Mircea Buzilă

Şiruri recurente

Editura „Neutrino”
2009

Titlul: Şiruri recurente
Autor: Mircea Buzilă
ISBN 978-973-8916-73-9

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
BUZILĂ, MIRCEA
Şiruri recurente / Mircea Buzilă. - Reşiţa : Neutrino, 2009
Bibliogr.
ISBN 978-973-8916-73-9

51(076)

Mobil: 0741017700
E-mail: editura@neutrino.ro
www.neutrino.ro

PREFAȚĂ

Lucrarea de față este dedicată atât prezentării teoriei generale a şirurilor recurente, cât şi numeroaselor exemple din cele mai variate ramuri ale matematicii, care conduc la şiruri recurente, cât şi la necesitatea determinării termenului general al acestora în unele situații speciale. Dintre aceste exemple amintesc: ridicarea la putere a matricelor, calculul unor determinanți, rezolvarea ecuațiilor diofantice şi a celor funcționale, limita punctelor din plan construite prin proiecții, numărarea poligoanelor determinate de o rețea de drepte din plan, calculul derivatelor de ordin superior, calculul primitivelor şi al integralelor, introducerea recurentă a funcțiilor elementare de bază etc. Din păcate, datorită volumului mare, nu am putut să cuprind detaliat în această lucrare toate exemplele enumerate mai sus.

Şirurile recurente oferă modalități de rezolvare a unor probleme puse nu numai de matematică, ci şi de alte domenii ale cunoaşterii. Dintre acestea amintesc: mişcarea undelor sonore, determinarea numărului structurilor Kekule din chimia organică, stabilirea culturilor bacteriene, filotaxia şi legea creşterii organice, combinatorica discordanțelor, strategiile de învățare în timp minim etc. Se poate deci conchide, că şirurile recurente furnizează o veritabilă metodă de modelare şi

rezolvare, cu o largă arie de cuprindere, a problemelor de matematică aplicațiilor sale.

Bazele teoriei şirurilor recurente au fost elaborate şi publicate în deceniul al III-lea al secolului XVIII de către matematicianul francez Moivre şi de către matematicianul elvețian Daniel Bernoulli. O teorie dezvoltată a elaborat-o marele matematician al secolului XVIII Leonard Euler, care a consacrat şirurilor recurente un capitol al lucrării sale „Introducere în analiza infiniților mici" (1748).

CAPITOLUL I

ŞIRURI DE NUMERE REALE

1.1. Noțiunea de șir.

Există multe probleme de algebră, geometrie, informatică care utilizează șiruri. Este suficient să amintim progresiile aritmetice și geometrice, șirul perimetrelor poligoanelor regulate cu n laturi înscrise într-un cerc, șirul rezultatelor intermediare într-un proces algoritmic etc.

Fie k un număr natural fixat. Vom nota $N_k = \{n \in N / n \geq k\}$, adică $N_k = \{k, k+1, k+2, ...\}$. Deci $N_0 = N$.

Definiția 1.1.1.

Fie M o mulțime fixată. Prin șir infinit de elemente ale lui M vom înțelege o funcție $f : N_k \to M$, unde k este un număr natural fixat.

Punând $f(n) = a_n$, șirul f se mai notează $(a_n)_{n \geq k}$. Elementul a_n se numește termenul de rangul n al șirului.

Așadar, șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$ este funcția $f : N \to R$ definită prin $f(n) = a_n, \forall n \geq 0$.

Două șiruri $(a_n)_{n \geq k}$, $(b_n)_{n \geq k}$ sunt egale dacă $a_n = b_n$ pentru orice $n \geq k$.

Exemplul 1.1.1.

Dacă $a \in R$, atunci se poate considera șirul constant $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_n = a$ pentru orice întreg $n \geq 0$.

Dacă $b \neq a$ este un alt număr real, atunci șirul $(c_n)_{n \geq 0}$ definit prin $c_n = \begin{cases} a, \text{dacă n este par} \\ b, \text{dacă n este impar} \end{cases}$ nu mai este constant. Se observă că pentru orice $n \geq 0$ avem $c_n = b \cdot \frac{1-(-1)^n}{2} + a \cdot \frac{1+(-1)^n}{2}$.

Exemplul 1.1.2.

Șirul $(n)_{n \geq 0}$ se numește șirul numerelor naturale, a cărui mulțime de termeni este N.

