului de definiție al funcției f , ele sunt totuși puncte de acumulare pentru acesta. Vom calcula șadar limitele laterale ale funcției în cele două puncte. Avem:

$$\lim_{x \rightarrow -1, x < -1} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1, x < -1} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1, x < -1} \frac{x}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow -1, x < -1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1, x > -1} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1, x > -1} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1, x > -1} \frac{x}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow -1, x > -1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty$$

deci funcția nu admite limită în punctul $x = -1$. Analog:

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{x}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2} \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{x}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty$$

deci funcția dată nu are limită nici în punctul $x = 1$.

3.6.7 Să se arate că funcția $f: \square^* \rightarrow \square$, $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ nu are limită în punctul $x=0$, demonstrând că nu satisface criteriul general al lui Cauchy.

Rezolvare: Vom arăta că există $\varepsilon_1 > 0$ astfel încât pentru orice $\delta > 0$ să existe x_1, x_2 , satisfăcând inegalitățile $|x_1|, |x_2| < \delta$ și $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_1$.

Fie $\varepsilon_1 = 2$. Atunci pentru orice $\delta > 0$ există un număr natural $n \in \square$ astfel încât:

$$x_1 = \frac{1}{2n\pi} < \delta, \quad x_2 = \frac{1}{(2n+1)\pi} < \delta$$

pentru că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)\pi} = 0$

Dar

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\cos 2n\pi - \cos(2n+1)\pi| = 2$$

și deci criteriul general Cauchy este contrazis; așadar funcția dată nu are limită în punctul $x=0$.

3.6.8 Să se arate că funcția $f: \square \setminus \{-1\} \rightarrow \square$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$ satisface criteriul general al lui Cauchy în punctul $x=1$.

Rezolvare: Fie $x', x'' > 0$, $x', x'' \neq 1$. Atunci:

$$\begin{aligned} (*) \quad |f(x') - f(x'')| &= \left| \frac{x'}{x'+1} - \frac{x''}{x''+1} \right| = \left| \frac{x' - x''}{(x'+1)(x''+1)} \right| \leq \frac{|x' - x''|}{|(x'+1)(x''+1)|} < \\ &< |x' - x''| = |x' - 1 + 1 - x''| \leq |x' - 1| + |x'' - 1| \end{aligned}$$

Alegem $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ și x', x'' astfel încât $|x' - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|x'' - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci în relația (*) obținem:

$$|f(x') - f(x'')| < |x' - 1| + |x'' - 1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ceea ce înseamnă că funcția dată satisface criteriul lui Cauchy în punctul $x=1$.

3.6.9 Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

Rezolvare: Suntem în cazul exceptat $\infty - \infty$. Avem:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}$$

Cum $x \rightarrow \infty$, deci $x > 0$, obținem $|x| = x$ și deci:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0$$

$(\frac{1}{x} \rightarrow 0$ și $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$; se aplică 3.1.4, c.).

3.6.10 Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

Rezolvare: Avem:

$$f(x) = x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = x \cdot \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{x}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}$$

Pentru $x \rightarrow \infty$ avem $x > 0$ deci $|x| = x$. Atunci:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}$$

Pentru $x \rightarrow -\infty$ avem $x < 0$ și deci $|x| = -x$. Atunci:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) = x \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x \right) = x \left(-x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x \right) = \\ &= -x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) \end{aligned}$$

Atunci:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = -\infty$$

3.6.11 Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$$

Rezolvare: Suntem în cazul exceptat $\frac{0}{0}$. Ținând cont de relația:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

în care luăm $a = \sqrt[n]{1+x}$, $b = 1$, obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} &= \frac{(\sqrt[n]{1+x})^n - 1^n}{x \left(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{1+x} + 1 \right)} = \\ &= \frac{x}{x \left(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{1+x} + 1 \right)} = \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{1+x} + 1} \end{aligned}$$

și atunci:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{1+x} + 1} = \frac{1}{n}$$

3.6.12 Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Rezolvare: Suntem de asemenea în cazul $\frac{0}{0}$. Atunci:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right)}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

și deci:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \quad (\text{vezi 3.1.5,a})$$

3.6.13 Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{5x}$$

Rezolvare: Avem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos 4x}{5x} = \frac{2}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 4x = \frac{2}{5}$$

(a se vedea operații cu limite de funcții, 3.1.3)

3.6.14 Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

Rezolvare: Deoarece $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = -\infty$, suntem în cazul exceptat $0 \cdot \infty$. Fie atunci $1-x = u$; atunci pentru $x \rightarrow 1$, avem $u \rightarrow 0$ și

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} (1-u) \right) = \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi u}{2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi u}{2} \right)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi},$$

unde am aplicat 3.1.5, a.

3.6.15 Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$$

Rezolvare: Să observăm mai întâi că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} = 1$, deci suntem în cazul exceptat 1^∞ . Avem:

$$\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2} = \left(1 + \frac{3}{x^2 - 2} \right)^{x^2} = \left(\left(1 + \frac{3}{x^2 - 2} \right)^{\frac{x^2 - 2}{3}} \right)^{\frac{3x^2}{x^2 - 2}}$$

Cum:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x^2 - 2} \right)^{\frac{x^2 - 2}{3}} = e \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 - 2} = 3$$

obținem că:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2} = e^3 \quad (\text{am aplicat 3.1.5,b})$$

3.6.16 Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+kx)}{x}$$

Rezolvare: Suntem în cazul $\frac{0}{0}$. Avem:

$$\frac{\ln(1+kx)}{x} = \frac{1}{x} \ln(1+kx) = \ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}$$

și atunci:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+kx)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[(1+kx)^{\frac{1}{kx}} \right]^k = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} k \cdot \ln(1+kx)^{\frac{1}{kx}} = k \cdot \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+kx)^{\frac{1}{kx}} = k \cdot \ln(e) = k \end{aligned}$$

3.6.17 Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$$

Rezolvare: Suntem în cazul $\frac{0}{0}$. Notăm $t = e^{2x} - 1$, de unde: $e^{2x} = t + 1$ sau, logaritmand,

$\ln(e^{2x}) = \ln(t+1) \Leftrightarrow 2x = \ln(t+1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln(t+1)$. Observăm că dacă $x \rightarrow 0$, atunci $t \rightarrow 0$.

Obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{3}{2} \ln(t+1)} = \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = \frac{2}{3}$$

(pentru că $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \ln(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\ln(e)} = 1$)

3.6.18 Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, \quad a > 0$$

Rezolvare: Suntem în cazul $\frac{0}{0}$. Notăm $a^x - 1 = t$, de unde:

$$a^x = t + 1 \Leftrightarrow \ln(a^x) = \ln(t+1) \Leftrightarrow x \cdot \ln(a) = \ln(t+1) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(t+1)}{\ln(a)}$$

Se observă că dacă $x \rightarrow 0$ atunci $t \rightarrow 0$. Obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln(a)}} = \ln(a) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = \ln(a)$$

3.6.19 Studiați continuitatea funcției:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

Rezolvare: Pentru $x \neq 0$, funcția este continuă; vom studia continuitatea funcției numai în punctul $x = 0$. Avem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty \text{ și deci } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$, funcția nu este continuă în punctul $x=0$; acest punct este punct de discontinuitate de speța întâia.

3.6.29 Studiați continuitatea funcției:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & \text{daca } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ 0, & \text{daca } x = -2 \end{cases}$$

Rezolvare: Funcția este continuă în orice punct $x \neq -2$; în punctul $x = -2$ avem:

$$f(-2+0) = \lim_{x \rightarrow -2, x > -2} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\infty} = 0, \text{ pentru că } \lim_{x \rightarrow -2, x > -2} \frac{1}{2+x} = \infty$$

$$f(-2-0) = \lim_{x \rightarrow -2, x < -2} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1} = 1, \text{ pentru că } \lim_{x \rightarrow -2, x < -2} \frac{1}{2+x} = -\infty$$

Am obținut așadar că limitele laterale ale funcției în punctul $x = -2$ nu sunt egale, de funcția nu este continuă în $x = -2$; deoarece $f(-2+0) = f(-2) = 0$, funcția dată este continuă la dreapta în punctul $x = -2$; $x = -2$ este punct de discontinuitate de speța a doua.

3.6.29 Fie $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [0, 1] \\ 3ax+3, & x \in (1, 3] \end{cases}$. Să se determine constanta a astfel încât funcția f să fie continuă pe intervalul închis $[1, 2]$.

Rezolvare: Deoarece funcția f pe intervalele $[1, 2]$ și $(1, 2]$ este liniară, deci continuă, vom studia continuitatea funcției f numai în punctul $x = 1$. Condiția de continuitate pentru funcția f în punctul $x = 1$ se scrie:

$$(1) \quad f(1) = f(1+0) = f(1-0)$$

Dar:

$$(2) \quad f(1) = 1+1 = 2$$

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} (x+1) = 2$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} (3ax+3) = 3a+3$$

Din relațiile (1) și (2) obținem așadar că: $3a+3 = 2$, deci $a = -\frac{1}{3}$.

3.6.22 Să se studieze continuitatea funcției:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + 1), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Rezolvare: Dacă $x \in [0, 1)$, atunci $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + 1) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1$. Dacă $x = 1$, atunci

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1^n + 1) = 2. \text{ Așadar funcția este continuă pe intervalul } [0, 1) \text{ și discontinuă în punctul}$$

$x = 1$, având o discontinuitate de prima speță.

3.6.29 Să se arate funcția $f(x) = x^{2^x} - I$ se anulează într-un punct $\xi \in (0, I)$.

Rezolvare: Avem: $f(0) = -I < 0$ și $f(I) = I \cdot 2^I - I = I > 0$. Cum funcția f este continuă pe intervalul $(0, I)$, f are proprietatea lui Darboux pe intervalul $(0, I)$, cu alte cuvinte există cel puțin un punct $\xi \in (0, I)$ astfel încât $f(\xi) = 0$.

3.6.24 Să se arate că funcția

$$f(x) = \begin{cases} I, & \text{daca } x \in \mathbb{Q} \\ -I, & \text{daca } x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

Rezolvare: Fie $x' \in \mathbb{Q}$. Cum mulțimea numerelor iraționale este densă în mulțimea numerelor reale, oricare ar fi o vecinătate V a lui x' , există un punct $x'' \in \mathbb{Q}^c$ cu $x'' \in V$. Am obținut așadar că pentru orice vecinătate V a lui x' există $x'' \in V$ astfel încât $f(x') - f(x'') = I - (-I) = 2$, deci f nu este continuă în nici un punct $x \in \mathbb{Q}$.

Analog, pentru orice $x' \in \mathbb{Q}^c$, ținând cont că mulțimea numerelor raționale este densă în mulțimea numerelor reale, f nu este continuă în nici un punct $x \in \mathbb{Q}^c$; așadar f nu este continuă în nici un punct $x \in \mathbb{Q} \cup (\mathbb{Q}^c)$.

3.6.25 Să se studieze continuitatea uniformă pentru funcția: $f(x) = \sin(x^2)$

Rezolvare: Cum funcția sinus este o funcție mărginită pe \mathbb{R} , funcția f este de asemenea mărginită. De asemenea, fiind compunerea a două funcții continue, f este continuă.

Pentru a studia uniform continuitatea funcției avem:

$$f(x) = \begin{cases} I, & \text{daca } x^2 = (4k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ -I, & \text{daca } x^2 = (4k+3)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{daca } x^2 = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Fie $x' = \sqrt{(4k+3)\frac{\pi}{2}}$, $x'' = \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$. Atunci $x' - x'' = \frac{\pi}{\sqrt{(4k+3)\frac{\pi}{2}} + \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}}$, și deci pentru

valori ale lui k suficient de mari, punctele x' și x'' pot fi luate oricât de apropiate. Însă:

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \sin\left(4k+3\right)\frac{\pi}{2} - \sin\left(4k+1\right)\frac{\pi}{2} \right| = 2$$

Am arătat așadar că există $\varepsilon = 2$ și punctele x', x'' situate la distanță oricât de mică astfel încât

$|f(x') - f(x'')| = 2$, ceea ce demonstrează că funcția dată nu este uniform continuă pe \mathbb{R} (dar este uniform continuă pe orice interval compact din \mathbb{R}).

3.6.26 Să se studieze uniform continuitatea funcției $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} + x$

Rezolvare: Se observă că funcția dată este continuă (fiind suma dintre raportul a două funcții continue și o funcție continuă) și nemărginită pe intervalul considerat (avem: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} + x = \infty$). Vom arăta că este uniform continuă pe $[0, \infty)$.

