

Capitole speciale de geometrie pentru profesori

Camelia Frigioiu

Galați, 2010

Cuprins

1	Geometrie sintetică plană	1
1.1	Concurența liniilor importante într-un triunghi	1
1.1.1	Concurența medianelor, mediatoarelor, bisectoarelor și înălțimilor într-un triunghi	1
1.1.2	Cercul înscris în triunghi, cercul circumscris și exânscriș unui triunghi	6
1.2	Teoremele MENELAUS și CEVA	11
1.2.1	Teorema lui Menelaus	11
1.2.2	Teorema lui Ceva	15
1.2.3	Teorema lui VAN AUBEL	16
1.3	Patrulaterare inscriptibile	17
1.3.1	Teorema lui Ptolemeu	19
1.4	Patrulaterare circumscriptibile	20
1.4.1	Cercul lui Euler	22
1.5	Probleme de coliniaritate	23
1.5.1	Metode de demonstrare a coliniarității unor puncte	23
1.5.2	Teorema lui Euler, dreapta lui Simpson	23
1.5.3	Relația lui Carnot	25
1.6	Probleme de concurență	27
1.6.1	Metode de demonstrare a concurenței unor drepte	27
1.6.2	Teoremele lui Gergonne	28
1.6.3	Teorema lui Steiner	29
1.7	Relații metrice în triunghi și patrulater	30
1.7.1	Teorema Pitagora generalizată	30
1.7.2	Relația lui Stewart	32
1.7.3	Teorema medianei	32
1.7.4	Relația lui Euler pentru patrulater	33
2	Transformări geometrice	35
2.1	Simetrii	37

2.2	Translația	44
2.3	rotația în plan	47
2.4	Proprietăți generale ale izometriilor	51
2.5	Asemănarea în plan. Proprietăți generale	53
2.6	Omotetia în plan	55
2.6.1	Folosirea omotetiei la rezolvarea unor probleme de loc geometric	58
2.7	Inversiunea în plan	59
3	Geometrie în spațiu	65
3.1	Introducere în geometria tetraedrului	65
3.2	Tetraedre Crelle	77
3.3	Tetraedre echifaciale	79
3.4	Tetraedre ortocentrice	81
3.5	Probleme	84
4	APLICAȚII ALE NUMERELOR COMPLEXE ÎN GEOMETRIE	85
4.1	Elemente de trigonometrie aplicate în geometrie	85
4.1.1	Aplicații practice	87
4.2	Numere complexe	89
4.3	Aplicații ale numerelor complexe în geometrie	90
4.4	Teoreme clasice de geometrie demonstrate cu ajutorul numerelor complexe	94
4.5	Probleme	97

Capitolul 1

Geometrie sintetică plană

Reamintim definițiile unor elemente importante în triunghi.

DEFINIȚIA 1.1 Numim *bisectoare interioară a unui unghi al unui triunghi, dreapta care împarte unghiul în două unghiuri egale.*

DEFINIȚIA 1.2 Numim *înălțime a unui triunghi, dreapta care coboară perpendicular dintr-un vârf al triunghiului pe latura opusă a triunghiului.*

DEFINIȚIA 1.3 Numim *mediatoare a unui triunghi, perpendiculara construită pe mijlocul unei laturi a triunghiului.*

DEFINIȚIA 1.4 Numim *mediană a unui triunghi, dreapta care unește un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse.*

1.1 Concurența liniilor importante într-un triunghi

Linii importante ale unui triunghi sunt:

1. medianele
2. bisectorele interioare ale unghiurilor triunghiului
3. mediatoarele laturilor triunghiului
4. înălțimile.

1.1.1 Concurența medianelor, mediatoarelor, bisectoarelor și înălțimilor într-un triunghi

Într-un triunghi se poate demonstra pentru fiecare categorie de linii importante că sunt concurente și anume:

1. cele trei mediatoare ale laturilor unui triunghi sunt concurente într-un punct care este **centrul cercului circumscris triunghiului**;

2. cele trei bisectoare interioare ale unui triunghi sunt concurente într-un punct care este **centrul cercului înscris în triunghi**;
3. cele trei înălțimi ale unui triunghi sunt concurente într-un punct care se numește **ortocentrul triunghiului**;
4. cele mediane ale unui triunghi sunt concurente într-un punct care se numește **centrul de greutate al triunghiului**.

În continuare vom demonstra concurența acestor linii importante ale triunghiului.

Vom demonstra concurența mediatoarelor unui triunghi, folosind principala proprietate a punctelor de pe mediatoarea unui segment:

Toate punctele mediatoarei unui segment se află la aceeași distanță față de capetele acestuia și reciproc toate punctele din plan care se află la distanțe egale de capetele unui segment se află pe mediatoarea acestuia.

TEOREMA 1.1 *Într-un triunghi mediatoarele laturilor sunt concurente.*

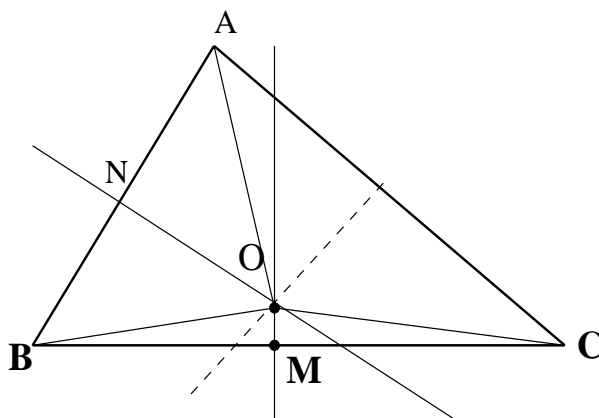


Figura 1.1: Concurența mediatoarelor

Demonstrație.

Notăm cu M și N mijloacele laturilor $[BC]$ și $[AB]$ ale triunghiului ABC . Punctul de intersecție al perpendicularelor în M și N pe laturile respective (mediatoarele acestor laturi) va fi notat cu O . Cele două mediatoare sunt concurente, altfel punctele A, B, C ar fi coliniare, ceea ce este imposibil.

Folosind proprietatea punctelor de pe mediatoare de a fi la egală distanță față de capetele segmentului, putem scrie

$$OA = OB, \text{ } ON \text{ fiind mediatoarea lui } [AB] \text{ și}$$

$$OB = OC, \text{ } OM \text{ fiind mediatoarea lui } [BC].$$

Rezultă din tranzitivitatea relației de egalitate că $OA = OC$, deci punctul O se află și pe mediatoarea laturii $[AC]$. **q.e.d.**

Vom demonstra concurența bisectoarelor interioare ale unui triunghi, folosind proprietatea punctelor de pe bisectoare de a fi la egală distanță față de laturile acestuia.

TEOREMA 1.2 Într-un triunghi bisectoarele interioare sunt concurente.

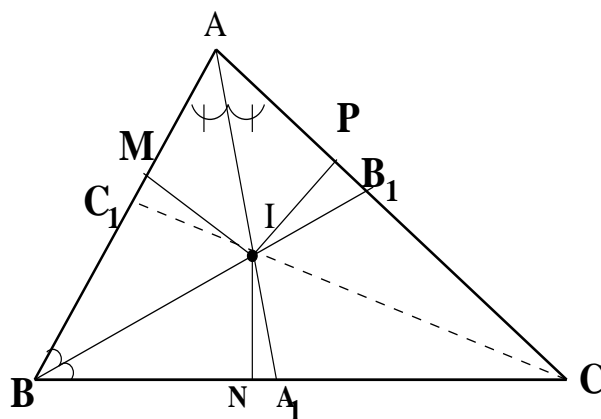


Figura 1.2: Concurența bisectoarelor

Demonstrație. Notăm $[AA_1]$ și $[BB_1]$ bisectoarele unghiurilor \widehat{BAC} și \widehat{ABC} ale triunghiului ABC și I punctul lor de intersecție. Aceste bisectoare sunt concurente, altfel ar fi paralele ceea ce ar însemna că unghiurile $\widehat{BAA_1}$ și $\widehat{ABB_1}$ ar fi unghiuri interne și de aceeași parte a secantei AB , iar suma măsurilor lor ar fi de 180° , ceea ce este imposibil căci suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABC este 180° .

Folosind proprietatea că numai punctele de pe bisectoare sunt egal depărtate de laturile triunghiului putem scrie:

$IM = IN$ și $IM = IP$, ($M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (AC)$, $IM \perp AB$, $IN \perp BC$, $IP \perp AC$).

Folosind proprietatea de tranzitivitatea a egalității numerelor reale, rezultă

$$IN = IP$$

deci punctul I se află și pe bisectoarea unghiului ACB .

q.e.d.

De asemenea se poate demonstra:

TEOREMA 1.3 Într-un triunghi înălțimile sunt concurente.

Demonstrație. Considerăm un triunghi ABC , cu înălțimile $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ ($AA' \perp BC$, $BB' \perp AC$, $CC' \perp AB$).

Paralelele prin vârfurile triunghiului la laturile opuse se intersectează în punctele A_1 , B_1 , C_1 . Din congruența laturilor opuse ale paralelogramelor obținute rezultă

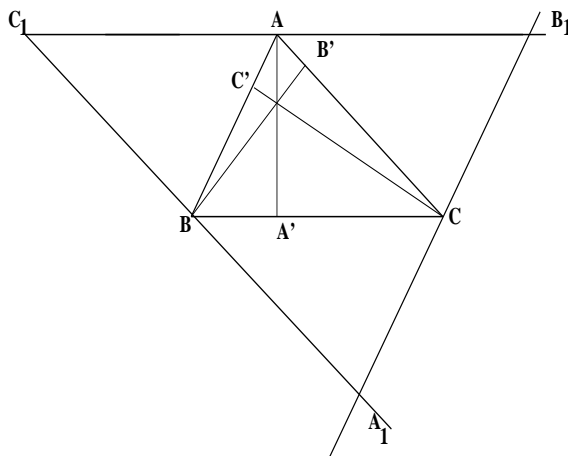


Figura 1.3: Concurența înălțimilor

că punctele A, B, C sunt mijloacele laturilor $[B_1C_1], [C_1A_1], [A_1B_1]$ ale triunghiului $A_1B_1C_1$ ($AB_1 = AC_1, BC_1 = BA_1, CA_1 = CB_1$).

Din $AA' \perp BC$ și $C_1B_1 \parallel BC$ rezultă $AA' \perp C_1B_1$. Analog pentru celelalte laturi se găsește că $BB' \perp C_1A_1$ și $CC' \perp A_1B_1$.

Constatăm că înălțimile triunghiului ABC sunt mediatoarele triunghiului $A_1B_1C_1$. Dar, concurența mediatoarelor a fost demonstrată, așa că și concurența înălțimilor este demonstrată. **q.e.d.**

Pentru a demonstra concurența celor trei mediane ale unui triunghi vom reaminti că:

-linia mijlocie într-un triunghi este segmentul de dreaptă care unește mijloacele a două laturi ale triunghiului,

-linia mijlocie este paralelă cu cea de-a treia latură a triunghiului și este egală cu jumătate din lungimea ei.

TEOREMA 1.4 Într-un triunghi medianele sunt concurente.

Demonstrație. Notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor $[BC], [AC], [AB]$ ale triunghiului ABC . Punctul de intersecție al medianelor $[AA']$ și $[CC']$ este G . Vom demonstra că punctul G aparține și medianei $[BB']$. Mijloacele segmentelor $[AG], [CG]$ vor fi notate cu A'' respectiv C''

$$AA'' = A''G, CC'' = C''G.$$

$[A''C'']$ este linie mijlocie în triunghiul GAC , ceea ce implică

$$A''C'' \parallel AC, A''C'' = \frac{1}{2}AC. \quad (1.1)$$

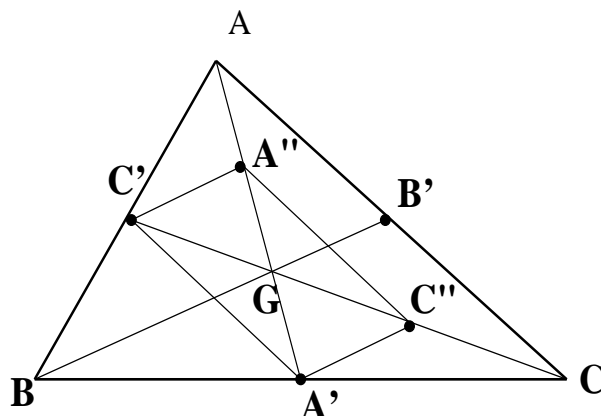


Figura 1.4: Concurența medianelor

De asemenea, $[A'C']$ este linie mijlocie în triunghiul BAC și se obține:

$$A'C' \parallel AC, A'C' = \frac{1}{2}AC. \quad (1.2)$$

Din (1.1) și (1.2), folosind tranzitivitatea relației de paralelism și a celei de egalitate, rezultă

$$A'C' \parallel A''C'', A'C' = A''C''.$$

Deci patrulaterul $A'C'A''C''$ este paralelogram, cu G punctul de intersecție al diagonalelor, ceea ce implică

$$A'G = GA'', C'G = GC''.$$

Cum $AA'' = A''G$ și $CC'' = C''G$, rezultă:

$$AA'' = A''G = GA' = \frac{1}{3}AA'$$

și

$$CC'' = C''G = GC' = \frac{1}{3}CC'.$$

Am obținut astfel:

Punctul G de intersecție al medianelor $[AA']$ și $[CC']$ se află pe fiecare dintre cele două mediane, la două treimi de vârf și o treime de mijlocul laturii opuse.

Un rezultat asemănător se poate demonstra și pentru medianele $[AA']$ și $[BB']$.

Cum pe $[AA']$ este un singur punct care se află la două treimi de vârf și o treime de mijlocul laturii opuse, rezultă că acesta este G , deci mediana $[BB']$ trece și ea prin punctul G . **q.e.d.**

1.1.2 Cercul înscris în triunghi, cercul circumscris și exânscriș unui triunghi

Cercul înscris în triunghi

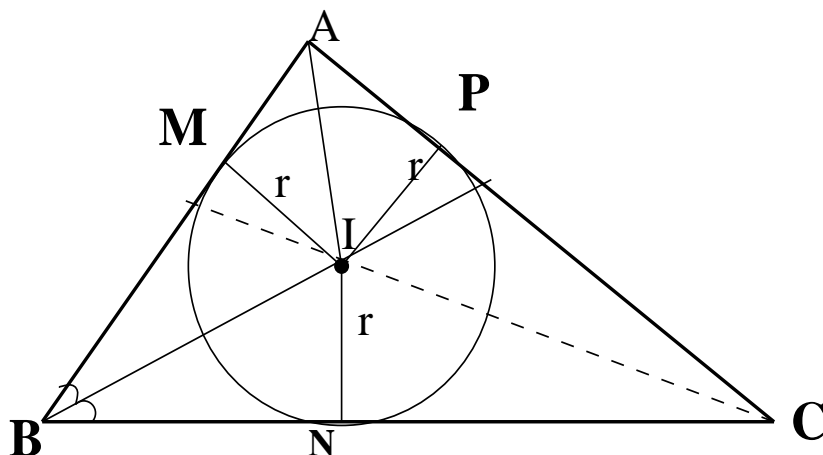


Figura 1.5: Cerc înscris în triunghi

DEFINIȚIA 1.5 1. Triunghiul care are toate laturile tangente la un cerc se numește *triunghi circumscris* aceluia cerc.

2. Cercul care este tangent la toate laturile unui triunghi se numește *cerc înscris în triunghi*.

Centrul cercului înscris într-un triunghi, notat cu I , este punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor triunghiului. Raza cercului înscris într-un triunghi o vom nota cu r .

Observația 1.1 1. Dacă $C(I; r)$ este cercul înscris în triunghiul ABC , atunci triunghiul ABC este *triunghiul circumscris* cercului $C(I; r)$;

2. $IM = IN = IP = r$, unde M, N, P sunt punctele de tangență ale laturilor triunghiului la cercul înscris.

PROPOZIȚIA 1.1

$$r = \frac{2A}{P},$$

unde A este aria triunghiului ABC , iar $P = AB + AC + BC$.

Demonstrație.

Într-adevăr, aria triunghiului ABC este suma ariilor triunghiurilor AIB, BIC, CIA .

$$A = \mathcal{A}_{AIB} + \mathcal{A}_{BIC} + \mathcal{A}_{CIA} = \frac{AB \cdot IM}{2} + \frac{BC \cdot IN}{2} + \frac{AC \cdot IP}{2} = \frac{r \cdot P}{2}.$$

q.e.d.

Cercul circumscris unui triunghi

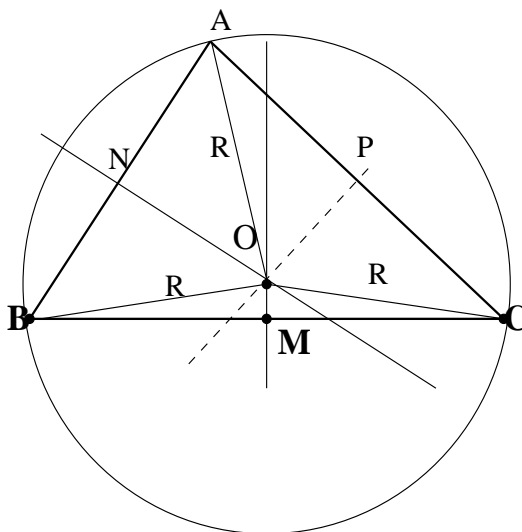


Figura 1.6: Cerc circumscris unui triunghi

DEFINIȚIA 1.6 1. Triunghiul care are vârfurile situate pe un cerc, iar laturile sunt coarde ale cercului se numește înscris în cerc.

2. Cercul în care se înscrie un triunghi se numește cerc circumscris triunghiului.

Centrul cercului circumscris unui triunghi ABC este punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor triunghiului, notat cu O .

Raza cercului circumscris se notează cu R .

Notăm cercul circumscris triunghiului ABC cu $C(O; R)$.

1. Triunghiul ABC este triunghiul înscris în cercul $C(O; R)$;

2. $OA = OB = OC = R$.

PROPOZIȚIA 1.2 Simetricile ortocentrului triunghiului față de mijloacele laturilor triunghiului aparțin cercului circumscris triunghiului.

PROPOZIȚIA 1.3 Simetricile ortocentrului triunghiului față de laturile triunghiului aparțin cercului circumscris triunghiului.

Demonstrație. Fie A_2 punctul în care înălțimea AA_1 intersectează cercul circumscris triunghiului.

Deoarece $m(\widehat{BHA_1}) = m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{AA_2B})$ rezultă triunghiul A_2BH isoscel cu BA_1 înălțime, mediana, mediatoare, adică $HA_1 = A_1A_2$.

q.e.d.

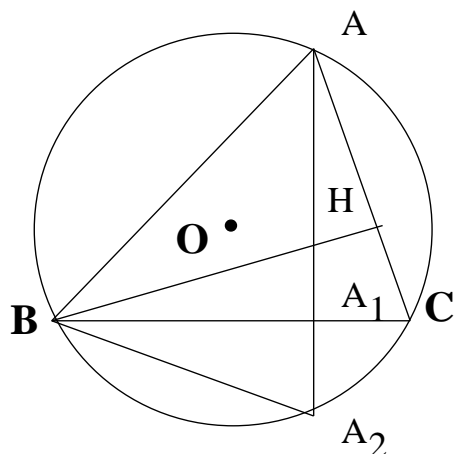


Figura 1.7:

PROPOZIȚIA 1.4

$$R = \frac{abc}{4A},$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor, iar A este aria triunghiului ABC .

Demonstrație.

Formula de calcul pentru raza cercului circumscris se obține astfel:

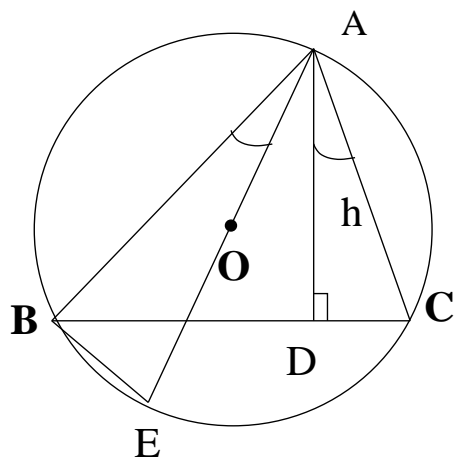


Figura 1.8: Raza cercului circumscris

Prin vârful A al triunghiului se construiește diametrul cercului circumscris, notat cu AE . Se obține astfel triunghiul dreptunghic ABE (triunghi înscris în semicerc). Prin construirea înălțimii din punctul A se obține triunghiul dreptunghic ADC asemenea cu ABE conform cazului UU . Notăm lungimea acestei înălțimi cu h .

Laturile celor două triunghiuri asemenea sunt proporționale:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow 2Rh = AC \cdot AB \Rightarrow R = \frac{AC \cdot AB}{2h}.$$

Dar, aria triunghiului ABC , notată cu \mathcal{A} , este $\mathcal{A} = \frac{h \cdot BC}{2}$, de unde rezultă :

$$h = \frac{2\mathcal{A}}{BC}.$$

Înlocuind h în expresia lui R se obține formula de calcul a razei cercului circumscris triunghiului ABC ,

$$R = \frac{abc}{4\mathcal{A}}.$$

q.e.d.

O legătură între raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi este dată de relația lui Euler.

PROPOZIȚIA 1.5 Relația lui Euler

$$d^2 = R(R - 2r)$$

unde d este distanța dintre centrul cercului circumscris și centrul cercului înscris într-un triunghi, R raza cercului circumscris și r raza cercului înscris în triunghi.

Demonstrație. Fie D punctul în care bisectoarea $[AI$ intersectează cercul circum-

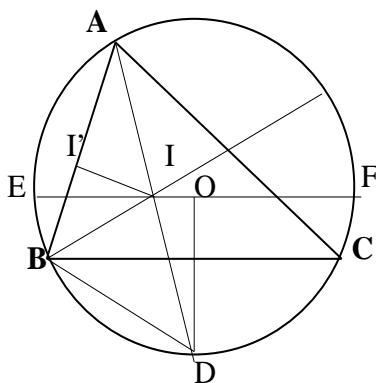


Figura 1.9: Relația lui Euler

scris triunghiului ABC și fie punctele $\{E, F\} = C(O, R) \cap OI$. Din triunghiul ABD rezultă $BD = 2R \sin \frac{A}{2}$, iar din triunghiul dreptunghic $AI'I$

$$AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Dar $[AI$ și $[BI$ sunt bisectoarele unghiurilor BAC și ABC , se obține $BD = ID$.

Folosind puterea punctului I față de cercul $C(O, R)$, din ultimele relații rezultă

$$2Rr = ID \cdot IA = IE \cdot IF = (R - OI)(R + OI) = R^2 - IO^2$$

q.e.d.

Se poate vedea că și inegalitatea lui Euler

$$R > 2r$$

este verificată.

Cercuri exânscrișe unui triunghi

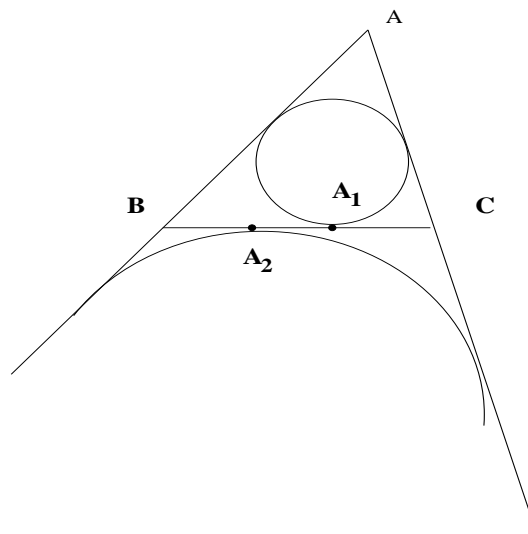


Figura 1.10: Cerc exânscriș unui triunghi

DEFINIȚIA 1.7 *Un cerc tangent unei laturi a unui triunghi și prelungirilor celorlalte două laturi se numește triunghi exânscriș triunghiului.*

Centrul unui cerc exânscriș unui triunghi se află la intersecția bisectoarelor celor două unghiuri exterioare și a bisectoarei unghiului interior neadiacent cu ele.

Există 3 cercuri exânscrișe unui triunghi.

Proprietate

Punctele de tangență ale cercului exânscriș și cercului înscriș într-un triunghi sunt simetrice față de mijlocul laturii la care sunt tangente amândouă.

TEOREMA 1.5 *Fie triunghiul ABC. Dacă M, N, P sunt punctele de tangență ale cercurilor exânscrișe cu laturile triunghiului, atunci AM, BN, CP sunt concurente în punctul care se numește **punctul lui Nagel**.*

1.2 Teoremele MENELAUS și CEVA

1.2.1 Teorema lui Menelaus

Teorema lui Menelaus este una dintre teoremele clasice ale geometriei.

De-a lungul anilor ea a fost demonstrată prin diverse metode folosind rezultatele din geometria sintetică, dar și cu metoda analitică, cu metoda vectorială și cu ajutorul transformărilor geometrice, al omotetiei.

TEOREMA 1.6 (TEOREMA LUI MENELAUS)

Fie un triunghi ABC , $M \in (BC)$, $N \in (AC)$, $P \in (AB)$. Dacă punctele M, N, P sunt coliniare, atunci:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1. \quad (1.3)$$

Demonstrație. Se construiește prin C paralela cu dreapta d care conține punctele M, N, P . Aceasta intersectează AB în punctul notat cu R .

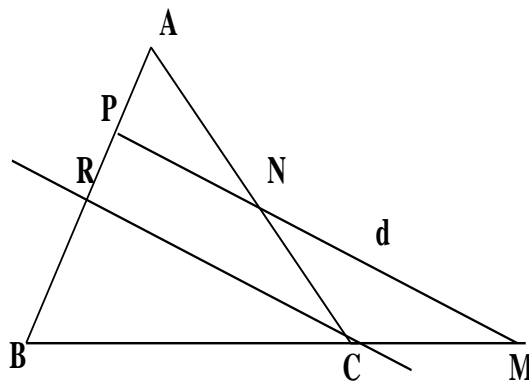


Figura 1.11: Teorema lui Menelaus

Se aplică teorema lui Thales în triunghiul BMP cu $CR \parallel MP$:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{PB}{PR}, \quad (1.4)$$

iar în triunghiul ARC cu $PN \parallel RC$ rezultă:

$$\frac{CN}{NA} = \frac{PR}{PA}. \quad (1.5)$$

Din relațiile (1.4) și (1.5) rezultă:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = \frac{PB}{PR} \cdot \frac{PR}{PA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1.$$

q.e.d.