Exemplul 1.1.3.

Indicăm un exemplu de șir care apare în unele considerații economice.

Presupunem costul inițial al unei instalații egal cu C. După începerea funcționării instalației, C se micșorează treptat. Notez cu C_n costul instalației după n ani de funcționare, $n \geq 1$. Raportul $\mu = \frac{C - C_1}{C}$ se numește coeficient de amortizare al costului inițial; deoarece $C_1 < C$, avem $0 < \mu < 1$. Pentru calculul lui C_n se observă mai întâi că $\mu C = C - C_1$, deci $C_1 = C(1-\mu)$, economiștii fac ipoteza că în anii următori se respectă aceeași regulă, adică $C_2 = C_1(1-\mu) = C(1-\mu)^2$, $C_3 = C_2(1-\mu) = C(1-\mu)^3$ etc. și în general, $C_n = C(1-\mu)^n$ pentru orice $n \geq 1$. Așadar, este definit în mod firesc un șir de numere reale $(C_n)_{n \geq 0}$, unde $C_0 = C$.

Exemplul 1.1.4.

Pentru orice număr real $x = m$, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n > 0$, am notat cu $x^{(0)} = m, x^{(1)} = m + \frac{x_1}{10}, x^{(2)} = m + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2}, ...$ trunchierile sale succesive. În acest mod, se obține un șir $(x^{(n)})_{n \geq 0}$ asociat lui x.

1.2. Şiruri convergente de numere reale.

Definiţia 1.2.1.

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $a \in \overline{R}$. Se spune că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita a dacă în orice vecinătate a punctului a se află toţi termenii şirului începând de la un anumit rang. Se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Definiţia 1.2.2.

Orice şir de numere reale având limită finită se numeşte convergent. Şirurile care nu au limită şi cele care au limită infinită se numesc divergente.

Exemplul 1.2.1.

Fie $a_n = \dfrac{1}{n}, n \geq 1$. Arătăm că $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Într-adevăr, fie V o vecinătate oarecare a punctului $a = 0$. Atunci există $\varepsilon > 0$, astfel încât $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$ şi se observă că dacă $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, atunci $\dfrac{1}{n} \in (0,3) \subset V$, adică toţi termenii şirului $a_n = \dfrac{1}{n}$ se află în V, începând cu rangul $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Exemplul 1.2.2.

Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$. Într-adevăr, fie V o vecinătate oarecare a lui $+\infty$, deci există $\varepsilon > 0$, astfel încât $(\varepsilon, \infty) \subset V$. Punând condiţia $n^2 > \varepsilon$, rezultă $n^2 \in V$. Cu alte cuvinte, luând $N = \left[\sqrt{\varepsilon}\right] + 1$, rezultă că $\forall n \geq N$ avem $n > \sqrt{\varepsilon}$, deci $n^2 > \varepsilon$, adică $n^2 \in V$.

Teorema 1.2.1. (Teorema de unicitate a limitei).
Dacă un şir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.

Demonstraţie:

Presupunem că $a_n \to a$ şi $b_n \to b$ şi avem de arătat că $a = b$. Dacă prin reducere la absurd, avem $a \neq b$, atunci alegem vecinătăţile V_1 şi V_2 ale punctelor a şi respectiv b, care să fie disjuncte. Deoarece $a_n \to a$, atunci în V_1 se vor afla toţi termenii şirului de la un rang N încolo; în particular, în afara lui V_1, deci în V_2 se vor afla doar un număr finit (cel mult $N+1$) de termeni ai şirului $(a_n)_{n\geq 0}$, deci b nu poate fi limita şirului $(a_n)_{n\geq 0}$.

Teorema 1.2.2. (de caracterizare a limitelor de şiruri).

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.

1. Şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent către un număr $a \in R$ dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia următoare: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $N = N(\varepsilon)$, depinzând de ε, astfel încât $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N$.

2. Şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita $+\infty$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $N = N(\varepsilon)$, astfel încât $a_n > \varepsilon$ pentru orice $n > N$.

3. Şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita $-\infty$ dacă şi numai dacă: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $N = N(\varepsilon)$, astfel încât $a_n < -\varepsilon$ pentru orice $n > N$.

1.3. Convergență şi mărginire.

Definiția 1.3.1.

Fie $s=(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Dacă $k_0<k_1<k_2<...<k_n<...$ este un şir strict crescător de numere naturale, atunci şirul $(a_{k_n})_{n\geq 0}$ se numeşte subşir al lui s.

