1. $\int (\frac{x^2}{(x^2+1)})dx = ?$

Solutie: $\int (\frac{(x^2+1-1)}{(x^2+1)})dx = x - arctg(x) + C$

2. $\int (x^3+x^2+1)dx = ?$

Solutie: $\int (x^3)dx + \int (x^2)dx + \int dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x + C$

3. $\int (\frac{1}{(2x+1)})\ dx = ?$

Solutie:

Observam ca $\dot{\ln}(2x+1)$

4. $\int (\frac{1}{4x+5})dx = ?$

Solutie:

Se rezolvă în mod similar cu cea de mai sus numai ca, vom pune $\frac{1}{4}$ *în fața integralei deoarece*

$$\frac{1}{(4x+5)} = (\ln(4x+5))'$$

$$\int (\frac{1}{(4x+5)})dx = \frac{1}{4}\int (\ln(4x+5))'dx = \frac{1}{4}\ln(4x+5) + \wp$$

5. $\int (\frac{2x}{\sqrt{(2x^2+3)}})dx = ?$

Solutie:

! *De obicei când întâlnim radicalul la numitor derivam si observam ce forma obtinem*:

Pentru cazul nostru observam ca:

$$(\sqrt{2x^2+3})' = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+3}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$$

ceea ce reprezinta exact valoarea din integrală

$$\int \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}dx = \int (\sqrt{2x^2+3})'dx = \sqrt{2x^2+3} + \wp$$

6. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2+2}}dx = ?$

Solutie:

$$(\sqrt{5x^2+2})' = \frac{10x}{2\sqrt{5x^2+2}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2+2}} \quad \textit{rezulta} \quad \frac{x}{\sqrt{5x^2+2}} = (\frac{\sqrt{5x^2+2}}{5})'$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{5x^2+2}}dx = \frac{1}{5}\int (\sqrt{5x^2+2})'dx = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2+2} + \wp$$

$8.\int \cos(3x)dx = ?$

Solutie *:*

Daca derivam , $(\cos(3x))' = -3\sin(3x)$

Dar $(\sin(3x))' = 3\cos(3x)$ *rezulta* $\cos(3x) = (\frac{\sin(3x)}{3})'$

Deci $\int \cos(3x)dx = \frac{1}{3}\int (\sin(3x))' dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + \wp$

$9. I = \int (x^2 + 2x + \frac{1}{x})dx, x < 0;\ \ I = ?$

Solutie *:*

$I = \int x^2\, dx + \int 2x\, dx + \int \frac{1}{x}dx$

$I = \frac{x^3}{3} + x^2 + \ln(-x) + \wp$

! *Observatie : Rezultatul contine* $\ln(-x)$ *pentru că din ipoteză ştim că* $x < 0$.

$10. I = \int (x + \frac{1}{x})dx, x > 0;\ \ I = ?$

Solutie *:*

$I = \int x\, dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + \ln(x) + \wp$

! *Observatie : În acest caz rezultatul conține* $\ln(x)$ *pentru ca* $x < 0$.

$11. I = \int \frac{x-3}{x^5}dx, x > 0;\ \ I = ?$

Solutie *:*

$I = \int (\frac{x}{x^5} + \frac{3}{x^5})dx = \int \frac{dx}{x^4} + 3\int \frac{dx}{x^5}$

$I = \int x^{-4}dx + 3\int x^{-5}dx = \frac{x^{-4}+1}{-4+1} + 3\frac{x^{-5}+1}{-5+1} + \wp$

$I = -\frac{1}{3x^3} - \frac{3}{4x^4} + \wp$

$12. I = \int (a\sin(x) + b\cos(x))dx;\ a, b \in \Re;\ \ I = ?$

Solutie *:*

$I = a\int \sin(x)dx + b\int \cos(x)dx = -a\cos(x) + b\sin(x) + \wp$

$13.\ I = \int \frac{\cos(2x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx, x \in (0, \frac{\pi}{2});\ \ I = ?$

Solutie *:*

Scriem $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ *şi obținem :*

$I = \int \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx = \int (\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\cos^2(x)})dx$

$I = \int \frac{dx}{\sin^2(x)} - \int \frac{dx}{\cos^2(x)} = -ctg(x) - tg(x) + \wp$

$14. I=\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}, x\in(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \quad I=?$

Solutie *:*

$I=\int \frac{dx}{\sqrt{1^2-(2x)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin(2x)+\wp$

Verificare $:(\frac{1}{2}\arcsin(2x))'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1^2-(2x)^2}}2=\frac{1}{\sqrt{1^2-(2x)^2}}$

$15. \ I=\int (\frac{2}{\sin^2(x)}+\frac{1}{\cos^2(x)})dx, x\in(0,\frac{\pi}{2}); \quad I=?$

Solutie *:*

$I=2\int \frac{dx}{\sin^2(x)}+\int \frac{dx}{\cos^2(x)}=-2\text{ctg}(x)+tg(x)+\wp$

$16. \ I=\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}, \quad x\in(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}); \quad I=?$

Solutie *:*

I se mai pote scrie şi astfel :

$I=\int \frac{dx}{\sqrt{4^2-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin(\frac{3x}{4})+\wp$

Verificare $:(\frac{1}{3}\arcsin(\frac{3x}{4}))'=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{4^2-(3x)^2}} \ 3=\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$

$17. I=\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, x\in(-2,2); \quad I=?$