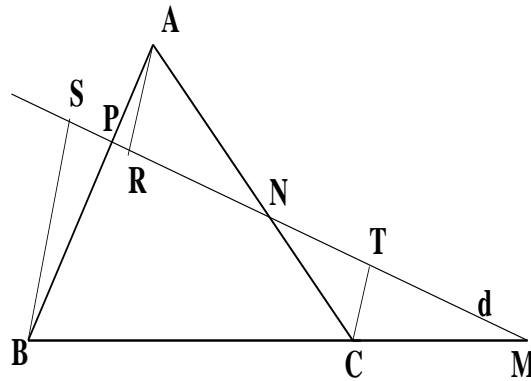


Figura 1.12: Teorema lui Menelaus

O altă demonstrație a teoremei lui Menelaus, folosind geometria sintetică:

Demonstrație. Fie triunghiul ABC și transversala d care se intersectează cu laturile triunghiului în punctele $M \in (BC, N \in (AC), P \in (AB)$.

Construim $CT \perp d, BS \perp d, AR \perp d$, lungimile acestor segmente reprezentând distanțele de la vârfurile triunghiului la transversala d , vor fi notate cu $CT = d_C, BS = d_B, AR = d_A$.

Se formează astfel perechile de triunghiuri dreptunghice asemenea:

$$\triangle ARP \sim \triangle BPS, \quad \triangle BSM \sim \triangle CTM, \quad \triangle NCT \sim \triangle ARN$$

pentru care scriem proporționalitatea laturilor:

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{AP}{BP}; \quad \frac{d_B}{d_C} = \frac{MB}{MC}; \quad \frac{d_C}{d_A} = \frac{NC}{NA}.$$

Înmulțind aceste relații membru cu membru se va obține relația lui Menelaus.

q.e.d.

Vom prezenta în continuare reciproca teoremei lui Menelaus:

TEOREMA 1.7 Fie un triunghi ABC , $M \in (BC, N \in (AC), P \in (AB)$ astfel încât are loc relația:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1. \quad (1.6)$$

Atunci punctele M, N, P sunt coliniare.

Demonstrație. Dreapta MN se intersectează cu AB în punctul pe care-l notăm cu P_1 . Punctele M, N, P_1 fiind coliniare, aplicăm teorema lui Menelaus și obținem:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP_1}{BP_1} = 1. \quad (1.7)$$

Din relațiile (1.6), (1.7) rezultă

$$\frac{AP_1}{BP_1} = \frac{AP}{PB}$$

adică $P = P_1$. Deci punctele M, N, P sunt coliniare. **q.e.d.**

Teorema lui Menelaus se poate demonstra și în cazul $M \in (BC, N \in (AC, P \in (AB$.

TEOREMA 1.8 Fie un triunghi ABC , $M \in (BC, N \in (AC, P \in (AB$. Dacă punctele M, N, P sunt coliniare, atunci:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1. \quad (1.8)$$

Demonstrație. Construim dreapta d care se intersectează cu $(BC$ în punctul M , cu $(AC$ în N și cu $(AB$ în P . Ducem prin C paralela la d care se intersectează cu AB în R .

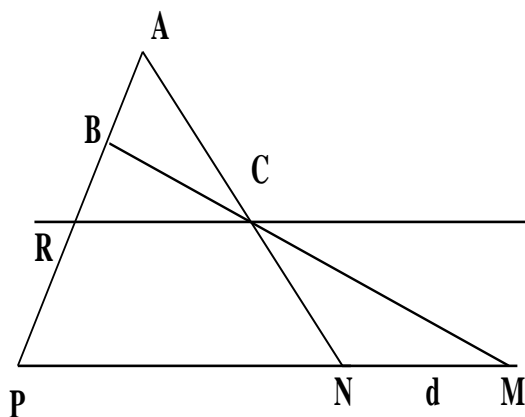


Figura 1.13:

Aplicăm teorema lui Thales

- în triunghiul BMP cu $CR \parallel MP$:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{PB}{PR}, \quad (1.9)$$

- în triunghiul APN cu $PN \parallel RC$:

$$\frac{CN}{NA} = \frac{PR}{PA}. \quad (1.10)$$

Din relațiile (1.9) și (1.10) rezultă:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = \frac{PB}{PR} \cdot \frac{PR}{PA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1.$$

q.e.d.

În continuare vom prezenta teorema lui Menelaus pentru un patrulater:

TEOREMA 1.9 Fie $ABCD$ un patrulater și punctele $M \in (CB)$, $N \in (AB)$, $P \in (DC)$, $Q \in (AD)$. Dacă punctele M, N, P, Q sunt coliniare, atunci

$$\frac{MC}{MB} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{AQ}{QD} \cdot \frac{PD}{PC} = 1. \quad (1.11)$$

Demonstrație. Notăm cu d dreapta care conține punctele M, N, P, Q . Se construiesc paralele la dreapta d prin punctele B și A care se intersectează cu (CD) în punctele R și S .

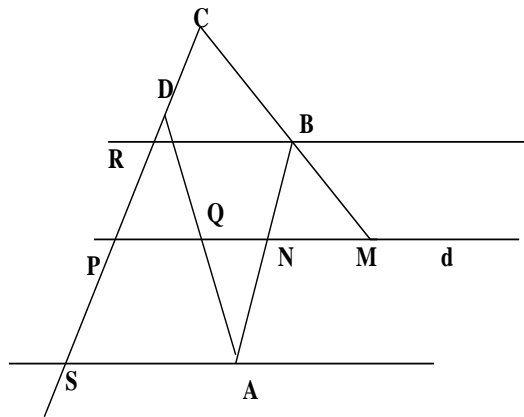


Figura 1.14: Teorema lui Menelaus în patrulater

Aplicăm teorema lui Thales

- în triunghiul CMP cu $BR \parallel MP$:

$$\frac{MC}{MB} = \frac{PC}{PR}, \quad (1.12)$$

- în triunghiul ADS cu $PQ \parallel AS$:

$$\frac{AQ}{QD} = \frac{PS}{PD}. \quad (1.13)$$

Dreptele $BR \parallel NP \parallel AS$ tăiate de secantele AB și CS determină proporționalitatea segmentelor:

$$\frac{BN}{NA} = \frac{PR}{PS}. \quad (1.14)$$

Din relațiile (1.12), (1.13), (1.14) se obține:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{AQ}{QD} \cdot \frac{PD}{PC} = \frac{PC}{PR} \cdot \frac{PR}{PS} \cdot \frac{PS}{PD} \cdot \frac{PD}{PC} = 1.$$

q.e.d.

În același mod se poate demonstra o relație ca cea din teorema lui Menelaus pentru un poligon cu $n > 4$ laturi convex sau concav.

1.2.2 Teorema lui Ceva

Teorema lui Ceva este un rezultat din geometria triunghiului, cu aplicații în geometria proiectivă. A fost descoperită de matematicianul italian Giovanni Ceva, care a formulat-o și a demonstrat-o în 1678 în lucrarea *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*.

Se pare că această teoremă era cunoscută, cu multe secole înainte (secolul al XI-lea) de unii matematicieni arabi (Yusuf Al-Mu'taman ibn Hud).

TEOREMA 1.10 (TEOREMA LUI CEVA)

Fie triunghiul ABC și D, E, F trei puncte diferite de vârfurile triunghiului, aflate respectiv pe laturile acestuia $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Dacă dreptele AD , BE și CF sunt concurente atunci:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \quad (1.15)$$

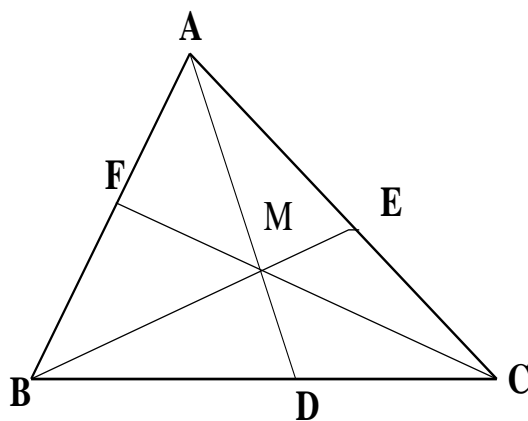


Figura 1.15: Teorema lui Ceva

Demonstrație. Notăm cu M punctul de intersecție al dreptelor AD , BE și CF .

Aplicăm teorema lui Menelaus pentru:

-triunghiul ABD cu secanta CF

$$\frac{CB}{CD} \cdot \frac{MD}{MA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1, \quad (1.16)$$

de unde se obține:

$$\frac{MD}{MA} = \frac{FB}{FA} \cdot \frac{CD}{CB}; \quad (1.17)$$

-în triunghiul ADC cu secanta BE

$$\frac{BC}{BD} \cdot \frac{MD}{MA} \cdot \frac{AE}{EC} = 1. \quad (1.18)$$

Din relațiile (1.17) și (1.18) se obține:

$$\frac{BC}{BD} \cdot \frac{FB}{FA} \cdot \frac{CD}{CB} \cdot \frac{AE}{EC} = 1,$$

adică relația din teoremă.

q.e.d.

Într-un triunghi dreapta care unește un vârf al acestuia cu un punct de pe latura opusă se numește **ceviană**.

TEOREMA 1.11 (*Reciproca teoremei lui Ceva*)

Dacă AD , BE , CF sunt trei ceviane în triunghiul ABC și

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \quad (1.19)$$

atunci cevianele sunt concurente.

Demonstrație. Demonstrația se face prin reducere la absurd.

Presupunem că AD nu trece prin punctul M , $\{M\} = CF \cap BE$. Fie N punctul de intersecție dintre AM și BC , $AM \cap BC = \{N\}$. Aplicând teorema lui Ceva pentru punctele E, F și N și comparând cu relația din enunț obținem că $M = N$.

q.e.d.

1.2.3 Teorema lui VAN AUBEL

TEOREMA 1.12 (*TEOREMA LUI VAN AUBEL*)

Fie un triunghi ABC , $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Dacă AD, BE, CF sunt concurente în M atunci

$$\frac{EA}{EC} + \frac{FA}{FB} = \frac{MA}{MD}. \quad (1.20)$$

Demonstrație. Se aplică teorema lui Menelaus:

în triunghiul ABD cu secanta FC

$$\frac{FB}{AF} \cdot \frac{AM}{MD} \cdot \frac{DC}{BC} = 1, \quad (1.21)$$

de unde rezultă

$$\frac{AM}{MD} \cdot \frac{DC}{BC} = \frac{AF}{FB}. \quad (1.22)$$

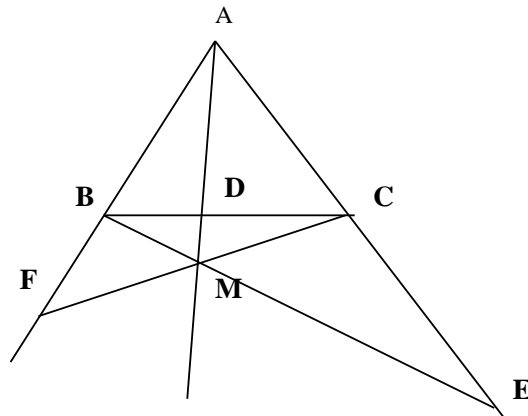


Figura 1.16: Teorema lui Van Aubel

și în triunghiul ADC cu secanta BE

$$\frac{CE}{AE} \cdot \frac{AM}{MD} \cdot \frac{BD}{BC} = 1 \quad (1.23)$$

de unde rezultă:

$$\frac{AM}{MD} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{AE}{CE}. \quad (1.24)$$

Adunăm relațiile (1.22) și (1.24):

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MD} \left(\frac{DC}{BC} + \frac{BD}{BC} \right) &= \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{CE} \Rightarrow \\ \frac{EA}{EC} + \frac{FA}{FB} &= \frac{MA}{MD}. \end{aligned}$$

q.e.d.

1.3 Patrulatere inscriptibile

Dacă în cazul triunghiului întotdeauna există un cerc circumscris acestuia, în cazul patrulaterelor nu se aplică acest rezultat, adică nu orice patrulater poate fi înscris într-un cerc.

DEFINIȚIA 1.8 1. Patru puncte (sau mai multe) se numesc puncte concilice dacă există un cerc căruia să-i aparțină toate cele patru puncte.

2. Un patrulater se numește inscriptibil dacă cele patru vârfuri ale sale sunt puncte concilice.

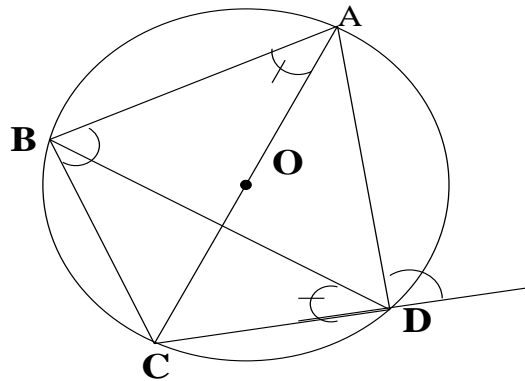


Figura 1.17: Patrulater inscriptibil

PROPOZIȚIA 1.6 *Proprietăți ale patrulaterului inscriptibil*

1. Într-un patrulater inscriptibil, unghiurile opuse sunt suplementare.
2. Unghiurile formate de diagonale cu două laturi opuse sunt congruente.

Demonstrația acestor afirmații este imediată folosind mărimea arcelor subînținse de aceste unghiuri.

Reciprocele acestor afirmații, de asemenea, se pot demonstra ușor.

PROPOZIȚIA 1.7 *Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă mediatoarele laturilor sale sunt concurente.*

Demonstrație. “ \Rightarrow ” Se consideră un un patrulater $ABCD$, care este inscriptibil,

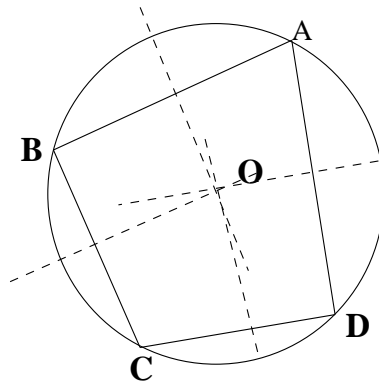


Figura 1.18: Patrulater inscriptibil

adică există un cerc $C(O, r)$ care conține punctele A, B, C, D . Atunci

$$OA = OB = OC = OD = r,$$

deci punctul O se află pe mediatoarele segmentelor $[AB], [BC], [AC], [AD]$.

“ \Leftarrow ” Se consideră patrulaterul $ABCD$, cu mediatoarele laturilor sale $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$, $[AD]$, concurente în punctul O .

Atunci folosind proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment de a se afla la aceeași distanță față de capetele lui se obține

$$OA = OB = OC = OD = r,$$

adică vârfurile lui se află pe cercul cu centrul în punctul O și rază r .

q.e.d.

Cazuri particulare de patrulater inscriptibil:

1. Dreptunghiul, pătratul sunt patrulater inscriptibile;
2. Un trapez este inscriptibil dacă și numai dacă este isoscel.

1.3.1 Teorema lui Ptolemeu

Inegalitatea lui Ptolemeu În orice patrulater convex $ABCD$ are loc relația:

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

TEOREMA 1.13 (TEOREMA LUI PTOLEMEU)

Patrulaterul convex $ABCD$ este inscriptibil dacă și numai dacă

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD. (\text{Relația lui Ptolemeu}) \quad (1.25)$$

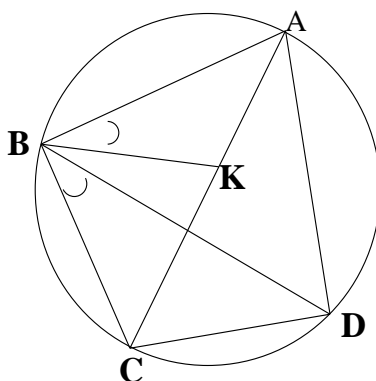


Figura 1.19: Teorema lui Ptolemeu

Demonstrație. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Pe diagonala AC se consideră punctul K astfel încât $\widehat{ABK} = \widehat{CBD}$.

$$\widehat{ABK} + \widehat{CBK} = \widehat{ABC} = \widehat{CBD} + \widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{ABD}.$$

Se observă că triunghiurile $ABK \sim DBC$, de unde rezultă

$$\frac{AK}{CD} = \frac{AB}{BD}, \quad (1.26)$$

iar triunghiul $ABD \sim KBC$, cu

$$\frac{CK}{DA} = \frac{BC}{BD}. \quad (1.27)$$

Putem scrie:

$$AK \cdot BD = AB \cdot CD$$

$$CK \cdot BD = AD \cdot BC$$

și adunând aceste relații obținem relația lui Ptolemeu.

q.e.d.

Observația 1.2 *Se pot deplasa punctele A, B, C, D pe cerc oricum, dar ca relația lui Ptolemeu să se verifice este necesar ca AC și BD să rămână diagonale.*

În cazul în care $ABCD$ este dreptunghi, relația lui Ptolemeu devine teorema lui PITAGORA.

1.4 Patrulater circumscriptibile

DEFINIȚIA 1.9 1. *Un patrulater care are cele patru laturi tangente unui cerc se numește patrulater circumscris cercului.*

2. *Un patrulater spunem că este circumscriptibil dacă poate fi circumscris unui cerc.*

Nu putem spune că orice patrulater este circumscriptibil.

PROPOZIȚIA 1.8 *Un patrulater poate fi circumscris unui cerc dacă și numai dacă bisectoarele unghiurilor sale sunt concurente.*

Demonstrație. “ \Rightarrow ” Considerăm un patrulater $ABCD$ circumscris unui cerc, adică laturile sale $[AB], [BC], [AC], [AD]$ sunt tangente la un cerc $C(O, r)$. Atunci

$$d(O, AB) = d(O, BC) = d(O, CD) = d(O, AD) = r,$$

deci punctul O se află pe bisectoarele unghiurilor A, B, C, D .

“ \Leftarrow ” Se consideră patrulaterul $ABCD$, cu bisectoarele unghiurilor sale concurente în punctul O .

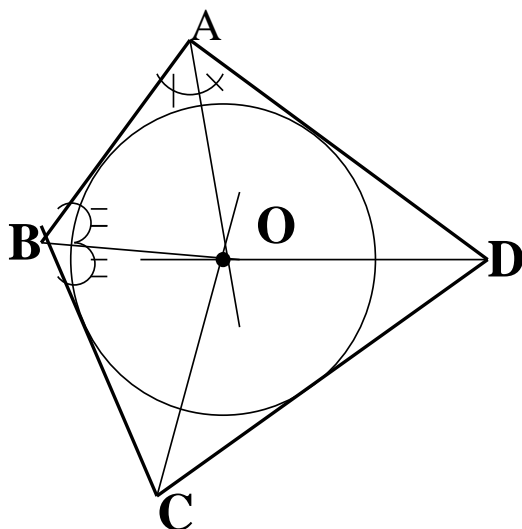


Figura 1.20: Patrulater circumscris

Atunci folosind proprietatea punctelor de pe bisectoare de a se afla la aceeași distanță față de laturile unghiului se obține

$$d(O, AB) = d(O, BC) = d(O, CD) = d(O, AD) = r,$$

adică cercul cu centrul în punctul O și rază r este tangent fiecărei laturi a patrulaterului.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 1.9 *Un patrulater este circumscriptibil dacă și numai dacă suma lungimilor laturilor opuse este aceeași,*

$$AB + CD = AD + BC.$$

Această proprietate poate fi ușor demonstrată, deoarece știm că tangentele duse dintr-un punct la un cerc au aceeași lungime.

PROPOZIȚIA 1.10 1. *Dacă un patrulater circumscris unui cerc este trapez, atunci punctele de contact cu cercul ale bazelor și centrul cercului sunt colineare.*

2. *Dacă trapezul este isoscel, atunci lungimea diametrului cercului înscris în trapez este media geometrică a lungimii bazelor.*

Demonstrație.

1. Triunghiurile $\triangle DEO \equiv \triangle DIO$ sunt congruente, pentru că sunt dreptunghice și au laturile respectiv egale.

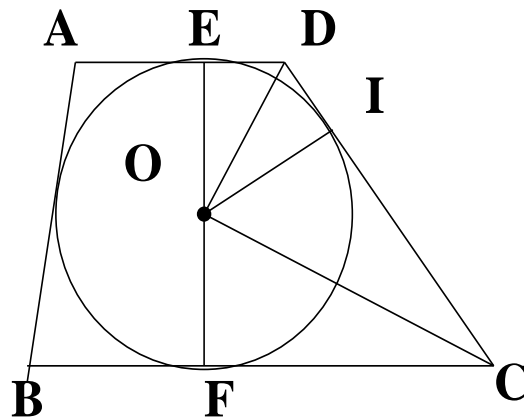


Figura 1.21: Trapez circumscris

Congruente sunt și triunghiurile $\triangle OIC \equiv \triangle OFC$ (se poate demonstra tot folosind cazul 3 de congruență a triunghiurilor). Obținem astfel congruența unghiurilor $\widehat{EOD} \equiv \widehat{DOI}$ și $\widehat{IOC} \equiv \widehat{COF}$. Dar triunghiul DOC este dreptunghic cu unghiul drept \widehat{DOC} . Atunci se observă că unghiul \widehat{EOF} este alungit, adică măsura lui este 180° , ceea ce ne arată coliniaritatea celor trei puncte.

2. În triunghiul dreptunghic DOC segmentul OI este înălțime pe ipotenuză și cum $DI = DE, CI = CF$ obținem

$$DE \cdot CF = OI^2 = r^2; \quad AE \cdot BF = r^2.$$

Dacă trapezul este isoscel se obține proprietatea anunțată.

q.e.d.

1.4.1 Cercul lui Euler

Cercul lui Euler sau cercul celor 9 puncte este cercul ce trece prin mijloacele laturilor unui triunghi ; picioarele înălțimilor ; mijloacele segmentelor cuprinse între vârfuri și ortocentru.

Centrul lui se găsește la mijlocul segmentului HO (H este ortocentru; O este centrul cercului circumscris) și are raza egală cu jumătatea razei cercului circumscris.

Vom demonstra conciclitatea celor 9 puncte în capitolul următor, folosind transformările geometrice.

1.5 Probleme de coliniaritate

1.5.1 Metode de demonstrare a coliniarității unor puncte

Coliniaritatea a trei puncte se poate demonstra prin mai multe metode:

1. folosind identitatea $AB = AC + CB$, unde AB, AC, BC sunt segmente de dreaptă;
2. utilizând reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf;
3. cu ajutorul unghiului alungit;
4. identificarea apartenenței punctelor la o dreaptă remarcabilă (linie mijlocie, mediatoare, bisectoare, etc.) în configurația respectivă.
5. folosind postulatul lui Euclid: Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă și numai una la acea dreaptă.
6. cu ajutorul proprietăților paralelogramului;
7. folosind unicitatea perpendicularei dintr-un punct pe o dreaptă;
8. utilizând reciproca teoremei lui Menelaus;
9. prin utilizarea axiomei 6 de incidenta (sau de situare): Dacă două plane distincte au un punct comun atunci intersecția lor este o dreaptă;
10. prin metoda analitică;
11. prin metoda vectorială;
12. folosind transformări geometrice;
13. folosind numerele complexe: punctele $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ sunt colineare dacă și numai dacă $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$.

1.5.2 Teorema lui Euler, dreapta lui Simpson

Dreapta lui Euler

TEOREMA 1.14 În orice triunghi ortocentrul H , centrul de greutate G și centrul cercului circumscris triunghiului sunt coliniare.

Dreapta determinată de cele trei puncte se numește **dreapta lui Euler**.

Demonstrație. a) Dacă triunghiul ABC este isoscel sau dreptunghic, atunci cele trei puncte se află pe o mediană.

b) În cazul triunghiului oarecare ABC , notăm cu A_1, B_1 picioarele înălțimilor din vârfurile A și B , iar picioarele medianelor din aceste vârfuri sunt A' și B' . Triunghiurile HAB și $OA'B'$ sunt asemenea pentru că au laturile paralele. Folosind teorema fundamentală a asemănării se obține:

$$\frac{HA}{OA'} = \frac{HB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} = 2 \Rightarrow \frac{HA}{OA'} = 2.$$

Dar punctul G împarte mediana în raportul $\frac{AG}{GA'} = 2$. Atunci triunghiurile OGA' și

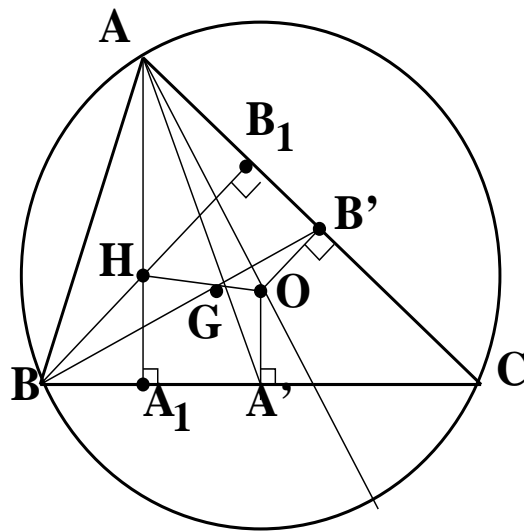


Figura 1.22:

HGA sunt asemenea conform cazului al doilea de asemănare și rezultă

$$\widehat{OGA'} = \widehat{AGH},$$

ceea ce implică coliniaritatea punctelor O, G, H .

q.e.d.

Dreapta lui Simpson

TEOREMA 1.15 Proiecțiile ortogonale ale unui punct de pe cercul circumscris triunghiului ABC pe laturile acestuia sunt coliniare.

Dreapta care conține punctele coliniare din teorema anterioară se numește **dreapta lui Simpson**.

Demonstrație. Considerăm un punct M pe cercul circumscris triunghiului ABC și notăm proiecțiile ortogonale ale acestuia pe laturile BC, AC, AB cu D, E , respectiv F .

