

TANIA-LUMINIȚA COSTACHE

ANALIZĂ MATEMATICĂ
Culegere de probleme

Editora
PRINCEPS

ANALIZĂ MATEMATICĂ
Culegere de probleme

TANIA – LUMINIȚA COSTACHE

Editura PRINTECH
2009

Prefață

Lucrarea este rezultatul seminariilor de analiză matematică ținute de autoare studenților anilor întâi ai Facultăților de Automatică și Calculatoare, Electronică și Telecomunicații și Științe Aplicate din Universitatea Politehnică București.

Cartea este structurată în treisprezece capitole, conținând o secțiune teoretică cu principalele noțiuni și rezultate necesare rezolvării exercițiilor, o parte de probleme rezolvate care acoperă programa de analiză și probleme propuse studenților pentru o fixare mai bună a cunoștințelor predate, precum și pentru înțelegerea altor cursuri de specialitate.

Pentru aprofundarea conceptelor fundamentale ale analizei sunt necesare o pregătire teoretică suplimentară și o participare activă în cadrul seminariilor și cursurilor.

Mult succes!

Cuprins

Prefață	3
1 Serii de numere reale	8
1.1 Definiție și proprietăți generale	8
1.2 Serii cu termeni pozitivi	10
1.3 Serii alternate	13
1.4 Serii absolut convergente. Serii semiconvergente	13
1.5 Operații cu serii	14
1.6 Aproximarea sumelor seriilor convergente	15
1.7 Probleme rezolvate	15
1.8 Probleme propuse	38
2 Șiruri și serii de funcții	43
2.1 Noțiuni teoretice	43
2.2 Probleme rezolvate	46
2.3 Probleme propuse	60
3 Serii de puteri	63
3.1 Convergența și proprietățile seriilor de puteri	63
3.2 Dezvoltări în serie	64
3.3 Probleme rezolvate	65
3.4 Probleme propuse	75
4 Serii Fourier	79
4.1 Noțiuni teoretice	79
4.2 Probleme rezolvate	84
4.3 Probleme propuse	100
5 Limite și continuitate pentru funcții de mai multe variabile	103
5.1 Noțiuni teoretice	103
5.2 Probleme rezolvate	104
5.3 Probleme propuse	111

6	Derivate parțiale.Diferențiabilitate	114
6.1	Noțiuni teoretice	114
6.2	Probleme rezolvate	118
6.3	Probleme propuse	128
7	Extremele locale ale funcțiilor de mai multe variabile. Funcții implicite. Extreme cu legături	133
7.1	Noțiuni teoretice	133
7.2	Probleme rezolvate	138
7.3	Probleme propuse	151
8	Integrale improprii și cu parametri	154
8.1	Noțiuni teoretice	154
8.2	Probleme rezolvate	159
8.3	Probleme propuse	170
9	Integrale curbilinii	173
9.1	Noțiuni teoretice	173
9.2	Probleme rezolvate	176
9.3	Probleme propuse	185
10	Integrale duble	188
10.1	Noțiuni teoretice	188
10.2	Probleme rezolvate	190
10.3	Probleme propuse	200
11	Integrale triple	202
11.1	Noțiuni teoretice	202
11.2	Probleme rezolvate	204
11.3	Probleme propuse	212
12	Integrale de suprafață	214
12.1	Noțiuni teoretice	214
12.2	Probleme rezolvate	215
12.3	Probleme propuse	225
13	Formule integrale	227
13.1	Noțiuni teoretice	227
13.2	Probleme rezolvate	234
13.3	Probleme propuse	244
	Bibliografie	247

Capitolul 1

Capitolul 1

Serii de numere reale

1.1 Definiție și proprietăți generale

Definiția 1.1. Fie $(u_n)_n$ un șir de numere reale și fie $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$ șirul sumelor parțiale asociat. Seria $\sum_n u_n$ se numește **convergentă** dacă șirul s_n este șir convergent; limita acestui șir se numește **suma seriei**; în caz contrar seria se numește **divergentă** (adică dacă șirul sumelor parțiale nu are limită sau limita sa este $+\infty$ sau $-\infty$). Dacă șirul s_n nu are limită nici finită, nici infinită vom spune că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este **oscilantă**.

Proprietăți generale

1. Dacă într-o serie se schimbă ordinea unui număr finit de termeni se obține o nouă serie de aceeași natură; dacă seria inițială are sumă atunci seria obținută prin această schimbare are aceeași sumă.
2. Dacă la o serie se adaugă sau se scoate un număr finit de termeni se obține o nouă serie de aceeași natură, dar cu altă sumă, în cazul în care seria inițială este convergentă.
3. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, atunci pentru orice șir $(k_n)_n$ crescător, divergent, de numere naturale, seria

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_{k_1}) + (u_{k_1+1} + \dots + u_{k_2}) + \dots + (u_{k_{n-1}+1} + \dots + u_{k_n}) + \dots$$

este de asemenea convergentă și are aceeași sumă; dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, dar are sumă, atunci și seria de mai sus este diver-

gentă și are aceeași sumă . Dacă există un șir $(k_n)_n$ astfel încât seria de mai sus să fie divergentă , atunci și seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă .

4. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă , șirul sumelor parțiale este mărginit.

5. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie convergentă și $\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n$ seria convergentă obținută

prin înlăturarea primilor p termeni. Suma seriei $\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n$ se notează cu R_p și se numește **restul de ordin n** al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Cu ajutorul acestei noțiuni se poate enunța proprietatea: **resturile unei serii convergente formează un șir convergent către zero.**

6. Seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$, unde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sunt de aceeași natură .

7. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă , șirul $(u_n)_n$ al termenilor săi este

convergent către zero. Reciproca nu este adevărată : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ vom vedea că e divergentă , dar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Această proprietate numită **condiția necesară de convergență** se mai poate enunța în următoarea formulare echivalentă , utilă în aplicații:

8. Dacă șirul termenilor unei serii nu este convergent către zero, seria este divergentă .

Exemplul 1.1. Seria geometrică Fie $a \in \mathbb{R}$ și $q \in \mathbb{R}$ numit rație și fie seria geometrică $\sum_{n \geq 0} aq^n$.

Suma parțială de rang n a seriei este

$$s_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = \begin{cases} a \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{pentru } q \neq 1 \\ na, & \text{pentru } q = 1 \end{cases}$$

Dacă $|q| < 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$, deci seria geometrică este convergentă în acest caz și are suma $\frac{a}{1-q}$.

Dacă $|q| \geq 1$, atunci se observă imediat că șirul termenilor seriei nu converge către 0, deci, conform proprietății 8., seria geometrică este divergentă în acest caz.

1.2 Serii cu termeni pozitivi

Proprietăți:

1. Șirul sumelor parțiale ale unei serii cu termeni pozitivi este strict crescător.
2. O serie cu termeni pozitivi are totdeauna sumă (finită sau nu).
3. O serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale este mărginit.
4. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este o serie cu termeni pozitivi, atunci ea are aceeași natură cu seria

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_{k_1}) + (u_{k_1+1} + \dots + u_{k_2}) + \dots + (u_{k_n+1} + \dots + u_{k_{n+1}}) + \dots$$

unde $(k_n)_n$ este un șir crescător divergent de numere naturale.

Pentru stabilirea naturii unei serii cu termeni pozitivi se folosesc următoarele criterii:

1. **Primul criteriu al comparației** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ serii cu termeni pozitivi. Presupunem că $u_n \leq v_n$. Atunci:
 - 1) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.
 - 2) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă.
2. **Al doilea criteriu al comparației** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ serii cu termeni pozitivi. Presupunem că $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Atunci:
 - 1) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.
 - 2) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă.

3. **Al treilea criteriu al comparației** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ serii cu termeni pozitivi astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$.
- 1) Dacă $0 < l < \infty$, atunci cele două serii sunt de aceeași natură .
 - 2) Dacă $l = 0$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă , atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă .
 - 3) Dacă $l = +\infty$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă , atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă .
4. **Criteriul rădăcinii(al lui Cauchy)** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Atunci:
- 1) Dacă $l < 1$, seria este convergentă .
 - 2) Dacă $l > 1$, seria este divergentă .
5. **Criteriul raportului(al lui D'Alembert)** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Atunci:
- 1) Dacă $l < 1$, seria este convergentă .
 - 2) Dacă $l > 1$, seria este divergentă .
6. **Criteriul lui Raabe-Duhamel** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = l$. Atunci:
- 1) Dacă $l > 1$, seria este convergentă .
 - 2) Dacă $l < 1$, seria este divergentă .
7. **Criteriul lui Kummer** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.
- 1) Dacă există un șir $(a_n)_n$ de numere pozitive astfel încât șirul cu termenul general $\lambda_n = a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$ să aibă limită strict pozitivă , atunci seria este convergentă .
 - 2) Dacă există un șir $(a_n)_n$ de numere strict pozitive astfel încât seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ să fie divergentă , iar șirul $(\lambda_n)_n$ să aibă limită strict negativă

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă .

8. **Criteriul de condensare al lui Cauchy** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi și descrescători, iar $(a_n)_n$ un șir crescător divergent de numere naturale astfel încât șirul de termen general $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}$ să fie mărginit.

Să se arate că seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}-a_n)u_{a_n}$ sunt de aceeași natură

9. **Criteriul logaritmic** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi și să presupunem că există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = l$.

1) Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă .

2) Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă .

10. **Criteriul lui Gauss** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încât

raportul $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ se poate pune sub forma $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}$, unde $\alpha > 0$, iar $(\theta_n)_n$ este un șir mărginit, atunci ea este convergentă , dacă $\lambda > 1$ sau dacă $\lambda = 1, \mu > 1$ și divergentă dacă $\lambda < 1$ sau dacă $\lambda = 1, \mu \leq 1$.

11. **Criteriul integral** Fie $f: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție descrescătoare și fie șirul $a_n = \int_1^n f(t)dt$. Atunci seria $\sum_n f(n)$ este convergentă dacă și numai dacă șirul $(a_n)_n$ este convergent.

Exemplul 1.2. Seria armonică generalizată Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$,

$\alpha \in \mathbb{R}$. Vom stabili natura ei.

Dacă $\alpha \leq 0$, atunci termenul general al seriei nu converge către 0, deci seria este divergentă .

Dacă $\alpha > 0$, termenii acestei serii formează un șir descrescător de numere pozitive, deci putem aplica criteriul de condensare. Luând în acest criteriu $a_n = 2^n$, deducem că pentru $\alpha > 0$ seria dată este de aceeași natură cu seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(\alpha-1)n}}$. Cum ultima serie are rația $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$, rezultă că ea este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Prin urmare, seria armonică generalizată este convergentă dacă $\alpha > 1$ și divergentă dacă $\alpha \leq 1$.

Pentru $\alpha = 1$ seria se numește **serie armonică**.

1.3 Serii alternate

Definiția 1.2. Se numește serie **alternată** o serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ pentru care produsul $u_n u_{n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Criteriul lui Leibniz Fie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ o serie alternată. Dacă șirul $(u_n)_n$ este descrescător și converge către 0, atunci seria este convergentă.

1.4 Serii absolut convergente. Serii semiconvergente

Definiția 1.3. O serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se numește **absolut convergentă** dacă seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ este convergentă.

Seriile absolut convergente au următoarele proprietăți:

1. Orice serie absolut convergentă este convergentă.
2. Prin orice permutare a termenilor unei serii absolut convergente se obține tot o serie absolut convergentă cu aceeași sumă.

Studiul convergenței absolute se face cu ajutorul criteriilor de la seriile cu termeni pozitivi.

Definiția 1.4. Se numește serie **semiconvergentă**, orice serie convergentă pentru care seria modulelor este divergentă.

Pentru a stabili dacă o serie cu termeni oarecare este convergentă se poate cerceta, în baza proprietății 1., dacă ea este absolut convergentă sau se aplică următoarele criterii:

1. **Criteriul general al lui Cauchy** O serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă

dacă și numai dacă pentru $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq N(\varepsilon)$ să avem $|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon, \forall p \geq 1$.

2. **Criteriul lui Abel** Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$

în care șirul $(\alpha_n)_n$ este monoton și mărginit, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci această serie este convergentă.

3. **Criteriul lui Dirichlet** Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se poate scrie sub forma

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ în care $(\alpha_n)_n$ este un șir monoton tinzând către zero, iar șirul de termen general $V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ este mărginit, atunci aceasta este convergentă.

1.5 Operații cu serii

Definiția 1.5. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ serii. Seriiile $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ și $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, unde $w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1$ se numesc **suma, diferența și produsul seriilor** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Proprietăți:

1. Suma și diferența a două serii convergente este convergentă. Dacă s, σ, S, s' sunt sumele seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n), \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$, atunci $S = s + \sigma, s' = s - \sigma$.

2. **Teorema lui Abel** Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ sunt convergente și dacă U, V, W sunt sumele lor, atunci $U \cdot V = W$.

3. **Teorema lui Mertens** Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt convergente și cel puțin una dintre ele este absolut convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ este convergentă și avem $U \cdot V = W$.

4. **Teorema lui Cauchy** Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt absolut convergente, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ este absolut convergentă.

1.6 Aproximarea sumelor seriilor convergente

Evident, suma unei serii convergente se poate aproxima cu termenii șirului sumelor parțiale. Dăm mai jos două rezultate în acest sens.

Aproximarea sumelor seriilor cu termeni pozitivi

Fie $u_n \geq 0$ și fie $k \geq 0$ astfel încât $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Dacă S este suma seriei convergente $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, iar $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ este suma primilor $n + 1$ termeni, atunci:

$$|S - s_n| < \frac{k}{1 - k} u_n.$$

Aproximarea sumelor seriilor alternate

Fie $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n u_n$ o serie alternată convergentă, și fie S suma sa. Dacă $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ este suma primilor $n + 1$ termeni, atunci

$$|S - S_n| \leq u_{n+1}.$$

1.7 Probleme rezolvate

1. Dacă seria $\sum_{n=2}^{\infty} |x_n - x_{n-1}|$, unde $x_n \in \mathbb{R}$, este convergentă, atunci $(x_n)_{n \geq 1}$ e convergent. Reciproca nu e adevărată. Dați un contraexemplu.

Soluție. Fie $S_n = \sum_{k=2}^n |x_k - x_{k-1}|$

Cum $\sum_{n=2}^{\infty} |x_n - x_{n-1}|$ este convergentă rezultă că $(S_n)_n$ e convergent, deci e șir Cauchy, adică $|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| = S_{n+p} - S_n, \forall n \geq 2, \forall p \geq 1 \implies (x_n)_n$ e șir Cauchy, deci $(x_n)_n$ e șir convergent

Contraexemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ e convergent la 0, dar $\sum_{n=2}^{\infty} |x_n - x_{n-1}| \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ □

2. Să se demonstreze că, dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e convergentă cu $u_n > 0$, monoton descrescător, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 0$.

Soluție. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergentă $\implies (s_n)_n$ convergent $\implies (s_n)_n$ e șir Cauchy
 $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \geq 1$ astfel încât $|s_n - s_{n_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_\varepsilon \implies$
 $\implies |u_{n_\varepsilon+1} + \dots + u_n| < \frac{\varepsilon}{2} \implies u_{n_\varepsilon+1} + \dots + u_n < \frac{\varepsilon}{2}$ (modulul dispăre
deoarece $u_n > 0$) $\implies (n - n_\varepsilon)u_n < \frac{\varepsilon}{2}$ (deoarece u_n e descrescător)
Fie $n > 2n_\varepsilon \implies n - n_\varepsilon > n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \implies \frac{n}{2}u_n < (n - n_\varepsilon)u_n <$
 $< \frac{\varepsilon}{2} \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon = 2n_\varepsilon$ astfel încât $\forall n > N_\varepsilon$ să avem $nu_n < \varepsilon \iff$
 $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$ \square

3. Să se demonstreze că $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, cu $u_n > 0$, monoton descrescător e convergentă $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ și $\sigma_n = s_n - nu_n$ e mărginit.

Soluție. " \implies " $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e convergentă $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (cf. proprietății 7, secțiunea 1.1)

Sirul sumelor parțiale $(s_n)_n$ e convergent și cf. exercițiului precedent $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$, așadar $(\sigma_n)_n$ e convergent, deci mărginit.

" \Leftarrow " Cum $(\sigma_n)_n$ e mărginit $\implies \exists k > 0$ astfel încât $0 < \sigma_n < k, \forall n \in \mathbb{N}$

Fie $m \in \mathbb{N}$. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ rezultă că acestui m îi corespunde un rang n_0 astfel încât $\forall n \geq n_0$ avem $u_n \leq \frac{1}{2}u_m \implies \frac{1}{2}mu_m = mu_m -$
 $-\frac{1}{2}mu_m \leq m(u_m - u_n) \leq u_1 + u_2 + \dots + u_m - mu_m \leq u_1 + u_2 + \dots + u_m -$
 $-mu_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n - (n-m)u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n - nu_n <$
 $< k \implies mu_m < 2k, \forall m \in \mathbb{N} \implies u_1 + \dots + u_n < k + nu_n < 3k,$
 $\forall n \in \mathbb{N} \implies (s_n)_n$ e majorat și cum e crescător (cf. proprietății 1, secțiunea 1.2) rezultă că $(s_n)_n$ e convergent, deci $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e convergentă \square

4. Să se afle suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1}$.

Soluție. Observăm că pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avem: $\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} =$
 $= \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}$

Găsim că: $\sum_{k=0}^n \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2 + k + 1} = 2\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

Deci seria dată este convergentă și suma sa este $\frac{\pi}{2}$. \square

- ✗ 5. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_{p+n}^p}$, unde $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ este fixat, iar în caz de convergență să se calculeze suma.

$$\text{Soluție. } u_n = \frac{1}{C_{p+n}^p} = \frac{p!}{(p+n)\dots(n+1)} = \frac{p!}{p-1} \left[\frac{1}{(n+1)\dots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+2)\dots(n+p)} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Deci } S_n &= \sum_{k=1}^n u_k = \frac{p!}{p-1} \left[\frac{1}{p!} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+1)\dots(k+p-1)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+2)\dots(k+p)} - \frac{1}{(n+2)\dots(n+p)} \right] = \frac{p!}{p-1} \left[\frac{1}{p!} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(n+2)\dots(n+p)} \right] \longrightarrow \frac{1}{p-1} - \frac{p!}{p-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+2)\dots(n+p)} = \frac{1}{p-1} \quad \square \end{aligned}$$

- ✗ 6. Să se stabilească natura seriei $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots(n-1)n^2}{n!}$

$$\text{Soluție. } u_n = \frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots(n-1)n^2}{n!} = \frac{n}{(n-m)!} = \frac{n-m+m}{(n-m)!} = \frac{1}{(n-m-1)!} + \frac{m}{(n-m)!}$$

$$\begin{aligned} S_n &= u_m + u_{m+1} + \dots + u_n = m+1 + \frac{m}{1!} + \frac{1}{1!} + \frac{m}{2!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-m-1)!} + \\ &\quad + \frac{1}{(n-m)!} = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{(n-m-1)!} + m \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-m)!} \right] \implies \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e + me, \text{ deci seria e convergentă} \quad \square \end{aligned}$$

Să se stabilească natura următoarelor serii:

- ✗ 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (a^{\frac{1+\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n+2}}} - 1)}{n+1}$, $a > 0, a \neq 1$

$$\text{Soluție. Fie } x_n = \frac{1+\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n+2}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \longrightarrow 0$$

Stim că $\frac{a^{x_n}-1}{x_n} \longrightarrow \ln a$, dacă $x_n \longrightarrow 0$

Termenul general u_n al seriei se scrie :

$$u_n = \frac{n^2}{n+1} \cdot x_n \cdot \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \frac{n}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \cdot \frac{a^{x_n}-1}{x_n} \longrightarrow \ln a \neq 0, \text{ deci,}$$

cf. criteriului necesar, seria este divergentă \square

- ✗ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n}$, $\alpha \in (0, \pi)$

Soluție. $u_n = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n} \sin \frac{\alpha}{2^n}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} =$
 $= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \dots \cos \frac{\alpha}{2^{n-1}} \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2^{n-1}}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \dots \cos \frac{\alpha}{2^{n-2}} \frac{1}{2^2} \sin \frac{\alpha}{2^{n-2}}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} = \dots =$
 $= \frac{\frac{1}{2^n} \sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n} \sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} = \sin \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \neq$
 $\neq 0$, deci, cf. criteriului necesar, seria este divergentă \square

$$\ast 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1 \sqrt{\ln(n+1)}}$$

Soluție. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1 \sqrt{\ln(n+1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^{\frac{1}{n+1}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n+1} \ln \ln(n+1)}}$

Calculăm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \ln \ln(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln(n+2) - \ln \ln(n+1)}{n+2 - (n+1)} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} \right) = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = \ln 1 = 0$ (cf. lemei lui

Stolz) $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1 \sqrt{\ln(n+1)}} = \frac{1}{e^0} = 1 \neq 0$, deci, cf. criteriului necesar, seria este divergentă \square

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$$

Soluție. $u_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n^n}} \implies$
 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+3)\dots(n+1+n+1)}{(n+1)^{n+1}}$
 $\cdot \frac{n^n}{(n+1)(n+2)\dots(n+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot$
 $\cdot \frac{2(2n+1)}{n+1} = \frac{4}{e} \neq 0$, deci, cf. criteriului necesar, seria este divergentă \square

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n + 3^n}$$

Soluție. Cum $\frac{1}{7^n + 3^n} \leq \frac{1}{3^n}$ avem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n + 3^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, deci, cf. primu-

lui criteriu de comparație seria este convergentă, deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ este convergentă fiind serie geometrică de rație subunitară \square

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{5^n}$$

Soluție. Avem $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{5^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot \frac{\pi}{5^n} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ și, cf. primului criteriu de comparație, seria $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{5^n}$ e convergentă fiind majorată de seria geometrică cu rația $\frac{3}{5} < 1$ care e convergentă \square

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2)$$

$$*Soluție.* u_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2 = \frac{n^4 + 2n + 1 - n^4}{\sqrt{n^4 + 2n + 1} + n^2} = \frac{2n + 1}{\sqrt{n^4 + 2n + 1} + n^2}$$

Aplicăm criteriul al treilea de comparație comparând cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{\sqrt{n^4+2n+1}+n^2}}{\frac{1}{n}} = 1 \in (0, \infty)$, deci $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2)$ este divergentă \square

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\sin \frac{\pi}{n(n+1)}} - 1)$$

$$*Soluție.* x_n = \sin \frac{\pi}{n(n+1)} \rightarrow 0 \text{ și știm că } \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \rightarrow 1$$

Cu criteriul al treilea de comparație obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\sin \frac{\pi}{n(n+1)}} - 1)$

are aceeași natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n(n+1)}$ și aplicând încă o dată

criteriul al treilea de comparație pentru ultima serie și ținând cont de faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n(n+1)}}{\frac{\pi}{n(n+1)}} = 1$ obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n(n+1)}$ are

aceeași natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n(n+1)}$ care e convergentă \square

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}$$

Soluție. Folosim criteriul al treilea de comparație și comparăm cu seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + 1 - n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n} + \sqrt[n+1]{n+1} - (1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}} = 1 \in (0, \infty), \text{ deci seria este divergentă} \quad \square \end{aligned}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \operatorname{arctg} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Soluție. } \operatorname{arctg} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \operatorname{arctg} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{1 + \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n}}{(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}) (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{2}{n}}{(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}) (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} \end{aligned}$$

Comparăm la limită cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{\frac{2}{n}}{(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}) (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{\frac{2}{n}}{(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}) (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})}}{\frac{\frac{2}{n}}{(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}) (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\frac{2}{n}}{(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}) (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}) (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} = \\ &= \frac{1}{2} \in (0, \infty), \text{ deci seria dată este divergentă} \quad \square \end{aligned}$$

$$17. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

Soluție. Deoarece $\sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{n}$, pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, pentru $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ rezultă cf. proprietății 8., secțiunea 1.1, că seria

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

este divergentă.

Cf. primului criteriu al comparației rezultă că și seria dată este divergentă. \square

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$$

Soluție. Cum $\frac{\frac{1}{n \sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, rezultă, cf. criteriului al treilea al comparației, că seria dată are aceeași natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dar aceasta este seria armonică, ce este divergentă. Prin urmare și seria dată este divergentă. \square

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+a+\dots+a^n)}, a > 0$$

Soluție. Pentru $a > 1$ avem $\frac{1}{n(1+a+\dots+a^n)} < \frac{1}{a^n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ este o serie geometrică de rație $\frac{1}{a} < 1$, ea este convergentă. Cf. primului criteriu al comparației deducem că seria dată este convergentă.

Dacă $a = 1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ și, deoarece $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că și în acest caz seria dată este convergentă.

Pentru $a < 1$ vom aplica al treilea criteriu al comparației folosind ca serie de comparație seria armonică.

Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n(1+a+\dots+a^n)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a+\dots+a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a}{1-a^{n+1}} = 1-a$$

Cum seria armonică este divergentă, deducem că și seria dată este divergentă, în acest caz. \square

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluție. Avem

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n-2}{2n-1} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

Amplificând această dublă inegalitate cu $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{1}{2n}$ obținem

$$\frac{1}{4n} < \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^2 < \frac{1}{2n+1}$$

Extrăgând rădăcina pătrată și majorând în dreapta deducem

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Prin urmare,

$$\frac{1}{2^\alpha n^{\frac{\alpha}{2}}} < \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^\alpha < \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}}},$$

pentru $\forall n \geq 2$ și $\alpha > 0$ și

$$\frac{1}{2^\alpha n^{\frac{\alpha}{2}}} > \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^\alpha > \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}}},$$

pentru $\forall n \geq 2$ și $\alpha < 0$

De aici deducem că seria dată este de aceeași natură cu seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ și, prin urmare, ea este convergentă pentru $\alpha > 2$ și divergentă pentru $\alpha \leq 2$. \square

$$21. \sum_{n \geq 1} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p, p \in \mathbb{R}$$

Soluție. Cum $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \implies 0 < e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \implies e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - 1 \right) \implies u_n < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{np} \frac{1}{n^p}$, cu $p > 0$

Folosim criteriul al treilea de comparație:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{np} \frac{1}{n^p}}{\frac{1}{n^p}} = e^p \in (0, \infty), \text{ deci } \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{np} \frac{1}{n^p} \sim \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$$

care e convergentă pentru $p > 1$. Așadar, cf. primului criteriu de comparație, seria $\sum_{n \geq 1} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p$ e convergentă

Pentru $p \in (0, 1]$ vom folosi inegalitatea $\frac{e}{2n+2} < e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \frac{e}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*(1)$

$$\begin{aligned} \text{Avem (1)} &\iff \frac{1}{2n+2} < 1 - \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{e} < \frac{1}{2n+1} \iff -\frac{1}{2n+2} > -1 + \\ &+ \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{e} > -\frac{1}{2n+1} \iff 1 - \frac{1}{2n+2} > \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{e} > 1 - \frac{1}{2n+1} \iff \frac{2n+1}{2n+2} > \\ &> \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{e} > \frac{2n}{2n+1} \iff \frac{2n+2}{2n+1} < \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} < \frac{2n+1}{2n} \iff \ln \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right) < \\ &< \ln e - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \iff \ln \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right) < 1 - \\ &-n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \end{aligned}$$

Considerăm funcțiile $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{2x+1}\right) + x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1, g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) + x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1$

Arătăm că $\forall x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) < 0 < g(x)$

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+\frac{1}{2x+1}} \cdot \left(-\frac{2}{(2x+1)^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(2x+2)(2x+1)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{2x+1} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{4}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)(2x+1)}, \forall x \geq 1 \Rightarrow f' \text{ e descrescătoare și cum } \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \geq 1 \Rightarrow f \text{ e crescătoare și cum } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \geq 1$$

$$g'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \Rightarrow g''(x) = \frac{(2x+1)^2 + x(x+1)}{x^2(x+1)^2(2x+1)^2} > 0 \Rightarrow g' \text{ crescătoare și cum } \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0 \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \geq 1 \Rightarrow g \text{ descrescătoare și cum } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \Rightarrow g(x) > 0, \forall x \geq 1$$

Deci $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{e}{2n+2}\right)^p < \sum_{n \geq 1} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^p$, iar $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{e}{2n+2}\right)^p$ este divergentă pentru $p \in (0, 1]$, așadar seria $\sum_{n \geq 1} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^p$ este divergentă cf. primului criteriu de comparație

Pentru $p \leq 0$ avem $\sum_{n \geq 1} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^p > \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{np} \frac{1}{n^p}$, deci seria $\sum_{n \geq 1} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^p$ este divergentă deoarece este minorată de o serie divergentă, termenul ei general nesatisfăcând criteriul necesar de convergență. \square

22. $\sum_{n \geq 2} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}, a > 0$

Soluție. Avem $\sqrt[n]{n!} \geq 1, \forall n \Rightarrow \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \leq a^n$

Pentru $a < 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 2} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \leq \sum_{n \geq 2} a^n$ care e serie geometrică cu rația subunitară, deci convergentă și atunci cf. primului criteriu de comparație seria $\sum_{n \geq 2} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$ este convergentă

$$\sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n^n} = n \Rightarrow \frac{a^n}{n} \leq \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \Rightarrow \sum_{n \geq 2} \frac{a^n}{n} \leq \sum_{n \geq 2} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Pentru $a > 1$ aplicăm criteriul raportului pentru seria $\sum_{n \geq 2} \frac{a^n}{n}$:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{n}{n+1} = a > 1$, deci seria e divergentă și, cf.

primului criteriu de comparație seria $\sum_{n \geq 2} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$ e divergentă

Pentru $a = 1$ obținem seria $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ și avem $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n} \leq \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, deci cf.

primului criteriu de comparație seria $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ este divergentă \square

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, a > 0$

Soluție. Cf. criteriului raportului avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{a}{e}$

Dacă $0 < a < e$, seria este convergentă

Dacă $a > e$, seria este divergentă

Dacă $a = e$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

Cum $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ avem $1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1 + \frac{1}{n} \implies 1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \implies a_n < a_{n+1}$, dar $a_n > 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, rezultă că seria este divergentă \square

24. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin a \sin \frac{a}{2} \dots \sin \frac{a}{n}, a \in (0, \pi)$

Soluție. Aplicăm criteriul raportului :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \sin \frac{a}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{a}{n+1}}{\frac{a}{n+1}} \cdot a = a$$

Dacă $0 < a < 1$, seria este convergentă

Dacă $1 < a < \pi$, seria este divergentă

Dacă $a = 1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin 1 \sin \frac{1}{2} \dots \sin \frac{1}{n}$

Cf. criteriului lui Raabe-Duhamel avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{(n+1) \sin \frac{1}{n+1}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1 - (n+1) \sin \frac{1}{n+1}}{(n+1) \sin \frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1 - \frac{\sin \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}}{\frac{\sin \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}}$$

Pentru calculul limitei trecem la funcții $\frac{1}{n+1} \mapsto x$. Așadar,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \cdot \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{\sin x} - \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x \sin x} - \frac{x - \sin x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x + \cos x - x \sin x} - 0 = 0 \text{ (am folosit l'Hospital)} \implies \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = 0 < 1, \text{ rezultă că seria este divergentă} \quad \square \end{aligned}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \cdot a^n, a > 0$$

Soluție. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = a \cdot e$

Prin urmare, cf. criteriului rădăcinii, dacă $a < \frac{1}{e}$, seria dată este convergentă, iar dacă $a > \frac{1}{e}$, seria dată este divergentă.

Dacă $a = \frac{1}{e}$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}$.

Din inegalitatea $e < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, obținem

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n} > \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2+n}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n},$$

de unde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e}$$

Rezultă că șirul termenilor seriei date nu converge către 0 în cazul $a = \frac{1}{e}$, deci, cf. propr.8., seria este divergentă în acest caz. \square

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n}{\sqrt{(16n^2 + 5n + 1)^{n+1}}}$$

Soluție. Cf. criteriului rădăcinii avem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{(16n^2 + 5n + 1)^{\frac{n+1}{2n}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{(16n^2 + 5n + 1)} \cdot \sqrt[2n]{16n^2 + 5n + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(16 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{(16 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2n}}}} = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4} < 1, \text{ deci} \\ &\text{seria este convergentă.} \quad \square \end{aligned}$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{n^a}, a \in \mathbb{R}$$

Soluție. Amplificăm cu conjugata și folosim criteriul al treilea de comparație cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{n^a}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^a (\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2})}$$

Alegând $\alpha = a + \frac{2}{3}$, se obține limita $\frac{1}{3}$ (finită și nenulă) și deci seria este convergentă dacă și numai dacă $a > \frac{1}{3}$. \square

$$28. a + \sum_{n=2}^{\infty} (2 - \sqrt[n]{e})(2 - \sqrt[3]{e}) \dots (2 - \sqrt[n]{e}) \cdot a^n, a > 0$$

Soluție. Cf. criteriului raportului avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a(2 - \sqrt[n+1]{e}) = 2a - a \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n+1}} = 2a - a = a$$

Așadar, dacă $a < 1$, seria dată este convergentă, iar dacă $a > 1$, ea este divergentă.

În cazul $a = 1$ avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - \sqrt[n+1]{e} > 2 - \sqrt[n+1]{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = 2 - 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{1}{n-1}}$$

Deci, cf. celui de-al doilea criteriu al comparației rezultă divergența seriei date, deoarece seria cu care o comparăm este cea armonică. \square

$$29. \sum_{n=2}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \text{ fixat}$$

Soluție. Dacă $\alpha = 0$, seria devine $\sum_{n=2}^{\infty} 1$ și e divergentă

Dacă $\alpha < 0$, $(n^{\frac{1}{n}} - 1)^\alpha \rightarrow \infty$, deci cf. criteriului necesar rezultă că seria e divergentă

Dacă $\alpha > 0$, seria se scrie $\sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \right)^\alpha$.

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(e^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \right)^\alpha}{\left(\frac{\ln n}{n} \right)^\alpha} = 1 \in (0, \infty)$, cf. criteriului al treilea de comparație, seria $\sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \right)^\alpha$ are aceeași natură cu seria $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^\alpha$

Folosim criteriul de condensare al lui Cauchy și obținem $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^\alpha \sim$
 $\sim \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \left(\frac{\ln 2^n}{2^n} \right)^\alpha = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^\alpha (\ln 2)^\alpha}{2^{(\alpha-1)n}}$.

Pentru ultima serie vom aplica criteriul radicalului :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^\alpha (\ln 2)^\alpha}{2^{(\alpha-1)n}}} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$$

Dacă $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1 \iff \alpha > 1$, atunci seria este convergentă

Dacă $\frac{1}{2^{\alpha-1}} > 1 \iff \alpha < 1$, atunci seria este divergentă

Dacă $\alpha = 1$, atunci seria devine $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ care e divergentă deoarece

$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$, deci seria inițială este divergentă \square

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}, a > 0$$

Soluție. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\ln(n+1)}}{a^{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\ln \frac{n+1}{n}} = 1$, criteriul raportului nu ne poate preciza natura seriei, de aceea vom aplica criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(a^{\ln \frac{n}{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\ln \frac{n}{n+1}} - 1}{\ln \frac{n}{n+1}} \cdot \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \ln a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \ln a \cdot \ln \frac{1}{e} = -\ln a$$

Prin urmare, dacă $-\ln a > 1$, adică $a < \frac{1}{e}$, seria dată este convergentă iar dacă $a > \frac{1}{e}$ este divergentă .

Dacă $a = \frac{1}{e}$, atunci $a^{\ln n} = \left(\frac{1}{e} \right)^{\ln n} = \frac{1}{n}$, deci seria dată este chiar seria armonică , așadar este divergentă . \square

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}, \alpha \in \mathbb{R}_+$$

Soluție. Vom aplica criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\alpha+n+1}{n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha n}{n+1} = \alpha$$

Dacă $\alpha > 1$, seria este convergentă

Dacă $\alpha < 1$, seria este divergentă

$$\begin{aligned} \text{Dacă } \alpha = 1, \text{ seria devine } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1+1)(1+2)\dots(1+n)} = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2 \cdot 3 \cdot (n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ divergentă} \quad \square \end{aligned}$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})}$$

Soluție. Vom aplica criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = \infty > 1, \text{ deci seria este convergentă} \quad \square$$

$$*33. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1! + 2! + 3! + \dots + n!}{(n+2)!}$$

Soluție. Vom aplica criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{(1! + 2! + 3! + \dots + n!)(n+3)}{1! + 2! + 3! + \dots + n! + (n+1)!} - 1 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{(1! + 2! + 3! + \dots + n!)(n+3) - [1! + 2! + 3! + \dots + n! + (n+1)!]}{1! + 2! + 3! + \dots + n! + (n+1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left[\frac{(1! + 2! + 3! + \dots + n!)(n+2)}{1! + 2! + 3! + \dots + n! + (n+1)!} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1! + 2! + 3! + \dots + n! - [1! + 2! + 3! + \dots + n! + (n+1)!]}{1! + 2! + 3! + \dots + n! + (n+1)!} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{(1! + 2! + 3! + \dots + n!)(n+2) - (n+1)!}{1! + 2! + 3! + \dots + n! + (n+1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{(1! + 2! + 3! + \dots + (n-1)!)(n+2) + n!(n+2) - (n+1)!}{1! + 2! + 3! + \dots + n! + (n+1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{(1! + 2! + 3! + \dots + (n-1)!)(n+2) + n!}{1! + 2! + 3! + \dots + (n+1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{(1! + 2! + 3! + \dots + (n-1)!)(n+2) + n!}{(n+1)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{1! + 2! + 3! + \dots + (n+1)!} \end{aligned}$$

Calculăm următoarea limită cu lema lui Stolz

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + 3! + \dots + (n+1)!}{(n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{(n+2)! - (n+1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)!(n+2-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{(1! + 2! + 3! + \dots + (n-1)!(n+2) + n!}{(n+1)!} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)(1! + 2! + 3! + \dots + (n-1)!) + n \cdot n!}{(n+1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)(1! + 2! + 3! + \dots + (n-1)!)}{(n-1)!n(n+1)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1! + 2! + 3! + \dots + (n-1)!}{(n-1)!} + 1 = 1 + 1 = 2 > 1, \text{ deci} \\ &\text{seria este convergentă} \quad \square \end{aligned}$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)} (c-2)^n, a > 0, b > 0, c > 2$$

Soluție. Se aplică criteriul raportului:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n-1)(b+n)} (c-2)^{n+1}}{\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)} (c-2)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+n}{b+n} (c-2) = c-2,$$

deci pentru $2 < c < 3$ seria converge, și pentru $c > 3$ seria diverge; dacă $c = 3$, se aplică criteriul Raabe-Duhamel și rezultă : dacă $b - a < 1$ seria diverge, dacă $b - a > 1$, seria converge. Dacă $b - a = 1$, atunci seria este divergentă (seria armonică). \square

$$\star 35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}, p > 0, q > 0$$

Soluție. Dacă $p > 1$, atunci seria converge pentru orice $q > 0$ deoarece (se aplică primul criteriu de comparație):

$$\frac{1}{n^p \ln^q n} \leq \frac{1}{n^p}.$$

Dacă $p = 1$, se aplică criteriul integral: seria converge dacă și numai dacă $q > 1$.