Solutie *:*

$I=\int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}}=\arcsin(\frac{x}{2})+\wp$

$18. I=\int \frac{dx}{x^2+4}; \quad I=?$

Solutie *:*

$I=\int \frac{dx}{x^2+2^2}=\frac{1}{2}\,artcg(\frac{x}{2})+\wp$

$19. I=\int \frac{dx}{4x^2+1}: \quad I=?$

Solutie *:*

$I=\int \frac{dx}{(2x)^2+1^2}=\frac{1}{2}\,arctg(2x)+\wp$

20. $I=\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})\,dx,\ x\geqslant 0;\quad I=?$

Solutie:

$$I=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+\int x^{\frac{1}{3}}\,dx+\int x^{\frac{1}{4}}\,dx$$

$$I=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}$$

$$I=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+\wp$$

$$I=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}+\wp$$

$$I=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+\wp$$

21.I $=\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx,\ x>0;\quad I=?$

Solutie:

$$I=2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx-3\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx=2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\wp$$

$$I=\frac{2\sqrt{x}}{\frac{1}{2}}-\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+\wp$$

$$I=4\sqrt{x}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\wp$$

22. $I=\int(2^x+e^x)\,dx,\ x\in\Re;\quad I=?$

Solutie:

$$I=\int 2^x\,dx+\int e^x\,dx=\frac{2^x}{ln2}+e^x+\wp$$

! Am observat că $(2^x)'=2^x\,ln2$*, deci* $2^x=\frac{(2^x)'}{ln2}$

23. $I=\int(2e^x-3^x)\,dx,\ x\in\Re;\quad I=?$

Solutie:

$$I=2\int e^x\,dx-\int 3^x\,dx=2e^x-\frac{3^x}{ln3}+\wp$$

Verificare: $(2e^x-3^x)'=2e^x-\frac{3^x\cancel{ln3}}{\cancel{ln3}}=2e^x-3^x$

24. $I=\int\frac{dx}{x^2-1},\ x\in(-1,1);\quad I=?$

Solutie:

$$I=\int\frac{1}{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\wp=\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\wp$$

25. $I=\int \frac{dx}{e^x}$, $x\in\Re$; $I=?$

Solutie :

$I=\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}+\wp$

26. $I=\int \frac{(x^2-1)^2}{x^4}\,dx$, $x>0$; $I=?$

Solutie :

$(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$

$I=\int \frac{x^4}{x^4}\,dx-2\int \frac{x^2}{x^4}\,dx+\int \frac{1}{x^4}\,dx=\int 1\,dx-2\int \frac{1}{x^2}\,dx+\int \frac{1}{x^4}\,dx$

$I=\int dx+2\int x^{-2}\,dx+\int x^{-4}\,dx=x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+\wp$

27. $I=\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\,dx$, $x\in(-1,1)$; $I=?$

Solutie :

$I=\int \left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\right)dx=-\int \frac{dx}{x^2-1}-\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$I=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\arcsin(x)+\wp$

Dar, ținând cont că $x\in(-1,1)$, *I va fi:*

$I=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\arcsin(x)+\wp$

28. $I=\int \frac{3+\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}\,dx$, $x\in\Re$; $I=?$

Solutie :

$I=\int \left(\frac{3}{x^2+4}+\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}\right)dx=3\int \frac{dx}{x^2+4}+\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

$I=\frac{3}{2}\,arctg\left(\frac{x}{2}\right)+\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+\wp$

29. $I=\int \frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x)}\,dx$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$; $I=?$

Solutie :

$I=\int \frac{dx}{\cos^2(x)}=tg(x)+\wp$

30. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}$, $x\in\Re$; $I=?$

Solutie :

$I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+5^2}\right|+\wp$

[1]

Integrarea prin părți

!Nu din părți :D

Formula:

$$\boxed{\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f'\cdot g\,dx}$$

Să se calculeze integralele:

1. $\int lnx\,dx\,,\, x>0$

Solutie :

Alegem $f(x)=\ln(x),\ g'(x)=1.$ *De aici* :

$$f'(x)=1,\qquad g(x)=x$$

Folosind formula integrării prin părți, obținem :

$$\int x\ \ln(x)\,dx=\int x'\ln(x)\,dx=xln(x)-\int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx=$$

$$=xln(x)-x+\wp$$

2. $\int xln(x)\,dx\,,\, x>0$

Soltuie :

Alegem $f(x)=\ln(x),\ g'(x)=x.$ *În concluzie* :

$$f'(x)=\frac{1}{x}\,,\, g(x)=\frac{x^2}{2}$$

Aplicăm formula integrării prin părți :

$$\int xln(x)\,dx=\int \ln(x)\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx=\ln(x)\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int x^{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{4}\ x^2+\wp$$

3. $\int \ln^2(x)\,dx\,,\, x>0$

Solutie :

Notăm $f(x)=\ln^2(x),\ g'(x)=1.$Deci :

$$f'(x)=\frac{2}{x}\ \ln(x),\ g(x)=x$$

Găsim : $\int \ln^2(x)\,dx=\int x'\ln(x)\,dx=xln^2(x)-2\int\frac{\ln(x)}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\,dx=$

$=xln^2(x)-2\int\ln(x)\,dx$ *Folosind ex* 1. *obținem* :

$$\int \ln^2(x)dx=xln^2(x)-2(xln(x)-x)+\wp=$$

$$=x(\ln^2(x)-2\ln(x)+2)+\wp$$

1

4. $\int x^2 \ln(x)\,dx, x>0$

Solutie :