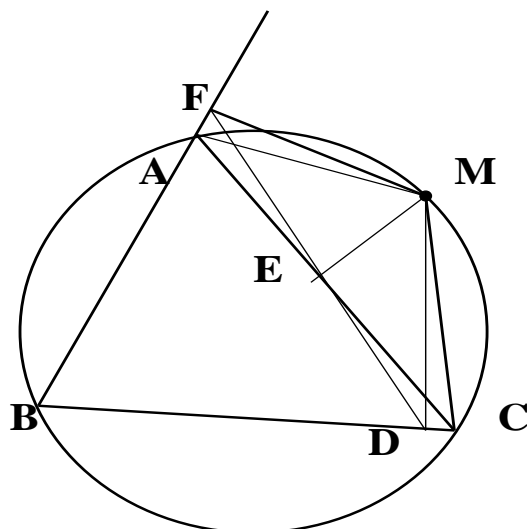


Figura 1.23: Dreapta lui Simpson

Patrulateralele $AEMF$, $FBDM$ sunt inscriptibile pentru că au unghiurile opuse suplementare, dar și $MEDC$ este inscriptibil.

Atunci

$$\widehat{DEC} = \widehat{DMC} = 90^\circ - \widehat{DCM} = 90^\circ - \widehat{FAM} = \widehat{FMA} = \widehat{FEA}.$$

Obținem $\widehat{DEC} = \widehat{FEA}$, care sunt unghiuri opuse la vârf, ceea ce implică coliniaritatea punctelor D , E , F .

q.e.d.

1.5.3 Relația lui Carnot

TEOREMA 1.16 (TEOREMA LUI CARNOT)

Fie un triunghi ABC , $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Perpendicularele în D pe (BC) , în E pe (AC) și în F pe (AB) sunt concurente dacă și numai dacă

$$DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0. \quad (1.28)$$

Relația (1.28) se numește **relația lui Carnot**.

Demonstrație. “ \Rightarrow ” Presupunem că perpendicularele în D pe (BC) , în E pe (AC) și în F pe (AB) sunt concurente. Se formează triunghiurile dreptunghice DMB , DMC , EMC , EMA , AMF , FMB pentru care vom scrie teorema lui Pitagora obținând relațiile:

$$BM^2 = MD^2 + DB^2; \quad (1.29)$$

$$CM^2 = MD^2 + DC^2; \quad (1.30)$$

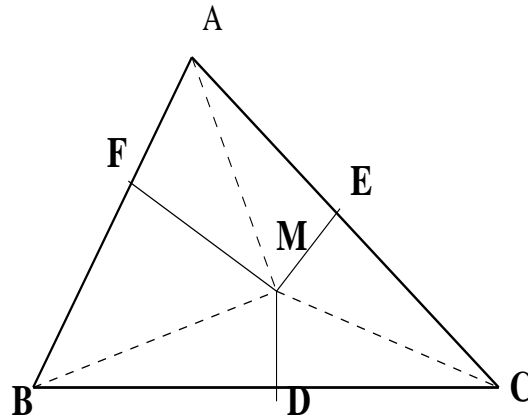


Figura 1.24: Relația lui Carnot

$$CM^2 = ME^2 + EC^2; \quad (1.31)$$

$$AM^2 = ME^2 + EA^2; \quad (1.32)$$

$$AM^2 = FA^2 + FM^2; \quad (1.33)$$

$$BM^2 = FM^2 + FB^2. \quad (1.34)$$

Scazând relațiile două câte două obținem:

$$BM^2 - CM^2 = DB^2 - DC^2;$$

$$CM^2 - AM^2 = EC^2 - EA^2;$$

$$AM^2 - BM^2 = FA^2 - FB^2.$$

Vom aduna aceste trei relații și se va obține relația lui Carnot.

“ \Leftarrow ” Presupunem că relația lui Carnot este adevărată, dar perpendicularele pe laturile triunghiului construite în punctele D, E, F nu sunt concurente.

Perpendicularele construite în două dintre aceste puncte sunt concurente, de exemplu cea construită în punctul D și cea din E . Punctul lor de concurență va fi M .

Notăm proiecția punctului M pe latura AB cu N . Conform implicației directe care a fost demonstrată, putem scrie relația lui Carnot pentru punctele N, E, D :

$$DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + NA^2 - NB^2 = 0. \quad (1.35)$$

Conform ipotezei:

$$DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0. \quad (1.36)$$

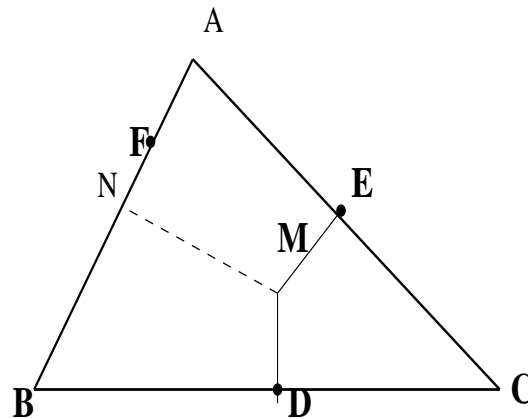


Figura 1.25:

Scăzând (1.28) și (1.36), rezultă:

$$NA^2 - NB^2 = FA^2 - FB^2.$$

Notăm $BN = m$, $NF = x$, $AF = n$ și relația anterioară va fi

$$(n + x)^2 - m^2 = n^2 - (m + x)^2$$

ceea ce implică $x = 0$, adică punctele N, F coincid.

q.e.d.

1.6 Probleme de concurență

1.6.1 Metode de demonstrare a concurenței unor drepte

Pentru a demonstra concurența a două sau mai multe drepte putem folosi una dintre următoarele metode:

1. folosind definiția dreptelor concurente, adică să arătăm că există un punct comun dreptelor;
2. concurența a trei drepte constă în a arăta că punctul de intersecție a două drepte aparține și celei de a treia drepte;
3. pentru a demonstra concurența a trei drepte putem să folosim teoremele referitoare la concurența liniilor importante în triunghi;
4. folosind reciproca teoremei lui Ceva;
5. prin metoda analitică, folosind ecuațiile analitice ale dreptelor;
6. pentru concurența a trei drepte, demonstrăm că se intersectează două câte două și aria poligonului obținut este 0.

1.6.2 Teoremele lui Gergonne

TEOREMA 1.17 (TEOREMA LUI GERGONNE)

Fie un triunghi ABC , $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Dacă AD , BE și CF sunt concurente în punctul M atunci:

$$\frac{DM}{AD} + \frac{EM}{BE} + \frac{FM}{CF} = 1. \quad (1.37)$$

Demonstrație. Notăm cu h_a distanța de la punctul A la BC ; cu d_a distanța de la punctul M la BC ; \mathcal{A}_{BMC} aria triunghiului BMC și cu \mathcal{A}_{ABC} aria triunghiului ABC .

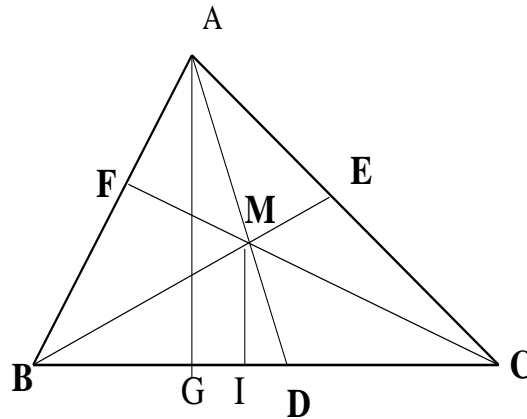


Figura 1.26: Teorema lui Gergonne

Se observă că $\frac{\mathcal{A}_{BMC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{d_a}{h_a}$ (au aceeași bază).

Se construiesc înălțimile AG pentru triunghiul ABC și MI pentru triunghiul BMC . Se formează astfel triunghiurile asemenea AGD și MID , pentru care putem scrie:

$$\frac{d_a}{h_a} = \frac{MD}{AD}. \quad (1.38)$$

Se obține:

$$\frac{\mathcal{A}_{BMC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{MD}{AD} \quad (1.39)$$

Prin procedee analoage se pot obține:

$$\frac{\mathcal{A}_{AMB}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{MF}{CF}; \quad (1.40)$$

$$\frac{\mathcal{A}_{AMC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{ME}{BE} \quad (1.41)$$

adunând relațiile (1.39), (1.40), (1.41) vom obține:

$$1 = \frac{\mathcal{A}_{BMC}}{\mathcal{A}_{ABC}} + \frac{\mathcal{A}_{AMC}}{\mathcal{A}_{ABC}} + \frac{\mathcal{A}_{AMB}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{DM}{AD} + \frac{EM}{BE} + \frac{FM}{CF}.$$

q.e.d.

TEOREMA 1.18 (PUNCTUL LUI GERGONNE)

Fie cercul înscris în triunghiul ABC . Dacă M, N, P sunt punctele de tangență ale cercului cu laturile triunghiului, atunci AM, BN, CP sunt concurente în punctul lui Gergonne.

Pentru demonstrație se folosește reciproca teoremei lui Ceva.

1.6.3 Teorema lui Steiner

Reamintim că o ceviană într-un triunghi este dreapta determinată de un vârf al triunghiului și un punct de pe latura opusă.

Ceviene izogonale sunt cevielele egal înclinate față de laturile care pleacă din același vârf cu ele.

TEOREMA 1.19 (TEOREMA LUI STEINER) Dacă AM, AN sunt ceviele izogonale în triunghiul ABC atunci are loc relația:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} \quad (1.42)$$

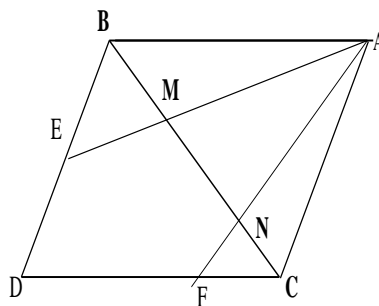


Figura 1.27: Teorema lui Steiner

Demonstrație. Prin vârfurile B , respectiv C ale triunghiului ABC construim paralele la laturile opuse. Se obține astfel paralelogramul $ABDC$.

Notăm $\{E\} = AM \cap BD$ și $\{F\} = AN \cap CD$.

Cu teorema fundamentală a asemănării se obține că $\frac{BE}{AC} = \frac{BM}{CM}$ și $\frac{AB}{CF} = \frac{BN}{CN}$.

Relația de demonstrat devine $\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}$, adevărată din asemănarea triunghiurilor ABE și ACF .

q.e.d.

Un exemplu de ceviane izogonale sunt înălțimea dintr-un vârf și diametrul cercului circumscris triunghiului, dus din vârful respectiv.

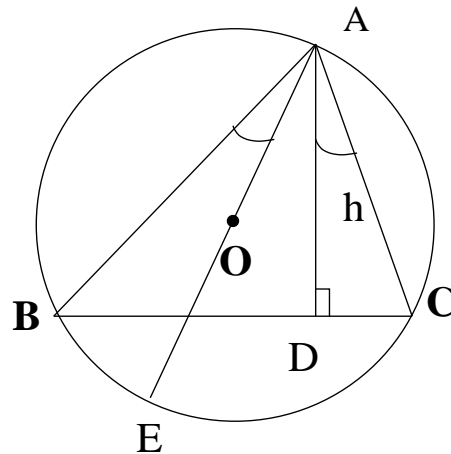


Figura 1.28: Ceviane izogonale

1.7 Relații metrice în triunghi și patrulater

1.7.1 Teorema Pitagora generalizată

Este bine cunoscută teorema lui Pitagora, care se aplică în triunghiuri dreptunghice. Acum prezentăm generalizarea ei, numită și teorema cosinusului, care se poate aplica în orice triunghi.

TEOREMA 1.20 Dacă în triunghiul ABC , \hat{C} este un unghi ascuțit și $D = pr_{BC}A$, atunci:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC.$$

Demonstrație. Vom discuta 3 cazuri:

a) unghiul \hat{B} este ascuțit, notăm cu $D = pr_{BC}A$, atunci $D \in (BC)$.

Triunghiurile ABD și ADC sunt dreptunghice și vom aplica teorema Pitagora:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \tag{1.43}$$

$$AD^2 = AC^2 - DC^2 \tag{1.44}$$

$$BD = BC - DC. \tag{1.45}$$

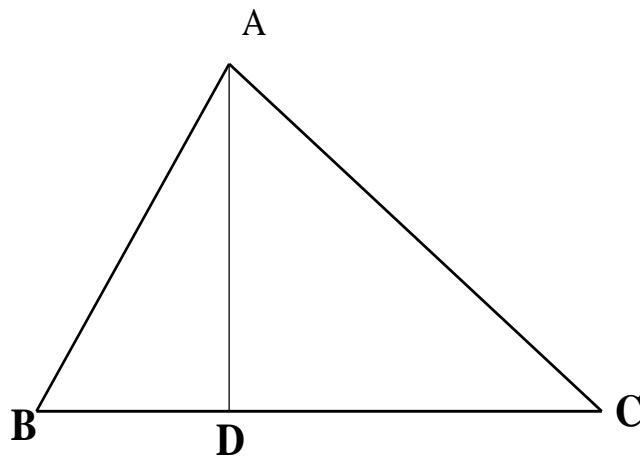


Figura 1.29: teorema lui Pitagora generalizată

Se înlocuiește în (1.43) AD și BD date de egalitățile (1.44) și (1.45)

$$AB^2 = AC^2 - DC^2 + (BC - DC)^2,$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC.$$

a) dacă unghiul \hat{B} este obtuz, atunci $B \in (DC)$. Egalitățile (1.43) și (1.44) rămân

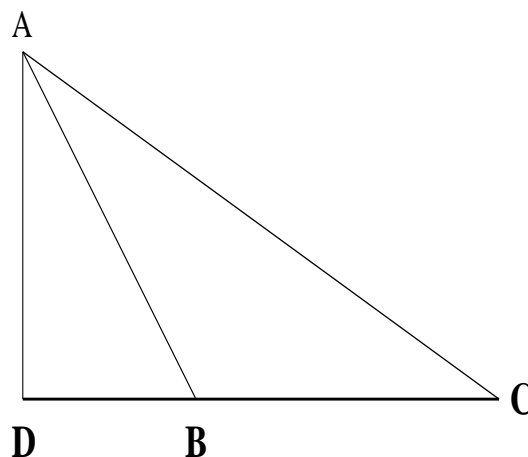


Figura 1.30: teorema lui Pitagora generalizată

adevărate și

$$BD = DC - BC. \tag{1.46}$$

Înlocuind în (1.43) AD și BD date de (1.44) și (1.46) se obține:

$$AB^2 = AC^2 - DC^2 + (DC - BC)^2,$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC.$$

c) pentru B unghi drept se aplică Pitagora.

q.e.d.

1.7.2 Relația lui Stewart

Teorema lui Stewart furnizează o relație între lungimile laturilor unui triunghi și lungimea segmentului care coboară dintr-un vârf la un punct de pe latura opusă.

TEOREMA 1.21 (TEOREMA LUI STEWART) Fie un triunghi ABC cu lungimile

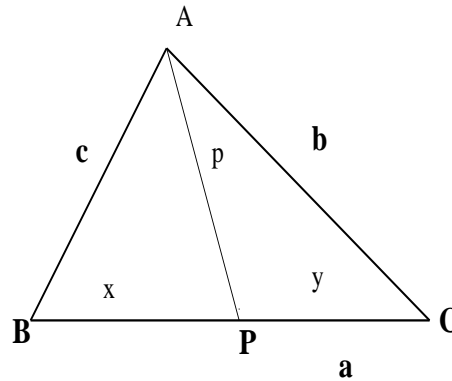


Figura 1.31: teorema Stewart

laturilor $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Fie P un punct pe latura $[BC]$ care divide latura în două segmente cu lungimile $BP = x$, $PC = y$. Lungimea segmentului AP o vom nota cu p . Atunci:

$$a(p^2 + xy) = b^2x + c^2y. \quad (1.47)$$

Demonstrație. Aplicăm teorema Pitagora generalizată în triunghiurile ABP și APC corespunzătoare unghiurilor suplementare APB , respectiv APC și adunăm relațiile obținute, dar nu înainte de a le înmulți cu y respectiv x .

q.e.d.

1.7.3 Teorema medianei

În geometria plană, teorema medianei stabilește o relație între lungimea unei mediane dintr-un triunghi și lungimile laturilor triunghiului. Teorema medianei este un caz particular al teoremei lui Stewart.

TEOREMA 1.22 Fie triunghiul ABC cu M mijlocul laturii (BC) . Atunci:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \quad (1.48)$$

unde $m_a = AM$, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

COROLARUL 1.1 Într-un triunghi dreptunghic lungimea medianei corespunzătoare unghiului drept este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

1.7.4 Relația lui Euler pentru patrulatere

TEOREMA 1.23 Fie patrulaterul $ABCD$, E mijlocul diagonalei AC și F mijlocul lui BD . Atunci:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2. \quad (1.49)$$

Relația (1.49) se numește relația lui Euler pentru patrulatere.

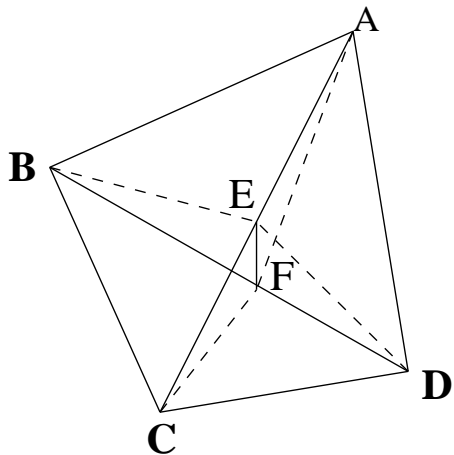


Figura 1.32: Relația Euler pentru patrulatere

Demonstrație. Se construiesc AF, FC, BE, DE . Vom folosi teorema medianei în:

- triunghiul ABD :

$$4AF^2 = 2(AB^2 + AD^2) - BD^2; \quad (1.50)$$

- triunghiul BCD :

$$4CF^2 = 2(BC^2 + CD^2) - BD^2; \quad (1.51)$$

- triunghiul ABC :

$$4BE^2 = 2(AB^2 + BC^2) - AC^2; \quad (1.52)$$

- triunghiul ADC :

$$4DE^2 = 2(AD^2 + CD^2) - AC^2; \quad (1.53)$$

- triunghiul AFC :

$$4EF^2 = 2(AF^2 + FC^2) - AC^2; \quad (1.54)$$

- triunghiul BED :

$$4EF^2 = 2(BE^2 + ED^2) - BD^2. \quad (1.55)$$

Se adună relațiile (1.50), (1.51), (1.52), (1.53) cu relațiile (1.54), (1.55) înmulțite cu 2 și se obține (1.49).

q.e.d.

Capitolul 2

Transformări geometrice

Istoria matematicii consemnează că transformările geometrice au fost folosite pentru obținerea primelor demonstrații ale unor teoreme de geometrie.

Astfel se afirmă că Thales din Milet a demonstrat prin suprapunerea figurilor, folosind ideea de mișcare, tradusă astăzi în aceea de transformare geometrică, teoremele: unghiurile opuse la vârf sunt congruente; unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt congruente; diametrul împarte cercul în două părți congruente ș.a.

Mai târziu, Aristotel a eliminat mișcarea din geometrie și deci și transformările geometrice, considerând obiectele matematicii ca entități abstracte. Această concepție a fost concretizată de Euclid prin celebra sa carte "Elementele", în care geometria este construită fără utilizarea ideii de mișcare pentru că aceasta nu poate exista, conform concepției lui Platon, Aristotel, Euclid, în lumea formelor ideale.

Pe aceeași linie s-a situat D. Hilbert în construcția sistemului cunoscut de axiome ale geometriei. El a înlocuit ideea de mișcare cu cea de figuri congruente.

Predarea geometriei în spiritul axiomaticii lui Hilbert sau a lui Birkhoff este implicată, indiscutabil, în diminuarea ponderii transformărilor geometrice în unele programe analitice și manuale.

Intuiția asigură înțelegerea de către elevi a noțiunilor de mișcare, suprapunere, transformare a figurilor, ceea ce favorizează înțelegerea ulterioară a unor concepte fundamentale din geometrie sau oferă o cale de a pătrunde în corpul teoremelor geometrice fără supoziții complicate, greu de explicat și de motivat. Acest fapt indică posibilitatea de a introduce în geometrie transformările geometrice.

Transformările geometrice sunt în esență funcții. Studiul lor este calea principală pe care noțiunea de funcție pătrunde în geometrie.

Deși transformările geometrice erau folosite de mult timp în rezolvarea unor probleme de geometrie, ele nu au fost gândite ca funcții decât relativ recent, când figurile geometrice au fost concepute ca mulțimi de puncte.

Ca orice alte funcții, transformările geometrice se pot compune. Există multe situații în care mulțimea transformărilor geometrice de un anumit tip este închisă

la compunere, formând un grup. Amintim grupul translațiilor, grupul rotațiilor de același centru, grupul asemănarilor. Așadar transformările geometrice furnizează exemple netriviiale de grupuri, fapt ce facilitează înțelegerea noțiunii abstracte de grup la algebra și care indică rolul integrator al transformărilor geometrice cu algebra abstractă.

Primele obiective operaționale care se urmăresc în predarea temei respective sunt:

- construirea imaginii unui punct printr-o anumită transformare geometrică;
- determinarea punctelor ce corespund printr-o transformare care duce o figură într-o altă figură;
- remarcarea elementelor care determină o transformare geometrică: centrul simetriei, centrul și unghiul rotației, etc.;
- construirea imaginii unei figuri printr-o transformare geometrică.

Prin atingerea acestor obiective elevii capătă deprinderea de a folosi transformările geometrice în rezolvarea problemelor.

În funcție de timpul disponibil, se poate aborda structura grupală a transformărilor geometrice și teoreme de exprimare a unor transformări geometrice ca o compunere de transformări mai simple. De exemplu, orice izometrie este compunerea a cel mult trei simetrii axiale.

O structură geometrică suficient de simplă și în același timp cu multe proprietăți este structura metrică a planului (spațiului) dată de distanța dintre două puncte. Această structură are și un accentuat caracter intuitiv, ceea ce permite utilizarea ei în clasele a VI-a și a VII-a. Transformările geometrice compatibile cu structura metrică sunt interesante și bogate în proprietăți. Două asemenea clase de transformări sunt studiate cu precădere: izometriile și asemănările.

Gândim spațiul fizic obișnuit ca o mulțime de elemente numite puncte, notat cu S .

Distanța este o aplicație, cu următoarele proprietăți:

1. $d(A, B) \geq 0$ și $d(A, B) = 0$ dacă și numai dacă $A \equiv B$;
2. $d(A, B) = d(B, A)$
3. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$, oricare ar fi punctele $A, B, C \in S$.

Aplicația $T : S \rightarrow S$ se numește **izometrie** dacă

$$d(TA, TB) = d(A, B),$$

adică păstrează distanța între puncte și se numește **asemănare** dacă

$$d(TA, TB) = k \cdot d(A, B),$$

adică multiplică distanța cu un factor real strict pozitiv k .

Orice izometrie este o asemănare particulară ($k = 1$).

Totuși în mod obișnuit, se face întâi studiul detaliat al izometriilor apoi cel al asemănărilor. Această ordonare pe lângă avantajul didactic evident de a se trece de la simplu la mai complicat este dictată și de faptul că orice asemănare este compunerea unei izometrie cu o omotetie (o asemănare particulară). Teoreme asemănătoare pentru izometrie, de exemplu, orice izometrie a planului care păstrează orientarea este sau o translație, sau rotație, sau simetrie centrală, respectiv, orice izometrie este compunerea a cel mult trei simetrii axiale ne arată că e recomandabilă mai întâi studierea izometriei particulare (simetria, translația, rotația), apoi trecerea la stabilirea proprietăților generale ale izometriilor.

În urma analizei modalităților de a concepe predarea transformărilor geometrice în diferite programe și manuale se pot distinge două puncte de vedere: sintetic și vectorial- analitic.

Conform primului, transformările geometrice se definesc în mod direct, cu elemente geometrice simple: puncte, drepte, plane, unghiuri și proprietățile lor se demonstrează geometric pe baza axiomelor și teoremelor simple de geometrie.

Al doilea punct de vedere se referă la introducerea transformărilor geometrice pe baza noțiunii de vector sau prin expresiile lor analitice, proprietățile obținându-se prin combinarea elementelor de algebră vectorială cu elemente de geometrie analitică.

În cele ce urmează vom explora succesiv ambele puncte de vedere pentru fiecare din izometriile remarcabile și apoi pentru asemănări.

2.1 Simetrii

În mod natural trebuie să începem cu studiul simetriilor în plan, apoi să trecem la spațiu.

Simetria față de un punct în plan

- Putem începe prin a cere elevilor (clasa a VI-a) să deseneze mai multe segmente care au același mijloc O . Ei desenează măsurând cu rigla sau eventual cu compasul (dacă sunt familiarizați cu acest instrument) o figură asemănătoare cu figura 2.1, care poate fi apoi prezentată și pe o planșă pregătită anterior.
- Cu notațiile introduse în figura 2.1, vom spune că A' este simetricul punctului A față de O , că B' este simetricul punctului B față de O , la fel C' este simetricul lui C față de O ș.a.m.d.
- Subliniem că O este mijlocul pentru segmentele AA' , BB' , CC' etc, și repetăm modul de construcție al punctelor A' , B' , etc.

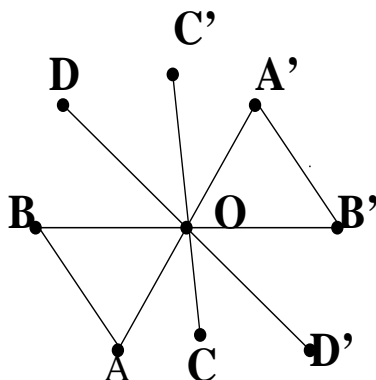


Figura 2.1: Simetria față de un punct

Fixăm apoi definiția formală:

simetricul unui punct M față de un punct O este un punct M' , astfel că O este mijlocul segmentului MM' ; simetricul lui O este O .

- Alternativ, pentru a pregăti ideea de funcție putem spune că oricărui punct M din plan putem să-i asociem un punct M' , simetricul său față de O ; lui O i se asociază O însuși.

Aici sau la o reluare într-o clasă superioară această asociere o vom numi simetrie de centru O și o vom nota prin S_O , pentru a indica centrul de simetrie, scriind $A' = S_O(A)$, $B' = S_O(B)$, etc.

