INEGALITATI

#

a. **Inegalitatea mediilor**

Una dintre cele mai interesante şi utile inegalităţi algebrice este fără doar şi poate următoarea inegalitate:

(1) Dacă $a_1, \ldots, a_n$ sunt numere reale pozitive atunci $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ (cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = \ldots = a_n$). Altfel spus, media aritmetică a n numere pozitive este mai mare sau egală cu media lor geometrică.

Inegalitatea (1) este cunoscută sub numele de *inegalitatea mediilor* şi se pare că cel care a pus-o în evidenţă a fost Cauchy. Câteva demonstraţii ale acestei inegalităţi au fost prezentate în paragraful 6.2 de la Capitolul 6. Pe parcursul acestei lucrări vom prezenta şi alte demonstraţii ale lui (1).

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, atunci din (1) deducem imediat

$$(2) \quad \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

(cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = \ldots = a_n$).

Această ultimă inegalitate exprimă faptul că media geometrică a n numere strict pozitive este mai mare sau egală cu media lor armonică.

Back

#

b. **Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz**

O altă inegalitate foarte des întâlnită în algebră este

(3) Dacă $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ atunci

$$(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2)$$

(cu egalitate dacă şi numai dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_i = \lambda b_i$, $1 \le i \le n$).

Inegalitatea (3) este cunoscută sub numele de *inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz* (CBS).

Există şi pentru această inegalitate mai multe demonstraţii.

O primă demonstraţie utilizează proprietăţile trinomului de gradul II. Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a_1x + b_1)^2 + \ldots + (a_nx + b_n)^2$

Se observă că $f(x) \ge 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar pe de altă parte

$$f(x) = (a_1^2 + \ldots + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)x + (b_1^2 + \ldots + b_n^2)$$

şi cum $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \ge 0$ cu necesitate

$$\Delta_f \le 0 \Leftrightarrow (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \le 0 .$$

Egalitate avem atunci când există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_1\lambda + b_1 = \ldots = a_n\lambda + b_n = 0$, adică atunci când există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_i = \lambda b_i$, $1 \le i \le n$.

O altă demonstraţie a inegalităţii (3) se bazează pe identitatea lui Lagrange

$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le n} (a_ib_j - a_jb_i)^2 \ge 0$ (vezi Corolarul 10.1.20).

Există mai multe variante de generalizare a inegalităţii (3).

Iată una dintre ele:

Dacă a_i, b_i, c_i sunt numere reale pozitive ($1 \le i \le n$) atunci

$$(4) \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_ic_i\right)^3 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right).$$

Într-adevăr fie $a = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)^{1/3}, b = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)^{1/3}, c = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right)^{1/3}$ şi $x_i = \frac{a_i}{a}, y_i = \frac{b_i}{b}, z_i = \frac{c_i}{c}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ avem $a_ib_ic_i = abcx_iy_iz_i \le abc\frac{x_i^3 + y_i^3 + z_i^3}{3}$, deci

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_ic_i \le \frac{abc}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \sum_{i=1}^{n} y_i^3 + \sum_{i=1}^{n} z_i^3\right) = \frac{abc}{3}\left(\frac{a_1^3 + \ldots + a_n^3}{a^3} + \frac{b_1^3 + \ldots + b_n^3}{b^3} + \frac{c_1^3 + \ldots + c_n^3}{c^3}\right) =$$

$= \frac{abc}{3}(1+1+1) = abc$, de unde $\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_ic_i\right)^3 \le a^3b^3c^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right)$.

Se observă că avem egalitate în (4) atunci când există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_i = \alpha b_i = \beta c_i$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$.

După ideea de demonstraţie a inegalităţii (4) se poate demonstra şi inegalitatea:

Dacă $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \ge 2$ şi $a_{ij} \ge 0$, pentru $i = 1, 2, \ldots, m$ şi $j = 1, 2, \ldots, n$, atunci

(5) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}a_{2i}\ldots a_{mi}\right)^m \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}^m\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_{2i}^m\right)\ldots\left(\sum_{i=1}^{n} a_{mi}^m\right)$, cu egalitate dacă pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, n-uplele $(a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ sunt proporţionale.

Back

#

c. **Inegalitatea lui Minkovski**

Inegalitatea (3) admite următoarea formă echivalentă

(6) $$\sqrt{(a_1+b_1)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2} \le \sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2},$$

cunoscută şi sub numele de *inegalitatea lui Minkowski* (forma clasică).

Inegalitatea (6) admite următoarea generalizare (Huygens) :

Dacă $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+$ iar $p \ge 2$ este un număr natural, atunci

(7) $$\sqrt[p]{(a_1+b_1)^p+\ldots+(a_n+b_n)^p} \le \sqrt[p]{a_1^p+\ldots+a_n^p}+\sqrt[p]{b_1^p+\ldots+b_n^p}.$$

Pentru a demonstra inegalitatea (7) vom utiliza varianta generalizată a inegalităţii lui Hölder (vezi paragraful 7.3 de la Capitolul 7).