Fie $x_1, x_2 \geq 0$. Avem:

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| \frac{x_1}{x_1 + 1} + x_1 - \frac{x_2}{x_2 + 1} - x_2 \right| = \left| (x_1 - x_2) + (x_1 - x_2) \left(1 + \frac{x_2 - x_1}{(1 + x_1) \cdot (1 + x_2)} \right) \right| \leq \\ &\leq |x_1 - x_2| \left(1 + \frac{|x_1 - x_2|}{(1 + x_1)(1 + x_2)} \right) < |x_1 - x_2| (1 + |x_2 - x_1|) \end{aligned}$$

Fie $\varepsilon > 0$ și $\delta > 0$ astfel încât $\delta(1 + \delta) < \varepsilon$. Atunci pentru orice $x_1, x_2 \geq 0$ astfel încât $|x_1 - x_2| < \delta$ obținem, conform relației de mai sus, $|f(x_1) - f(x_2)| < \delta(1 + \delta) < \varepsilon$, ceea ce demonstrează că funcția dată este uniform continuă pe $[0, \infty)$.

3.6.27 Să se studieze derivabilitatea funcției $f(x) = \sin(2x^2 + 1)$ în punctul $x_0 = 2$

Rezolvare: Conform definiției, o funcție este derivabilă într-un punct x_0 dacă există și este finită

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \text{ În cazul de față obținem:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2x^2 + 1) - \sin(9)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \cdot \sin \frac{2x^2 + 1 - 9}{2} \cdot \cos \frac{2x^2 + 1 + 9}{2}}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \cdot \sin(x^2 - 4) \cdot \cos(x^2 + 5)}{x - 2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4} (x + 2) \cos(x^2 + 5) = 8 \cos(9) \end{aligned}$$

pentru că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = 1$; așadar $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ există și este finită, deci funcția dată este derivabilă în punctul $x_0 = 2$.

3.6.28 Să se studieze derivabilitatea funcției $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + 2x), & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$.

Rezolvare: Pentru $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ avem $f'(x) = (\ln(1 + 2x))' = \frac{2}{1 + 2x}$; pentru $x \in (0, \infty)$ avem

$f'(x) = 2$. Așadar f este derivabilă pe $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)$; pentru a studia derivabilitatea funcției în punctul $x = 0$ vom folosi proprietatea 3.4.2; derivatele laterale ale funcției f în $x = 0$ sunt:

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{2x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{2x}{x} = 2 \\ f'_s(0) &= \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{\ln(1 + 2x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \ln \left((1 + 2x)^{\frac{1}{2x}} \right)^{2x} = 2 \end{aligned}$$

Cum derivatele laterale sunt egale, funcția f este derivabilă în $x = 0$ și $f'(0) = 2$.

3.6.29 Să se studieze derivabilitatea funcției $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \max(\cos(x), \cos^3(x))$.

Rezolvare: Fie $g : [0, \pi] \rightarrow \square$, $g(x) = \cos(x) - \cos^3(x)$. Avem:

$$g(x) = \cos(x)(1 - \cos^2(x)) = \cos(x)\sin^2(x)$$

și deci $g(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) > \cos^3(x)$ pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \leq \cos^3(x)$ pentru

$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, pentru că $\sin^2(x) \geq 0$ pentru orice x și $\cos(x) > 0$ pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(x) \leq 0$ pentru $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Am obținut așadar că:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{daca } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \cos^3(x), & \text{daca } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

deci

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin(x), & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, x \neq \frac{\pi}{2} \\ -3\cos^2(x)\sin(x), & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Pentru $x = \frac{\pi}{2}$ vom stabili derivabilitatea funcției f pornind de la propoziția 3.4.2:

$$f'_d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x) - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2}} -\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 = 0$$

$$f'_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}, x < \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}, x < \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -1$$

Cum derivatele laterale nu sunt egale, funcția nu este derivabilă în $x = \frac{\pi}{2}$.

3.6.30 Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctg(x)$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$.

Rezolvare: Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \square$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctg(x)$. Avem:

$$f'(x) = \frac{1+x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} < 0$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$. Cum derivata funcției este negativă pe $(0, \infty)$, funcția f este descrescătoare pe $(0, \infty)$. Obținem așadar că $f(x) < f(0) = 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, de unde

$$\frac{x}{1+x^2} - \arctg(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} < \arctg(x) \text{ pentru orice } x \in (0, \infty).$$

3.6.31 Să se demonstreze inegalitatea

$$\operatorname{tg}(x) > x + \frac{x^3}{3}$$

pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rezolvare: Fie $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg}(x) - x - \frac{x^3}{3}$. Avem:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 - x^2 = \frac{1 - \cos^2(x) - x^2 \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x) - x^2 \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{(\sin(x) + x \cos(x))(\sin(x) - x \cos(x))}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

Fie $g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(x) - x \cos(x)$. Avem

$g'(x) = \cos(x) - \cos(x) + x \sin(x) = x \sin(x) > 0$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci g este

descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $g(x) > g(0) = 0$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, de unde

$\sin(x) - x \cos(x) > 0$.

Cum $\sin(x) + x \cos(x) > 0$, $\cos^2(x) > 0$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem că $f'(x) > 0$,

deci funcția f este crescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci $f(x) > f(0) = 0$, $(\forall) x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci

$\operatorname{tg}(x) - x - \frac{x^3}{3} > 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x) > x + \frac{x^3}{3}$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

3.6.32 Să se demonstreze inegalitatea

$$|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. Cum f este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) , din teorema lui Lagrange (3.4.4) obținem există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

deci

$$\frac{\sin(b) - \sin(a)}{b - a} = \cos(c)$$

De aici obținem $|\sin(b) - \sin(a)| = |b - a| \cdot |\cos(c)| \leq |b - a|$ pentru că $|\cos(c)| \leq 1$.

3.6.33 Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{b - a}{\cos^2(a)} \leq \operatorname{tg}(b) - \operatorname{tg}(a) \leq \frac{b - a}{\cos^2(b)}$$

pentru orice $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$.

Rezolvare: Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg}(x)$. Cum f este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) , f îndeplinește ipotezele teoremei Lagrange (3.4.4), deci există $c \in (a, b)$ astfel încât:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}(b) - \operatorname{tg}(a)}{b - a} = \frac{1}{\cos^2(c)}$$

Deoarece funcția $\cos(x)$ este descrescătoare pe intervalul $[a, b] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, cum $a < c < b$, obținem că:

$$\cos(a) > \cos(c) > \cos(b) > 0 \Leftrightarrow \cos^2(a) > \cos^2(c) > \cos^2(b) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2(a)} < \frac{1}{\cos^2(c)} < \frac{1}{\cos^2(b)}$$

$$\text{Dar } \frac{\operatorname{tg}(b) - \operatorname{tg}(a)}{b - a} = \frac{1}{\cos^2(c)}, \text{ deci } \frac{b - a}{\cos^2(a)} \leq \operatorname{tg}(b) - \operatorname{tg}(a) \leq \frac{b - a}{\cos^2(b)}$$

pentru orice $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$.

3.6.34 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \sin(x)}$.

Rezolvare: Fie $f, g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg}(x) - x$, $g(x) = x - \sin(x)$. Observăm că:

i. funcțiile f și g sunt derivabile pentru orice $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1, \quad g'(x) = 1 - \cos(x)$$

ii. $g'(x) \neq 0 \quad (\forall) x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

$$\begin{aligned} \text{iv. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)(1 - \cos(x))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{\cos^2(x)(1 - \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(x)}{\cos^2(x)} = 2 \end{aligned}$$

Atunci, conform teoremei lui l'Hospital (3.4.7) avem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \sin(x)} = 2.$$

3.6.35 Să se calculeze: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln(x) - x + 1}$

Rezolvare: Fie $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^x - x$, $g(x) = \ln(x) - x + 1$. Observăm că:

i. f și g admit derivate de ordinul I și II pe $(0, \infty)$ și

$$f'(x) = x^x (\ln(x) + 1) - 1, g'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$f''(x) = x^x (\ln(x) + 1)^2 + x^{x-1}, g''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

ii. $g'(x) \neq 0$ și $g''(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g'(x) = 0$

iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln(x) + 1)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -2$

Atunci conform teoremei lui l'Hospital (3.4.7) obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ și } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} \text{ de unde } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln(x) - x + 1} = -2.$$

3.6.36 Să se calculeze: $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^2 \ln(x)$

Rezolvare: Fie $f, g : (0, \infty) \rightarrow \infty, f(x) = x^2, g(x) = \ln(x)$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = 0$ și

$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g(x) = -\infty$, suntem în cazul exceptat $0 \cdot \infty$. În aceste condiții avem:

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^2 \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}}$$

și ajungem astfel la cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$. Se verifică ușor că sunt verificate ipotezele teoremei lui

l'Hospital (3.4.7), deci obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^2 \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{(\ln(x))'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} -\frac{x^2}{2} = 0$$

3.6.37 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^x$

Rezolvare: Suntem în cazul de excepție 0^0 . În aceste condiții scriem:

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} e^{\ln(x^x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \ln(x)}$$

$$\text{Dar } \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{(\ln(x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0, \text{ deci } \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} e^{x \ln(x)} = e^0 = 1$$

3.6.38 Folosind diferențiala, să se calculeze aproximativ valorile:

i. $\arcsin(0,51)$

ii. $\text{arctg}(1,05)$

Rezolvare: i. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], f(x) = \arcsin(x)$. Punând $x = 0,5, \Delta x = 0,01$ și aplicând definiția diferențialei unei funcții (3.5.1) se obține:

$$\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin(x) + (\arcsin(x))' \cdot \Delta x$$

sau, în cazul de față:

$$\arcsin(0,51) \approx \arcsin(0,5) + \frac{1}{\sqrt{1-(0,5)^2}} \cdot 0,01 \approx 0,513$$

ii. Fie funcția $f: \square \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arctg(x)$. Punând $x = 1$, $\Delta x = 0,05$ și aplicând definiția diferențialei unei funcții (3.5.1) se obține:

$$\arctg(x + \Delta x) \approx \arctg(x) + (\arctg(x))' \cdot \Delta x$$

sau, în cazul de față:

$$\arctg(1,05) \approx \arctg(1) + \frac{1}{1+1} \cdot 0,05 \approx 0,811$$

3.7 PROBLEME PROPUSE

Folosind definiția limitei unei funcții într-un punct să se arate că:

$$3.7.1 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x}{3} = \frac{3}{8}$$

$$3.7.2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 1}{x + 3} = \frac{1}{3}$$

3.7.3 Să se arate că funcția $f(x) = \cos(x)$ nu are limită când $x \rightarrow \infty$.

Să se calculeze următoarele limite:

$$3.7.4 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 6} - \sqrt{x^2 - 2x + 16}}{x - 2} \quad \text{R: } \frac{5}{8}$$

$$3.7.5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} \quad \text{R: } \frac{2}{n}$$

$$3.7.6 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))^2}{x^4} \quad \text{R: } \frac{1}{4}$$

Indicație: $1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$$3.7.7 \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}} \quad \text{R: } \frac{\pi}{2}$$

Indicație: Se folosește substituția $x = \pi + u$

$$3.7.8 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \quad \text{R: } e^2$$

$$3.7.9 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 4} \right)^x \quad \text{R: } e^2$$

$$3.7.10 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg}(x) - 2}{x - \frac{\pi}{4}} \quad \text{R: } \ln(16)$$

Indicație: $2^{t^g(x)-1} - 1 = t$

3.7.11 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos(x)}{x}$

Indicație: Se scrie $\frac{e^{2x} - \cos(x)}{x} = \frac{e^{2x} - 1}{x} + \frac{1 - \cos(x)}{x}$ și se calculează fiecare

limită în parte

Să se determine constanta α astfel încât următoarele funcții să fie continue:

3.7.12 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x + x^2}, & \text{daca } 1 \leq x < 2 \\ \alpha x + 3, & \text{daca } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ R: $\alpha = -\frac{1}{3}$

3.7.13 $f(x) = \begin{cases} \frac{6 \sin(\alpha(x-1))}{x-1}, & \text{daca } 0 \leq x < 1 \\ \alpha x + 3, & \text{daca } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ R: $\alpha = \frac{5}{7}$

Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

3.7.14 $f(x) = \begin{cases} e^x + x - 1, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x^{x-1}}, & x > 1 \end{cases}$ R: continuă

3.7.15 $f(x) = \begin{cases} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ R: discontinuă în $x=0$

3.7.16 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ R: continuă în $x=0$, discontinuă pentru $x \neq 0$

Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor:

3.7.17 $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x)$ R: nu este uniform continuă

3.7.18 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$ R: este uniform continuă