- Revenind la figura 2.1, din paralelogramul $ABA'B'$ (diagonalele se înjumătățesc) constatăm că segmentul $A'B'$ este congruent cu segmentul AB , adică simetria față de O (numită și simetrie de centru O , sau simetrie centrală) este o izometrie.
- Spunem apoi că dreapta $A'B'$ este simetrica dreptei AB față de punctul O și subliniem că ea este paralelă cu dreapta AB . La fel dreapta $A'C'$ este simetrica dreptei AC față de O . Deci simetrica unei drepte față de un punct O se obține construind simetricile a două puncte distincte ale ei și apoi unindu-le.
- Observăm că dacă M' este simetricul față de O al punctului M , atunci simetricul față de O al punctului M' este chiar M .

Mai târziu vom scrie $S_O^2 = I$, unde I este transformarea identică a planului și vom spune că S_O este transformare involutivă.

- Fie acum d o dreaptă oarecare din plan. Dacă ea trece prin O , simetrica ei față de punctul O coincide cu ea ca mulțime (nu punct cu punct). Cu alte cuvinte, simetricul oricărui punct de pe d se află pe d . Vom spune că O situat pe d este centru de simetrie pentru figura formată din dreapta d .

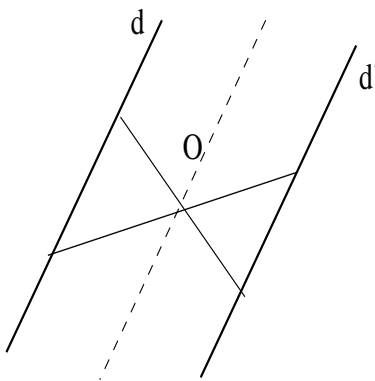


Figura 2.2: Simetrica unei drepte față de un punct

Presupunem că O nu este situat pe d . Simetrica dreptei d față de O este o dreaptă d' paralelă cu d . Figura $F = d \cup d'$ are proprietatea că simetricul oricărui punct al ei față de O este tot pe ea, figura 2.2. Vom spune că O este centru de simetrie al figurii F .

Cele observate pot fi formulate astfel:

DEFINIȚIA 2.1 Spunem că o figură F admite ca centru de simetrie un punct O , dacă simetricul față de O al oricărui punct al figurii F se află în F .

După cum am văzut mai sus:

-oricare punct al unei drepte este centru de simetrie pentru ea, adică dreapta are o infinitate de centre de simetrie.

Figura formată din două drepte care se intersectează în O are ca centru de simetrie pe O și numai pe el.

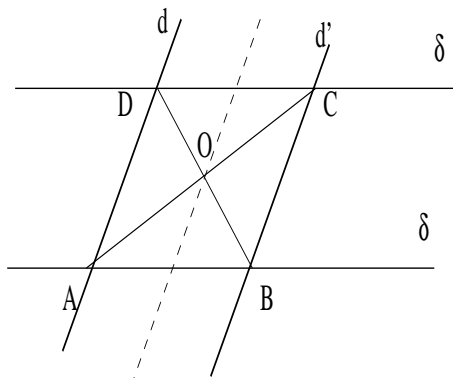


Figura 2.3: Centru de simetrie

Din figura 2.2 rezultă că figura formată din reunirea a două drepte paralele are o infinitate de centre de simetrie, situate pe o dreaptă. Reunind aceste două drepte

cu alte două drepte paralele între ele, dar formând un anumit unghi cu primele două obținem o figură cu un singur centru de simetrie (figura 2.3).

Rezultă că în particular, paralelogramul are un singur centru de simetrie.

Unghiul, înțeles ca reuniunea a două semidrepte cu originea comună, nu are centru de simetrie.

Centrele de simetrie sunt importante în aplicațiile geometriei în practică.

Într-o abordare vectorial-analitică a geometriei, simetria față de un punct O se poate defini astfel:

simetricul lui A față de O este un punct A' , astfel ca $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$.

Gândim simetria față de O direct ca aplicație: $A \rightarrow A'$, definită de relația vectorială de mai sus. Fie B' simetricul față de O al unui punct B diferit de A .

Egalitățile vectoriale

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{AB}$$

ne arată că simetria față de O păstrează coliniaritatea punctelor, duce o dreaptă într-o dreaptă paralelă cu ea și că este izometrie.

Remarcăm că relațiile vectoriale au avantajul de a da informații mai multe într-o formă condensată.

Pentru a deduce ecuațiile simetriei vom introduce un reper cartezian în plan. Cel mai simplu este să luăm originea sa în O .

Fie $A(x, y)$ și $A'(x', y')$. Relația vectorială de definire a simetriei față de O conduce la:

$$x = -x', \quad y = -y' \quad (2.1)$$

Aceste formule se numesc **ecuațiile simetriei** față de origine.

Rezultă că o figură din plan descrisă de o expresie algebrică $E(x, y)$ are originea ca centru de simetrie dacă și numai dacă $E(-x, -y) = E(x, y)$.

Dacă O are coordonate oarecare (x_0, y_0) , aceeași relație de definire a simetriei față de O conduce a formulele

$$x' = 2x_0 - x, \quad y' = 2y_0 - y. \quad (2.2)$$

Aceste formule pot fi luate ca definiție a simetriei centrale.

Simetria față de o dreaptă în plan

Pentru a introduce definiția acestei transformări geometrice la clasa a VI-a putem începe cu următoarea semiexperiență:

- în partea superioară a unei coli albe de hârtie se fac trei - patru pete mici de cerneală, apoi coala se îndoie. Petele de cerneală vor lăsa urme pe partea inferioară a colii.
- Dezdoim coala și unim cu o linie colorată fiecare pată cu urma lăsată de ea la îndoirea colii.
- Trasăm cu o altă culoare linia de îndoire a colii. Dreptele duse anterior vor intersecta linia de îndoire după niște puncte.
- Cerem elevilor să măsoare, pentru fiecare pată în parte, distanța de la ea și de la urma ei la dreapta de îndoire. Vor constata că aceste distanțe sunt aproximativ egale și că dreapta ce unește o pată cu imaginea ei (cu urma ei) este perpendiculară pe linia de îndoire a colii.
- Reprezentăm coala cu care am lucrat ca în figura 2.4, introducem notații și afirmăm că dreptele AA' , BB' , CC' și DD' sunt perpendiculare pe d și că

$$(AP) \equiv (PA'), (BQ) \equiv (QB'), (CR) \equiv (RC'), (DS) \equiv (SD').$$

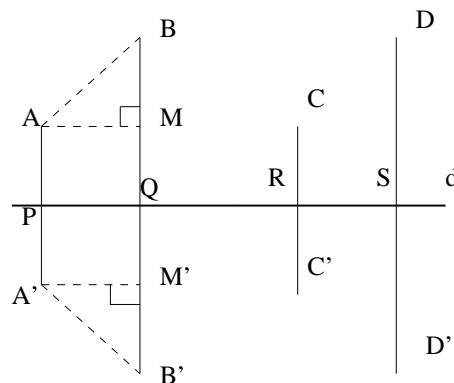


Figura 2.4: Simetria față de o dreaptă

Vom spune că A' este simetricul lui A față de dreapta d și că B' este simetricul lui B față de dreapta d , ș.a.m.d.

- Punctul A' se mai poate construi astfel:

Ducem din A perpendiculara pe d și prelungim segmentul (AP) cu un segment $(PA') \equiv (AP)$.

Precizăm apoi, dacă e cazul, cum se efectuează această construcție cu rigla și compasul.

- Se constată că simetricul oricărui punct față de dreapta d este unic determinat; simetricul unui punct de pe d față de d este el însuși.

Asociind unui punct din plan simetricul său față de dreapta d , obținem o funcție care va fi numită **simetria față de dreapta** d , notată cu S_d .

Dacă A' este simetricul lui A față de d , vom spune că și punctele A și A' sunt simetrice față de dreapta d , $A' = S_d(A)$.

- Din figura 2.4 rezultă că două puncte sunt simetrice față de dreapta d , dacă d este mediatoarea segmentului ce le unește. Această observație poate fi luată ca definiție.
- Completând figura 2.4 cu linii punctate, din două triunghiuri dreptunghice congruente constatăm că $AB = A'B'$.
Întrucât punctele A și B sunt arbitrare deducem că simetria față de o dreaptă este o izometrie.
- Studiem apoi imaginile printr-o simetrie față de o dreaptă dată (numită și **simetrie axială**) a diferitelor figuri geometrice, în funcție de cunoștințele elevilor la momentul respectiv. Remarcăm, unde este cazul, congruența elementelor ce corespund prin simetrie axială.

Revenind la figura 2.4, fixăm atenția asupra trapezului isoscel $B'B'AA$. Punctele de pe segmentul (AB) sunt duse prin S_d în puncte de pe $A'B'$, iar punctele de pe segmentul AA' sunt duse prin S_d în puncte de pe același segment. Similar pentru (BB') . Așadar, oricare punct de pe trapez are imaginea prin S_d tot pe trapez.

- Vom spune că trapezul în discuție are o axă de simetrie: dreapta d .

Fie un cerc de centru O și MN un diametru al său. Simetricul oricărui punct de pe cerc față de MN este pe cerc (diametrul este mediatoarea oricărei coarde perpendiculară pe el). Vom spune că diametrul MN este axă de simetrie a cercului dat.

- Orice diametru al cercului este axă de simetrie pentru cerc, deci cercul admite o infinitate de axe de simetrie.

Situațiile prezentate impun următoarea definiție.

DEFINIȚIA 2.2 *O figură plană F admite o axă de simetrie d , dacă simetricul oricărui punct din F față de d este în F .*

- Căutăm apoi alte figuri plane care admit axe de simetrie. În această căutare ne poate ajuta următoarea observație.

Observația 2.1 *Dacă F' este simetrica unei figuri F față de o dreaptă d , atunci figura $F \cup F'$ are ca axă de simetrie pe d .*

De exemplu, fie o dreaptă a care face un anumit unghi α (diferit de unghiul nul) cu d și o intersectează în O . Notăm cu a' simetrica ei față de d .

Dacă $\alpha = 90^\circ$, atunci a coincide cu a' și putem spune ca d este axă de simetrie pentru a . Rezultă că dreapta a are o infinitate de axe de simetrie: dreptele perpendiculare pe ea.

Un segment nenul are o singură axă de simetrie - mediatoarea sa;

axa de simetrie a unei semidrepte este perpendiculara pe ea în originea ei (în baza observației de mai sus).

Dacă măsura lui α este diferită de 90° , atunci $a \cup a'$ este figura formată din patru unghiuri opuse, două câte două, la vârf. Dreapta d apare ca axă de simetrie pentru două dintre ele, pentru care este și bisectoare. Rezultă că orice unghi are o axă de simetrie: bisectoarea sa.

Dacă presupunem acum că dreapta a este paralela cu d , atunci a' este și ea paralela cu d . Rezultă că figura formată din două drepte paralele admite o axă de simetrie.

Fie b și b' două drepte paralele și perpendiculare pe d . Axa lor de simetrie d' va fi perpendiculara pe d . Prin reunirea celor patru drepte a, a', b, b' obținem un dreptunghi completat cu niște semidrepte. Rezultă că figura are două axe de simetrie d și d' .

Orice dreptunghi are două axe de simetrie perpendiculare între ele.

- Prezentarea unor planșe cu figuri plane care admit axe de simetrie poate fi utilă.
- Rezolvarea unor probleme de geometrie prin folosirea simetriei față de o axă este pasul următor.

Simetria față de o dreaptă se pretează, ca și simetria centrală, la o tratare vectorială și analitică. Definiția ei vectorială se poate da folosind vectorul de direcție al dreptei (axei de simetrie). Proprietățile ei se demonstrează în mod specific.

Tratarea vectorială a simetriei axiale nu aduce simplificări. Dimpotrivă, în multe locuri apare complicată și artificială. Ea este recomandabilă numai dacă insistăm să tratăm unitar (vectorial în acest caz) toate transformările geometrice.

Analitic, prin introducerea unui reper în plan, putem exprima coordonatele simetricului unui punct dat față de o dreaptă d , în funcție de coordonatele punctului dat și de elementele care determină dreapta d . Formulele care se obțin sunt în general complicate și nu pot fi reținute. Excepție, face situația în care reperul se alege astfel încât dreapta d să fie una din axele de coordonate.

Dacă d coincide cu axa absciselor, ecuațiile simetriei S_d sunt:

$$x' = x, \quad y' = -y,$$

iar dacă d coincide cu axa ordonatelor obținem

$$x' = -x, \quad y' = y.$$

Aceste ecuații vor folosi la reprezentarea grafică a funcțiilor în studiul simetriilor graficului.

2.2 Translația

Această transformare geometrică este cu mult mai importantă decât simetriile, pentru că definirea și studiul ei impun conceptul de vector în forma sa riguroasă: clasă de segmente orientate echipolente (de aceeași lungime, aceeași direcție și același sens).

În general, în cărțile în care acest subiect se abordează, se introduce izomorfismul între grupul translațiilor (cu operația de compunere) și grupul aditiv al vectorilor.

Câteva observații se impun de la început.

Pentru noțiunea de vector cadrul cel mai convenabil este spațiul și nu planul. În consecință apare mai natural studiul translației ca transformare a spațiului. Vectorii dintr-un plan se vor identifica cu translațiile care duc planul în sine. Evident că această abordare este posibilă după ce elevii au anumite cunoștințe de geometria spațiului.

Intuitiv translația în spațiu se definește ca o transformare prin care toate punctele se deplasează în una și aceeași direcție, într-un sens dat, la aceeași distanță. Evident că este mai greu de sesizat deplasarea simultană a tuturor punctelor spațiului decât a unei submulțimi (figuri) a lui.

În consecință este mai bine să începem prin a spune că o figură F' s-a obținut dintr-o figură F printr-o translație dacă punctele ei s-au obținut din cele ale lui F prin deplasare în una și aceeași direcție, într-un sens dat, la aceeași distanță. Aceste aspecte intuitive se cer sprijinite de figuri variate. Credem că un scurt film de desene animate, bine realizat, ar putea fi util în sprijinirea intuiției elevilor.

O primă formalizare a considerațiilor intuitive se poate da astfel:

figurile F și F' corespund printr-o translație dacă oricare ar fi punctele P și Q distincte din F lor le corespund în mod unic punctele P' și Q' din F' , astfel încât segmentele (PP') și (QQ') să fie congruente, paralele și de același sens.

Ca aplicație a spațiului S pe el însuși, translația poate fi definită prin:

DEFINIȚIA 2.3 O aplicație

$$\tau : S \rightarrow S$$

se numește translație, dacă oricare ar fi punctele distincte

$$P, Q \in S, \quad P' = \tau(P), Q' = \tau(Q),$$

segmentele (PP') și (QQ') sunt congruente, paralele și de același sens.

Dacă R este un al treilea punct din S , diferit de P, Q și $R' = \tau(R)$, rezultă că segmentele (RR') , (PP') și (QQ') , sunt congruente între ele, paralele între ele și de același sens. Din definiția de mai sus rezultă că și figura $PP'Q'Q$ este un paralelogram, deci segmentele $(P'Q')$ și (PQ) sunt de asemenea paralele și congruente.

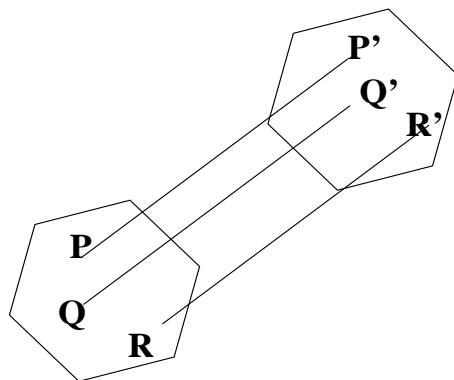


Figura 2.5: Translația

În concluzie, translația este o izometrie. Din proprietățile generale ale izometriilor rezultă că

- imaginea unei drepte d este o dreaptă d' , $\tau(d) = d'$, paralelă cu d ;
- imaginea unui segment printr-o translație este un segment;
- imaginea unui unghi printr-o translație este un unghi congruent cu el;
- imaginea unui triunghi printr-o translație este un triunghi congruent cu el;
- imaginea unui cerc cu centrul O și rază r printr-o translație este un cerc cu raza r și centrul în O' , translatatul lui O prin translația considerată;
- imaginea unui plan printr-o translație este un plan paralel cu el sau chiar el.

Compunerea a două translații τ și σ .

Pentru două puncte distincte P și Q din spațiu, notăm

$$P' = \tau(P), Q' = \tau(Q), P'' = \sigma(P'), Q'' = \sigma(Q').$$

Corespondența $P \rightarrow P''$, $Q \rightarrow Q''$ se bucură de proprietatea că segmentele (PP'') și (QQ'') sunt congruente, paralele și de același sens. Acest fapt rezultă ușor în urma analizei mai multor cazuri, de exemplu fig. 2.6, în care $\triangle PP'P'' \equiv \triangle QQ'Q''$ sunt congruente și au laturile respectiv paralele. Cum punctele P și Q erau arbitrare, considerațiile de mai sus pot fi aplicate la oricare alte perechi de puncte.

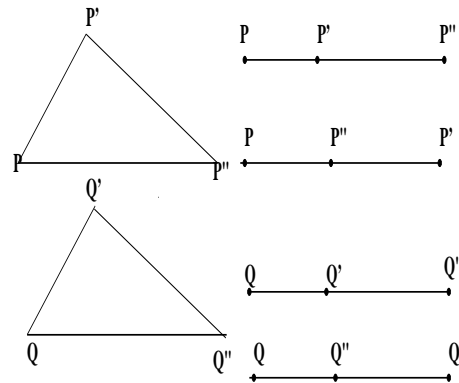


Figura 2.6:

Așadar, corespondența $P \rightarrow P''$, $Q \rightarrow Q''$ etc. definește o translație pe care o vom nota prin $\sigma \circ \tau$ și o vom numi compunerea translațiilor τ și σ .

Cu notațiile precedente avem $\sigma \circ \tau(P) = \sigma(\tau(P))$ pentru orice punct P din spațiu.

Fiind dată translația τ , definită de corespondența $P \rightarrow P'$, $Q \rightarrow Q'$ etc., se constată ușor că asocierea $P' \rightarrow P$, $Q' \rightarrow Q$, e.t.c. definește o translație pe care o vom nota cu τ^{-1} și o vom numi inversa translației τ .

Considerând aplicația identică drept translație particulară suntem în poziția de a pune în evidență grupul translațiilor spațiului.

Studiul translațiilor este incomplet fără a stabili legătura lor cu noțiunea de vector. În considerațiile de mai sus avem suficiente motive pentru introducerea noțiunii de vector. În definirea unei translații prin corespondența $P \rightarrow P'$, $Q \rightarrow Q'$ etc. subînțelegem că segmentele (PP') , (QQ') , (RR') etc. sunt perechi ordonate de puncte. Vom spune că segmentele în discuție sunt orientate, primul punct va fi numit origine și al doilea extremitate a segmentului orientat.

Recitind definiția translației constatăm că o translație este caracterizată de ceea ce au în comun segmentele orientate (PP') , (QQ') etc., adică lungime, direcție și sens.

DEFINIȚIA 2.4 Se numește vector o mulțime de segmente orientate care au aceeași lungime, aceeași direcție și același sens.

Vom nota vectorul prin $\overline{PP'}$ și vom spune că segmentul orientat (PP') este un reprezentant al vectorului $\overline{PP'}$. Oricare alt segment orientat din mulțimea respectivă reprezintă vectorul $\overline{PP'}$. Așadar o translație este caracterizată de un vector $\vec{u} = \overline{PP'}$ și în continuare vom indica translația prin vectorul ce o caracterizează, spunând: *translația de vector $\overline{PP'}$* .

Este cu totul natural să spunem că doi vectori sunt egali dacă mulțimile de segmente orientate care îi definesc sunt egale.

Considerăm translațiile τ și σ definite respectiv de vectorii $\overline{PP'}$ și $\overline{P'P''}$. Com-

pusa lor $\sigma \circ \tau$ este definită (caracterizată) de vectorul $\overline{PP''}$. Avem astfel posibilitatea unei perechi de vectori $\overline{PP'}$ și $\overline{P'P''}$ să asociem un al treilea vector $\overline{PP''}$, numit suma vectorilor $\overline{PP'}$ și $\overline{P'P''}$.

Este posibil să folosim o altă cale pentru introducerea noțiunii de vector, situația în care translația se definește astfel:

DEFINIȚIA 2.5 *Se numește translație de vector \bar{u} o aplicație*

$$T_{\bar{u}} : S \rightarrow S,$$

$$T_{\bar{u}}(P) = P' \text{ astfel ca } \overline{PP'} = \bar{u}$$

Se stabilesc apoi proprietățile translației folosind proprietăți ale vectorilor. Caracterizarea translației printr-un vector conduce imediat la teorema:

TEOREMA 2.1 *Date fiind două puncte distincte A și A' există o translație unică ce duce A în A' .*

Aceasta este evident translația de vector $\overline{AA'}$.

Considerațiile de mai sus pot fi repetate identic pentru un plan fixat. Obținem astfel noțiunea de translație în plan, cea de vector în plan. Alternativ, având noțiunile precedente în spațiu putem să ne punem problema restricției lor la un plan sau o dreaptă. Astfel translațiile care duc un plan π în sine se vor numi translații ale planului π . Corespunzător, doi sau mai mulți vectori sunt coplanari dacă există reprezentanți ai lor în același plan.

Pentru reprezentarea translației în coordonate considerăm un plan fixat în care am introdus un sistem cartezian de coordonate. Orice vector din plan este caracterizat de o pereche de numere reale.

Fie translația de vector $\bar{u} = (a, b)$ care aplică $P(x, y)$ în $P'(x', y')$. Așadar, avem $\overline{PP'} = \bar{u}$ sau $\overline{OP'} - \overline{OP} = \bar{u}$,

unde O este originea sistemului de coordonate.

Ultima relație vectorială este echivalentă cu relațiile:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ecuțiile (2.3) se numesc ecuațiile translației de vector \bar{u} . Ele pot fi luate și ca definiție a translației în plan.

2.3 Rotația în plan

Această transformare geometrică, relativ ușor de definit formal, are la bază un fond de reprezentări intuitive extrem de complex: cele care duc la ideea de cerc, cele referitoare la unghiuri și măsura unghiurilor, mișcarea de rotație tratată la fizică ș.a.

- Înainte de a introduce această temă trebuie să ne asigurăm că elevii posedă fondul necesar de reprezentări intuitive, întărindu-l și orientându-l spre abordarea temei în discuție. În acest caz sunt utile figuri convenabile și exemple simple de mișcări de rotație în jurul unui punct întâlnite curent de elevi (acele de ceasornic, roțile de transmisie, ...). Se pot de asemenea construi modele specifice care să reprezinte imaginile prin rotație ale unor figuri simple.
- Vom începe prin a considera rotația de un unghi dat în jurul unui punct dat a unei figuri geometrice simple. Cel mai simplu pare a fi să considerăm o semidreaptă de origine O și să discutăm despre rotațiile ei în jurul punctului O .

Fie deci semidreapta $(OA$ pe care o rotim în poziția $(OA'$. Înțelegem pentru moment cuvântul "rotim" în sens cinematic pe baza unor reprezentări intuitive. La rotirea semidreptei $(OA$ punctul A descrie un arc de cerc AA' , figura 8. Un alt punct M , de pe semidreapta $(OA$, în urma aceleiași rotații va ajunge în M' după ce descrie un arc de cerc MM' .

- Observăm că unghiurile $\widehat{AOA'} \equiv \widehat{MOM'}$ și congruente cu unghiul format de semidreptele $(OA$ și $(OA'$. În plus, segmentele (OA) și (OA') sunt congruente. La fel sunt și segmentele $(OM) \equiv (OM')$.

Dacă unghiul $\widehat{AOA'}$ are măsura α (grade) vom spune că A' a fost obținut din A printr-o rotație de unghi α în jurul punctului O . Similar s-a obținut M' din M . Semidreapta $(OA$ este obținută la fel. Vom nota această transformare prin \mathcal{R}_O^α

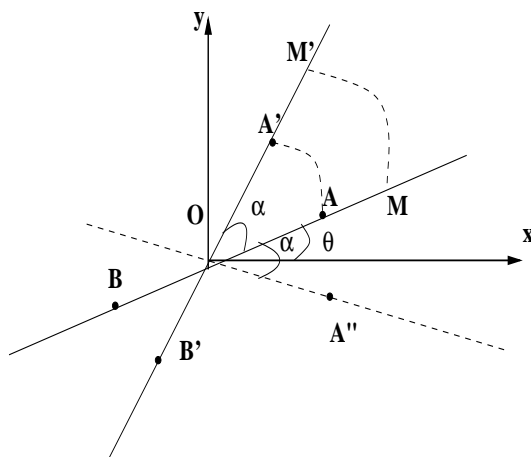


Figura 2.7: Rotația

și vom scrie $\mathcal{R}_O^\alpha(A) = A'$, $\mathcal{R}_O^\alpha(M) = M'$ etc.

Am obținut astfel o definiție a rotației în jurul unui punct, dar pe o figură care are mai multe particularități. Astfel pentru a obține semidreapta $(OA'$ am rotit semidreapta

(OA în sens invers acelor de ceasornic. Acest sens este cel uzual numit și sens direct trigonometric. Puteam să fi rotit (OA și în sensul acelor de ceasornic în poziția (OA'' . Completăm fig. 8 cu linii punctate. Alegem noua poziție încât unghiurile $\widehat{AOA'} \equiv \widehat{AOA''}$. Ele au aceeași măsură α , fapt care generează confuzie dacă luăm ca definiție a rotației pe cea dată mai sus. Trebuie ca în acea definiție să introducem elemente care să ne permită distingerea celor două sensuri de rotație. Se poate proceda astfel:

DEFINIȚIA 2.6 Spunem că unghiul $\widehat{AOA'}$ este orientat dacă perechea de semidrepte (OA și (OA' este ordonată.

Deci unghiul orientat $\widehat{AOA'}$ este diferit de unghiul orientat $\widehat{A'OA}$.

Vom spune că unghiul orientat $\widehat{AOA'}$ este orientat pozitiv dacă sensul de rotație de la semidreapta (OA spre semidreapta (OA' este opus mișcării acelor de ceasornic.