Într-adevăr, dacă notăm $q=\frac{p}{p-1}$, atunci $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ şi obţinem

$$\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p = \sum_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)^{p-1} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1/q}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1/q}=$$

$$=\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1/q}.$$

După simplificare prin $\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1/q}$ deducem că

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p} \Leftrightarrow \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p} \le \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n a_i^p}+\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n b_i^p},$$

adică (7).

Observaţie. O prezentare mai generală a lui (7) se află în [19] şi are următoarea formă:

Dacă $p_1, \ldots, p_n, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$, $n \ge 2$ şi $p_1+\ldots+p_n=1$, atunci

(8) $$\prod_{i=1}^n (a_i+b_i)^{p_i} \ge \prod_{i=1}^n a_i^{p_i}+\prod_{i=1}^n b_i^{p_i},$$

cu egalitate dacă $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ sunt proporţionale.

În cazul $p_1=\ldots=p_n=\frac{1}{n}$ obţinem (7).

Back

#

d. **Inegalități de tip Cebâșev**

Fie $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

Sub numele de *inegalități de tip Cebâșev* sunt cunoscute următoarele inegalități:

Dacă $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq (\leq) 0$, pentru orice i, j = 1, 2, …, n atunci

(9) $n(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n) \geq (\leq)(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n)$,

cu egalitate dacă și numai dacă $a_1 = \ldots = a_n$, sau $b_1 = \ldots = b_n$.

Pentru demonstrarea inegalităților de tipul (9) se pleacă de la echivalența $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq (\leq) 0 \Leftrightarrow a_i b_i + a_j b_j \geq (\leq) a_i b_j + a_j b_i$ iar apoi se sumează după i și respectiv j.

Pentru demonstrarea cazului în care avem egalitate în (9) recomandăm cititorului lucrarea [19] (îl avertizăm însă că nu este o chestiune prea simplă!).

Back

#

e. **Inegalitatea lui Bernoulli**

Sub numele de *forma clasică discretă a inegalității lui Bernoulli* este cunoscută în literatura matematică inegalitatea :

Dacă a > -1 atunci pentru orice număr natural n,

(10) $(1+a)^n \geq 1 + na$, cu egalitate dacă a = 0.

Demonstrația lui (10) se poate face de exemplu prin inducție matematică relativ la n.

O generalizare a inegalității (10) este următoarea :

Dacă $a_1, \ldots, a_n \in (-1, 0]$ sau $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty)$, atunci

(11) $(1+a_1)\ldots(1+a_n) \geq 1 + a_1 + \ldots + a_n$

(cu egalitate dacă cel puțin n-1 dintre numerele $a_1, \ldots, a_n$ sunt egale cu 0).

Demonstrația lui (11) se poate face de exemplu tot prin inducție matematică relativ la n.

Observăm că dacă $a_1 = \ldots = a_n = a > -1$ obținem (10).

Cu ajutorul analizei matematice se poate demonstra următoarea formă continuă a inegalității lui Bernoulli:

Dacă x > -1, α > 1 sau α < 0,

(12) $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ (cu egalitate dacă x = 0).

Dacă x > -1, 0 < α < 1 atunci

(13) $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$ (cu egalitate dacă x = 0).

În acest sens se studiază monotonia funcției $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x$ și se obțin concluziile de mai sus.

Observație. În [19, p.246] se prezintă alte tipuri de generalizări ale inegalității lui Bernoulli.

Back

#

f. Inegalitatea lui Hardy-Littlewood-Polya-Karamata

Fie I un interval de numere reale, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă pe I iar $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$ elemente din I ($n \geq 2$) astfel încât $x_1 \geq y_1$, $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$, ..., $x_1 + \ldots + x_{n-1} \geq y_1 + \ldots + y_{n-1}$, $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$.

Atunci: (14) $f(x_1) + \ldots + f(x_n) \geq f(y_1) + \ldots + f(y_n)$.

Dacă f este strict convexă, atunci în (14) avem egalitate dacă şi numai dacă $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Iată o demonstraţie utilizând inducţia matematică după n.

Pentru n = 2 avem de arătat că dacă $x_1 \geq x_2$, $y_1 \geq y_2$, $x_1 \geq y_1$ şi $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, atunci $f(x_1) + f(x_2) \geq f(y_1) + f(y_2)$.

Deducem imediat că $x_1 \geq y_1 \geq y_2 \geq x_2$ şi $y_1 = px_1 + (1-p)x_2$, $y_2 = (1-p)x_1 + px_2$, cu $p = \dfrac{y_1 - x_2}{x_1 - x_2} \in [0, 1]$ (cazul $x_1 = x_2$ este banal!).