3.7.19 $f: \left(0, \frac{1}{\pi}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ R: nu este uniform continuă

Fiind dat $\varepsilon > 0$, să se determine δ_ε astfel încât să fie satisfăcută condiția de continuitate pentru funcțiile:

3.7.20 $f(x) = \sqrt{2x+3}, x \in [0, 2]$

3.7.21 $f(x) = \frac{x}{x+2}, x \in [1, \infty)$

Să se studieze derivabilitatea funcțiilor următoare:

3.7.22 $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 3x), & 0 < x \leq 1 \\ \frac{5}{4}(x-1) + 2 \ln(2), & x > 1 \end{cases}$ R: funcția este derivabilă pentru orice x

3.7.23 $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + 11}, & x \leq 4 \\ \frac{8}{27}x + \frac{49}{27}, & x > 4 \end{cases}$ R: funcția este derivabilă pentru orice x

3.7.24 $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\ln(x) - 1|$

R: funcția nu este derivabilă în $x = e$

3.7.25 $f(x) = \min\{x^2 + x, 4x - 2\}$

R: funcția nu este derivabilă în $x = 1$ și $x = 2$

Indicație: Se studiază semnul funcției $g(x) = x^2 + x - (4x - 2)$

Să se calculeze derivatele funcțiilor următoare:

3.7.26 $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right) + \frac{6}{x+1}, x > -1, x \neq 0$

R: $f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2}$

3.7.27 $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}, x \neq \pm 1$

R: $-\frac{4x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2(1+x^2)^4}}$

3.7.28 $f(x) = \frac{1}{3\cos^3(x)} - \frac{1}{\cos(x)}, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

R: $\frac{\sin^3(x)}{\cos^4(x)}$

Să se demonstreze inegalitățile:

3.7.29 $e^x > 1 + x$ pentru orice $x \neq 0$

3.7.30 $\arcsin(x) > x + \frac{x^3}{6}$ pentru orice $x \in (0, 1)$

3.7.31 $|\cos(b) - \cos(a)| \leq |b - a|$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$

3.7.32 $\frac{a-b}{a} \leq \ln\left(\frac{a}{b}\right) \leq \frac{a-b}{b}$ pentru orice $0 < b < a$

Folosind teorema lui l'Hospital, să se calculeze limitele:

3.7.33 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3(x)}{x \sin(2x)}$

R: $\frac{3}{4}$

3.7.34 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - x \sin(x) - \cos(x)}{x^2}$

R: $\frac{1}{2}$

3.7.35 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x}} \ln(x)$

R: 0

3.7.36 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

R: $-\frac{e}{2}$

3.7.37 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

R: $e^{\frac{1}{6}}$

Să se calculeze valorile aproximative pentru:

3.7.38 $\operatorname{tg}(46^\circ)$

R: 1,035

3.7.39 $\ln(0,09)$

R: -0,1

CAP. 4 SERI DE FUNCȚII

Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții, $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$

4.1.1 **Definiție:** Se numește **serie de funcții** o serie de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \dots$$

Pentru orice punct $x_0 \in E$ se poate defini seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, care poate fi convergentă sau divergentă.

4.1.2 **Definiție:** Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se numește **convergentă** în punctul $x_0 \in E$ dacă seria numerică

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ este convergentă. Mulțimea punctelor $x \in E$ în care seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă se numește **mulțime de convergență** a seriei date și o vom nota cu X .

4.2 CONVERGENȚĂ SIMPLĂ

4.2.1 **Definiție:** Fie șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ și $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că seria de funcții

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge simplu** către funcția f dacă seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge la $f(x)$ pentru orice

$x \in E$. Funcția f se numește **suma** seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

4.2.2 **Propoziție:** Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este simplu convergentă pe E către f dacă și numai dacă pentru orice

$\varepsilon > 0$ și pentru orice $x \in E$ există un număr $N_{\varepsilon, x}$ astfel încât pentru orice $n \geq N_{\varepsilon, x}$ avem:

$$|f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

pentru orice $x \in E$.

4.3 CONVERGENȚA UNIFORMĂ

4.3.1 **Definiție:** Fie șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ și $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că seria

de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge uniform** către funcția f dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr N_ε astfel

încât pentru orice $n \geq N_\varepsilon$ avem:

$$|f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

pentru orice $x \in E$.

Observație: Rezultă de aici că în cazul convergenței uniforme N_ε este independent de punctul $x \in E$, i.e. este același pentru orice $x \in E$.

4.3.2 **Definiție:** Se numește **rest de rang n** al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ seria

$$R_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \dots + f_{n+p} + \dots$$

Observație: Mulțimea de convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este și mulțimea de convergență a seriei R_n .

4.4 CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII DE FUNCȚII

4.4.1 **Teoremă:** Condiția necesară și suficientă ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ să fie uniform convergentă (simplu convergentă) pe mulțimea E este ca restul său R_n să fie uniform convergent (respectiv simplu convergent) pe E pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

4.4.2 **Teoremă:** Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă (simplu convergentă) pe E către funcția f dacă și numai dacă șirul de funcții $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este uniform convergent (respectiv simplu convergent) către funcția identic nulă pe E .

4.4.3 **Criteriu lui Cauchy:** O serie de funcții definite pe E este uniform convergentă pe mulțimea E dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural N_ε astfel încât pentru orice $n > N_\varepsilon$ și $p \geq 1$ și pentru orice $x \in E$ să avem:

$$|f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

4.4.4 **Teoremă:** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$, cu $\phi_n(x) > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, două serii de funcții definite pe mulțimea E . Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și pentru orice $x \in E$ avem $|f_n(x)| \leq \phi_n(x)$ și seria $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$ este uniform convergentă pe E , atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe E .

4.4.5 **Criteriul lui Weierstrass:** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe E și $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie de numere reale pozitive convergentă. Dacă $|f_n(x)| < a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in E$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe E .

4.4.6 **Propoziție:** Fie seriile de funcții definite pe mulțimea E $\sum_n f_n$, $\sum_n g_n$ cu sumele f și respectiv g , având mulțimile de convergență X_1 și respectiv X_2 . Atunci:

- Seria $\sum_n (f_n + g_n)$ este convergentă pe $X_1 \cap X_2$ către funcția $f + g$
- pentru $\alpha \in \mathbb{R}$, seria $\sum_n \alpha f_n$ este convergentă pe mulțimea X_1 către funcția αf

4.5 CONTINUITATEA, DERIVABILITATEA ȘI INTEGRABILITATEA SERIILOR UNIFORM CONVERGENTE

4.5.1 **Teoremă:** Fie $\sum_n f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea E uniform convergentă pe E către funcția f . Dacă toate funcțiile f_n sunt continue în punctul $x_0 \in E$ (respectiv pe mulțimea E), atunci funcția f este continuă în x_0 (respectiv pe mulțimea E)

4.5.2 **Teoremă:** Fie $\sum_n f_n$ o serie de funcții definite pe intervalul $[a, b]$, convergentă pe $[a, b]$ către funcția f . Dacă toate funcțiile f_n sunt integrabile pe intervalul $[a, b]$, atunci f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$ și $\sum_n \int_a^b f_n(x) dx$ este convergentă. De asemenea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

4.5.3 **Teoremă:** Dacă $\sum_n f_n$ este o serie de funcții uniform convergentă pe un interval mărginit I către funcția f și dacă funcțiile f_n sunt derivabile pe I iar seria de funcții $\sum_n f_n'$ converge uniform către funcția g , atunci f este derivabilă pe I și $f' = g$.

4.6 EXERCIȚII REZOLVATE

4.6.1 Calculați domeniul de convergență al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$

Rezolvare: Dacă $|x| < 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1$; pentru ca o serie de numere reale să converge este necesar însă ca șirul termenilor generali să convergă la 0, deci seria de funcții dată nu este convergentă pentru $|x| < 1$.

Dacă $|x| = 1$, atunci se obține seria cu termenul general $u_n = \frac{1}{2}$, deci seria de funcții nu converge nici pentru $|x| = 1$, din aceleași considerente.

Dacă $|x| > 1$, atunci:

$$\frac{1}{1+x^{2n}} < \frac{1}{x^{2n}}$$

iar seria cu termenul general $u_n = \frac{1}{x^{2n}}$ este convergentă pentru $|x| > 1$ (este o progresie geometrică cu rația subunitară), deci conform teoremei 4.4.4, seria dată converge pentru $|x| > 1$. Așadar domeniul de convergență pentru seria dată este $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

4.6.2 Aplicând criteriul lui Weierstrass să se arate că seria

$$\sin(x) + \frac{1}{2^2} \sin^2(2x) + \frac{1}{3^2} \sin^2(3x) + \dots$$

converge uniform în intervalul $(-\infty, \infty)$.

Rezolvare: Avem: $\left| \frac{1}{n^2} \sin^2(nx) \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Cum seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, conform criteriului lui Weierstrass (4.4.5) seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2(nx)$ converge uniform pe mulțimea $(-\infty, \infty)$.

4.6.3 Să se determine mulțimea de convergență pentru seria de funcții

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \left(\frac{1-x}{1-2x} \right)^n$$

Rezolvare: Se observă că șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are ca domeniu de definiție mulțimea $\square \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$. Fișadar $x \in \square \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$. Obținem seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \left(\frac{1-x}{1-2x} \right)^n$. Pentru această serie aplicăm criteriul rădăcinii și obținem:

- dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n \left(\frac{1-x}{1-2x} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \left| \frac{1-x}{1-2x} \right| = \left| \frac{1-x}{1-2x} \right| < 1$ atunci seria numerică este convergentă; rezolvând inecuația $\left| \frac{1-x}{1-2x} \right| < 1$ obținem $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty \right)$. Așadar seria de funcții converge pentru $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty \right)$.

- dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n \left(\frac{1-x}{1-2x} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \left| \frac{1-x}{1-2x} \right| = \left| \frac{1-x}{1-2x} \right| > 1$ atunci seria numerică este divergentă; așadar seria de funcții nu este convergentă pentru $x \in \left(0, \frac{2}{3} \right) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

- dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n \left(\frac{1-x}{1-2x} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \left| \frac{1-x}{1-2x} \right| = \left| \frac{1-x}{1-2x} \right| = 1$, deci pentru $x \in \left\{ 0, \frac{2}{3} \right\}$ obținem:

- dacă $x = 0$, se obține seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$, care nu este convergentă, deci seria de funcții nu converge pentru $x = 0$

- dacă $x = \frac{2}{3}$, se obține seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$, care nu este convergentă pentru că termenul general al seriei nu converge la 0.

Așadar mulțimea de convergență pentru seria dată este $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty \right)$.

4.6.4 Se poate aplica teorema de integrare (4.5.2) pentru seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \cos(nx)$ pe segmentul $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right]$?

Rezolvare: Se observă că $\left| \frac{1}{2^{n-1}} \cos(nx) \right| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Dar $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ sunt termenii unei progresii geometrice infinit descrescătoare, deci seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ este convergentă, de unde, conform criteriului lui

Weierstrass, seria de funcții dată este uniform convergentă pe segmentul $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right]$. În aceste condiții, ipotezele teoremei de integrare a seriilor de funcții sunt realizate, deci aceasta se poate aplica.

4.4.5 Să se determine mulțimea de convergență pentru seriile de funcții:

- a. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^n$
 b. $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x) \left(2-x^{\frac{1}{2}} \right) \left(2-x^{\frac{1}{3}} \right) \dots \left(2-x^{\frac{1}{n}} \right), \quad x > 0$

Rezolvare: a. Fie $x \in \square$ și seria numerică cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=2}^{\infty} |f_n(x)| = \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^n \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} \cdot \frac{|(1-x^2)|^n}{(1+x^2)^n}.$$

Vom aplica criteriul raportului acestei serii. Obținem:

- Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1-x^2|}{1+x^2} \cdot \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \frac{|1-x^2|}{1+x^2} < 1$, atunci seria $\sum_{n=2}^{\infty} |f_n(x)|$ este convergentă; așadar pentru $\frac{|1-x^2|}{1+x^2} < 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ seria $\sum_{n=2}^{\infty} |f_n(x)|$ este convergentă, ceea ce înseamnă că seria $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ este absolut convergentă, deci în particular convergentă. Am obținut așadar că seria de funcții dată converge pentru $x \neq 0$.
- Dacă $x = 0$ se obține seria numerică $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$, care conform criteriului lui Leibnitz este de asemenea convergentă (este o serie alternată și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$)

În concluzie, domeniul de convergență pentru seria de funcții $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^n$ este \square .