Dacă $p < 1$ se aplică criteriul de condensare: seria are aceeași natură cu seria cu termenul general $\frac{1}{n^q 2^{n(p-1)} \ln^q 2}$, care este divergentă pentru orice $q > 0$ (se poate aplica criteriul raportului). \square

$$36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sin \frac{\pi}{n}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluție. Aplicând criteriul de comparație la limită, rezultă că seria are aceeași natură cu seria $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ \square

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n} \right)^{\ln(\ln n)}$$

Soluție. Aplicăm criteriul logaritmico:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\ln n} \right)^{\ln(\ln n)}} \right)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln n) - \ln(\ln n)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{[\ln(\ln n)]^2}{\ln n} = 0$$

Deci seria este divergentă. \square

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$$

Soluție. Aplicăm criteriul logaritmico:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{n^2 e^{-\sqrt{n}}}}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln n^2 e^{-\sqrt{n}}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \ln n - \ln e^{-\sqrt{n}}}{\ln n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 + \frac{\sqrt{n} \ln e}{\ln n} \right) = -2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} = \infty > 1, \text{ deci seria e} \\ &\text{convergentă} \end{aligned} \quad \square$$

$$39. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Soluție. Aplicăm criteriul integral:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(\ln n) - \ln(\ln 2)] = \infty, \text{ deci seria este di-} \\ \text{vergentă} \quad \square$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n} + 1}{n}$$

Soluție. Scriem seria ca sumă de două serii: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Prima serie este convergentă cf. criteriului lui Leibniz, iar cea de-a doua este seria armonică, deci divergentă. Atunci seria sumă este divergentă. \square

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log_a n}{n}, a > 1$$

Soluție. Pentru a arăta că această serie satisface condițiile din criteriul lui Leibniz vom considera funcția $f(x) = \frac{\log_a x}{x}, x \in [1, +\infty)$

$$\text{Avem } f'(x) = \frac{\frac{x}{x \ln a} - \log_a x}{x^2} = \frac{\log_a e - \log_a x}{x^2}$$

Deoarece $a > 1$, funcția $\log_a x$ este crescătoare, deci $f'(x) < 0$ pentru $\forall x > e$. Prin urmare, $f(x)$ descrește în intervalul $(e, +\infty)$, deci pentru $\forall n > e, n \in \mathbb{N}$, șirul $\frac{\log_a n}{n}$ descrește.

$$\text{Apoi } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x} = 0.$$

Așadar, seria dată este convergentă. \square

42. Există serii alternate convergente care nu satisfac condițiile din criteriul lui Leibniz?

Soluție. Dacă o serie alternată este convergentă, șirul modulelor termenilor ei tinde către 0. Prin urmare, trebuie stabilit dacă există serii alternate convergente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$, pentru care șirul $(u_n)_n$ nu este descrescător.

Să presupunem că seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ satisface criteriul lui Leibniz și să notăm

$$v_n = \begin{cases} u_{n-1}, & \text{pentru } n = 2k \\ -u_{n+1}, & \text{pentru } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este evident alternată, iar șirul $(|v_n|)_n$ tinde către 0, dar nu este descrescător. Să notăm acum cu $(s_n)_n$ șirul sumelor parțiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ și cu $(\sigma_n)_n$ pe cel al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Dacă luăm $s_0 = 0$ avem

$$\sigma_n = \begin{cases} s_n, & \text{pentru } n = 2k \\ s_{n-1} - u_{n+1}, & \text{pentru } n = 2k + 1 \end{cases}$$

de unde rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, ceea ce demonstrează că seria

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă.

Prin urmare , răspunsul la problemă este afirmativ , deci condițiile din criteriul lui Leibniz sunt numai suficiente , nu și necesare , pentru convergența seriilor alternate. \square

43. Să se dea un exemplu de serie alternată divergentă pentru care șirul termenilor converge la 0.

Soluție. Să considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n}$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2n} = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, rezultă că șirul $(u_n)_n$ al modulelor termenilor acestei serii converge către 0. Atunci șirul termenilor ei converge de asemenea către 0. Să stabilim acum natura acestei serii. Avem

$$s_{2n} = -1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{2n-1} + \frac{3}{2n} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right)$$

Știind că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = C$ (constanta lui Euler) și notând cu $\varepsilon_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - C$ obținem

$$s_{2n} = \frac{3}{2}(C + \ln n + \varepsilon_n) - \frac{C}{2} - \ln \sqrt{4n} - \eta_n = C + \frac{1}{2} \ln \frac{n^2}{4} + \frac{3}{2} \varepsilon_n - \eta_n, \text{ de unde rezultă că } \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = +\infty.$$

De aici deducem că șirul $(s_n)_n$ al sumelor parțiale este divergent, ceea ce înseamnă că seria dată este divergentă. \square

44. Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{\sqrt{n}}$

Soluție. Vom aplica criteriul lui Dirichlet luând $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ care e descrescător la 0 și $v_n = \sin n \cdot \sin n^2$.

Arătăm că seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ are șirul sumelor parțiale mărginit:

$$V_n = \sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [\cos(n-k^2) - \cos(n+k^2)] = \frac{1}{2} [1 - \cos(n+n^2)] \leq \frac{1}{2}$$

Așadar, seria este convergentă. \square

Să se studieze convergența absolută și semiconvergența seriilor următoare:

45. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n+1}$

Soluție. Pentru a studia convergența absolută vom aplica criteriul rădăcinii. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n \sin^{2n} x}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin^2 x}{\sqrt[n]{n+1}} = 2 \sin^2 x, \text{ deoarece}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

Prin urmare, seria dată este absolut convergentă pentru $2 \sin^2 x < 1$, adică $1 - \cos 2x < 1$ sau $\cos 2x > 0$. Ultima inegalitate este satisfăcută pentru $2k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ sau $k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{4}$, k întreg.

Pentru $\cos 2x < 0$, adică $k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{3\pi}{4}$, seria dată este divergentă.

Pentru $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ care, cf. criteriului lui Leibniz, este convergentă. Deoarece seria modulelor este divergentă căci este seria armonică din care lipsește primul termen, deducem că în acest caz seria dată este semiconvergentă. \square

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\prod_{k=1}^n (k+p)}{n! n^q}, p, q \in \mathbb{N} \text{ fixați}$$

Soluție. Aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\begin{aligned} n \left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} - 1 \right) &= n \left(\frac{(n+1)^{q+1}}{n^q(n+1+p)} - 1 \right) = \frac{(n+1)^{q+1} - n^{q+1} - (1+p)n^q}{n^q + (1+p)n^{q-1}} = \\ &= \frac{(q-p)n^q + \sum_{k=0}^{q-1} C_{q+1}^k n^k}{n^q + (1+p)n^{q-1}} \rightarrow q - p \end{aligned}$$

Dacă $q - p > 1 \iff q > p + 1$, atunci seria este absolut convergentă

Dacă $q < p + 1$:

$$|u_n| = \frac{1}{p!} \cdot \frac{(n+p)!}{n! n^q} = \frac{1}{p!} \cdot \frac{\prod_{k=1}^p (n+k)}{n^q} = \frac{1}{p!} \cdot \frac{\prod_{k=1}^p \left(1 + \frac{k}{n}\right)}{n^{q-p}}$$

Dacă $p = q \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \frac{1}{p!}$, deci seria este divergentă cf. criteriului necesar

Dacă $q < p \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \infty$, deci seria este divergentă cf. criteriului necesar

Pentru $q = p + 1$, seria este convergentă, cf. criteriului lui Leibniz.

Pentru $p = 0 \implies u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n^q}$. Atunci pentru $q > 1$, seria e absolut convergentă ; pentru $q = 1$, seria e convergentă ; pentru $q = 0$, seria e divergentă \square

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha + \frac{1}{n}}}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluție. Pentru a studia convergența absolută vom aplica criteriul al treilea al comparației, folosind ca serie de comparație seria armonică generalizată

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^{\alpha + \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Prin urmare, pentru $\alpha > 1$, seria dată este absolut convergentă .

Pentru $\alpha \leq 0$, ea este divergentă , deoarece șirul termenilor ei nu tinde către 0.

Ne-a rămas de studiat cazul $0 < \alpha \leq 1$. Vom aplica criteriul lui Abel, luând $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ și $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este evident convergentă deoarece ea satisface condițiile din criteriul lui Leibniz. Șirul $(\alpha_n)_n$ are limita 1, deci este convergent, deci și mărginit. Trebuie să mai arătăm că el este monoton.

Intr-adevăr, se știe că $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$, deci pentru $\forall n \geq 3$ avem $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$ sau $(n+1)^n < n^{n+1}$. Ridicând această inegalitate la puterea $\frac{1}{n(n+1)}$ obținem $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$, de unde deducem că pentru $n \geq 3$ șirul $(\alpha_n)_n$ este crescător. Prin urmare, înlăturând din seria dată primii doi termeni, ceea ce nu-i schimbă natura, obținem o serie ce satisface toate condițiile criteriului lui Abel, deci e convergentă .

Așadar, pentru $0 < \alpha \leq 1$, seria dată este semiconvergentă . \square

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \frac{1}{n}$$

Soluție. Seria nu este absolut convergentă (se compară la limită cu seria armonică). Seria este alternată ; vom demonstra că șirul $a_n = \sqrt[n]{n} \sin \frac{1}{n}$ este descrescător la 0, deci seria converge.

Evident $a_n \rightarrow 0$; pentru a arăta că a_n este descrescător (începând de la un rang suficient de mare), fie funcția $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \sin \frac{1}{x}$. Calculăm

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2} \left((1 - \ln x) \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right).$$

Pentru a studia semnul derivatei (pentru x "mare"), calculăm:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \ln x) \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = -1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x} = -1,$$

deci $f'(x) < 0$ pentru x suficient de mare, deci șirul a_n este descrescător. \square

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}, \alpha \in \mathbb{R}$

Soluție. Deoarece $\frac{|\cos n\alpha|}{n^2} < \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$, rezultă cf. primului criteriu al comparației, că seria dată este absolut convergentă. \square

50. Să se arate că există serii divergente a căror sumă este o serie convergentă.

Soluție. Seriiile $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ sunt divergente (pentru că termenul general nu tinde la 0, nici măcar nu are limită $u_{2n} = -1, u_{2n+1} = 1, v_{2n} = 1, v_{2n+1} = -1$), iar suma lor este o serie convergentă, deoarece toți termenii ei sunt nuli. \square

51. Se poate ca produsul a două serii semiconvergente să fie o serie divergentă? Dar ca produsul a două serii semiconvergente să fie o serie convergentă?

Soluție. Vom considera seria semiconvergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ și vom calcula pătratul ei, adică vom efectua produsul acestei serii cu ea însăși. Obținem astfel seria cu termen general

$$w_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{i} \cdot \sqrt{n-i+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 1} \right)$$

Deoarece fiecare termen din paranteză este mai mare decât $\frac{1}{n}$, rezultă că $|w_n| > 1$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ este divergentă căci șirul termenilor ei nu converge către 0. Așadar, produsul a două serii semiconvergente poate fi o serie divergentă.

Să considerăm acum seria armonică alternată, care e o serie semiconvergentă și să calculăm pătratul ei. Atunci

$$w_n = (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2 \cdot (n-1)} + \dots + \frac{1}{i \cdot (n-i+1)} + \dots + \frac{1}{n \cdot 1} \right]$$

Folosind identitatea $\frac{1}{i(n-i+1)} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i+1} \right)$, obținem

$$w_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| = 0$. (se poate verifica ușor folosind cunoștințe elementare de liceu)

Din relația

$$|w_n| - |w_{n+1}| = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$$

deducem că șirul $(|w_n|)_n$ este descrescător. Prin urmare, seria $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ verifică condițiile din criteriul lui Leibniz, deci este convergentă. Așadar, produsul a două serii semiconvergente poate fi și o serie convergentă \square

52. Se poate ca produsul a două serii divergente să fie o serie absolut convergentă ?

Soluție. Să considerăm seriile $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$, $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ care sunt divergente deoarece nu satisfac condiția necesară de convergență și să efectuăm produsul lor. Avem

$$\begin{aligned} w_n &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \dots - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) - \\ &- \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left[2^n - (2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2) + \frac{1}{2^{n+1}} - \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2^2}\right) - \frac{3}{2}\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left[2^n - \frac{2^n - 2}{2-1} + \frac{1}{2^{n+1}} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{3}{2}\right] = \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{aligned}$$

Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ este o serie geometrică cu rația $\frac{3}{4} < 1$. Prin urmare, ea este absolut convergentă, deoarece termenii ei sunt pozitivi. Răspunsul la întrebarea pusă este deci afirmativ. \square

Să se aproximeze cu o eroare mai mică decât ϵ sumele seriilor definite de șirul x_n :

53. $x_n = \frac{(-1)^n}{n!}$, $\epsilon = 10^{-3}$

Soluție. În cazul seriilor alternate, eroarea este mai mică decât primul termen neglijat; deci cea mai mică soluție a inecuației $|x_n| < \epsilon$ este rangul primului termen neglijat. Obținem: $\frac{1}{n!} < 10^{-3} \Rightarrow n = 7$, deci

$$S \approx \sum_{k=0}^6 \frac{(-1)^k}{k!} = 0,36805.$$

□

$$54. x_n = \frac{(-1)^n}{n^3 \sqrt{n}}, \epsilon = 10^{-2}$$

Soluție. $n^3 \sqrt{n} > 100 \Rightarrow n = 4$, deci $S \approx \sum_{k=2}^3 \frac{1}{n^3 \sqrt{n}} = 0,06725$. □

$$55. x_n = \frac{1}{n!}, \epsilon = 10^{-3}$$

Soluție. Dacă S este suma seriei și $s_n = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$, atunci

$$S - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{n} < 10^{-3} \Rightarrow n = 6,$$

deci $S \approx 2,7166$. □

$$56. x_n = \frac{1}{n! 2^n}, \epsilon = 10^{-4}$$

Soluție. Fie S suma seriei și s_n suma primilor termeni. Aplicăm rezultatul cu privire la aproximarea unei serii cu termeni pozitivi (a se vedea secțiunea teoretică); pentru aceasta, evaluăm:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2n+2} < \frac{1}{6} = k, \forall n \geq 2,$$

deci $S - s_n \leq x_n \frac{k}{1-k} = \frac{1}{n! 2^n} \frac{1}{5} < 10^{-4} \Rightarrow n = 5$.

Aproximarea cerută este $S \approx s_5 = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k^2 k!} = 1,146463$. □

$$57. x_n = \frac{1}{n^4 (2n)!}, \epsilon = 10^{-6}$$

Soluție. Aplicăm același procedeu ca în exercițiul anterior:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^4 \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} < \frac{1}{56} = k, \forall n \geq 3.$$

Rezultă $S - s_n \leq x_n \frac{k}{1-k} \leq \frac{1}{56} x_n$; din condiția:

$$x_n \frac{k}{1-k} = \frac{1}{56} x_n < 10^{-6},$$

rezultă $n \geq 4$, deci $S \approx x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,5026212$. □

1.8 Probleme propuse

Să se determine natura și suma seriilor următoare :

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + 3n + 3}$$

R: Scriem $\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+3n+3} = \operatorname{arctg}(n+2) - \operatorname{arctg}(n+1)$ și obținem suma $\frac{\pi}{4}$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+\alpha+1} - 2\sqrt{n+\alpha} + \sqrt{n+\alpha-1}), \alpha > 0$$

R: convergentă , cu suma $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha+1}$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}, \alpha \text{ fiind un număr real diferit de orice întreg negativ.}$$

R: convergentă , cu suma $\frac{1}{1+\alpha}$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3}$$

R: convergentă , cu suma $\frac{1}{4}$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$$

R: divergentă , cu suma $+\infty$

$$6. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

R: convergentă , cu suma $-\ln 2$ (ținem cont de $(1 - \frac{1}{k}) \left(1 + \frac{1}{k-1} \right) = 1, \forall k \geq 2$)

Să se stabilească natura seriilor următoare :

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

R: divergentă

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n+1}{2n+3}$$

R: divergentă (cf. criteriului necesar)

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 3\sqrt{n}}{n(n+1)\sqrt{n+2}}$$

R: convergentă

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n + n}$$

R: convergentă pentru $a > 1$, divergentă pentru $a \leq 1$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3 - 1}$$

R: convergentă ($\frac{\ln n}{2n^3 - 1} \leq \frac{n}{n^3}$)

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5}$$

R: convergentă

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1})$$

R: divergentă (cf. criteriului al treilea de comparație cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n^3}}$$

R: divergentă (cf. criteriului al treilea de comparație cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}$$

R: convergentă (cf. criteriului al treilea de comparație cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$)

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$$

R: convergentă

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-(n^2+n)}$$

R: convergentă

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n \cdot p}}, p > 1$$

R: convergentă (cf. criteriului raportului)

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{n!}$$

R: convergentă pentru $a < \frac{1}{e}$, divergentă pentru $a \geq \frac{1}{e}$

$$20. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^3 - n^2 + 1}{n!} a^n, a > 0$$

R: convergentă pentru $\forall a > 0$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, a > 0$$

R: convergentă pentru $a < 1$, divergentă pentru $a \geq 1$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(b \cdot \frac{a+n}{a+n-1}\right)^n$$

R: pentru $b < 1$, seria este convergentă, pentru $b \geq 1$, seria este divergentă (cf. criteriului radicalului și criteriului necesar)

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \left(a \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2}\right)^n, a > 0$$

R: convergentă pentru $a < 1$, divergentă pentru $a \geq 1$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}, a \in \mathbb{R}$$

R: Se amplifică cu conjugata și se aplică criteriul al treilea de comparație cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}, a > 0$$

R: convergentă (cu criteriul lui Raabe-Duhamel)

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{n}$$

R: convergentă (cu criteriul lui Raabe-Duhamel)

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left[\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)} \right]^2, a \in \mathbb{R}$$

R: convergentă pentru $a \geq 0$, divergentă pentru $a < 0$ (cu criteriul lui Raabe-Duhamel)

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (3n)} \right)^2$$

R: convergentă (cf.criteriului lui Raabe-Duhamel)

$$29. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^2}$$

R: divergentă (cf.criteriului logaritmic)

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4}}$$

R: convergentă (cf.criteriului logaritmic)

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

R: convergentă (cf.criteriului logaritmic)

$$32. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

R: Cf. criteriului integral, seria este convergentă

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$$

R: $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin(\pi(\sqrt{n^2+1} - n + n)) =$
 $= (-1)^n \sin(\pi(\sqrt{n^2+1} - n)) = (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$

Cf. criteriului lui Leibniz rezultă că seria este convergentă .

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3^n}$$

R: convergentă

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \cos \frac{1}{n}}{n}$$

R: convergentă (cu criteriul lui Abel)

36. Să se arate că suma dintre o serie convergentă și una divergentă este o serie divergentă .

37. Să se studieze convergența absolută și semiconvergența seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

R: semiconvergentă , dar nu e absolut convergentă

Capitolul 2

Șiruri și serii de funcții

2.1 Noțiuni teoretice

Definiția 2.1. Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții, $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se spune că șirul $(f_n)_n$ este **punctual convergent pe $[a, b]$ către f** pentru $n \rightarrow \infty$ (și se scrie $f_n \xrightarrow{PC} f$) dacă $f_n(x) \rightarrow f(x)$ (în \mathbb{R}) pentru $\forall x \in [a, b]$.

Definiția 2.2. Un șir $(f_n)_n$ de funcții $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **uniform convergent pe $[a, b]$ către o funcție $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$** (și se scrie $f_n \xrightarrow{UC} f$) dacă este îndeplinită următoarea condiție:

$\forall \varepsilon > 0$ real $\exists N(\varepsilon)$ natural astfel încât $\forall n \geq N(\varepsilon)$ să avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, pentru $\forall x \in [a, b]$

Teorema 2.1. (a) *Un șir $(f_n)_n$ de funcții mărginite, $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (adică $f_n \in \mathcal{M}, \forall n \geq 0$) este uniform convergent către o funcție $f \in \mathcal{M}$ dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$*

(b) *Orice șir de funcții $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uniform convergent pe $[a, b]$ este punctual convergent pe $[a, b]$; reciproca este falsă.*

Exemplul 2.1. Luăm $[a, b] = [0, 1]$ și $f_n(x) = x^n, n \geq 1$
Evident $\forall x \in [a, b]$ avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$$

adică $f_n \xrightarrow{PC} f$, unde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$$

Dar $\|f_n - f\| = \sup_{x \in [0, 1)} |f_n(x) - f(x)| = \max(\sup_{x \in [0, 1)} |f_n(x) - f(x)|, |f_n(1) - f(1)|) = \max(\sup_{x \in [0, 1)} x^n, 0) = 1$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 1 \neq 0$. Așadar șirul f_n este PC, dar nu este UC pe $[0, 1]$.

Teorema 2.2. (*Criteriul fundamental de convergență uniformă al lui Cauchy*) Șirul de funcții $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniform pe mulțimea $A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$.

Teorema 2.3. Fie $(f_n)_n$ un șir uniform convergent de funcții continue, $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci limita $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ este o funcție continuă pe $[a, b]$.
In plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Teorema 2.4. Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții din $C^1_{[a,b]}$ și f, g funcții mărginite, $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $f_n \xrightarrow{PC} f$ și $f'_n \xrightarrow{UC} g$ pe $[a, b]$, atunci f este derivabilă pe $[a, b]$ și $f' = g$.

Teorema 2.5. (*teorema lui Dini*) Fie $(f_n)_n$ șir monoton de funcții continue, $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow{PC} f$. Atunci $f_n \xrightarrow{UC} f$.

Teorema 2.6. (*teorema lui Polya*) Fie $(f_n)_n$ șir de funcții monotone, $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă astfel încât $f_n \xrightarrow{PC} f$. Atunci $f_n \xrightarrow{UC} f$.

Teorema 2.7. (*teorema lui Weierstrass-Stone*) Pentru orice funcție continuă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ există un șir $(f_n)_n$ de polinoame, $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow{UC} f$.

Definiția 2.3. Mulțimea valorilor lui x pentru care seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este convergentă se numește **mulțimea de convergență** a seriei,

iar funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), S_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$ se numește **suma seriei**.

Definiția 2.4. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este **simplu (punctual) convergentă** către funcția f dacă șirul sumelor parțiale $(S_n(x))_n$ este simplu (punctual) convergent către f . Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este **uniform convergentă** către funcția f dacă șirul sumelor parțiale $(S_n(x))_n$ este uniform convergent către f . Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este **absolut convergentă** dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ este simplu convergentă.

Teorema 2.8. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o serie uniform convergentă de funcții continue. $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și s suma acestei serii. Atunci s este o funcție continuă pe $[a, b]$. În plus, $\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n dx$.

Teorema 2.9. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o serie PC de funcții din $C^1_{[a,b]}$, cu suma s pe $[a, b]$ și astfel încât seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ să fie UC. Atunci funcția s este derivabilă pe $[a, b]$ și, în plus, $s' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$

Teorema 2.10. (criteriul lui Weierstrass) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n, f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o serie de funcții și $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie convergentă de numere reale pozitive. Dacă $|f_n(x)| \leq a_n, \forall x \in [a, b]$ și pentru $\forall n \geq N, N$ fiind fixat, atunci seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este UC pe $[a, b]$.

Teorema 2.11. (criteriul general de convergență uniformă al lui Cauchy) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ avem $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$ și $\forall x \in [a, b]$

Teorema 2.12. (Criteriul lui Abel) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funcții se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ astfel încât seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este uniform convergentă, iar $(\alpha_n)_n$ este un șir monoton de funcții egal mărginite, atunci ea este uniform convergentă.

Teorema 2.13. (Criteriul lui Dirichlet) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funcții se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ astfel încât șirul sumelor parțiale al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este un șir de funcții egal mărginite, iar $(\alpha_n)_n$ un șir monoton ce converge uniform către 0, atunci ea este uniform convergentă.

Formula lui Taylor Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^m pe I . Pentru orice $a \in I$ definim **polinomul Taylor** de gradul $n \leq m$ asociat funcției f în punctul a :

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Restul de ordin n este, prin definiție,

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x).$$

Polinoamele Taylor de gradul întâi (respectiv de gradul al doilea) se numesc **aproximarea liniară** (respectiv **pătratică**) ale funcției în jurul punctului a .

Teorema 2.14. (Formula lui Taylor cu restul Lagrange) Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^{n+1} și $a \in I$. Atunci, pentru orice $x \in I$, există $\xi \in (a, x)$ (sau (x, a)) astfel încât

$$f(x) = T_{n,f,a}(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Observații 1. Restul de ordin n poate fi scris sub forma Peano :

$\exists \omega : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = \omega(a) = 0$ și

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} \omega(x).$$

2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$

3. Restul de ordin n poate fi scris sub forma integrală :

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt.$$

2.2 Probleme rezolvate

1. Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirurilor de funcții:

a) $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$

b) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n(1-x^n)$

c) $f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$

Soluție. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{x}{1+nx^2} \right| \leq \frac{1}{2n} \rightarrow 0 \implies$$

$$\implies \sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - 0| = 0 \implies f_n(x) \xrightarrow{UC} 0$$

b) Evident $f_n(x) \xrightarrow{PC} 0$

$$\begin{aligned}
 f_n(x) &= x^n(1-x^n) \implies f'_n(x) = nx^{n-1}(1-x^n) - x^n nx^{n-1} = \\
 &= nx^{n-1}(1-2x^n) \implies \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0,1]} |x^n(1-x^n)| \geq \\
 &\geq \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^n \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^n\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0, \text{ deci } f_n \text{ nu converge uniform} \\
 &\text{la } 0.
 \end{aligned}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Intrucât } \sup_{x \in (-1,1)} \left| \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| &= \sup_{x \in (-1,1)} \frac{|x|^n}{1-x} \geq \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1-(1-\frac{1}{n})} = \\
 &= n(1-\frac{1}{n})^n \rightarrow \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (-1,1)} \left| \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| \neq 0, \text{ deci } f_n \text{ nu} \\
 &\text{converge uniform.} \quad \square
 \end{aligned}$$

2. Să se arate că șirul $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ nu converge uniform pe $[0, \infty)$, însă converge uniform pe orice interval $[a, b]$, unde $0 < a < b$.

Soluție. Evident $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$

$$\sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x}{x+n} \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} \neq 0 \implies f_n \text{ nu converge} \\
 \text{uniform la } 0 \text{ pe } [0, \infty)$$

$$\text{Deoarece } \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [a, b]} \frac{x}{x+n} \leq \frac{b}{a+n} \rightarrow 0 \implies f_n \xrightarrow{UC} 0 \\
 \text{pe } [a, b] \quad \square$$

3. Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n, f_n: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f_n(x) = \sqrt{(n^2+1)\sin^2 \frac{\pi}{n} + nx} - \sqrt{nx}$ este uniform convergent.

$$\text{Soluție. } 0 \leq f_n(x) \leq \frac{(n^2+1)\sin^2 \frac{\pi}{n}}{\sqrt{(n^2+1)\sin^2 \frac{\pi}{n} + nx} + \sqrt{nx}} < \frac{(n^2+1)\frac{\pi^2}{n^2}}{2\sqrt{n}} < \frac{2\pi^2}{2\sqrt{n}} = \frac{\pi^2}{\sqrt{n}}$$

$$\text{deoarece } \sin^2 \frac{\pi}{n} < \frac{\pi^2}{n^2} \rightarrow 0 \text{ și } (n^2+1)\sin^2 \frac{\pi}{n} > 0$$

Așadar, f_n converge uniform la 0 pe $(1, \infty)$ □

4. Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n, f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{k(k+1)}$ este uniform convergent și limita sa este o funcție continuă pe \mathbb{R} .

Soluție. Aplicăm criteriul lui Cauchy:

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)} \right| < \\
 &< \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \text{dacă } n > n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil \implies (f_n)_n \text{ este uniform convergent.}$$

Cum f_n sunt funcții continue $\forall n \in \mathbb{N}$, rezultă cf. Teoremei 2.2 că limita șirului e o funcție continuă. \square

5. Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$ converge uniform pe \mathbb{R} , dar $\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]'_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1)$.

Soluție. Deoarece $|f_n(x)| = \left| \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n \right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$, rezultă că șirul de funcții converge uniform pe \mathbb{R} către funcția $f(x) \equiv 0$. Deci $f'(x) = 0$ sau $\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]' = 0$.

Pe de altă parte, $f'_n(1) = \frac{1}{2}$ și, prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) = \frac{1}{2}$

Rezultatele diferă deoarece șirul derivatelor nu converge uniform pe \mathbb{R} către $\frac{1}{2}$. \square

6. Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ converge, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$

Soluție. Evident $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, deci $f(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$

Apoi $\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-nx^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n}$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n} \right) = \frac{1}{2}, \text{ iar } \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$$

Rezultatul se explică prin faptul că șirul nu este uniform convergent. Intr-adevăr, dacă se alege $x_n = \frac{1}{n} \in [0, 1]$, rezultă $f_n(x_n) = e^{-\frac{1}{n}} \rightarrow 1$, deci definiția uniform convergenței nu este verificată. \square

7. Fie $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Să se arate că (f_n) converge neuniform pe $[0, 1]$, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.

Soluție. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, deci șirul converge punctual la 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - 0| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right|$$

Aflăm supremumul acestei funcții. Calculăm $f'_n(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - nx \cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} =$

$= \frac{n-n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}$. Punctele critice sunt $x = \pm \frac{1}{n}$, dar doar $x = \frac{1}{n} \in [0, 1]$.

Deci $\sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{2} \neq$

$\neq 0$. Așadar, șirul nu converge uniform pe $[0, 1]$.

Avem $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$

$$\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = \frac{1}{2n} \ln(1+n^2x^2) \Big|_0^1 = \frac{\ln(1+n^2)}{2n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0 \quad \square$$

8. Studiați convergența simplă și uniformă a șirului de funcții $f_n: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = n \sin^n x \cos x$.

Soluție. Evident $f_n \xrightarrow{PC} f \equiv 0$

Deoarece $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \sin^n x \cos x dx = \frac{n}{n+1}$, deci

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx = 1$, iar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 0$, deducem că șirul f_n nu converge uniform, cf. Teoremei 2.2. \square

9. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1+x^2) \cdot \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$.

Soluție. Fie $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = (1+x^2) \cdot \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x^2) \cdot \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} = (1+x^2) \cdot e^x = f(x)$, deci $f_n \xrightarrow{PC} f$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in [0,1]} \left| (1+x^2) \cdot \left(\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} - e^x \right) \right| = \\ &= \sup_{x \in [0,1]} \left| (1+x^2) \cdot \frac{x(e^{-x} - e^x)}{n+x} \right| \leq \frac{2e}{n}, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \\ &= 0, \text{ adică } f_n \xrightarrow{UC} f \end{aligned}$$

Cf. teoremei 4.3, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1+x^2) \cdot \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx =$

$$= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 (1+x^2) \cdot e^x dx = 2e - 3 \quad \square$$

10. Fie $f_n: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniform convergent către $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Să se arate că șirul $g_n = \frac{f_n}{1+f_n^2}$ e uniform convergent.

Soluție. Șirul (g_n) converge simplu la funcția $g = \frac{f}{1+f^2}$

Studiem convergența uniformă a șirului (g_n) :

$$\begin{aligned} \left| g_n(x) - \frac{f}{1+f^2} \right| &= \left| \frac{f_n}{1+f_n^2} - \frac{f}{1+f^2} \right| = \left| \frac{f_n(x) + f_n(x)f^2(x) - f(x) - f(x)f_n^2(x)}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} \right| = \\ &= \frac{|f_n(x) - f(x)| \cdot |1 - f_n(x)f(x)|}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} \leq |f_n(x) - f(x)| \cdot \frac{1 + |f_n(x)||f(x)|}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} = \\ &= |f_n(x) - f(x)| \cdot \left(\frac{1}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} + \frac{|f_n(x)|}{1+f_n^2(x)} \cdot \frac{|f(x)|}{1+f^2(x)} \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} |f_n(x) - f(x)|, \forall x \in A \implies$$

$$\implies \sup_{x \in A} |g_n(x) - g(x)| \leq \frac{5}{4} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0, \text{ pentru c\aa } (f_n)$$

converge uniform, deci (g_n) va converge uniform \square

11. Fie șirul de funcții $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dat de relația de recurență $f_1 \equiv 0$ și $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}[x - f_n^2(x)]$, $x \in [0, 1]$, $n \geq 1$. Să se arate că șirul $(f_n)_n$ converge uniform către funcția $f(x) = \sqrt{x}$.

Soluție. Evident $f_n \xrightarrow{PC} f$

Prin inducție arătăm că $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Intr-adevăr, $f_1(x) \equiv 0 \leq f(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in [0, 1]$. Presupunem că $f_n(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [0, 1]$

Rezultă că $f(x) - f_{n+1}(x) = f(x) - f_n(x) - \frac{1}{2}[x - f_n^2(x)] =$
 $= (f(x) - f_n(x))\left[1 - \frac{1}{2}(f(x) + f_n(x))\right] \geq (f(x) - f_n(x))(1 - f(x)) \geq$
 ≥ 0 , $\forall x \in [0, 1]$, deci $f_{n+1}(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [0, 1]$.

Analog arătăm că $0 \leq f_n(x)$, $\forall x \in [0, 1]$. Atunci $f_n \leq f_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Cum f_n și f sunt continue, folosind teorema lui Dini, rezultă că

$f_n \xrightarrow{UC} f$ \square

12. Fie $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\int_0^a x^n f(x) dx = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $f \equiv 0$.

Soluție. Avem $\int_0^a P(x)f(x)dx = 0$, pentru orice polinom P cu coeficienți reali. Cf. teoremei Stone-Weierstrass, există $(P_n)_n$ un șir de polinoame cu coeficienții reali astfel încât $P_n \xrightarrow{UC} f$ pe $[0, a]$. Cum f este mărginită, $f \cdot P_n \xrightarrow{UC} f^2$ pe $[0, a]$. Prin urmare, $\int_0^a f^2(x)dx =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) \cdot P_n(x)dx = 0$ (cf. Teoremei 2.3). Deoarece $f^2 \geq 0$ este continuă, rezultă că $f^2 \equiv 0$, deci $f \equiv 0$. \square

13. Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de funcții:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n, x \in \mathbb{R}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}}) \dots (2-x^{\frac{1}{n}}), x > 0$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+a^n)}{n^x}, a \geq 0$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluție. a) Aplicăm criteriul rădăcinii pentru seria valorilor absolute :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left| \frac{1-x}{1-2x} \right| = \left| \frac{1-x}{1-2x} \right|$$

Deci seria este absolut convergentă pentru $\left| \frac{1-x}{1-2x} \right| < 1 \implies x < 0$ și $x > \frac{2}{3}$.

Dacă $\left| \frac{1-x}{1-2x} \right| \geq 1 \implies x \in [0, \frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$. Deoarece $|a_n| = |f_n(x)| \geq 1$ implică $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$; rezultă că seria este divergentă .

Deci mulțimea de convergență este $(-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$

b) Folosim criteriul raportului:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1-x^2|}{1+x^2} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{|1-x^2|}{1+x^2}$$

Deoarece, pentru $x \neq 0$, $\frac{|1-x^2|}{1+x^2} < 1$ rezultă că seria dată este absolut convergentă .

Pentru $x = 0$ se obține seria alternată convergentă $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$. Deci mulțimea de convergență este \mathbb{R}

c) Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$ și $x > 0$, deducem că , începând de la un anumit rang n_0 , termenii seriei date vor avea același semn, căci $2 - \sqrt[n]{x} > 0$ pentru $n \geq n_0$. Lăsând la o parte primii n_0 termeni, obținem o serie cu termeni pozitivi. Aplicăm acestei serii criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{x^{\frac{1}{n+1}} - 1}{2 - x^{\frac{1}{n+1}}} = \ln x,$$

astfel că pentru $\ln x > 1$, adică $x > e$, seria dată este convergentă , iar pentru $x < e$ ea este divergentă .