$f(x)=\ln(x), g'(x)=x^2$ *si avem :*

$f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\frac{x^3}{3}$

Aplicând formula obținem :

$$\int x^2 \ln(x)dx=(\frac{x^3}{3})'\ln(x)-\frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+\wp=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{1}{9}x^3+\wp$$

5. $\int \frac{\ln(x)}{x}dx, x>0$

Solutie :

$f(x)=\ln(x), g'(x)=\frac{1}{x}$

$f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\ln(x)$

Aplicăm formula :

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\int(\ln(x))'\cdot\ln(x)dx=\ln^2(x)-\int\frac{1}{x}\ln(x)dx$$

Observăm că $\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\ln^2(x)-\int\frac{\ln(x)}{x}dx$, *deci*

$2\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\ln^2(x)+\wp$, *în final :*

$$\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\frac{1}{2}\ln^2(x)+\wp$$

6. $\int x^2e^x dx, x\in\Re$

Solutie :

$f(x)=e^x, g'(x)=x^2,$ *atunci :*

$f'(x)=e^x, g(x)=\frac{x^3}{3},$ *deci :*

$$\int x^2e^x dx=\int(\frac{x^3}{3})'\cdot e^x dx=\frac{x^3}{3}e^x-\frac{1}{3}\int x^3\cdot e^x dx$$

Observăm că integrala astfel obținută este mult mai complicată

Atunci vom alege $f(x)=x^2, g'(x)=e^x$ *cu*

$f'(x)=2x, g(x)=e^x$

Deci : $\int x^2 e^x dx=\int x^2(e^x)'dx=$

$=x^2e^x-2\int xe^x dx$

Aplicăm încă odată formula de integrare prin părți şi alegem :

$f(x)=x, g'(x)=e^x$ *astfel încât :*

$f'(x)=1, g(x)=e^x$ *si obținem :*

$$\int xe^x dx=\int x(e^x)'dx=xe^x-\int e^x\cdot x'dx=xe^x-e^x+\wp$$

În final :

$$\int x^2e^x dx=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+\wp=$$

$$=e^x(x^2-2x+2)+\wp$$

7. $\int (x^2-2x-1)e^x\,dx,\ x\in\Re$

Solutie *:*

Considerăm $f(x)=x^2-2x-1$ *si* $g'(x)=e^x$ *cu*

$f'(x)=2x-2$ *si* $g(x)=e^x$

Aplicînd formula obținem:

$\int (x^2-2x-1)e^x\,dx=\int (x^2-2x-1)(e^x)'\,dx=$ *newkine* $=(x^2-2x-1)e^x-2\int (x-1)e^x\,dx$

Luând separat:

$\int (x-1)e^x\,dx=\int xe^x\,dx-\int e^x\,dx=$ *(conform ex6)* $=$

$=xe^x-e^x+\wp$

În final:

$\int (x^2-2x-1)e^x\,dx=(x^2-2x-1)e^x-2xe^x+4e^x+\wp=$

$=e^x(x^2-4x+3)+\wp$

8. $\int x\sin(x)\,dx,\ x\in\Re$

Solutie *:*

Notăm $f(x)=x,\ g'(x)=\sin(x)$ *si avem:*

$f'(x)=1,\ g(x)=-\cos(x)$

Deci: $\int xsin(x)\,dx=\int x(-\cos(x))'\,dx=$

$=-xcos(x)-\int -\cos(x)\,dx=$

$=-xcos(x)+\sin(x)+\wp$

9. $\int x^2\sin(x)\,dx,\ x\in\Re$

Solutie *:*

$f(x)=x^2\ ,g'(x)=\sin(x)\rightarrow$

$\rightarrow f'(x)=2x\ ,g(x)=-\cos(x),$ *integrala devine:*

$\int x^2\sin(x)\,dx=\int x^2(-\cos(x)')\,dx=$

$=-x^2\cos(x)-2\int -xcos(x)\,dx,$ *notam* $2\int -xcos(x)\,dx=I'$

$I'=2\int xcos(x)\,dx=2\mathrm{int}\,x(\sin(x))'\,dx=$

$=2x\sin(x)-2\int x(\sin(x))'\,dx=$

$=2x\sin(x)+2\cos(x)+\wp$

Finalizare:

$\int x^2\sin(x)\,dx=-x^2\cos(x)+2x\sin(x)+2\cos(x)+\wp$

10. $\int \sin^2(x)\,dx,\ x\in\Re$

Solutie *:*

Luăm $f(x)=\sin^2(x)$ *si* $g'(x)=1\rightarrow$

$\rightarrow f'(x)=2\sin(x)\cos(x)=\sin(2x)$ *si* $g(x)=x$

$\int \sin^2(x)dx=\int (x)'\sin^2(x)\,dx=xsin^2(x)-\int x\cdot\sin(2x)dx$ *notam* $\int x\cdot\sin(2x)dx=I'$

$I'=\frac{1}{2}\int x(\cos(2x))'\,dx=\frac{1}{2}\ xcos(2x)-\frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx=$

$=\frac{1}{2}xcos(2x)-\frac{1}{2}\sin(2x)\cdot\frac{1}{2}+\wp$

Finalizare:

$\int \sin^2(x)dx=x(\sin^2(x)-\frac{\cos(2x)}{2})-\frac{1}{4}\sin(2x)+\wp$

11. $\int e^x \sin(x)\,dx,\ x\in\Re$

***Solutie*:**

Notăm $f(x)=e^x,\ g'(x)=\sin(x)\to$

$\to f'(x)=e^x,\ g(x)=-\cos(x)$

În concluzie:

$I=\int e^x\sin(x)\,dx=\int e^x(-\cos(x))\,dx=$

$=-e^x\cos(x)+\int e^x\cos(x)\,dx$ *notam* $\int e^x\cos(x)\,dx=I'$

$I'=\int e^x\cdot(\sin(x))'\,dx=e^x\sin(x)-\int e^x\sin(x)\,dx$ *dar* $\int e^x\sin(x)\,dx=I$

Deci:

$I=-e^x\cos(x)+e^x\sin(x)-I+\wp$

$I=\frac{1}{2}e^x(\sin(x)-\cos(x))+\wp$

Obs: I'->citim I "prim" şi nu I "derivat"
->l-am ales ca pe o notație

` `

12. $\int\sqrt{x^2-9}\,dx,\ x>3$

***Solutie*:**

$I=\int^{\sqrt{x^2-9}\cdot.\cdot}\frac{\sqrt{x^2-9}}{1}dx=$ *(am raționalizat)* $=\int\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2-9}}dx=$

$=\underbrace{\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}dx}_{I_1}-9\underbrace{\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}}_{I_2}$ *unde* $I=I_1-I_2$

$I_2=9\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|$

Pentru a calcula I_1, *notăm* $f(x)=x,\ g'(x)=(\sqrt{x^2-9})'$ *adică* $g'(x)=\cancel{2}\frac{x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-9}}=\frac{x}{x^2-9}$ *unde:*

$f'(x)=1$ *si* $g(x)=\sqrt{x^2-9}$

În concluzie: $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}dx=\int x\cdot(\sqrt{x^2-9})'\,dx=$

$=x\sqrt{x^2-9}-\int\sqrt{x^2-9}\,dx=x\sqrt{x^2-9}-I$, *Dar* $I=I_1-I_2\to$

$\to I=x\sqrt{x^2-9}-I-9\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|\to$

$\to I=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-9}-9\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|)+\wp$

Formulă generală:

$$\boldsymbol{\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|)+\wp,\ x\in[-a,a],a>0}$$

13. $I=\int \sqrt{x^2+9}\,dx$; $I=?$

Solutie:

$$I=\int \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=$$

$$=\underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx}_{I_1}+9\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}}_{I_2}$$

$$I_2=9\ln(x+\sqrt{x^2+9})+\wp$$

Temă: Calculați I_1 *folosind ex* 12

Finalizare: $I=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+9}+9\ln\sqrt{x^2+9})+\wp$

14. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx,\ x\in(-3,3)$

Solutie:

$$I=\int \sqrt{9-x^2}\,dx=\int \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=$$

$$=9\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx}_{I_1}-\underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=9\arcsin(\frac{x}{3})+\wp$$

$$I_2=\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

Observăm că: $(\sqrt{9-x^2})'=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

Deci I_2 *se poate calcula prin părți astfel:*

$$I_2=\int -x(\sqrt{9-x^2})'\,dx=-x\sqrt{9-x^2}+\int \sqrt{9-x^2}\,dx$$

Finalizare:

$$I=I_1-I_2=9\arcsin(\frac{x}{2})+x\sqrt{9-x^2}-I\rightarrow$$

$$\rightarrow I=\frac{1}{2}(x\sqrt{9-x^2}+9\arcsin\frac{x}{3})+\wp$$

Formulă generală:

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2+a^2}\ arsin\frac{x}{a})+\wp\quad x\in[-a,a],a>0}$$

15. $\int xe^{2x}\,dx,\ x\in\Re$

Solutie:

Notăm $f(x)=x$ *si* $g'(x)=e^{2x}\rightarrow f'(x)=1$ *si* $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$I=\int xe^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int x(e^{2x})'\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+\wp\rightarrow\rightarrow I=\frac{1}{2}e^{2x}(x-\frac{1}{2})+\wp$$

$$I=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot(\frac{2x-1}{2})+\wp$$

16. $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx,\ x>3$

Solutie:

$I=\int x\sqrt{x^2-9}\,dx=\int \frac{x(x^2-9)}{\sqrt{x^2-9}}\,dx=$

$=\underbrace{\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}\,dx}_{I_1}-9\underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx}_{I_2}$ *unde* $I_2=9\sqrt{x^2-9}$

Pentru a calcula I_1 *notăm* $f(x)=x^2$ *si* $g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\rightarrow$

$\rightarrow f'(x)=2\text{x}$ *si* $g(x)=\sqrt{x^2-9}$

Deci :

$I_1=\int x^2(\sqrt{x^2-9})'\,dx=x^2\sqrt{x^2-9}-2\int x\sqrt{x^2-9}\,dx=$

$=x^2\sqrt{x^2-9}-2I$

$I=I_1-I_2=x^2\sqrt{x^2-9}-2\text{I}-9\sqrt{x^2-9}$

$I=\frac{1}{3}(x^2-9)\sqrt{x^2-9}+\wp$

17. $\int e^x\cos(x)\,dx,\ x\in\Re$

Solutie :