- b. Pentru $x = 2$ seria este evident convergentă, pentru că toți termenii sunt egali cu 0. Fie $x > 0, x \neq 2$ și seria numerică cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (2-x) \left(2-x^{\frac{1}{2}} \right) \left(2-x^{\frac{1}{3}} \right) \dots \left(2-x^{\frac{1}{n}} \right) \right|$. Să remarcăm mai întâi că, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$, există un rang $n_0 \in \square$ astfel încât $2-x^{\frac{1}{n}} > 0$ pentru orice $n \geq n_0$. Aplicăm criteriul Raabe-Duhamel seriei numerice alese. Obținem:

- dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|f_n(x)|}{|f_{n+1}(x)|} - 1 \right) > 1$, atunci seria numerică aleasă este convergentă. Dar:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|f_n(x)|}{|f_{n+1}(x)|} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{2 - x^{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\left(\frac{1}{x^{n+1}} - 1 \right)}{2 - x^{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}} = \ln(x) \end{aligned}$$

pentru că $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = \ln(a)$. Așadar, pentru $\ln(x) > 1 \Leftrightarrow x > e$ seria numerică aleasă este convergentă, de unde seria de funcții dată converge pentru orice $x > e$.

- dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|f_n(x)|}{|f_{n+1}(x)|} - 1 \right) < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e, x \neq 2$ atunci seria numerică aleasă este divergentă. Dar seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ are aceeași natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, pentru că termenii seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ se obțin din termenii seriei $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ înmulțindu-i eventual cu -1 , deci seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ diverge pentru $0 < x < e, x \neq 2$

În concluzie, mulțimea de convergență pentru seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x) \left(2-x^{\frac{1}{2}}\right) \left(2-x^{\frac{1}{3}}\right) \dots \left(2-x^{\frac{1}{n}}\right)$ este $(e, \infty) \cup \{2\}$.

4.7 EXERCIȚII PROPUSE

Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de funcții:

$$4.7.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+x}}$$

$$R: \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

$$4.7.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ax)^n}{a^n + x^n}, \quad a > 0, x > 0$$

$$R: \begin{cases} x \in (0, 1), \text{ dacă } a \geq 1 \\ x \in (0, \infty), \text{ dacă } a \in (0, 1) \end{cases}$$

$$4.7.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 5}{7n^2 + 3n + 2} \cdot \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n$$

$$R: (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty \right)$$

$$4.7.4 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

$$R: \mathbb{R}$$

$$4.7.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} \sin(nx)$$

$$R: \mathbb{R}$$

Să se studieze natura convergenței seriilor de funcții pe mulțimile indicate:

$$4.7.6 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^x}{1+x+n} - \frac{(n-1)^x}{n+1} \right), \quad x \in [0, 1]$$

$$R: \text{uniform convergentă}$$

$$4.7.7 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+n+x} - \frac{(n-4)x}{1+(n-1)x} \right), \quad x \in [0, 1]$$

$$R: \text{converge neuniform}$$

CAP.5 SERII DE PUTERI

5.1.1 **Definiție:** Se numește **serie de puteri** o serie de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ definite pe \square , unde fiecare

funcție f_n este de forma $f_n(x) = a_n x^n$, $a_n \in \square$.

Așadar o serie de puteri se poate scrie sub forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Observații:

1. Toate rezultatele privind seriile de funcții sunt valabile și pentru seriile de puteri
2. Mulțimea de convergență a unei serii de puteri conține cel puțin un punct, și anume $x=0$, deoarece pentru $x=0$ seria de puteri este convergentă și are suma a_0 .

5.1.2 **Teorema lui Abel:** Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ există un număr real $0 \leq R \leq \infty$ astfel

încât:

- i. seria este absolut convergentă pe $(-R, R)$
- ii. pentru orice x cu $|x| > R$ seria este divergentă
- iii. pentru orice număr $0 < r < R$ seria este uniform convergentă pe $[-r, r]$.

Numărul R se numește **raza de convergență** a seriei.

5.1.3 **Teoremă:** Fiind dată seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda$ (finit sau infinit), atunci:

raza de convergență R este:

- i. $\frac{1}{\lambda}$, dacă $0 < \lambda < \infty$
- ii. 0 , dacă $\lambda = \infty$
- iii. ∞ , dacă $\lambda = 0$

5.1.4 **Teoremă:** Fiind dată seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ (finit sau infinit), atunci:

raza de convergență R este:

- iv. $\frac{1}{\lambda}$, dacă $0 < \lambda < \infty$
- v. 0 , dacă $\lambda = \infty$
- vi. ∞ , dacă $\lambda = 0$

5.2 PROPRIETĂȚI ALE SERIILOR DE PUTERI

5.2.1 Suma S a unei serii de puteri este o funcție continuă pe intervalul de convergență

5.2.2 Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pe $(-R, R)$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ formată cu derivatele

termenilor seriei date are același interval de convergență. Dacă f este suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, atunci f este

indefinit derivabilă pe intervalul de convergență iar derivata sa de ordinul n , $f^{(n)}$, este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul n .

5.2.3 **Seria Taylor:**

5.2.3.1 **Definiție:** Se numește **serie Taylor** o serie de funcții de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, $a \in \mathbb{R}$.

Observație: Punând $y = x - a$, se obține seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Dacă intervalul de convergență al acestei serii este $(-R, R)$, atunci $(a - R, a + R)$ va fi intervalul de convergență al seriei Taylor.

5.2.3.2 **Definiție:** Fie I un interval, $a \in I$ un punct interior lui I și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă pe intervalul I . Seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

se numește **seria Taylor a funcției f în punctul a** .

Dacă I' este intervalul de convergență al acestei serii, vom spune că f este dezvoltabilă în serie Taylor

pe I dacă f este suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ pe I' .

5.2.3.3 **Teoremă:** Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie Taylor pe intervalul I' dacă și numai dacă este indefinit derivabilă pe I' și restul ei de ordin n din formula lui Taylor tinde către 0 atunci când $n \rightarrow \infty$ pentru orice $x \in I'$

Observație: Dacă $a = 0$ se obține seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$, numită **seria MacLaurin** a funcției f și spunem că f este dezvoltabilă în serie de puteri pe I' .

5.3 EXERCIIȚII REZOLVATE

5.3.1 Studiați convergența seriei de puteri:

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

Rezolvare: Seria dată se mai poate scrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ unde $a_n = \frac{1}{n}$. Calculăm raza de convergență:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

de unde $R = \frac{1}{\lambda} = 1$. Conform teoremei lui Abel seria de puteri converge pe $(-1, 1)$ și diverge pe $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Studiem convergența seriei în capetele intervalului:

- pentru $x = 1$ obținem seria armonică $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ care este divergentă
 - pentru $x = -1$ obținem seria $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$ care este convergentă conform criteriului lui Leibnitz.
- Așadar, domeniul de convergență al seriei date este $[-1, 1)$.

5.3.2 Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (x-2)^n$.

Rezolvare: Notăm $t = x - 2$. Atunci seria dată devine: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot t^n$. Calculăm raza de convergență cu teorema 5.1.3:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

de unde $R = \frac{1}{\lambda} = 1$. Așadar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot t^n$ converge pentru $t \in (-1, 1)$ și diverge pentru $t \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; revenind la notația făcută, obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (x-2)^n$ converge pentru $x \in (1, 3)$ și diverge pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Pentru $x = 1$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, care este convergentă (seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$).

Pentru $x = 3$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$, serie care este de asemenea convergentă, conform criteriului lui Leibnitz.

În concluzie, domeniul de convergență pentru seria dată este $[1, 3]$.

5.3.3 Să se determine mulțimea de convergență și suma următoarelor serii de puteri:

- a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
- b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Rezolvare: a. Pentru această serie de puteri avem $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; din teorema 5.1.3 obținem că:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

deci raza de convergență este egală cu $R = \frac{1}{\lambda} = 1$. Obținem așadar că seria de puteri converge pentru

$x \in (-1, 1)$ și diverge pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Pentru $x = 1$ se obține seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$,

care este convergentă conform criteriului lui Leibnitz. Pentru $x = -1$ se obține seria numerică $(-1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, serie divergentă. Așadar domeniul de convergență pentru seria dată este $(-1, 1]$.

Conform 5.2.2, dacă f este suma seriei de funcții, atunci pentru $x \in (-1, 1)$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \frac{1}{1+x}$$

De aici, integrând, obținem:

$$f(x) = \int \frac{1}{1+x} dx = \ln(x+1) + C$$

Cum $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{1+n} \frac{0^n}{n} = 0$, obținem că $C = 0$, deci $f(x) = \ln(x+1)$ pentru orice $x \in (-1, 1)$.

Cum seria de funcții este convergentă și în punctul $x = 1$ iar conform teoremei lui Abel (5.1.2) suma unei serii de puteri este continuă pe domeniul de convergență, obținem:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \ln(1+x) = \ln(2).$$

Observație: Pentru $x = 1$ am obținut suma seriei armonice alternate: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \ln(2)$

b. Să observăm mai întâi că seria dată se mai poate scrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot (x^2)^n$ și atunci

seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ este convergentă dacă și numai dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot (x^2)^n$ este convergentă.

Notăm $x^2 = t$. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot (x^2)^n$ devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot t^n$. Raza de convergență a acestei serii de puteri este, conform 5.2.2:

$$R = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1,$$

de unde obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot t^n$ converge pentru $t \in (-1, 1)$ și diverge pentru

$t \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Revenind la notația făcută obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot (x^2)^n$ converge pentru

$x^2 \in (-1, 1)$, deci pentru $x \in (-1, 1)$, și diverge pentru $x^2 \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, deci pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. De aici obține că seria dată converge pentru $x \in (-1, 1)$ și diverge pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Pentru $x = 1$ respectiv $x = -1$ se obțin serii numerice alternate care verifică criteriul lui Leibnitz, deci sunt convergente.

În concluzie, domeniul de convergență al seriei date este intervalul $[-1, 1]$.

Fie f suma seriei date. Derivând această serie termen cu termen obținem:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot (2n+1)x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

pentru orice $x \in (-1, 1)$ (am obținut suma unei progresii geometrice de rație x^2).
Integrând rezultă:

$$f(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg(x) + C$$

pentru orice $x \in (-1, 1)$. Cum $f(0) = 0$, obținem că $C = 0$.

Din continuitatea lui f în punctele $x = -1$ și respectiv $x = 1$, obținem că $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \arctg(x) = -\frac{\pi}{4}$

respectiv $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \arctg(x) = \frac{\pi}{4}$.

Observație: Pentru $x = 1$ am stabilit și suma seriei numerice $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

5.3.4 Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcții, precizându-se și domeniul pe care este valabilă dezvoltarea:

- a. $f(x) = e^x$
- b. $f(x) = \sin(x)$
- c. $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

Rezolvare: Să remarcăm mai întâi că funcțiile date sunt funcții indefinit derivabile pe \mathbb{R} .

a. Avem

$$(e^x)^{(n)} = e^x \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}, \text{ deci } e^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

deci obținem dezvoltarea:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Pentru a determina raza de convergență obținem:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

de unde, conform teoremei 5.1.3, obținem că $R = \infty$, deci domeniul de convergență este $(-\infty, \infty)$.

b. Avem

$$\sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin''(x) = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

...

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

de unde

$$\sin^{2n}(0) = \sin\left(2n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin(n\pi) = 0$$

$$\sin^{(4n+1)}(0) = \sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\sin^{(4n+3)}(0) = \sin\left((4n+3)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

Obținem așadar dezvoltarea:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(0) + \frac{\sin'(0)}{1!}x + \frac{\sin^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Și în cazul acestei serii domeniul de convergență este $(-\infty, \infty)$.

c. Remarcăm că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ avem:

$$\left((1+x)^\alpha\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

de unde se obține dezvoltarea:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= (1+x)^\alpha \Big|_{x=0} + \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1} \Big|_{x=0}}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Big|_{x=0}}{2!}x^2 + \dots = \\ &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots \end{aligned}$$

Pentru a determina raza de convergență a acestei mulțimi avem:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{(n+1)!}}{\frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1} = 1$$

pentru $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, de unde raza de convergență este $R = \frac{1}{\lambda} = 1$, deci domeniul de convergență este intervalul $(-1, 1)$.

5.3.5. Să se arate că seriile următoare sunt dezvoltabile în serie de puteri și să se găsească această dezvoltare, stabilindu-se și intervalul pe care este valabilă dezvoltarea:

a. $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

b. $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x}{x^2 + 5x + 6}$

Rezolvare: a. Avem: $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} = (1-x^2)^{-1}$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Cum f' este o funcție binomială, f' este indefinit derivabilă și deci f este indefinit derivabilă în orice punct $x \in (-1, 1)$. Atunci conform 5.2.2.3, funcția f este dezvoltabilă în serie Taylor pe intervalul $(-1, 1)$.