Exemplul 1.3.1.

Luând $k_n=2n$ se obține subşirul $(a_{2n})_{n\geq 0}$ al lui s al termenilor de rang par şi pentru $k_n=2n+1$, subşirul $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ al termenilor de rang impar.

Teorema 1.3.1.

Dacă şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita l (în R), atunci orice subşir $(a_{k_n})_{n\geq 0}$ al său are de asemenea limita l.

Consecința 1.3.1.

Dacă un şir are un subşir divergent sau are două subşiruri convergente către limite distincte, atunci el este divergent.

Exemplul 1.3.2.

Şirul $a_n=(-1)^n, n\geq 1$, subşirul $(a_{2n})_{n\geq 1}$ converge către 1, iar subşirul $(a_{2n+1})_{n\geq 1}$ converge către –1, deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

Teorema 1.3.2.

Orice şir convergent de numere reale este mărginit.

Observația 1.3.1.

Reciproca este în general falsă. De exemplu şirul $a_n=(-1)^n, n\geq 1$ este mărginit dar nu este convergent.

Observația 1.3.2.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, atunci şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este în mod necesar nemărginit. Reciproca este în general falsă; de exemplu şirul $a_n=(-2)^n$ este nemărginit dar nu are limită în $\overline{R}$.

1.4. Criterii suficiente de convergență.

Dăm mai întâi un criteriu care asigură convergența unui şir prin utilizarea unor şiruri tip care converg către zero, $+\infty$ sau $-\infty$.

Teorema 1.4.1.

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.

1. Presupunem că l este un număr real şi că există un şir $(b_n)_{n\geq 0}$ de numere reale pozitive convergent către zero astfel încât $|a_n-l|\leq b_n$ pentru orice $n\geq k$ (k fiind un rang fixat). Atunci şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=l$.

2. Dacă $(u_n)_{n\geq 0}$ este un şir astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\infty$ şi dacă $a_n\geq u_n$ pentru orice $n\geq k$ (k fixat), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

3. Dacă $(v_n)_{n\geq 0}$ este un şir astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=-\infty$ şi $a_n\leq v_n$, pentru orice $n\geq k$ (k fixat), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

Luând cazul particular $b_n=\frac{1}{n}$, rezultă direct:

Corolarul 1.4.1.

Dacă $|a_n-l|<\frac{1}{n}, \forall n\geq 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=l$.

În cazul particular când $l=0$ şi toate numerele a_n sunt pozitive, se obține:

Corolarul 1.4.2.

Dacă $0\leq a_n\leq b_n$ pentru orice $n\geq k$ (k fixat) şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

Exemplul 1.4.1.

Pentru orice număr real x, şirul $(x^{(n)})_{n\geq 0}$ al trunchierilor sale succesive este convergent şi are limita x. Într-adevăr ştim că $\left|x^{(n)} - x\right| < \frac{1}{10^n}$ pentru orice $n \geq 0$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$.

Exemplul 1.4.2.

Fie $a_n = \frac{\sin^2 n}{n}, n \geq 1$. Avem $\left|a_n - 0\right| \leq \frac{1}{n}$, deci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Analog $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$.

Exemplul 1.4.3.

Fie $a_n = \sqrt[n]{n} - 1, n \geq 1$. Evident $a_n \geq 0$ şi $1 + a_n = \sqrt[n]{n}$, deci $n = (1 + a_n)^n$, adică $n = 1 + C_n^1 a_n + C_n^2 a_n^2 + ... + a_n^n$, deci $n \geq C_n^2 a_n^2$. Atunci $n \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot a_n^2$ şi cum $a_n \geq 0$, se deduce inegalitatea $a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ pentru orice $n \geq 2$. Şirul $b_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ converge la zero, deci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Exemplul 1.4.4.

Orice număr real x este limita unui şir de numere raționale (respectiv neraționale).

Teorema 1.4.2. (Teorema lui Weierstrass).

a) Orice şir monoton crescător şi mărginit superior de numere reale este convergent.

b) Orice şir monoton descrescător şi mărginit inferior în R este convergent.

Exemplul 1.4.6.

Şirul $a_n = \frac{2n-1}{n}, n \geq 1$ este mărginit deoarece $0 \leq a_n \leq 2, \forall n \geq 1$ şi monoton crescător, deci el este convergent. Se verifică imediat că $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Exemplul 1.4.7.