Notăm $f(x)=\cos(x)$ *si* $g'(x)=e^x\rightarrow f'(x)=-\sin(x)$ *si* $g(x)=e^x$

Integrala devine :

$I=\int e^x\cos(x)\,dx=\int (e^x)'\cos(x)\,dx=$

$=e^x\cos(x)-\int e^x(-\sin(x))\,dx=$

$=e^x\cos(x)+\underbrace{\int e^x\sin(x)\,dx}_{I}{}'$

Pentru a calcula integrala I' *folosim iarăşi formula de integrare prin părți astfel :*

$f(x)=\sin(x)$ *si* $g'(x)=e^x\rightarrow f'(x)=\cos(x)$ *si* $g(x)=e^x$

$I'=\int (e^x)'\sin(x)\,dx=e^x\sin(x)-\int e^x\cos(x)\,dx$

În colncluzie :

$I=e^x\cos(x)+e^x\sin(x)-I\rightarrow$

$\rightarrow I=\frac{e^x}{2}(\cos(x)+\sin(x))+\wp$

18. $\int \arcsin(x)\,dx,\ x\in(-1,1)$

Solutie:

Alegem $f(x)=\arcsin(x)$ *si* $g'(x)=1\rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *si* $g(x)=x$

Asadar :

$I=\int \arcsin(x)\,dx=\int (x)'\arcsin(x)\,dx=$

$=x\cdot\arcsin(x)-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Observăm că : $(\sqrt{1-x^2})'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ *, în concluzie :*

$I=xarcsin(x)+\int (\sqrt{1-x^2})'\,dx=\ x\,codt\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+\wp$

19. $\int \sin^2(x)\,dx\,,\ x\in\Re$

Solutie :

Met I : Notăm $f(x)=\sin(x)$ *si* $g'(x)=\sin(x)\rightarrow$

$\rightarrow f'(x)=\cos(x)$ *si* $g(x)=-\cos(x)$

$I=\int \sin(x)\cdot\sin(x)\,dx=\int \sin(x)\cdot(-\cos(x))\,dx=$

$=-\sin(x)\cos(x)+\int \cos^2(x)\,dx=$ *Dar* $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$ *deci :*

$\int \cos^2(x)\,dx=\int dx-\int \sin^2(x)\,dx$ *Finalizare :*

$I=-\sin(x)\cos(x)+x-I\,,$ *dar* $\sin(x)\cos(x)=\frac{\sin(2x)}{2}$

Deci :

$I=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2x)+\wp$

Met II : Notăm $f(x)=\sin^2(x)$ *si* $g'(x)=1\rightarrow$

$\rightarrow f'(x)=2\sin(x)\cos(x)$ *si* $g(x)=x$

$I=\int (x)'\sin^2(x)\,dx=x\cdot\sin^2(x)-\int 2x\cdot\sin(x)\cos(x)\,dx$

$I=xsin^2(x)-\int x\cdot\sin(2x)\,dx$

Folosim iarăşi formula de integrare prin părți:

Notăm $f(x)=x$ *si* $g'(x)=\sin(2x)\rightarrow f'(x)=1$ *si* $g(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x)$

$x(-\frac{1}{2}\cos(2x))'\,dx=-\frac{1}{2}xcos(2x)+\frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx$

$I=\int x\sin(2x)dx=\int ¿\,I=x\cdot\sin^2(x)+\frac{1}{2}xcos(2x)-\frac{1}{4}\sin(2x)+\wp=$

$=\frac{x}{2}(2\sin^2(x)+\cos(2x))-\frac{1}{4}\sin(2x)+\wp$

Dar $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x),$ *dec :*

$2\sin^2(x)+\cos(2x)=2\sin^2(x)+\cos^2(x)-\sin^2(x)=1$

Finalizare :

$I=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2x)+\wp$

20. $\int arctg(x)\,dx\,,\ x\in\Re$

Solutie :

Folosim notația : $f(x)=arctg(x)$ *si* $g'(x)=1\rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ *si* $g(x)=x$

Obținem :

$I=\int arctg(x)\,dx=\int (x)'\,arctg(x)\,dx=xarctg(x)-\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

Printr-o oarecare intuiție matematică observăm că:

$[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]'=\frac{x}{1+x^2}$ *, aşadar :*

$I=x\cdot arctg(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\wp$

Exerciții propuse

Calculați integralele:

1. $\int xe^{x}\,dx$, $x\in\Re$
2. $\int x^{2}e^{3x}\,dx$, $x\in\Re$
3. $\int (x-1)^{2}e^{x}\,dx$, $x\in\Re$
3. $\int (x^{3}-3x+2)\,e^{x}\,dx$, $x\in\Re$
5. $\int (x-2)^{2}e^{2x}\,dx$, $x\in\Re$
6. $\int x\cos(x)\,dx$, $x\in\Re$
7. $\int x^{2}\cos(x)\,dx$, $x\in\Re$
8. $\int \cos^{2}(x)\,dx$, $x\in\Re$
9. $\int e^{2x}\sin(x)\,dx$, $x\in\Re$
10. $\int \sqrt{x^{2}-25}\,dx$, $x>5$
11. $\int \sqrt{x^{2}+196}\,dx$, $x\in\Re$
12. $\int \sqrt{36-x^{2}}\,dx$, $x\in(-6,6)$
13. $\int x\sqrt{x^{2}-25}\,dx$, $x>5$
14. $\int e^{x}(-\cos(x))\,dx$, $x\in\Re$
15. $\int \arccos(x)\,dx$, $x\in(-1,1)$
16. $\int arcctg(x)\,dx$, $x\in\Re$