Înlocuind în dezvoltarea funcției binomiale:

$$g(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

pe x cu $-t^2$ și pe α cu -1 obținem:

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}$$

pentru orice $t \in (-1, 1)$, care prin integrare termen cu termen pe intervalul $[0, x]$, cu $0 < x < 1$, conduce la:

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \right) dt$$

de unde, pentru orice $x \in (-1, 1)$:

$$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

b. Avem $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 5x + 6} = \frac{9}{x+3} - \frac{6}{x+2}$

Folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcției binomiale obținem:

$$\frac{9}{x+3} = 3 \left(1 + \frac{x}{3} \right)^{-1} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n} \text{ pentru orice } x \in (-3, 3) \text{ și}$$

$$-\frac{6}{x+2} = -3 \left(1 + \frac{x}{2} \right)^{-1} = -3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n} \text{ pentru orice } x \in (-2, 2)$$

Adunând cele două dezvoltări obținem așadar că:

$$f(x) = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) x^n \text{ pentru orice } x \in (-2, 2).$$

5.3.6 Să se dezvolte în serie de puteri funcția $f(x) = 2^x$.

Rezolvare: Calculăm valorile funcției și ale derivatelor sale pentru $x=0$:

$$f(x) = 2^x, f(0) = 1$$

$$f'(x) = 2^x \ln(2), f'(0) = \ln(2)$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2(2), f''(0) = \ln^2(2)$$

...

$$f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n(2), f^{(n)}(0) = \ln^n(2)$$

Se observă că $0 < \ln(2) < 1$ și inegalitatea $|f^{(n)}(x)| < 2^x$ este așadar verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În consecință, funcția poate fi dezvoltată în serie Taylor în punctul $x=0$ și se obține:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

și deci:

$$2^x = 1 + x \ln(2) + \frac{x^2 \ln^2(2)}{2!} + \frac{x^3 \ln^3(2)}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n(2)}{n!} x^n$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5.3.7 Să se dezvolte în serie de puteri funcția $f(x) = e^{-x^2}$.

Rezolvare: În dezvoltarea în serie a funcției

$$g(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, înlocuim pe x cu $-x^2$ și se obține:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5.3.8 Să se calculeze \sqrt{e} cu aproximarea $\varepsilon = 10^{-5}$.

Rezolvare: Pentru funcția $f(x) = e^x$ avem dezvoltarea în serie de puteri

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

deci pentru $x = \frac{1}{2}$ obținem:

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{1! \cdot 2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \dots + \frac{1}{n! \cdot 2^n} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot 2^n}$$

Restul de ordin n pentru seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{k=j}^{\infty} \frac{n! x^k}{(n+k)!} < \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(n+1)^k} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{\frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n+1}}$$

(unde am ținut cont că $\sum_{k=j}^{\infty} \frac{x^k}{(n+1)^k}$ este suma unei progresii geometrice de rație $\frac{x}{n+1}$), deci:

$$R_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}$$

Punând $x = \frac{1}{2}$ se obține:

$$R_n\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{n! \cdot 2^n} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2}} = \frac{1}{n! \cdot 2^n} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

Trebuie să determinăm valoarea lui $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $R_n\left(\frac{1}{2}\right) < \varepsilon = 10^{-5}$. Se observă că $R_6 < 10^{-5}$ și

$R_5 > 10^{-5}$, deci valoarea căutată este $n = 6$. Așadar obținem:

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{1! \cdot 2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \frac{1}{3! \cdot 2^3} + \frac{1}{4! \cdot 2^4} + \frac{1}{5! \cdot 2^5} + \frac{1}{6! \cdot 2^6} = 1,64872$$

5.4 EXERCIIȚII PROPUSE

Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

$$5.4.1 \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-2)^n) x^n \quad \text{R: } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$5.4.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n} \quad \text{R: } (-3, 3)$$

$$5.4.3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{R: } (-\infty, \infty)$$

$$5.4.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)} x^n \quad \text{R: } [-1, 1]$$

Să se determine domeniul de convergență și suma seriilor de puteri:

$$5.4.5 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 x^n \quad \begin{matrix} (-1, 1) \\ \text{R: } \frac{1-x}{(1+x)^3} \end{matrix}$$

$$5.4.6 \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n \quad \begin{matrix} (-1, 1) \\ \text{R: } \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4} \end{matrix}$$

Să se dezvolte în serie de puteri funcțiile:

$$5.4.7 f(x) = 3^x \quad \text{R: } 1 + \ln(3)x + \frac{\ln^2(3)}{2!} x^2 + \frac{\ln^3(3)}{3!} x^3 + \dots, x \in \mathbb{R}$$

$$5.4.8 f(x) = \cos^2(x) \quad \text{R: } 1 - \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2^3}{4!} x^4 - \frac{2^5}{6!} x^6 + \dots$$

$$5.4.9 f(x) = \sqrt{x+a}, \quad a > 0$$

Indicație: $f(x) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{1 + \frac{x}{a}} = \sqrt{a} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$

Să se calculeze cu eroarea indicată:

$$5.4.10 \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \text{ cu eroarea } \varepsilon = 10^{-5} \quad \text{R: } 0,81873$$

$$5.4.11 \cos(18^\circ) \text{ cu eroarea } \varepsilon = 10^{-4} \quad \text{R: } 0,9511$$

$$5.4.12 \ln(1,04) \text{ cu eroarea } \varepsilon = 10^{-4} \quad \text{R: } 0,0392$$

CAPITOLUL 6: FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

Fie mulțimea $E \subset \mathbb{R}^n$ și $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe E cu valori în \mathbb{R} . Argumentul funcției este un vector din \mathbb{R}^n . Spunem că f este o **funcție reală de variabilă vectorială**.

O variabilă reală x din \mathbb{R}^n este echivalentă cu n variabile reale x_1, x_2, \dots, x_n (care sunt **coordonatele** vectorului x).

Valorile funcției se notează cu $f(x)$ sau $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, iar funcția se numește funcție reală de n variabile reale.

6.1 CONTINUITATEA FUNCȚILOR DE MAI MULTE VARIABILE REALE

Fie $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E$ un punct de acumulare pentru mulțimea E .

6.1.1.1 **Definiție:** Spunem că numărul l (finit sau infinit) este limita funcției f în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate U a lui l există o vecinătate V a lui x_0 , $V \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât pentru orice $x \in V$, $x \neq x_0$ să avem $f(x) \in U$.

Vom scrie:

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Propozițiile următoare dau definiții echivalente ale limitei:

6.1.1.2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ dacă și numai dacă pentru orice șir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset E$, $x_k \neq x_0$ care converge la x_0 se obține că $f(x_k) \rightarrow l$

6.1.1.3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ dacă și numai dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E$, $x \neq x_0$ cu $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Observație: Pentru o funcție de două variabile, $f: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, pentru limita sa în punctul (x_0, y_0) vom folosi notația $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ și o numim limita funcției f când (x, y) tinde către (x_0, y_0) .

În acest caz, definiția echivalentă 6.1.1.3 se scrie:

6.1.1.3' $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ dacă și numai dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta_\varepsilon > 0$

astfel încât pentru orice $(x, y) \in E$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ cu $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_\varepsilon$ să avem $|f(x, y) - l| < \varepsilon$.

De remarcat de asemenea că toate proprietățile funcțiilor de o variabilă reală care nu implică relația de ordine și produsul se păstrează.

6.1.2 LIMITE ITERATE

Fie $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Din această funcție putem obține funcții reale de o singură variabilă reală, funcții pe care le vom numi **funcții parțiale**:

$$f_k: x_k \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n), k = 1, 2, \dots, n$$

Se pot de asemenea considera limitele acestor funcții de o variabilă:

$$\lim_{x_k \rightarrow a_k} f(x_k) = \lim_{x_k \rightarrow a_k} f(x_1, x_2, \dots, x_n), k = 1, 2, \dots, n$$

unde a_k este un punct de acumulare al mulțimii $E_k = \{x_i \mid x_i \in \square, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E\}$. Limita funcției parțiale f_k este un număr real care depinde de celelalte $n-1$ variabile reale diferite de x_k .

Limita $\lim_{x_{\sigma(1)} \rightarrow a_{\sigma(1)}} \lim_{x_{\sigma(2)} \rightarrow a_{\sigma(2)}} \dots \lim_{x_{\sigma(n)} \rightarrow a_{\sigma(n)}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, unde σ este o permutare a mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$, se numește **limita iterată** a funcției f în punctul $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Pentru o funcție de două variabile se pot considera limitele iterate:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right), \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right)$$

6.1.2.1 Propoziție: Dacă există limita unei funcții într-un punct și una din limitele iterate, atunci acestea sunt egale.

6.1.3 Definiție: Fie $f : E \subset \square^n \rightarrow \square$ și $x_0 \in E$ un punct de acumulare pentru mulțimea E . Spunem că funcția f este continuă în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât pentru orice $x \in V \cap E$ să avem $f(x) \in U$.

Următoarele propoziții dau definiții echivalente ale continuității:

6.1.4 Funcția f este continuă în punctul x_0 dacă și numai dacă pentru orice șir $(x_k)_{k \in \square} \subset E$ care converge la x_0 avem $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$.

6.1.5 Funcția f este continuă în punctul x_0 dacă și numai dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E$ cu $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$ să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

6.1.6 Funcția f este continuă în punctul $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ dacă și numai dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ cu $|x_k - x_k^0| < \delta_\varepsilon, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ să avem $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)| < \varepsilon$.

6.2 DERIVATE PARȚIALE. DIFERENȚIALE

6.2.1 Definiție: Se numește **derivata parțială** a unei funcții $u = f(x, y)$ în raport cu variabila independentă x în punctul (x, y) numărul real

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

calculată pentru y constant.

Se numește derivata parțială a unei funcții $u = f(x, y)$ în raport cu variabila independentă x în punctul (x, y) numărul real

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

calculată pentru x constant.

Se mai notează: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f'_x(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f'_y(x, y)$

Regulile și formulele de derivare ordinare sunt valabile și pentru calculul derivatelor parțiale.

6.2.2 **Definiție:** Se numește **creștere totală** a unei funcții $u = f(x, y)$ în punctul (x, y) diferența:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

unde Δx și Δy sunt creșterile arbitrare date variabilelor independente ale funcției.

6.2.3 **Definiție:** Funcția $u = f(x, y)$ se numește **diferențiabilă** în punctul (x, y) dacă în acest punct creșterea totală poate fi scrisă sub forma:

$$\Delta u = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \theta(\rho)$$

unde $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ iar funcția θ este o funcție continuă în 0 și $\theta(0) = 0$.

Se numește **diferențiala totală** a funcției $u = f(x, y)$ partea principală a creșterii totale Δu , această parte fiind liniară în raport cu creșterile date variabilelor independente x și y , i.e. $du = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$

6.2.4 **Teoremă:** Dacă funcția $u = f(x, y)$ admite derivate parțiale în punctul (x, y) continue în (x, y) , atunci u este diferențiabilă în (x, y) și avem:

$$du(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

6.2.5 **Definiție:** Se numesc **derivate parțiale de ordinul 2** ale funcției $u = f(x, y)$ derivatele parțiale ale derivatelor parțiale de ordinul 1.

Avem următoarele derivate parțiale de ordinul 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y), & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) \end{aligned}$$

Observație: În mod analog se definesc derivatele parțiale de ordin mai mare decât 2.

6.2.6 **Teorema lui Schwarz:** Dacă funcția $u = f(x, y)$ este continuă și admite derivate parțiale în punctul (x, y) , continue în (x, y) , atunci:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

(nu contează ordinea de derivare).

6.2.7 Se numește **diferențială de ordinul 2** a funcției $u = f(x, y)$ diferențiala diferențialei totale, i.e.:

$$d^2u = d(du)$$

În mod analog se definește diferențiala de ordin n , $d^n u = d(d^{n-1}u)$

6.2.8 **Teoremă:** Dacă funcția $u = f(x, y)$ admite derivate parțiale de ordinul 2 în punctul (x, y) continue în (x, y) , atunci:

$$d^2u(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2$$

În general, dacă funcția $u = f(x, y)$ admite derivate parțiale de ordinul n în punctul (x, y) continue în (x, y) atunci se poate scrie simbolic:

$$d^n u(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^n$$

care formal se dezvoltă urmând legea binomului lui Newton.