Dacă măsura unghiului neorientat $\widehat{AOA'}$ este α vom spune că măsura unghiului orientat $\widehat{AOA'}$ este α sau $-\alpha$, după cum el este orientat pozitiv sau negativ.

Amintim că mulțimea de valori a funcției măsură a unghiurilor este intervalul $[0^\circ, 180^\circ]$. Prin procedeul de mai sus am extins acest interval la $[-180^\circ, 180^\circ]$.

Rotațiile în același sens cu acele de ceasornic vor fi descrise de unghiuri negativ orientate, deci de măsuri în intervalul $[-180^\circ, 0^\circ]$.

Continuând rotația semidreptei (OA' după poziția (OA' în sens pozitiv ajungem în poziția (OB încât unghiul \widehat{AOB} este alungit (are măsura 180°)(figura 2.7). Putem continua rotația în același sens și ajungem, de exemplu, în poziția (OB' . Unghiul neorientat dintre (OA și (OB' este $180^\circ - \alpha$. Dar pentru a descrie rotația efectuată suntem obligați să folosim unghiul orientat \widehat{AOB} căruia este normal să-i asociem mărimea $180^\circ + \alpha$. Deci putem considera ca mulțime a valorilor pentru funcția-măsură a unghiurilor orientate intervalul $[-360^\circ, 360^\circ]$. Intuiția ne spune că obținem (OA' din (OA printr-o rotație de unghi $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$ ca în figura 8, dar și că aceeași semidreaptă poate fi obținută după ce (OA efectuează n rotații complete în jurul lui O și apoi o rotație de unghi α .

În al doilea caz vom spune că unghiul orientat $\widehat{AOA'}$ are măsură $\alpha + n \cdot 360^\circ$, dacă rotațiile sunt pozitive și are măsură $\alpha - n \cdot 360^\circ$, dacă rotațiile sunt negative. Putem așadar spune că măsură unui unghi orientat este $\alpha + k \cdot 360^\circ$ sau $\alpha + 2k \cdot \pi$ în radiani, unde k este un număr întreg.

DEFINIȚIA 2.7 Rotația de centru O și unghi orientat α a planului este o transformare a planului prin care O se transformă în el însuși și orice alt punct A se transformă într-un punct A' , astfel încât $(OA) \equiv (OA')$ și unghiurile α și $\widehat{AOA'}$ sunt congruente și au aceeași orientare.

Din punct de vedere cinematic este preferabil să indicăm rotația printr-un unghi de forma $\alpha + k \cdot 360^\circ$ cu $\alpha \in [-360^\circ, 360^\circ]$ pentru a citi câte rotații s-au efectuat și în ce sens, informații date de valoarea absolută și de semnul lui $k \in \mathbb{Z}$. Geometric, rotațiile de unghi $\alpha + k \cdot 360^\circ$ cu $k \in \mathbb{Z}$ coincid și în continuare ele vor fi identificate cu rotația de unghi α .

Este acum ușor să dovedim, folosind triunghiuri congruente, că:

PROPOZIȚIA 2.1 *Orice rotație în plan este o izometrie.*

Rezultă că o rotație:

- duce o dreaptă într-o dreaptă;
- duce o semidreaptă într-o semidreaptă;
- duce un unghi într-unul congruent cu el;
- duce un cerc cu centrul O și rază r într-un cerc cu aceeași rază și centrul în O' transformatul prin rotație al lui O .

Se pot demonstra următoarele afirmații:

- Compusa a două rotații de același centru \mathcal{R}_O^α și \mathcal{R}_O^β este rotația $\mathcal{R}_O^{\alpha+\beta}$.
- Inversa rotației \mathcal{R}_O^α este rotația $\mathcal{R}_O^{-\alpha}$.
- Mulțimea rotațiilor cu același centru împreună cu compunerea formează un grup.

Introducem în figura 2.7 un sistem cartezian de coordonate, încât unghiul între Ox și $(OA$ să fie θ . Dacă $A(x, y)$ și $A'(x', y')$, notând $OA = OA' = r$, obținem

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

și

$$x' = r \cos(\theta + \alpha), y' = r \sin(\theta + \alpha).$$

Folosind formule uzuale de trigonometrice, obținem

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.4)$$

Aceste formule, numite și reprezentarea analitică a rotației \mathcal{R}_O^α , ele pot fi luate ca definiție a rotației \mathcal{R}_O^α .

2.4 Proprietăți generale ale izometriilor

În majoritatea programelor analitice de geometrie din învățământul preuniversitar, după parcurgerea izometriilor particulare menționate mai sus, nu se mai găsește timp pentru noțiunea generală de izometrie și pentru câteva din proprietățile ei. Considerăm că această situație lipsește pe elevi de posibilitatea de a relua și aprofunda unele cunoștințe de bază din geometrie, de sinteza utilă în procesul de integrare a cunoștințelor la nivelul geometriei și cu alte discipline matematice studiate în școală.

Este necesar ca în clasele terminale de liceu, când noțiunea de funcție este pe deplin consolidată, să se rezerve un număr de 4-6 ore pentru tratarea proprietăților generale ale izometriilor, ocazie cu care să se reamintească izometriile particulare întâlnite în clasele anterioare. Schițăm mai jos o posibilitate de abordare a acestui subiect.

După actualizarea funcției distanță, definim noțiunea de izometrie. Proprietățile generale pe care le avem în vedere pot fi tratate direct în spațiu. Am definit anterior izometria ca aplicație care păstrează distanța. Din definiție rezultă că orice izometrie este bijectivă, dar surjectivitatea se demonstrează greoi, încât este de preferat să o introducem în definiție.

DEFINIȚIA 2.8 *O aplicație $f : S \rightarrow S$ a spațiului în el însuși se numește izometrie, dacă este surjectivă și păstrează distanța, adică*

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B), \quad \forall A, B \in S. \quad (2.5)$$

TEOREMA 2.2 *Orice izometrie a spațiului este bijectivă și inversa ei este de asemenea izometrie.*

Demonstrație. Într-adevăr, $f(A) = f(B)$ implică $d(A, B) = 0$, de unde $A = B$, adică f este injectivă.

Dacă $f(A) = A'$ și $f(B) = B'$ atunci $f^{-1}(A') = A$, $f^{-1}(B') = B$ și (2.5) se rescrie

$$d(f^{-1}(A'), f^{-1}(B')) = d(A', B'),$$

deci f^{-1} este izometrie.

q.e.d.

Definiția precedentă se poate formula pentru un plan și orice izometrie a planului este bijectivă, inversa ei fiind izometrie.

Amintim acum că fiind date trei puncte distincte A, B, C în spațiu se spune că punctul B este între A și C dacă și numai dacă

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C).$$

Se mai spune că B este interior segmentului (AC) .

TEOREMA 2.3 Fie $f : S \rightarrow S$ o izometrie a spațiului. Dacă punctul B este între A și C , atunci $f(B)$ este între punctele $f(A)$ și $f(C)$ și reciproc.

Ipotezele conduc imediat la relația

$$d(f(A), f(B)) + d(f(B), f(C)) = d(f(A), f(C)).$$

Folosind această teoremă, se demonstrează că orice izometrie a spațiului transformă:

- orice segment (AB) în segmentul $(f(A)f(B))$, astfel încât se păstrează ordinea punctelor;
- orice semidreaptă $(AB$ în semidreapta $(f(A)f(B))$ astfel încât se păstrează ordinea punctelor;
- orice dreaptă AB în dreapta $f(A)f(B)$ astfel încât se păstrează ordinea punctelor;
- orice plan π în planul $f(\pi)$;
- orice semiplan închis (deschis) de frontieră AB într-un semiplan închis (deschis) de frontieră $f(A)f(B)$;
- orice unghi \widehat{AOB} în unghiul $f(A)\widehat{f(O)}f(B)$ congruent cu \widehat{AOB} ;
- orice semispațiu închis (deschis) de frontieră π în semispațiul închis (deschis) de frontieră $f(\pi)$;
- orice unghi diedru $\widehat{\alpha d\beta}$ în unghiul diedru $f(\alpha)\widehat{f(d)}f(\beta)$ congruent cu $\widehat{\alpha d\beta}$, unde α, β sunt plane și $\alpha \cup \beta$;
- orice cerc $C(O, r)$ (orice disc $D(O, r)$) în cercul $C(f(O), r)$ (în discurile $D(f(O), r)$);
- orice sferă $S(O, r)$ în sfera $S(f(O), r)$.

Demonstrarea acestor rezultate este o ocazie excelentă de a reactualiza și aprofunda noțiuni geometrice mai rar utilizate la nivel logic (semidreaptă, semiplan, semispațiu etc.).

Din proprietățile de mai sus rezultă că orice izometrie a spațiului păstrează (invariantă):

- paralelismul și perpendicularitatea planelor și dreptelor;
- paralelismul și perpendicularitatea dintre drepte și plane.

TEOREMA 2.4 *Mulțimea izometriilor spațiului S formează un grup în raport cu operația de compunere.*

Apare aici ocazia de a repeta noțiunea de grup, de compunere a aplicațiilor cu proprietatea ei de asociativitate.

Ne limităm acum la izometrii plane.

TEOREMA 2.5 *Fie două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ în planul π , astfel că*

$$(AB) \equiv (A'B'), \quad (BC) \equiv (B'C'), \quad (CA) \equiv (C'A').$$

Atunci există o unică izometrie $f : \pi \rightarrow \pi$ astfel ca $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

Ideea de demonstrație este de a defini f pentru A , B și C ca mai sus, de a o extinde mai întâi la dreptele AB și AC , apoi la întreg planul. Unicitatea se demonstrează prin reducere la absurd.

Această teoremă combinată cu observația că orice izometrie transformă un triunghi într-un triunghi congruent cu el ne conduce la concluzia: *două triunghiuri dintr-un plan dat sunt congruente dacă și numai dacă există o izometrie a planului care transformă un triunghi în celălalt.*

Din considerațiile de mai sus rezultă că, interpretată ca o aplicație între vârfurile a două triunghiuri indicată prin ($'$), congruența este restricția unei izometrii a planului. Avem aici o motivare a termenului de congruență folosit uneori pentru izometrie. Este acum natural să extindem termenul de congruență la figuri oarecare spunând că figura F este congruentă cu figura F' dacă există o izometrie f (a planului dacă figurile sunt plane), astfel că $f(F) = F'$.

Această definiție poate fi utilă în considerarea funcției arie pentru figuri plane mai complicate decât suprafețele poligonale.

2.5 Asemănarea în plan. Proprietăți generale

Elevii obțin o idee despre figurile asemenea cu ocazia studiului temei *Asemănarea triunghiurilor*. Dintre multele variante de tratare a ei este de preferat una care pregătește terenul pentru predarea asemănării ca transformare geometrică a planului (spațiului). Considerăm că această temă se poate studia imediat după studiul proprietăților generale ale izometriilor în maniera descrisă de noi mai sus.

Transformarea de asemănare poate fi introdusă prin generalizarea izometriei. Izometria este transformarea geometrică ce păstrează distanța.

Putem considera, teoretic vorbind, transformări geometrice care multiplică distanța cu un factor. Cum distanțele se exprimă prin numere reale pozitive, factorul de multiplicare trebuie să fie în mod necesar un număr real strict pozitiv.

DEFINIȚIA 2.9 O aplicație $a_k : \pi \rightarrow \pi$ a planului se numește **asemănare de raport k** , unde k este un număr real strict pozitiv dacă este surjectivă și pentru oricare două puncte A și B din π avem

$$d(a_k(A), a_k(B)) = k \cdot d(A, B). \quad (2.6)$$

Numărul k trebuie luat strict pozitiv pentru că dacă ar fi zero, din (2.6) ar rezulta $a_0(A) = a_0(B)$ pentru oricare două puncte A, B .

Deci aplicația a_0 este o aplicație constantă, care nu este surjectivă.

Mulțimea asemănarilor planului nu este vidă, deoarece conține izometriile planului, obținute pentru $k = 1$.

Din relația (2.6) rezultă că orice asemănare a planului este injectivă, iar fiind prin definiție surjectivă, este bijectivă. Se demonstrează ușor că inversa unei asemănări de raport k este o asemănare de raport $\frac{1}{k}$.

Menționăm că (2.6) asigură și surjectivitatea aplicației a_k . Considerând aplicația identică asemănare particulară, se constată că mulțimea asemănarilor planului formează un grup în raport cu compunerea aplicațiilor.

Asocierea $a_k \rightarrow k$ este un izomorfism al acestui grup cu grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive.

Asemănările au multe proprietăți similare cu cele ale izometriilor.

TEOREMA 2.6 Fie a_k o asemănare de raport k , atunci punctul B se află între A și C , dacă și numai dacă punctul $a_k(B)$ se află între $a_k(A)$ și $a_k(C)$.

Modul de transformare a figurilor din plan prin asemănare este identic cu cel descris la izometrii, cu modificarea evidentă că un cerc $C(O, r)$, respectiv un disc $D(O, r)$ este transformat prin a_k într-un cerc $C(O, kr)$, respectiv un disc $D(O, kr)$, adică raza se multiplică cu factorul k .

Orice asemănare transformă drepte paralele în drepte paralele și că asemănările păstrează raportul lungimilor segmentelor.

Legătura cu asemănarea triunghiurilor se stabilește prin

TEOREMA 2.7 Dacă $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$ sunt două triunghiuri oarecare în planul π astfel încât

$$d(A', B') = k \cdot d(A, B), d(B', C') = k \cdot d(B, C), d(C', A') = k \cdot d(C, A)$$

unde k este un număr real strict pozitiv, atunci există o asemănare de raport k a planului π unică a_k încât

$$a_k(A) = A', a_k(B) = B', a_k(C) = C'.$$

Din observația că orice triunghi este transformat printr-o asemănare într-un triunghi asemenea cu el și teorema precedentă rezultă:

două triunghiuri sunt asemenea dacă și numai dacă există o asemănare care să transforme unul în celălalt.

O primă consecință a acestui fapt este aceea că, întrucât în planul euclidian există triunghiuri asemenea necongruente, există asemănări ale planului care nu sunt izometrii.

O altă consecință rezidă în motivația următoarei definiții:

DEFINIȚIA 2.10 Două figuri F și F' ale planului π se numesc asemenea cu coeficientul de asemănare k dacă există o asemănare a_k a planului π , încât $a_k(F) = F'$.

2.6 Omotetia în plan

Asemănarea particulară cea mai importantă, lăsând la o parte izometria, este omotetia de centru dat și raport dat.

Definiția sintetică a omotetiei poate fi introdusă foarte devreme în forma:

DEFINIȚIA 2.11 Fie O un punct într-un plan π și k un număr real strict pozitiv. Omotetia de centru O și raport k este o transformare a planului π care asociază fiecărui punct M un punct M' , astfel că O, M și M' sunt coliniare în ordinele $O - M - M'$ sau $O - M' - M$ și $OM' = k \cdot OM$.

Evident că ordinea $O - M - M'$ atrage $k > 1$, iar ordinea $O - M' - M$ atrage $k < 1$. Pe de altă parte, există și posibilitatea de a lua ordinele $M - O - M'$ sau $M' - O - M$. Acest fapt ne determină să numim transformarea definită mai sus omotetie de gen 1, iar transformarea în care apar ordinele $M - O - M'$, sau $M' - O - M$, să o numim omotetie de gen 2.

Cu această definiție, considerând pe rând ordinele posibile, se pot demonstra principalele proprietăți ale omotetiei.

Ordinea de abordare a lor ar putea fi următoarea:

- asocierea $M' \rightarrow M$ este omotetie de centru O și raport $\frac{1}{k}$. Ea este inversa omotetiei de centru O și raport k ;

- omotetia de raport k și centru O multiplică distanța între puncte prin factorul k ;
- omotetia transformă o dreaptă ce trece prin O în ea însăși, cu alte cuvinte, omotetiile de centru O invariază dreptele prin O ;
- omotetia de centru O transformă o dreaptă d ce nu trece prin O într-o dreaptă d' paralelă cu d ;
- omotetia de centru O și raport k transformă un cerc $C(P_0, r)$ într-un cerc $C(P_0^1, kr)$ unde P_0^1 este omoteticul lui P_0 .

TEOREMA 2.8 *Orice asemănare este produsul dintre o omotetie și o izometrie.*

Demonstrație. Dacă a_k este o asemănare de raport k și $h_O^{\frac{1}{k}}$ este o omotetie de raport $\frac{1}{k}$ și centrul O un punct oarecare, atunci $f = a_k \circ h_O^{\frac{1}{k}}$ este o asemănare de raport $k \cdot \frac{1}{k} = 1$, deci este o izometrie. Relația de mai sus conduce la $a_k = f \circ h_O^k$.
q.e.d.

Pe de altă parte, omotetia este foarte utilă în rezolvarea problemelor de geometrie, fapt bine cunoscut și care se poate constata din numeroase culegeri de probleme de geometrie. Din acest motiv, considerăm că omotetia trebuie studiată înaintea asemănării și chiar înaintea tratării izometriei în general.

Cu aceste puține cunoștințe privind omotetia putem să rezolvăm multe probleme interesante de geometrie. De exemplu, putem obține majoritatea rezultatelor privind configurația *Cercul lui Euler* prin considerarea omotetiei inverse de centru G (centrul de greutate al triunghiului) și raport $\frac{1}{2}$.

Ultimele două proprietăți ale omotetiei, menționate mai sus, permit abordarea unei clase mari de probleme de loc geometric, dacă sunt reformulate după cum urmează:

- Locul geometric al punctului M' , omoteticul punctului într-o omotetie de centru O și raport k , este o dreaptă d' , când M descrie o dreaptă d . Dacă d trece prin O , avem $d' = d$, iar în caz contrar avem $d' \parallel d$.
- Locul geometric al punctului M' , omoteticul punctului M într-o omotetie de centru O și raport k , este un cerc $C(P_0^1, kr)$, când M descrie cercul $C(P_0, r)$, unde P_0^1 este omoteticul lui P_0 .

În momentul în care elevii dispun de noțiunea de vector se poate trata omotetia cu metode vectoriale. Însăși definiția ei devine mai ușoară pentru că noțiunea de vector ne permite să surprindem simultan situațiile de ordonare a punctelor întâlnite anterior.

DEFINIȚIA 2.12 Fie O un punct în planul π și k un număr real nenul. Omotetia de centru O și raport k este o transformare a planului care aplică un punct M într-un punct M' dat de formula

$$\overline{OM'} = k \cdot \overline{OM}.$$

În această definiție cuprindem omotetiile de ambele genuri (cele de gen 1 corespund la k pozitiv, iar cele de gen 2 la k negativ). Demonstrațiile proprietăților menționate mai sus se simplifică pentru că nu trebuie să mai distingem cele două genuri de omotetie, dar ideile sunt în esență aceleași.

În acest context vectorial putem să ne ocupăm de următoarele două proprietăți ale omotetiilor:

- Mulțimea omotetiilor de același centru formează un grup comutativ izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale nenule.
- Produsul a două omotetii h_O^k și $h_{O'}^{k'}$ este o omotetie având centrul coliniar cu O și O' , dacă $k \cdot k' \neq 1$ și este o translație de vector $\overline{OO'}$ dacă $k \cdot k' = 1$. Ca aplicație se poate demonstra teorema lui Menelaus.

Omotetia în spațiu se poate prezenta similar. Definiția vectorială rămâne practic aceeași. Proprietățile anterioare rămân valabile. La ele se pot adăuga următoarele:

- omotetia spațiului invariază dreptele și planele care trec prin centrul omotetiei;
- omotetia spațiului transformă un plan care nu trece prin centru de omotetie într-un plan paralel cu el;
- omotetia spațiului de centru O și raport k transformă o sferă $S(P_0, r)$ într-o sferă $S(P_0^1, kr)$ unde P_0^1 este omoteticul lui P_0 .

Aplicațiile omotetiei în spațiu sunt analoage cu cele ale omotetiei plane.

Revenim la plan.

Fie un punct fix O și o omotetie h_O^k . Introducem în plan un reper cartezian oarecare față de care avem $O(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ și omoteticul său $M'(x', y')$. Condiția $\overline{OM'} = k \cdot \overline{OM}$ este echivalentă cu

$$\begin{cases} x' = x_0 + k(x - x_0) \\ y' = y_0 + k(y - y_0). \end{cases} \quad (2.7)$$

Aceste ecuații se numesc ecuațiile omotetiei h_O^k în raport cu reperul cartezian ales. Ele pot fi luate ca definiție a omotetiei în plan și utilizate pentru a demonstra proprietățile esențiale ale omotetiilor. Pentru a facilita asemenea demonstrații putem alege reperul cu originea în O , deci $x_0 = 0$ și $y_0 = 0$.

De exemplu, dacă M parcurge dreapta de ecuație $ax + by + c = 0$, atunci coordonatele lui M' satisfac ecuația $ax + by + ck = 0$, deci M' parcurge o dreaptă paralelă cu cea dată.

Similar, dacă M se află pe cercul de ecuație $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, coordonatele lui M' verifică ecuația $(x - ka)^2 + (y - kb)^2 = (kr)^2$. Deci, M' se află pe cercul de rază kr și de centru omotetic cu centrul cercului dat.

Analog se pot demonstra alte proprietăți ale omotetiei.

2.6.1 Folosirea omotetiei la rezolvarea unor probleme de loc geometric

În aplicații intervine în mod frecvent următoarea problemă de loc geometric.

Problemă

Se dau cercul $C(O, R)$, unde O este un punct fix și punctul I de asemenea fixat, iar P un punct variabil pe cerc. Se cere să se determine locul geometric al punctului $M \in IP$, dacă raportul $\frac{MI}{IP} = k$ este cunoscut, k fiind un număr pozitiv fixat.

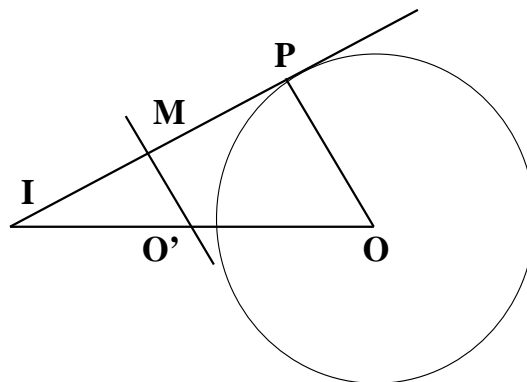


Figura 2.8:

Construim paralela $MO' \parallel PO$, $O' \in IO$. Atunci

$$\frac{O'I}{IO} = \frac{MI}{IP} = k, \quad \frac{MO'}{PO} = \frac{MI}{IP} = k,$$

și cum segmentele IO , PO au lungimea constantă, rezultă că punctul O' este fix, iar segmentul MO' are lungimea constantă.

Locul geometric este cercul cu centrul O' și rază MO' (omoteticul cercului dat sau transformatul acestuia prin omotetia de centru I și raport k).

Ca exemplu în acest sens poate servi *Cercul lui Euler*, cercul care trece prin mijloacele unui triunghi ABC , prin picioarele înălțimilor sale și prin mijloacele segmentelor AH , BH , CH , H fiind ortocentrul triunghiului. (Cercul celor 9 puncte)

2.7 Inversiunea în plan

O altă transformare geometrică foarte utilă în rezolvarea problemelor de geometrie este inversiunea. Înainte de introducerea definiției inversiunii în plan bine să se reamintească puterea unui punct față de un cerc, pornind de la următoarele rezultate:

Fie $C(O, r)$ un cerc în planul π , cu centrul în punctul fixat O și rază r .

- Oricare ar fi punctele $A, B, A', B' \in C(O, r)$ cu proprietatea că dreptele AB și $A'B'$ se intersectează într-un punct P are loc egalitatea:

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'.$$

Se demonstrează ușor din proporționalitatea laturilor triunghiurilor asemenea $\triangle PAB'$ și $\triangle PA'B$.

- Dacă o secantă variabilă trece printr-un punct fix P și intersectează un cerc $C(O, r)$ în punctele A și B , atunci produsul

$$PA \cdot PB = ct$$

este constant.

DEFINIȚIA 2.13 *Se numește putere a punctului P față de cercul $C(O, r)$, numărul notat*

$$\rho(P) = PA \cdot PB$$

unde A și B sunt punctele de intersecție ale unei secante duse prin P cu cercul $C(O, r)$.

- se definește astfel o funcție $\rho : \pi \rightarrow R$, definită prin

$$\rho(P) = PA \cdot PB$$

unde A și B sunt punctele de intersecție ale unei secante duse prin P cu cercul $C(O, r)$.

- puterea unui punct față de un cerc ne indică poziția punctului față de cerc:

1. $P \in \text{Ext}(C(O, r))$ dacă și numai dacă $\rho(P) > 0$;
2. $P \in C(O, r)$ dacă și numai dacă $\rho(P) = 0$;
3. $P \in \text{Int}(C(O, r))$ dacă și numai dacă $\rho(P) < 0$.

- puterea unui punct P față de un cerc este

$$\rho(P) = (OP)^2 - r^2.$$

Putem prezenta aceste rezultate și vectorial dacă elevii cunosc elementele de calcul vectorial. De asemenea definiția inversiunii poate fi dată mai ușor.

Fie $O \in \pi$ un punct fix și k un număr real nenul.

DEFINIȚIA 2.14 *Inversiunea de pol O și raport k este o transformare a planului prin care fiecărui punct $X \in \pi - \{O\}$ i se asociază punctul X' pe dreapta OX astfel încât*

$$\overline{OX} \cdot \overline{OX'} = k$$

iar punctului O i se asociază punctul O .

Inversiunea de pol O și raport k se notează i_O^k . Punctul O se numește polul inversiunii.

Așadar

$$i_O^k : \pi \rightarrow \pi$$

$$i_O^k(X) \in OX, \quad \overline{OX} \cdot \overline{O i_O^k(X)} = k, \quad \forall X \in \pi.$$

Punctul $X' = i_O^k(X)$ se numește transformatul punctului X prin inversiunea de pol O și raport k sau inversul punctului X prin această inversiune și vice-versa X este inversul punctului X' prin i_O^k .

Punctele X și $i_O^k(X)$ se numesc puncte omoloage ale inversiunii i_O^k .

Astfel se pune în evidență că:

- inversiunea este o transformare involutivă

$$i_O^k \circ i_O^k = 1_\pi$$

- inversiunea este inversabilă și $(i_O^k)^{-1} = i_O^k$
- punctul O este invariant în raport cu inversiunea i_O^k și toate dreptele care trec prin O sunt drepte invariante în raport cu inversiunea i_O^k .