Metoda substituției

Prima metodă de schimbare de varibilă

Probleme rezolvate:

Să se calculeze, folosind prima metodă de schimbare de variabilă, primitivele următoarelor funcții:

1. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+7}$, $x\in\Re$

Solutie :

Notăm $x^2+x+7=t$ *si derivăm* :

$$(x^2+x+7)'dx=t'dt \rightarrow (2x+1)dx=dt$$

Integrala devine :

$$I=\int\frac{2x+1}{x^2+x+7}dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+\wp$$

Revenind la substituția făcută avem :

$$I=\ln(x^2+x+7)+\wp$$

2. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}$, $x\in\Re$

Soltie :

Notam $x^2+3x+1=t$ *şi derivăm* :

$$(x^2+3x+1)'dx=t'dt \rightarrow (2x+3)'dx=dt$$

Integrala devine :

$$I=\int\frac{2\mathrm{x}+3}{x^2+3x+1}dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+\wp$$

În final revenim la substituție :

$$I=\ln(x^2+3x+1)+\wp$$

3. $f(x)=\dfrac{4x+2}{x^2+x+2}$ $x\in\Re$

Solutie :

Notam : $x^2+x+2=t$ *astfel* :

$$(x^2+x+2)'=t'dt \rightarrow (2x+1)'dx=dt\,|\cdot 2 \rightarrow (4x+2)dx=2\ dt$$

Integrala devine :

$$I=\int\frac{2}{t}dt=2\ln|t|+\wp=\ln t^2+\wp$$

Finalizare :

$$I=2\ln(x^2+x+2)^2+\wp$$

4. $f(x)=\frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\ \ x\in\Re$

Solutie *:*

Notam $\cos(x)=t$ *, derivam :*

$-\sin(x)\,dx=dt \rightarrow \sin(x)\,dx=-dt$

Deci : $I=\int \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx=\int \frac{-dt}{1+t^2}=$

$=-\boldsymbol{arctg}(t)+\wp$

Finalizare :

$I=-\boldsymbol{arctg}(\cos(x))+\wp$

5. $f(x)=\boldsymbol{tg}(x),\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$

Solutie *:*

Notam $\cos(x)=t$ *, derivam :*

$-\sin(x)\,dx=dt \rightarrow \sin(x)\,dx=-dt$

Obs : Am folosit faptul că $\boldsymbol{tg}(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *astfel :*

$I=\int \boldsymbol{tg}(x)\,dx=\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx=\int \frac{-dt}{t}=-\ln(t)+\wp$

Finalizare :

$I=-\ln(\cos(x))+\wp$

6. $f(x)=\frac{1+tg^2(x)}{tg(x)},\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$

Solutie *:*

Met I :

$I=\int (\frac{1}{tg(x)}+\frac{tg^2(x)}{tg(x)})dx=\int (\frac{1}{tg(x)}+tg(x))\,dx=\underbrace{\int \frac{dx}{tg(x)}}_{I_1}+\underbrace{\int tg(x)dx}_{I_2}$

$I_1=\int ctg(x)dx=\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx$

Notam $\sin(x)=t \rightarrow \cos(x)dx=dt\rightarrow$

$I_1=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+\wp=\ln(\sin(x))+\wp$

$I_2=\int tg(x)dx=\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$

Penru a rezolva integrala I_2 *vom proceda în mod analog*

Temă *: Rezolvați integrala* I_2

Trebuie să găsiți că : $I_2=\ln(-\cos(x))+\wp$

Finalizare :

$I=\ln(\sin(x))-\ln(\cos(x))+\wp$ *sau*

$I=\ln(\frac{\sin(x)}{\cos(x)})+\wp=\ln(tg(x))+\wp$

Met II :

$$I=\int \frac{1+tg^2(x)}{tg(x)}\,dx=\int \frac{1}{tg(x)}\cdot(tg(x))'\,dx$$

Obs : Am intuit foarte simplu *faptul că :*

$$1+tg^2(x)=\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}=(tg(x))'$$

Aşadar şi prin urmare...

Notam $tg(x)=t \rightarrow (tg(x))'\,dx=dt$

$I=\ln|t|+\wp$

Finalizare :

$I=\ln(tg(x))+\wp$

7. $f(x)=x^3\,e^{x^4},\ x\in\Re$

Solutie *:*

Notam $x^3 e^{x^4}=t$ *derivând constatăm :*

$$4\cdot x^3 e^{x^4}=dt \rightarrow x^3\,e^{x^4}\,dx=\frac{dt}{4}$$

În aceste circumstanțe...