6.3 FORMULA LUI TAYLOR

Fie $f(x, y)$ o funcție reală de două variabile independente definită pe mulțimea $E \subset \mathbb{R}^2$ și (a, b) un punct interior mulțimii E . Dacă funcția f este diferențiabilă de n ori în punctul (a, b) , atunci:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b) \right) (f(a, b)) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b) \right)^2 (f(a, b)) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b) \right)^n (f(a, b)) + R_n(x, y) \end{aligned}$$

relație care se numește **formula lui Taylor** de ordinul n corespunzătoare funcției $f(x, y)$ în punctul (a, b) . Funcția $R_n(x, y)$ definită pe E se numește **restul de ordinul n** al formulei lui Taylor.

Observație: Dacă în loc de punctul (a, b) se ia punctul $(0, 0)$, formula de mai sus se numește **formula lui MacLaurin**.

6.4 DERIVAREA FUNCȚIILOR COMPUSE

6.4.1 **Propoziție:** Fie $u = f(x, y)$ unde $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ astfel încât funcțiile $f(x, y)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$ sunt derivabile. Atunci derivata funcției compuse $u = f(\phi(t), \psi(t))$ se calculează după formula:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

6.4.2 **Propoziție:** Fie $u = f(x, y)$ unde $y = \phi(x)$ astfel încât funcțiile $f(x, y)$, $\phi(x)$ sunt derivabile. Atunci derivata funcției compuse $u = f(x, \phi(x))$ în raport cu x se calculează după formula:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

6.4.3 **Propoziție:** Fie $u = f(x, y)$ unde $x = \phi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$ astfel încât funcțiile $f(x, y)$, $\phi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ sunt derivabile. Atunci derivatele parțiale ale funcției compuse $u = f(\phi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta))$ se calculează după formula:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned}$$

6.5 DERIVAREA FUNCȚIILOR IMPLICITE

6.5.1 **Teorema de derivare a funcțiilor implicite 1:** Fie funcția implicită $y = y(x)$ dată prin ecuația $F(x, y) = 0$, unde $F(x, y)$ este o funcție diferențiabilă de variabile x și y . Atunci:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}$$

cu condiția $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$

Observație: Derivata de ordin superior a unei funcții implicite se calculează derivând succesiv în relația dată mai sus și considerând pe y ca fiind o funcție de x .

6.5.2 **Teorema de derivare a funcțiilor implicite 2:** Fie funcția implicită de două variabile $z = \phi(x, y)$ dată prin ecuația $F(x, y, z) = 0$, unde $F(x, y, z)$ este o funcție diferențiabilă de variabile x , y și z . Atunci:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

cu condiția $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

6.6 EXTRMELE FUNCȚIILOR DE DOUĂ VARIABLE

Fie $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două variabile care admite derivate parțiale de ordinul 2 pe întreg domeiul de definiție. Atunci:

6.6.1 **Teoremă:** Condiția necesară ca un punct $(x_0, y_0) \in E$ să fie punct de extrem local pentru funcția f este ca derivatele ei parțiale să se anuleze în (x_0, y_0) , i.e.:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Observație: Punctele în care derivatele parțiale se anulează se numesc **puncte staționare**.

6.6.2 **Teoremă:** Condiția suficientă ca un punct staționar (x_0, y_0) să fie punct de extrem este ca:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 > 0$$

Dacă $\Delta > 0$, atunci:

- dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, (x_0, y_0) este punct de minim local
- dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, (x_0, y_0) este punct de maxim local

Dacă $\Delta < 0$, atunci (x_0, y_0) nu este punct de extrem. Dacă $\Delta = 0$ nu se poate preciza prin această teoremă dacă (x_0, y_0) este sau nu punct de extrem.

6.7 EXTREME CU LEGĂTURI

6.7.1 **Definiție:** Se numește **extreme cu legătură** al unei funcții $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ supus la legătura $F(x, y) = 0$ un punct de extrem al funcției f cu condiția ca variabilele x și y să verifice ecuația legăturii $F(x, y) = 0$.

6.7.2 Pentru a afla punctele de extrem supuse la legături se procedează astfel:

- se construiește **funcția Lagrange:**

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot F(x, y)$$

λ se numește **multiplicator Lagrange.**

- se determină punctele staționare pentru funcția Lagrange

- pentru a afla cea mai mare și cea mai mică valoare într-un domeniu închis trebuie ca:

- să se determine punctele staționare situate în domeniu și valoarea funcției în aceste puncte
- să se determine cele mai mari și cele mai mici valori ale funcției pe liniile ce formează frontiera domeniului
- să se aleagă cea mai mare și cea mai mică valoare din toate valorile găsite.

6.8 EXERCIIII REZOLVATE

6.8.1 Folosind definiția limitei unei funcții într-un punct (6.1.1.1-6.1.1.3) să se arate că:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (4x + 2y) = 8$$

Rezolvare: Conform definiției trebuie să demonstrăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr real

$\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât dacă $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta_\varepsilon$ să avem $|4x + 2y - 8| < \varepsilon$.

Să remarcăm mai întâi că $|x-1| < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$, $|y-2| < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$. Avem:

$$(*) \quad |4x + 2y - 8| = |4x - 4 + 2y - 4| < |4x - 4| + |2y - 4| = 4 \cdot |x - 1| + 2 \cdot |y - 2|$$

Fie atunci $\varepsilon > 0$ și $\delta_\varepsilon = 6\varepsilon$. Atunci, conform observației de mai sus avem:

$$|x - 1| < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{6}$$

$$|y - 2| < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{6}$$

și înlocuind în relația (*) obținem:

$$|4x + 2y - 8| < \frac{4\varepsilon}{6} + \frac{2\varepsilon}{6} = \varepsilon$$

6.8.2 Să se calculeze limitele iterate:

a.
$$\lim_{x \rightarrow 3, y \rightarrow \infty} \frac{xy - 1}{y + 1}$$

b.
$$\lim_{x \rightarrow 2, y \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{y}$$

Rezolvare: a. Avem:
$$\lim_{x \rightarrow 3, y \rightarrow \infty} \frac{xy - 1}{y + 1} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{xy - 1}{y + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} x = 3$$

b. Avem:
$$\lim_{x \rightarrow 2, y \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin(xy)}{xy} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(x \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{xy} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

6.8.3 Să se calculeze $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ax+by}{cx+dy}$ atunci când $(x, y) \rightarrow (0,0)$ pe prima bisectoare.

Rezolvare: Ecuația primei bisectoare este $d : y = x$. Atunci limita dată devine:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ax+by}{cx+dy} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax+bx}{cx+dx} = \frac{a+b}{c+d}$$

6.8.4 Să se studieze continuitatea funcției:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{daca } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{daca } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

în punctul $(0,0)$.

Rezolvare: Avem $f(x,0) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deci $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0 = f(0,0)$, deci f este continuă în origine în raport cu variabila x . De asemenea avem: $f(0,y) = 0$ pentru orice $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deci $\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = 0 = f(0,0)$, deci f este continuă în origine în raport cu variabila y .

Dar funcția dată nu este continuă în origine în raport cu ansamblul variabilelor, deoarece nu are limită în acest punct. Într-adevăr, pentru $x \neq 0$, avem:

$$f(x, y) = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Fie dreapta de ecuație $d : y = mx, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ care trece prin origine, cu coeficientul unghiular m . Obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 0, y = mx} \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{mx}{x}}{1 + \left(\frac{mx}{x}\right)^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

și deci limitele depind de dreapta pe care tinde punctul (x, y) către $(0,0)$, ceea ce înseamnă că funcția dată nu are limită în origine, de unde obșinem că f nu este continuă în origine.

6.8.5 Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1)$ pornind de la definiție pentru funcția $f(x, y) = \sqrt{x+y}$.

Rezolvare: Avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x,1) - f(1,1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Pentru derivata de ordinul 2 avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (1,1) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}{y-1}$$

Trebuie așadar calculat: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,y)$. Avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1,y) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x,y) - f(1,y)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{1+y}}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+y} - \sqrt{1+y})(\sqrt{x+y} + \sqrt{1+y})}{(x-1)(\sqrt{x+y} + \sqrt{1+y})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+y-1-y}{(x-1)(\sqrt{x+y} + \sqrt{1+y})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+y} + \sqrt{1+y})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+y} + \sqrt{1+y}} = \frac{1}{2\sqrt{1+y}} \end{aligned}$$

de unde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}{y-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+y}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}}{y-1} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+y}}{(y-1)\sqrt{1+y}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{-1}{(\sqrt{2} + \sqrt{1+y})\sqrt{1+y}} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \end{aligned}$$

6.8.6 Să se calculeze: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ pentru funcțiile:

- a. $f(x,y) = \ln(x+y^2-1)$
- b. $f(x,y) = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$

Rezolvare: a. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x+y^2-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x+y^2-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x+y^2-1} \right) = \frac{-2y}{(x+y^2-1)^2}$$

b. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\frac{1}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = -\frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-1}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

6.8.7 Fie $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$. Să se calculeze $df(x,y)$.

Rezolvare: Avem:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

unde $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x)\sin(y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(x)\cos(y)$.

deci

$$df(x, y) = \cos(x)\sin(y)dx + \sin(x)\cos(y)dy$$

6.8.8 Fie $f(x, y) = x^2y$. Să se calculeze $d^3f(x, y)$.

Rezolvare: Avem

$$\begin{aligned} d^3f(x, y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \right)^3 = \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y)dx^3 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial y}(x, y)dx^2dy + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y^2}(x, y)dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y)dy^3 \end{aligned}$$

unde:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y) = 2x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x, y) = 2, \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x, y) = 0, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = 0, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) = 0$$

deci:

$$d^3f(x, y) = 6dx^2dy$$

6.8.9 Să se scrie dezvoltarea polinomului

$$P(x, y) = x^2y - 2xy + 2x^2 - 4x + y + 2$$

după puterile lui $(x-1)$ și $(y+2)$.

Rezolvare: Folosim formula lui Taylor (6.3.1) pentru funcții de două variabile. Avem:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 2xy - 2y + 4x - 4, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = x^2 - 2x + 1$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, y) = 2y + 4, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(x, y) = 2x - 1$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^3 P}{\partial x^2\partial y}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^3 P}{\partial x\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^3 P}{\partial y^3}(x, y) = 0$$

și deci derivatele parțiale în punctul $(1, -2)$ sunt:

$$P(1, -2) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x}(1, -2) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(1, -2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(1, -2) = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(1, -2) = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(1, -2) = 1$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}(1, -2) = 0, \quad \frac{\partial^3 P}{\partial x^2\partial y}(1, -2) = 2, \quad \frac{\partial^3 P}{\partial x\partial y^2}(1, -2) = 0, \quad \frac{\partial^3 P}{\partial y^3}(1, -2) = 0$$

și atunci:

$$P(x, y) = (x-1)^2(y+2)$$

6.8.10 Să se scrie derivatele după puterile lui x și y ale funcției

$$f(x, y) = e^{\sin(ax+by)}$$

până la termenii de gradul 2 inclusiv.

Rezolvare: Vom folosi formula lui MacLaurin. Pentru aceasta trebuie să calculăm valorile funcției și ale derivatelor parțiale de ordinul 1 și 2 în punctul $(0, 0)$. Avem:

$$f(0, 0) = e^{\sin(0)} = e^0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \Big|_{(0,0)} = a \cos(ax+by) e^{\sin(ax+by)} \Big|_{(0,0)} = a \cos(0) e^{\sin(0)} = a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \Big|_{(0,0)} = b \cos(ax+by) e^{\sin(ax+by)} \Big|_{(0,0)} = b \cos(0) e^{\sin(0)} = b$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = a^2 e^{\sin(ax+by)} \left(\cos^2(ax+by) - \sin(ax+by) \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = b^2 e^{\sin(ax+by)} \left(\cos^2(ax+by) - \sin(ax+by) \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = ab e^{\sin(ax+by)} \left(\cos^2(ax+by) - \sin(ax+by) \right)$$

de unde:

$$e^{\sin(ax+by)} = 1 + ax + by + \frac{1}{2!} (a^2 x^2 + 2abxy + b^2 y^2) \left(\cos^2(ax+by) - \sin(ax+by) \right) e^{\sin(ax+by)}$$

6.8.11 Fie funcția $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ unde $x = a \cos(t)$, $y = a \sin(t)$. Să se calculeze $\frac{df}{dt}$.

Rezolvare: Conform 6.4.1 avem:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = -a \sin(t), \quad \frac{dy}{dt}(t) = a \cos(t)$$

deci:

$$\frac{df}{dt}(t) = -2xe^{x^2+y^2} \cdot a \sin(t) + 2ye^{x^2+y^2} \cdot a \cos(t)$$

unde înlocuind $x = a \cos(t)$, $y = a \sin(t)$ obținem:

$$\frac{df}{dt}(t) = -2a \cos(t) e^{a^2} \cdot a \sin(t) + 2a \sin(t) e^{a^2} \cdot a \cos(t) = 0$$

6.8.12 Fie $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$ unde $y = x^2$. Să se calculeze: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{df}{dx}(x)$.