Pentru $x = e$ avem $\frac{f_{n+1}}{f_n} = 2 - e^{\frac{1}{n+1}} > 2 - (1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$, deoarece $e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ și cf. criteriului al doilea al comparației seria este divergentă .

Pentru $x = 2$ seria dată este convergentă, deoarece $f_n(2) = 0$.

Deci mulțimea de convergență este $\{2\} \cup (e, \infty)$

d) Aplicând criteriul al treilea al comparației, rezultă că seria dată are aceeași natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, deci ambele serii sunt convergente.

Așadar, mulțimea de convergență este \mathbb{R} .

e) Să presupunem întâi că $0 < a < 1$. Deoarece această serie are termenii pozitivi îi putem aplica criteriul raportului:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^x \frac{\ln(1+a^{n+1})}{\ln(1+a^n)} = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+a^{n+1})a^{-n-1}}{\ln(1+a^n)a^{-n}} = a \frac{\ln e}{\ln e} = a < 1,$$

deci seria dată converge în acest caz pentru $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dacă $a = 1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^x}$, care este convergentă pentru $\forall x > 1$.

Dacă $a > 1$, atunci $\frac{\ln(1+a^n)}{n^x} = \frac{\ln a^n(1+a^{-n})}{n^x} = \frac{\ln a}{n^{x-1}} + \frac{\ln(1+\frac{1}{a^n})}{n^x}$, deci seria dată poate fi considerată ca suma a două serii, dintre care prima converge pentru $\forall x > 2$, iar a doua pentru $\forall x \in \mathbb{R}$. Așadar, seria dată converge în acest caz pentru $\forall x > 2$.

Pentru $a = 0$ seria dată converge evident pentru $\forall x \in \mathbb{R}$, căci toți termenii ei sunt 0.

f) Aplicăm criteriul radicalului:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = |\sin x| \implies \text{seria e absolut convergentă}$$

dacă $|\sin x| < 1$, adică $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\}, k \in \mathbb{Z}$

Dacă $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, care e convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$

Dacă $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, care, cf. criteriului lui Leibniz, este convergentă pentru $\alpha > 0$

Așadar, dacă $\alpha > 1$, mulțimea de convergență este \mathbb{R} ; dacă $0 < \alpha \leq 1$, mulțimea de convergență este $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi + \frac{\pi}{2}\}$; dacă $\alpha \leq 0$, mulțimea de convergență este $\mathbb{R} \setminus \{x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\}$

□

14. Să se determine mulțimea de convergență și uniform convergența seriei

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x} \right], 0 \leq x \leq 1.$$

Să se determine suma seriei.

Soluție. Șirul sumelor parțiale este

$$S_n(x) = x + \left(\frac{x}{1+x} - x\right) + \left(\frac{x}{1+2x} - \frac{x}{1+x}\right) + \dots + \left[\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x}\right] = \frac{x}{1+nx}$$

$$\text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) = 0, x \in [0, 1]$$

Deoarece $|S_n(x)| < \frac{1}{n}, \forall x \in [0, 1]$, rezultă că seria este uniform convergentă pe $[0, 1]$ către funcția identic nulă. \square

Să se precizeze convergența seriilor:

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}), x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

Soluție. Cum $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, avem $\frac{1}{2^n} \leq x^n \leq 2^n$ și $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{x^n} \leq 2^n$. Așadar, $\frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (2^n + 2^n) = \frac{2^{n+1}n^2}{\sqrt{n!}}$

Arătăm că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}n^2}{\sqrt{n!}}$ este convergentă

$$\text{Fie } a_n = \frac{2^{n+1}n^2}{\sqrt{n!}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^2}{n^2 \sqrt{n+1}} = 0 < 1,$$

deci cf. criteriului raportului $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă

Așadar, conform Teoremei 2.6, seria este uniform și absolut convergentă. \square

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Soluție. Fie $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$. Atunci $f'_n(x) = \frac{n-n^6x^2}{(1+n^5x^2)^2}$. Punctele critice sunt $x = \pm \sqrt{\frac{1}{n^5}}$ și funcția $f_n(x)$ își atinge maximum în $x = \sqrt{\frac{1}{n^5}}$.

$$\text{Deci } \left| \frac{nx}{1+n^5x^2} \right| \leq f_n(x) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ este convergentă, deci cf. Teoremei 2.6, seria este uniform și absolut convergentă. \square

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^4}, x \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Avem $f'_n(x) = \frac{2(n^4 - x^2)}{4x^2 + (x^2 + n^4)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

De aici se vede că funcția $f_n(x)$ are valoarea maximă pentru $x = n^2$. Cum $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = 0$, rezultă că $f_n(x)$ atinge cea mai mare valoare pentru $x = n^2$, deci $|\arctg \frac{2x}{x^2 + n^4}| \leq \arctg \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ fiind convergentă, va rezulta, cf. Teoremei 2.6 (criteriul lui Weierstrass), că seria de funcții este absolut și uniform convergentă. \square

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \frac{\cos nx}{n+1}$$

Soluție. $\left| \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \frac{\cos nx}{n+1} \right| \leq \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \cdot \frac{1}{n+1} =$
 $= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \frac{1}{n(n+1)} < \frac{3}{n(n+1)}$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}$ este convergentă

pentru că o putem compara cu seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, aplicând criteriul al treilea de comparație. Așadar, cf. criteriului lui Weierstrass, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \frac{\cos nx}{n+1}$ este uniform convergentă \square

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{x^3 + n}}, x \in \mathbb{R}$$

Soluție. Fie $s_n = \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{3} = \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{3} \sin \frac{n\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \implies$
 $\implies |s_n| < \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \forall n \implies$ șirul sumelor parțiale ale seriei numerice

$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2n\pi}{3}$ e mărginit, deci se verifică prima condiție din criteriul lui Dirichlet.

Fie $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{x^3 + n}}$. Șirul (α_n) e descrescător pe \mathbb{R} și $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, deci (α_n) converge punctual la 0. Arătăm că șirul (α_n) converge uniform pe \mathbb{R} la 0:

$$|\alpha_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Așadar, seria este uniform convergentă, cf. criteriului lui Dirichlet. \square

20. Este posibil ca o serie de funcții continue pe o mulțime A să convergă neuniform pe această mulțime către o funcție continuă ?

Soluție. Răspunsul este afirmativ.

Fie seria
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right], x \in [0, 1]$$

Toți termenii seriei sunt funcții continue pe $[0, 1]$. Suma parțială de rang n a seriei este

$$S_n(x) = \frac{x}{1+x^2} + \left(\frac{2x}{1+4x^2} - \frac{x}{1+x^2} \right) + \dots + \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right] = \frac{nx}{1+n^2x^2},$$

astfel că $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$, deci seria dată converge simplu pe $[0, 1]$ către funcția identic nulă, care este o funcție continuă pe $[0, 1]$.

Observăm că seria nu converge uniform la 0 pe $[0, 1]$.

Intr-adevăr, luând $x_n = \frac{1}{n} \in [0, 1]$ rezultă $S_n(x) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$, deci relația de convergență uniformă nu este verificată. \square

21. Fie $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{ne^{-x} + xe^{-n}}{x+n}, n \in \mathbb{N}$ și fie $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Soluție. Fie $x \geq 0$, fixat.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^{-x} + xe^{-n}}{x+n} = e^{-x},$$

deci u_n converge punctual la $f(x) = e^{-x}, \forall x \geq 0$.

Evaluăm în continuare

$$g_n(x) = |u_n(x) - f(x)| = \left(1 - \frac{n}{n+x} \right) |e^{-n} - e^{-x}|, \forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă $x \in (n, \infty)$ atunci:

$$e^{-x} < e^{-n} \Rightarrow |e^{-n} - e^{-x}| < e^{-n} \Rightarrow g_n(x) < e^{-n} \rightarrow 0.$$

Dacă $x \in [0, n]$, atunci

$$\begin{aligned} e^{-x} \geq e^{-n} \Rightarrow |e^{-n} - e^{-x}| &\leq |e^{-n}| + |e^{-x}| = \\ &= e^{-n} + e^{-x} \leq 2e^{-x}, \end{aligned}$$

deci

$$g(x) \leq \frac{2xe^{-x}}{x+n}, \forall x \in [0, n].$$

Studiem acum variația funcției $[0, 1] \ni x \mapsto \frac{2xe^{-x}}{x+n}$.

$$\left(\frac{2xe^{-x}}{x+n} \right)' = 2 \frac{e^{-x}}{(x+n)^2} \cdot (-x^2 - nx + n),$$

deci funcția $\frac{2xe^{-x}}{x+n}$ este crescătoare pe $(0, \frac{\sqrt{n^2+4n}-n}{2})$ și descrescătoare pe $(\frac{\sqrt{n^2+4n}-n}{2}, n)$, deci

$$g_n(x) \leq \frac{8n}{(\sqrt{n^2+4n}+n)^2} \cdot e^{-\frac{2n}{\sqrt{n^2+4n}+n}} \rightarrow 0.$$

Deci u_n converge uniform la f .

Aplicând transferul de integrabilitate obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{e-1}{e}.$$

□

22. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2})$ converge neuniform

pe $[0, 1]$ și totuși

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}) dx$$

Soluție. Șirul sumelor parțiale este $S_n(x) = x^n - x^{2n}$.

Deoarece $S_n(0) = S_n(1) = 0$ și pentru $x \in (0, 1)$ avem $0 < S_n(x) < x^n$, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$. Deci seria este simplu convergentă pe $[0, 1]$ către funcția identic nulă.

Convergența nu este uniformă :

$$\text{Alegem } x_n = 2^{-\frac{1}{n}} \in [0, 1] \text{ și } S_n(x_n) = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4}$$

Deoarece suma seriei date este $f(x) = 0, x \in [0, 1]$, rezultă $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Apoi $\int_0^1 (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}) dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n-1}$ astfel

că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n-1} \right)$ este convergentă și are suma egală cu zero.

Așadar egalitatea din enunț e demonstrată.

□

23. E posibilă integrarea termen cu termen a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x[n^2 e^{-n^2 x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2 x^2}], x \in [0, 1]?$$

Soluție. $s_n(x) = \sum_{k=1}^n 2x[k^2 e^{-k^2 x^2} - (k-1)^2 e^{-(k-1)^2 x^2}] = 2xn^2 e^{-n^2 x^2} \implies$
 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 0, \forall x \in [0, 1] \implies$ seria dată e simplu convergentă pe $[0, 1]$ către $f(x) = 0$

Cum în punctul $x_n = \frac{1}{n}$ avem $s_n(x_n) = \frac{2n}{e} \rightarrow \infty$, deci seria dată nu e uniform convergentă pe $[0, 1]$ către $f(x) = 0$

Avem $\int_0^1 f(x) dx = 0$ și

$$\int_0^1 2x[n^2 e^{-n^2 x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2 x^2}] dx = [-e^{-n^2 x^2} + e^{-(n-1)^2 x^2}] / 0 = \frac{1}{e^{(n-1)^2}} - \frac{1}{e^{n^2}}$$

Dar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{e^{(n-1)^2}} - \frac{1}{e^{n^2}} \right]$ e convergentă și are suma 1, deoarece suma ei parțială de rang n este $\sigma_n = 1 - \frac{1}{e^{n^2}} \rightarrow 1$

Așadar, nu e posibilă integrarea termen cu termen a seriei date. \square

24. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ converge uniform pe \mathbb{R} , iar suma sa este o funcție de clasă \mathcal{C}^1 .

Soluție. Deoarece $|\frac{\sin nx}{n^3}| \leq \frac{1}{n^3}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$ și seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ este convergentă, cf. criteriului lui Weierstrass, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ converge uniform.

Cum $(\frac{\sin nx}{n^3})' = \frac{\cos nx}{n^2}$ un raționament asemănător cu cel de mai sus arată că seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ converge uniform, deci funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \text{ este derivabilă și } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Intrucât funcțiile $x \rightarrow \frac{\cos nx}{n^2}$ sunt continue și seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ converge uniform, deducem că f este de clasă \mathcal{C}^1 . \square

25. Să se arate că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ converge uniform pe \mathbb{R} , dar nu converge absolut pe \mathbb{R} .

Soluție. Seria valorilor absolute, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ este divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$.

Deoarece $\frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, deducem că $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$, unde $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}, f(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, rezultă că $f_n \xrightarrow{UC} f \equiv 0$ pe \mathbb{R} .

Șirul de funcții $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_n \equiv (-1)^{n+1}$ are șirul sumelor parțiale egal mărginit. Așadar, cf. criteriului lui Dirichlet, seria de funcții considerată este uniform convergentă. \square

Să se studieze caracterul convergenței următoarelor serii:

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \left(1 + \frac{x}{n+1} \right)^{n+1}, x \in [-1, 1]$$

Soluție. Suma parțială de rang n a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$ (1) este $S_n(x) = x - \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Deoarece $|S_n(x) - x| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}, \forall x \in [-1, 1], \forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că șirul $(S_n)_n$ converge uniform pe intervalul $[-1, 1]$ către funcția $f(x) = x$. Deci seria (1) este uniform convergentă pe $[-1, 1]$.

Șirul de termen general $a_n = \left(1 + \frac{x}{n+1} \right)^{n+1}$ este un șir crescător de funcții egal mărginite pe intervalul $[-1, 1]$. Într-adevăr,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2+x}{n+2} \left[\frac{(n+1)(n+x+2)}{(n+2)(n+1+x)} \right]^{n+1} = \frac{n+2+x}{n+2} \left[1 - \frac{x}{(n+2)(n+1)+nx+2x} \right]^{n+1}$$

Aplicând aici inegalitatea lui Bernoulli obținem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n+2+x}{n+2} \left[1 - \frac{(n+1)x}{(n+2)(n+1+x)} \right] = \frac{(n+2)^2(n+1+x)+x^2}{(n+2)^2(n+1+x)} \geq 1, \forall x \in [-1, 1],$$

deci șirul $(a_n)_n$ este crescător.

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{x}} \right]^x = e^x$, rezultă că pentru fiecare $x \in [-1, 1]$ avem $a_n(x) \leq e^x, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dar funcția $g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ este o funcție crescătoare.

Prin urmare, $0 < a_n(x) \leq e, \forall x \in [-1, 1], \forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce înseamnă că $(a_n)_n$ este un șir de funcții egal mărginite pe $[-1, 1]$.

Așadar, seria dată verifică toate condițiile din criteriul lui Abel, deci este uniform convergentă pe intervalul $[-1, 1]$. \square

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{1+n^3 x^4}, x \in \mathbb{R}$$

Soluție. Deoarece $(1 - x^2 \sqrt{n^3})^2 \geq 0$, rezultă că $2x^2 \sqrt{n^3} \leq 1 + n^3 x^4$. Prin urmare, $\frac{|(-1)^n x^2|}{1+n^3 x^4} \leq \frac{1}{2\sqrt{n^3}}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, de unde, cf. criteriului lui Weierstrass, deducem că seria dată este absolut și uniform convergentă pe \mathbb{R} . \square

$$28. \text{ Fie seria } \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\ln(1+n^4 x^2)}{2n} - \frac{\ln(1+(n-1)^4 x^2)}{2(n-1)} \right],$$

$x \in [0, 1]$. Să se demonstreze că această serie este derivabilă termen cu termen, dar seria derivatelor converge neuniform pe intervalul $[0, 1]$.

Soluție. Pentru această serie avem $S_n(x) = \frac{\ln(1+n^4 x^2)}{2n}$. Deoarece, în baza regulii lui l'Hospital

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2 y^4)}{2y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4x^2 y^3}{2(1+x^2 y^4)} = 2x^2 \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^3}{1+x^2 y^4} = 0,$$

rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$. Deci seria dată este simplu convergentă pe intervalul $[0, 1]$ către funcția $f(x) = 0, x \in [0, 1]$.

Seria formată cu derivatele termenilor ei este

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n^2 x}{1+n^4 x^2} - \frac{(n-1)^3 x}{1+(n-1)^4 x^2} \right] (*)$$

Suma parțială de rang n a acesteia este $S'_n(x) = \frac{n^3 x}{1+n^4 x^2}$, de unde deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$. Prin urmare, seria (*) este simplu convergentă pe intervalul $[0, 1]$ către funcția $g(x) = 0, x \in [0, 1]$.

Cum funcția f este derivabilă pe intervalul $[0, 1]$ și $f' = g = 0$, rezultă că seria dată este derivabilă termen cu termen pe $[0, 1]$.

Pe de altă parte, $\forall n \in \mathbb{N}$, punctul $x_n = \frac{1}{n^2}$ aparține intervalului $[0, 1]$ și $|S'_n(x) - g(x)| = \frac{n}{2}$. Așadar $\exists \varepsilon > 0$ (de exemplu $\frac{1}{3}$) astfel încât pentru $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [0, 1]$ astfel încât să avem $|S'_n(x_n) - g(x_n)| > \varepsilon$, ceea ce demonstrează că seria nu este uniform convergentă pe $[0, 1]$.

Acest exercițiu dovedește că convergența uniformă pe un interval $[a, b]$

a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ nu este o condiție necesară pentru derivarea termen cu termen a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ pe $[a, b]$. \square

termen a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ pe $[a, b]$. \square

$$29. \text{ E posibilă derivarea termen cu termen a seriei } \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-nx^2} - e^{-(n-1)x^2}],$$

$x \in [0, 1]$?

Soluție. Suma parțială de rang n a seriei este

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n [e^{-kx^2} - e^{-(k-1)x^2}] = e^{-nx^2} - 1 \longrightarrow -1, x \in (0, 1]$$

$$\text{și } s_n(0) \longrightarrow 0$$

Deci seria dată este punctual convergentă pe $(0, 1)$ către funcția

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } x \in (0, 1] \end{cases}$$

care e discontinuă în $x = 0$, deci nederivabilă în 0 ; așadar nu e posibilă derivarea termen cu termen a seriei.

Aceasta se datorează faptului că seria derivatelor

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2x(n-1)e^{-(n-1)x^2} - 2xne^{-nx^2}] \text{ nu e uniform convergentă pe } [0, 1].$$

Intr-adevăr, suma sa parțială de rang n este

$$s'_n(x) = \sum_{k=1}^n [2x(k-1)e^{-(k-1)x^2} - 2xke^{-kx^2}] = -2nxe^{-nx^2} \longrightarrow 0,$$

$\forall x \in [0, 1]$. Deci seria derivatelor e simplu convergentă către 0 pe $[0, 1]$.

Cum în punctul $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \in [0, 1]$ avem $|s'_n(x) - 0| = \frac{2\sqrt{n}}{e} \longrightarrow \infty$, înseamnă că seria derivatelor nu converge uniform pe $[0, 1]$. \square

30. Să se calculeze $\sin 32^\circ$ cu precizia 10^{-3} .

Soluție. Se știe formula lui Taylor cu restul lui Lagrange :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

cu ξ între x și $x+h$, pentru $f \in C^{n+1}$ într-un interval ce conține x și $x+h$

Aplicăm formula pentru $f(x) = \sin x$, $x = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $h = 2^\circ = \frac{\pi}{90}$

Se alege n minim astfel încât $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-3} \implies n = 1$

Deci $\sin 32^\circ \simeq \sin 30^\circ + \frac{\pi}{90} \cos 30^\circ \simeq 0,5 + \frac{3,14159}{90} \cdot \frac{1,732}{2} \simeq 0,5302 \quad \square$

2.3 Probleme propuse

Să se studieze convergența punctuală și uniformă a următoarelor șiruri de funcții :

† 1. $f_n: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{nx+1}, n \geq 0$

R: converge punctual la $f(x) = 0$, dar nu converge uniform

† 2. $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$

R: converge punctual și uniform la $f(x) = 0$

$$\times 3. f_n: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$

R: converge punctual la $f(x) = 1$, dar nu converge uniform

$$\times 4. f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$$

R: converge punctual la

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

dar nu converge uniform

$\times 5.$ Să se arate că șirul de funcții $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ nu este uniform convergent.

R: funcția limită nu este continuă

$$\times 6. f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, n > 0$$

R: converge punctual la $f(x) = |x|$ și converge și uniform la f

$$\times 7. f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = e^{-nx} \sin nx$$

R: converge punctual la $f(x) = 0$, dar nu converge uniform deoarece $f_n\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow e^{-1} \sin 1 \neq 0$

8. Fie $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, n > 0$. Să se studieze convergența șirurilor f_n și f'_n .

R: șirul de funcții f_n converge uniform la 0, iar șirul derivatelor n-are limită

9. Să se afle mulțimea de convergență a seriei de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x}$.

R: $(0, \infty)$ (cf. criteriului lui Leibniz)

10. Să se arate că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ este uniform convergentă și că suma ei este o funcție continuă.

R: Cf. teoremelor 2.6 și 2.4

Să se studieze convergența seriilor:

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+n)^2}{n^4}, x \in [a, b], 0 < a < b$$

R: uniform convergentă

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

R: uniform convergentă și absolut convergentă (cf. criteriului lui Weierstrass)

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$$

R: uniform convergentă și absolut convergentă (cf. criteriului lui Weierstrass)

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2^n}, x \in \mathbb{R}$$

R: e uniform și absolut convergentă cf. criteriului lui Weierstrass

Capitolul 3

Serii de puteri

3.1 Convergența și proprietățile seriilor de puteri

Definiția 3.1. O serie de funcții de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in \mathbb{R}$, unde $a_n \in \mathbb{R}$ se numește **serie de puteri**.

Numărul a_n se numește **coeficientul termenului de rang n** .

Toate rezultatele privind seriile de funcții sunt valabile și pentru seriile de puteri. Datorită caracterului lor particular, seriile de puteri au în plus următoarele proprietăți :

1. **Teorema I a lui Abel** Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ există un număr $R, 0 \leq R \leq +\infty$ astfel încât:

a) Seria este absolut convergentă pe intervalul $(-R, R)$.

b) Pentru $\forall x$ astfel încât $|x| > R$, seria este divergentă .

c) Pentru $\forall 0 < r < R$, seria este uniform convergentă pe $[-r, r]$.

Numărul R se numește **raza de convergență** a seriei de puteri, iar intervalul $(-R, R)$ se numește **intervalul de convergență** al seriei.

2. Suma unei serii de puteri este o funcție continuă în orice punct interior intervalului de convergență .

3. **Teorema a II-a a lui Abel** Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri, R raza sa de convergență și f suma sa. Dacă această serie este convergentă în punctul R (sau în punctul $-R$), atunci suma f este o funcție continuă în punctul R (sau în punctul $-R$), deci $\lim_{x \rightarrow R-0} f(x) = f(R)$ ($\lim_{x \rightarrow R+0} f(x) = f(-R)$).

4. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este o serie de puteri și R raza sa de convergență, atunci:

a) Seria derivatelor de ordinul n are aceeași raza de convergență R .

b) Suma f a seriei este indefinit derivabilă pe intervalul de convergență și derivata sa de ordin n , $f^{(n)}$, este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul n .

5. **Teorema lui Cauchy-Hadamard** Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri, R raza sa de convergență și $\omega = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci $R = \frac{1}{\omega}$, dacă $0 < \omega < +\infty$, $R = 0$, dacă $\omega = +\infty$ și $R = +\infty$, dacă $\omega = 0$.

Definiția 3.2. Se numește **serie Taylor** o serie de funcții de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n, a \in \mathbb{R}.$$

Toate proprietățile seriilor de puteri se mențin pentru seriile Taylor.

3.2 Dezvoltări în serie

Definiția 3.3. Fie I un interval, a un punct interior lui I și f o funcție reală definită pe I și indefinit derivabilă pe I . Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$ (1) se numește **seria Taylor a funcției f în punctul a** . Fie I' intervalul de convergență al acestei serii. Vom spune că funcția f este dezvoltabilă în serie Taylor pe intervalul I' dacă ea este suma seriei (1) pe I' .

Teorema 3.1. *Funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie Taylor pe intervalul I' dacă și numai dacă ea este indefinit derivabilă pe I' și restul ei de ordin n din formula lui Taylor tinde la 0 când $n \rightarrow \infty, \forall x \in I'$.*

Dacă $a = 0$, atunci seria (1) se numește **seria MacLaurin** a funcției f , iar dacă

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, x \in I',$$

atunci se spune că funcția f este dezvoltabilă în serie de puteri pe I' .

Dezvoltări în serie ale unor funcții elementare

1. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n, \forall z \in \mathbb{C}.$

2. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \forall |z| < 1.$

3. $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \forall |z| < 1.$

$$4. \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$5. \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$6. (1+z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \forall |z| < 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

3.3 Probleme rezolvate

Să se determine mulțimea de convergență și suma următoarelor serii de puteri:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Soluție. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1 \implies R = 1$ raza de convergență $\implies (-1, 1)$ este intervalul de convergență.

Pentru $x = 1$ și $x = -1$ obținem două serii alternate ce verifică condițiile din criteriul lui Leibniz, deci convergente. Deci, mulțimea de convergență este $[-1, 1]$.

Să notăm cu f suma seriei. Derivând seria termen cu termen obținem $f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \frac{1}{1+x^2}$, pentru $|x| < 1$

Deci, $f(x) = \arctg x + c$, pentru $|x| < 1$. Făcând aici $x = 0$ deducem că $c = 0$. Așadar $f(x) = \arctg x$, pentru $|x| < 1$. Din convergența în punctele $x = \pm 1$ a seriei date rezultă că $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \arctg x =$

$= \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$ și $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\frac{\pi}{4}$. Prin urmare, suma seriei date este

restricția funcției $\arctg x$ la intervalul $[-1, 1]$. În acest fel am stabilit și

suma seriei numerice $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$, anume $\frac{\pi}{4}$ □

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} \left(\frac{1-x}{1-2x} \right)^{2n-1}$$

Soluție. Notăm $\frac{1-x}{1-2x} = y$ și obținem seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} y^{2n-1}$

Raza de convergență este $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)} \cdot \frac{n(2n-1)}{(-1)^{n-1}} \right|} =$
 $= 1$

Intervalul de convergență este $(-1, 1)$.

Pentru $y = -1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ care e convergentă cf. criteriului lui Leibniz

Pentru $y = 1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ care e convergentă cf. criteriului lui Leibniz

Deci mulțimea de convergență este $[-1, 1]$.

Pentru a vedea mulțimea de convergență a seriei în x rezolvăm inegalitățile $-1 \leq \frac{1-x}{1-2x} \leq 1 \implies x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{2}{3}, \infty)$

$$\text{Fie } S(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} y^{2n-1}, y \in [-1, 1]$$

$$\begin{aligned} S'(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (y^2)^{n-1} \implies y^2 S'(y) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (y^2)^n \implies (y^2 S'(y))' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (y^2)^{n-1} 2y = \\ &= 2y \sum_{n=1}^{\infty} (-y^2)^{n-1} = 2y \frac{1}{1+y^2} \implies y^2 S'(y) = \int \frac{2y}{1+y^2} dy = \\ &= \ln(1+y^2) + c \end{aligned}$$

Facem $y \rightarrow 0 \implies c = 0$

Deci $S'(y) = \frac{\ln(1+y^2)}{y^2}, y \neq 0 \implies S(y) = \int \frac{\ln(1+y^2)}{y^2} dy = -\frac{1}{y} \ln(1+y^2) + 2\operatorname{arctg} y + c$ (am integrat prin părți)

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} S(y) = 0 &\implies \lim_{y \rightarrow 0} S(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{y} \ln(1+y^2) + 2\operatorname{arctg} y + c \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{1+y^2} + c = c \implies c = 0 \text{ (am calculat cu l'Hospital)} \end{aligned}$$

$$S(y) = -\frac{1}{y} \ln(1+y^2) + 2\operatorname{arctg} y$$

Suma seriei inițiale este $f(x) = S\left(\frac{1-x}{1-2x}\right) = -\frac{1-2x}{1-x} \ln \left[1 + \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2 \right] + 2\operatorname{arctg} \frac{1-x}{1-2x}$ \square

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2n+1} x^n$$

Soluție. Raza de convergență $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{2^n} \right|} = \frac{1}{2}$

Intervalul de convergență este $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Pentru $x = -\frac{1}{2}$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ și e convergentă cu criteriul lui Leibniz

Pentru $x = \frac{1}{2}$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ și este divergentă

Mulțimea de convergență este $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} \text{Notăm } 2x = t^2, x \geq 0. \text{ Atunci } f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{2n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} = S(t), t \in [0, 1) \implies tS(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \implies (tS(t))' = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \frac{1}{1-t^2} \implies tS(t) = \int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c \end{aligned}$$

Facem $t \rightarrow 0 \implies c = 0$

Atunci $S(t) = \frac{1}{2t} \ln \frac{1+t}{1-t}, t \in (0, 1) \implies f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \ln \frac{1+\sqrt{2x}}{1-\sqrt{2x}}, x \in (0, \frac{1}{2})$

Pentru $x < 0$ notăm $2x = -t^2$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1} = S(t), t \in (-1, 0)$$

$$\begin{aligned} tS(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} \implies (tS(t))' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1+t^2} \implies \\ &\implies tS(t) = \text{arctg } t + c \end{aligned}$$

Facem $t \rightarrow 0 \implies c = 0$

Atunci $S(t) = \frac{1}{t} \text{arctg } t \implies f(x) = \frac{1}{\sqrt{-2x}} \text{arctg } \sqrt{-2x}, x \in [-\frac{1}{2}, 0) \quad \square$

Să se determine mulțimea de convergență a următoarelor serii de puteri:

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} [2 + (-1)^n] x^n$$

Soluție. Raza de convergență este $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|2 + (-1)^n|}} = 1$, deci

intervalul de convergență este $(-1, 1)$

Pentru $x = 1$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} [2 + (-1)^n]$ și este divergentă deoarece termenul general nu are limită ($u_{2n} = 3$ și $u_{2n+1} = 1$)

Analog, pentru $x = -1$, seria este divergentă.

Deci mulțimea de convergență este $(-1, 1)$ \square

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}} \left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^n, x \neq -\frac{3}{2}$$

Soluție. Notăm $t = \frac{x+1}{2x+3}$ și obținem seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}} t^n$

Raza de convergență este

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+2}{\sqrt{(n+1)^4+(n+1)^3+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^4+n^3+1}}{n+1} \right|} = 1$$

Intervalul de convergență este $(-1, 1)$.

Pentru $t = -1$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}}$ care e convergentă cu criteriul lui Leibniz

Pentru $t = 1$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}}$ care e divergentă deoarece

o putem compara cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ cu ajutorul criteriului al treilea de comparație

Mulțimea de convergență este $[-1, 1)$ pentru seria în t .

Mulțimea de convergență pentru seria inițială se va afla rezolvând inecuațiile $-1 \leq \frac{x+1}{2x+3} < 1 \implies x \in (-\infty, -2) \cup [-\frac{4}{3}, \infty)$. \square

$$6. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{\frac{n}{2}} \sqrt{1+n^2}} \operatorname{tg}^n x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Soluție. Notăm $\operatorname{tg} x = y$. Seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{\frac{n}{2}} \sqrt{1+n^2}} y^n, y \in \mathbb{R}$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{3^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{1+(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{\frac{n}{2}} \sqrt{1+n^2}}{(-1)^n} \right|} = \sqrt{3}$$

Intervalul de convergență este $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Pentru $y = -\sqrt{3}$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ care e divergentă deoarece

e minorată de seria divergentă $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

Pentru $y = \sqrt{3}$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ care e convergentă cf. criteriului lui Leibniz

Mulțimea de convergență pentru seria în y este $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

Mulțimea de convergență pentru seria inițială se află rezolvând inecuațiile $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3} \implies x \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ \square

$$7. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1} \left(\frac{4x-1}{x+3} \right)^n$$

Soluție. Notăm $y = \frac{4x-1}{x+3}$ și seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1} y^n$

Raza de convergență este

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{(n+1)^2+1}}{(n+1)^2+(n+1)+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{(-1)^n \sqrt{n^2+1}} \right|} = 1$$

Intervalul de convergență este $(-1, 1)$

Pentru $y = -1$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$ și este divergentă având

aceeași natură cu seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ cf. criteriului al treilea de comparație

Pentru $y = 1$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$ și este convergentă cf. criteriului lui Leibniz

Mulțimea de convergență este $(-1, 1]$.

Mulțimea de convergență pentru seria inițială se află rezolvând inecuațiile $-1 < \frac{4x-1}{x+3} \leq 1 \implies x \in (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$ \square

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} x^n$$

Soluție. Cf. teoremei Cauchy-Hadamard avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[n]{n}}{n + \frac{1}{n}} = 1,$$

deci raza de convergență este $R = 1$ și intervalul de convergență $(-1, 1)$.

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \right]^{\frac{1}{n}} = 1$,

rezultă că în punctele $x = 1$ și $x = -1$ seria dată este divergentă. Deci, mulțimea de convergență este $(-1, 1)$. \square

9. Să se demonstreze că seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ este convergentă și să se afle suma ei cu ajutorul seriilor de puteri.

Soluție. Această serie satisface criteriul lui Leibniz, deci este convergentă. Pentru determinarea sumei vom considera seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}.$$

Raza de convergență este $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, iar intervalul de convergență este $(-1, 1)$.

Pentru $x = 1$ obținem tocmai seria dată. Notăm cu f suma acestei serii de puteri pe intervalul $(-1, 1)$. Prin derivare avem

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}, \text{ pentru } |x| < 1$$

De aici rezultă că

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c, \text{ pentru } |x| < 1$$

Punând aici $x = 0$, obținem $c = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$, căci $f(0) = 0$. Așadar,

$$f(x) = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}, \text{ pentru } |x| < 1.$$

$$\text{Atunci } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1} = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \quad \square$$

Să se afle suma seriilor :

$$10. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$$

Soluție. Stim dezvoltarea lui e^x în serie de puteri $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow xe^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} \Rightarrow e^x + xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!} \Rightarrow (x+x^2)e^x = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{n!} \Rightarrow (1+2x)e^x + (x+x^2)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{n!} \end{aligned}$$

$$\text{Pentru } x = 1 \implies 5e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} \quad \square$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(3^n - 2^n)}{6^n}$$

$$\text{Soluție. Seria se scrie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(3^n - 2^n)}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{Calculăm suma seriei } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

$$\begin{aligned} \text{Stim } \sum_{n=1}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x}, x \in (-1, 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \implies \\ \implies \sum_{n=1}^{\infty} nx^n &= \frac{x}{(1-x)^2} \implies \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \implies \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \\ &= \frac{x+x^2}{(1-x)^3} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(3^n - 2^n)}{6^n} = \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} - \frac{\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} = \frac{9}{2} \quad \square \end{aligned}$$

12. Să se calculeze $\sqrt[4]{10004}$ cu 10 zecimale exacte.

Soluție. Tinând seama de seria binomială scriem

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{10004} &= \sqrt[4]{10000 + 4} = 10 \sqrt[4]{1 + \frac{4}{10000}} = \\ &= 10 \left(1 + \frac{4}{10000}\right)^{\frac{1}{4}} = 10 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^4} + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2!10^8} + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3!10^{12}} + \dots\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cum } 10 \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3!10^{12}} + \dots &< 10^{-11} \implies \sqrt[4]{10004} = \\ &= 10 \left(1 + \frac{1}{4 \cdot 10^4} - \frac{3}{32 \cdot 10^8}\right) = 10(1 + 0,000025 - 0,00000000937) = \\ &= 10,0002499906 \quad \square \end{aligned}$$

Să se calculeze următoarele limite cu ajutorul dezvoltărilor limitate:

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4}$$

$$\text{Soluție. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + x^6 o(x^6) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^6 o(x^6)}{x^4} = \frac{1}{12} \quad \square$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

Soluție. Notăm $x = \frac{1}{t} \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] =$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[1 - \frac{1}{t} \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^4 o(t^4) \right) \right] =$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[1 - 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{3} - t^3 o(t^3) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{3} - t^2 o(t^2) \right) = \frac{1}{2} \quad \square$

15. $l = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

Soluție. $(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1 + \sin x)} = e^{\frac{1}{x} \ln(1 + x - \frac{x^3}{3!} + \dots)} =$
 $= e^{\frac{1}{x} \left[\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^2 + \dots \right]} = e^{\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots \right)} \implies$
 $\implies l = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots \right)} = e \quad \square$

Să se calculeze cu o eroare mai mică decât 10^{-3} integralele:

16. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$

Soluție. Se dezvoltă integrantul în serie de puteri în jurul lui 0, se integrează termen cu termen și se aproximează seria alternată rezultată

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)2^{2n+1}}.$$

□

17. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

Soluție. Se procedează analog; rezultă :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 2^n}.$$

□

18. $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$

Soluție. Analog, se obține:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 3^{2n+1}}.$$

□

19. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

Soluție. Analog, rezultă :

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

□

Să se arate că funcțiile următoare sunt dezvoltabile în serie de puteri și să se găsească această dezvoltare, specificându-se intervalul în care este valabilă :

20. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, -1 < x < 1$

Soluție. Deoarece $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} = (1-x^2)^{-1}$, pentru $|x| < 1$

rezultă că f' este o funcție binomială, deci dezvoltabilă în serie de puteri. Înlocuind în dezvoltarea funcției binomiale pe x cu $-t^2$ și pe α cu -1 , obținem

$$\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{2n} + \dots, \text{ pentru } |t| < 1$$

care prin integrare termen cu termen pe intervalul $[0, x]$, cu $|x| < 1$, dă

$$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ pentru } |x| < 1$$

□

21. $f(x) = \frac{3x}{x^2+5x+6}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$

Soluție. Descompunând funcția dată în fracții simple, obținem:

$$\frac{3x}{x^2+5x+6} = \frac{9}{x+3} - \frac{6}{x+2}$$

Folosind dezvoltarea funcției binomiale deducem că :

$$\frac{9}{x+3} = 3 \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-1} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n}, \text{ pentru } |x| < 3$$

$$-\frac{6}{x+2} = -3 \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1} = -3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n}, \text{ pentru } |x| < 2$$

Adunând aceste două dezvoltări, obținem:

$$\frac{3x}{x^2+5x+6} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) x^n, \text{ pentru } |x| < 2$$

□

22. $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt, x \in [-1, 1]$

Soluție. Funcția $g(t) = \frac{\operatorname{arctg} t}{t}$ este continuă, deci are primitivă, adică $\exists G$ derivabilă astfel încât $G'(t) = g(t)$

$$\text{Avem } f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt \right) = \frac{d}{dx} (G(x) - G(0)) = G'(x) - G'(0) = \\ = G'(x) = g(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$$

$$\text{Fie } h(x) = \operatorname{arctg} x \implies h'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \implies$$

$$\implies h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| \leq 1$$

$$\text{Atunci } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}, |x| \leq 1$$

$$\text{Deci } f(x) = \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2n+1} dt = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{2n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, |x| \leq 1 \quad \square$$

23. Dezvoltați în serie de puteri funcțiile $f(x) = \arcsin x$.

Soluție. Funcția f e de clasă C^∞ pe $(-1, 1)$ și derivata sa $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e dezvoltabilă în serie de puteri cu raza 1.

$$\text{Stim că } \forall x \in (-1, 1), \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} x^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_{2n}^n}{4^n} x^n \implies \\ \implies \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n} x^{2n} \implies \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{(2n+1)4^n} x^{2n+1} \quad \square$$

24. Să se arate că funcția $f(x) = \ln \frac{1}{x^2+2x+2}$, $x \in \mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie Taylor într-un interval ce conține în interior punctul $x = -1$ și să se determine această dezvoltare și intervalul pe care ea este valabilă.

