# Inegalitatea integrală

# Cauchy- Buniakowschi - Schwarz

# Inegalitatea integrală Cauchy - Buniakowschi - Schwarz

Deoarece inegalitatea Cauchy-Buniakovschi-Schwarz (vom prescurta, *CBS*) este o inegalitate clasică mult întâlnită atât în aplicațiile pentru nivelul gimnazial, cât şi pentru cel liceal (fără a mai lua în discuție teoriile universitare ale acestei inegalități), am considerat că este necesar să tratez separat această inegalitate şi la nivelul clasei terminale a liceului, şi anume, inegalitatea sub forma ei integrală. Inegalitatea *CBS* este întâlnită şi sub denumirile: inegalitatea lui Cauchy-Schwarz, inegalitatea Cauchy sau inegalitatea Schwarz. În algebra liniară ea se poate aplica vectorilor, în analiză se poate aplica seriilor infinite sau integrării produselor, iar în teoria probabilităților se poate aplica varianțelor şi covarianțelor. Inegalitatea corespunzătoare pentru integrale a fost formulată inițial de Viktor Iakovlevici Buniakovski în 1859 şi a fost redescoperită de Hermann Schwarz (de multe ori scris greşit "Schwartz") în anul 1888.

În cadrul acestui referat vom prezenta enunțarea inegalității *CBS*, o scurtă demonstrație a acesteia şi un set de aplicații şi probleme propuse la această teoremă în vederea înțelegerii utilizării şi a aprofundării acestei inegalități.

**Teoremă (Inegalitatea integrală Cauchy - Buniakowski - Schwarz)**:

Fie $f, g : [a, b] \longrightarrow R$ dpuă funcții integrabile Riemann. Atunci are loc inegalitatea:

$$\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \geq \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2.$$

**Demonstrație:**

Fie $\lambda \in R$. Funcția $f + \lambda g$ este integrabilă Riemann. Avem că $(f(x) + \lambda g(x))^2 \geq 0$. Integrând, obținem $\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$. Deci, s-a generat o inegalitate în $\lambda$ de grad aparent 2. Dacă coeficientul lui $\lambda^2$ este diferit de 0, adică $\int_a^b g^2(x)dx \neq 0$, trebuie ca $\Delta \leq 0 \Rightarrow \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \geq \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$.

Dacă $\int_a^b g^2(x)dx = 0$, atunci $g$ este 0 aproape peste tot. Deci, $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ şi inegalitatea cerută a fi demonstrată devine egalitate.

Observație: Inegalitatea devine egalitate dacă:

1) $g$ este 0 aproape peste tot; 2) $f = kg$, aproape peste tot, unde $k \in R$.

## Aplicații

**Aplicația 1**:

**Enunț**: Fie $f:[a, b] \to R$ o funcție integrabilă. Să se arate că

$$\left(\int_a^b f(x)\sin x dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$$

**Soluție**: Din inegalitatea *CBS*, avem $\left.\begin{array}{l}\left(\int_a^b f(x)\sin x dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b \sin^2 x dx\right) \\ \left(\int_a^b f(x)\cos x dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b \cos^2 x dx\right)\end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b f(x)\sin x dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \left(\int_a^b \frac{1-\cos 2x}{2}dx + \int_a^b \frac{1+\cos 2x}{2}dx\right) =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b dx = (b-a)\int_a^b f^2(x)dx \Rightarrow \text{q.e.d.}$$

**Aplicația 2**:

**Enunț**: Fie $f:[0, 1] \to R$ o funcție derivabilă cu derivata continuă astfel încât $f(1) - f(0) = a$. Să se arate că $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \ge a^2$.

**Soluție**:

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \int_0^1 (f'(x))^2 dx \cdot \int_0^1 1^2 dx \overset{CBS}{\ge} \left(\int_0^1 (f'(x)\cdot 1)dx\right)^2 = f(x)\Big|_0^1 = f(1) - f(0) = a^2.$$

**Aplicația 3**:

**Enunț**: Fie $f:[0, 1] \to R$ o funcție derivabilă cu derivata continuă astfel încât $f(1) = f(0) = 0$. Să se arate că $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \le \frac{1}{12}\int_0^1 (f'(x))^2 dx$.