Şirul $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}, n \geq 1$ este crescător şi mărginit superior, aşadar el este convergent.

Exemplul 1.4.8.

Şirul $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$ este strict crescător şi mărginit.

Limita şirului $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se notează cu $e : e \in (2, 3)$.

Exemplul 1.4.9.

Indicăm acum un alt şir convergent către e, anume şirul:

$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}, n \geq 1$.

Şirurile convergente nu sunt neapărat monotone; astfel, şirul $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}, n \geq 1$ este convergent către zero şi nu este monoton.

Lema 1.4.1. (Lema lui Cesaro)

Orice şir mărginit de numere reale are cel puțin un subşir convergent.

CAPITOLUL II

ŞIRURI RECURENTE

2.1. Concepte fundamentale.

Fie E o mulţime. În majoritatea consideraţiilor din lucrare vom admite că $E \subset R$. După cum se va vedea pe parcurs, numeroase tehnici din cazul $E \subset R$ se extind fără dificultate în situaţia când E este inclusă într-un spaţiu vectorial. Aşa cu am arătat în capitolul I, o funcţie $f: N \to E$ defineşte un şir $(x_n)_{n\geq 0}, x_n = f(n), n \geq 0$. Notăm $\{f: N \to E\} = E^N$. Studiul lui E^N rezidă în evidenţierea unor caracteristici ale şirurilor dintre care cităm: mărginirea, monotonia, convergenţa, calculabilitatea unor şiruri (finite sau nu) de termeni, periodicitatea.

O modalitate extrem de interesantă şi de utilă în practică pentru a determina submulţimi S importante ale lui E^N, constă în indicarea unei relaţii de recurenţă (R) şi a unor condiţii iniţiale (I)

O relaţie de recurenţă poate fi dată ca o egalitate în formă implicită, explicită sau ca o inegalitate. Forma generală implicită a unei relaţii de recurenţă este:

$$F(n, x_n, x_{n-1}, ..., x_0) = 0, \forall n \in N \qquad (2.1.1)$$

unde $F: N \times E^{n+1} \to E; E^{n+1} = \underbrace{E \times E \times ... \times E}_{n+1 \text{ ori}}$, iar forma generală explicită a unei relaţii de recurenţă este:

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_0), \forall n \in N^* \qquad (2.1.1')$$

unde $F: N \times E^n \to E$.

Cazul extrem de important este cel al <u>recurenţelor de ordin $k, k \geq 1, k \in N$</u>; de această dată în (2.1.1) avem $F: N \times E^{k+1} \to E$, în (2.1.1') avem $f: N \times E^k \to E$ şi:

$$F(n, x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}) = 0, \forall n \in N, n \geq k \qquad (2.1.2)$$

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{n-k}), \forall n \in N, n \geq k \qquad (2.1.2')$$

Recurenţele de ordinul k în formă implicită şi explicită mai pot fi scrise şi astfel:

$$F(n, x_{n+k}, x_{n+k-1}, ..., x_n) = 0, \forall n \in N \qquad (2.1.3)$$

$$x_{n+k} = f(n, x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, ..., x_n), \forall n \in N \qquad (2.1.3')$$

Între relaţiile de recurenţă de ordin I le distingem pe cele <u>liniare omogene</u>:

$$x_{n+1} = a_n \cdot x_n, \forall n \in N \qquad (2.1.4)$$

pe cele <u>liniare neomogene</u>:

$$x_{n+1} = a_n \cdot x_n + b_n, \forall n \in N \qquad (2.1.5)$$

şi pe cele <u>omografice</u>:

$$x_{n+1} = \frac{a \cdot x_n + b}{c \cdot x_n + d}, \forall n \in N \qquad (2.1.6)$$

Definiţia 2.1.1.
Soluţia generală a recurenţei (2.1.3) este mulţimea şirurilor $(x_n)_{n\geq 0}$ din E care verifică (2.1.3).

Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din E verifică (2.1.3) şi sunt îndeplinite condiţiile iniţiale:

$$x_0 = p_0, x_1 = p_1, ..., x_{k-1} = p_{k-1} \qquad (2.1.7)$$

unde $p_0, p_1, ..., p_{k-1} \in E$ fixate, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ se numeşte <u>soluţie particulară</u> a recurenţei (2.1.3).