$$I=\int x^3 e^{x^4}\,dx=\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\ln|t|+\wp$$

the end... $\quad I=\frac{1}{4}\ln(e^{x^4})+\wp$

8. $f(x)=\sin(x)\cdot\cos^2(x),\ x\in\Re$

Solutie *:*

Folosim notația $\cos(x)=t \rightarrow -\sin(x)\,dx=dt$

Utilizăm formula de schimbare de variabilă :

$$I=\int \sin(x)\cos^2(x)\,dx=\int -t^2\,dt=-\frac{t^3}{3}+\wp$$

Revenim la schimbarea de variabilă :

$$I=-\frac{\cos^3(x)}{3}+\wp$$

9. $f(x)=\sin^3(x)\cdot\cos^3(x),\ x\in\Re$

Solutie *:*

Notam $\cos(x)=t \rightarrow -\sin(x)\,dx=dt$

$$I=\int \sin^3(x)\cdot\cos^3(x)\,dx=\int \sin^2(x)\cdot\sin(x)\cdot\cos^3(x)\,dx=$$
$$=\int (1-\cos^2(x))\cdot\sin(x)\cdot\cos^3(x)\,dx=-\int (1-t^2)\cdot t^3\,dt=$$
$$=\int (t^5-t^3)\,dt=\int t^5\,dt-\int t^3\,dt=$$
$$=\frac{t^6}{6}-\frac{t^4}{4}+\wp$$

Finalizare :

$$I=\frac{\cos^6(x)}{6}-\frac{\cos^4(x)}{4}+\wp$$

10. $f(x)=tg(x)+tg^3(x),\ x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

Solutie :

Amintim din ex 6 :

$(tg(x))'=\frac{1}{\cos^2(x)}=\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+tg^2(x)$

Notam $tg(x)=t \rightarrow (1+tg^2(x))dx=dt$

$I=\int tg(x)+tg^3(x)\,dx=\int tg(x)(1+tg^2(x))\,dx=$

$=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+\wp$

$I=\frac{tg^2(x)}{2}+\wp=\frac{1}{2}\,tg^2(x)+\wp$

!Obs:Pentru a beneficia de un punctaj maxim în cazul rezolvării unui exercițiu matematic, trebuie să aducem soluția sub forma cea mai simplă.

11. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}},\ x\in(0;1)$

Solutie :

Notăm $x\sqrt{x}=t\ |^2 \rightarrow (x\sqrt{x})^2=x^3=t^2$

Derivăm , $(x\sqrt{x})'\,dx=dt$

Dar $(x\sqrt{x})'=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\frac{3\cdot x}{2\sqrt{x}}$*, deci :*

$\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx=dt \rightarrow \sqrt{x}\cdot dx=\frac{2}{3}\,dt$

integrala $I=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$ *devine*

$I'=\int\frac{2}{3}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$

$=\frac{2}{3}\arcsin(t)+\wp$

Revenind la schimbare de variabilă făcută obținem:

$I=\frac{2}{3}\arcsin(x\sqrt{x})+\wp$

12. $f(x)=\frac{x}{1+x^4},\ x\in\Re$

Solutie :

Notam $: x^2=t \rightarrow 2\cdot x\,dx=dt \rightarrow xdx=\frac{dt}{2}$

Integrala $I=\int\frac{x}{1+x^4}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2\mathrm{x}}{1+x^4}\,dx$ *devine prin schimbare de variabila* :

$I'=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\,arctg(t)+\wp$

Revenind la schimbarea factuta obtinem:

$I=\frac{1}{2}\,arctg(x^2)+\wp$

13. $f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}},\ x>0,\ x\in\Re$

***Solutie*:**

Notam $\sqrt{x}=t \to \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt \to \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\,dt$

Integrala devine:

$I=\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int 2e^t dt=2e^t+\wp$

Revenind la schimbarea factuta obtinem:

$I=2e^{\sqrt{x}}+\wp$

14. $f(x)=\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}},\ x<0,\ x\in\Re$

***Solutie*:**

Notam $e^{2x}=t \to 2e^{2x}dx=dt \to$

$e^{2x}=t\ |^2 \to e^{4x}=t^2 \to e^{2x}\ dx=\frac{dt}{2}$

În concluzie: $I=\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{2}\arcsin(t)+\wp$

Revenind la schimbarea de variabilă obtinem:

$I=\frac{1}{2}\arcsin(e^{2x})+\wp$

15. $f(x)=\frac{e^{tg(x)}}{\cos^2(x)},\ x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

***Solutie*:**

Notam $tg(x)=t \to \frac{dx}{\cos^2(x)}=dt$

Prin schimbare de variabilă:

$I=\int \frac{e^{tg(x)}}{\cos^2(x)}dx=\int e^t dt=e^t+\wp$

Revenind la schimbarea făcută:

$I=e^{tg(x)}+\wp$

16. $f(x)=\sqrt{1+x^2},\ x\in\Re$

***Solutie*:**

Incercam notatia $1+x^2=t \to 2x\,dx=dt \to x\,dx=\frac{dt}{2}$

Tragem de aici concluzia că în acest caz metoda schimbării de variabilă nu ne prea surâde.Încercăm să folosim metoda integrării prin părți....poate,poate...