DEFINIȚIA 2.15 *Dacă $k > 0$ inversiunea i_O^k se numește pozitivă, iar dacă $k < 0$ inversiunea i_O^k se numește negativă.*

Vom prezenta în continuare câteva propoziții care ne dau imaginile unui cerc și unei drepte din plan printr-o inversiune.

TEOREMA 2.9 *Dacă i_O^k este o inversiune pozitivă, atunci i_O^k invariază punct cu punct cercul $C(O, \sqrt{k})$ și transformă interiorul cercului $C(O, \sqrt{k})$ în exteriorul lui și exteriorul cercului $C(O, \sqrt{k})$ în interiorul lui.*

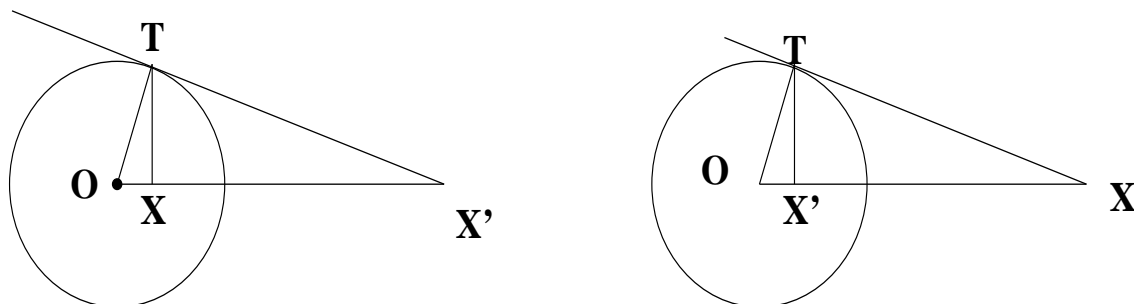


Figura 2.9:

Demonstrație.

Într-adevăr pentru orice $X \in C(O, \sqrt{k})$ are loc $\overline{OX} \cdot \overline{OX} = (\sqrt{k})^2 = k$ și deci $i_O^k(X) = X$ pentru orice $X \in C(O, \sqrt{k})$. Adică $i_O^k(C(O, \sqrt{k})) = C(O, \sqrt{k})$. Fie acum $X \in \text{Int}(C(O, \sqrt{k}))$. Construim perpendiculara pe dreapta OX prin punctul X și fie T unul din punctele de intersecție al acestei perpendiculare cu cercul $C(O, \sqrt{k})$. Tangenta în punctul T la cercul $C(O, \sqrt{k})$ intersectează dreapta OX în punctul X' .

Din teorema catetei aplicată în triunghiul OTX' (figura) rezultă $\overline{OX} \cdot \overline{OX'} = (\sqrt{k})^2 = k$ și deci $i_O^k(X) = X'$.

Dacă $X \in \text{Ext}(C(O, \sqrt{k}))$ construim tangenta XT la cercul $C(O, \sqrt{k})$. $T \in C(O, \sqrt{k})$ (figura) și X' piciorul perpendicularei din T pe dreapta OX . Teorema catetei în OTX ne dă $\overline{OX'} \cdot \overline{OX} = (\sqrt{k})^2 = k$ și deci $i_O^k(X') = X$. **q.e.d.**

Din această teoremă rezultă o metodă practică de construcție a imaginii $i_O^k(X)$ unui punct X prin inversiunea i_O^k , $k > 0$.

DEFINIȚIA 2.16 Pentru i_O^k o inversiune pozitivă, cercul $C(O, \sqrt{k})$ se numește cercul inversiunii i_O^k sau cercul de inversiune.

DEFINIȚIA 2.17 Două cercuri secante se numesc ortogonale dacă tangenta într-un punct comun la unul dintre cercuri trece prin centrul celuilalt.

TEOREMA 2.10 Un cerc diferit de cercul de inversiune este invariant în raport cu inversiunea dacă și numai dacă este ortogonal cu cercul de inversiune.

PROPOZIȚIA 2.2 Orice două perechi de puncte omoloage într-o inversiune sunt așezate pe un cerc, dacă nici unul dintre puncte nu este polul inversiunii.

Se pot demonstra următoarele rezultate:

- printr-o inversiune orice cerc care nu conține polul inversiunii se transformă într-un cerc care de asemenea nu conține polul inversiunii;

- printr-o inversiune i_O^k orice patru puncte situate pe un cerc care conține polul O al inversiunii se transformă în patru puncte situate pe o dreaptă care nu conține polul inversiunii.
- printr-o inversiune orice dreaptă care nu conține polul inversiunii se transformă într-un cerc care conține polul inversiunii.
- dacă cercul $C(O_2, r_2)$ este imaginea cercului $C(O_1, r_1)$ prin inversiunea i_O^k , atunci $\frac{r_2}{r_1} = \frac{k}{\rho(O)}$, unde $\rho(O)$ este puterea polului O în raport cu cercul $C(O_2, r_2)$.

DEFINIȚIA 2.18 Unghiul a două cercuri care se intersectează în punctele A și B este unghiul format de cele două tangente la cercuri în A sau B .

DEFINIȚIA 2.19 Unghiul dintre o dreaptă și un cerc pe care-l intersectează în A și B este unghiul format de dreaptă și una dintre tangentele la cerc în A sau B .

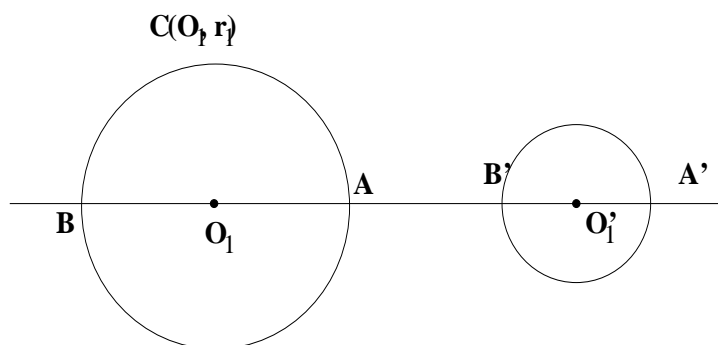


Figura 2.10: Inversul unui cerc care nu trece prin polul inversiunii O

Într-o inversiune sunt invariante:

- unghiul a două cercuri secante;
- unghiul dintre o dreaptă și un cerc pe care-l intersectează;
- unghiul a două drepte secante.

TEOREMA 2.11 Mulțimea tuturor omotetiilor și a inversiunilor planului, care au același centru formează un grup.

DEFINIȚIA 2.20 Grupul format din omotetiile și inversiunile planului cu același centru și pol O se numește grupul conform de centru O al planului.

Construcția cu rigla și compasul a imaginii unui cerc printr-o inversiune i_O^k se face astfel:

- cercul $C(O_1, r_1)$ nu trece prin polul inversiunii i_O^k . În acest caz fie A și B punctele de intersecție ale dreptei OO_1 cu cercul $C(O_1, r_1)$ (figura 2.10). Construim punctele $A' = i_O^k(A)$ și $B' = i_O^k(B)$. Inversul cercului $C(O_1, r_1)$ prin inversiunea i_O^k este cercul de diametru $[A'B']$.

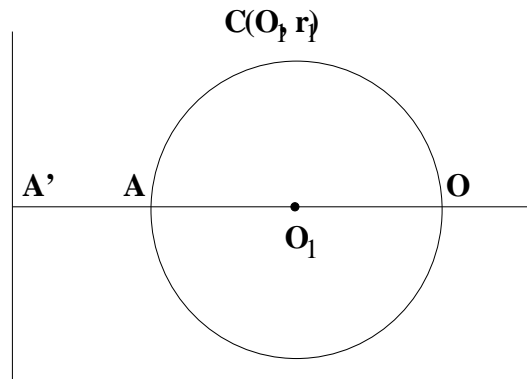


Figura 2.11:

- cercul $C(O_1, r_1)$ trece prin polul inversiunii i_O^k . În acest caz imaginea cercului $C(O_1, r_1)$ prin inversiunea i_O^k este o dreaptă. Fie A al doilea punct de intersecție al dreptei OO_1 cu cercul $C(O_1, r_1)$ (figura 2.10). Construim imaginea punctului A prin inversiunea i_O^k și vom obține $A' = i_O^k(A) \in OO_1$. Perpendiculara pe OO_1 în A' este imaginea cercului $C(O_1, r_1)$ prin inversiunea i_O^k .

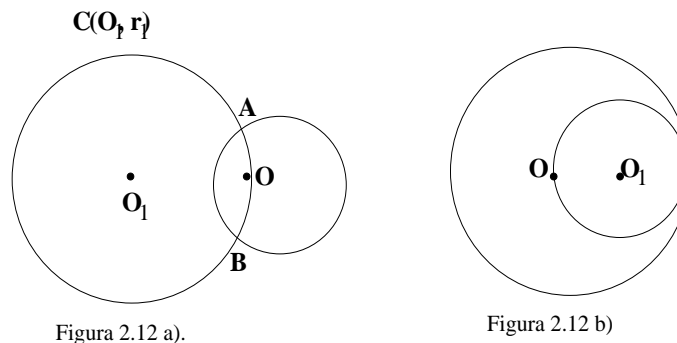


Figura 2.12 a).

Figura 2.12 b)

Figura 2.12:

Dacă cercul $C(O_1, r_1)$ intersectează cercul de inversiune în punctele A și B , atunci $AB = i_O^k(C(O_1, r_1))$ (figura 2.11), iar dacă cercul $C(O_1, r_1)$ este tangențial la cercul de inversiune, atunci $i_O^k(C(O_1, r_1))$ este tangențial la cercul de inversiune în punctul de tangență al celor două cercuri. (figura 2.12)

Capitolul 3

Geometrie în spațiu

3.1 Introducere în geometria tetraedrului

Se poate defini tetraedrul ca un caz particular al piramidei:

DEFINIȚIA 3.1 Fie $S = [A_1A_2 \dots A_n]$ o suprafață poligonală cu frontiera un poligon aparținând unui plan π și $V \notin \pi$. Se numește piramidă cu vârful V și bază S mulțimea tuturor segmentelor $[VA]$, cu $A \in S$.

Suprafața poligonală S se numește baza piramidei.

- În funcție de natura poligonului S se pot întâlni mai multe tipuri de piramide.
- Se pune în evidență faptul că o piramidă triunghiulară se numește tetraedru.
Deci, tetraedrul este o piramidă particulară, cu poligonul S un triunghi.

Dar putem defini direct tetraedrul:

DEFINIȚIA 3.2 Fie punctele A, B, C, D patru puncte necoplanare din spațiu. Mulțimea $ABCD = [ABC] \cup [ABD] \cup [ACD] \cup [BCD]$ se numește tetraedru.

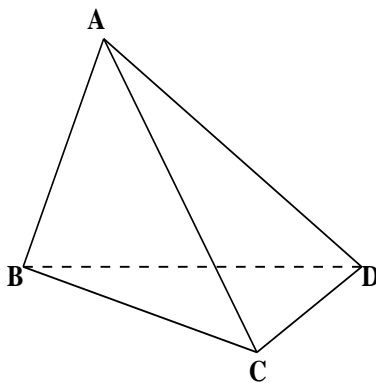


Figura 3.1: Tetraedrul ABCD

- Punctele A, B, C, D se numesc vârfurile tetraedrului $ABCD$;
- Segmentele închise $[AB], [AC], [AD], [BD], [BC], [CD]$ definesc muchiile tetraedrului;
- Suprafețele triunghiulare $[ABC], [ABD], [ACD], [BCD]$ se numesc fețele tetraedrului;
- Folosind materialul didactic elevii vor constata că în cazul tetraedrului fiecare față poate fi considerată bază și când așezăm un tetraedru oarecare cu o altă față ca bază el capătă de fiecare dată alt aspect.
- Analogie între triunghi și tetraedru: tetraedrul este poliedrul cu cel mai mic număr de fețe așa cum triunghiul este poligonul cu cel mai mic număr de laturi.

DEFINIȚIA 3.3 Numim înălțime a unui tetraedru perpendiculara dusă dintr-un vârf al tetraedrului pe fața opusă.

Spre deosebire de cazul triunghiului (ale cărui înălțimi sunt întotdeauna concurente), înălțimile unui tetraedru nu sunt întotdeauna concurente!

În general cele patru înălțimi ale unui tetraedru sunt două câte două necoplanare și sunt generatoarele unui hiperboloid (J. STEINER-1827), numit hiperboloidul înălțimilor. Acestui hiperboloid îi aparțin perpendicularele ridicate pe planele fețelor tetraedrului care trec prin ortocentrele acestor fețe.

DEFINIȚIA 3.4 Într-un tetraedru numim bimediană segmentul care unește mijloacele a două muchii opuse.

Orice tetraedru are șase muchii, deci există trei bimediane.

PROPOZIȚIA 3.1 Într-un tetraedru oarecare cele trei bimediane sunt concurente.

Demonstrație. În tetraedrul $ABCD$ considerăm punctele M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor $[AB], [CD], [BC], [AD], [AC], [BD]$ respectiv. Vom demonstra că bimedianele $[MN], [PQ], [RS]$ sunt concurente.

În triunghiurile BAC și DAC care au latura comună $[AC]$ sunt puse în evidență liniile mijlocii $[MP]$ și $[QN]$, care corespund laturii comune.

Deci:

$$MP \parallel QN \text{ și } MP = QN.$$

$$\text{Analog: } PN \parallel MQ \text{ și } PN = MQ$$

$$PS \parallel QR \text{ și } PS = QR.$$

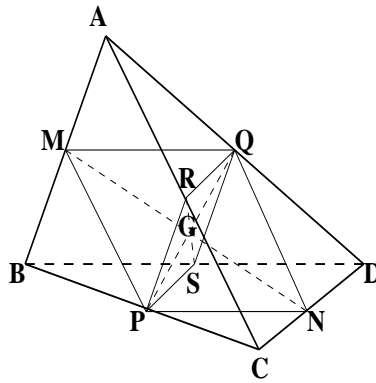


Figura 3.2: Concurența bimedienelor

Rezultă că patruleterele $PRQS$, $MPNQ$ sunt paralelograme și mai mult cele trei bimediane $[MN]$, $[PQ]$, $[RS]$ ale tetraedrului sunt diagonale în aceste paralelograme.

Cum diagonalele unui paralelogram sunt concurente și se înjumătățesc, cele trei bimediane $[MN]$, $[PQ]$, $[RS]$ ale tetraedrului $ABCD$ sunt concurente, punctul de concurență este notat cu G și este mijlocul fiecărei bimediane. **q.e.d.**

DEFINIȚIA 3.5 (LEONARDO DA VINCI)

Punctul de concurență al bimedienelor, notat cu G , se numește **centrul de greutate, sau centrul distanțelor medii, sau baricentrul tetraedrului.**

PROPOZIȚIA 3.2 Fie $ABCD$ un tetraedru, $M \in (AB)$ cu $\frac{AM}{AB} = u$, $0 < u < 1$ și $N \in (CD)$ astfel încât $\frac{CN}{CD} = 1 - u$. Atunci au loc următoarele inegalități:

$$|u \cdot BC - (1 - u) \cdot AD| < MN < u \cdot BC + (1 - u) \cdot AD, \quad (3.1)$$

$$|u \cdot BD - (1 - u) \cdot AC| < MN < u \cdot BD + (1 - u) \cdot AC.$$

Demonstrație.

Fie $P \in (AC)$ astfel încât $MP \parallel BC$ (fig. 3). Din teorema fundamentală a asemanarii avem $MP = u \cdot BC$ și $\frac{PC}{AC} = 1 - u$.

Cum $\frac{CN}{CD} = 1 - u$, vom obține $PN \parallel AD$ și în consecință din triunghiurile asemenea CPN și CAD se obține $PN = (1 - u) \cdot AD$. Deoarece punctele M, P, N nu pot fi coliniare, din inegalitățile triunghiului obținem

$$|MP - PN| < MN < MP + PN$$

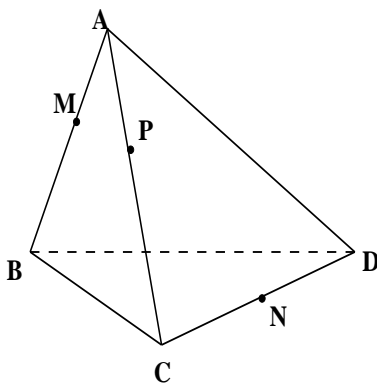


Figura 3.3:

sau după înlocuiri, avem

$$|u \cdot BC - (1 - u) \cdot AD| < MN < u \cdot BC + (1 - u) \cdot AD.$$

Procedând la fel obținem și al doilea grup de inegalități.

q.e.d.

COROLARUL 3.1 (Inegalitățile bimediane).

Fie $ABCD$ un tetraedru, M mijlocul lui $[AB]$ și N mijlocul lui $[CD]$; atunci

$$|BC - AD| < 2MN < BC + AD, \quad |BD - AC| < 2MN < BD + AC. \quad (3.2)$$

Demonstrație.

Luând $u = \frac{1}{2}$ în (3.1) vom găsi aceste inegalități.

q.e.d.

DEFINIȚIA 3.6 Într-un tetraedru $ABCD$, dreptele care unesc punctele A, B, C, D cu centrele de greutate ale fețelor opuse se numesc **medianele** tetraedrului $ABCD$.

TEOREMA 3.1 Cele patru mediane ale unui tetraedru sunt concurente.

Demonstrație.

Fie G_1 punctul de intersecție al medianelor triunghiului BCD . Se notează cu M, N, P, Q mijloacele segmentelor $[AB], [CD], [BC], [AD]$, figura (3.3).

În planul (APD) , $PQ \cap AG_1 \neq \emptyset$.

În planul paralelogramului $MPNQ$, $MN \cap PQ \neq \emptyset$.

În planul (ANB) , $NM \cap AG_1 \neq \emptyset$. Deci dreptele MN, PQ, AG_1 , se intersectează două câte două și nu sunt coplanare. Rezultă că

$$MN \cap PQ \cap AG_1 \neq \emptyset,$$

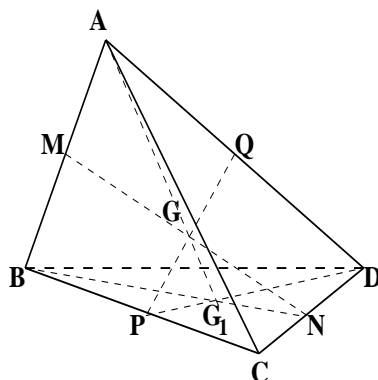


Figura 3.4: Concurența medianelor

deci $G \in AG_1$.

Notăm cu G_2 punctul de intersecție al medianelor triunghiului ACD , iar G_3 pentru triunghiul ABD . Analog se demonstrează BG_2 și CG_3 trec prin G .

q.e.d.

PROPOZIȚIA 3.3 (LEONARDO DA VINCI) Centrul de greutate al unui tetraedru împarte o mediană în două segmente, dintre care cel care conține vârful tetraedruului este triplul celuilalt.

Demonstrație. Se consideră separat planul (APD) , figura (3.4). Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul AG_1D , pentru dreapta Q, G, P se obține:

$$\frac{AQ}{QD} \cdot \frac{PD}{PG_1} \cdot \frac{GG_1}{GA} = 1$$

Dar $AQ = QD$ și $PD = 3PG_1$, de unde rezultă că $\frac{GG_1}{GA} = \frac{1}{3}$ sau $\frac{GG_1}{AG_1} = \frac{1}{4}$.

q.e.d.

- Un plan arbitrar, care trece printr-o mediană, împarte tetraedrul în două poliedre cu volume egale (J. L. LAGRANGE, 1810-1811).

PROPOZIȚIA 3.4 Planele perpendiculare pe muchiile unui tetraedru duse prin mijloacele lor se intersectează într-un punct.

Demonstrație.

Vom demonstra că există un punct egal depărtat de toate vârfurile tetraedruului.

Știm că toate punctele egal depărtate de B, C și D se află pe o dreaptă d perpendiculară pe planul BCD care trece prin centrul cercului circumscris triunghiului BCD .

Punctele egal depărtate de A și B se află în planul mediator P al segmentului AB .

Planul P și dreapta d se intersectează într-un punct O , căci altfel ar fi paralele și segmentul AB ar fi în planul BCD , contrar ipotezei. **q.e.d.**

COROLARUL 3.2 *Perpendicularele ridicate pe fețele unui tetraedru în centrele cercurilor circumscrise acelor fețe sunt concurente într-un punct, O .*

Demonstrație.

Aceste perpendiculare sunt determinate de intersecțiile perechilor de plane perpendiculare pe muchiile unui tetraedru duse prin mijloacele lor și conform propoziției anterioare sunt concurente. **q.e.d.**

Astfel am demonstrat că punctul O din propoziția de mai sus este egal depărtat de vârfurile tetraedrului și el este centrul unei sfere care conține vârfurile tetraedrului, care se numește **sfera circumscrisă tetraedrului**.

Deci:

Orice tetraedru poate fi înscris într-o sferă, care are centrul în punctul de intersecție al planelor mediatoare ale muchiilor tetraedrului și care este în același timp și punctul de intersecție al perpendicularelor ridicate pe fețele tetraedrului în centrele cercurilor circumscrise acestora.

DEFINIȚIA 3.7 *Numim **coordonate baricentrice** ale punctului P , patru numere $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ care sunt proporționale cu volumele tetraedrelor cu vârful în P și având drept baze fețele tetraedrului.*

Deci, dacă μ este factorul de proporționalitate, atunci avem:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \mu V,$$

V fiind volumul tetraedrului.

Pentru $\mu = 1$ coordonatele baricentrice se numesc *absolute*.

- Segmentele de dreaptă care unesc centrul de greutate al tetraedrului, G , cu vârfurile tetraedrului împart tetraedul în patru tetraedre echivalente: din această cauză coordonatele baricentrice ale lui G sunt egale.
- Distanțele lui G la fețele tetraedrului sunt invers proporționale cu ariile acestor fețe.

PROPOZIȚIA 3.5 (lungimea medianei)

Fie tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$, AG_1 o mediană a tetraedrului, unde G_1 este centrul de greutate al feței $A_2A_3A_4$. Atunci

$$A_1G_1^2 = \frac{A_1A_2^2 + A_1A_3^2 + A_1A_4^2}{3} - \frac{A_2A_3^2 + A_2A_4^2 + A_3A_4^2}{9}.$$

Demonstrație.

Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru cu G_1 centrul de greutate al feței $A_2A_3A_4$, iar M mijlocul laturii A_3A_4 . Vom aplica relația lui Stewart în triunghiul A_1A_2M :

$$A_2M(A_1G_1^2 + A_2G_1 \cdot G_1M) = A_1M^2 \cdot A_2G_1 + A_1A_2^2 \cdot G_1M,$$

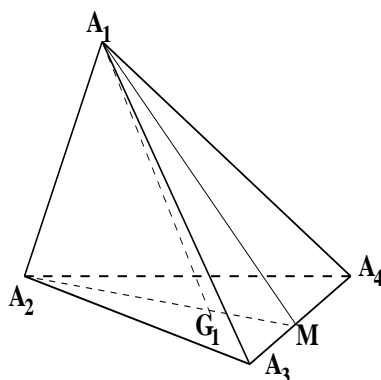


Figura 3.5: lungimea medianelor

în care vom folosi expresiile date de teorema medianei aplicată în triunghiul $A_1A_3A_4$ pentru mediana A_1M și în triunghiul $A_2A_3A_4$ pentru mediana A_2M . Se obține astfel lungimea medianei tetraedrului. **q.e.d.**

Observația 3.1 Propoziția (3.5) este analoagă teoremei medianei unui triunghi.

PROPOZIȚIA 3.6 (lungimea bimediei) Fie tetraedrul oarecare $ABCD$, M mijlocul muchiei AB și M' mijlocul muchiei opuse CD . Atunci:

$$MM'^2 = \frac{BC^2 + BD^2 + AC^2 + AD^2 - AB^2 - CD^2}{4}. \quad (3.3)$$

Demonstrație.

Aplicăm teorema medianei pentru MM' , mediană a triunghiului ABM' .

BM' este mediană în triunghiul BCD și AM' este mediană în triunghiul ACD , unde pentru calculul lor vom folosi tot teorema medianei. **q.e.d.**

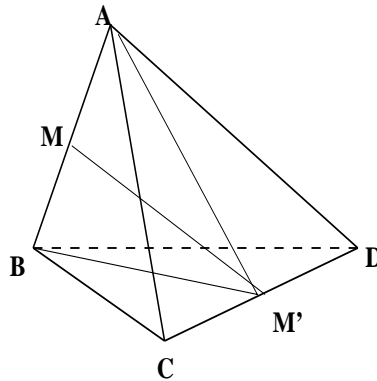


Figura 3.6: lungimea bimedianelor

Folosind lungimea bimedianelor unui tetraedru se poate demonstra imediat:

PROPOZIȚIA 3.7 Fie tetraedrul oarecare $ABCD$, M, N, P, Q, R, S mijloacele muchiilor $[AB], [CD], [BC], [AD], [AC], [BD]$ respectiv. Atunci:

$$MN^2 + PQ^2 + RS^2 = \frac{AB^2 + BC^2 + AD^2 + AC^2 + BD^2 + CD^2}{4}.$$

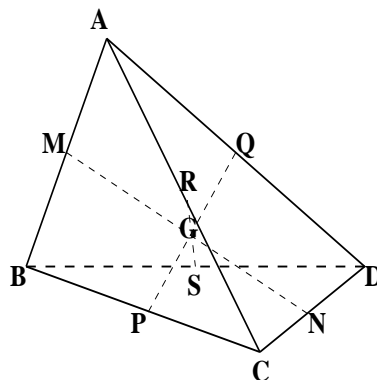


Figura 3.7:

PROPOZIȚIA 3.8 Suma pătratelor medianelor este egală cu $\frac{4}{9}$ din suma pătratelor muchiilor.

Demonstrație. Se folosesc lungimile medianelor unui tetraedru, conform propoziția anterioară și se obține relația anunțată. **q.e.d.**

PROPOZIȚIA 3.9 Suma pătratelor distanțelor centrului de greutate la vârfuri este egală cu suma pătratelor lungimilor bimedianelor.