Şiruri recurente definite de o funcţie.

Definiţia 2.1.2.
Fiind dată funcţia $f: E \to E$ şi $x_0 \in E$, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin: $x_{n+1} = f(x), \forall n \in N$ (2.1.8)
se numeşte şir recurent de ordinul I asociat funcţiei f şi elementului $x_0 \in E$. Desigur recurenţa definită de o funcţie este un caz particular de recurenţă de ordinul I.

Observaţia 2.1.1.
Dacă notăm $f_1 = f, f_2 = f_1 \circ f, ..., f_n = f_{n-1} \circ f$ atunci şirul recurent definit anterior prin (2.1.8) se exprimă astfel:

$$x_n = f_n(x_0), n \geq 1 \qquad (2.1.8')$$

Şirul recurent definit anterior se numeşte <u>şirul aproximaţiilor succesive</u> asociate lui f şi x_0.

Mulţimea şirurilor recurente asociate funcţiei $f: E \to E$ şi lui $x_0 \in E$, se numeşte mulţimea şirurilor recurente asociate lui f, iar elementele mulţimii se numesc şiruri recurente asociate funcţiei f sau şiruri ale aproximaţiilor succesive asociate lui f şi x_0. Se pune problema determinării unor clase de funcţii f, pentru care şirul asociat lui f şi x_0 este convergent. Dacă funcţia f este discontinuă, atunci, în general şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ asociat funcţiei f şi lui $x_0 \in E$ nu converge.

Un caz particular al relaţiei de recurenţă (2.1.3') este acela în care funcţia f este liniară şi omogenă în $x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k-1}$ şi atunci (2.1.3') se scrie:

$$x_{n+k} = a_n^1 \cdot x_{n+k-1} + a_n^2 \cdot x_{n+k-2} + ... + a_n^k \cdot x_n, k \geq 1 \quad (2.1.9)$$

şirurile $(a_n^i)_{n\in N}, i = \overline{1,k}$ fiind date. Şirul (2.1.9) se numeşte şir <u>recurent liniar şi omogen</u>. Un caz particular al relaţiei (2.1.9) este acela în care coeficienţii (a_n^i) sunt numere reale fixate (nu depind de n) şi atunci şirul (2.1.9) devine:

$$x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+k-1} + a_2 \cdot x_{n+k-2} + ... + a_k \cdot x_n, k \geq 1 \quad (2.1.9')$$

numită relaţie de recurenţă liniară, omogenă, de ordinul k, cu coeficienţi constanţi. Dacă relaţia de recurenţă are forma:

$$x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+k-1} + a_2 \cdot x_{n+k-2} + ... + a_k \cdot x_n, a_i \in R, i = \overline{1,k} \quad (2.1.10)$$

fixate şi $(b_n)_{n\geq 0}$ şir cunoscut, atunci (2.1.10) se numeşte relaţie de recurenţă liniară şi neomogenă de ordinul k.

2.2. Teoreme de existenţă şi unicitate.

Scopul acestui paragraf este de a ne asigura în condiţii de mare greutate de existenţă a unor şiruri definite recursiv. Pentru majoritatea exemplelor prezentate aici vom reveni ulterior cu determinarea efectivă a termenului general.

Teorema 2.2.1.

Fie o mulţime şi un şir de funcţii $(f_n)_{n\in N}, f_n : E^n \to E$ (facem convenţia $E^0 = E^1 = E$); atunci există un singur şir $(x_n)_{n\in N}, x_n \in E, \forall n \in N$ astfel încât: $x_0 = p$ (2.2.1)

$$x_{n+1} = f_n(x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0) \ \forall n \in N \quad (2.2.2)$$

Teorema 2.2.2.

Fie o mulţime şi un şir $(f_n)_{n\in N}$ de funcţii $f_n : E \to E$. Există un singur şir $(x_n)_{n\in N}, x_n \in E, \forall n \in N$ care satisface condiţiile: $x_0 = p$ (2.2.3)

$$x_{n+1} = f_n(x_n), n \in N \quad (2.2.4)$$

Exemplul 2.2.1.

Fie şirul $(x_n)_{n\in N}$, astfel încât: $x_0 = p$ (2.2.1.1)

$$x_{n+1} = x_n + r, n \in N \quad (2.2.1.2)$$

Se observă că $x_{n+1} = x_n + r$. Ţinând seama de teorema 2.2.2, rezultă că şirul există şi este unic. Şirul poartă numele de <u>progresie aritmetică</u> şi este dat de $x_n = p + n \cdot r, \forall n \in N$.