Conform inegalităţii lui Jensen avem $f(y_1) = f(px_1 + (1-p)x_2) \leq p\, f(x_1) + (1-p)\, f(x_2)$, $f(y_2) = f((1-p)x_1 + px_2) \leq (1-p)f(x_1) + pf(x_2)$, de unde deducem $f(y_1) + f(y_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$.

Dacă f este strict convexă avem egalitate pentru $p = 1 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = y_1 - x_2 \Leftrightarrow x_1 = y_1$ şi cum $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ deducem că $x_2 = y_2$.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru n şi fie $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1}$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n \geq y_{n+1}$ iar $x_1 \geq y_1$, $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$, ..., $x_1 + \ldots + x_n \geq y_1 + \ldots + y_n$, $x_1 + \ldots + x_{n+1} = y_1 + \ldots + y_{n+1}$.

Pentru ultima inegalitate deducem că există $y \geq 0$ astfel încât $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n + y$ şi atunci $x_{n+1} + y = y_{n+1}$. Aplicând ipoteza de inducţie pentru n-uplurile $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n + y)$, deducem că $f(x_1) + \ldots + f(x_n) \geq f(y_1) + \ldots + f(y_{n-1}) + f(y_n + y)$, de unde deducem că $f(x_1) + \ldots + f(x_n) + f(x_{n+1}) \geq f(y_1) + \ldots + f(y_{n-1}) + f(y_n + y) + f(x_{n+1})$.

Astfel este suficient să demonstrăm că $f(y_n + y) + f(x_{n+1}) \geq f(y_n) + f(y_{n+1})$, ceea ce ne este asigurat de cazul n = 2.

Dacă f este strict convexă, atunci egalitatea din cazul n+1 implică $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n + y)$ şi $(y_n + y, x_{n+1}) = (y_n, y_{n+1})$, adică $(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (y_1, \ldots, y_{n+1})$.

Back

#

g. Inegalitatea lui Popoviciu

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval iar $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă. Atunci

(15) $f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right) \geq 2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\dfrac{y+z}{2}\right) + 2f\left(\dfrac{x+z}{2}\right)$, pentru orice x, y, z ∈ I.

Dacă f este strict convexă în (15) avem egalitate dacă şi numai dacă x = y = z.

Încercăm să utilizăm inegalitatea Karamata iar pentru aceasta să presupunem că $x \geq y \geq z$; cum $x \geq \dfrac{x+y+z}{3} \geq z$ rămâne să comparăm y cu $\dfrac{x+y+z}{3}$.

Dacă $y \geq \frac{x+y+z}{3} \Leftrightarrow y \geq \frac{x+z}{2}$ atunci inegalitatea (15) rezultă prin aplicarea inegalităţii lui Karamata pentru 6-uplurile

$$\left(x, y, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, z\right), \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, \frac{x+z}{2}, \frac{x+z}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right).$$

Prin calcule elementare se arată că cele două 6-upluri verifică condiţiile din ipoteza inegalităţii lui Karamata.

Dacă $y \leq \frac{x+y+z}{3} \Leftrightarrow y \leq \frac{x+z}{2}$ aplicăm din nou inegalitatea lui Karamata pentru 6-uplurile

$$\left(x, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, y, z\right), \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, \frac{x+z}{2}, \frac{x+z}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right)$$

care verifică de asemenea condiţiile din ipoteza inegalităţii lui Karamata.

Observaţii. 1. Pentru I = [0, ∞) şi f : I→ℝ, $f(x) = x^2$, obţinem exerciţiul 8.14 (căruia i-am prezentat o soluţie utilizând identitatea lui Abel).

2. O generalizare a inegalităţii Popoviciu este formulată de Alexandru Lupaş sub forma :

Fie I ⊆ ℝ un interval iar f : I→ℝ o funcţie convexă.

Atunci pentru orice x, y, z ∈ I şi p, q, r ≥ 0, avem inegalitatea:

$$(16)\quad pf(x)+qf(y)+rf(z)+(p+q+r)f\left(\frac{px+qy+rz}{p+q+r}\right) \geq$$

$$\geq (p+q)f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right)+(q+r)f\left(\frac{qy+rz}{q+r}\right)+(r+p)f\left(\frac{rx+pz}{r+p}\right).$$

Pentru demonstraţie recomandăm [19, p 394].

3. Aplicând inegalitatea lui Popoviciu funcţiei f : (0, ∞) →ℝ, $f(x) = \frac{1}{x}$ obţinem că dacă a, b, c > 0, atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c} \geq \frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{a+c}$.