Soluție. Avem $f'(x) = -\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2} = -2 \frac{x+1}{x^2+2x+2}$, $x \in \mathbb{R}$

Deoarece $\frac{1}{1+(x+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^{2n}$, pentru $-2 < x < 0$ rezultă că funcția f' este dezvoltabilă în serie Taylor pe intervalul $(-2, 0)$ și avem

$$f'(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (x+1)^{2n+1}$$

Inlocuind pe x cu t și integrând între -1 și x , pentru $\forall x \in (-2, 0)$ obținem:

$$\ln \frac{1}{x^2+2x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{2n+2}}{n+1}, -2 < x < 0 \quad (*)$$

Această dezvoltare este valabilă și în punctele $x = 0, x = -2$, căci înlocuind pe x cu aceste valori în seria Taylor a funcției date se obține o serie alternată convergentă. Deci, funcția dată este dezvoltabilă în serie Taylor în intervalul $[-2, 0]$ și dezvoltarea ei după puterile funcției $x + 1$ este de forma (*). \square

25. Să se arate că funcția $f(x) = \frac{1}{2x-3}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ este dezvoltabilă în serie Taylor într-un interval ce conține în interior punctul $x = 1$ și să se determine această dezvoltare, specificându-se intervalul pe care ea este valabilă.

Soluție. Avem $\frac{1}{2x-3} = \frac{1}{2x-2-1} = \frac{1}{2(x-1)-1} = -\frac{1}{1-2(x-1)} =$
 $= -\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^n$, pentru $|x-1| < 1$, adică $0 < x < 2$ \square

26. Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcții, cu bazele indicate în paranteze:

a) $\cos^2 x \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $\frac{x}{\sqrt{1+x}} \left(\frac{x}{1+x}\right)$

Soluție. a) Notăm $x - \frac{\pi}{4} = y \implies x = y + \frac{\pi}{4}$

Atunci $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}+2y)}{2} = \frac{1-\sin 2y}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot$
 $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{(2y)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n$

b) Notăm $\frac{x}{1+x} = y \implies x = \frac{y}{1-y} \implies \frac{x}{\sqrt{1+x}} = y(\sqrt{1-y})^{-1} =$
 $= y(1-y)^{-\frac{1}{2}} = y \left[1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1) \dots (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-y)^n \right] =$
 $= \frac{x}{x+1} + \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-1)!!}{n! 2^n} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{n+1}$ \square

3.4 Probleme propuse

Să se determine mulțimea de convergență și suma seriilor:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

R: Mulțimea de convergență este $(-1,1]$ și suma $f(x) = \ln(1+x)$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3)x^n$$

R: $(-1,1), f(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

R: $(-1,1), f(x) = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

4. Găsiți intervalele de convergență și razele de convergență ale următoarelor serii:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n + 1} x^n$$

R: a) $R = 2$; b) $R = 4$; c) $R = e$

Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}$$

R: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$$

R: $(-3,3)$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n!} x^n$$

R: $(-1,1)$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)} x^n$$

R: $[-1,1)$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1} (x-2)^n$$

R: $[1,3)$

10. Să se afle suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^3 - n^2 + 1}{n!}$ cu ajutorul seriilor de puteri.

R: Se scrie ca sumă de 3 serii și se folosește dezvoltarea lui e^x în serie de puteri. Suma este $14e$.

Să se calculeze următoarele limite cu ajutorul dezvoltărilor limitate:

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$

R: $\frac{1}{2}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} + e^{2x} - 2}{x^2}$

R: 4

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} - 2}{x^2}$

R: $-\frac{2}{9}$

14. Să se găsească $\sin 1^\circ$ cu 5 zecimale exacte.

R: 0,01744

Să se arate că funcțiile următoare sunt dezvoltabile în serie de puteri și să se găsească această dezvoltare, specificându-se intervalul în care ea este valabilă :

15. $f(x) = \ln(1 - x + x^2), x \in \mathbb{R}$

R: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x^{3n} - x^n), |x| \leq 1$

16. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x-2)}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

R: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[3 - 3n - \frac{7}{2^{n+1}} \right] x^n, |x| < 1$

17. $f(x) = (1 + e^x)^3, x \in \mathbb{R}$

R: $f(x) = 8 + \sum_{n=1}^{\infty} (3 + 2^n + 3^n) \frac{x^n}{n!}, -\infty < x < +\infty$

18. $f(x) = \sin^3 x, x \in \mathbb{R}$

R: $f(x) = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{9^n - 1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, -\infty < x < +\infty$

19. $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt, x \in [-1, 1]$

R: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}, |x| \leq 1$

20. Să se arate că funcția $f(x) = \ln x, x > 0$ este dezvoltabilă în serie Taylor într-un interval ce conține în interior punctul $x = 2$ și să se determine această dezvoltare, specificându-se intervalul pe care ea este valabilă .

R: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}, 0 < x \leq 4$

21. Să se dezvolte în serie de puteri funcțiile următoare, cu bazele indicate în paranteze:

a) $\frac{1}{x^2} (x+1)$

b) $\ln x \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$

R: a) $\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n, x \in (-2, 0)$

b) $\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} - 1 \right] \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n, x \in (0, \infty)$

Capitolul 4

Serii Fourier

4.1 Noțiuni teoretice

Definiția 4.1. Fie H un spațiu vectorial (complex sau real); o aplicație

$$\langle, \rangle: H \times H \mapsto \mathbb{C} \text{ (respectiv } \mathbb{R})$$

se numește **produs scalar** dacă pentru orice $x, y, z \in H$ și orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sunt adevărate relațiile:

- i. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;
- ii. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- iii. $\langle x, x \rangle \geq 0$;
- iv. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Perechea (H, \langle, \rangle) se numește **spațiu cu produs scalar**.

Aplicația $\| \cdot \|: H \mapsto \mathbb{R}, \| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ este **normă** pe H și verifică inegalitatea lui Schwarz:

$$| \langle x, y \rangle | \leq \| x \| \| y \|, \forall x, y \in H.$$

Reciproc, un spațiu normat $(H, \| \cdot \|)$ este spațiu cu produs scalar dacă și numai dacă este verificată legea paralelogramului:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 (\| x \|^2 + \| y \|^2), \forall x, y \in H.$$

Spațiul (H, \langle, \rangle) se numește **spațiu Hilbert** dacă orice șir Cauchy este convergent (spațiul normat $(H, \| \cdot \|)$ este complet).

În cele ce urmează (H, \langle, \rangle) este un spațiu Hilbert.

Exemplul 4.1. Spațiul Banach \mathbb{C}^n (cu norma euclidiană) este spațiu Hilbert cu produsul scalar:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j},$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vectori din \mathbb{C}^n . Analog și pentru \mathbb{R}^n .

Exemplul 4.2. Spațiul Banach al șirurilor de pătrat sumabil,

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|^2 < \infty\}$$

este spațiu Hilbert cu produsul scalar:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x(n) \overline{y(n)},$$

pentru orice șiruri $x, y \in \ell^2(\mathbb{N})$. Analog și pentru spațiul șirurilor bilaterale (definite pe \mathbb{Z}), $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Definiția 4.2. Doi vectori $x, y \in H$ se numesc **ortogonali** (sau **perpendiculari**; notăm $x \perp y$) dacă $\langle x, y \rangle = 0$. Ortogonalul unei mulțimi nevide $M \subseteq H$ este, prin definiție, mulțimea (subspațiul închis)

$$M^\perp = \{x \in H \mid x \perp y, \forall y \in M\}.$$

Teorema 4.1. (Teorema proiecției) Fie H un spațiu Hilbert și fie $M \subseteq H$ o mulțime nevidă, închisă și convexă. Atunci există un unic vector $x_M \in M$ astfel încât

$$\|x_M\| = \inf\{\|x\| \mid x \in M\}.$$

O consecință importantă este generalizarea descompunerii după direcții perpendiculare din geometria euclidiană :

Teorema 4.2. (Descompunerea ortogonală) Fie $K \subseteq H$ un subspațiu închis și fie K^\perp ortogonalul său. Atunci, pentru vector $x \in H$ există (și sunt unici) $y \in K$ și $z \in K^\perp$ astfel încât $x = y + z$.

Definiția 4.3. Fie H un spațiu Hilbert; o submulțime $\mathcal{B} = \{\varepsilon_i\}_{i \in J}$ se numește **bază ortonormală** în H dacă :

- i. $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}$ (simbolul lui Kronecker), $\forall i, j \in J$;
- ii. subspațiul vectorial generat de \mathcal{B} este dens în H .

Definiția 4.4. Spațiul Hilbert H se numește **separabil** dacă admite baze ortonormale cel mult numărabile.

În continuare vom considera numai spații Hilbert separabile.

Definiția 4.5. Fie H un spațiu Hilbert (separabil), fie $\mathcal{B} = \{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o bază ortonormală (fixată) și fie $x \in H$ un vector fixat; coeficienții Fourier ai lui x (în baza \mathcal{B}) sunt $\hat{x}_n = \langle x, \varepsilon_n \rangle, \forall n \in \mathbb{N}$, iar seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{x}_n \varepsilon_n$ se numește **seria Fourier** asociată lui x . Aplicația

$$H \ni x \mapsto (\hat{x}_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$$

se numește **transformarea Fourier** (pe spațiul H).

Proprietățile seriei Fourier

- i. Pentru orice $x \in H$, seria Fourier asociată, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{x}_n \varepsilon_n$, converge la x .
- ii. $\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\hat{x}_n|^2$ (**identitatea lui Parseval**);
- iii. transformarea Fourier este un izomorfism (izometric) de spații Hilbert.

Serii trigonometrice

Un caz particular remarcabil de serie Fourier este seria trigonometrică. Considerăm spațiul Hilbert al funcțiilor periodice (de perioadă 2π) de pătrat integrabil:

$$L^2[0, 2\pi] = \{f : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{C} \mid f \text{ măsurabilă și } \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty\}.$$

Produsul scalar este

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

iar norma $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$.

Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, fie $\omega_n(t) = e^{int}$. Un rezultat clasic de analiză afirmă că mulțimea (sistemul trigonometric) $\mathcal{B} = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ este bază ortonormală în $L^2[0, 2\pi]$. Pentru orice funcție $f \in L^2[0, 2\pi]$, coeficienții Fourier (în raport cu baza fixată mai sus), sunt

$$\hat{f}_n = \langle f, \omega_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \forall n \in \mathbb{Z},$$

iar seria Fourier (sau seria trigonometrică) asociată funcției f este $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \omega_n$;

sumele parțiale ale seriei, $P_n = \sum_{k=-n}^n \hat{f}_k \omega_k$, se numesc **polinoame trigono-**

metrice și $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = f$ în spațiul $L^2[0, 2\pi]$, sau, echivalent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - f\|_2 = 0.$$

Identitatea lui Parseval devine în acest caz:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2.$$

Folosind egalitatea $e^{int} = \cos nt + i \sin nt, \forall t \in \mathbb{R}$, seria Fourier asociată funcției f se poate scrie sub forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

unde coeficienții trigonometrici (clasici) a_n și b_n sunt:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt, \forall n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ntdt, \forall n \geq 1.$$

Legătura dintre coeficienții \hat{f}_n , a_n și b_n este:

$$\hat{f}_0 = \frac{a_0}{2}, \hat{f}_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \hat{f}_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Lema lui Riemann afirmă că dacă funcția f este integrabilă, atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

În legătură cu convergența punctuală a seriei Fourier, are loc următorul rezultat clasic:

Teorema 4.3. (Teorema lui Dirichlet) Dacă $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ este o funcție periodică de perioadă 2π , măsurabilă, mărginită, având cel mult un număr finit de discontinuități de speța întâi și având derivate laterale în orice punct, atunci seria Fourier asociată funcției f converge în fiecare punct $x \in \mathbb{R}$ la

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

În particular, dacă funcția f este continuă (și verifică celelalte ipoteze din teorema lui Dirichlet), atunci are loc descompunerea:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Condiții suficiente pentru convergența uniformă a seriei Fourier sunt date în teorema următoare:

Teorema 4.4. (Convergența uniformă a seriei Fourier) Dacă $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ este o funcție continuă, de clasă C^1 pe porțiuni și periodică de perioadă 2π , atunci seria sa Fourier este absolut și uniform convergentă, iar suma este f .

Numărul $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$ este media semnalului f , primul termen

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

este oscilația principală (în jurul valorii medii), iar termenul

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt, n \geq 2$$

este armonică de ordinul n a funcției f . Perioada armonică de ordinul n este $\frac{2\pi}{n}$, iar amplitudinea $A_n = \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$; conform lemei lui Riemann rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$.

În cazul în care funcția f are perioada $T = 2\ell$, ($\ell > 0$), atunci toate rezultatele de mai sus sunt în continuare adevărate, cu adaptările corespunzătoare; baza ortonormală este

$$\{\epsilon_n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \text{ cu } \epsilon_n(x) = e^{i\frac{n\pi x}{\ell}},$$

iar coeficienții Fourier sunt:

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\ell} \int_0^{2\ell} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}} dx, \forall n \in \mathbb{Z},$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, \forall n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx, \forall n = 1, 2, \dots$$

Teorema lui Dirichlet se scrie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{i\frac{n\pi x}{\ell}}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Identitatea lui Parseval devine în acest caz:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n \geq 1} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} |f(t)|^2 dt.$$

Evident, toate rezultatele de mai sus rămân adevărate dacă înlocuim intervalul $[0, 2\ell]$ cu orice alt interval de lungime 2ℓ , de exemplu, $[-\ell, \ell]$.

Serii de sinusuri și cosinusuri

Fie $f : [0, \ell] \mapsto \mathbb{R}$, o funcție integrabilă și fie $\tilde{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, periodică de perioadă 2ℓ , definită prin:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in [0, \ell] \\ f(-x) & , x \in (-\ell, 0) \end{cases}$$

Dacă funcția \tilde{f} satisface condițiile teoremei lui Dirichlet, atunci, dezvoltând \tilde{f} în serie Fourier, rezultă :

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell}, \forall x \in (0, \ell),$$

$$f(0+0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad f(\ell-0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

coeficienții a_n fiind coeficienții Fourier reali asociați funcției \tilde{f} .

Formula de mai sus se numește dezvoltarea în serie de cosinusi a lui f .

Analog, dacă funcția (impară):

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [0, \ell] \\ -f(-x) & , \quad x \in (-\ell, 0) \end{cases}$$

satisface condițiile teoremei lui Dirichlet, atunci dezvoltarea în serie de sinusuri a funcției f este:

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \quad \forall x \in (0, \ell),$$

coeficienții b_n fiind coeficienții Fourier reali asociați funcției \tilde{f} .

4.2 Probleme rezolvate

Să se dezvolte în serii Fourier funcțiile:

1. $f(x) = x$, pe $(-\pi, \pi)$

Soluție. Intrucât funcția f e impară avem:

$$a_k = 0, \quad k \geq 0,$$

iar $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}, k > 0$ (am integrat prin părți, ținând cont că $\sin k\pi = 0$ și $\cos k\pi = (-1)^k$)

Prin urmare, $\forall x \in \mathbb{R}$ avem $x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$

Pentru $x = \frac{\pi}{2}$ se obține $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ □

2. $f(x) = \pi^2 - x^2$, pe $(-\pi, \pi)$

Soluție. Deoarece funcția e pară $b_k = 0, k > 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos kx dx = \frac{4(-1)^{k-1}}{k^2}, \quad k > 0$$

(am integrat prin părți)

$$\text{Atunci } \pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \cos kx$$

Sunt îndeplinite condițiile Teoremei 4.3, deci dezvoltarea e valabilă pentru $x \in [-\pi, \pi]$

$$\text{Pentru } x = \pi \text{ se obține } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \square$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{dacă } x \in (-\pi, 0) \\ bx, & \text{dacă } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

$$\text{Soluție. } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi}{2}(b - a)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 ax \cos nxdx + \int_0^{\pi} bx \cos nxdx \right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 ax \sin nxdx + \int_0^{\pi} bx \sin nxdx \right)$$

Calculând prin părți următoarele două integrale obținem

$$\int x \cos nxdx = \frac{1}{n} x \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx + c_1$$

$$\int x \sin nxdx = -\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx + c_2$$

unde c_1, c_2 sunt constante de integrare.

Avem

$$\int_{-\pi}^0 t \cos ktdt = \frac{1}{k^2} [1 - (-1)^k], \int_0^{\pi} t \cos ktdt = -\frac{1}{k^2} [1 - (-1)^k]$$

$$\int_{-\pi}^0 t \sin ktdt = -\pi \frac{(-1)^k}{k}, \int_0^{\pi} t \sin ktdt = -\pi \frac{(-1)^k}{k}$$

$$a_k = \frac{a-b}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^k}{k^2}, b_k = (a+b) \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Se observă că avem

$$a_{2n-1} = \frac{2(a-b)}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}, a_{2n} = 0, n = 1, 2, 3, \dots$$

Seria Fourier a funcției $f(t)$ este

$$f(t) = -\frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nt}{n}$$

Observația 4.1. Din această dezvoltare putem calcula suma seriei numerice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ care este convergentă. Într-adevăr, funcția

$f(t)$ este continuă în punctul $t = 0$ și, cf. Teoremei 4.3, suma seriei Fourier în punctul $t = 0$ este egală cu $f(0)$. Avem astfel

$$0 = f(0) = -\frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \text{ de unde } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

□

4.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ t + \frac{\pi}{2}, & t \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ -t + \frac{\pi}{2}, & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Soluție. Funcția f este pară, deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-t + \frac{\pi}{2}) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 dt \right] = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2}t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-t + \frac{\pi}{2}) \cos kt dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 \cos kt dt \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos k \frac{\pi}{2}}{k^2}$$

Seria Fourier a funcției date este $f(t) = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n \frac{\pi}{2}}{n^2} \cos nt$ □

5. $f(x) = e^{ax}, a \neq 0$, pe $(-\pi, \pi)$

$$\text{Soluție. } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx = \frac{2}{a\pi} \text{sha}\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx dx = (-1)^n \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2a}{a^2 + n^2} \cdot \text{sha}\pi \text{ (am integrat prin părți)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin nx dx = (-1)^{n-1} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2n}{a^2 + n^2} \cdot \text{sha}\pi \text{ (am integrat prin părți)}$$

$$\text{Atunci } e^{ax} = \frac{2}{\pi} \cdot \text{sha}\pi \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} \cdot (a \cos nx - n \sin nx) \right] \quad \square$$

6. $f(x) = |x|$, pe $[-\pi, \pi]$

Soluție. f este pară, deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \text{ (am integrat prin părți)}$$

$$\text{Deci } |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad \square$$

7. $f(x) = |\sin x|$, pe $(-\pi, \pi]$

Soluție. f este pară, deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

$$\text{Avem } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\sin(n+1)x + \sin(1-n)x] dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^n + 1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} \right] = \frac{2(-1)^n + 1}{\pi(1-n^2)} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \end{aligned}$$

pentru $n = \text{par}$

$$\text{Atunci } |\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1-4n^2}$$

8.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{dacă } -\pi < x < -\varphi, \varphi < x < \pi \\ \cos \varphi, & \text{dacă } -\varphi < x < \varphi \end{cases}$$

Soluție. f este pară, deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\varphi \cos \varphi \cos nx dx + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_\varphi^\pi \cos x \cos nx dx = \frac{2 \cos \varphi \sin n\varphi}{\pi n} - \\ &- \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{2(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{2(n-1)} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{n(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{n(n-1)} \right] \end{aligned}$$

Expresia e nedeterminată pentru $n = 0$ și $n = 1$.

$$\text{Avem } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\varphi \cos \varphi dx + \frac{2}{\pi} \int_\varphi^\pi \cos x dx = \frac{2}{\pi} [\varphi \cos \varphi - \sin \varphi]$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\varphi \cos \varphi \cdot \cos x dx + \frac{2}{\pi} \int_\varphi^\pi \cos^2 x dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\sin \varphi \cdot \cos \varphi + \frac{1}{2}(\pi - \varphi) - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right] = \frac{1}{\pi} [\pi - \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \varphi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) + \frac{1}{\pi} (\pi - \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \varphi) \cos x + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{n(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{n(n-1)} \right] \cos nx \end{aligned}$$

9. Să se dezvolte în serie de sinusuri funcția $f(x) = \frac{|x|}{x}$ definită în intervalul $(0,1)$.

Soluție. Prelungim funcția f impar față de origine

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 0 < x < l \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } -l < x < 0 \end{cases}$$

Calculăm coeficienții Fourier ai acestei funcții periodice impare definite pe intervalul $(-l, l)$:

$$a_n = 0, \forall n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l 1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \frac{1}{2n+1}, & \text{dacă } n = 2k + 1 \\ 0, & \text{dacă } n = 2k \end{cases}$$

$$\text{Atunci } f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1) \frac{\pi x}{l} \quad \square$$

10. Să se dezvolte în serie de cosinusuri funcția

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & \text{dacă } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin x - \cos x, & \text{dacă } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Soluție. Observăm că

$$f_1(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$f_2(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Deci } f_1(x) = f_2 \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

De aceea dezvoltarea în serie de cosinusuri a funcției f coincide cu dezvoltarea în serie de cosinusuri a funcției f_1 definită pe intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$.

Prelungim funcția f_1 par față de origine și obținem coeficienții Fourier:

$$b_n = 0, \forall n \geq 1$$

$$a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos 2nx dx = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{1-4n^2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{8}{\pi} \frac{1}{1-4n^2}, & \text{dacă } n = 2k \\ 0, & \text{dacă } n = 2k + 1 \end{cases}$$

$$\text{Atunci } f(x) = \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4nx}{1-16n^2} \quad \square$$

11. Să se dezvolte funcția $f(x) = \cos ax$ după sinusuri în intervalul $[0, \pi]$, $a \neq 0$.

Soluție. Se prelungește prin imparitate în intervalul $(-\pi, 0)$.

$$\text{Avem } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos ax \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\sin(a+n)x + \sin(n-a)x] dx$$

$$\text{Pentru } |a| = n \implies b_n = 0. \text{ Pentru } |a| \neq n \implies b_n = \frac{2n}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 - a^2} \cdot [1 - (-1)^n \cos a\pi]$$

$$\text{Dacă } |a| \text{ nu e natural, atunci } b_{2k-1} = \frac{2(2k-1)}{\pi[(2k-1)^2 - a^2]} (1 + \cos a\pi) \text{ și } b_{2k} = \frac{4k}{\pi(4k^2 - a^2)} (1 - \cos a\pi), k \in \mathbb{N} \text{ astfel că}$$

$$\begin{aligned} \cos ax &= \frac{2}{\pi} (1 + \cos a\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{(2k-1)^2 - a^2} \sin(2k-1)x + \\ &+ \frac{2}{\pi} (1 - \cos a\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{4k^2 - a^2} \sin 2kx \end{aligned}$$

$$\text{Dacă } a = 2m, \text{ atunci } b_{2k-1} = \frac{4(2k-1)}{\pi[(2k-1)^2 - 4m^2]}, b_{2k} = 0 \text{ și}$$

$$\cos 2mx = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{(2k-1)^2 - 4m^2} \sin(2k-1)x, x \in [0, \pi]$$

$$\text{Dacă } a = 2m-1, \text{ atunci } b_{2k-1} = 0, b_{2k} = \frac{8k}{\pi[4k^2 - (2m-1)^2]} \text{ și}$$

$$\cos(2m-1)x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - (2m-1)^2} \sin 2kx, x \in [0, \pi] \quad \square$$

12. Să se dezvolte în serie Fourier $f(x) = 10 - x$ în $(5, 15)$

$$\text{Soluție. } a_0 = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10 - x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{5} \int_5^{15} (10 - x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{1}{n\pi} (10 - x) \sin \frac{n\pi x}{5} \Big|_5^{15} + \\ &+ \frac{1}{n\pi} \int_5^{15} \sin \frac{n\pi x}{5} dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{5} \int_5^{15} (10 - x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx = -\frac{1}{n\pi} (10 - x) \cos \frac{n\pi x}{5} \Big|_5^{15} - \\ &- \frac{1}{n\pi} \int_5^{15} \cos \frac{n\pi x}{5} dx = (-1)^n \frac{10}{n\pi} \end{aligned}$$

$$\text{Atunci } f(x) = \frac{10}{\pi} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{5} \quad \square$$

13. Să se demonstreze formula:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \forall x \in (0, 2\pi).$$

Soluție. Fie $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi)$, prelungită prin periodicitate la \mathbb{R} ; calculăm coeficienții Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx = \\ &= \frac{(\pi - x) \sin nx}{2n\pi} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = \\ &= \frac{-(\pi - x) \cos nx}{2n\pi} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n}, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Aplicând teorema lui Dirichlet, rezultă :

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \forall x \in (0, 2\pi).$$

În punctele $x = 0$ și $x = 2\pi$ funcția f nu este continuă ; în aceste puncte seria trigonometrică asociată ei are suma 0. \square

14. Să se demonstreze egalitatea:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin 2nx}{2n} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \forall x \in (0, \pi).$$

Soluție. Din formula:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \forall x \in (0, 2\pi),$$

demonstrată în exercițiul precedent, înlocuind pe x cu $2x$, rezultă identitatea:

$$\frac{\pi - 2x}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin 2nx}{n}, \forall x \in (0, \pi).$$

Împărțind acum cu 2, rezultă egalitatea cerută. \square

15. Să se demonstreze identitățile:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{\pi}{4}, \forall x \in (0, \pi)$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}, \forall x \in (-\pi, 0).$$

Să se calculeze apoi suma seriei:

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots$$

Soluție. Pentru prima identitate se scad membru cu membru cele două egalități demonstrate în exercițiile precedente; a doua identitate rezultă din prima și din imparitatea funcției sinus. Pentru a calcula suma seriei numerice date, se ia $x = \frac{\pi}{3}$ în prima egalitate și obținem:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi}{3}}{2n-1},$$

de unde rezultă : $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. □

16. (**Fenomenul Gibbs**) În jurul unui punct de discontinuitate al unei funcții date, seria Fourier asociată ei converge doar punctual (nu neapărat uniform). Acest fapt conduce la un defect de convergență (aparent paradox) al șirului sumelor parțiale asociat seriei trigonometrice date, numit fenomenul Gibbs. Dăm în continuare un exemplu în acest sens. Considerăm restricția funcției signum la intervalul $(-\pi, \pi)$,

$$\text{sgn} : (-\pi, \pi) \mapsto \mathbb{R}, \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , x \in (-\pi, 0) \\ 0 & , x = 0 \\ 1 & , x \in (0, \pi) \end{cases}$$

În exercițiul anterior s-a demonstrat egalitatea:

$$\text{sgn}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \forall x \in (-\pi, \pi).$$

Notăm cu S_n șirul sumelor parțiale:

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \forall x \in (-\pi, \pi).$$

În punctul $x = 0$ funcția sgn nu este continuă ; seria sa Fourier converge (conform teoremei lui Dirichlet) la $\frac{1}{2}(-1 + 1) = 0 = \operatorname{sgn}(0)$; convergența $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $\forall x \in (-\pi, \pi)$ este punctuală , nu și uniformă .

a. Să se demonstreze egalitatea:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt, \forall x \in (-\pi, \pi).$$

b. Să se arate că funcția S_n are un maxim în punctul $x = \frac{\pi}{2n}$ și:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \approx 1,1789.$$

c. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \operatorname{sgn}(0+) \right|.$$

Soluție. a. Calculăm mai întâi suma

$$A = \cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x, \forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Pentru aceasta, considerăm și suma $B = \sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x$ și calculăm:

$$\begin{aligned} A + iB &= \\ &= (\cos x + i \sin x) + (\cos 3x + i \sin 3x) + \dots + (\cos(2n-1)x + i \sin(2n-1)x) = \\ &= z^2 \frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1}, \end{aligned}$$

unde am notat $z = \cos x + i \sin x$. După calcule, rezultă :

$$A + iB = \frac{\sin nx}{\sin x} (\cos nx + i \sin nx),$$

și deci:

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}, \forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Integrând de la 0 la x , rezultă :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \int_0^x \frac{\sin 2nt}{2 \sin t} dt,$$

sau, înmulțind cu $\frac{4}{\pi}$:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt, \forall x \in (-\pi, \pi).$$

b. Din cele demonstrate la punctul precedent rezultă că

$$S'_n(x) = \frac{2 \sin 2nx}{\pi \sin x}$$

și deci $\frac{\pi}{2n}$ este punct critic al lui S_n ; într-o vecinătate a lui $\frac{\pi}{2n}$ avem:

$$S'_n(x) = \frac{2 \sin 2nx}{\pi \sin x} > 0, x < \frac{\pi}{2n},$$

$$S'_n(x) = \frac{2 \sin 2nx}{\pi \sin x} < 0, x > \frac{\pi}{2n}.$$

Rezultă că $x = \frac{\pi}{2n}$ este punct de maxim al funcției S_n .

Calculăm acum:

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)} \frac{du}{2n} = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)} du.$$

Rezultă :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

Ultima integraă se aproximează dezvoltând funcția sinus în serie de puteri:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du &= \int_0^{\pi} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-2} \right) du = \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!(2n-1)} x^{2n-1} \Big|_0^{\pi} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \pi^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}. \end{aligned}$$

Seria fiind alternată, eroarea este mai mică decât primul termen neglijat. Cu o eroare mai mică decât 10^{-3} , se obține

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \approx 1,1789.$$

c. Rezultă : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \operatorname{sgn}(0+) \right| \approx 0,1789.$ □

17. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$ pe \mathbb{R}

Soluție. f e pară, deci $b_k = 0, k > 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(s-a făcut schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$)

$$\text{Fie } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (1)$$

Inmulțim ambii membri ai egalității (1) cu $2(2 + \cos x)$ și obținem:

$$\begin{aligned} 2 &= 2a_0 + a_0 \cos x + 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos x \cos nx \implies \\ \implies 2 &= 2a_0 + a_0 \cos x + 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\cos(n+1)x + \cos(n-1)x] \end{aligned}$$

Funcția $g(x) = 2$ poate fi considerată ca o funcție pară, deci dezvoltabilă în serie Fourier de cosinusi pe toată axa reală. Ținând seama de egalitatea a două serii Fourier obținem:

$$2 = 2a_0 + a_1$$

$$0 = a_0 + 4a_1 + a_2$$

$$0 = 4a_k + a_{k+1} + a_{k-1}$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

Sirul a_k este un șir ce verifică relația de recurență lineară

$$a_k = -4a_{k-1} - a_{k-2}$$

$$\text{cu } a_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ și } a_1 = 2 - 2a_0 = \frac{6-4\sqrt{3}}{3}$$

Ecuția caracteristică atașată este $r^2 + 4r + 1 = 0$ cu soluțiile $r_1 = -2 + \sqrt{3}, r_2 = -2 - \sqrt{3}$

Atunci $a_k = c_1(-2 - \sqrt{3})^k + c_2(-2 + \sqrt{3})^k$, constantele c_1, c_2 determinându-se din a_0 și a_1 . Deci obținem sistemul:

$$c_1 + c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$c_1(-2 - \sqrt{3}) + c_2(-2 + \sqrt{3}) = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Așadar, } c_1 = 0 \text{ și } c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$a_k \text{ va fi de forma } a_k = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3} - 2)^k$$

$$\text{Deci } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3} - 2)^n \cos nx \quad \square$$

18. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x) = \ln(2 + \cos x)$

Soluție. Prin derivare obținem

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

Cum f' este o funcție impară, ea este dezvoltabilă în serie Fourier de sinusuri, adică

$$\frac{-\sin x}{2 + \cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

sau

$$-\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \sin nx + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n [\sin(n+1)x + \sin(n-1)x]$$

Tinând seama de egalitatea a două serii Fourier obținem

$$-1 = 2b_1 + \frac{1}{2}b_2$$

$$0 = 2b_k + \frac{1}{2}b_{k-1} + \frac{1}{2}b_{k+1} (*)$$

Dar $b_1 = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x} dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{8t^2}{(1+t^2)^2(t^2+3)} dt$ (am făcut schimbarea $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$)

Descompunem în fracții simple și obținem:

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{16}{\pi} \left[-\frac{3}{4} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+3} + \frac{3}{4} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \right] = \\ &= -\frac{16}{\pi} \left(-\frac{3}{4} \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{4} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \right) = 2(\sqrt{3} - 2) \end{aligned}$$

Atunci $b_2 = -2 - 4b_1 = 2(7 - 4\sqrt{3})$

Ecuția caracteristică a șirului (*) este:

$$t^2 + 4t + 1 = 0$$

cu rădăcinile $t_1 = -2 - \sqrt{3}$, $t_2 = -2 + \sqrt{3}$

Deci

$$b_k = c_1(-2 - \sqrt{3})^{k-1} + c_2(-2 + \sqrt{3})^{k-1}$$

c_1 și c_2 determinându-se din sistemul

$$2(\sqrt{3} - 2) = c_1 + c_2$$

$$2(7 - 4\sqrt{3}) = -2(c_1 + c_2) - \sqrt{3}(c_1 + c_2)$$

Soluțiile sistemului sunt $c_1 = 0, c_2 = \sqrt{3} - 2$

Deci $b_k = 2(\sqrt{3} - 2)^k$

Atunci avem

$$-\frac{\sin x}{2 + \cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} 2(\sqrt{3} - 2)^n \sin nx$$

Integrând între 0 și x obținem:

$$\ln(2 + \cos x) - \ln 3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sqrt{3} - 2)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sqrt{3} - 2)^n}{n} \cos nx$$

$$\text{Dar } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sqrt{3} - 2)^n}{n} = -\ln(3 - \sqrt{3})$$

$$\text{Atunci } \ln(2 + \cos x) = \ln 3 - \ln(3 - \sqrt{3}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sqrt{3} - 2)^n}{n} \cos nx \quad \square$$

19. Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^n \frac{\sin x}{n^3 + x^3} dx$$

Soluție. Facem schimbarea de variabilă $x = nt$ în integrala

$$b_n = n^2 \int_0^n \frac{\sin x}{n^3 + x^3} dx \text{ și obținem } b_n = \int_0^1 \frac{\sin nt}{1+t^3} dt$$

Funcția $f(t) = \frac{1}{1+t^3}$ e continuă pe $[0,1]$ și b_n fiind coeficientul ei Fourier și seria Fourier fiind convergentă, rezultă $b_n \rightarrow 0$, când $n \rightarrow \infty$ \square

20. Să se dezvolte în serie Fourier funcția

$$f(x) = \frac{1 - \alpha \cos x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}, |\alpha| < 1, x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluție. Funcția f e periodică de perioadă 2π , derivabilă pe \mathbb{R} , deci este dezvoltabilă în serie Fourier pe \mathbb{R} .

Cum f e pară $\implies b_n = 0, \forall n \geq 1$

$$\text{Avem } a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \alpha \cos x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx$$

Cu schimbarea $e^{ix} = z$, intervalul $[0, 2\pi]$ se transformă în cercul $|z| = 1$, deci

$$a_0 = \frac{1}{4\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\alpha z^2 - 2z + \alpha}{\alpha z^2 - z(1 + \alpha^2) + \alpha} \cdot \frac{dz}{z}$$

Funcția $F(z) = \frac{\alpha z^2 - 2z + \alpha}{z[\alpha z^2 - z(1 + \alpha^2) + \alpha]}$ are în interiorul domeniului $|z| = 1$ punctele singulare $z = 0$ și $z = \alpha$ ($|\alpha| < 1$) ca poli simpli.