Exemplul 2.2.2.

Fie şirul $(x_n)_{n\in N}$, astfel încât: $x_0 = p$ (2.2.2.1)

$$x_{n+1} = q \cdot x_n, n \in N, q \neq 0 \quad (2.2.2.2)$$

Se observă că $f_n(x_n) = q \cdot x_n$. Şirul $(x_n)_{n\in N}$ se numeşte <u>progresie geometrică</u> şi este dat de $x_n = p \cdot q^n$.

Prin criteriul majorării obținem $a_n \to 0, b_n \to 0$.

Metoda 2.

Orice matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R)$ verifică o ecuație de forma $A^2 - (\mathrm{Tr}\, A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$ (numită ecuație caracteristică asociată matricei A) unde $\mathrm{Tr}\, A = a + d$ (urma matricei) şi $\det A = a \cdot d - b \cdot c$. Se demonstrează prin inducție că există două şiruri reale $(x_n)_{n \in N^*}$, $(y_n)_{n \in N^*}$ astfel încât $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2, n \in N^*$ unde $x_1 = 1, y_1 = 0, x_2 = \mathrm{Tr}\, A, y_2 = -\det A$. Pentru a evidenția relațiile de recurență constatăm:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = (x_n \cdot A + y_n \cdot I_2) \cdot A = x_n \cdot A^2 + y_n \cdot A =$$
$$= x_n \cdot (x_2 \cdot A + y_2 \cdot I_2) + y_n \cdot A = (x_2 \cdot x_n + y_2) \cdot A + y_2 \cdot x_n \cdot I_2$$

Deci: $x_{n+1} = x_2 \cdot x_n + y_n$, $y_{n+1} = y_2 \cdot x_n, \forall n \in N^*$

Exemplul 3.1.2.

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n, n \in N^*$.

Soluție:

$A_2 - (\mathrm{Tr}\, A) \cdot A + (\det A) \cdot I_2 = O_2, x_2 = \mathrm{Tr}\, A = 2, y_2 = -\det A = -1$

$x_1 = 1, y_1 = 0; A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2, n \geq 2$, deci, conform cu (3.10.1) rezultă:

$x_{n+1} = 2 \cdot x_n, y_{n+1} = -x_n; x_{n+1} = 2 \cdot x_n - x_{n-1}$, $n \geq 2$. Ecuația caracteristică a relației de recurență liniară de ordinul doi va fi: $r^2 = 2 \cdot r - 1, r_1 = r_2 = 1$, deci $x_n = n$; urmează $y_n = -(n-1); A^n = n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-n+1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezultatul se poate verifica uşor prin inducție matematică.

Metoda 3. Pentru a calcula $A^n; A \in M_2(C)$ se calculează $A^2, A^3, A^4, \ldots$, până se observă o regulă de obținere a matricei A^n, prin inducție completă se demonstrează apoi această regulă.

Exemplul 3.1.3.

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n, n \in N^*$.

Soluție:

$A^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$, deci presupunem că: $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}, n \in N^*$. Prin inducție matematică se verifică uşor corectitudinea presupunerii făcute.

Exemplul 3.1.4.

Să se calculeze $A^n, n \in N^*$, dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluție:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot I_2, A^3 = A^2 \cdot A = 2 \cdot I_2 \cdot A = 2 \cdot A,$$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = 2^2 \cdot I_2$, $A^5 = A^4 \cdot A = 2^2 \cdot A$. Se observă că $A^n = \begin{cases} 2^k \cdot I_2, n = 2 \cdot k \\ 2^k \cdot A, n = 2 \cdot k + 1 \end{cases}, k \in N$. La verificarea acestui rezultat vom aplica o inducție matematică specială.

$P(1): A^1 = 2^{\frac{0}{2}} \cdot A = 2^0 \cdot A = A$, $P(1)$ adevărată;

$P(2): A^2 = 2^{\frac{2}{2}} \cdot I_2 = 2 \cdot I_2$, $P(2)$ adevărată.