Back

#

8.2. **Forma integrală a unor inegalităţi algebrice clasice**

Fie n ≥ 1 un număr natural, a, b ∈ ℝ, a < b şi $\Delta_n = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ o mulţime de puncte intermediare ale intervalului [a, b]. Reamintim că prin norma lui Δ_n înţelegem numărul $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$. Prin sistem de puncte intermediare asociate diviziunii Δ_n înţelegem o familie $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de numere reale astfel încât $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ pentru orice $1 \leq i \leq n$.

Din analiza matematică se cunoaşte că dacă f : [a, b] →ℝ este o funcţie integrabilă (în sens Riemann) atunci pentru orice şir $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ de diviziuni ale lui [a, b] astfel încât $\|\Delta_n\| \to 0$ când $n \to \infty$ şi pentru orice alegere a sistemelor $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de puncte intermediare

$$(17)\qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \int_a^b f(x)dx .$$

În particular deducem că

$$(18)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx$$

iar dacă a = 0 şi b = 1 atunci

$$(19)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx\,.$$

Să considerăm acum a, b ∈ ℝ, a < b şi f , g : [a, b] → ℝ funcţii continue.

Cum pentru orice $\lambda\in\mathbb{R}$, $(f-\lambda g)^2\geq 0$ pe [a, b], deducem că

$$\int_a^b (f(x)-\lambda g(x))^2\,dx\geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2\int_a^b g^2(x)dx-2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b f^2(x)dx\geq 0$$

deci cu necesitate $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2-\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\leq 0 \Leftrightarrow$

$$(20)\qquad \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leq \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\,,$$

obţinând astfel *varianta integrală a inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwartz.*

Egalitate avem dacă $f=\lambda g$ cu $\lambda\in\mathbb{R}$.

O altă demonstraţie a lui (20) se poate obţine imediat folosind varianta integrală a identităţii lui Lagrange:

$$\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx-\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b (f(x)g(y)-f(y)g(x))^2\,dxdy\,.$$

Să probăm acum forma integrală a inegalităţilor algebrice de tip Cebâşev iar pentru acesta fie a, b ∈ ℝ, a < b iar f , g : [a, b] → ℝ două funcţii integrabile astfel încât $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\geq 0$ pentru orice x ∈ [a, b].

Condiţia de mai sus se poate scrie şi sub forma $f(x)g(x)+f(y)g(y)\geq f(x)g(y)+f(y)g(x)$, astfel că integrând în raport cu x deducem că pentru orice y ∈ [a, b] avem

$$\int_a^b f(x)g(x)dx+(b-a)f(y)g(y)\geq g(y)\int_a^b f(x)dx+f(y)\int_a^b g(x)dx\,.$$

Integrând acum în raport cu y deducem că

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx+(b-a)\int_a^b f(y)g(y)dy\geq \int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(y)dy+\int_a^b g(x)dx\cdot\int_a^b f(y)dy \Leftrightarrow$$

$$(21)\qquad \int_a^b f(x)g(x)dx\geq\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)dx$$

Inegalitatea (21) reprezintă *forma integrală a inegalităţilor de tip Cebâşev.*

Observaţii. 1. Astfel, dacă din punct de vedere al monotoniei, f şi g sunt ambele fie crescătoare, fie descrescătoare în (21) avem semnul ≥. Dacă f şi g sunt de monotonie diferită atunci (21) capătă forma

$$(22)\qquad \int_a^b f(x)g(x)dx\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)dx\,.$$

2. Atât în cazul lui (21) cât şi în cazul lui (22) avem egalitate dacă şi numai dacă una din cele două funcţii este constantă (vezi [48]).

3. O altă demonstraţie pentru (22) se poate prezenta considerând diviziunea $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ cu punctele intermediare $\xi_k = x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ şi aplicând forma discretă a inegalităţii Cebâşev $n\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k) \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_j)$, obţinem

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k) \geq \frac{1}{b-a}\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right)\cdot\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\right),$$

de unde prin trecere la limită după $n \to \infty$ deducem (21) (analog pentru (22)).

Să considerăm în continuare a, b $\in \mathbb{R}$, a < b iar f : [a, b] $\to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă, $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$ iar g : [m, M] $\to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi convexă (concavă).

Alegem diviziunea lui [a, b] $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ cu punctele intermediare $\xi_k = x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$, $0 \leq k \leq n$.

Conform inegalităţii lui Jensen avem:

$$g\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\right) \leq (\geq) \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}(g \circ f)(\xi_k), \text{ de unde}$$

$$g\left[\frac{1}{b-a}\cdot\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\right)\right] \leq (\geq) \frac{1}{b-a}\left[\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}(g \circ f)(\xi_k)\right].$$

Trecând la limită în această formă finală după $n \to \infty$ deducem

$$(23) \qquad g\left[\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx\right] \leq (\geq) \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b g(f(x))dx.$$

Inegalităţile de tip (23) reprezintă *forma integrală a inegalităţii lui Jensen.*

Egalitate în (23) avem dacă de exemplu g este funcţia identică.

Back