**Soluție**:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x' f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x)dx = -\int_0^1 xf'(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx = -2\int_0^1 xf'(x)dx = f(1) - f(0) - 2\int_0^1 xf'(x)dx = \int_0^1 dx - 2\int_0^1 xf'(x)dx =$$

$$=\int_0^1 (1-2x)f'(x)dx \Rightarrow \left(2\int_0^1 f(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 (1-2x)f'(x)dx\right)^2 \le \left(\int_0^1 (1-2x)^2 dx\right)\left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)$$

. Dar $\int_0^1 (1-2x)^2 dx = \int_0^1 (4x^2-4x+1)dx = \left.\frac{4x^3}{3}\right|_0^1 - 2x^2\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = \frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$. Prin urmare,

$$\left(2\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \le \frac{1}{3}\int_0^1 (f'(x))^2 dx \Rightarrow \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \le \frac{1}{12}\int_0^1 (f'(x))^2 dx .$$

**Aplicația 4**:

**Enunț**: Fie $f:[0,1]\to R$ o funcție integrabilă. Să se arate că $\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)^2 \le \frac{1}{3}\int_0^1 x^2(f(x))^2 dx$.

**Soluție**: $\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 x(xf(x))dx\right)^2 \le \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 (xf(x))^2 dx =$

$$=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 \cdot \int_0^1 (xf(x))^2 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2(f(x))^2 dx .$$

**Aplicația 5**:

**Enunț**: Fie $f:[0,1]\to R$ o funcție integrabilă astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1$. Să se arate că $\int_0^1 f^2(x)dx \ge 4$.

**Soluție**: Considerăm funcția $g:[0,1]\to R,\ g(x)=6x-2$. Aplicând *CBS*, obținem: $\left(\int_0^1 (6x-2)f(x)dx\right)^2 \le \left(\int_0^1 (6x-2)^2 dx\right)\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)$. Membrul stâng al inegalității este $\left(6\int_0^1 xf(x)dx - 2\int_0^1 f(x)dx\right)^2 = (6-2)^2 = 16$.

Calculăm $\int_0^1 (6x-2)^2 dx = 4\int_0^1 (3x-1)^2 dx = 4\left(3x^3-3x^2+x\right)\Big|_0^1 = 4 \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx \ge 4$.

**Aplicația 6**:

**Enunț**: Fie $f:[0,1]\to R$ o funcție derivabilă cu prima derivată continuă astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1$. Să se arate că $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \ge 30$.

**Soluție**: $\left(\int_0^1 x(x-1)f'(x)dx\right)^2 \le \left(\int_0^1 (x(x-1))^2 dx\right)\cdot\left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)$. Calculăm membrul stâng al inegalității, și avem că: $\left(\int_0^1 x(x-1)f'(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 x^2 f'(x)dx - \int_0^1 xf'(x)dx\right)^2 =$

$$=\left(x^2 f(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xf(x)dx - xf(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 f(x)dx\right)^2 = \left(f(1) - 2 - f(1) + 1\right)^2 = 1.$$ Pe de altă parte, făcând calculele în membrul drept, avem că:

$$\int_0^1 \left(x(x-1)\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + x^2\right)dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30} \Rightarrow \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx \geq 30.$$

În continuare, vom propune câteva probleme care pot folosi în rezolvarea lor inegalitatea *CBS*.

**Probleme propuse**

1. Fie $f:[0,1]\to R$ o funcție integrabilă. Să se arate că $\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 + \left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)^2 \leq \frac{5}{6}\int_0^1 f^2(x)dx$.
2. Fie $f:[0,1]\to R$ o funcție integrabilă astfel încât $\int_0^1 xf(x)dx = 1$. Să se determine minimul valorii $\int_0^1 x^2 f^2(x)dx$.
3. Fie $f:[0,1]\to R$ o funcție integrabilă astfel încât $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x^2 f(x)dx = 1$. Să se arate că $\int_0^1 x^2 f^2(x)dx \geq 4$.
4. Fie $f:[1,2]\to[0,\infty)$ o funcție integrabilă. Dacă $\int_1^2 f^2(x)dx \leq 2$, atunci $\int_1^2 (1+f(x))^{\frac{1}{x}} dx \leq 2\cdot$

# Bibliografie:

[1] I. V. Maftei, Pantelimon George Popescu, Mihai Piticari, Cezar Lupu, Mihaela Alexandra Tătărâm – "Inegalități alese în matematică. Inegalități clasice. Peste 600 exerciții complet rezolvate ", Editura Niculescu, Bucureşti – 2005

[2] Gazeta Matematică

[3] D. M. Bătineţu, I. V. Maftei, I.M. Stancu-Minasian – "Exerciții şi probleme de analiză matematică pentru clasele a XI-a şi a XII-a", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti – 1981

[4] I. Giurgiu, F. Turtoiu – "Culegere de probleme de matematică pentru treapta a II-a de licee", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - 1981