Deci $a_0 = \frac{1}{4\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\alpha z^2 - 2z + \alpha}{z[\alpha z^2 - z(1 + \alpha^2) + \alpha]} dz = \frac{1}{2} [\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, \alpha)]$, unde

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{\alpha z^2 - 2z + \alpha}{\alpha z^2 - z(1 + \alpha^2) + \alpha} /_{z=0} = 1$$

$$\text{Res}(f, \alpha) = \frac{\alpha z^2 - 2z + \alpha}{\alpha z(z - \frac{1}{\alpha})} /_{z=\alpha} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 1} = 1$$

Așadar $a_0 = 1$

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \alpha \cos x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} (\cos nx + i \sin nx) dx$$

Facem schimbarea $e^{ix} = z$ și obținem:

$$a_n + ib_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(\alpha z^2 - 2z + \alpha) z^{n-1}}{\alpha z^2 + z(1 + \alpha^2) + \alpha} dz = \text{Res}_\alpha,$$

$$\text{unde } \text{Res}_\alpha = \frac{(\alpha z^2 - 2z + \alpha) z^{n-1}}{\alpha(z - \frac{1}{\alpha})} /_{z=\alpha} = \alpha^n$$

Rezultă $a_n + ib_n = \alpha^n$, deci $a_n = \alpha^n$ și $b_n = 0$.

$$\text{Atunci } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cos nx, x \in \mathbb{R} \quad \square$$

21. Fie $0 < u < 1$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodică astfel încât $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \cos(ux)$.

a) Calculați coeficienții Fourier ai lui f ;

b) Calculați $g(u) = \sum_{n \geq 1} \frac{2u}{u^2 - n^2}$

c) $\forall t \in [0, 1]$, calculați $I(t) = \int_0^t g(u) du$

Soluție. a) f este funcție pară deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(nx) \cos(ux) du = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(n+u)x + \cos(n-u)x] du = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(n+u)\pi}{n+u} - \frac{\sin(u-n)\pi}{n-u} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \cdot \frac{2u}{n^2 - u^2} \cdot \sin \pi u \end{aligned}$$

Deoarece f e continuă, de clasă C^1 , atunci seria sa Fourier converge uniform pe \mathbb{R} și are suma f . Deci pentru $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\cos(ux) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \cdot \frac{2u}{n^2 - u^2} \cdot \sin \pi u \cdot \cos(nx)$$

b) Inlocuim x cu π în formulă și obținem $\cos(\pi u) = \frac{\sin \pi u}{\pi u} - \frac{1}{\pi}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{2u}{n^2 - u^2} \cdot \sin \pi u &= \frac{\sin \pi u}{\pi u} + \frac{g(u) \sin \pi u}{\pi} / : \sin \pi u \implies \operatorname{ctg} \pi u = \\ &= \frac{1}{\pi u} + \frac{g(u)}{\pi} \implies g(u) = \pi \cdot \operatorname{ctg} \pi u - \frac{1}{u} \end{aligned}$$

c) g e continuă pe $(0,1)$ și se prelungește prin continuitate în 0 prin $g(0) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Dacă } \alpha \in (0, t) \text{ putem scrie } \int_0^t g(u) du &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^t \left(\pi \cdot \operatorname{ctg} \pi u - \frac{1}{u} \right) du = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} [\ln(\sin \pi u) - \ln u]_{\alpha}^t = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\sin \pi t}{t} \right) - \ln \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\alpha} \right) = \\ &= \ln \left(\frac{\sin \pi t}{t} \right) - \ln \pi = \ln \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t} \right) \implies \int_0^t g(u) du = \ln \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t} \right) \quad \square \end{aligned}$$

22. Fie f și F două funcții de pătrat integrabile definite pe $[-\pi, \pi]$ și

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

seriile Fourier atașate lor. Să se arate că

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F(x) dx = \frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n)$$

Soluție. Seriile Fourier atașate funcțiilor $f + F$ și $f - F$ sunt

$$f(x) + F(x) = \frac{a_0 + A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + A_n) \cos nx + (b_n + B_n) \sin nx]$$

$$f(x) - F(x) = \frac{a_0 - A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - A_n) \cos nx + (b_n - B_n) \sin nx]$$

Deoarece f și F sunt funcții de pătrat integrabile, atunci și $f + F$ și $f - F$ sunt funcții de pătrat integrabile.

Egalitatea lui Parseval ne conduce la:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) + F(x)]^2 dx = \frac{(a_0 + A_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + A_n)^2 + (b_n + B_n)^2]$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(x)]^2 dx = \frac{(a_0 - A_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - A_n)^2 + (b_n - B_n)^2]$$

Scăzând cele două egalități obținem:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)dx &= 4 \left[\frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)dx &= \frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n) \end{aligned}$$

□

23. Să se demonstreze egalitatea:

$$\sec x = \frac{4}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln(1+\sqrt{2}) + 2 \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi}{4} \right] \cdot \cos 4nx, \text{ pentru } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Soluție. Funcția $f(x) = \sec x$ verifică pe intervalul $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ condițiile Teoremei 4.3. Deoarece f este pară avem:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \frac{8}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{8}{\pi} \ln(1 + \sqrt{1+t^2}) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{8}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Pentru calculul lui a_n folosim identitatea

$$\frac{\cos 4nx}{\cos x} = 2 \cos(4n-1)x - 2 \cos(4n-3)x + \frac{\cos(4n-1)x}{\cos x}$$

De unde integrând obținem

$$a_n = \frac{16}{\pi} \left[\frac{1}{4n-1} \sin(4n-1) \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4n-3} \sin(4n-3) \frac{\pi}{4} \right] + a_{n-1}$$

De aici deducem

$$a_k - a_{k-1} = \frac{16}{\pi} \left[\frac{1}{4k-1} \sin(4k-1) \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4k-3} \sin(4k-3) \frac{\pi}{4} \right]$$

Insumând obținem

$$a_n = \frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi}{4} + a_0$$

Așadar, dezvoltarea în serie Fourier pe intervalul $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ a funcției f este

$$\sec x = \frac{4}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln(1+\sqrt{2}) + 2 \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi}{4} \right] \cdot \cos 4nx$$

□

24. Să se arate că dacă $f(x)$ este suma seriei $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^2-1}$, atunci f verifică ecuația diferențială $f''(x) + f(x) = -\sin x$ și să se găsească apoi suma.

Soluție. Fie $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, atunci

$$f'(x) = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(nb_n + (-1)^n c) \cos nx - na_n \sin nx], \text{ unde}$$

$$c = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [(-1)^{n+1} nb_n]$$

$$\text{In cazul nostru } c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n^2}{n^2 - 1} \right) = -1$$

$$\text{Obținem } f'(x) = -\frac{1}{2} + \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}$$

Făcând un raționament analog obținem

$$f''(x) = -\sin x - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{n^2 - 1}$$

și se verifică astfel relația din ipoteză.

Pentru calculul sumei observăm că soluția generală a ecuației este $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x \cos x}{2}$

Pentru a calcula c_1 facem $x = 0$ și avem $f(0) = c_1$, dar $f(0) = 0$, deci $c_1 = 0$

Derivând f și ținând seama de dezvoltarea sa în serie obținem

$$c_2 \cos x + \frac{\cos x}{2} - \frac{x \sin x}{2} = -\frac{1}{2} + \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}$$

$$\text{Facem } x = 0 \text{ și obținem } c_2 = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Deci } f(x) = \frac{\sin x}{4} + \frac{x \cos x}{2}$$

□

4.3 Probleme propuse

1. Să se dezvolte în serii Fourier funcțiile:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2}, & \text{dacă } 0 < x \leq \pi \\ -\frac{\pi+x}{2}, & \text{dacă } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi$$

și să se deducă dezvoltarea în serie trigonometrică a numărului $\frac{\pi}{4}$.

$$\mathbf{R:} \quad \frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, x \in (0, \pi)$$

Să se dezvolte în serii Fourier următoarele funcții:

2.

$$f(t) = \begin{cases} -t - \pi, & \text{dacă } t \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \\ t, & \text{dacă } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ -t + \pi, & \text{dacă } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$$\mathbf{R:} f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^2} \sin nt$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in (0, \pi) \\ -1, & \text{dacă } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$$\mathbf{R:} f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

4. $f(x) = |\cos x|, x \in (-\pi, \pi)$

$$\mathbf{R:} f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2 - 1}$$

5. $f(x) = \left|\sin \frac{x}{2}\right|$

$$\mathbf{R:} f(x) = \frac{2}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4nx}{1 - 4n^2} \right)$$

6. $f(x) = \sin \alpha x, x \in (-\pi, \pi), \alpha$ nu e întreg

$$\mathbf{R:} f(x) = \frac{2 \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\alpha^2 - n^2} \sin nx$$

7. $f(x) = \frac{\sin x}{5 + 3 \cos x}$

$$\mathbf{R:} f(x) = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{3^n}$$

8. Să se scrie egalitatea lui Parseval pentru funcția $f(x) = e^x$ pe $(-\pi, \pi)$.

$$\mathbf{R:} \operatorname{cth} \pi = \frac{1}{\pi} + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{(\pi n^2 + 1)^2}$$

9. Să se dezvolte funcția $f(x) = 1 - |x|$ definită în intervalul $(0,1)$:

a) în serie de cosinusuri;

b) în serie de sinusuri.

$$\mathbf{R:} \text{ a) } f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x}{n}$$

10. Să se dezvolte în serie de sinusuri pe $(0,\pi)$ funcția $f(x) = x(\pi - x)$.

$$\mathbf{R:} f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

11. Să se dezvolte în serie de cosinusuri funcția $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x$, $x \in [0, \pi]$.

$$\mathbf{R:} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}, x \in [0, \pi]$$

12. Să se determine seria Fourier asociată funcției periodice de perioadă 4

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2x, & \text{dacă } x \in (-2, 2) \\ -3, & \text{dacă } x = 2 \end{cases}$$

Să se găsească apoi suma $S(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{R:} f(x) = 1 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{\pi n x}{2}$$

$$\text{Cum } S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, x \in \mathbb{R} \implies S(x) = 1 + 2x, x \in (-2, 2), \\ S(2) = 1$$

Capitolul 5

Limite și continuitate pentru funcții de mai multe variabile

5.1 Noțiuni teoretice

Definiția 5.1. Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ și fie (x_0, y_0) un punct de acumulare pentru mulțimea A . În acest caz $l = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ și $|y - y_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x, y) - l| < \varepsilon$

Pentru funcția de două variabile $f(x, y)$ se pot considera limitele iterate: $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ și $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$, care, dacă există, nu sunt întotdeauna egale. Dacă există limita globală $l = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ și dacă există limitele $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ și $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$, atunci există limitele iterate și sunt egale cu limita globală l . Dacă limitele iterate nu sunt egale, limita globală nu există. Se poate întâmpla ca limitele iterate să fie egale, fără ca limita globală să existe.

Rezultatele de mai sus pot fi enunțate similar pentru funcții de p variabile.

Definiția 5.2. Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ o funcție de două variabile. Dacă funcția $f(x, y_0)$ este continuă în punctul $x_0, (x_0, y_0) \in A$, atunci f este continuă parțial în raport cu variabila x . Dacă funcția $f(x_0, y)$ este continuă în punctul y_0 , atunci f este continuă parțial în raport cu variabila y .

Continuitatea funcției f implică continuitatea parțială în raport cu fiecare variabilă. Reciproca nu este adevărată.

Definiția 5.3. Funcția f este uniform continuă pe A , dacă $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A, |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon, |y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$

Orice funcție uniform continuă pe A este continuă pe A . O funcție continuă pe o mulțime mărginită și închisă (compactă) A este uniform continuă pe A .

5.2 Probleme rezolvate

1. Folosind definiția, să se demonstreze că :

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (3,\infty)} \frac{xy-1}{y+1} = 3; \text{ b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$$

Soluție. a) Fiind dat $\varepsilon > 0$ oarecare, trebuie să determinăm un $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $|x-3| < \delta_\varepsilon$ și $y > \delta_\varepsilon^{-1}$ să implice $\left| \frac{xy-1}{y+1} - 3 \right| < \varepsilon$.

$$\text{Avem } \left| \frac{xy-1}{y+1} - 3 \right| = \left| x - 3 - \frac{x+1}{y+1} \right| \leq |x-3| + \left| \frac{x-3}{y+1} \right| + \frac{4}{|y+1|} < \delta_\varepsilon + \frac{\delta_\varepsilon}{y} + \frac{4}{y} < < \delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon^2 + 4\delta_\varepsilon < 6\delta_\varepsilon, \text{ cu } 0 < \delta_\varepsilon < 1$$

Deci dacă impunem $6\delta_\varepsilon < \varepsilon$, adică $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{6}$, definiția e verificată .

b) Se scrie $x^2 + y^2 = (|x| + |y|)^2 - 2|x||y|$, astfel că , presupunând $|x| < \delta_\varepsilon, |y| < \delta_\varepsilon$ se obține $\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = |x| + |y| - \frac{2|x||y|}{|x|+|y|} \leq |x| + |y| < 2\delta_\varepsilon$.

Dacă se impune $2\delta_\varepsilon < \varepsilon$ rezultă că există $\delta_\varepsilon, 0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$ astfel încât $|x| < \delta_\varepsilon, |y| < \delta_\varepsilon$ să implice $|f(x, y)| < \varepsilon$, ceea ce arată că definiția este verificată . \square

2. Să se arate, folosind definiția, că următoarele funcții nu au limită în origine:

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0, 0); \text{ b) } f(x, y) = \frac{y^2+2x}{y^2-2x}, y^2 - 2x \neq 0$$

Soluție. a) Vom folosi definiția cu șiruri, punând în evidență șiruri de puncte, convergente către $(0, 0)$, situate pe drepte oarecare ce trec prin origine. Ecuația unei astfel de drepte este $y = mx$. Dacă funcția ar admite limită în origine, ar trebui ca

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0, y=mx} \frac{2x(mx)}{x^2 + x^2m^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

Acest fapt arată însă că funcția nu are limită , pentru că dacă ar avea limită , aceasta nu ar trebui să depindă de șirul folosit (în cazul de față nu ar trebui să depindă de m , panta dreptei folosite).

$$\text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0, y=mx} \frac{m^2x^2 + 2x}{m^2x^2 - 2x} = -1$$

De aici nu putem trage concluzia că limita există , deoarece dacă facem ca $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ pe parabola ce trece prin origine , $y^2 = px$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, rezultă că :

$$\lim_{x \rightarrow 0, y^2=px} \frac{px + 2x}{px - 2x} = \frac{p+2}{p-2}$$

Prin urmare, pentru șiruri diferite obținem limite diferite, deci funcția nu are limită în origine. \square

3. Să se cerceteze limitele iterate și limita globală în origine pentru următoarele funcții:

a) $f(x, y) = \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$, $x+y \neq 0$; b) $f(x, y) = x \cdot \sin \frac{1}{y}$, $y \neq 0$;

c) $f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$, $x \neq 0, y \neq 0$; d) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^4}$

Soluție. Limitele iterate sunt:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{x} = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y+y^2}{y} = -1$$

și, deoarece acestea sunt diferite, tragem concluzia că limita globală nu există. Într-adevăr, avem

$$\lim_{x \rightarrow 0, y=mx} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-mx+x^2+m^2x^2}{x+mx} = \frac{1-m}{1+m}$$

ceea ce ne arată că limita globală nu există.

b) $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$, iar $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ nu există, deoarece $\lim_{y \rightarrow 0} \sin \frac{1}{y}$ nu există.

Totuși limita globală există și este egală cu 0. Verificăm cu ajutorul definiției. Deoarece $|\sin \frac{1}{y}| \leq 1$, rezultă că pentru $|x| < \delta_\epsilon, |y| < \delta_\epsilon$ avem $|f(x, y) - 0| = |x| |\sin \frac{1}{y}| \leq |x| < \delta_\epsilon$. Luând $\delta_\epsilon < \epsilon$, definiția e verificată.

c) Limitele iterate nu există, deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ și $\lim_{y \rightarrow 0} \sin \frac{1}{y}$ nu există. Limita globală există și este egală cu 0. Pentru a vedea aceasta observăm că $|\sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}| \leq 1$, deci

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0, y=mx} f(x, y) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0, y=mx} \frac{m^2 x^4}{m^2 x^4 + (1-m)^4 x^4} = \frac{m^2}{m^2 + (1-m)^4} \end{aligned}$$

Deci limita nu există deoarece depinde de m . □

4. Să se calculeze limitele:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$; b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin xy}{x}$; c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$

$$\text{Soluție. a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sqrt{u+1}-1} = \\ = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{u+1}+1)u}{u} = 2$$

$$\text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = 2$$

$$\text{c) Pentru } x > 0 \text{ și } y > 0 \text{ avem } 0 < \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} \leq \frac{x}{x^2} + \frac{y}{y^2}$$

$$\text{și deoarece } \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 0, \text{ rezultă}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0 \quad \square$$

5. Să se arate că funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este continuă în origine.

$$\text{Soluție. Scriem } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

$$\text{Stim că } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3} = 1$$

$$\text{Pentru } |x| < \delta_\epsilon, |y| < \delta_\epsilon \text{ avem } \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| = \frac{|x+y||x^2-xy+y^2|}{x^2+y^2} \leq (|x|+ \\ +|y|) \left(1 + \frac{|xy|}{x^2+y^2} \right) < 2\delta_\epsilon \frac{\epsilon}{2}, \text{ deoarece } 2|x||y| < x^2+y^2$$

Dacă luăm $0 < \delta_\epsilon < \frac{\epsilon}{2}$, definiția este verificată.

Deci $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, rezultă funcția e continuă în origine. \square

6. Să se arate că funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 + \sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este continuă parțial în origine, dar nu este continuă în acest punct.

Soluție. Funcția

$$f(x, 0) = \begin{cases} \frac{\sin x^3}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este continuă în $x = 0$, deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot x = 0 = \\ = f(0, 0)$

Analog funcția $f(0, y)$ este continuă în $y = 0$.

Dar funcția $f(x, y)$ nu este continuă în origine, deoarece:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0, y^2 = px} \frac{px^2 + \sin(x^3 + p^{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}})}{x^2 + p^2 x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0, y^2 = px} \left[\frac{p}{1 + p^2} + \frac{\sin(x^3 + p^{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}})}{x^3 + p^{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{x^3 + p^{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{x^2 + p^2 x^2} \right] = \frac{p}{1 + p^2} \quad \square \end{aligned}$$

7. Să se arate că funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

Soluție. Fixăm $y = b$. Atunci $\lim_{x \rightarrow a} f(x, b) = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = f(a, b)$, deci funcția este continuă în raport cu x .

Fixăm $x = a$. Atunci $\lim_{y \rightarrow b} f(a, y) = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = f(a, b)$, deci funcția este continuă în raport cu y .

Studiem continuitatea în origine :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0, y = mx} \frac{2x^2 m^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{m^2}{1 + m^2}$$

Limita depinzând de m , funcția nu e continuă în origine în raport cu ansamblul variabilelor. \square

8. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ pentru $(x, y) \neq (0, 0)$ și nule în origine. Să se arate că f este continuă pe \mathbb{R}^2 , iar g este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Soluție. Funcțiile f și g sunt continue pe deschisul $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, fiind cârturi de polinoame, deci compuneri de funcții elementare. Rămâne de studiat continuitatea în origine. Deoarece $0 \leq |f(x, y)| = |x| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x|$, rezultă că $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, deci f este continuă și în origine.

Pentru g nu mai funcționează același raționament. În acest caz, limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ nu există, deoarece depinde de direcția de tindere,

așa cum se observă punând $y = mx$ sau altfel: alegem șirurile $(x'_n, y'_n) = (\frac{2}{n}, \frac{1}{n})$, $(x''_n, y''_n) = (\frac{3}{n}, \frac{1}{n})$ care tind către $(0, 0)$, dar pentru care $g(x'_n, y'_n) = \frac{3}{5}$, $g(x''_n, y''_n) = \frac{4}{5}$ nu tind către $g(0, 0) = 0$. Așadar g nu este continuă în origine. \square

† 9. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin :

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & xy \geq 0 \\ -y, & xy < 0 \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x - \sin y}{x - y}, & \text{dacă } x \neq y \\ \cos y, & \text{dacă } x = y \end{cases}$$

Soluție. Pe deschisul $xy > 0$ (adică în cadranele deschise I și II), avem $f(x, y) = x$, deci f e continuă ; analog pe deschisul $xy < 0$. Rămâne de studiat comportarea lui f în punctele de pe axe. Să fixăm punctul $A(\alpha, 0)$ cu $\alpha > 0$. Alegem șirurile $(\alpha, \frac{1}{n})$ și $(\alpha, -\frac{1}{n})$ care tind către A ; se observă că $f(\alpha, \frac{1}{n}) = \alpha \rightarrow \alpha$ și $f(\alpha, -\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$, dar $\alpha \neq 0$. Analog pentru $(\alpha, 0)$ cu $\alpha < 0$. Deci funcția f nu este continuă în aceste puncte.

Arătăm că f nu e continuă nici în punctele $(0, \beta)$ cu $\beta > 0$ sau $\beta < 0$. Pentru aceasta alegem șirurile $(\frac{1}{n}, \beta)$ și $(-\frac{1}{n}, \beta)$.

Dar f este continuă în $(0, 0)$, deoarece pentru orice șir $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$, rezultă $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$, deci $f(x_n, y_n) \rightarrow 0 = f(0, 0)$

Pe deschisul $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$, funcția g este elementară , deci continuă ; apoi în punctele (α, α) avem

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\alpha)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\alpha)} \frac{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}}{x-y} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\alpha)} \cos \frac{x+y}{2} = \cos \alpha = g(\alpha, \alpha), \text{ deci } g \text{ este continuă pe } \mathbb{R}^2 \quad \square$$

Să se studieze continuitatea funcțiilor:

✦ 10.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2 + e^{-\frac{1}{x^2}}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Soluție. Fie șirurile $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{\sqrt{\ln n}}, \frac{1}{n})$ și $(x''_n, y''_n) = (\frac{1}{\sqrt{\ln n}}, \frac{1}{n^2})$

Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n) = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n, y''_n) = 0$, deci $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ nu există . Așadar, f e continuă doar pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ \square

11.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{xy} \cdot \sin \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Soluție. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}}{\frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} = 0$, deci funcția este continuă în origine.

Cum f e continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, fiind compunere de funcții elementare, rezultă că f e continuă pe \mathbb{R}^2 . \square

12.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soluție. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} =$
 $= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{x^2 + y^2 + 1 - 1} =$
 $= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1) = 2 \neq 0 = f(0,0)$, deci funcția nu este continuă în origine. \square

13.

$$f(x,y) = \begin{cases} (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soluție. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} =$
 $= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left((1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 y^2}} \right)^{-\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}} = 1 \neq 0 = f(0,0)$, deci f nu e continuă în origine. \square

* 14.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Soluție. Pentru $x^2 + y^2 \neq 0$, f este continuă, fiind compunere de funcții continue.

Studiem continuitatea în $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos 0 - \cos(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 \sin^2 \frac{x^3 + y^3}{2}}{x^2 + y^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2 \frac{x^3+y^3}{2}}{\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2+y^2} = \\
 &= 2 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^3+y^3)^2}{x^2+y^2} \\
 \text{Avem } &\left| \frac{(x^3+y^3)^2}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{(x+y)^2(x^2-xy+y^2)^2}{x^2+y^2} \right| = \\
 &= \left| (x+y)^2(x^2-xy+y^2) \left(1 - \frac{xy}{x^2+y^2}\right) \right| \leq |(x+y)^2(x^2-xy+y^2)| \cdot \\
 &\cdot \left(1 + \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| \right) \leq |(x+y)^2(x^2-xy+y^2)| \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \rightarrow 0, \text{ c\u00e2nd} \\
 &(x,y) \rightarrow (0,0) \text{ (deoarece } 2xy \leq x^2+y^2) \\
 \text{A\u015fadar, } &\frac{1}{2} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^3+y^3)^2}{x^2+y^2} = 0, \text{ deci } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = \\
 &= f(0,0) \implies \text{func\u021bia e continu\u0103 pe } \mathbb{R}^2 \quad \square
 \end{aligned}$$

15. S\u0103 se arate c\u0103 func\u021bia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+x^2y \ln|x+y|}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continu\u0103 par\u021bial \u00een origine, \u00eens\u0103 nu e continu\u0103 \u00een raport cu ansamblul variabilelor \u00een acest punct.

Solu\u021bie. $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = 0$$

A\u015fadar, f este continu\u0103 par\u021bial \u00een origine.

$$\begin{aligned}
 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0, y=mx} f(x,y) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0, y=mx} \frac{x^2m + mx^3 \ln[x(1+m)]}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2} \implies f \text{ nu este con-} \\
 &\text{tinu\u0103 \u00een origine \u00een raport cu ambele variabile} \quad \square
 \end{aligned}$$

16. S\u0103 se studieze continuitatea \u00een origine a func\u021biei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|}{y^2} e^{-\frac{|x|}{y^2}}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Solu\u021bie. Chiar dac\u0103 f e continu\u0103 \u00een origine pe dreapta $y = mx$, deoarece

$$\lim_{x \rightarrow 0, y=mx} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0, y=mx} \frac{|x|}{m^2 x^2} e^{-\frac{|x|}{m^2 x^2}} = 0, \forall m \neq 0, \text{ totu\u015fi } f \text{ nu} \\
 \text{e continu\u0103 \u00een } (0,0) \text{ \u00een raport cu ansamblul variabilelor, deoarece pe} \\
 \text{curba } x = y^2 \text{ avem } \lim_{x \rightarrow 0, y^2=x} f(x,y) = \frac{1}{e} \neq 0 = f(0,0) \quad \square$$

- * 17. Fie $f(x, y) = (f_1, f_2)$, $f: \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y) = x$

$$f(x, y) = \begin{cases} y - x^2, & x^2 \leq y \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{y^2 - x^2 y}{x^2}, & 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea funcției f în origine.

Soluție. Vom studia continuitatea funcțiilor f_1 și f_2 în origine:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = 0 = f_1(0, 0)$$

Fie $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $\theta \in [0, \pi]$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \sin \theta (\sin \theta - \rho \cos^2 \theta)}{\rho^2 \cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}, \text{ pentru } 0 \leq \sin \theta \leq \rho \cos^2 \theta$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho \cos \theta - \rho^2 \sin^2 \theta) = 0, \text{ pentru } \rho \cos^2 \theta \leq \sin \theta$$

Deci f_2 nu e continuă în origine și atunci nici f nu va fi continuă în origine. \square

18. Să se studieze uniform continuitatea funcțiilor:

a) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $(x, y) \in (1, 2) \times (1, 2)$

b) $f(x, y, z) = x^2 + e^y + y \sin z$, $(x, y, z) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

Soluție. a) Fiind dat $\varepsilon > 0$ oarecare, trebuie să determinăm $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (1, 2) \times (1, 2)$ cu $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$, $|y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon$ să implice $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$

Dar $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = \frac{|(x_1 - x_2)y_2 + x_2(y_2 - y_1)|}{y_1 y_2} \leq \frac{|x_1 - x_2|y_2 + |y_2 - y_1|x_2}{y_1 y_2} < \delta_\varepsilon \cdot \frac{x_2 + y_2}{y_1 y_2} < 4\delta_\varepsilon < \varepsilon$, pentru $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{4}$, deci funcția e uniform continuă

b) Deoarece funcția f este continuă pe mulțimea mărginită și închisă $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, deci uniform continuă pe această mulțime. \square

5.3 Probleme propuse

Să se studieze continuitatea funcțiilor:

10

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

R: Continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

R: Continuă pe \mathbb{R}^2

3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

R: Continuă pe \mathbb{R}^2

4.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\ln(x^2 + y^2)}, & x^2 + y^2 < 1, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

R: Continuă pe mulțimea de definiție

5.

$$f(x, y) = \begin{cases} (1 + xy)^{\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}, & x > 0 \text{ și } y > 0 \\ 1, & x = 0 \text{ și } y = 0 \end{cases}$$

R: Continuă pe \mathbb{R}^2

6.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

R: Continuă pe \mathbb{R}^2

7.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

R: Continuă pe \mathbb{R}^2

8.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

R: Continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

9.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

R: Continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

10.

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

R: Continuă pe \mathbb{R}^2

11. Să se studieze uniform continuitatea funcției

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}, (x, y) \in (1, 2) \times (1, 2)$$

R: Funcția este uniform continuă pe $(1, 2) \times (1, 2)$

Capitolul 6

Derivate parțiale. Diferențiabilitate

6.1 Noțiuni teoretice

Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ deschis, $a \in A$ un punct fixat și $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ un versor n -dimensional (adică $\|s\| = 1$). Tripletului (f, a, s) i se poate asocia o funcție de o singură variabilă reală ,

$$g(t) = f(a + ts) = f(a_1 + ts_1, \dots, a_n + ts_n),$$

definită în vecinătatea originii; mai precis, cum A este deschis și $a \in A$, există $r > 0$ real astfel încât $B(a, r) \subset A$; atunci pentru orice $t \in (-r, r)$ avem $d(a+ts, a) = \|a+ts-a\| = \|ts\| = |t| \cdot \|s\| = |t| < r$, deci $a+ts \in B(a, r) \subset A$ și funcția g este bine definită pe intervalul $(-r, r)$.

Definiția 6.1. Se spune că funcția f este derivabilă în punctul a după versorul s dacă funcția reală $g: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(a + ts)$ este derivabilă în punctul $t = 0$ și în acest caz numărul real $\frac{df}{ds}(a) = g'(0)$ se numește derivata lui f după versorul s în punctul a (sau derivata lui f după direcția s).

Definiția 6.2. Fie o funcție $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ deschis și $a = (a_1, \dots, a_n)$ un punct din A . Se spune că f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_k (de indice k) în punctul a dacă există $\frac{df}{de_k}(a), 1 \leq k \leq n$; acest număr real se numește derivata lui f în raport cu x_k în punctul a și se notează $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ sau $f'_{x_k}(a)$ sau $D_k f(a)$.

Definiția 6.3. Funcția f se numește derivabilă parțial în raport cu x_k pe deschisul A dacă în fiecare punct $a \in A$ există $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

Așadar,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) &= \frac{df}{de_k}(a) = \lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_k + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t} \end{aligned}$$

Definiția 6.4. Funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a): A \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(a), 1 \leq k \leq n$ se numesc **derivatele parțiale ale lui f pe A**

Definiția 6.5. Funcția f se numește **de clasă C^1 pe A** și se notează $f \in C^1$ dacă f este derivabilă parțial pe A și, în plus, funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sunt continue pe A .

Definiția 6.6. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ deschis și $F: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ o aplicație cu valori vectoriale. Fie f_1, \dots, f_m componentele lui F ; așadar, $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m$ sunt funcții astfel încât $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \forall x(x_1, \dots, x_n) \in A$. Se spune că aplicația F este **derivabilă parțial într-un punct $a \in A$** dacă fiecare din funcțiile f_1, \dots, f_m sunt derivabile parțial în a , în raport cu toate variabilele x_1, \dots, x_n . În acest caz se poate considera o matrice cu m linii și n coloane cu coeficienți reali:

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

numită **matricea jacobiană a lui F în punctul a** . Dacă $m = n$, atunci matricea $J_F(a)$ este pătratică și determinantul ei se numește **jacobianul** sau **determinantul funcțional al funcțiilor f_1, \dots, f_m în punctul a** și se notează $\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) = \det J_F(a)$.

Definiția 6.7. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ deschis, $F: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ și $a \in A$. Se spune că aplicația F este **diferențiabilă în punctul a** dacă există o aplicație \mathbb{R} -liniară $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, depinzând de a , astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{F(x) - F(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0$$

Notând cu $\varphi(x), \varphi: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^m$, limita anterioară revine la $F(x) = F(a) + T(x - a) + \|x - a\|\varphi(x), \forall x \in A$ cu $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$.

Funcția F se numește **diferențiabilă pe A** dacă este diferențiabilă în orice punct din A .

Lema 6.1. Dacă F este diferențiabilă în punctul a , atunci aplicația \mathbb{R} -liniară T este unic determinată.

Definiția 6.8. Dacă aplicația $F: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, unde $A \subset \mathbb{R}^n$ este un deschis, este diferențiabilă într-un punct $a \in A$, atunci aplicația \mathbb{R} -liniară T se numește **diferențiala lui F în punctul a** și se notează $dF(a)$.

Teorema 6.1. Fie $F: A \rightarrow \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R}^n$ deschis, $a \in A$ și fie f_1, \dots, f_m componentele lui F . Atunci F este diferențiabilă în punctul a dacă și numai dacă f_1, \dots, f_m sunt diferențiabile în a și, în acest caz, diferențiala $dF(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ are drept componente diferențialele $df_1(a), \dots, df_m(a)$ ca aplicații \mathbb{R} -liniare de la \mathbb{R}^n la \mathbb{R} .

Teorema 6.2. Fie o funcție $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ deschis.

(a) Dacă f este diferențiabilă într-un punct $a \in A$, atunci f este continuă în a ; în plus, există $\frac{df}{ds}(a)$ pentru orice versor $s \in \mathbb{R}^n$ și, în particular, există

derivatele parțiale de ordinul I $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, anume

$$\frac{df}{ds}(a) = df(a)(s) \text{ și } \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = df(a)(e_k), 1 \leq k \leq n.$$

(b) Dacă $f \in C^1(A)$, atunci f este diferențiabilă pe deschisul A ; în particular, orice funcție elementară este diferențiabilă pe orice deschis din domeniul ei de definiție.

Teorema 6.3. (formula de calcul al diferențialei) Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ deschis o funcție diferențiabilă într-un punct $a \in A$. Atunci are loc formula

$$df(a) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \cdot pr_j \text{ (egalitate de aplicații } \mathbb{R}\text{-liniare de la } \mathbb{R}^n \text{ la } \mathbb{R}\text{)}$$

Teorema 6.4. Fie $F: A \rightarrow B, G: B \rightarrow \mathbb{R}^l$ două aplicații, unde $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ sunt mulțimi deschise. Dacă F este diferențiabilă într-un punct $a \in A$ și G este diferențiabilă în punctul $b = F(a)$, atunci funcția compusă $G \circ F$ este diferențiabilă în a și, în plus,

$$d(G \circ F)(a) = dG(b) \circ dF(a)$$

In particular, compunerea a două aplicații diferențiabile este de asemenea diferențiabilă.

Teorema 6.5. In condițiile teoremei 6.4, are loc relația

$$J_{G \circ F}(a) = J_G(b) \cdot J_F(a)$$

Caz particular : Fie un con deschis $C \subset \mathbb{R}^n$ (adică o submulțime deschisă C astfel încât din ipoteza că $x \in C, t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ să rezulte $tx \in C$; de exemplu, $C = \mathbb{R}^n$ este un con deschis; la fel sunt și mulțimile $\{xy > 0\}$ în \mathbb{R}^2 și $\{x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$ în \mathbb{R}^3). Fie $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe C , care în plus este **omogenă de grad r** (adică $f(tx) = t^r f(x), \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0, r$ fiind un număr real fixat). In acest caz rezultă relația

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^r \cdot f(x_1, \dots, x_n), \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in C$$

Derivând această relație în raport cu t , rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(tx) \cdot x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(tx) \cdot x_n = r t^{r-1} \cdot f(x)$$

și făcând $t = 1$ se obține o relație remarcabilă în punctul curent din C , anume

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = r \cdot f(x_1, \dots, x_n)$$

numită **formula lui Euler pentru funcții omogene**.

Teorema 6.6. Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ deschis o funcție diferentiabilă într-un punct $a \in A$. Pentru orice versor $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ avem

$$\frac{df}{ds}(a) = s_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + s_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

Teorema 6.7. Fie $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ deschis, două funcții diferentiabile într-un punct $a \in A$. Atunci $f + g, \lambda f (\lambda \in \mathbb{R}), fg, \frac{f}{g} (g(x) \neq 0, \forall x \in A)$ sunt diferentiabile în a și în plus:

$$(a) \frac{\partial}{\partial x_k}(f + g)(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_k}(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\lambda f)(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(fg)(a) = f(a) \frac{\partial g}{\partial x_k}(a) + g(a) \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{f}{g} \right) (a) = \frac{g(a) \frac{\partial f}{\partial x_k} - f(a) \frac{\partial g}{\partial x_k}}{g(a)^2}$$

$$(b) \frac{d}{ds}(f + g)(a) = \frac{df}{ds}(a) + \frac{dg}{ds}(a)$$

$$\frac{d}{ds}(\lambda f)(a) = \lambda \frac{df}{ds}(a)$$

$$\frac{d}{ds}(fg)(a) = f(a) \frac{dg}{ds}(a) + g(a) \frac{df}{ds}(a)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{f}{g} \right) (a) = \frac{g(a) \frac{df}{ds}(a) - f(a) \frac{dg}{ds}(a)}{g(a)^2}$$

$$(c) d(f + g)(a) = df(a) + dg(a)$$

$$d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$$

$$d(fg)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$$

$$d \left(\frac{f}{g} \right) (a) = \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{g(a)^2}$$

Definiția 6.9. Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ deschis. Funcția f se numește de clasă $C^0(A)$ dacă este continuă pe A ; de clasă $C^1(A)$ (sau **continuu diferentiabilă pe A**) dacă este continuă pe A și derivabilă parțial în fiecare punct din A , iar funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x_k}: A \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n$ sunt continue pe A ; de clasă $C^2(A)$ dacă $f \in C^1(A)$ și toate derivatele $\frac{\partial f}{\partial x_k}, 1 \leq k \leq n$ sunt funcții de clasă $C^1(A)$, adică pentru orice $1 \leq j, k \leq n$, există $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$ în fiecare punct din A și acestea sunt funcții continue pe A .