Presupunem că $P(m)$ adevărată.

$$P(m): A^m = \begin{cases} 2^k \cdot I_2, m = 2\cdot k \\ 2^k \cdot A, m = 2\cdot k+1 \end{cases}, m \in N, m \geq 2$$ şi

demonstrăm că:

$$P(m+1): A^{m+1} = \begin{cases} 2^{k+1} \cdot I_2, m = 2\cdot k+2 \\ 2^{k+1} \cdot A, m = 2\cdot k+3 \end{cases}$$ este adevărată. Dacă

$m+1 = 2\cdot k+2$, atunci

$A^{m+1} = A^m \cdot A = (2^k \cdot A)\cdot A = 2^k \cdot 2 \cdot I_2 = 2^{k+1}\cdot I_2$. Dacă

$m+1 = 2\cdot k+3$, atunci

$A^{m+1} = A^m \cdot A = (2^{k+1} \cdot I_2)\cdot A = 2^{k+1}\cdot A$, deci $P(m+1)$ adevărată. Deci $P(m) \Rightarrow P(m+1), \forall m \in N^*$. Prin urmare $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in N^*$.

Metoda 4.

Scriind $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & t_n \end{pmatrix}$, atunci $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & t_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$

$A^n = \begin{pmatrix} a\cdot x_n + c\cdot y_n & b\cdot x_n + d\cdot y_n \\ a\cdot z_n + c\cdot t_n & b\cdot z_n + d\cdot t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ z_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix}$ de unde se obţin relaţiile de recurenţă:

$$\begin{matrix} x_{n+1} = a\cdot x_n + c\cdot y_n, y_{n+1} = b\cdot x_n + d\cdot y_n \\ z_{n+1} = a\cdot z_n + c\cdot t_n, t_{n+1} = b\cdot z_n + d\cdot t_n \end{matrix}, \forall n \in N^*$$

3.2. Aplicaţii în geometrie.

Ne propunem aici să rezolvăm câteva probleme de geometrie combinatorică în care apar şiruri recurente.

Exemplul 3.2.1.

Care este numărul de regiuni în care este împărţită o dreaptă prin n puncte distincte?

Soluţie:

Fie p_n acest număr. Desigur $p_1 = 2$. Pentru a calcula p_{n+1} fie cele p_n regiuni în care este împărţită dreapta de primele n puncte. Cel de-al $(n+1)$-lea va fi situat în una dintre aceste p_n regiuni pe care o împarte în două. Deci $p_{n+1} = p_n + 1$. Rezultă imediat $p_n = n+1$.

Exemplul 3.2.2.

Care este numărul maxim d_n în care n drepte pot împărţi planul?

Soluţie:

Avem desigur $d_1 = 2$. Este clar că n drepte vor împărţi planul în cel mai mare număr de părţi, dacă toate aceste drepte se intersectează (adică nici o pereche nu este paralelă) şi dacă nici un grup de trei dintre ele nu sunt concurente. Deci rămâne să determinăm în câte părţi este împărţit planul prin n drepte neparalele două câte două şi astfel încât nici un grup de trei dintre ele să nu fie concurente. S-ar putea crede că deşi se respectă toate aceste condiţii, numărul părţilor încă mai depinde de configuraţia dreptelor. Însă, din soluţie va rezulta că acest număr este determinat în mod unic de valoarea lui n şi deci nu depinde de configuraţia dreptelor.

Presupunem că au fost duse în plan k drepte; ducem dreapta a $(k+1)$-a şi vom vedea cu cât a crescut numărul de părţi în care dreptele împart planul.

Dreapta a $(k+1)$-ase intersectează cu cele k drepte în k puncte, care o împart $(k+1)$ părți. Deci dreapta a $(k+1)$-a va tăia exact $(k+1)$ părți din toate părțile existente ale planului. Deoarece fiecare din aceste părți este împărțită în două, după ce am pus cea de-a $(k+1)$-a dreaptă, numărul total de părți a crescut cu $(k+1)=p_k$.

Avem deci relația de recurență $d_{k+1}=d_k+(k+1)$. Din aceasta şi relația inițială obținem $d_n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$.

Exemplul 3.2.3.

Care este numărul maxim s_n în care n plane pot împărți spațiul treidimensional?

Soluție:

Raționând ca în problema precedentă vom avea $s_1=2$ şi $s_{n+1}=s_n+d_n=$

$=s_n+\frac{n^2+n+2}{2}$. Pentru determinarea şirului recursiv s_n căutăm coeficienții A, B, C, D astfel încât $s_n=A\cdot n^3+B\cdot n^2+C\cdot n+D$ să satisfacă cele două condiții. Efectuând calculele se obține

$s_n=\frac{1}{6}\cdot(n^3+5\cdot n+6)\cdot(n^2-n+6)$.