Rezolvare: Conform 6.4.2 avem:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2y}{x^2 - y^2}, \quad \frac{dy}{dx}(x) = e^x$$

de unde:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{2x}{x^2 - y^2} - \frac{2ye^x}{x^2 - y^2} = \frac{2(x - ye^x)}{x^2 - y^2}$$

6.8.13 Fie $f(x, y) = x^2 + y^2$ unde $x = \xi + \eta$, $y = \xi - \eta$. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, \eta)$, $\frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi, \eta)$.

Rezolvare: Din 6.4.3 avem:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

unde:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi, \eta) = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, \eta) = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi, \eta) = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, \eta) = 1$$

de unde:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, \eta) = 2x + 2y = 2(\xi + \eta) + 2(\xi - \eta) = 4\xi$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi, \eta) = 2x - 2y = 2(\xi + \eta) - 2(\xi - \eta) = 4\eta$$

6.8.14 Fie $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ unde $x = \xi\eta$, $y = \frac{\xi}{\eta}$. Să se calculeze:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(\xi, \eta), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}(\xi, \eta), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta).$$

Rezolvare: Derivând relațiile obținute la 6.4.3 obținem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}$$

Avem:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \eta, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \xi, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) = 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \frac{1}{\eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \frac{-\xi}{\eta^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = \frac{2\xi}{\eta^3}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) = -\frac{1}{\eta^2}$$

și deci:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = \eta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) = \xi \eta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\xi}{\eta^3} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \xi^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{2\xi^2}{\eta^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\xi^2}{\eta^4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{2\xi}{\eta^3} \frac{\partial f}{\partial y}$$

6.8.15 Fie $\cos(x+y) + y = 0$. Să se calculeze y' .

Rezolvare: Folosim teorema de derivare a funcțiilor implicite (6.5.1):

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

unde $F(x, y) = \cos(x+y) + y$. Avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -\sin(x+y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -\sin(x+y) + 1$$

și deci :

$$y' = -\frac{-\sin(x+y)}{-\sin(x+y) + 1} = \frac{\sin(x+y)}{1 - \sin(x+y)}.$$

6.8.16 Fie $y - \sin(y) = x$. Să se calculeze y' și y'' .

Rezolvare: Folosim teorema de derivare a funcțiilor implicite pentru $F(x, y) = y - \sin(y) - x$. Avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -1, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 1 - \cos(y) = 2 \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)$$

de unde $y' = -\frac{-1}{2 \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)} = \frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}$

Pentru a calcula y'' derivăm relația obținută anterior:

$$y'' = \frac{1}{2} \frac{-2 \sin\left(\frac{y}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) \frac{y'}{2}}{\sin^4\left(\frac{y}{2}\right)} = -\frac{y'}{2} \frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{y}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)} \frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{y}{2}\right)} = -\frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{\sin^5\left(\frac{y}{2}\right)}$$

6.8.17 Fie $z^3 - 3xyz = a^3$. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Rezolvare: Fie $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^3$. Folosim teorema de derivare a funcțiilor implicite 6.5.2.

Avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = -3xy, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = -3xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 - 3xy$$

Atunci:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{xz}{z^2 - xy}$$

6.8.18 Fie $xyz = x + y + z$. Să se calculeze dz .

Rezolvare: Avem: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$. Aplicăm teorema de derivare a funcțiilor implicite; avem:

$$F(x, y, z) = xyz - x - y - z$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = yz - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = xz - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = xy - 1$$

de unde:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(yz-1)}{xy-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(xz-1)}{xy-1}$$

Prin urmare:

$$dz = \frac{1-yz}{xy-1} dx + \frac{1-xz}{xy-1} dy$$

6.8.19 Să se calculeze derivatele y' și z' ale funcțiilor implicite y, z definite prin sistemele următoare:

$$\text{a. } \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ y^2 + z - 2x = 0 \end{cases}$$

Rezolvare: Se derivează ținând cont că y și z sunt funcții de x și se obține:

$$\begin{cases} 1 + y' + z' = 0 \\ 2x + 2yy' + 2zz' - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' + z' = -1 \\ yy' + zz' = 1 - x \end{cases}$$

Rezolvând sistemul în raport cu y' și z' se obține:

$$y' = \frac{x-1-z}{z-y}, \quad z' = \frac{1-x-y}{z-y}$$

b. Se procedează în mod analog:

$$\begin{cases} 2x - 2yy' + 2zz' = 0 \\ 2yy' + z' - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yy' - zz' = x \\ 2yy' + z' = 2 \end{cases}$$

de unde rezultă:

$$y' = \frac{2z+x}{y(2z+1)}, \quad z' = \frac{2(1-x)}{2z+1}$$

6.8.20 Să se calculeze punctele de extrem local pentru funcția:

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

Rezolvare: Pentru început vom determina punctele staționare ale funcției. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y - 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y - 6$$

Așadar punctele staționare sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

deci mulțimea punctelor staționare este $S = \{(0, 3)\}$.

Pentru a stabili dacă punctul staționar $(0, 3)$ este punct de extrem calculăm derivatele parțiale de ordinul 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

și deci:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 3) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 3) \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 3) \right)^2 = 3 > 0$$

deci $(0, 3)$ este punct de extrem local, și anume de minim, pentru că $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 3) > 0$.

6.8.21 Să se calculeze punctele de extrem local pentru funcția:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$$

Rezolvare: Pentru început vom determina punctele staționare ale funcției. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4}$$

Așadar punctele staționare sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3} = 0 \\ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + y = 188 \\ x + 6y = 141 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 20 \end{cases}$$

deci mulțimea punctelor staționare este $S = \{(21, 20)\}$.

Pentru a stabili dacă punctul staționar $(0, 3)$ este punct de extrem calculăm derivatele parțiale de ordinul 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{2}{3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{1}{12}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{1}{2}$$

și deci:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(21, 20) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(21, 20) \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(21, 20) \right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0$$

deci $(0, 3)$ este punct de extrem local, și anume de maxim, pentru că $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(21, 20) < 0$.

6.8.22 Să se afle extremul funcției $f(x, y) = xy$ cu condiția $2x + 3y - 5 = 0$.

Rezolvare: Construim mai întâi funcția Lagrange, unde legătura este $F(x, y) = 2x + 3y - 5 = 0$. Avem:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot F(x, y) = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

Determinăm punctele staționare pentru funcția Lagrange. Avem:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = y + 2\lambda, \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = x + 3\lambda, \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 2x + 3y - 5$$

și deci punctele staționare sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{5}{6} \\ \lambda = -\frac{5}{12} \end{cases}$$

Am obținut așadar un singur punct staționar, $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{12}\right)$

Diferențiind legătura obținem:

$$dF(x, y) = 2dx + 3dy$$

Punem condiția:

$$dF\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 2dx + 3dy = 0 \Leftrightarrow dy = -\frac{2}{3}dx$$

Calculăm diferențiala de ordinul 2 pentru funcția Lagrange pentru $\lambda = -\frac{5}{12}$. Avem:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\left(x, y, -\frac{5}{12}\right) = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(x, y, -\frac{5}{12}\right) = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}\left(x, y, -\frac{5}{12}\right) = 1$$

de unde $d^2L\left(x, y, -\frac{5}{12}\right) = 1dxdy$. Atunci:

$$d^2L\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{12}\right) = 1dxdy$$

și înlocuind $dy = -\frac{2}{3}dx$, obținem: $d^2L\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{12}\right) = 1dx\left(-\frac{2}{3}dx\right) = -\frac{2}{3}d^2x$, de unde tragem

concluzia că punctul $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)$ este punct de minim ($-\frac{2}{3} < 0$).

6.9 EXERCIȚII PROPUSE

Folosind definiția limitei unei funcții într-un punct (6.1.1.1) să se demonstreze că:

$$6.9.1 \quad \lim_{x \rightarrow 2, y \rightarrow 2} \frac{x}{y} = 1$$

$$6.9.2 \quad \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = 0, \quad |x| + |y| \neq 0$$

Să se studieze continuitatea funcțiilor:

$$6.9.3 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \text{daca } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{daca } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$6.9.4 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}, & \text{daca } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{daca } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Să se calculeze derivatele parțiale indicate pentru funcțiile:

$$6.9.5 \quad f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5$$

Calculați $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

$$\text{R: } \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x - 3y - 4 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 4y - 3x + 2 \end{aligned}$$

$$6.9.6 \quad r(\theta, \rho) = \rho^2 \sin^4(\theta)$$

Calculați $\frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, \rho), \frac{\partial r}{\partial \rho}(\theta, \rho)$

$$\text{R: } \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, \rho) &= 4\rho^2 \sin^3(\theta) \cos(\theta) \\ \frac{\partial r}{\partial \rho}(\theta, \rho) &= 2\rho \sin^4(\theta) \end{aligned}$$

$$6.9.7 \quad f(x, y, z) = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}$$

Calculați $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$

$$\text{R: } \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{y}{\sqrt{x}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{2y^2}{\sqrt[3]{z}} \end{aligned}$$

6.9.8 Să se calculeze diferențialele totale pentru funcțiile:

a. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

$$\text{R: } du(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$$

b. $u(x, y) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$

$$\text{R: } du(x, y) = \frac{2}{x \sin\left(\frac{2y}{x}\right)} dy - \frac{2y}{x^2 \sin\left(\frac{2y}{x}\right)} dx$$

c. $u(x, y) = x^y$

$$\text{R: } du(x, y) = \frac{yx^y}{x} dx + \ln(x) x^y dy$$

6.9.9 Să se calculeze derivatele parțiale indicate pentru funcțiile:

a. $f(x, y) = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Calculați $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$

$$\text{R: } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6(x + y)$$

b. $f(x, y) = xy + \sin(x + y)$

Calculați $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$

$$\text{R: } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\sin(x + y)$$

c. $f(x, y) = x^2 \ln(x + y)$

Calculați: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$

$$\text{R: } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{x^2 + 2xy}{(x + y)^2}$$

d. $f(x, y) = \sin(x + \cos(y))$

Calculați $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y)$

$$\text{R: } \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) = \sin(y) \cos(x + \cos(y))$$

6.9.10 Calculați diferențiala de ordinul 2 pentru funcțiile:

a. $u(x, y) = \cos(x + y)$

R: $d^2u(x, y) = -\cos(x + y)d^2x - 2\cos(x + y)dxdy - \cos(x + y)d^2y$

b. $u(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y + 7$

R: $d^2u(x, y) = 2dx^2 - 2dxdy + 2dy^2$

6.9.11 Calculați derivatele funcțiilor compuse:

a. $u = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ unde $x = t\mathbf{g}^2(t)$, $y = ct\mathbf{g}^2(t)$. Calculați $\frac{du}{dt}$.

R: $\frac{du}{dt}(t) = \frac{4}{\sin(2t)}$

b. $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}$ unde $y = 3x + 1$. Calculați $\frac{dz}{dx}$.

R: $\frac{dz}{dx}(x) = \frac{2x(3x + 2)}{(x^2 + 3x + 1)^2}$

c. $u(x, y) = x^2y$ unde $y = \cos(x)$. Calculați $\frac{\partial u}{\partial x}$ și $\frac{\partial u}{\partial x}$.

R: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos(x)$
 $\frac{du}{dx} = x(2\cos(x) - x\sin(x))$

d. $u(x, y) = x^2 + y^2$ unde $x = \xi + \eta$, $y = \xi - \eta$. Calculați $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$.

R: $\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, \eta) = 4\xi$
 $\frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, \eta) = 4\eta$

6.9.12 Calculați derivatele funcțiilor implicite:

a. $(x^2 + y^2 - bx)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$.

R: $y' = \frac{a^2 - b^2}{2b^2 - a^2}$

Se cere y' în punctul $M(b, 0)$.

b. $3\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right) - 2\cos\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right) + 1 = 0$.

R: $y' = \frac{y}{2x}$

Se cere y' .

c. $x + y - e^{x+y} = 0$.

R: $y' = -1$, $y'' = 0$

Se cere y' , y'' .

d. $x + y + z = e^z$.

R: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + y + z - 1}$

Se cere $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

e. $x = x \ln\left(\frac{z}{y}\right)$.

R: $dz = \frac{dx + \frac{z}{y}dy}{1 + \ln\left(\frac{z}{y}\right)}$

Se cere dz .