Teorema 6.8. (H.A.Schwarz) Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ deschis, f de clasă $C^2(A)$. Atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$, în orice punct a și pentru orice j, k ($1 \leq j, k \leq n$).

6.2 Probleme rezolvate

1. Pornind de la definiție, să se calculeze:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4}, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, dacă $f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1)$, dacă $f(x, y) = xy \ln x$, $x \neq 0$

Soluție. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4}, 0) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x, 0) - f(\frac{\pi}{4}, 0)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{2}} - 1}{y - \frac{\pi}{4}} = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin y - \frac{\sqrt{2}}{2})(\sin y + \frac{\sqrt{2}}{2})}{(y - \frac{\pi}{4})(\sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{2}} + 1)} =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin y - \sin \frac{\pi}{4}}{y - \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (1, 1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)}{x - 1}$,

unde $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 1) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(x, y) - f(x, 1)}{y - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{xy \ln x - x \ln x}{y - 1} = x \ln x$

și $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(1, y) - f(1, 1)}{y - 1} = 0$, deci

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x - 1} = -1$

Analog $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)}{y - 1} = 1$ □

2. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$ în punctul $M(2, 2)$, după direcția l , care face cu direcția pozitivă a axei Ox un unghi de 30° .

Soluție. Cosinusurile directe ale direcției l sunt $\cos \alpha = \cos 30^\circ =$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\cos \beta = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Cum $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$ și $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + x$ avem $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 2) = 6$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 2) =$
 $= -2$. Atunci $\frac{df}{dt} = 6 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3}$ □

3. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = \frac{1}{r}$, $r \neq 0$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ într-un punct $M(x, y, z)$, după direcția gradientului său.

Soluție. Putem scrie $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Avem $\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r^3} \vec{r}$ și $|\text{grad} f| = \frac{1}{r^2}$, deci

$$\cos \alpha = -\frac{x}{r}, \cos \beta = -\frac{y}{r}, \cos \gamma = -\frac{z}{r}. \text{ Prin urmare, } \frac{df}{dt} = -\frac{x}{r} \cdot \left(-\frac{x}{r^3}\right) - \frac{y}{r} \cdot \left(-\frac{y}{r^3}\right) - \frac{z}{r} \cdot \left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{1}{r^2} \quad \square$$

4. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul I pentru următoarele funcții:

a) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$; b) $f(x, y, z) = \ln x^y y^z z^x, x > 0, y > 0, z > 0$; c) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$

Soluție. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + (x^2 + y^2) \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = 2x \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + y$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + (x^2 + y^2) \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = 2y \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - x$$

b) Scriem $f(x, y, z) = y \ln x + z \ln y + x \ln z$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} + \ln z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \ln x + \frac{z}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \ln y + \frac{x}{z}$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x^2 yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} = yz \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = yz \cdot \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$

Funcția f fiind simetrică în raport cu x, y, z rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial y} = zx \cdot \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy \cdot \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \square$$

5. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul II pentru funcțiile următoare:

a) $f(x, y) = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (x, y) \neq (0, 0)$

b) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$

c) $f(x, y, z) = y \sin(x+z)$

Soluție. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + y^2}}} = -\frac{|y|}{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{-\frac{xy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + y^2}}} = \frac{x \operatorname{sgny}}{x^2 + y^2}, \text{ unde } \operatorname{sgny} = \frac{|y|}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2x|y|}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2xy \operatorname{sgny}}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2x|y|}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2 + y^2) \operatorname{sgny} - 2x^2 \operatorname{sgny}}{x^2 + y^2} = -\frac{(x^2 - y^2) \operatorname{sgny}}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{(x^2+y^2)\operatorname{sgny} - 2y|y|}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgny}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$b) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-4y(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{-4y}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3}$$

$$c) \frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(x+z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x+z), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y \cos(x+z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y \sin(x+z), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -y \sin(x+z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos(x+z), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -y \sin(x+z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \cos(x+z) \quad \square$$

6. Se numește **potențial** al sferei $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, funcția

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3}(x^2 + y^2 + z^2), & x^2 + y^2 + z^2 < a^2 \\ \frac{4\pi a}{3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & x^2 + y^2 + z^2 \geq a^2 \end{cases}$$

Să se verifice că $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ ia valoarea -4π și 0 după cum punctul $M(x, y, z)$ se află în interiorul sau exteriorul sferei.

Soluție. Pentru $x^2 + y^2 + z^2 < a^2 \implies$

$$\implies M \in \text{interiorului sferei} \implies f(x, y, z) = 2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{4\pi}{3}x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{4\pi}{3}y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{4\pi}{3}z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{3} \implies \Delta f = -4\pi$$

$$\text{Pentru } x^2 + y^2 + z^2 \geq a^2 \implies M \in \text{exteriorului sferei} \implies f(x, y, z) = \frac{4\pi a}{3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{4\pi a x}{3\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{4\pi a y}{3\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{4\pi a z}{3\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{4\pi a}{3} \cdot \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} - \frac{2x^2 3(x^2 + y^2 + z^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{4\pi a}{3} \cdot \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4\pi a}{3} \cdot \frac{2y^2 - z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{4\pi a}{3} \cdot \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \implies \Delta f = 0 \quad \square$$

7. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ pentru funcțiile:

$$a) f(u, v) = \ln(u^2 + v), \text{ unde } u = e^{x+y^2} \text{ și } v = x^2 + y$$

$$b) f(u, v) = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}, \text{ unde } u = x \sin y \text{ și } v = x \cos y$$

Soluție. a) După regula de derivare a funcțiilor compuse avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v} \cdot e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} \cdot 2x = \frac{1}{u^2+v} \cdot (u^2 + x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v} \cdot 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} \cdot 1 = \frac{1}{u^2+v} \cdot (4u^2y + 1)$$

$$b) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{v}{u^2+v^2} \cdot \sin y - \frac{u}{u^2+v^2} \cdot \cos y = \frac{1}{x} (\cos y \cdot \sin y - \sin y \cdot \cos y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{v}{u^2+v^2} \cdot x \cdot \cos y + \frac{u}{u^2+v^2} \cdot x \cdot \sin y = \frac{1}{x} \cdot \cos y \cdot x \cdot \cos y + \frac{1}{x} \cdot \sin y \cdot x \cdot \sin y = \cos^2 y + \sin^2 y = 1 \quad \square$$

8. Să se arate că funcția $z(x, y)$ definită de relația $\Phi(x - az, y - bz) = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ verifică ecuația $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

Soluție. Notăm $\alpha = x - az, \beta = y - bz$.

$$\text{Avem } \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} (1 - a \frac{\partial z}{\partial x}) + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} (-b \frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} (-a \frac{\partial z}{\partial y}) + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} (1 - b \frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

$$\text{Rezultă } \frac{\partial z}{\partial x} (a \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} (a \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$$

Inlocuim $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$ în ecuația dată și obținem

$$a \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}}{a \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}} + b \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}}{a \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}} = 1 \text{ adevărat în ipoteza } a \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \neq 0 \quad \square$$

9. Să se arate că funcțiile următoare verifică ecuațiile indicate:

$$a) f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ verifică ecuația } x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$b) f(x, y, z) = \varphi(xy, x^2 + y^2 - z^2) \text{ verifică ecuația } xz \frac{\partial f}{\partial x} - yz \frac{\partial f}{\partial y} + (x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Soluție. a) Considerăm funcția $u(x, y) = \frac{y}{x}$ și obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(u) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(u) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\text{Deci } x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{x} \cdot \varphi' + \frac{y}{x} \cdot \varphi' = 0$$

b) Introducem funcțiile $u(x, y, z) = xy$ și $v(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

Atunci avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -2z \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\text{Astfel } xz \frac{\partial f}{\partial x} - yz \frac{\partial f}{\partial y} + (x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial z} = xz(y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}) - yz(x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}) - 2z(x^2 - y^2) \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0 \quad \square$$

10. Să se arate că dacă $f(x, y, z) = \frac{xy}{z} \ln x + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, $x > 0, z \neq 0$ și $\varphi(u, v)$ este o funcție de două variabile ce admite derivate parțiale de ordinul I, atunci avem $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{xy}{z} - f(x, y, z) = 0$

Soluție. Notăm $u = \frac{y}{x}, v = \frac{z}{x}$ și calculăm derivatele de ordinul I

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z}(\ln x + 1) + \varphi(u, v) - \frac{y}{x} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{z}{x} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{z} \ln x + \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2} \ln x + \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\begin{aligned} \text{Atunci } x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{xy}{z} - f(x, y, z) &= \frac{xy}{z}(\ln x + 1) + x\varphi(u, v) - \\ &- y \frac{\partial \varphi}{\partial u} - z \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{xy}{z} \ln x + y \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{xy}{z} \ln x + z \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{xy}{z} - \frac{xy}{z} \ln x - x\varphi(u, v) = \\ &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

11. Să se arate că dacă φ și ψ sunt funcții de două ori derivabile, atunci funcția $f(x, y) = y^n \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{1-n} \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ verifică relația

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f$$

Soluție. Notăm $u = \frac{x}{y}$ și calculăm derivatele de ordinul I și II:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^{n-1} \frac{d\varphi}{du} + y^{-n} \frac{d\psi}{du}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -xy^{n-2} \frac{d\varphi}{du} + ny^{n-1} \varphi(u) - xy^{n-1} \frac{d\psi}{du} + (1-n)y^{-n} \psi(u)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^{n-2} \frac{d^2 \varphi}{du^2} + y^{n-1} \frac{d^2 \psi}{du^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -xy^{n-3} \frac{d^2 \varphi}{du^2} + (n-1)y^{n-2} \frac{d\varphi}{du} - xy^{n-2} \frac{d^2 \psi}{du^2} - ny^{n-1} \frac{d\psi}{du}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2 y^{n-4} \frac{d^2 \varphi}{du^2} - (n-2)xy^{n-3} \frac{d\varphi}{du} - nxy^{n-3} \frac{d\varphi}{du} + n(n-1)y^{n-2} \varphi(u) + \\ &+ x^2 y^{n-3} \frac{d^2 \psi}{du^2} + (n+1)xy^{n-2} \frac{d\psi}{du} - (1-n)xy^{n-2} \frac{d\psi}{du} + n(n-1)y^{-n-1} \psi(u) \end{aligned}$$

Inlocuind avem:

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (x^2 y^{n-2} - 2x^2 y^{n-2} + x^2 y^{n-2}) \frac{d^2 \varphi}{du^2} + (x^2 y^{-n-1} - \\ &- 2x^2 y^{-n-1} + x^2 y^{-n-1}) \frac{d^2 \psi}{du^2} + [2(n-1)xy^{n-1} - 2nxy^{n-1} - (n-2)xy^{n-1}] \frac{d\varphi}{du} + \\ &+ [-2nxy^{-n} + (n+1)xy^{-n} + (n-1)xy^{-n}] \frac{d\psi}{du} + n(n-1)y^n \varphi(u) + n(n- \\ &- 1)y^{n-1} \psi(u) = n(n-1) \left[y^n \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{1-n} \psi\left(\frac{x}{y}\right) \right] \quad \square \end{aligned}$$

12. Fie funcția $g = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$ cu f de clasă $C^2, x \neq 0, y \neq 0$. Să se determine f dacă g nu depinde de x .

Soluție. Condiția ca g să nu depindă de x este $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$.

Notăm $\alpha = \frac{y}{x}$, deci $g = x \cdot f(\alpha)$.

Atunci $\frac{\partial g}{\partial x} = f(\alpha) + x \cdot f'(\alpha) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = f(\alpha) + x \cdot f'(\alpha) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = f(\alpha) - \alpha \cdot f'(\alpha)$

Relația $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ revine la $f(\alpha) - \alpha \cdot f'(\alpha) = 0$, deci $\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{1}{\alpha}$ și rezultă că $\ln |f(\alpha)| = \ln |\alpha| + \ln C$. Așadar $f(\alpha) = C \cdot \alpha$, unde C este o constantă arbitrară. \square

13. Să se calculeze diferențialele de ordinul I și II pentru funcțiile:

a) $f(x, y) = e^x \cos y$, b) $f(x, y, z) = xyz$

Soluție. a) $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = e^x \cos y dx - e^x \sin y dy$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^x \sin y$

$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = e^x \cos y dx^2 - 2e^x \sin y dx dy - e^x \cos y dy^2$

b) $df = yz dx + xz dy + xy dz$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = y$

$d^2 f = 2z dx dy + 2x dy dz + 2y dx dz$ \square

14. Să se arate că pentru $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ avem $d^2 f > 0, \forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Soluție. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$

Datorită simetriei funcției f rezultă $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{z^2 + x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{y^2 + x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2xy}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{-yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{-zx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$d^2 f = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} [(y^2 + z^2) dx^2 + (z^2 + x^2) dy^2 + (x^2 + y^2) dz^2 - 2xy dx dy - 2yz dy dz - 2zx dz dx] = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} [y^2 dx^2 - 2xy dx dy + x^2 dy^2 + z^2 dy^2 - 2yz dy dz + y^2 dz^2 + x^2 dz^2 - 2zx dz dx + z^2 dx^2] = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} [(y dx - x dy)^2 + (z dy - y dz)^2 + (x dz - z dx)^2] \implies d^2 f > 0, \forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ \square

15. Să se calculeze derivatele parțiale și diferențiala de ordinul n pentru funcția $f(x, y) = e^{ax+by}$.

Soluție. Putem scrie $f(x, y) = e^{ax}e^{by}$ astfel că $\frac{\partial^k f}{\partial x^k} = a^k e^{ax}e^{by}$ și $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = a^k b^{n-k} e^{ax}e^{by} = a^k b^{n-k} f$
 $d^n f = [a^n(dx)^n + C_n^1 a^{n-1} b(dx)^{n-1} dy + \dots + C_n^n b^n (dy)^n] f = e^{ax+by} (a dx + b dy)^n$ \square

16. Folosind diferențiala unei funcții de mai multe variabile, să se calculeze $\sqrt[3]{(1,04)^3 + (1,96)^3}$.

Soluție. Considerăm funcția $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$
 Avem $f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, deci
 $\sqrt[3]{x^3 + y^3} \simeq \sqrt[3]{x_0^3 + y_0^3} + \frac{x_0^3}{\sqrt[3]{(x_0^3 + y_0^3)^2}}(x - x_0) + \frac{y_0^3}{\sqrt[3]{(x_0^3 + y_0^3)^2}}(y - y_0)$
 Dacă luăm $x = 1,04, y = 1,97, x_0 = 1, y_0 = 2$ și facem calculele, găsim:
 $\sqrt[3]{(1,04)^3 + (1,96)^3} \simeq 1,94$ \square

17. Fie funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Să se demonstreze că f este continuă, are derivate parțiale de ordinul întâi și nu este diferențiabilă în origine.

Soluție. Avem $|f(x, y)| \leq |x|$, deci $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. Rezultă că f este continuă.

Evident că în orice punct $(x, y) \neq (0, 0)$ funcția are derivate parțiale de ordinul întâi. Studiem existența lor în origine cu definiția:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0. \text{ Analog } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Demonstrăm că f nu e diferențiabilă în origine. Dacă ar fi, atunci ar trebui ca

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ & = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0, \text{ dar} \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0, y=mx} \frac{mx^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{m}{1 + m^2} \neq 0 \end{aligned} \quad \square$$

18. Fie funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Să se arate că f este diferențiabilă în origine și nu este de clasă C^1 pe \mathbb{R}^2 .

Soluție. Calculăm derivatele parțiale de ordinul I:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Evident că derivatele parțiale de ordinul I sunt continue în orice punct $(x, y) \neq (0, 0)$, dar în origine nu sunt continue, deoarece $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ nu există (se folosesc coordonatele polare). Așadar, f nu e de clasă C^1 pe \mathbb{R}^2 .

Studiem diferențiabilitatea în origine:

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ & = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0 \end{aligned}$$

Rezultă că f e diferențiabilă în origine. □

19. Fie funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Să se arate că f este de clasă C^1 pe \mathbb{R}^2 ;

(b) Să se arate că f are derivate parțiale mixte de ordinul II în orice punct și să se calculeze $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ în origine; este funcția f de clasă C^2 pe \mathbb{R}^2 ?

Soluție. (a) Derivatele parțiale de ordinul I sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y \sin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \cos \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x \sin \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^2x^3}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Rezultă că $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe \mathbb{R}^2 , deci f e de clasă C^1 pe \mathbb{R}^2 .

(b) Evident funcția are derivate parțiale de ordinul II în orice punct $(x, y) \neq (0, 0)$. Studiem existența derivatelor mixte în origine cu definiția:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 1}{x} = \sin 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \sin(-1)}{y} = -\sin 1$$

Funcția nu este de clasă C^2 pe \mathbb{R}^2 ; dacă ar fi fost, atunci, cf. Teoremei 6.8, cele două derivate mixte de ordinul II ar fi trebuit să fie egale. \square

20. Fie

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Să se arate că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nu este continuă în origine, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ și să se calculeze diferențiala de ordinul II în origine.

$$\begin{aligned} \text{Soluție. } \frac{\partial f}{\partial y} &= x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{-2y(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \\ &\cdot \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^4-y^4) - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{(5x^4 - y^4 - 12x^2y^2)(x^2+y^2)^2 - (x^5 - xy^4 - 4x^3y^2)2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} = \\ &= \frac{x^6 - y^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}, \text{ pentru } (x, y) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

Cu definiția, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0}$, unde

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0 \text{ și}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{y} = x,$$

$$\text{deci } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{0x} = 1$$

Așadar,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6 - y^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Studiem continuitatea funcției $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ în $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0, y=mx} \frac{x^6 - y^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4}{(x^2 + y^2)^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0, y=mx} \frac{x^6 - m^6x^6 + 9x^4m^2x^2 - 9x^2m^4x^4}{(x^2 + m^2x^2)^3} = \end{aligned}$$

$= \frac{1-m^6+9m^2-9m^4}{(1+m^2)^3} \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, deci funcția $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ nu este continuă în punctul $(0,0)$

Calculăm $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$, unde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \text{ și}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{x} = -y,$$

$$\text{deci } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1$$

Așadar, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$

Avem $d^2 f(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)dy^2$, unde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x-0} \text{ și}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \text{ deci } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$$

Analog $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$

Atunci $d^2 f(0,0) = dxdy - dydx = 0$ □

21. Să se calculeze jacobienii transformărilor în coordonate polare, cilindrice și sferice.

Soluție. Legătura între coordonate polare și carteziene $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ definește, ca transformare punctuală, aplicația

$F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, unde

$$D = \{(\rho, \theta) / \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)\}$$

$$\text{Rezultă } \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \det J_F = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho$$

Pentru coordonate sferice $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$, $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, jacobianul este

$$\begin{aligned} \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \rho^2 \sin \theta \end{aligned}$$

Pentru coordonatele cilindrice $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$ avem $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \rho$ □

22. Să se determine matricea jacobiană a aplicației

$F: \mathbb{R}^3 \setminus \{z \leq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z) = (xy^2, y \ln z)$ în punctul curent.

Soluție. Componentele lui F sunt $f_1(x, y, z) = xy^2$ și $f_2(x, y, z) = y \ln z$ și $J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & 0 \\ 0 & \ln z & \frac{y}{z} \end{pmatrix}$ \square

23. Să se determine funcțiile $z = z(x, y)$ care verifică ecuația cu derivate parțiale $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, folosind schimbarea de variabile $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$, unde $u = x, v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$

Soluție. O metodă constă în a calcula mai întâi x, y, z în funcție de u, v, w . Se obține $x = u, y = \frac{u}{uw+1}, z = \frac{u}{uw+1}$. Se calculează acum derivatele parțiale ale lui u, v în raport cu x, y :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{u^2}, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = -\left(\frac{uw+1}{u}\right)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{uw+1} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u}{uw+1} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{u}{uw+1} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1-u^2 \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}}{(uw+1)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{uw+1} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u}{uw+1} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{u}{uw+1} \right) \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{uw+1}{u} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial v}$$

Inlocuind în ecuația inițială obținem $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$. Rezultă că w este o funcție constantă în raport cu variabila u , deci $w = f(v)$, unde f este o funcție arbitrară de clasă C^1 pe \mathbb{R} . Rezultă $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$, deci $z(x, y) = \frac{x}{1+xf\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)}$

O altă metodă constă în a calcula $\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x^2}, \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial y}$, deci $\frac{\partial z}{\partial x} = -z^2 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{z^2}{x^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -z^2 \frac{\partial w}{\partial y}$. Se calculează apoi $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$, etc. \square

6.3 Probleme propuse

\mathcal{Q} . Pornind de la definiție să se calculeze:

a) $\frac{\partial f}{\partial x} \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\frac{\partial f}{\partial y} (1, 0)$, dacă $f(x, y) = e^{\sin xy}$;

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (1, 1)$, dacă $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

c) $\frac{\partial f}{\partial x} (1, 1)$ și $\frac{\partial f}{\partial y} (1, 1)$, dacă $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$;

d) $\frac{\partial f}{\partial x} (-2, 2), \frac{\partial f}{\partial y} (-2, 2)$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (-2, 2)$, dacă $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$;

e) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, dacă $f(x, y) = x \sin(x + y)$

f) $\frac{\partial f}{\partial x} (1, 1)$ și $\frac{\partial f}{\partial y} (3, 2)$, dacă $f(x, y) = 2x^2 + xy$

R: a) $\frac{\partial f}{\partial x} \left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 0$ și $\frac{\partial f}{\partial y} (1, 0) = 0$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (1, 1) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$c) \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{3} \text{ și } \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{2}{3}$$

$$d) \frac{\partial f}{\partial x}(-2, 2) = -\frac{2}{3}, \frac{\partial f}{\partial y}(-2, 2) = \frac{1}{3} \text{ și } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2, 2) = -\frac{1}{9}$$

$$e) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\frac{\pi}{4}, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \frac{\pi}{4})$$

$$f) \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 5 \text{ și } \frac{\partial f}{\partial y}(3, 2) = 3$$

- ② Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, în punctul $M(2, 1, 3)$, după direcția \overrightarrow{MN} , unde $N(5, 5, 15)$.

R: Cosinusurile directe ale direcției \overrightarrow{MN} sunt $\cos \alpha = \frac{3}{13}$, $\cos \beta = \frac{4}{13}$, $\cos \gamma = \frac{12}{13}$. Obținem $\frac{df}{dl} = \frac{68}{13}$

- ③ Fie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$ și fie $h = (1, 2, 1)$. Să se calculeze derivata după direcția h a funcției f în punctul $(1, 1, 2)$.

R: $\frac{df}{dh}(1, 1, 2) = (-3, 1, 1)$

- ④ Să se calculeze derivata funcției $f(x, y) = 5x^2 - 3x - y - 1$, în punctul $M(2, 1)$, după direcția \overrightarrow{MN} , unde $N(5, 5)$.

R: Avem $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{4}{5}$, deci $\frac{df}{dl} = \frac{47}{5}$

- ⑤ Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = 2x^3 - 3y^2 + 6xyz$, în punctul $M(1, 1, 0)$, după direcțiile axelor de coordonate, apoi după direcția \overrightarrow{MN} , $N(4, -2, 3)$.

R: După direcția \overrightarrow{MN} :

$$\cos \alpha = -\cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ deci } \frac{df}{dl} = 6\sqrt{3}$$

- ⑥ Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, în punctul $M(1, 1, 1)$, după direcția \overrightarrow{MN} , unde $N(2, 3, -2)$.

R: $\frac{df}{dl} = -\frac{9\sqrt{14}}{14}$

- ⑦ Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, în punctul $M(1, 1, 1)$, după direcția $l(1, 1, 1)$

R: $\frac{df}{dl} = 2\sqrt{2}$

- ⑧ Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi pentru următoarele funcții:

Ⓐ) $f(x, y) = e^{x-y^2}$; b) $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2} \sin^2 z$;

c) $f(x, y) = xy \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$, $xy \neq 1$; d) $f(x, y, z) = x^{y^z}$, $x, y > 0$

R: a) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{x-y^2}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin^2 z e^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin^2 z e^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2 \sin z \cos z e^{x^2+y^2}$

$$c) \frac{\partial f}{\partial x} = y \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + xy \frac{1+y^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + xy \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$$

$$d) \frac{\partial f}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}, \frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^z} z y^{z-1} \ln x, \frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z} y^z \ln x \ln y$$

9. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul doi pentru următoarele funcții:

$$a) f(x, y) = \ln(x+y^2); \quad b) f(x, y) = x^3 + xy; \quad c) f(x, y, z) = \ln(x+y+z)$$

$$\mathbf{R:} \quad a) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$$

$$b) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$$c) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\frac{1}{(x+y+z)^2}$$

10. Fie $\Delta^* f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$ și $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ (numit **operatorul lui Laplace** sau **laplacianul funcției** f). Să se calculeze $\Delta^* f$ și Δf pentru funcțiile:

$$a) f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz; \quad b) g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\mathbf{R:} \quad a) \Delta^* f = 9[(x^2 - yz)^2 + (y^2 - xz)^2 + (z^2 - xy)^2] \quad \text{și} \quad \Delta f = 6(x+y+z)$$

$$b) \Delta^* g = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad \text{și} \quad \Delta g = 0$$

11. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ pentru $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$, unde:

$$a) f = \varphi(u, v), u(x, y) = x + y, v(x, y) = x^2 + y^2$$

$$b) f = \varphi(u, v), u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = e^{xy}$$

$$\mathbf{R:} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2x \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2y \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$b) \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \frac{\partial \varphi}{\partial u} + yv \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \frac{\partial \varphi}{\partial u} + xv \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

12. Fie $f = f(u, v)$, unde $u = xy, v = \frac{x}{y}$. Să se calculeze $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

$$\mathbf{R:} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{u}{v} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{v}{u} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = u \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{v^2}{u} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{v}{u} \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = uv \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{v^2}{u} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{2v^2}{u} \frac{\partial f}{\partial v}$$

13. Să se calculeze expresia $E = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, dacă $f(u, v) = \ln(u^2 + v^2)$, unde $u(x, y) = xy$ și $v(x, y) = x^2 - y^2$.

$$\mathbf{R:} \quad E = [-6(x^6 - 2x^4y^2 - 2x^2y^4 + y^6) + 4xy(x^4 + y^4 - 4x^2y^2)] \cdot (x^4 + y^4 - x^2y^2)^{-2}$$

14. Să se calculeze $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, dacă $f = f(u, v)$, unde $u(x, y) = x^2 + y^2$ și $v(x, y) = xy$

$$\mathbf{R:} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xy \left(4 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) + 2(x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial u}$$

15. Să se arate că funcția $f(x, y) = \varphi(x - ay) + \psi(x + ay)$, unde funcțiile φ și ψ admit derivate de ordinul doi, satisface ecuația coardei vibrante $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

16. Să se arate că funcțiile următoare verifică ecuațiile indicate:

a) $f(x, y) = y\varphi(x^2 - y^2)$, $\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^2} f$

b) $f(x, y) = e^y \varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$, $(x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y} = xyf$

c) $f(x, y) = \varphi(xy) + \sqrt{xy} \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

d) $f(x, y) = xy\varphi(x^2 - y^2)$, $xy^2 \frac{\partial f}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + y^2)f$

17. Să se arate că funcția $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$, unde φ, ψ sunt funcții de două ori derivabile, verifică ecuația:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - x\psi\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

18. Să se calculeze diferențialele de ordinul I și II pentru funcția $f(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{R:} \quad df = -\sin(x + 2y + 3z)dx - 2\sin(x + 2y + 3z)dy - 3\sin(x + 2y + 3z)dz$$

$$d^2 f = -\cos(x + 2y + 3z)(dx + 2dy + 3dz)^2$$

19. Să se calculeze diferențialele de ordinul I și II pentru funcțiile compuse:

a) $F(t) = f(t^2, \ln t)$, $t > 0$;

b) $G(x, y) = g\left(x^2, \frac{x}{y}\right)$, $y \neq 0$;

c) $H(x, y, z) = h(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$

d) $u(x, y, z) = l(x^y, y^z, z^x)$, $x, y, z > 0$

$$\mathbf{R:} \quad \text{a) Notăm } u = t^2, v = \ln t \text{ și avem } dF = \left(2t \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{t} \frac{\partial f}{\partial v} \right) dt$$

$$d^2 F = \left(4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{t^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{t^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) dt^2$$

b) Notăm $u = x^2, v = \frac{x}{y}$ și obținem:

$$dG = \left(2x \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial g}{\partial v} \right) dx - \frac{x}{y^2} \frac{\partial g}{\partial v} dy$$

$$d^2G = \left(4x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 4\frac{x}{y} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + 2\frac{\partial g}{\partial u}\right) dx^2 + 2\left(2\frac{x^2}{y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{x}{y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial g}{\partial v}\right) dx dy + \left(\frac{x^2}{y^4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3} \frac{\partial g}{\partial v}\right) dy^2$$

c) Notăm $u = x + y + z, v = x^2 + y^2 + z^2$ și avem:

$$dH = \frac{\partial h}{\partial u}(dx + dy + dz) + 2\frac{\partial h}{\partial v}(xdx + ydy + zdz)$$

$$d^2H = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(dx + dy + dz)^2 + 4\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}(xdx + ydy + zdz)^2 + 4\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}[xdx^2 + ydy^2 + zdz^2 + (x + y)dx dy + (y + z)dy dz + (z + x)dz dx] + 2\frac{\partial h}{\partial v}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

d) Notăm $\alpha = x^y, \beta = y^z, \gamma = z^x$ și avem

$$du = \frac{\partial l}{\partial \alpha}(yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy) + \frac{\partial l}{\partial \beta}(zy^{z-1}dy + y^z \ln y dz) + \frac{\partial l}{\partial \gamma}(z^x \ln z dx + xz^{x-1}dz)$$

20. Folosind diferențiala unei funcții de mai multe variabile, să se calculeze $(1, 03) \cdot (2, 02)^2 \cdot (3, 05)^3$.

R: Se consideră funcția $f(x, y, z) = xy^2z^3, x = 1, 03, y = 2, 02, z = 3, 05, x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 3$. Atunci $(1, 03) \cdot (2, 02)^2 \cdot (3, 05)^3 \simeq 118, 8$

21. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2 - 1}, & \text{dacă } x^2 + y^2 \neq 1 \\ 0, & \text{dacă } x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

R: f este diferențiabilă în puncte de forma $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, deci pe \mathbb{R}^2 , cf. Teoremei 6.2.

22. Să se determine matricea jacobiană a aplicației $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x + y^2, xe^y)$.

$$\mathbf{R: } J_F = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ e^y & xe^y \end{pmatrix}$$

Capitolul 7

Extremele locale ale funcțiilor de mai multe variabile. Funcții implicite. Extreme cu legături

7.1 Noțiuni teoretice

Definiția 7.1. Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$. Un punct $a \in A$ se numește **punct de extrem local** al lui f dacă există o bilă $B(a, r) \subset A$ unde diferența $f(x) - f(a)$ are semn constant; mai precis, punctul $a = (a_1, \dots, a_n)$ se numește **punct de minim** (respectiv **maxim**) local al lui f dacă pentru orice punct $x = (x_1, \dots, x_n)$ din acea bilă avem $f(x) \geq f(a)$ (respectiv $f(x) \leq f(a)$).

Definiția 7.2. Un punct $a \in A$ se numește **punct critic** (sau **staționar**) pentru funcția f dacă f este funcție diferențiabilă în punctul a și, în plus, $df(a) = 0$.

Teorema 7.1. (teorema lui Fermat) Dacă funcția f este diferențiabilă într-un punct $a \in A$, care este punct de extrem local al lui f , atunci acest punct este critic pentru f .

Observația 7.1. Reciproca teoremei 7.1. este falsă. De exemplu, luăm $A = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = xy$ și $a = (0, 0)$. Evident $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$, deci $df(a) = 0$, adică a este punct critic pentru f . Dar diferența $f(x, y) - f(0, 0) = xy$ nu are semn constant în nici o bilă centrată în origine, adică $(0, 0)$ nu e punct de extrem local pentru f .

Corolarul 7.1. Dacă f este o funcție de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, atunci extremele locale ale lui f în A se află printre soluțiile situate

în A , ale sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

În continuare, vom da condiții suficiente de extrem (Teorema 7.1 și Corolarul 7.1 dau numai condiții necesare de extrem!). În prealabil este necesar analogul multidimensional al formulei lui Taylor.

Dacă $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă $C^p(A)$, unde $A \subset \mathbb{R}^n$ este o mulțime deschisă și dacă fixăm un punct $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$, se notează $T_a(x) = (x_1 - a_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + (x_n - a_n) \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$, $\forall x \in A$. Fie $[T_a(x)]^{(k)}$, $2 \leq k \leq p$, **puterea simbolică a polinomului $T_a(x)$** , obținută aplicând formula tip binomul lui Newton, cu convenția de a înlocui $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^k$ cu $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(a)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ cu $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^{k-1} \partial x_j}(a)$ etc.

Teorema 7.2. (formula lui Taylor) Fie f, A, a ca mai sus. Alegem $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset A$. Atunci pentru orice $x \in B(a, r)$ există un punct $\xi \in [a, x]$ astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} T_a(x) + \frac{1}{2!} [T_a(x)]^{(2)} + \dots + \frac{1}{(p-1)!} [T_a(x)]^{(p-1)} + \frac{1}{p!} [T_a^*(x)]^{(p)},$$

unde în puterea simbolică $[T_a^*(x)]^{(p)}$, derivatele de ordin p sunt calculate în punctul ξ .

Observația 7.2. Formula din Teorema 7.2 este numită uneori **dezvoltare până la ordinul $p-1$ a lui f în jurul punctului a** (sau după puterile lui $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$).

Observația 7.3. Fie f o funcție de clasă C^∞ într-o vecinătate a unui punct $a \in \mathbb{R}^n$; funcției f i se poate asocia "seria Taylor" în punctul a $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} [T_a(x)]^{(p)} = f(a) + \frac{1}{1!} T_a(x) + \frac{1}{2!} [T_a(x)]^{(2)} + \dots$. Dacă această serie este punctual convergentă și are suma $f(x)$ în vecinătatea lui a , se spune că f este **analitică reală în punctul a** . Funcțiile analitice au proprietăți remarcabile și sunt utilizate în electrotehnică, în mecanica cuantică etc.

Corolarul 7.2. Dacă $f \in C^p(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ deschis, atunci în vecinătatea oricărui punct $a \in A$ are loc formula

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} T_a(x) + \frac{1}{2!} [T_a(x)]^{(2)} + \dots + \frac{1}{(p-1)!} [T_a(x)]^{(p-1)} + o(\|x-a\|^{p-1})$$

Corolarul 7.3. Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ un deschis și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă $C^2(A)$, atunci pentru orice punct (x, y) din vecinătatea unui punct fixat $a = (x_0, y_0) \in A$, are loc formula

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left[(x - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + (y - y_0) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[(x - x_0)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{\xi} + 2(x - x_0)(y - y_0) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{\xi} + (y - y_0)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{\xi} \right],$$

unde ξ este un punct situat pe segmentul ce unește a cu (x, y) , adică există $0 < \theta < 1$ astfel încât

$$\xi = ((1 - \theta)x_0 + \theta x, (1 - \theta)y_0 + \theta y) = (x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))$$

Teorema 7.3. Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^2$. Fie a un punct critic al lui f (adică $df(a) = 0$). Dacă forma pătratică $d^2f(a)$ este pozitiv definită (respectiv negativ definită), atunci a este punct de minim (respectiv maxim) local pentru f .

Metode de determinare a extremelor unei funcții de mai multe variabile

I) 1) Se determină punctele critice din sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Fie $a = (a_1, \dots, a_n)$ un astfel de punct critic.

2) Se scrie matricea hessiană $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$

3) Se determină valorile proprii ale matricei H .

Dacă toate valorile proprii sunt strict pozitive, atunci a este punct de minim local.

Dacă toate valorile proprii sunt strict negative, atunci a este punct de maxim local.

Dacă unele valori proprii sunt strict pozitive și altele strict negative, atunci a nu este punct de extrem (se numește **punct șa**).

Dacă 0 se află printre valorile proprii, atunci studiem separat semnul diferenței $f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)$ cu ajutorul dezvoltării Taylor.

II) Cazul $n = 2$:

1) Se determină punctele critice din sistemul $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Fie $a = (a_1, a_2)$ un astfel de punct critic.

2) Calculăm $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2), s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2), t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1, a_2)$ și $d^2f((a_1, a_2))(dx, dy) = r_0 dx^2 + 2s_0 dx dy + t_0 dy^2$

Dacă $r_0 > 0, r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, deci $d^2f((a_1, a_2))(dx, dy) > 0$, atunci a e punct de minim local.

Dacă $r_0 < 0, r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, deci $d^2f((a_1, a_2))(dx, dy) < 0$, atunci a e punct de maxim local.

Dacă $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$, atunci $d^2f((a_1, a_2))(dx, dy)$ nu păstrează semn constant, deci a nu poate fi punct de extrem local.