$I=\int \sqrt{1+x^2}dx=\int (x)'\sqrt{1=x^2}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int \frac{x^2}{1+x^2}dx=$

$=x\sqrt{1+x^2}-(\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx-\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx) \to$

$\to I=x\sqrt{1+x^2}-I+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\wp$

$2\cdot I=x\sqrt{1+x^2}=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\wp$

Finalizare:

$I=\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{x^2+1}))+\wp$

!!!!!Atentie la pag 30 ex 16'

17. $f(x)=\frac{\sin(2x)}{\sin^4(x)+3}$, $x\in\Re$

Solutie :

Alegem $\sin^2(x)=t \rightarrow 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)dx=dt$

Dar cunoastem faptul ca $2\sin(x)\cos(x)=\sin(2x)$, *deci* :

$\sin(2x)dx=dt$ *iar* $\sin^4(x)=(\sin^2(x))^2=t^2$

După toate acestea...

$$I=\int\frac{\sin(2x)}{\sin^4(x)+3}dx=\int\frac{dt}{t^2+3}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+\wp$$

Revenim asupra schimbarii facute :

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg(\frac{\sin^2(x)}{\sqrt{3}})+\wp$$

18. $f(x)=x\,tg(x^2)$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

Solutie :

Notam $x^2=t \rightarrow 2x\,dx=dt \rightarrow x\,dx=\frac{dt}{2}$

$$I=\int x\,tg(x^2)dx=\frac{1}{2}\int tg(t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sin(t)}{\cos}(t)dt$$

Folosim o nouă schimbare de variabilă:

$\cos(t)=a \rightarrow -\sin(t)dt=da \rightarrow \sin(t)dt=-da$

$$I=\frac{-1}{2}\int\frac{da}{a}=\frac{-1}{2}\ln(a)+\wp=-\ln(\sqrt{(a)})+\wp=-\ln(\sqrt{\cos(t)})+\wp$$

În final $I=-\ln(\sqrt{\cos(x^2)})+\wp$ *sau* $I=\ln(\frac{\sqrt{\cos(x^2)}}{\cos(x^2)})+\wp$

19. $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$, $x\in\Re$

Solutie :

Obs ca : $x^2+x+1=(x^2+\frac{2x\cdot 1}{2}+\frac{1}{4})-\frac{1}{4}+1=$

$$=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+2+x+1}}=\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

Notam $x+\frac{1}{2}=t \rightarrow dx=dt$

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}=\ln\left|t+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right|+\wp$$

În final:

$$I=\ln[(x+\frac{1}{2})^2+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}]+\wp \quad \textit{sau}$$

$$I=\ln[(x+\frac{1}{2})^2+\sqrt{x^2+x+1}]+\wp$$

20. $f(x)=\frac{1}{x\ln(2x)}$, $x>1$

Solutie:

$Notam: \ln(2x)=t \rightarrow \frac{2}{2x}dx=dt \rightarrow \frac{dx}{x}=dt$

$I=\int \frac{dx}{x\ln(2x)};$

I se transformă prin schimbare de variabilă în:

$I'=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+\wp$ *Revenim la schimbarea făcută*:

$I=\ln(\ln(2x))\wp$

!Obs: Modulul a disparut pentru ca $x>1$

Exerciții propuse

Calculați primitivele următoarelor funcții, folosind prima metodă de schimbare de variabilă:

1. $f(x)=\frac{3x+1}{x^3+x+2}, x\in\Re$
2. $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+6}, x\in\Re$
3. $f(x)=\frac{6x+3}{x^2+x+9}, x\in\Re$
4. $f(x)=\frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}, x\in\Re$
5. $f(x)=ctg(x), x\in(0,\frac{\pi}{2})$
6. $f(x)=\frac{1-tg^2(x)}{tg(x)}, x\in(0,\frac{\pi}{2})$
7. $f(x)=\frac{x}{x^2+5x+12}, x>e^{2,} x\in\Re$
8. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sin(\sqrt{x}), x>0, x\in\Re$
9. $f(x)=\frac{x^3}{x^8+1}, x\in\Re$
10. $f(x)=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{-\sqrt{x}}, x>0, x\in\Re$
11. $f(x)=x^4e^{x^5}, x\in\Re$

Integrarea funcțiilor raționale simple

Probleme rezolvate:

Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

1. $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $x<-1$

***Solutie*:**

$$\int \frac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|+\wp=\ln(-x-1)+\wp$$

2. $f(x)=\frac{x}{(x+1)(2x+1)}$, $x>-1$, $x\in\Re$

***Solutie*:**

Calculul primitivei acestei funcții presupune mai întâi descompunerea ei în funcții raționale simple, adică:

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+1}$$

Dupa ce aducem la acelasi numitor obtinem:

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)}=\frac{2Ax+A+Bx+B}{(x+1)(2x+1)}\text{, } \textit{de fapt}:$$

$$x+0=x(2\cdot A+B)+A+B$$

Trecem la identificarea coeficientilor:

$$\begin{cases} 2\cdot A+B=1 \\ A+B=0 \end{cases}$$ pentru că coeficientul lui x este 1 iar coeficientul liber este 0.

Rezolvând sistemul obținem:

$A=1$ *si* $B=-1$

Ajungem la concluzia: $\frac{x}{(x+1)(2x+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}$, *prin urmare*:

$$\int f(x)=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{2x+1}=$$

$$=\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(2x+1)+\wp=$$

$$=\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\right)+\wp$$

3. $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+3}$, $x\in\Re$

***Solutie*:**

Calculam radacinile polinomului f.

$-$*voi folosi în loc de litera grecesca delta pe D*

$D=b^2-4ac=4-12=-8<0\rightarrow f$ *are radacini complexe.*

Datorită acestui fapt încercăm scrierea lui sub formă de sumă de pătrate.

$$x^2+2x+3=x^2+2x+1+2=(x+1)^2+(\sqrt{2})^2$$

$$\int f(x)=\int\frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+\wp$$

Propunator: prof. Gheorghita Adrian Stefan

e-mail: Yuryashy@yahoo.com