PROPOZIȚIA 3.10 Fie BCD un triunghi și M un punct oarecare în spațiu, iar G_1 centrul de greutate al triunghiului BCD . Atunci are loc relația lui Leibniz:

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3MG_1^2 + G_1B^2 + G_1C^2 + G_1D^2. \quad (3.4)$$

Demonstrație. Fie S, T, R respectiv mijloacele laturilor CD, BD, BC ale triunghiului DBC . Aplicăm teorema lui Stewart în triunghiul MBS , se obține:

$$MB^2 \frac{BS}{3} + MS^2 \frac{2BS}{3} = MG_1^2 \cdot BS + \frac{BS}{3} \frac{2BS}{3} BS,$$

care se poate scrie:

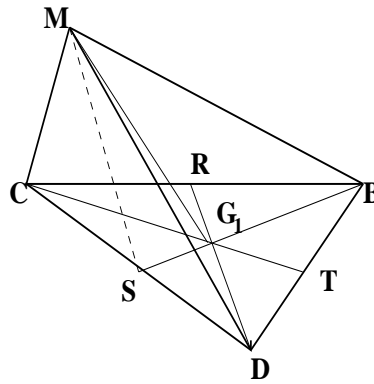


Figura 3.8:

$$MB^2 + 2MS^2 = 6SG_1^2 + 3MG_1^2. \quad (3.5)$$

În triunghiul MDS lungimea medianei MS este

$$4MS^2 = 2(MC^2 + MD^2) - DC^2. \quad (3.6)$$

Din (3.5) și (3.6) se obține:

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3MG_1^2 + 6G_1S^2 + \frac{1}{2}DC^2. \quad (3.7)$$

În triunghiul G_1DC , G_1S este mediană, deci:

$$4G_1S^2 = 2(G_1D^2 + G_1C^2) - DC^2. \quad (3.8)$$

Din (3.7) și (3.8) se obține:

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3MG_1^2 + 4G_1S^2 + G_1D^2 + G_1C^2.$$

Dar $2G_1S = G_1B$ și se obține relația din enunț.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 3.11 (J. L. LAGRANGE)

Fie $ABCD$ un tetraedru și G centrul său de greutate, iar M un punct oarecare din spațiu. Atunci are loc relația:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

Demonstrație. Notăm cu G_1 centrul de greutate al feței BCD . Aplicăm relația lui Stewart în triunghiul MAG_1 :

$$MA^2 + 3MG_1^2 = 4MG^2 + 12GG_1^2. \quad (3.9)$$

Prin aplicarea propoziției 3.10 se obține:

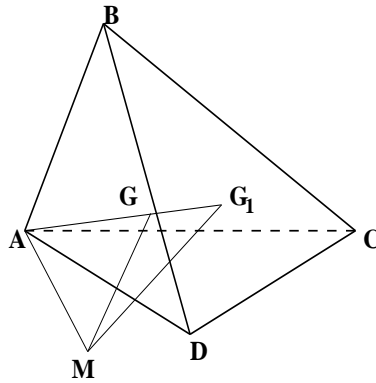


Figura 3.9:

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG_1^2 + G_1B^2 + G_1C^2 + G_1D^2. \quad (3.10)$$

Din relațiile (3.9) și (3.10) se obține:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + 12G_1A^2 + G_1B^2 + G_1C^2 + G_1D^2. \quad (3.11)$$

În propoziția 3.10, cu $M = G$, se obține:

$$GB^2 + GC^2 + GD^2 = 3GG_1^2 + G_1B^2 + G_1C^2 + G_1D^2.$$

Ținând seama că $3G_1G = GA$, relația (3.11) devine:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

q.e.d.

Observația 3.2 Folosind această proprietate se obține că suma pătratelor distanțelor lui G la cele patru vârfuri este minimă.

Observația 3.3 *Relația din propoziția 3.11 este generalizarea relației*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

valabilă pentru un triunghi ABC , G centrul de greutate al triunghiului, M un punct oarecare din planul triunghiului.

Au fost demonstrate următoarele afirmații:

- Locul geometric al punctelor P a căror sumă a pătratelor distanțelor la vârfurile tetraedrului este constantă, este o sferă cu centrul în centrul de greutate al tetraedrului G . (J. L. LAGRANGE).
- Centrul de greutate G al tetraedrului nu trebuie confundat cu centrul de greutate al suprafeței tetraedrului, în schimb acesta este centrul sferei înscrise în tetraedrul care are drept vârfuri centrele de greutate ale fețelor tetraedrului dat. (C. C. GERONO; 1826-1827).

PROPOZIȚIA 3.12 *Planele care trec prin mijloacele muchiilor și sunt perpendiculare pe muchia opusă, sunt concurente într-un punct M (G. MONGE-1813), numit punctul lui MONGE sau anticentrul tetraedrului.*

Demonstrație. Fie L și L' mijloacelor laturilor AB și CD în tetraedrul $ABCD$.

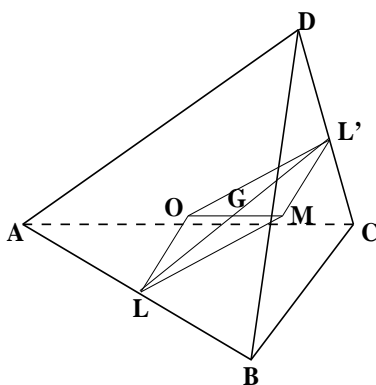


Figura 3.10:

Bimediana LL' trece prin centrul de greutate al tetraedrului G și $GL = GL'$. Planul care trece prin L și este perpendicular pe muchia AB trece prin centrul sferei circumscrise tetraedrului, punctul O . Deci planul care trece prin L' și este de asemenea perpendicular pe AB conține punctul M al dreptei OG caracterizat prin $OG = GM$.

În baza acestui raționament, punctul M se află și în celelalte plane care trec prin mijlocul uneia dintre laturile tetraedrului și sunt perpendiculare pe muchia opusă.

q.e.d.

Anticentrul unui tetraedru este un punct simetric cu centrul sferei circumscrise tetraedrului, în raport cu centrul de greutate al acestuia. Punctul lui Monge (anticentrul) al tetraedrului este centrul hiperboloidului înălțimilor.

- Centrul sferei circumscrise aparține dreptei care unește centrul de greutate G cu punctul lui MONGE M , și el este simetricul punctului M față de G . (G. MONGE-1813).

PROPOZIȚIA 3.13 *Planele bisectoare ale diedrelor unui tetraedru sunt concurente.*

Punctul de intersecție al acestor plane bisectoare, notat cu I este egal depărtat de fețele tetraedrului. Există o sferă de centru I tangentă celor patru fețe ale tetraedrului, având punctele de contact cu fețele proiecțiile lui I pe aceste plane. Sfera cu centrul în I este sfera cu centrul în I , raza ei o vom nota cu r .

TEOREMA 3.2 (P. FERMAT) *Cele patru bisectoare ale triedrelor unui tetraedru sunt concurente.*

Dacă se consideră fețele tetraedrului $ABCD$ prelungite atunci planele bisectoare ale diedrelor suplimentare cu muchiile AB, AC, BC întâlnesc bisectoarea Δ_D într-un punct I_d egal depărtat de fețele tetraedrului, dar exterior lui. I_d este centrul sferei S_d exînscrie tetraedrului $ABCD$ corespunzătoare triedrului D . În mod analog se obțin sferele exînscrie S_a, S_b, S_c corespunzătoare triedrelor cu vârfurile A, B, C ale căror centre se notează cu I_a, I_b, I_c și au razele r_a, r_b, r_c .

Au loc următoarele relații:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_d} = \frac{2}{r};$$

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r_d \geq 16r^4.$$

PROPOZIȚIA 3.14 *Planele care trec printr-o muchie a tetraedrului (T) și care sunt paralele cu muchia opusă, determină un paralelipiped circumscris tetraedrului: patru dintre vârfurile acestui paralelipiped sunt vârfuri ale tetraedrului; celelalte patru vârfuri determină un alt tetraedru care are același centru de greutate G cu (T), care este simetricul lui (T) față de G , și sfera circumscrisă acestui al doilea tetraedru are drept centru punctul lui MONGE al primului tetraedru (A. JACOBI).*

DEFINIȚIA 3.8 *Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru. Un punct T cu proprietatea*

$$\widehat{A_iTA_j} = \widehat{A_kTA_l}, \quad \forall i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$$

se numește centrul izogon sau punctul lui Torricelli al tetraedrului.

Observația 3.4 *Punctul lui Torricelli al tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ este caracterizat de următoarea proprietate vectorială:*

$$\frac{\overline{TA_1}}{TA_1} + \frac{\overline{TA_2}}{TA_2} + \frac{\overline{TA_3}}{TA_3} + \frac{\overline{TA_4}}{TA_4} = 1.$$

Unul dintre cele cinci poliedre regulate ale lui PLATON este tetraedrul și de el s-a ocupat și EUCLID în Elementele sale (în Cartea a XIII-a).

DEFINIȚIA 3.9 *Un tetraedru cu toate muchiile congruente se numește tetraedru regulat.*

1. Tetraedrul regulat are toate fețele triunghiuri echilaterale congruente.
2. Înălțimea tetraedrului regulat cade în centrul feței opuse, care este la intersecția înălțimilor feței.
3. Tetraedrul regulat are 4 înălțimi congruente.
4. Într-un tetraedru regulat unind centrele fețelor se obține un nou tetraedru regulat.

Volumul tetraedrului regulat este

$$V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}. \quad (3.12)$$

3.2 Tetraedre Crelle

În general nu există o sferă care să fie tangentă la toate muchiile unui tetraedru (T). Cu toate acestea, pentru unele tetraedre particulare o astfel de sferă există.

TEOREMA 3.3 *(Teorema lui CRELLE) Fiind dat un tetraedru ABCD există o sferă tangentă celor șase muchii ale tetraedrului, dacă și numai dacă are loc condiția:*

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC.$$

Demonstrație.

” \Rightarrow ” Implicația este evidentă datorită proprietății de congruență a tangentelor dintr-un punct exterior.

\Leftarrow ” Presupunem că este îndeplinită condiția:

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC.$$

Rezultă:

$$AC + AB - BC = AD + AB - BD \text{ și } AB + BC - AC = BD + BC - CD.$$

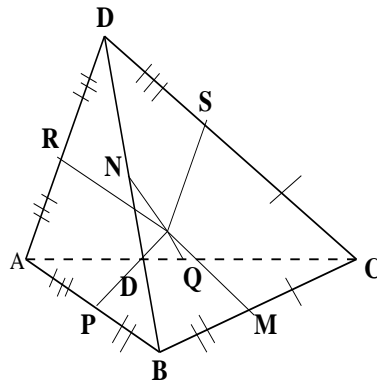


Figura 3.11: Teorema lui Crelle

Prima relație arată că cercul înscris în triunghiul ABC are punctul de contact cu AB identic cu punctul de contact al lui AB cu cercul înscris în triunghiul ABD . Deci există o sferă ce conține cele două cercuri (înscris în ABC și înscris în ABD). Există deci punctele M, N, O, P, Q în sfera care este tangentă segmentelor $[BC], [AC], [AD], [BD], [AB]$. Se consideră planul (BDC) și cercul de intersecție determinat de plan și sfera considerată. Relația a două dovedește că punctul de contact cu BC al cercului înscris în triunghiul BDC și punctul de contact cu BC al cercului înscris în triunghiul ABC coincid.

Cum, cercul de intersecție dintre planul BDC și sfera este tangent muchiilor tetraedrului în P și M , iar pe de altă parte prin P și M trece cercul înscris în triunghiul BDC , rezultă că cercul de intersecție dintre planul (BDC) și sfera și cercul înscris în triunghiul BDC coincid. Deci sfera este tangentă și muchiei $[CD]$, ceea ce demonstrează teorema.

q.e.d.

DEFINIȚIA 3.10 *Tetraedrele cu proprietatea că există o sferă hexatangentă muchiilor se numesc tetraedre Crelle.*

Pentru tetraedrele Crelle se poate demonstra următoarea teoremă:

TEOREMA 3.4 *(Teorema lui Brianchon) Într-un tetraedru Crelle cele trei segmente ce unesc punctele de contact de pe muchiile opuse ale sferei hexatangente sunt concurente.*

Demonstrație. Se folosește Teorema lui Menelaus în spațiu pentru patrulaterul $ABCD$ și rezultă că dreptele RC și SM sunt coplanare, deci $RM \cap SP \neq \emptyset$.

Analog se arată că $NQ \cap SP \neq \emptyset$ și $RM \cap NQ \neq \emptyset$.

Cum dreptele RM, SP, NQ nu pot fi coplanare rezultă că sunt concurente (Dacă în spațiu trei drepte se intersectează două câte două, atunci ele sunt sau coplanare sau concurente). Să demonstrăm această proprietate.

Fie dreptele a, b și c și să presupunem că nu sunt concurente. Fie P planul determinat de dreptele a și b . Cum dreapta c intersectează atât pe a cât și pe b și cele trei puncte de intersecție sunt două câte două diferite, rezultă că dreapta c are două puncte diferite în planul P , deci este în întregime conținută în acest plan. S-a demonstrat astfel ca dreptele a, b și c sunt coplanare.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 3.15 Într-un tetraedru Crelle $ABCD$, unde $AB = c, AC = b, BC = a, AD + BC = s$, volumul V și raza ρ a sferei hexatangente satisfac egalitatea:

$$3V\rho = 2(s - p)(p - a)(p - b)(p - c).$$

3.3 Tetraedre echifaciale

În prima jumătate a secolului XIX o serie de geometrii străluciți: Feuerbach, Vecten, Jacobi au stabilit multiple proprietăți ale tetraedrului cu fețele congruente.

DEFINIȚIA 3.11 (*J. NEUBERG*) Tetraedrul cu cele patru fețe tringhiuri cu aceeași arie se numește **isoscel sau echifacial**

Tetraedrul echifacial are următoarele proprietăți remarcabile:

1. Cele patru înălțimi ale tetraedrului echifacial sunt egale (A. SCHMIDT-1889).
Demonstrația este imediată, folosind formula volumului tetraedrului.
2. Perechile de muchii opuse sunt egale.
3. Bimedianele sunt ortogonale două câte două: adică ele determină un triedru tridreptunghic având originea în G , și întâlnesc dreptele suport ale muchiilor tetraedrului sub unghiuri drepte (A. JACOBI).
4. Fiecare muchie este egal înclinată față de fețele neadiacente cu ea (A. JACOBI).
5. Bisectoarele unghiurilor sub care se vad din centrul de greutate două muchii opuse tetraedrului sunt bimedianele (J. NEUBERG).
6. Patru puncte remarcabile coincid, mai precis: centrul de greutate, punctul lui MONGE, centrul sferei circumscrise și centrul sferei înscrise.

7. Suma algebrică a distanțelor unui punct arbitrar din spațiu la fețele tetraedrului este constantă (A. JACOBI).
8. Volumul tetraedrului echifacial este egal cu a treia parte a produsului segmentelor bimediane (E. GENTY-1878).
9. Volumul tetraedrului echifacial este

$$V = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}}{12} \quad (3.13)$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor unei fețe a tetraedrului.

10. Cele patru triedre ale tetraedrului sunt congruente, din această cauză suma diedrelor triedrelor este constantă.
11. Fețele sunt întotdeauna triunghiuri ascuțitunghice. (MORLEY).
12. Punctele de contact ale sferei înscrisă, în tetraedru echifacial, cu fețele sunt centrele cercurilor circumscrise acestora (J. NEUBERG), iar punctele de contact interne ale fețelor cu sferile exînscrise sunt ortocentrele acestor fețe, iar punctele de contact interne ale fețelor cu sferile exînscrise sunt ortocentrele acestor fețe.
13. Există cinci sfere tangente la fețele tetraedrului; sfera înscrisă și cele patru sfere exînscrise.
14. Centrele sferelor exînscrise sunt simetricele vârfurilor tetraedrului față de centrul sferei înscrise, din acest motiv, ele sunt vârfurile paralelipipedului circumscris tetraedrului (F. MORLEY-1894).
15. Sfera circumscrisă trece prin centrele celor patru sfere exînscrise (J. NEUBERG-1890).
16. Există o sferă având centrul în G care este tangentă la înălțimile tetraedrului echifacial și la perpendicularele ridicate pe fețe în ortocentrele acestor fețe. (A. SCHMIDT-1889).
17. Există patru sfere exînscrise la muchiile unui tetraedru echifacial (G. RIBONI-1890).

Alte clase de tetraedre particulare sunt cele în care doar două fețe sunt egale, ori trei fețe egale, sau care au fețele egale două câte două. În acest din urma caz, există două bimediane care sunt în același timp și perpendicularele comune ale muchiilor opuse corespunzătoare.

PROPOZIȚIA 3.16 *Un tetraedru echifacial care are o pereche de muchii opuse perpendiculare, este regulat.*

3.4 Tetraedre ortocentrice

În general o muchie a unui tetraedru $ABCD$ nu este perpendiculară pe muchia opusă; însă dacă una dintre muchii, de exemplu AB este perpendiculară pe CD , atunci înălțimile duse din vârfurile A și B sunt coplanare, și sunt de asemenea coplanare înălțimile coborâte din vârfurile C și D , și reciproc.

În anul 1827 geometrul elvețian Jacob Steiner a introdus noțiunea de tetraedru ortic sau ortocentric, care are cele patru înălțimi concurente.

DEFINIȚIA 3.12 *Un tetraedru care are perechile de muchii opuse ortogonale se numește tetraedru ortocentric.*

Suficiența condiției de perpendicularitate pentru două perechi de muchii.

PROPOZIȚIA 3.17 *Dacă două perechi de muchii opuse ale unui tetraedru sunt perpendiculare, atunci și muchiile rămase ale tetraedrului sunt de asemenea perpendiculare.*

Demonstrație. Fie un tetraedru $ABCD$, cu $AB \perp CD, BC \perp AD$. Se duce $AE \perp CD, AF \perp BC$ (fig.3.12).

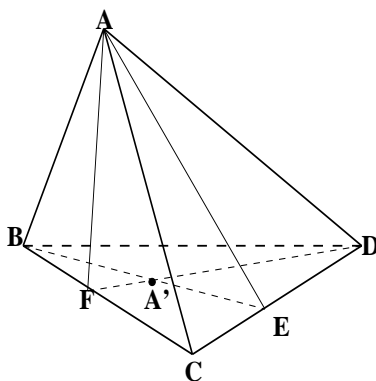


Figura 3.12: tetraedre ortocentrice

Rezultă $CD \perp (ABE), BC \perp (ADF)$. Deci dacă $AA' = (ABE) \cap (ADF)$, atunci $AA' \perp (BCD)$ și $AA' \perp BD$. Dar, $CA' \perp BD$, deci $BD \perp (ACA')$ și $BD \perp AC$. **q.e.d.**

PROPOZIȚIA 3.18 *Înălțimile unui tetraedru sunt concurente într-un punct H dacă și numai dacă tetraedrul este ortocentric.*

Demonstrație. “ \Leftarrow ”

Presupunem ca tetraedrul $ABCD$ este ortocentric, cu $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$.

Atunci prin AB, AC, AD se pot duce plane perpendiculare pe CD, BD, BC . Aceste plane se vor intersecta după dreapta $AA' \perp (BCD)$.

A' este ortocentrul triunghiului BCD . Planul care conține pe AB , perpendicular

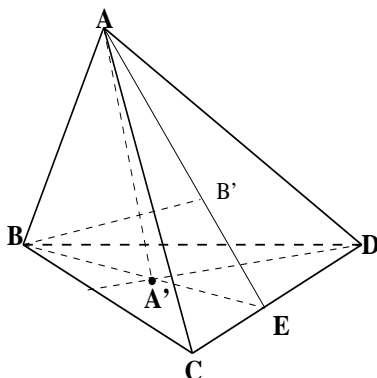


Figura 3.13:

pe CD se intersectează cu CD în E . AE este o înălțime a triunghiului ACD , BE o înălțime a triunghiului BCD .

Notăm cu B' ortocentrul triunghiului ACD . $BB' \perp (ACD)$. Dreptele AA' și BB' fiind în ABE sunt concurente.

Două înălțimi oarecare ale tetraedrului ortocentric sunt concurente și deoarece nu pot fi toate în același plan, trec toate prin același punct.

“ \Rightarrow ”

Presupunem că înălțimile tetraedrului $ABCD$ au punctul comun H .

$(A'HB') \perp CD$ și $(A'HB') \cap CD = E$, astfel încât $BA'E$ și $AB'E$ sunt înălțimi ale fețelor BCD, ACD . Rezultă că $ABE \perp CD$, deci $AB \perp CD$.

Analog se demonstrează și perpendicularitatea celorlalte perechi de muchii opuse. Deci tetraedrul este ortocentric.

q.e.d.

DEFINIȚIA 3.13 *Punctul H de concurență al înălțimilor se numește ortocentrul tetraedrului.*

Un tetraedru ortocentric se bucură de proprietățile următoare:

1. Picioarele înălțimilor sunt ortocentrele fețelor corespunzătoare.

2. Centrele de greutate ale fețelor sunt vârfurile unui tetraedru ortocentric, care este omotetic cu tetraedrul inițial față de G ; din această cauză perpendicularele ridicate pe fețele unui tetraedru ortocentric în centrele de greutate ale acestor fețe sunt concurente într-un punct H' , care se găsește pe dreapta GH , astfel încât $\overline{H'G} = \frac{1}{3}\overline{HG}$ (L. A. S. FERRIOT, 1811-1812).
3. Cele trei bimediane ale unui tetraedru ortocentric sunt egale, și reciproc: un tetraedru care are bimedianele egale, este ortocentric.

Mai precis, dacă într-un tetraedru

- dacă cele trei bimediane sunt egale atunci cele patru înălțimi ale tetraedrului sunt concurente într-un același punct
 - dacă două bimediane sunt egale atunci două înălțimi sunt concurente într-un punct H_1 și celelalte două înălțimi sunt concurente într-un alt punct H_2
 - dacă cele trei mediane au lungimi diferite atunci cele patru înălțimi sunt, două câte două, necoplanare. (H. GELLENTHIN, 1885).
4. Suma pătratelor a două muchii opuse este egală cu de patru ori pătratul distanței dintre mijloacele a două muchii opuse. (K. W. FEUERBACH-1827).

Din aceasta cauză, într-un tetraedru ortocentric $ABCD$ suma pătratelor muchiilor opuse este constantă,

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

5. Perpendiculara comună a perechilor de muchii opuse (axele tetraedrului) trec prin H ; și punctele lor de sprijin pe aceste muchii sunt picioarele înălțimilor fețelor tetraedrului (K. W. FEUERBACH-1827).
6. Ortocentrul împarte fiecare dintre aceste drepte (cele patru înălțimi și cele trei axe) în două segmente al căror produs este constant (A. JACOBI).
7. Într-un tetraedru ortocentric produsul cosinuşilor a două diedre opuse este constant. (J. NEUBERG).
8. Vârfurile unui tetraedru ortocentric și ortocentrul său determină un pentagon. Fiecare vârf al acestui pentagon este ortocentrul tetraedrului determinat de celelalte patru vârfuri (pentagon ortocentric), (K. W. FEUERBACH-1827).
9. Într-un tetraedru ortocentric, mijloacele muchiilor și picioarele înălțimilor fețelor sunt douăsprezece puncte care se găsesc pe aceeași sferă (prima sferă a celor douăsprezece puncte) având centrul în centrul de greutate al tetraedrului (H. VOGT-1881) și raza egală cu jumătatea din lungimea unei bimediane.

10. Centrul de greutate al unui tetraedru ortocentric și ortocentrele fețelor acestuia aparțin aceleiași sfere, a cărei rază este egală cu a treia parte a razei sferei circumscrise tetraedrului. Această sferă împarte segmentele înălțimilor cuprinse între vârfuri și ortocentru în raportul $2 : 1$ (cea de-a doua sferă a celor douăsprezece puncte sau sfera lui JACOBI).
11. Într-un tetraedru ortocentric mijloacele segmentelor înălțimilor cuprinse între vârfuri și ortocentru aparțin unei sfere cu centrul în G , a cărei rază este egală cu jumătatea razei sferei circumscrise (A. JACOBI).

PROPOZIȚIA 3.19 *Orice tetraedru regulat este ortocentric.*

3.5 Probleme

1. Să se verifice că într-un tetraedru cu muchiile $AB \perp BD$ și $AC \perp CD$, piciorul înălțimii din vârful A se află pe cercul circumscris triunghiului BCD .

Indicație: Vârfurile tetraedrului se află pe sfera cu diametrul AD , care se intersectează cu planul BCD după un cerc.

2. Fie tetraedrul $ABCD$ și a, b, c, d lungimile înălțimilor duse din vârfurile A, B, C, D ; fie O un punct oarecare din interiorul tetraedrului, iar $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ distanțele punctului O la fețele BCD, CDA, DBA, ABC . Să se demonstreze:

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} = 1.$$

3. Într-un tetraedru ortogonal $ABCD$ suma diedrelor și a unghiurilor făcute de muchii cu fețele este egală cu 12 unghiuri drepte.
4. Fie $ABCD$ un tetraedru și unghiul ϕ al dreptelor AC, BD . Să se verifice egalitatea:

$$2AC \cdot BD |\cos \phi| = |AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2|.$$

Capitolul 4

APLICAȚII ALE NUMERELOR COMPLEXE ÎN GEOMETRIE

4.1 Elemente de trigonometrie aplicate în geometrie

Geometria este una dintre ramurile matematicii în care trigonometria are aplicații imediate.

Aici vom reaminti câteva teoreme și relații trigonometrice care folosesc la rezolvarea triunghiului și vom prezenta unele aplicații practice ale trigonometriei în topografie.

Notăm cu a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC și cu R raza cercului circumscris triunghiului.

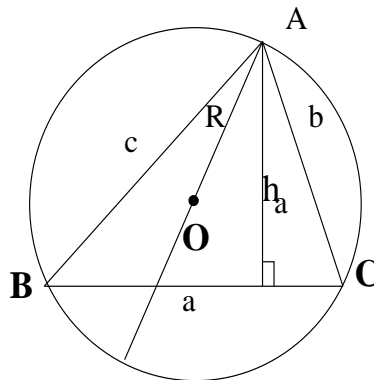


Figura 4.1: Triunghiul ABC

- Teorema sinusurilor

În orice triunghi ABC are loc relația:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

- Teorema cosinusului

În orice triunghi ABC are loc relația:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \quad (4.1)$$

Observația 4.1 Din relația (4.1) se obțin:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C.$$

- În orice triunghi ABC are loc relația:

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \quad (4.2)$$

l_a fiind lungimea bisectoarei unghiului \hat{A} .