Dacă $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$, atunci $d^2 f((a_1, a_2))(dx, dy)$ e semidefinită, deci pentru a stabili dacă a este sau nu punct de extrem studiem semnul diferenței $f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)$ cu ajutorul dezvoltării Taylor.

III) Fie $K \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime compactă și f o funcție de clasă C^1 pe un deschis care conține K . Extremele globale ale lui f pe K sunt atinse în puncte din K . Dacă aceste puncte aparțin interiorului lui K , $\text{Int}(K)$, atunci ele sunt în mod necesar puncte critice și pot fi determinate aplicând teorema lui Fermat. Dacă ele nu aparțin lui $\text{Int}(K)$, atunci ele aparțin frontierei lui K , $\text{Fr}(K)$ și sunt necesare alte metode pentru determinarea lor (de exemplu, metoda multiplicatorilor lui Lagrange ce va fi dezvoltată ulterior).

Teorema 7.4. (Teorema funcțiilor implicite) Fie $\Phi_1(\underline{x}, \underline{y}), \dots, \Phi_m(\underline{x}, \underline{y})$ m funcții cu valori reale de câte $n + m$ variabile reale $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_m)$, pe care le presupunem de clasă C^1 pe un deschis U din \mathbb{R}^{n+m} . Fie $M = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in U / \Phi_1(\underline{x}, \underline{y}) = 0, \dots, \Phi_m(\underline{x}, \underline{y}) = 0\}$. Presupunem că într-un punct $(\underline{a}, \underline{b}) \in M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ avem $\frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}(\underline{a}, \underline{b}) \neq 0$. Atunci există un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, un deschis $B \subset \mathbb{R}^m$ și o funcție $\varphi: A \rightarrow B$ de clasă C^1 astfel încât $\underline{a} \in A$, $\underline{b} \in B$, $\underline{b} = \varphi(\underline{a})$, $A \times B \subset U$ și, în plus, $M \cap (A \times B)$ să coincidă cu graficul lui φ , adică $\{(\underline{x}, \underline{y}) \in A \times B / \Phi_1(\underline{x}, \underline{y}) = 0, \dots, \Phi_m(\underline{x}, \underline{y}) = 0\} = \{(\underline{x}, \varphi(\underline{x})) / \underline{x} \in A\}$

Consecințe ale teoremei funcțiilor implicite

1) Fie $F(x, y)$ o funcție de clasă C^2 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^2$ și $(a, b) \in U$ un punct astfel încât $F(a, b) = 0$ și $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Atunci, cf. Teoremei 7.4, există o funcție $y = y(x)$ de clasă C^2 într-o vecinătate W a lui a (numită și funcție implicită definită de relația $F(x, y) = 0$) astfel încât $F(x, y(x)) = 0$ în orice punct $x \in W$. Cum funcția y există, se pot calcula derivatele de ordinul I și II în punctul curent din W , derivând relația $F(x, y(x)) = 0$ în raport cu x , conform regulii de derivare a funcțiilor compuse:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0 \quad (7.1)$$

Derivând din nou în raport cu x relația (9.1) se obține

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot y' + y' \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y' \right) + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0 \quad (7.2)$$

Din relațiile (7.1) și (7.2) se determină y' , y'' în punctul curent (din W). Punctele în care $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ se numesc puncte singulare pentru curba $F(x, y) = 0$.

Extremele funcției implicite $y = y(x)$ definită de relația $F(x, y) = 0$ se determină punând condiția necesară $y' = 0$, adică rezolvând conform (7.1) sistemul

$$F(x, y) = 0, \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0 \quad (7.3)$$

Pentru precizare, este suficient de aflat semnul lui y'' în fiecare din punctele critice (în ipoteza că y'' este nenul acolo); din relația (7.2) rezultă că

$y'' = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$. Geometric, determinarea extremelor funcției implicite $y = y(x)$ revine la aflarea punctelor de ordonată maximă și minimă situate pe curba $F(x, y) = 0$.

2) Fie $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă \mathcal{C}^2 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. Relația $F(x, y, z) = 0$ definește local, în condițiile Teoremei 7.4, o funcție $z = z(x, y)$ astfel încât să aibă loc identitatea $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Deși în general această funcție nu se poate explicita efectiv, se pot calcula $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, derivând relația $F(x, y, z(x, y)) = 0$ în raport cu x, y și obținem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (7.4)$$

Pentru a determina extremele locale ale funcției $z(x, y)$ este necesar să aflăm punctele critice, rezolvând sistemul $F(x, y, z) = 0, \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, apoi să aflăm semnul expresiei $r_0 t_0 - s_0^2$ etc. Geometric, aceasta revine la a determina punctele de cotă maximă sau minimă situate pe suprafața $F(x, y, z) = 0$.

3) Fie $F(x, y, z), G(x, y, z)$ două funcții de clasă \mathcal{C}^1 pe un deschis U din \mathbb{R}^3 . Sistemul de relații $F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$ poate fi rezolvat în raport cu y și z și sunt definite, în condițiile Teoremei 7.4, funcții $y(x), z(x)$ (de exemplu, în vecinătatea oricărui punct $(a, b, c) \in U$ unde $F(a, b, c) = 0, G(a, b, c) = 0, \frac{D(F, G)}{D(y, z)}(a, b, c) \neq 0$). Pentru calculul derivatelor $y'(x), z'(x)$ nu se derivează y, z în raport cu x (pentru că acestea nu sunt explicitate efectiv), ci se derivează în raport cu x relațiile inițiale care au definit $y(x), z(x)$; atunci rezultă $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot z' = 0, \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot z' = 0$, de unde, cu ajutorul regulii lui Cramer, obținem y', z' .

Definiția 7.3. Fie $f(\underline{x}, \underline{y}), \underline{x} = (x_1, \dots, x_n), \underline{y} = (y_1, \dots, y_m), f: U \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de $n + m$ variabile reale, cu valori reale, de clasă \mathcal{C}^1 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ (numită **funcție-scop** sau **funcție-obiectiv**). Presupunem că există m "legături" între variabilele $\underline{x}, \underline{y}$, adică m relații de forma

$$g_1(\underline{x}, \underline{y}) = 0, \dots, g_m(\underline{x}, \underline{y}) = 0, g_i: U \rightarrow \mathbb{R} \quad (7.5)$$

de clasă $\mathcal{C}^1(U), 1 \leq i \leq m$. Fie $M = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in U / g_i(\underline{x}, \underline{y}) = 0, 1 \leq i \leq m\}$ mulțimea punctelor din U care verifică legăturile (7.5).

Se numește **punct de extrem local al funcției f cu legăturile (7.5)** orice punct $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in M$ pentru care există o vecinătate $W \subset U$ astfel încât diferența $f(\underline{x}, \underline{y}) - f(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ să aibă semn constant pentru orice $(\underline{x}, \underline{y}) \in M \cap W$.

Teorema 7.5. (Lagrange) Cu notațiile de la început, presupunem că $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ este un punct de extrem local al lui f cu legăturile (7.5) și că

$$\frac{D(g_1, \dots, g_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \neq 0 \quad (7.6)$$

Atunci există m numere reale $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (numite multiplicatori Lagrange) astfel încât considerând funcția $F = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$, punctul $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ să verifice în mod necesar sistemul de $n + 2m$ ecuații

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0, g_l = 0 \quad (1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq m) \quad (7.7)$$

cu $n + 2m$ necunoscute $\lambda, \underline{x}, \underline{y}$.

7.2 Probleme rezolvate

1. Folosind polinomul Taylor de gradul doi, să se calculeze valoarea aproximativă pentru $\sqrt{1,03} \cdot \sqrt[3]{0,98}$.

Soluție. Se consideră funcția $f(x, y) = \sqrt{x} \sqrt[3]{y}$ pe care o dezvoltăm după formula lui Taylor în punctul $(1, 1)$, pentru $h = 0,03, k = -0,02$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1,03} \cdot \sqrt[3]{0,98} &= f(1+h, 1+k) \simeq f(1, 1) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)h + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)k \right] + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1)k^2 \right] = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,03 - \frac{1}{3} \cdot 0,02 \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{4} \cdot 0,0009 - \frac{2}{6} \cdot 0,0006 - \frac{2}{9} \cdot 0,0004 \right) \simeq 1,0081 \quad \square \end{aligned}$$

2. Să se determine constanta k astfel încât $f(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y + k$ să aibă un minim egal cu 0.

Soluție. Determinăm punctele critice din sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 6y - 16 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x + 10y - 16 = 0$$

și obținem $(1, 1)$

$$\text{Avem } r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 10, s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$$

Cum $r_0 t_0 - s_0^2 = 60 - 36 = 24 > 0, r_0 > 0$, rezultă că $(1, 1)$ e punct de minim. Valoarea minimă a funcției este $f_{\min}(x, y) = f(1, 1) = 0 \implies \implies k = 16 \quad \square$

3. Să se găsească punctele de extrem local pentru funcțiile:

a) $f(x, y) = (x + 1)^{2n} + (y - 2)^{2m}, n, m \in \mathbb{N}^*$

b) $f(x, y) = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x;$

c) $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y), 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi;$

d) $f(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^3 - 3y^2 + 3y;$

e) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z), (x, y, z) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi);$

f) $f(x, y, z) = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z), a > 0, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$

Soluție. a) Punctele critice sunt date de soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2n(x + 1)^{2n-1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2m(y - 2)^{2m-1} = 0$$

Obținem punctul $M(-1, 2)$. Deoarece $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$, vom studia semnul diferenței $f(x, y) - f(-1, 2) = (x + 1)^{2n} + (y - 2)^{2m} \geq 0$, deci M este punct de minim

b) Punctele critice sunt date de soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 24y^2 + 36y - 8 = 0$$

Obținem punctele:

$$M_1(1 + \sqrt{2}, 2), M_2(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}), M_3(1 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}), M_4(1 - \sqrt{2}, 2), \\ M_5(1 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}), M_6(1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3})$$

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 48y + 36$ avem:

pentru $M_1, r_0 t_0 - s_0^2 = -72\sqrt{2} < 0$, deci M_1 nu este punct de extrem

pentru $M_2, r_0 t_0 - s_0^2 = 144\sqrt{2} > 0, r_0 = 6\sqrt{2} > 0$, deci M_2 este punct de minim

pentru $M_3, r_0 t_0 - s_0^2 = 144\sqrt{2} > 0, r_0 = 6\sqrt{2} > 0$, deci M_3 este punct de minim

pentru $M_4, r_0 t_0 - s_0^2 = 72\sqrt{2} > 0, r_0 = -6\sqrt{2} < 0$, deci M_4 este punct de maxim

pentru $M_5, r_0 t_0 - s_0^2 = -144\sqrt{2} < 0$, deci M_5 nu este punct de extrem

pentru $M_6, r_0 t_0 - s_0^2 = -144\sqrt{2} < 0$, deci M_6 nu este punct de extrem

c) Punctele critice sunt date de soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y) + \sin x \cdot \sin y \cdot \cos(x+y) = \sin y \cdot \sin(2x+y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cdot \cos y \cdot \sin(x+y) + \sin x \cdot \sin y \cdot \cos(x+y) = \sin x \cdot \sin(x+2y) = 0$$

Obținem punctele $M_1(\pi, \pi)$, $M_2(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \sin y \cdot \cos(2x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin 2(x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \sin x \cdot \cos(x+2y)$ avem:

- pentru $M_1, r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ și nu putem spune nimic.

Vom folosi formula lui Taylor. Deoarece diferențialele de ordin unu și doi sunt nule, trebuie să considerăm în formula lui Taylor termenii de ordin superior:

$f(x, y) - f(\pi, \pi) = \frac{1}{3!} [(x - \pi)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\pi, \pi) + 3(x - \pi)^2(y - \pi) \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\pi, \pi) + 3(x - \pi)(y - \pi)^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\pi, \pi) + (y - \pi)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\pi, \pi)] = \frac{1}{3!} [6(x - \pi)^2(y - \pi) + 6(x - \pi)(y - \pi)^2]$ ce ia și valori pozitive și valori negative într-o vecinătate a lui (π, π) , deci M_1 nu este punct de extrem.

- pentru $M_2, r_0 t_0 - s_0^2 = \frac{9}{4} > 0$, $r_0 = -\sqrt{3} < 0$, deci M_2 este punct de maxim

d) Punctele critice sunt date de soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 12x^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6y + 3 = 0$$

Obținem punctele $M_1(0, 1)$, $M_2(3, 1)$

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 24x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 6$ avem:

pentru $M_1, r_0 t_0 - s_0^2 = 0$. E necesar studiul diferenței $f(x, y) - f(0, 1)$ în vecinătatea lui M_1 , cu formula lui Taylor. Obținem

$$f(x, y) - f(0, 1) = x^4 - 4x^3 + (y - 1)^3.$$

Această expresie are semn variabil în vecinătatea lui M_1 , fiind pozitivă în punctele $(0, 1 + \lambda)$ cu $\lambda > 0$ și negativă în punctele $(0, 1 - \lambda)$ cu $\lambda > 0$. Așadar, M_1 nu este punct de extrem (e punct șa)

Analog pentru M_2 . Se dezvoltă $f(x, y) - f(3, 1)$ în jurul lui M_2 , adică după puterile lui $x - 3$ și $y - 1$ și după calcul rezultă

$$f(x, y) - f(3, 1) = 18(x - 3)^2 + 8(x - 3)^3 + (x - 3)^4 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2(x^2 + 2x + 3) + (y - 1)^2 \geq 0, \text{ deci } M_2 \text{ este punct de minim}$$

e) Punctele critice sunt date de soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \cos(x + y + z) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \cos(x + y + z) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \cos z - \cos(x + y + z) = 0$$

Se observă că avem $\cos x = \cos y = \cos z = \cos(x + y + z)$. Aceasta implică $x = y = z$ în intervalul de definiție. Înlocuind această relație în una din ecuații, obținem $\cos x = \cos 3x$ sau $-2 \sin x \cdot \sin 2x = 0$ rezultă $x = \frac{\pi}{2}$, deci avem un singur punct critic $M(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} \text{Avem } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\sin x + \sin(x + y + z), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin y + \sin(x + y + z), \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \\ &= -\sin z + \sin(x + y + z), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \sin(x + y + z) \end{aligned}$$

Scriem matricea hessiană

$$H = \begin{pmatrix} -\sin x + \sin(x + y + z) & \sin(x + y + z) & \sin(x + y + z) \\ \sin(x + y + z) & -\sin y + \sin(x + y + z) & \sin(x + y + z) \\ \sin(x + y + z) & \sin(x + y + z) & -\sin z + \sin(x + y + z) \end{pmatrix}$$

$$\text{Atunci } H(M) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Avem } \Delta_1 &= -2 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= -4 < 0 \end{aligned}$$

Așadar, M este punct de maxim local.

f) Punctele critice sunt date de soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 z^3 (a - x - 2y - 3z) - xy^2 z^3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3 (a - x - 2y - 3z) - 2xy^2 z^3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2 z^2 (a - x - 2y - 3z) - 3xy^2 z^3 = 0$$

Rezolvând sistemul găsim punctul $x = y = z = \frac{a}{7}$. În punctul $M(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7})$ avem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \cdot \frac{a^5}{7^5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6 \cdot \frac{a^5}{7^5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -12 \cdot \frac{a^5}{7^5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2 \cdot \frac{a^5}{7^5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -3 \cdot \frac{a^5}{7^5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -6 \cdot \frac{a^5}{7^5}$

Matricea hessiană în punctul M este

$$H(M) = \begin{pmatrix} -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -3 \cdot \frac{a^5}{7^5} \\ -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -6 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -6 \cdot \frac{a^5}{7^5} \\ -3 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -6 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -12 \cdot \frac{a^5}{7^5} \end{pmatrix}$$

$$\text{Obținem } \Delta_1 = -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} \\ -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -6 \cdot \frac{a^5}{7^5} \end{vmatrix} = 8 \cdot \frac{a^{10}}{7^{10}} >$$

$$> 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -3 \cdot \frac{a^5}{7^5} \\ -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -6 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -6 \cdot \frac{a^5}{7^5} \\ -3 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -6 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -12 \cdot \frac{a^5}{7^5} \end{vmatrix} = -18 \cdot \frac{a^{10}}{7^{10}} < 0$$

Așadar, M este punct de maxim. \square

4. Să se arate că $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ are o infinitate de maxime locale și nici un minim local.

Soluție. Punctele critice sunt date de soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(1 + e^y) \sin x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^y(\cos x - 1 - y) = 0$$

Din prima ecuație rezultă punctele critice $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ și din cea de-a doua $y_k = \cos x - 1 \implies y_k = (-1)^k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$

Obținem derivatele de ordinul doi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -(1 + e^y) \cos x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^y(\cos x - 1 - y) - e^y = e^y(\cos x - 2 - y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^y \sin x$$

$$\text{Avem } r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_k, y_k) = -(1 + e^{y_k}) \cos x_k = -(1 + e^{y_k}) \cdot (-1)^k, t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_k, y_k) = e^{y_k}((-1)^k - 2 - (-1)^k + 1) = -e^{y_k}, s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_k, y_k) = 0$$

$$\text{Atunci } r_0 t_0 - s_0^2 = (-1)^k e^{y_k} (1 + e^{y_k})$$

Pentru $k = \text{par}$, $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, $r_0 < 0$, deci avem o infinitate de maxime locale

Pentru $k = \text{impar}$, $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$, deci (x_k, y_k) , $k \in \mathbb{Z}$ nu sunt puncte de extrem \square

5. Să se găsească extremele funcției

$$f(x, y, z, u) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{u} + u, & x, y, z, u > 0 \\ 0, & x = y = z = u = 0 \end{cases}$$

Soluție. $f(x, y, z, u) \geq f(0, 0, 0, 0) = 0 \implies (0, 0, 0, 0)$ e punct de minim local

Restricția lui f la $x, y, z, u > 0$ este de clasă C^∞ . Punctele critice ale acestei restricții sunt soluțiile sistemului:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + \frac{1}{u} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{z}{u^2} + 1 = 0$$

Obținem punctul $(1, 1, 1, 1)$. Calculăm derivatele parțiale de ordinul doi în acest punct:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial z^2} = \frac{\partial f}{\partial u^2} = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial f}{\partial z \partial u} = \\ = \frac{\partial f}{\partial u \partial z} = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x \partial u} = \frac{\partial f}{\partial u \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y \partial u} = \frac{\partial f}{\partial u \partial y} = 0 \end{aligned}$$

Scriem matricea hessiană în acest punct și aflăm valorile proprii din ecuația caracteristică $:(2-\lambda)^4 - 3(2-\lambda)^2 + 1 = 0$ cu rădăcinile $\lambda_{1,2,3,4} = 2 \mp \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$. Cum toate valorile proprii sunt strict pozitive, rezultă că $(1, 1, 1, 1)$ este punct de minim local \square

6. Să se calculeze y', y'' pentru funcția $y = y(x)$ definită implicit de ecuațiile $\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 1 = 0, x^2 + y^2 \neq 0$.

Soluție. Fie $F(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 1 = 0$. Atunci

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x - \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot (-\frac{y}{x^2})}{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y - \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x}} = -\frac{x+y}{y-x} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\begin{aligned} y'' = \frac{(1+y')(x-y) + (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} &= \frac{(1+\frac{x+y}{x-y})(x-y) + (x+y)(1-\frac{x+y}{x-y})}{(x-y)^2} = \\ &= \frac{2(x^2 - 2xy - y^2)}{(x-y)^3} \end{aligned} \quad \square$$

7. Să se arate că dacă funcția $z = f(x, y)$ este definită implicit prin $(y+z) \sin z - y(x+z) = 0$, atunci este satisfăcută ecuația $z \sin z \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Soluție. Avem $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{(y+z) \cos z + \sin z - y}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+z - \sin z}{(y+z) \cos z + \sin z - y}$

$$\text{Astfel } z \sin z \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y[z \sin z - y(x+z - \sin z)]}{(y+z) \cos z + \sin z - y} = \frac{y[(y+z) \sin z - y(x+z)]}{(y+z) \cos z + \sin z - y} = 0 \quad \square$$

8. Să se calculeze dz și d^2z în punctul $M_0(2, 0, 1)$ pentru funcția $z = f(x, y)$ definită implicit prin $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$.

Soluție. Avem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8x-4z}{2z-8x-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-4y}{2z-8x-1}$$

Derivând aceste relații în raport cu x și y și ținând cont că $z = f(x, y)$ deducem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{56z+4-(56x+8)\frac{\partial z}{\partial x}}{(2z-8x-1)^2} = \frac{112(z^2+2x^2-8xz-z)-4}{(2z-8x-1)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{8y(\frac{\partial z}{\partial x}-4)}{(2z-8x-1)^2} = \frac{32(7x+1)}{(2z-8x-1)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(-8z+32x+4)(2z-8x-1)-32y^2}{(2z-8x-1)^3}$$

Deoarece $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 0$, rezultă $dz(M_0) = 0$.

Apoi $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = \frac{4}{15}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4}{15}$, deci $d^2z(M_0) = \frac{4}{15}[(dx)^2 + (dy)^2]$

Altă metodă :

Diferențiem relația de definiție și obținem:

$$(*) 4xdx + 4ydy + 2zdz - 8xdz - 8zdx - dz = 0 \implies dz = \frac{(8z-4x)dx - 4ydy}{2z-8x-1} \implies \implies dz(M_0) = 0$$

Diferențiind încă o dată relația (*), observând că dx și dy sunt constante și dz este o funcție obținem

$$4(dx)^2 + 4(dy)^2 + 2(dz)^2 + 2zd^2z - 8dxdz - 8xd^2z - 8dzdx - d^2z = 0 \implies d^2z = \frac{1}{2z-8x-1}[16dxdz - 4(dx)^2 - 4(dy)^2 - 2(dz)^2] \implies \implies d^2z(M_0) = \frac{4}{15}[(dx)^2 + (dy)^2] \quad \square$$

9. Funcțiile $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ sunt definite implicit de relațiile $u + v = x + y$, $xu + yv = 1$. Să se calculeze $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Soluție. Derivând cele două relații în raport cu x obținem sistemul

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial x} = -u$$

Rezolvând sistemul obținem $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u+y}{y-x}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u+x}{x-y}$

Derivând cele două relații în raport cu y obținem sistemul

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

$$x \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial v}{\partial y} = -v$$

Soluțiile sunt $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v+y}{y-x}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v+x}{x-y}$

Altă metodă :

Prin diferențierea relațiilor de definiție obținem sistemul

$$du + dv = dx + dy$$

$$xdu + ydv = -udx - vdy$$

cu soluțiile $du = \frac{u+y}{y-x}dx + \frac{v+y}{y-x}dy$ și $dv = \frac{u+x}{x-y}dx + \frac{v+x}{x-y}dy$.

Deoarece $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ și $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$, prin identificarea cu relațiile de mai sus, obținem expresiile pentru $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. \square

10. Să se determine punctele de extrem ale funcției implicite $y = f(x)$ definită prin $F(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

Soluție. Conform (7.3), punctele critice sunt soluțiile sistemului

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2y - 2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2x + 10y + 4 \neq 0$$

$$F(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

Rezolvând acest sistem obținem $x = 1, y = 0$ și $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$

Deoarece $f''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ rezultă că $f''(1) = -1 < 0$, deci $x = 1$ e punct de maxim.

Cum $f''(\frac{1}{2}) = 1 > 0$ rezultă că $x = \frac{1}{2}$ e punct de minim. \square

11. Să se discute în funcție de parametrul real a , extremele funcției $x \rightarrow y(x)$ definită implicit de ecuația $F(x, y) = xy^2 - yx^2 = 2a^3$ și de condiția $y(2a) = a(1 + \sqrt{2})$.

Soluție. Conform relațiilor (7.3), aflăm punctele critice din sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = y^2 - 2xy = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2xy - x^2 \neq 0$$

$$F(x, y) = xy^2 - yx^2 = 2a^3$$

Obținem soluția $(a, 2a)$, $a \neq 0$ coerentă cu condiția $y(2a) = a(1 + \sqrt{2})$ (deoarece se verifică $2a[a(1 + \sqrt{2})]^2 - a(1 + \sqrt{2})(2a)^2 = 2a^3$). De aceea $x = a$ este punctul critic al funcției implicite y .

Atunci $y''(a) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(a) = \frac{4}{3a}$

Dacă $a > 0$ (respectiv $a < 0$), atunci $x = a$ este punct de minim (respectiv de maxim) \square

12. Să se afle extremele funcției $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuația $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7 = 0$.

Soluție. Aflăm punctele critice din sistemul

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$$

adică

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7 = 0$$

$$2x - 2 = 0$$

$$2y - 2 = 0$$

$$2z \neq 0$$

Obținem punctele $A(1, 1, 3), B(1, 1, -3)$

$$\text{Avem } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{x-1}{z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{y-1}{z}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z^2 + (x-1)^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(x-1)(y-1)}{z^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(y-1)^2 + z^2}{z^3}$$

Pentru punctul $A, r_0 t_0 - s_0^2 = \frac{1}{9} > 0, r_0 = -\frac{1}{3} < 0$, deci A e punct de maxim

Pentru punctul $B, r_0 t_0 - s_0^2 = \frac{1}{9} > 0, r_0 = \frac{1}{3} > 0$, deci B e punct de minim \square

13. Să se găsească punctele de extrem ale funcției $(x, y) \rightarrow z(x, y)$ definită de ecuația $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z - 12 = 0$ și de condiția $z(1, 0) = 2 + \sqrt{15}$.

Soluție. Aflăm punctele critice din sistemul

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z - 12 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 4y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2z - 4 \neq 0$$

ce are soluțiile $M_1(0, 0, 6)$, $M_2(0, 0, -2)$. Dintre acestea numai M_1 este în concordanță cu ipoteza $z(1, 0) = 2 + \sqrt{15}$. Astfel, punctul critic al funcției implicate z este $(0, 0)$.

Folosind relațiile (7.4) obținem :

$$r_0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) = -\frac{1}{4} < 0, s_0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0, t_0 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) = -\frac{1}{2},$$

deci $r_0 t_0 - s_0^2 = \frac{1}{8} > 0$ și cum $r_0 < 0$, rezultă că $(0, 0)$ este punct de maxim \square

14. Să se găsească extremele funcției $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ cu legătura $2x + 3y - z = 1$.

Soluție. Problema se poate reduce la o problemă de extrem liber înlocuind în expresia lui f pe z din legătură . Rezultă $f = x^2 + y^2 + (2x + 3y - 1)^2$

Aflăm punctele critice din sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4(2x + 3y - 1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6(2x + 3y - 1) = 0$$

ce are soluțiile $x = \frac{1}{7}, y = \frac{3}{14}$

Avem $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}) = 10, s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}) = 12, t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}) = 20$, deci $r_0 t_0 - s_0^2 = 56 > 0$ și cum $r_0 = 10 > 0$, rezultă că $(\frac{1}{7}, \frac{3}{14})$ e punct de minim \square

15. Să se determine extremele funcțiilor cu legăturile indicate:

a) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3, x^2 + y^2 + z^2 = 3, x > 0, y > 0, z > 0;$

b) $f(x, y, z) = xyz, x + y + z - 5 = 0, xy + yz + zx - 8 = 0$

Soluție. a) Scriem funcția lui Lagrange $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$

Rezolvăm sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 2\lambda z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$$

$$x > 0, y > 0, z > 0$$

și obținem soluțiile $x = 1, y = 1, z = 1, \lambda = -\frac{3}{2}$

Calculăm derivatele de ordinul doi ale funcției F în punctul $(1, 1, 1)$ și avem $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(1, 1, 1) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(1, 1, 1) = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(1, 1, 1) = 3, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(1, 1, 1) =$
 $= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(1, 1, 1) = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}(1, 1, 1) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}(1, 1, 1) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(1, 1, 1) =$
 $= \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}(1, 1, 1) = 0$

Scriem diferențiala de ordinul doi a funcției F în punctul $(1, 1, 1)$:
 $d^2 F(1, 1, 1) = 3[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] > 0$, deci $(1, 1, 1)$ e punct de minim

b) Funcția lui Lagrange este $F(x, y, z) = xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + yz + zx - 8)$

Rezolvăm sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_2 z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_2 z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_2 x = 0$$

$$x + y + z - 5 = 0$$

$$xy + yz + zx - 8 = 0$$

și obținem soluțiile:

$$1) \lambda_1 = \frac{16}{9}, \lambda_2 = -\frac{4}{3}, M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), M_2\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), M_3\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$2) \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2, M_4(2, 2, 1), M_5(2, 1, 2), M_6(1, 2, 2)$$

$$\text{Avem } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = z + \lambda_2, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} =$$

 $= y + \lambda_2, \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = x + \lambda_2$

Diferențiala de ordinul doi a funcției F este $d^2 F = 2(z + \lambda_2)dxdy +$
 $+ 2(x + \lambda_2)dydz + 2(y + \lambda_2)dxdz$

Diferențiem legăturile și obținem

$$dx + dy + dz = 0$$

$$(y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0$$

1) Avem $d^2 F(M_1) = 2dxdy$ și $dx + dy + dz = 0, \frac{11}{3}dx + \frac{11}{3}dy + \frac{8}{3}dz =$
 $= 0$. Rezultă că $dz = -dx - dy$, deci introducând în a doua ecuație
obținem $dx = -dy$, așadar $dz = 0$, de unde $d^2 F(M_1) = -2(dx)^2 <$
 $< 0 \implies M_1$ e punct de maxim.

Analog se arată că M_2 și M_3 sunt puncte de maxim.

2) $d^2F(M_4) = -2dxdy$ și $dx + dy + dz = 0, 3dx + 3dy + 4dz = 0$, de unde rezultă că $dy = -dx, dz = 0$. Așadar, $d^2F(M_4) = 2(dx)^2 > 0 \implies M_4$ e punct de minim.

Analog M_5 și M_6 sunt puncte de minim. \square

16. Fie $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{2} + y \leq 1\}$ și $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - 1)^3 + 2y$. Să se găsească $\max_{(x,y) \in M} f(x, y)$ și $\min_{(x,y) \in M} f(x, y)$.

Soluție. Cum f e continuă și M e compactă rezultă că f este mărginită și își atinge marginile.

În $\text{Int}(M)$, f e diferentiabilă și punctele de extrem, dacă există, se află printre soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x - 1)^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 = 0$$

Deci funcția neavând puncte critice în $\text{Int}(M)$, nu are nici puncte de extrem și atunci le căutăm pe $\text{Fr}(M) = [OA] \cup [AB] \cup [BO]$

Mulțimea M reprezintă un triunghi de vârfuri $O(0, 0), A(2, 0), B(0, 1)$

Considerăm $f_1: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = f|_{[OA]}(x, y) = f(x, 0) = (x - 1)^3$. Dacă sunt puncte de extrem în $\text{Int}([OA])$, acestea anulează pe f'_1 : $f'_1 = 3(x - 1)^2 = 0 \implies x = 1$ și deoarece $P_0(1, 0) \in \text{Int}([OA])$, acesta ar putea fi punct de extrem pentru f . Pe $[OA]$ puncte de extrem ar mai putea fi $O(0, 0), A(2, 0)$

Caut puncte de extrem pe $[BO]$ și consider $f_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(y) = f|_{[BO]}(x, y) = f(0, y) = -1 + 2y$ și cum $f'_2(y) \neq 0, \forall y \in [0, 1]$, funcția f_2 își atinge extremele în $O(0, 0)$ sau $B(0, 1)$.

Caut puncte de extrem pe $[AB]$ și consider $f_3: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = f|_{[AB]}(x, y) = f(x, 1 - \frac{x}{2}) = (x - 1)^3 + 2 - x$.

Cum $f'_3(x) = 3(x - 1)^2 - 1 = 0$ are soluțiile $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$, iar

$P_1\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3}, \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right), P_2\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}, \frac{3 + \sqrt{3}}{6}\right) \in \text{Int}([AB])$, acestea ar putea fi puncte de extrem în $\text{Int}([AB])$. Pe $[AB]$ am mai putea avea puncte de extrem în $A(2, 0), B(0, 1)$.

Așadar, pe M posibilele puncte de extrem pentru f sunt O, A, B, P_0, P_1, P_2 . Deoarece $f(0, 0) = -1, f(2, 0) = 1, f(0, 1) = 1, f(1, 0) = 0$,

$$f\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3}, \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}, f\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}, \frac{3 + \sqrt{3}}{6}\right) = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \implies$$

$$\implies \max_{(x,y) \in M} f(x, y) = f(P_2), \min_{(x,y) \in M} f(x, y) = f(O) \quad \square$$

17. Să se determine $\inf_D f(x, y)$ și $\sup_D f(x, y)$, pentru funcția $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$, unde $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Soluție. Cum D e compactă și f e continuă, atunci f e mărginită și își atinge marginile. Vom determina extremele funcției situate în interiorul cercului $x^2 + y^2 = 1$ și apoi extremele funcției situate pe frontiera cercului și vom compara valorile extreme ale funcției.

Extremele funcției situate în interiorul cercului se află printre soluțiile sistemului:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y - 2 = 0\end{aligned}$$

Obținem $x_0 = \frac{3}{2}, y_0 = 1$. Avem $x_0^2 + y_0^2 = \frac{13}{4} > 1$, deci extremele nu pot fi în interiorul cercului.

Deci punctele de extrem ale funcției se vor găsi pe frontiera cercului. Calculăm extremele funcției f cu legătura $x^2 + y^2 = 1$. Scriem funcția lui Lagrange $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Aflăm punctele critice din sistemul

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= 2x - 3 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y - 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

Obținem $\lambda_1 = -1 - \sqrt{\frac{13}{4}}, x_1 = -\frac{3}{\sqrt{13}}, y_1 = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ și

$$\lambda_2 = -1 + \sqrt{\frac{13}{4}}, x_2 = \frac{3}{\sqrt{13}}, y_2 = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Avem $d^2F = 2(1 + \lambda)[(dx)^2 + (dy)^2]$

Pentru $\lambda_1, d^2F(x_1, y_1) < 0 \implies (x_1, y_1)$ e punct de maxim

Pentru $\lambda_2, d^2F(x_2, y_2) > 0 \implies (x_2, y_2)$ e punct de minim □

18. Să se determine extremele globale pentru funcția $f(x, y, z) = y + z$ pe mulțimea $K = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$.

Soluție. Cum K e compactă și f e continuă, atunci f e mărginită și își atinge marginile. Vom determina extremele funcției situate în interiorul sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ și apoi extremele funcției situate pe frontiera sferei și vom compara valorile extreme ale funcției.

Extremele funcției situate în interiorul sferei se află printre soluțiile sistemului:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1 = 0$$

Deci nu avem puncte critice în interior.

Deci punctele de extrem ale funcției se vor găsi pe frontiera sferei. Calculăm extremele funcției f cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Scriem funcția lui Lagrange $F(x, y) = y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$

Aflăm punctele critice din sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + 2\lambda z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Obținem $\lambda_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}$, $x_1 = 0$, $y_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ și $\lambda_2 = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Așadar, $f(x_1, y_1) = -3\sqrt{2}$, $f(x_2, y_2) = 3\sqrt{2}$, deci $\inf_K f(x, y) = -3\sqrt{2}$,

$\sup_K f(x, y) = 3\sqrt{2}$ □

7.3 Probleme propuse

1. Să se scrie formula lui Taylor pentru:

a) $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ în punctul $(-2, 1)$;

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ în punctul $(1, 1, 1)$

2. Folosind polinomul Taylor de ordinul doi, să se calculeze valoarea aproximativă pentru: a) $(0, 95)^{2,01}$, b) $1, 02 \cdot 2, 01^2 \cdot 3, 03^3$.

R: a) $f(0, 95; 2, 01) \approx 0, 902$; b) $f(1, 02; 2, 01; 3, 03) \approx 114, 6159$

3. Să se determine extremele locale ale funcțiilor:

a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - xy$;

b) $f(x, y) = (8x^2 - 6xy + 3y^2)e^{2x+3y}$;

c) $f(x, y) = x^4 - 8^3 + 18x^2 - 8x + y^3 - 3y^2 - 3y$;

d) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, $(x, y) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$;

e) $f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, $(x, y) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$;

f) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

g) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$;

h) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $x, y, z > 0$;

i) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

4. Să se calculeze $f'(1)$ și $f''(1)$ pentru funcția implicită $y = f(x)$, definită prin ecuația $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) - 2 = 0$, satisfăcând condiția $f(1) = 1$.

R: $f'(1) = -1$, $f''(1) = -2$

5. Funcțiile $y = f(x)$ și $z = g(x)$ sunt definite implicit prin relațiile $x + y + z = a$, $xyz = b$. Să se calculeze dy , dz , d^2y , d^2z

6. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul I și II pentru funcția $z(x, y)$ definită implicit de ecuația:

a) $y + \operatorname{arctg} \frac{x}{z-x} - z = 0$, $z - y \neq 0$;

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x^2 + y^2 \neq 0$;

c) $x + y + z = e^{x+y-z}$

7. Să se calculeze dz și d^2z , dacă $z(x, y)$ e definită implicit de ecuația $\frac{y}{z} - \ln \frac{z}{x} = 0$, $\frac{z}{x} > 0$, $xz \neq 0$.

8. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ dacă $z(x, y)$ este o funcție definită implicit de ecuația $F(x, x+y, x+y+z) = 0$, unde F este o funcție care admite derivate parțiale de ordinul I și II.