Observația 3.2.1.

Raționamentele de mai sus pun în evidență o problemă mai generală, cu o soluție ce obligă la o dublă recurență: Care este numărul maxim r_n^m în care n hiperplane împart spațiul de dimensiune m?

Exemplul 3.2.4

Care este numărul c_n în care poate fi împărțit planul prin n cercuri?

Soluție:

Avem desigur $c_1=2$. Cele n cercuri vor împărți planul în cel mai mare număr de părți, dacă toate cercurile se intersectează (adică nici o pereche nu sunt tangente şi nici unul nu este situat în întregime în interiorul altuia) şi nici un grup de trei cercuri nu trec prin acelaşi punct.

Raționând ca în exemplul 3.11.2, vom arăta că cercul al $(k+1)$-lea măreşte numărul de părți ale planului cu $2\cdot k$ (al $(k+1)$-lea cerc se intersectează cum cele k cercuri anterioare în $2\cdot k$ puncte). Avem deci relația de recurență $c_{k+1}=c_k+2\cdot k$, care împreună cu condiția inițială conduce la rezultatul $c_n=n^2-n+2$.

Exemplul 3.2.5

Care este numărul maxim c_n în care în care poate fi împărțită suprafața S a unei sfere de n cercuri de pe sferă?

Soluție:

Alegând pe S un punct P nesituat pe nici unul dintre cele n cercuri, printr-o inversiune de pol P transformăm S într-un plan şi problema revine la exemplul 3.11.4, adică $c_n=n^2-n+2$.

Exemplul 3.2.6

Car este numărul maxim u_n în care pot împărți n sfere în spațiul tridimensional?

Soluție:

Găsim uşor $u_1=2$ şi

$u_{n+1}=u_n+e_n=u_n+(n^2+n+2)$ care conduc la

$$u_n=\frac{n}{3}\cdot(n^2-3\cdot n+8).$$

3.3. Test de aptitudini.

Problema 1:

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin relaţia de recurenţă:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-2} + a_{n-1}), n \geq 3, a_1 = 0, a_2 = 1.$$

Să se demonstreze că: $a_n = \frac{2}{3}\left[1 - \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right], n \geq 2$ şi să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

Problema 2:

Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin relaţia de recurenţă:

$x_{n+1} = e^{-1+x_n}, n \geq 1, x_1 = a, a > 1$ este monoton crescător şi să se calculeze limita sa.

Problema 3:

Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin relaţia de recurenţă:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + n \cdot x_n^2}, n \geq 1, x_1 > 0.$$

Să se studieze convergenţa şirurilor $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(n \cdot x_n)_{n\geq 1}$ şi în caz de convergenţă să se calculeze limitele lor.

Răspunsuri:

Problema 1:

$$a_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right]$$

Deci şirul este convergent. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$

Problema 2:

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Problema 3:

$(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi mărginit inferior rezultă că este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Fie $y_n = n \cdot x_n$

Obţinem $y_n \leq 1$ şi $(y_n)_{n\geq 2}$ este crescător.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. A.I. Marcuşevici, „Şiruri recurente” (traducere din limba rusă), Biblioteca Societăţii de Ştiinţe Matematice.

2. D. Brânzei, S. Aniţa „Şiruri recurente la liceu”, Editura GIL, Zalău.

3. G. Gussi, O Stănăşilă, T. Stoica „Manual de analiză matematică”, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti.

4. H. Banea „Metodica predării matematicii”, Paralela 45.

5. I. Muntean, D. Popa „Metoda şirurilor recurente”, Editura GIL, Zalău.

6. I. Rus „Metodica predării matematicii” , SERVO-SAT.

7. M. Megan, P. Preda „Şiruri recurente”, Colecţia Caiete Metodico-Ştiinţifice, Universitatea Timişoară.

8. M. Hărăguş „Şiruri de ordin superior”, Colecţia Caiete Metodico-Ştiinţifice, Universitatea Timişoară.

9. O. Stănăşilă, A. Cătană „Metodică predării matematicii”.

10. *** „Culegeri de probleme de analiză matematică”.

11. *** „Colecţia Gazeta Matematică”.

CUPRINS