6.9.13 Determinați punctele de extrem local pentru funcțiile:

a. $f(x, y) = xy^2(1 - x - y)$

R: $\frac{1}{4}$, punct de maxim

b. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$

R: -125 , punct de minim

c. $f(x, y) = y - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$

R: 4 , punct de maxim

6.9.14 Determinați punctele de extrem cu legături pentru funcțiile:

a. $f(x, y) = x^2 + y^2$ cu legătura $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

R: $\left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}\right)$ punct de minim

b. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - yx^2$ cu legătura $2x + 3y - 12 = 0$

6.9.15 Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul al treilea în punctul $(1, 1)$ pentru funcția

$$f(x, y) = x^y, x > 0, y > 0$$

R: $T_3(x, y) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{1}{2!}2(x-1)(y-1) + \frac{1}{3!}3(x-1)^2(y-1).$

6.9.16 Să se dezvolte polinomul:

$$P(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + 2y^3 + 9x^2 - 3y + 6x + 3$$

după puterile lui $(x+1)$ și $(y-1)$.

R: $P(x, y) = 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2(y-1) + 2(y-1)^3 + 6(x+1)(y-1) + 6(y-1)^2$

6.9.17 Să se calculeze $z'(x)$ și $y'(x)$ dacă:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 9 = 0 \\ x^3 - y^3 + z^3 - 3z = 0 \end{cases}$$

în punctul $A(3, 3, -\sqrt{3})$

R: $y' = \frac{9\sqrt{3} + 2}{3(3\sqrt{3} - 2)}, \quad z' = \frac{12}{3\sqrt{3} - 2}$

CAP.7 EXERCIȚII SUPLIMENTARE

7.1 Să se arate că următoarele șiruri sunt convergente:

- a. $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{n+k}\right)$
- b. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$
- c. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+3}{4^k}$
- d. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$
- e. $u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k}\right)$
- f. $u_n = \sum_{k=1}^n \log_{\frac{1}{2}} \frac{k^2+2k}{(k+1)^2}$
- g. $u_n = \sum_{k=j}^n \frac{k^2+k}{n^3+k}$

7.2 Să se calculeze următoarele limite de șiruri:

- a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + 2^n}{(-3)^{n+1} + 2^{n+1}}$ R: $-\frac{1}{3}$
- b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{1 + \alpha^{2n}}$, $\alpha > 0$ R: $\frac{1}{2}$, dacă $\alpha = 1$
 0 , dacă $\alpha \neq 1$
- c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} - 2\sqrt{n^2 - n + 1}}{n}$ R: -1
- d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^2} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1})$ R: $\frac{2}{3}$
- e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^2 \sqrt{k}}{n(n+1)(n+2)}$ R: $\frac{1}{3}$
- f. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^k}$ R: 0
- g. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ R: x
- h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ dacă $x_n > 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ R: x
- i. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ R: e
- j. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \cdot (n!)}$ R: 1

$$k. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+n)]{n}}$$

$$R: \frac{4}{e}$$

7.3 Folosind criteriul general de convergență al lui Cauchy, să se stabilească natura șirurilor:

$$a. a_n = \frac{10}{1} + \frac{11}{3} + \frac{12}{5} + \dots + \frac{10+n}{2n+1}$$

R: divergent

$$b. a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

R: convergent

$$c. a_n = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+4)}$$

R: convergent

7.4 Să se stabilească natura următoarelor serii:

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n + 1}$$

R: convergentă

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

R: divergentă

$$c. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

R: convergentă

$$d. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}$$

R: divergentă

$$e. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

R: divergentă

$$f. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - 1 - \sqrt[3]{n^3 - n^2 + 1} \right)$$

R: divergentă

$$g. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^n + 5}{(3n+7)^n}$$

R: convergentă

$$h. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \right)$$

R: divergentă

$$i. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{100\sqrt[3]{n} - 13}$$

R: divergentă

$$j. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

R: convergentă

$$k. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)$$

R: convergentă

$$l. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left(\frac{1}{n} \right)$$

R: convergentă

$$m. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 7}{5^n + n}$$

R: convergentă

$$n. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{a}{e} \right)^n, \quad a > 0$$

R: convergentă, dacă $a < e$
Divergentă, dacă $a \geq e$

o. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$

R: convergentă

p. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n$

R: convergentă, dacă $a < c$

Divergentă, dacă $a \geq c$

q. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{(n+1)(n+x)} - n), x \geq 0$

R: convergentă, dacă $x < 1$

Divergentă, dacă $x \geq 1$

r. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

R: convergentă

s. $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n, \alpha > 0$

R: convergentă, dacă $\alpha < 1$

Divergentă, dacă $\alpha \geq 1$

t. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\ln(n)}, \alpha > 0$

R: convergentă, dacă $\alpha < e^{-1}$

Divergentă, dacă $\alpha \geq e^{-1}$

u. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$

R: convergentă

v. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-(\lambda \ln(n) + \ln^2(n))}, 0 < a < 1$

R: convergentă, dacă $a^\lambda > e$

Divergentă, dacă $a^\lambda \leq e$

7.5 Să se stabilească natura următoarelor serii alternate:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

R: absolut convergentă

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

R: absolut convergentă

c. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$

R: divergentă

d. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

R: semiconvergentă

e. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$

R: semiconvergentă

7.6 Să se determine domeniul de convergență al seriilor de puteri:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$

R: $[-2, 2)$

b. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+n+1} \left(\frac{x^2-2}{1-2x^2}\right)^n$

R: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

R: $[-1, 1]$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$

R: $(-1, 1]$

$$e. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2x}{x+3} \right)^n$$

$$R: [-1, 3)$$

$$f. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2n}$$

$$R: \left(\frac{1}{2}, \infty \right)$$

$$g. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^n$$

$$R: (-\infty, 0)$$

$$h. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n (x-5)^n}$$

$$R: \left(-\infty, \frac{14}{3} \right) \cup \left[\frac{15}{3}, \infty \right)$$

7.7 Să se determine mulțimea de convergență și suma seriilor de puteri:

$$a. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$R: [-1, 1] \\ S = \arctg(x)$$

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$$

$$R: (-1, 1) \\ S = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$c. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$R: (-1, 1) \\ S = \ln(1+x)$$

$$d. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

$$R: (-1, 1) \\ S = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4}$$

$$e. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3)x^n$$

$$R: (-1, 1) \\ S = \frac{6}{(1-x)^4}$$

$$f. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 x^n$$

$$R: (-1, 1) \\ S = \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

7.8 Să se demonstreze că următoarele serii numerice sunt convergente și să se calculeze suma lor cu ajutorul seriilor de puteri:

$$a. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$$

$$R: \frac{\pi}{8}$$

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)}$$

$$R: \frac{\pi}{2} - \ln(2)$$

$$c. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)! - n!}$$

$$R: 1$$

$$d. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+3)!}$$

$$R: \frac{11}{2} - 2e$$

$$e. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$R: 2e$$

$$f. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}$$

R: 2e

7.9 Să se dezvolte în serie Taylor după puterile lui x funcțiile:

$$a. f(x) = \frac{e^x - e^{-x} + 2 \cos(x)}{4}$$

$$R: f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

$$b. f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$R: f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}, x \in (-1, 1)$$

$$c. f(x) = \frac{x}{x^2 + 9}$$

$$R: f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}, x \in (-3, 3)$$

$$d. f(x) = \frac{5-2x}{6-5x+x^2}$$

$$R: f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) x^{n-1}, x \in (-2, 2)$$

$$e. f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

$$R: f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \in (-1, 1)$$

$$f. f(x) = \sin^3(x)$$

$$R: f(x) = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1-3^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in \square$$

$$g. f(x) = \arcsin(x)$$

$$R: f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n-1)!)!}{((2n)!)!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \in [-1, 1]$$

7.10 Să se calculeze limitele:

$$a. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$$

R: e

$$b. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

R: $-\frac{1}{12}$

$$c. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{x^2}$$

R: 4

$$d. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin(x) - x(1+x)}{x^3}$$

R: $\frac{1}{3}$

$$e. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - \sin(2x) + 2x^2}{x^3}$$

R: 4

$$f. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{x^3}$$

R: $\frac{1}{2}$

$$g. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - x - 1}{1-4x - e^{-4x}}$$

R: $\frac{1}{8}$

$$h. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + 2 \sin(x) + \ln(1-x) - 1}{x(\ln(1+x) - x)}$$

R: $\frac{5}{3}$

$$i. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x) + \sin(2x) + 2x^2}{2x + e^{-x} - e^x}$$

R: 12

$$j. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)$$

R: $\frac{1}{2}$

k. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$

R: $\frac{1}{3}$

7.11 Să se studieze continuitatea în origine a următoarelor funcții:

a. $f(x, y) = \begin{cases} 1 - \cos(x^3 + y^3), & \text{daca } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{daca } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

R: continuă

b. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}, & \text{daca } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{daca } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

R: nu este continuă

c. $f(x, y) = \begin{cases} (1 + xy)^{\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

R: continuă

7.12 Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul 1 pentru funcțiile:

a. $f(x, y) = (1 + xy)^y, 1 + xy > 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 (1 + xy)^{y-1}$

R: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (1 + xy)^y \ln(1 + xy) + xy(1 + xy)^{y-1}$

b. $f(x, y) = x^{\ln(y)}, x > 0, y > 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^{\ln(y)-1} \ln(y)$

R: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{y} x^{\ln(y)} \ln(x)$

c. $f(x, y) = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin\left(\frac{x+y}{xy}\right)$

R: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{y^2} \sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$

d. $f(x, y, z) = x^{y^z}$

R:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y^z x^{y^z-1}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^{y^z} y^{z-1} \ln(x)$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x^{y^z} y^z \ln(y) \ln(x)$

7.13 Să se calculeze $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y)$ pentru funcția $f(x, y) = \arctg(xy)$.

R: $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y) = -2x \frac{3y^2 - x^2 y^4}{(1 + x^2 y^2)^3}$

7.14 Să se arate că următoarele funcții verifică ecuațiile corespunzătoare:

a. $z(x, y) = xy\phi(x^2 - y^2)$; ecuația $xy^2 \frac{\partial y}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + y^2)z$

- b. $u = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$; ecuația $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- c. $u = \phi(x-at) + \psi(x+at)$; ecuația $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- d. $z = \phi(x^2 + y^2)$; ecuația $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
- e. $z = \rho f(\ln(\rho) + \theta)$; ecuația $\rho \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\partial z}{\partial \theta} = z$
- f. $z = \frac{x}{y} \left(f(y) + g\left(\frac{y}{x}\right) \right)$; ecuația $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

7.15 Să se determine punctele de extrem local pentru următoarele funcții:

- a. $f(x, y) = (x-1)^2 + (y+6)^2$ R: $(1, -6)$ minim
- b. $f(x, y) = xy(a-x-y)$, $a > 0$ R: $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ maxim
- c. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + -3ax - 3by$ R: $(2a-b, 2b-a)$ minim
- d. $f(x, y) = \cos(x)\cos(y)\cos(x+y)$, $x \in [0, \pi]$, $y \in [0, \pi]$
R: $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ minim
 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ minim
- e. $f(x, y) = \ln(1-x^2-y^2)$ R: $(0, 0)$ maxim

7.16 Să se determine punctele de extrem cu legăturile menționate pentru funcțiile:

- a. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ R: $\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$ minim
- b. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy - 7$, $x + y = 1$ R: $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ minim
- c. $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ R: $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ minim
 $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ maxim
- d. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 1$, $x^2 - y^2 = 1$ R: $(1, 0)$ minim

7.17 Să se calculeze $y'(0)$ dacă: $(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, $y(0) = a$ iar y este definită implicit ca funcție de x .

R: $y'(0) = \frac{b}{a}$

7.18 Să se calculeze y', y'', y''' dacă funcția $y(x)$ este definită implicit de ecuația:

$$x^2 + y^2 + xy = 3$$

R: $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$, $y'' = -\frac{18}{(x+2y)^3}$, $y''' = -\frac{162x}{(x+2y)^5}$

a7.19 **S** se calculeze dz și d^2z dacă:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$\text{R: } dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy, \quad d^2z = \frac{y^2 - a^2}{z^3}dx^2 - \frac{2xy}{z^3}dxdy + \frac{x^2 - a^2}{z^3}dy^2$$

7. 20 Să se calculeze $y'(x)$, $z'(x)$ ale funcțiilor $y(x)$, $z(x)$ definite implicit de sistemul:

$$\begin{cases} x^3 + 3y^2 - z^2 + x - y - 8 = 0 \\ x^2 - y^2 - 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

în punctul $(1, 2, -2)$.

$$\text{R: } \left(-\frac{20}{17}, \frac{38}{17} \right)$$