În mod analog putem calcula lungimile bisectoarelor celorlalte două unghiuri ale triunghiului:

$$l_b = \frac{2ac}{a+c} \cos \frac{B}{2}; \quad l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{C}{2}.$$

- Formule de calcul pentru aria S unui triunghi oarecare ABC .

1.

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2},$$

unde h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălțimilor corespunzătoare laturilor a, b , respectiv c ;

2.

$$S = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{ac \sin B}{2};$$

3.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

p fiind semiperimetrul triunghiului;

4.

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

5.

$$S = rp$$

r este raza cercului înscris în triunghi;

6.

$$S = \frac{abc}{4R};$$

7.

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

4.1.1 Aplicații practice

- Distanța dintre două puncte accesibile între care se află un obstacol.

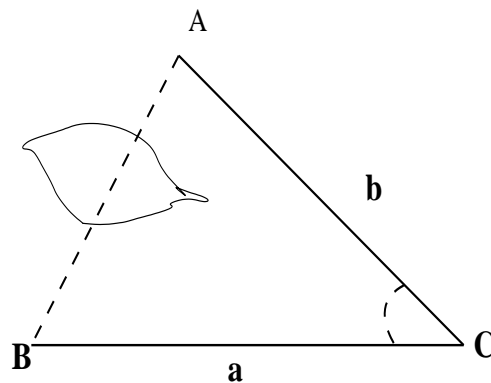


Figura 4.2:

Pentru a calcula distanța de la A la B se alege un punct C din care se văd punctele A și B . Prin măsurători se obțin numerele $AC = b$, $BC = a$, $m(\widehat{ACB}) = C$. Distanța de la A la B se calculează folosind teorema cosinusului în triunghiul ABC :

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

- Distanța dintre două puncte inaaccessibile.

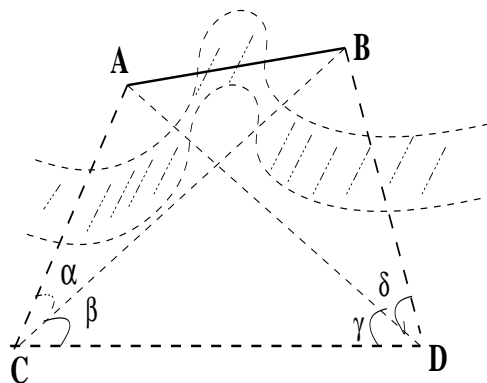


Figura 4.3:

Pentru a calcula distanța de la A la B se aleg punctele C și D din care se văd punctele A și B astfel încât distanța CD să se poată determina.

Prin măsurători se obțin numerele $CD = a$, $m(\widehat{ACB}) = \alpha$, $m(\widehat{BCD}) = \beta$, $m(\widehat{ADC}) = \gamma$, $m(\widehat{ADB}) = \delta$

Din triunghiurile BCD respectiv ACD se obțin:

$$BC = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}, \quad AC = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Distanța dintre punctele inaccesibile A și B se obține din triunghiul ABC , cunoscându-i două laturi și unghiul cuprins între ele.

- Determinarea înălțimii unui turn inaccesibil situat pe un deal.

Fie turnul marcat prin segmentul AB . Alegem un punct accesibil și lucrăm în planul determinat de punctele A, B, C . Luând încă un punct accesibil $D \in BC$ și notăm cu E punctul de intersecție al verticalei prin A cu orizontala prin D . Prin măsurători se

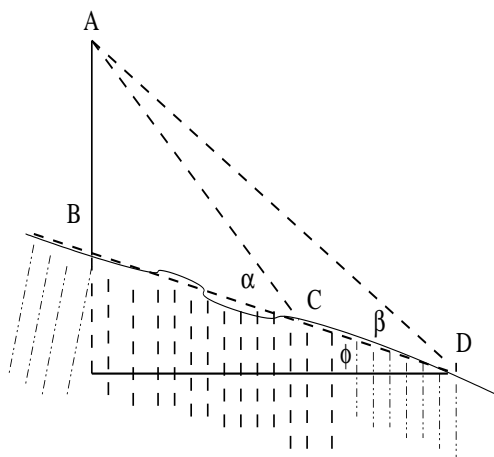


Figura 4.4:

obțin:

$$CD = a, m(\widehat{EDB}), m(\widehat{ADB}) = \beta, m(\widehat{ACB}) = \alpha.$$

În triunghiul ACD , avem

$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Din triunghiul ABC se obține

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin(\frac{\pi}{2} + \phi)}.$$

Așadar

$$AB = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta) \cos \phi}.$$

4.2 Numere complexe

Numerele complexe au fost introduse în matematică pentru a face posibilă rezolvarea unor ecuații de gradul al II-lea care nu admit rădăcini reale. S-a pornit de la ecuația $x^2 + 1 = 0$ care nu admite rădăcini reale.

În secolul al XVI-lea, Cardan utiliza în mod formal simbolul $\sqrt{-a}$ cu $a \in R, a > 0$ pentru a descrie rădăcinile ecuației $x^2 - 10x + 40 = 0$ cu numerele $5 + \sqrt{-15}$ și $5 - \sqrt{-15}$ numite numere imaginare.

Tot în secolul al XVI-lea, cu ocazia unor *turniruri științifice*, N. Fontana zis Tartaglia (1500-1557) găsește formula de rezolvare a ecuațiilor de gradul al III-lea care conduce către numere imaginare.

În secolul al XIX-lea, prin Gauss și Cauchy, se reușește o reprezentare a numerelor imaginare cu obiecte matematice cunoscute. Astfel, Gauss reprezintă numerele imaginare prin punctele unui plan în raport cu un reper ortonormat, folosește simbolul $\sqrt{-1} = i$ și adoptă denumirea de număr complex. Cauchy observă că numerele complexe pot fi obținute aplicând asupra numerelor reale și a simbolului i , cu $i^2 = -1$, regulile de adunare și înmulțire din R . Observă și concluzionează că numerele complexe pot fi scrise sub forma $a + ib$ cu $a, b \in R$.

Descoperirea interpretării geometrice a numerelor complexe este legată de matematicienii K. Wessel (1745-1818), J.R. Argand (1768-1822) și G. F. Gauss (1777-1855).

K. Wessel publică pentru prima dată o interpretare geometrică a numerelor complexe în 1799 la Copenhaga. Lucrarea sa a fost descoperită după o sută de ani. Geometrul francez J.R. Argand publică în 1806 *Essai sur une maniere de représenter les quantités imaginaires* în care interpretarea geometrică a numerelor complexe este intens utilizată, demonstrând teorema fundamentală a algebrei. Mult timp, această lucrare a fost ignorată. După redescoperirea lucrării, în lumea matematică mondială devine preponderentă denumirea de diagramă Argand care se utilizează frecvent. În literatura de specialitate românească nu a fost precizată această denumire. La noi se utilizează termenul propus în 1821 la Ranchy: *afix al lui M(x,y) pentru numărul complex $z = x + iy$* .

Marele matematician G. F. Gauss conturează încă din 1799 interpretarea geometrică a numerelor complexe, iar în 1828 publică o teorie completă a numerelor complexe în care folosește diagrama Argand care este denumită și *interpretarea lui Gauss*.

În țara noastră Dimitrie Pompeiu (1873-1954) alături de Gheorghe Țițeica și Traian Lalescu reprezintă marii matematicieni care s-au preocupat de geometrie, aplicând elemente de teoria numerelor complexe.

Problema

dacă ABC este un triunghi echilateral și M un punct arbitrar în planul său, lungimile MA, MB, MC sunt laturile unui triunghi eventual degenerat

poartă numele lui Dimitrie Pompeiu. Acesta o demonstrează atât sintetic, cât și utilizând operații cu numere complexe, realizând încă o dată legătura între geometrie și algebră.

4.3 Aplicații ale numerelor complexe în geometrie

- Împărțirea unui segment într-un raport dat.

Fie A_1, A_2 puncte distincte din plan, de afixe z_1 și respectiv z_2 și fie P un punct pe dreapta A_1A_2 , astfel încât $\overrightarrow{PA_1} = \lambda \overrightarrow{PA_2}$, unde $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 1$. Dacă P are afixul z_P , atunci:

$$z_P = \frac{1}{1-\lambda} z_1 - \frac{\lambda}{1-\lambda} z_2.$$

Formula reprezintă afixul punctului care împarte un segment într-un raport dat.

Afixul mijlocului unui segment.

Dacă P este mijlocul segmentului $[A_1A_2]$, atunci $\lambda = -1$. Din formula precedentă se obține:

$$z_P = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Patrulaterul $M_1M_2M_3M_4$, unde punctele M_i au afixele $z_i, i = \overline{1, 4}$ este paralelogram dacă și numai dacă

$$z_1 + z_3 = z_2 + z_4.$$

- Centrul de greutate al unui triunghi.

Fie ABC un triunghi ale cărui vârfuri au afixele z_A, z_B, z_C . Atunci centrul de greutate G al triunghiului are afixul

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

- Distanța dintre două puncte; ecuația cercului.

Dacă A_1, A_2 sunt puncte în plan de afixe z_1 și respectiv z_2 , atunci lungimea segmentului $[A_1A_2]$ este

$$|A_1A_2| = |z_1 - z_2|.$$

Rezultă că cercul de centru $A_0(z_0)$ și rază r are ecuația

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2.$$

- Condiția de coliniaritate :

Punctele M_1, M_2, M_3 de afixe z_1, z_2 respectiv z_3 sunt coliniare dacă și numai dacă există $k_1, k_2, k_3 \in R$ cu $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ și $k_1 z_1 + k_2 z_2 + k_3 z_3 = 0$.

Într-adevăr dacă M_1, M_2, M_3 sunt coliniare, atunci există $k \in R$ cu $\overrightarrow{M_2 M_1} = k \overrightarrow{M_2 M_3}$. Deci $z_2 = \frac{z_1 - k z_3}{1 - k}$, adică $z_1 - (1 - k)z_2 - k z_3 = 0$.

Pentru $k_1 = 1, k_2 = 1 - k, k_3 = -k$ obținem concluzia.

Reciproc, din $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ cu $k_2 = -k_1 - k_3$ obținem

$$k_1(z_1 - z_2) = -k_3(z_3 - z_2).$$

Pentru $k = -\frac{k_3}{k_1}$ obținem $z_2 = \frac{z_1 - k z_3}{1 - k}$, adică M_1, M_2, M_3 sunt coliniare.

- Măsurarea unghiului orientat.

Măsura unghiului orientat $\widehat{M_1 O M_2}$, în sens trigonometric, (semidreapta OM_1 se rotește în sens trigonometric peste semidreapta OM_2), față de un reper cu originea în O este:

$$m(\widehat{M_1 O M_2}) = \arg \frac{z_2}{z_1},$$

unde z_1, z_2 sunt afixele punctelor M_1 , respectiv M_2 .

Dacă punctele M_1, M_2, M_3 au afixe z_1, z_2 respectiv z_3 , atunci măsura unghiului orientat (în sens trigonometric) $\widehat{M_1 M_2 M_3}$ este

$$m(\widehat{M_1 M_2 M_3}) = \arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}.$$

Dacă punctele M_1, M_2, M_3 au afixe z_1, z_2, z_3 și $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \rho \varepsilon$, unde $\rho > 0$, $\varepsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha$ cu $\alpha \in [0, 2\pi)$, atunci

$$\frac{M_2 M_3}{M_1 M_2} = \rho, \quad m(\widehat{M_1 M_2 M_3}) = \min(\alpha, 2\pi - \alpha).$$

- Ecuația dreptei care trece prin două puncte.

Fie A_1, A_2 , două puncte distincte din plan de afixe z_1 , respectiv z_2 . Atunci, dreapta $A_1 A_2$ reprezintă mulțimea punctelor din plan ale căror afixe z sunt de forma:

$$z = (1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2, \lambda \in R.$$

O altă formă a ecuației unei drepte în C .

Punctul P aparține dreptei $A_1 A_2$ dacă și numai dacă afixul său z verifică egalitatea:

$$z - z_1 = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} (\bar{z} - \bar{z}_1).$$

- Unghiul a două drepte

Fie punctele M_1, M_2, M_3, M_4 , distincte în plan, diferite de origine, cu afixele $z_i, i = \overline{1, 4}$. Măsura unghiului orientat (în sens trigonometric) al dreptelor M_1M_2 și M_3M_4 este:

$$m(\widehat{M_1M_2, M_3M_4}) = \arg \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}.$$

COROLARUL 4.1 *Dreptele M_1M_2 și M_3M_4 sunt:*

1. $M_1M_2 \perp M_3M_4$ dacă și numai dacă $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in iR^*$;
2. $M_1M_2 \parallel M_3M_4$ dacă și numai dacă $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in R^*$.

- Punctele distincte M_1, M_2, M_3, M_4 sunt conciclice dacă și numai dacă raportul anarmonic al afixelor lor este real, adică:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \in R^*.$$

- Ortocentrul unui triunghi.

Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc cu centrul în originea O a sistemului cartezian xOy . Înălțimile AA_1, BB_1 și CC_1 ale triunghiului sunt concurente într-un punct H care îndeplinește condiția vectorială:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Dacă afixele vârfurilor triunghiului sunt z_1, z_2, z_3 pentru punctele A, B respectiv C atunci afixul ortocentrului este h și este

$$h = z_1 + z_2 + z_3.$$

COROLARUL 4.2 *Dacă originea reperului cartezian nu este în centrul cercului circumscris triunghiului, atunci punctul O are afixul o și are loc relația:*

$$h + 2o = z_1 + z_2 + z_3.$$

COROLARUL 4.3 *Față de un reper cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC , centrul cercului lui Euler are afixul:*

$$\omega = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{2}.$$

- Centrul cercului înscris într-un triunghi

Fie ABC un triunghi ale cărui laturi BC, CA, AB au respectiv lungimile a, b, c . Centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC are afixul

$$z_I = \frac{1}{a+b+c}[az_A + bz_B + cz_C].$$

• Aria unui triunghi

Dacă $z_i, i = \overline{1, 3}$ sunt afixele vârfurilor triunghiului ABC , notat în sens trigonometric, atunci aria triunghiului este:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1).$$

Fără a restânge generalitatea problemei putem considera că originea sistemului orto-

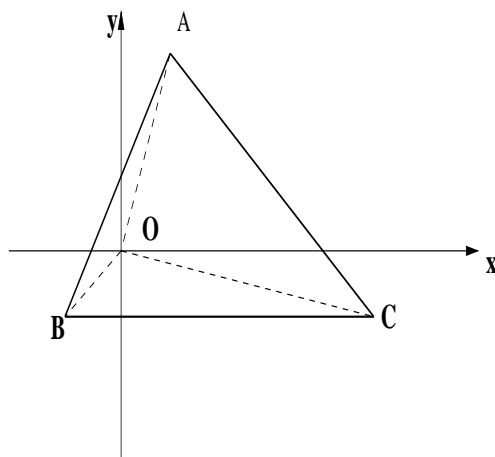


Figura 4.5:

gonal de axe se află în interiorul triunghiului. Folosind forma trigonometrică a celor 3 afixe:

$$z_i = r_i(\cos \theta_i + i \sin \theta_i), i = \overline{1, 3},$$

atunci:

$$\begin{aligned} \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1 &= r_1r_2[\cos(\theta_2 - \theta_1) + i \sin(\theta_2 - \theta_1)] + r_2r_3[\cos(\theta_3 - \theta_2) + i \sin(\theta_3 - \theta_2)] + \\ &+ r_1r_3[\cos(\theta_1 - \theta_3) + i \sin(\theta_1 - \theta_3)]. \end{aligned}$$

Calculăm

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1) &= \\ &= \frac{1}{2}r_1r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2}r_2r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) + \frac{1}{2}r_1r_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) = \\ &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = S_{ABC}. \end{aligned}$$

- Caracterizarea triunghiului dreptunghic.

Triunghiul ABC înscris în cercul $C(O, R)$ este dreptunghic dacă și numai dacă $|a + b + c| = R$, unde $A(a), B(b), C(c)$.

Demonstrație. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic, cu unghiul drept în A , atunci B și C sunt diametral opuse, deci $b = -c$, de unde $|a + b + c| = |a| = R$.

Reciproc, dacă $|a + b + c| = R$, atunci $|a + b + c|^2 = R^2$, adică $(a + b + c) \left(\frac{R^2}{a} + \frac{R^2}{b} + \frac{R^2}{c} \right) = R^2$, deci

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1$$

echivalent cu

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 0$$

adică două dintre punctele A, B, C sunt diametral opuse. **q.e.d.**

- Formula rotației în complex

Dacă punctul $M_3(z_3)$ se obține printr-o rotație cu centrul în $M_2(z_2)$ și unghi $\alpha \in [0, 2\pi)$ a punctului $M_1(z_1)$, atunci:

$$z_3 = z_2 + (z_1 - z_2)\epsilon$$

unde $\epsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha$ dacă rotația se efectuează în sens trigonometric sau $\epsilon = \cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha)$, dacă rotația se efectuează în sens invers trigonometric

COROLARUL 4.4 *Triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă*

$$c = a + (b - a)\epsilon$$

unde $\epsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, dacă triunghiul ABC este orientat în sens trigonometric, sau $\epsilon = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$, dacă triunghiul ABC este orientat în sens invers trigonometric

4.4 Teoreme clasice de geometrie demonstrate cu ajutorul numerelor complexe

În cele ce urmează vom prezenta câteva proprietăți ale punctului și dreptei lui Nagel folosind numerele complexe. O prezentare sintetică a acestor rezultate a fost făcută în primul capitol.

Fie ABC un triunghi oarecare. Notăm cu A' mijlocul laturii (BC) și cu D, D' punctele de contact ale acestuia cu cercurile înscris și A-exânscriș triunghiului dat. Pe laturile (CA) și (AB) considerăm punctele B', E, E' și respectiv C', F, F' cu semnificații analoge. Sunt cunoscute (sau se deduc ușor) următoarele relații:

$$BD' = p - c, D'C = p - b, CE' = p - a, E'A = p - c, AF' = p - b, F'B = p - a, \quad (4.3)$$

unde p este semiperimetrul triunghiului.

Notăm afixul unui punct X oarecare cu z_X .

PROPOZIȚIA 4.1 Dreptele AD', BE', CF' sunt concurente într-un punct N cu afixul:

$$z_N = \frac{1}{p} [(p - a)z_A + (p - b)z_B + (p - c)z_C]. \quad (4.4)$$

Demonstrație.

Folosind (4.3) avem $k = \frac{BD'}{D'C} = \frac{p - c}{p - b}$, deci

$$z_{D'} = \frac{z_B + kz_C}{1 + k} = \frac{1}{a} [(p - b)z_B + (p - c)z_C].$$

Se obțin formule similare pentru afixele punctelor E', F' . Fie V un punct pe segmentul (AD') determinat de raportul $v = \frac{AV}{VD'}$. Astfel

$$z_V = \frac{z_A + vz_{D'}}{1 + v} = \frac{1}{1 + v} \left[\frac{1}{p - a} z_A + \frac{v}{a} (p - b) z_B + \frac{v}{a} (p - c) z_C \right].$$

Vom obține o formă simetrică pentru paranteza paranteza pătrată alegând v astfel încât $\frac{1}{p - a} = \frac{v}{a}$, adică $v = \frac{a}{p - a}$. Atunci, punctul de pe AD' corespunzător acestei valori a lui v , punct pe care-l notăm cu N , va avea afixul $z_N = \frac{1}{p} [(p - a)z_A + (p - b)z_B + (p - c)z_C]$. Simetria acestei relații face evident faptul că punctul N este situat și pe dreptele BE' și CF' . **q.e.d.**

Punctul N pus în evidență de Propoziția 4.1 este punctul lui Nagel.

PROPOZIȚIA 4.2 Punctul lui Nagel are proprietățile:

1. $G \in (IN)$ și $NG = 2GI$,
2. $NH \parallel OI$ și $NH = 2OI$.

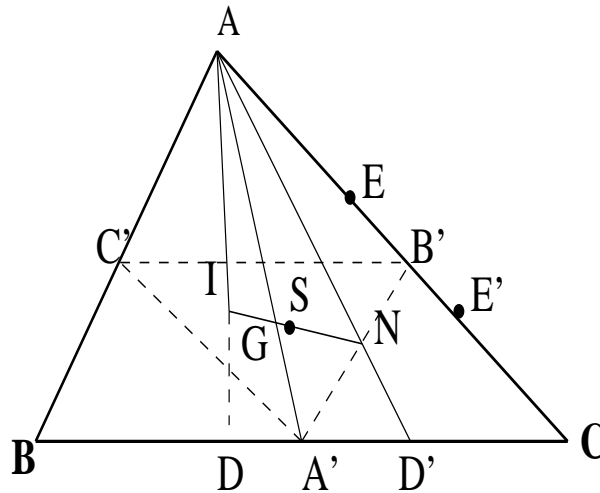


Figura 4.6:

Demonstrație. 1) Pentru afixele centrului de greutate G al triunghiului și al centrului cercului înscris în triunghi avem:

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}, \quad z_I = \frac{1}{2p}[az_A + bz_B + cz_C] \quad (4.5)$$

Din (4.4) și (4.5) vom obține:

$$\begin{aligned} \frac{z_G - z_I}{z_N - z_G} &= \frac{\frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) - \frac{1}{2p}(az_A + bz_B + cz_C)}{\frac{1}{p}[(p-a)z_A + (p-b)z_B + (p-c)z_C] - p(z_A + z_B + z_C)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2p(z_A + z_B + z_C) - 3(az_A + bz_B + cz_C)}{3[(p-a)z_A + (p-b)z_B + (p-c)z_C] - p(z_A + z_B + z_C)} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

deci $\frac{z_G - z_I}{z_N - z_G} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că $G \in (IN)$ și $|z_N - z_G| = 2|z_G - z_I|$, adică $NG = 2GI$.

2) Alegem un sistem de axe cu originea în O , centrul cercului circumscris triunghiului ABC . În acest caz știm că $z_H = z_A + z_B + z_C$ și vom avea

$$\frac{z_N - z_H}{z_I - z_O} = \frac{\frac{1}{p}[(p-a)z_A + (p-b)z_B + (p-c)z_C] - (z_A + z_B + z_C)}{\frac{1}{2p}(az_A + bz_B + cz_C)} = -2 \in \mathbb{R},$$

deci $NH \parallel OI$ și $|z_N - z_H| = 2|z_I - z_O|$, adică $NH = 2OI$.

q.e.d.

Dreapta IN se numește **dreapta lui Nagel**.

PROPOZIȚIA 4.3 *Cercul înscris în triunghiul median $A'B'C'$ are centrul în mijlocul S al segmentului (IN) .*

Demonstrație. Evident $B'C' = \frac{a}{2}$, $C'A' = \frac{b}{2}$, $A'B' = \frac{c}{2}$ și $p' = \frac{1}{2}p$, p' fiind semi-perimetrul triunghiului median. Atunci afixul centrului cercului înscris în triunghiul median este:

$$\begin{aligned} z_{I'} &= \frac{1}{2p'} \left(\frac{a}{2}z_{A'} + \frac{b}{2}z_{B'} + \frac{c}{2}z_{C'} \right) = \frac{1}{2p} \left[a \frac{z_B + z_C}{2} + b \frac{z_A + z_C}{2} + c \frac{z_B + z_A}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{4p} [(b+c)z_A + (a+c)z_B + (b+a)z_C] \end{aligned}$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{2}(z_I + z_N) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2p}(az_A + bz_B + cz_C) + \frac{1}{p} [(p-a)z_A + (p-b)z_B + (p-c)z_C] \right] = \\ &= \frac{1}{4p} [(2p-a)z_A + (2p-b)z_B + (2p-c)z_C] = \frac{1}{4p} [(b+c)z_A + (a+c)z_B + (b+a)z_C] \end{aligned}$$

Ca urmare, $z_{I'} = z_S$ și deci I' coincide cu S .

q.e.d.

Punctul S mijlocul segmentului (IN) se numește **punctul lui Spiecker**, iar cercul $C(S, \frac{r}{2})$ înscris în triunghiul median **cercul lui Spiecker**.

PROPOZIȚIA 4.4 Centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC este punctul lui Nagel al triunghiului median $A'B'C'$.

Demonstrație. Pentru punctul lui Nagel N' al triunghiului $A'B'C'$ avem

$$\begin{aligned} z_{N'} &= \frac{1}{p'} [(p' - a')z_{A'} + (p' - b')z_{B'} + (p' - c')z_{C'}] = \\ &= \frac{1}{p} \left[(p - a) \frac{z_B + z_C}{2} + (p - b) \frac{z_A + z_C}{2} + (p - c) \frac{z_B + z_A}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2p} (az_A + bz_B + cz_C) = z_I, \end{aligned}$$

deci N' coincide cu I .

q.e.d.

4.5 Probleme

1. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater inscriptibil. Se notează cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor $A_2A_3A_4, A_3A_4A_1, A_4A_1A_2, A_1A_2A_3$. Să se arate că patrulateralele $A_1A_2A_3A_4$ și $H_1H_2H_3H_4$ sunt congruente.

2. Dacă pe laturile unui patrulater oarecare $ABCD$ construim în exterior pătrate de centre O_1, O_2, O_3, O_4 , atunci dreptele O_1O_3 și O_2O_4 sunt perpendiculare.
3. Pe laturile patrulaterului convex $ABCD$ se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM, BCN, CDP, DAQ . Să se arate că patrulaterul $ABCD$ și $MNPQ$ au același centru de greutate.

Bibliografie

- [1] Dan Brânzei, Sebastian Anița, Eugen Onofraș, Gheorghe Isvoraanu, Bazele raționamentului geometric, Editura Academiei RSR, 1983;
- [2] Dan Brânzei, Sebastian Anița, Constantin Cocea, Planul și spațiul euclidian, Editura Academiei RSR, 1986;
- [3] Ion Chițescu, Marcel Chiriță, Geometria patrulaterului, Editura Teora, 1998;
- [4] Traian Lalescu, Geometria triunghiului, Editura Apollo, Craiova 1993;
- [5] Liviu Nicolescu, Vladimir Broskov, Probleme practice de geometrie, Editura Tehnica, Bucuresti, 1990