9. Fie funcția compusă $z = f(x, y)$ definită de $z = u^3 + v^3$, funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ fiind definite implicit prin relațiile $u + v^2 = x$, $u^2 + v^2 = y$. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

10. Fie funcția $x \rightarrow y(x)$ definită implicit de ecuația $f(x, y) = y^2 + 2yx^2 - 4x - 3 = 0$ și de condiția $y(1) = -1 + \sqrt{8}$. Se cere să se găsească punctele critice ale funcției implicite y și să se stabilească natura acestor puncte.

R: $x = \frac{1}{2}$ e punct de maxim local

11. Să se determine punctele de extrem ale funcției implicite $y = f(x)$ definită prin $x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$.
R: $x = 0$ e punct de minim, $x = -2$ e punct de maxim
12. Fie $z = z(x, y)$ definită implicit prin ecuația $x^2 + y^2 + 2x - 4y + z^2 + z + 3 = 0$. Să se studieze extremele.
R: $(-1, 2, -2)$ e punct de minim, $(-1, 2, 1)$ punct de maxim
13. Să se studieze extremele funcției $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuația $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 - x^2 - z^2$.
14. Să se determine extremele funcției $f(x, y) = x^2 + y^2 - y - x$ variabilele fiind legate prin condiția $x + y = 1$.
R: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e punct de minim
15. Să se găsească extremele funcției $f(x, y, z) = xy^2z^3$ cu legătura $x + 2y + 3z = a$, $x, y, z, a > 0$.
R: $(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6})$ e punct de maxim
16. Să se studieze extremele funcției $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ cu legăturile $-x + y + z = 1$, $x - z = 0$
R: $(-1, 1, -1)$ e punct de minim
17. Să se determine extremele globale ale funcțiilor următoare pe mulțimile K indicate:
- a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $K = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$;
b) $f(x, y) = 4x - x^2 + 6y - y^2$, $K = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$
R: a) $\sup_K f(x, y) = 4$, $\inf_K f(x, y) = -4$
b) $\sup_K f(x, y) = 13$, $\inf_K f(x, y) = -12$

Capitolul 8

Integrale improprii și cu parametri

8.1 Noțiuni teoretice

Integrale improprii

Definiția 8.1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și fie $f : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă (integrabilă pe orice interval compact $[u, v] \subseteq [a, b)$). Integrala improprie (în b) $\int_a^b f(x)dx$ se numește **convergentă** dacă limita

$$\lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(x)dx$$

există și este finită ; altfel, integrala se numește **divergentă** .

Definiția 8.2. Dacă $f : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ este local integrabilă , atunci integrala improprie (la ∞) $\int_a^\infty f(x)dx$ se numește **convergentă** dacă limita

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$$

există și este finită .

Definiția 8.3. Integrala improprie $\int_a^b f(x)dx$ (b poate fi și ∞) se numește **absolut convergentă** dacă integrala $\int_a^b |f(x)| dx$ este convergentă .

Criterii de convergență

Criteriul lui Cauchy

Fie $f : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$, local integrabilă ; atunci integrala $\int_a^b f(t)dt$ este convergentă dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in [a, b)$ astfel încât $\forall x, y \in (b_\varepsilon, b)$ să rezulte $|\int_x^y f(t)dt| < \varepsilon$.

Criteriul de comparație

Fie $f, g : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$, (b poate fi și ∞) astfel încât $0 \leq f \leq g$;

- i. dacă integrala $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă , atunci și integrala $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă .
 ii. dacă integrala $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă , atunci și integrala $\int_a^b g(x)dx$ este divergentă .

Criteriul de comparație la limită

Fie $f, g : [a, b) \mapsto [0, \infty)$ astfel încât există limita:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- i. Dacă $\ell \in [0, \infty)$ și $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă , atunci și $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă .
 ii. Dacă $\ell \in (0, \infty)$ sau $\ell = \infty$ și $\int_a^b g(x)dx$ este divergentă , atunci și $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă .

Criteriul de comparație cu $\frac{1}{x^\alpha}$

Fie $a \in \mathbb{R}$ și $f : [a, \infty) \mapsto [0, \infty)$, local integrabilă astfel încât există

$$\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x).$$

- i. Dacă $\alpha > 1$ și $0 \leq \ell < \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă .
 ii. Dacă $\alpha \leq 1$ și $0 < \ell \leq \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă .

Criteriul de comparație cu $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$

Fie $a < b$ și $f : [a, b) \mapsto [0, \infty)$, local integrabilă astfel încât există

$$\ell = \lim_{x \rightarrow b} (b-x)^\alpha f(x). \quad (x-A)^\alpha f(x)$$

- i. Dacă $\alpha < 1$ și $0 \leq \ell < \infty$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă .
 ii. Dacă $\alpha \geq 1$ și $0 < \ell \leq \infty$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă .

Criteriul lui Abel

Fie $f, g : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ cu proprietățile:

f este de clasă C^1 , $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\int_a^\infty f'(x)dx$ absolut convergentă ,

g este continuă , iar funcția $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ este mărginită pe $[a, \infty)$.

Atunci integrala $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ este convergentă .

Integrale cu parametri

Definiția 8.4. Fie $A \neq \emptyset$ și $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un interval compact. Fie $f : [a, b] \times A \mapsto \mathbb{R}$ o funcție (de două variabile reale) astfel încât pentru orice $y \in A$ aplicația $[a, b] \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann. Funcția definită prin:

$$F : A \mapsto \mathbb{R}, F(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

se numește **integrală cu parametru**.

Continuitatea integralei cu parametru

Dacă $f : [a, b] \times A \mapsto \mathbb{R}$ este continuă, atunci integrala cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ este funcție continuă.

Formula lui Leibniz de derivare

Fie $f : [a, b] \times (c, d) \mapsto \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există și este continuă pe $[a, b] \times (c, d)$. Atunci integrala cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ este derivabilă și

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx, \forall y \in (c, d).$$

Formula generală de derivare

Fie $f : [a, b] \times (c, d) \mapsto \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există și este continuă pe $[a, b] \times (c, d)$ și fie $\varphi, \phi : (c, d) \mapsto [a, b]$ două funcții de clasă \mathcal{C}^1 . Atunci funcția $G(y) = \int_{\varphi(y)}^{\phi(y)} f(x, y) dx$ este derivabilă și:

$$G'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\phi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(\phi(y), y)\phi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y), \forall y \in (c, d).$$

Schimbarea ordinii de integrare

Fie $f : [a, b] \times [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ o funcție continuă; atunci:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Integrale improprii cu parametri

Definiția 8.5. Fie $f : [a, b) \times A \mapsto \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $y \in A$, aplicația $[a, b) \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ este local integrabilă și integrala (improprie) $\int_a^b f(x, y) dx$ converge. Se poate defini în acest caz funcția

$$F(x, y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

numită **integrală improprie cu parametru**.

Definiția 8.6. Integrala $\int_a^b f(x, y)dx$ se numește **uniform convergentă** (în raport cu y) pe mulțimea A dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in (a, b) \text{ astfel încât } \left| \int_t^b f(x, y)dx \right| < \varepsilon, \forall t \in (b_\varepsilon, b), \forall y \in A.$$

Continuitatea integralei improprie cu parametru

Dacă $f : [a, b) \times A \mapsto \mathbb{R}$ este continuă și dacă integrala $\int_a^b f(x, y)dx$ este uniform convergentă pe A , atunci funcția $F : A \mapsto \mathbb{R}$, $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ este continuă.

Derivarea integralei improprie cu parametru

Fie $f : [a, b) \times (c, d) \mapsto \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât t derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există și este continuă pe $[a, b) \times (c, d)$ și pentru orice $y \in (c, d)$ fixat integrala $\int_a^b f(x, y)dx$ este convergentă. Dacă integrala $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$ este uniform convergentă pe (c, d) , atunci integrala improprie cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ este derivabilă și

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx, \forall y \in (c, d).$$

Schimbarea ordinii de integrare în integrala improprie

Dacă $f : [a, b) \times [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ este continuă și dacă integrala $\int_a^b f(x, y)dx$ este uniform convergentă pe (c, d) , atunci :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Criterii de uniform convergență

Criteriul lui Cauchy

Fie $f : [a, b) \times A \mapsto \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $y \in A$, aplicația $[a, b) \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ este local integrabilă. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- i. integrala improprie $\int_a^b f(x, y)dx$ este uniform convergentă pe A .
- ii. $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in (a, b)$ astfel încât pentru orice $u, v \in (b_\varepsilon, b)$ rezultă

$$\left| \int_u^v f(x, y)dx \right| < \varepsilon, \forall y \in A.$$

Criteriul de comparație

Fie $f : [a, b) \times A \mapsto \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $y \in A$, aplicația $[a, b) \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ este local integrabilă și fie $g : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$ astfel încât $|f(x, y)| \leq g(x), \forall x \in [a, b), \forall y \in A$. Dacă integrala $\int_a^b g(x)dx$

este convergentă, atunci integrala $\int_a^b f(x, y) dx$ este uniform convergentă.

Funcțiile B (Beta) și Γ (Gama) ale lui Euler

Teorema 8.1. (a) Integrala improprie cu doi parametri reali

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad (8.1)$$

există pentru orice $p > 0, q > 0$.

(b) Integrala improprie cu un parametru real

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (8.2)$$

există pentru orice $\alpha > 0$.

Definiția 8.7. Funcția $B: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin relația (8.1) se numește **funcția beta**, iar funcția $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin relația (8.2) se numește **funcția gama**. Funcțiile B și Γ au fost introduse de Euler și de aceea se mai numesc **integrale euleriene**.

Teorema 8.2. a) Pentru $\forall \alpha > 0$ real, $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ și pentru $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n + 1) = n!$;

b) $B(p, q) = B(q, p)$, $\forall p, q > 0$;

c) $\Gamma(\alpha) > 0$, $\forall \alpha > 0$ și $B(p, q) > 0$, $\forall p, q > 0$;

d) $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$;

e) $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$

f) $\Gamma(a)\Gamma(a + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \cdot \Gamma(2a)$ (*relația lui Legendre*)

Corolarul 8.1. Avem $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ și $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Soluție. Aplic d) din Teorema 8.2 pentru $p = q = \frac{1}{2}$ și obținem

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

$$\text{Pe de altă parte, } B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin t \cos t dt}{\sin t \cos t} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

(unde am folosit schimbarea de variabilă $x = \sin^2 t$)

Atunci $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi$ și, conform c) din Teorema 8.2, rezultă că $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Pentru a calcula integrala din enunț facem substituția $x^2 = t \implies x = t^{\frac{1}{2}} \implies dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$ și integrala devine $\int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ □

8.2 Probleme rezolvate

Să se cerceteze convergența integralelor :

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ (integrala eliptică)

Soluție. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^\alpha \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^\alpha \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1-x)(1+x)}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\alpha-\frac{1}{2}} (1+x)^{-\frac{1}{2}} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \implies$
integrala este convergentă \square

2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Soluție. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$ pentru $\alpha = 2 > 1 \implies$
 \implies integrala este convergentă \square

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$

Soluție. $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \operatorname{ctg} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{\sin x} \cos x = 1$, pentru $\alpha = 1 \implies$ inte-
grala este divergentă \square

4. $\int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}\sqrt[4]{x+5}\sqrt[5]{x}}$

Soluție. $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}\sqrt[4]{x+5}\sqrt[5]{x}} = \frac{x^{\alpha-\frac{1}{5}}}{x^{\frac{2}{15}+2x^{\frac{1}{20}+1}} = 1$, pentru
 $\alpha = \frac{1}{5} < 1 \implies$ integrala este convergentă \square

5. $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$

Soluție. $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \frac{1}{\sqrt{\sin x}} = 1$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \implies$ integrala este
convergentă

$\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi-x)^\alpha \frac{1}{\sqrt{\sin x}} = 1$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \implies$ integrala este conver-
gentă \square

6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$

Soluție. $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha - \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{e^x - e^{-x}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, pentru $\alpha = \frac{2}{3} < 1$ (deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$), deci integrala este convergentă \square

$$7. \int_1^\infty \left(\frac{x^2}{e^x - e^{-x}} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{x^2} dx$$

Soluție. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \cdot \left(\frac{x^2}{e^x - e^{-x}} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha - 2} \cdot \left(\frac{x^2}{e^x - e^{-x}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$, pentru $\alpha = 2 > 1 \implies$ integrala este convergentă (am folosit $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{e^x - e^{-x}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$ cu regula lui l'Hospital) \square

$$8. \int_{x_0}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-a)(x-b)}}, x_0 > a > b > 0$$

Soluție. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{x(x-a)(x-b)}} = 1$, pentru $\alpha = \frac{3}{2} > 1 \implies$ integrala este convergentă \square

$$9. \int_0^\infty \frac{x}{1+[x]^2} dx$$

Soluție. Folosim inegalitățile $x - 1 < [x] \leq x$. Rezultă $[x]^2 \leq x^2 \implies [x]^2 + 1 \leq x^2 + 1 \implies \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{[x]^2 + 1} \implies \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{[x]^2 + 1}$

Calculăm $\int_0^\infty \frac{x}{x^2 + 1} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \frac{x}{x^2 + 1} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) = \infty$, deci $\int_0^\infty \frac{x}{x^2 + 1} dx$ este divergentă și atunci $\int_0^\infty \frac{x}{1+[x]^2} dx$ este divergentă \square

$$10. \int_0^\infty e^{-3x} \sin(2x + 1) dx$$

Soluție. Avem $|e^{-3x} \sin(2x + 1)| \leq e^{-3x}$, deci $\int_0^\infty e^{-3x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-3x} dx = \frac{1}{3}$. Așadar, $\int_0^\infty e^{-3x} dx$ este convergentă, deci $\int_0^\infty e^{-3x} \sin(2x + 1) dx$ este absolut convergentă \square

$$11. \int_1^\infty x^{-4} \sin x^4 dx$$

Soluție. Facem schimbarea de variabilă $x^4 = t \implies x = \sqrt[4]{t} \implies dx = \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} dt$

Integrala devine $\int_1^\infty \frac{1}{t} \cdot \sin t \cdot \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} dt = \frac{1}{4} \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{7}{4}}} dt$

Cum $|\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{4}}}| \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$ și $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}} dt = -\frac{4}{3}t^{-\frac{3}{4}}/1^{\infty} = \frac{4}{3}$, deci este convergentă, atunci și $\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{4}}} dt$ este absolut convergentă, deci convergentă. \square

12. Să se determine convergența integralei $\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx$, $a > 0, \alpha > 0$ și absolut convergența integralei pentru $\alpha = 1$.

Soluție. Aplicăm criteriul lui Abel pentru $f(x) = \sin x$ și $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, deci $\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx$ este convergentă

Pentru $\alpha = 1$ studiem convergența integralei $\int_a^{\infty} |\frac{\sin x}{x}| dx$. Presupunem prin absurd că $\int_a^{\infty} |\frac{\sin x}{x}| dx$ este convergentă.

Deoarece $\sin^2 x \leq |\sin x|$, rezultă că $\int_a^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ ar fi convergentă, dar

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^{\infty} \frac{1}{x} dx - \int_a^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$$

și $\int_a^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ este convergentă conform criteriului lui Abel, iar $\int_a^{\infty} \frac{1}{x} dx$ e divergentă datorită criteriului cu α . Așadar presupunerea e falsă, deci $\int_a^{\infty} |\frac{\sin x}{x}| dx$ nu este convergentă, adică integrala $\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ nu e absolut convergentă. \square

13. Să se calculeze $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}$, arătându-se mai întâi că are sens.

Soluție. Explicităm modulul și integrala devine

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

Notăm cu I_1 prima integrală și cu I_2 pe cea de-a doua.

Studiem convergența integralei I_1 :

$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\alpha} \cdot \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \implies$ integrala este convergentă

Studiem convergența integralei I_2 :

$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\alpha} \cdot \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha}}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = 1$, pentru $\alpha = 2 > 1$

Deci I_2 e convergentă.

Așadar, $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}$ este convergentă

În I_1 facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{y}$ și obținem

$$I_1 = - \int_{\infty}^1 \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y^2-1}} = I_2,$$

deci $I = 2I_2$.

Pentru I_2 facem schimbarea $x+1 = \frac{1}{t} \implies dx = -\frac{1}{t^2} dt \implies I_2 =$
 $= - \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-2t}} = -\sqrt{1-2t} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = 1 \implies I = 2 \quad \square$

14. Să se studieze convergența integralei $I = \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx$, $a < b$ și apoi să se calculeze.

Soluție. $\lim_{x \rightarrow b} (b-x)^\alpha \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} = \sqrt{b-a}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \implies$ integrala este convergentă

Facem substituția $x = a \cos^2 y + b \sin^2 y \implies dx = (b-a) \sin 2y dy$

Obținem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{(b-a) \sin^2 y}{(b-a) \cos^2 y}} (b-a) \sin 2y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{\cos y} (b-a) 2 \sin y \cos y dy =$$

$$= 2(b-a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y dy = (b-a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2y) dy = \frac{\pi}{2} (b-a) \quad \square$$

15. Să se studieze convergența integralei $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}}$ și apoi să se calculeze.

Soluție. $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \cdot \frac{1}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}} = -\frac{1}{4}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^\alpha \cdot \frac{1}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}} = -\frac{1}{3}$$
, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

Deci I este convergentă.

Facem substituția $\frac{1-x}{x} = t^2 \implies x = \frac{1}{1+t^2} \implies dx = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} dt$ și obținem $I = \int_0^\infty \frac{1+t^2}{-4t^4-8t^2-3} dt$. Integrală ce se rezolvă prin descompunerea în fracții simple. \square

16. (Formula lui Froullani) Fie $0 < a < b$ și fie $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ o funcție continuă și mărginită astfel încât integrala $\int_1^\infty \frac{f(t)}{t} dt$ este convergentă

Să se demonstreze egalitatea:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = f(0) \ln \frac{a}{b}.$$

Soluție. Vom demonstra mai întâi egalitatea:

$$\int_u^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t} dt, \quad \forall u > 0. \quad (*)$$

Fie $u > 0$; cu schimbarea de variabilă $bx = t$, obținem:

$$\int_u^\infty \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{bu}^\infty \frac{f(t)}{t} dt.$$

Analog, se demonstrează și egalitatea:

$$\int_u^\infty \frac{f(ax)}{x} dx = \int_{au}^\infty \frac{f(t)}{t} dt.$$

Prin scăderea membru cu membru a celor două egalități rezultă egalitatea (*). Demonstrăm acum formula lui Froullani; folosind egalitatea (*), avem:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \lim_{u \rightarrow 0} \int_u^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \lim_{u \rightarrow 0} \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Pentru a calcula ultima integrală considerăm funcția

$$h(u) = \sup_{t \in [au, bu]} |f(t) - f(0)|.$$

Din continuitatea funcției f , rezultă $\lim_{u \rightarrow 0} h(u) = 0$. Evident, avem:

$$\int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{bu}^{au} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt + \int_{bu}^{au} \frac{f(0)}{t} dt.$$

Prima integrală tinde la 0 pentru $u \mapsto 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{bu}^{au} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt \right| &\leq \int_{bu}^{au} \frac{|f(t) - f(0)|}{t} dt \leq \\ &\leq \int_{bu}^{au} \frac{h(u)}{t} dt = h(u) \ln \frac{a}{b} \mapsto 0 \text{ atunci când } u \mapsto 0. \end{aligned}$$

In concluzie:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \lim_{u \rightarrow 0} \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t} dt = \lim_{u \rightarrow 0} \int_{bu}^{au} \frac{f(0)}{t} dt = f(0) \ln \frac{a}{b}.$$

□

17. Fie $0 < a < b$; să se calculeze integralele:

a. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$

b. $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx.$

Soluție. Se aplică formula lui Froullani. \square

18. Fie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln(1 + xy), & x \in (0, \infty) \times [0, \infty) \\ y, & x = 0, y \in [0, \infty) \end{cases}$$

Să se calculeze derivata funcției $F(y) = \int_0^y f(x, y) dx, y \in [0, \infty)$.

Soluție. Funcția f este continuă pe $(0, \infty) \times [0, \infty)$ și studiem continuitatea în punctele $(0, y_0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow y_0} \frac{1}{x} \ln(1 + xy) = \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow y_0} \frac{\ln(1 + xy)}{xy} \cdot y = y_0 = f(0, y_0), \text{ deci}$$

f este continuă în punctele $(0, y_0)$

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1+xy}, & x \in (0, \infty) \times [0, \infty) \\ 1, & x = 0, y \in [0, \infty) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow y_0} \frac{1}{1+xy} = 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0), \text{ deci } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ e continuă pe } [0, \infty) \times [0, \infty)$$

$\alpha(y) = 0, \beta(y) = y$ sunt de clasă $C^1([0, \infty))$

$$\begin{aligned} \text{Conform teoremei 8.1, } F \text{ e derivabilă și } F'(y) &= \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + \\ &+ f(y, y) = \int_0^y \frac{1}{1+xy} dx + \frac{1}{y} \cdot \ln(1 + y^2) = \frac{1}{y} \cdot \ln(1 + xy) \Big|_0^y + \frac{1}{y} \cdot \ln(1 + y^2) = \\ &= \frac{2}{y} \cdot \ln(1 + y^2) \end{aligned} \quad \square$$

Să se calculeze integralele, folosind derivarea sub semnul integral:

19. $I(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x) dx, m \in \mathbb{R}_+$

Soluție. Funcția $f(x, m) = \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x)$ e continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu m .

$$\text{Avem } I'(m) = 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + m^2 \sin^2 x} dx$$

Facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$ și obținem:

$$\begin{aligned} I'(m) &= 2m \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+m^2 t^2)(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{m+1} \text{ (se rezolvă prin descompunere} \\ &\text{în fracții simple)} \implies I(m) = \pi \ln(m+1) + c. \text{ Cum } I(1) = 0 \implies c = \\ &= -\pi \ln 2 \implies I(m) = \pi \ln \frac{m+1}{2} \end{aligned} \quad \square$$

20. $I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx, |r| < 1$

Soluție. Funcția $f(x, r) = \ln(1 - 2r \cos x + r^2)$ e continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu r .

$$\text{Avem } I'(r) = \int_0^{\pi} \frac{-2 \cos x + 2r}{1 - 2r \cos x + r^2} dx$$

Facem $x = 2y$ și obținem

$$I'(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2 \cos 2y + 2r}{1 - 2r \cos 2y + r^2} \cdot 2dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r - \cos 2y}{1 - 2r \cos 2y + r^2} dy$$

Facem schimbarea $t = \operatorname{tg} y$ și avem $I'(r) = 4 \int_0^{\infty} \frac{r - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 - 2r \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + r^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt =$

$$= 4 \int_0^{\infty} \frac{(r+1)(1+t^2) - 2}{t^2(r+1)^2 + (r-1)^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = 4 \int_0^{\infty} \frac{r+1}{t^2(r+1)^2 + (r-1)^2} dt -$$

$$- \frac{2(r+1)^2}{r} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+r)^2 t^2 + (r-1)^2} + \frac{2}{r} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = -\frac{4}{r-1} \operatorname{arctg} \frac{t(1+r)}{1-r} /_0^{\infty} -$$

$$- \frac{2(r+1)^2}{r} \cdot \frac{1}{r-1} \operatorname{arctg} \frac{r+1}{r-1} t /_0^{\infty} + \frac{2}{r} \operatorname{arctg} t /_0^{\infty} = 0 \implies I(r) = c, \text{ dar } I(0) =$$

$$= 0 \implies c = 0 \implies I(r) = 0, \text{ pentru } |r| < 1 \quad \square$$

21. $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 \theta) d\theta, a > 1$

Soluție. Funcția $f(x, a) = \ln(a^2 - \sin^2 \theta)$ e continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu a .

$$\text{Avem } I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 \theta} d\theta$$

Facem schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg} \theta$ și rezultă

$$I'(a) = \int_0^{\infty} \frac{2a}{a^2 - \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{2a}{t^2(a^2-1) + a^2} dt = \frac{2a}{a^2-1} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2 + \frac{a^2}{a^2-1}} dt =$$

$$= \frac{2a}{a^2-1} \cdot \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} \cdot \operatorname{arctg} t \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} /_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \implies$$

$$= I(a) = \int \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} da = \pi \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + c$$

Pentru a determina constanta c scriem integrala $I(a)$ sub forma

$$I(a) = \pi \ln a + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{a^2} \right) d\theta \implies c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{a^2} \right) d\theta -$$

$$- \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2-1}}{a}$$

Trecem la limită când $a \rightarrow \infty$.

Intrucât $\left| \ln \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{a^2} \right) \right| \leq \left| \ln \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \right|$, integrala tinde la 0 și găsim $c = -\pi \ln 2$

$$\text{Deci } I(a) = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2-1}}{2} \quad \square$$

22. $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+a \cos x)}{\cos x} dx, |a| < 1$

Soluție. Funcția $f(x, a) = \frac{\ln(1+a \cos x)}{\cos x}$ e continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu a .

$$\text{Avem } I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a \cos x}$$

Facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ și obținem:

$$I'(a) = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2(1-a)+1+a} = \frac{2}{1-a} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + \frac{1+a}{1-a}} = \frac{2}{1-a} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \cdot$$

$$\operatorname{arctg} \left(t \cdot \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) /_0^1 = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \implies$$

$$\implies I(a) = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} da$$

Pentru a rezolva această integrală facem schimbarea de variabilă $a = \cos u$ și obținem:

$$\begin{aligned} I(a) &= 2 \int \frac{1}{\sin u} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} \cdot (-\sin u) du = -2 \int \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} du = \\ &= -2 \int \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}}} du = -2 \int \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}} du = -2 \int \frac{u}{2} du = \\ &= -\frac{u^2}{2} + c \implies I(a) = -\frac{(\arccos a)^2}{2} + c, \text{ dar } I(0) = 0 \implies c = \frac{\pi^2}{8} \implies \\ &\implies I(a) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{(\arccos a)^2}{2} \quad \square \end{aligned}$$

23. $I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1-ax^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx, |a| < 1$

Soluție. Funcția $f(x, a) = \frac{\ln(1-ax^2)}{\sqrt{1-x^2}}$ e continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu a . Avem $I'(a) = -\int_0^1 \frac{x^2}{(1-ax^2)\sqrt{1-x^2}} dx$

Facem schimbarea de variabilă $x = \sin t$ și obținem:

$$I'(a) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{(1-a \sin^2 t) \cos t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1-a \sin^2 t} dt$$

După o nouă schimbare de variabilă $u = \operatorname{tg} t$ obținem:

$$\begin{aligned} I'(a) &= -\int_0^{\infty} \frac{\frac{u^2}{1+u^2}}{1-a \frac{u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{1}{1+u^2} du = -\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)[1+(1-a)u^2]} du = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} - \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+(1+a)u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} u \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-a} \cdot \sqrt{1-a} \cdot \\ &\cdot \operatorname{arctg} \sqrt{1-a} \cdot u \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{a\sqrt{1-a}} \cdot \frac{\pi}{2} \implies I(a) = \frac{\pi}{2} \int \frac{da}{a} - \\ &-\frac{\pi}{2} \int \frac{da}{a\sqrt{1-a}} = \frac{\pi}{2} \cdot \ln a - \frac{\pi}{2} \cdot \ln \frac{1-\sqrt{1-a}}{1+\sqrt{1-a}} + c = \frac{\pi}{2} \ln a \cdot \frac{1+\sqrt{1-a}}{1-\sqrt{1-a}} = \\ &= \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{1-a})^2 = \pi \ln(1+\sqrt{1-a}) \text{ (am făcut schimbarea } \\ &\sqrt{1-a} = y), \text{ dar } I(0) = 0 \implies c = -\pi \ln 2 \implies \\ &\implies I(a) = \pi \ln(1+\sqrt{1-a}) - \pi \ln 2 \quad \square \end{aligned}$$

24. $I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$

Soluție. Se consideră $I(a) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x\sqrt{1-x^2}} dx, a > 0$

Funcția $f(x, a) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}$ și admite o derivată parțială continuă în raport cu a . Avem

$$I'(a) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Facem schimbarea de variabilă $x = \sin t$ și obținem:

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+a^2 \sin^2 t}$$

Acum, cu o nouă schimbare $\operatorname{tg} t = u$ obținem:

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\infty} \frac{du}{(1+a^2)u^2+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \implies I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(a + \sqrt{1+a^2}) + c, \\ \text{dar } I(0) &= 0 \implies c = 0 \implies I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(a + \sqrt{1+a^2}) \end{aligned}$$

Pentru $a = 1 \implies I = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$ □

25. Folosind posibilitatea permutării integralelor depinzând de un parametru, să se calculeze $\int_0^1 \varphi(x) dx$, unde $\varphi(x) = \frac{1}{\ln x} (x^b - x^a)$, $x \neq 0$, $a, b > 0$ și $\varphi(0) = 0$.

Soluție. Observăm că $\varphi(x) = \int_a^b x^y dy$, $x \in [0, 1]$

Considerând integrala cu parametru $F(y) = \int_0^1 x^y dx$, observăm că funcția $f(x, y) = x^y$ este continuă pe $[0, 1] \times [0, 1]$.

Conform schimbării ordinei de integrare avem:

$$\int_a^b F(y) dy = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Dar } F(y) &= \int_0^1 x^y dx = \frac{1}{y+1} x^{y+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{y+1}, \text{ deci } \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \\ &= \ln \frac{b+1}{a+1} \end{aligned} \quad \square$$

Să se calculeze următoarele integrale, cu ajutorul funcțiilor Γ și B :

26. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} x \cos^{\frac{3}{2}} x dx$

Soluție. Facem schimbarea $y = \sin^2 x \implies dy = 2 \sin x \cos x dx$ și obținem:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{3}{4}} (1-y)^{\frac{1}{4}} dy$$

$$\begin{aligned} \text{Deci } p-1 &= \frac{3}{4}, q-1 = \frac{1}{4} \implies p = \frac{7}{4}, q = \frac{5}{4} \implies I = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{7}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{4}\Gamma(\frac{3}{4})\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})}{2!} = \frac{3}{64} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{64} \end{aligned} \quad \square$$

27. Să se determine aria figurii mărginită de curba $r^4 = \sin^3 \theta \cos \theta$.

Soluție. Curba are 2 bucle, în primul cadran și în al doilea cadran; este suficient să se dubleze aria uneia din aceste bucle. Folosim formula ariei în coordonate polare $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} \theta \cos^{\frac{1}{2}} \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin \theta \cos \theta \sin^{\frac{1}{2}} \theta \cos^{-\frac{1}{2}} \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{1}{4}} (1-y)^{-\frac{1}{4}} dy = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4}+\frac{3}{4})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{1!} = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \end{aligned} \quad \square$$

28. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$, $n > \frac{1}{2}$

Soluție. Facem schimbarea $y = \sin^2 x \implies dy = 2 \sin x \cos x dx$ și obținem:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \cos^{-1} x 2 \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 y^{n-\frac{1}{2}} (1-y)^{-\frac{1}{2}} dy = \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1 \cdot \pi}{2^n n!} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad \square \end{aligned}$$

29. $I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}$

Soluție. Facem schimbarea $\cos\theta = 1 - 2\sqrt{x} \implies -\sin\theta d\theta =$
 $= -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x}} dx \implies d\theta = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sin\theta} dx$

Avem $\cos^2\theta = (1 - 2\sqrt{x})^2 \implies \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - (1 - 2\sqrt{x})^2 =$
 $= 4\sqrt{x} - 4x \implies \sin\theta = \sqrt{4\sqrt{x} - 4x}$

Atunci $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3-1+2\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\sqrt{x}-4x}} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{(1+\sqrt{x})(\sqrt{x}-x)}} =$
 $= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}(1-x)}} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{4}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) =$
 $= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\cdot\frac{1}{4}-1}} \Gamma(2\cdot\frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{4})}} =$
 $= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2$ (am folosit relația lui Legendre) □

30. $\int_a^b (b-x)^{q-1} (x-a)^{p-1} dx, p, q \in \mathbb{R}_+$

Soluție. Facem schimbarea $t = \frac{x-a}{b-a} \implies x = a + t(b-a) \implies$
 $\implies dx = (b-a)dt$

Integrala devine $\int_0^1 (b-a)^{q-1} (1-t)^{q-1} t^{p-1} (b-a)^{p-1} (b-a) dt =$
 $= (b-a)^{q+p-1} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = (b-a)^{p+q-1} B(p, q)$ □

31. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[6]{(x+1)^5(2-x)}}$

Soluție. E caz particular al ex. precedent pentru $a = -1, b = 2, q-1 =$
 $= -\frac{1}{6}, p-1 = -\frac{5}{6}$

Deci $I = (2 - (-1))^0 B\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2\pi$ □

32. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{n_1 x} (1 + \frac{n_1}{n_2} e^{2x})^{\frac{n_1+n_2}{2}} dx, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$

Soluție. Facem substituția $y = \frac{n_1}{n_2} e^{2x} \implies x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n_2}{n_1} y \right) \implies dx = \frac{1}{2} y^{-1} dy$

$$\begin{aligned} \text{Integrala devine } & \int_0^\infty e^{n_1 \cdot \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n_2}{n_1} y \right)} (1+y)^{\frac{n_1+n_2}{2}} \cdot \frac{1}{2} y^{-1} dy = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{n_2}{n_1} y \right)^{\frac{n_1}{2}} (1+y)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} y^{-1} dy = \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^{\frac{n_1}{2}} \int_0^\infty y^{\frac{n_1}{2}-1} (1+y)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^{\frac{n_1}{2}} B \left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2} \right) \quad \square \end{aligned}$$

33. $\int_1^e \frac{1}{x} \ln^3 x (1 - \ln x)^4 dx$

Soluție. Facem schimbarea $\ln x = t \implies x = e^t dt$ și integrala devine $\int_0^1 e^{-t} t^3 (1-t)^4 e^t dt = \int_0^1 t^3 (1-t)^4 dt = B(4, 5) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(5)}{\Gamma(9)} = \frac{3! \cdot 4!}{8!} \quad \square$

34. $\int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx$

Soluție. Facem schimbarea $\ln \frac{1}{x} = t \implies x = e^{-t} \implies dx = -e^{-t} dt$ și integrala devine $\int_\infty^0 t^{\frac{1}{2}} (-e^{-t}) dt = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \Gamma \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \square$

35. $I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2} dx$

Soluție. Vom găsi o nouă formulă pentru $B(p, q)$:

În formula (8.1) facem schimbarea de variabilă $x = \frac{y}{y+1}$ și obținem:

$$B(p, q) = \int_0^\infty \left(\frac{y}{y+1} \right)^{p-1} \cdot \frac{1}{(1+y)^{q-1}} \cdot \frac{dy}{(y+1)^2} = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(y+1)^{p+q}} dy$$

Pentru problema noastră $p-1 = \frac{1}{4}, p+q = 2 \implies p = \frac{5}{4}, q = \frac{3}{4}$

$$\text{Așadar } I = B \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4} \right) = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)} = \frac{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{1!} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \quad \square$$

36. $I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^4)^2} dx$

Soluție. Facem schimbarea de variabilă $x^4 = t \implies x = t^{\frac{1}{4}} \implies dx = \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} dt \implies I = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{(1+t)^2} dt = \frac{1}{4} B \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})}{1!} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{16} \quad \square$

37. $\int_{-\infty}^\infty x^k \left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-\frac{n+1}{2}} dx, n, k \in \mathbb{N}^*$

Soluție. Pentru $k = 2p$, funcția $f(x) = x^k \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ este pară, deci $I = 2 \int_0^\infty x^k \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$

Facem substituția $t = \frac{x^2}{n} \implies x = \sqrt{nt}^{\frac{1}{2}} \implies dx = \frac{\sqrt{n}}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$

$$I = 2 \int_0^\infty (nt)^p (1+t)^{-\frac{n+1}{2}} \frac{\sqrt{n}}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = n^{p+\frac{1}{2}} \int_0^\infty t^{p-\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{n+1}{2}} dt = n^{p+\frac{1}{2}} B\left(p + \frac{1}{2}, \frac{n}{2} - p\right) \text{ cu condiția } \frac{n}{2} - p > 0$$

$$B\left(p + \frac{1}{2}, \frac{n}{2} - p\right) = \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2} - p\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \text{ unde } \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \left(p + \frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(p + \frac{1}{2} - 2\right) \cdots \left(p + \frac{1}{2} - p\right)\Gamma\left(p + \frac{1}{2} - p\right) = \frac{2p-1}{2} \cdot \frac{2p-3}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)}{2^p} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{(2p-1)!!}{2^p} \cdot \sqrt{\pi}$$

Pentru $k = 2p + 1$, funcția f este impară deci $I = 0$ □

38. $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^n}}$

Soluție. Facem schimbarea de variabilă $x^n = t \implies x = t^{\frac{1}{n}} \implies dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1-n}{n}} dt \implies I = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t^{\frac{1-n}{n}}}{\sqrt[3]{1-t}} dt = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}}$ □

39. $\int_{-1}^\infty e^{-x^2-2x+3} dx$

Soluție. $\int_{-1}^\infty e^{-(x+1)^2+4} dx = e^4 \int_{-1}^\infty e^{-(x+1)^2} dx = e^4 \int_0^\infty e^{-y^2} dy = e^4 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ □

8.3 Probleme propuse

Să se studieze convergența integralelor:

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$

R: $\alpha = 4 > 1 \implies$ convergentă

2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$

R: $\alpha = 2 > 1 \implies$ divergentă

3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$

R: $\alpha = \frac{1}{3} < 1 \implies$ convergentă

4. $\int_0^1 \left[\frac{1}{x}\right] dx$

R: divergentă

5. $\int_0^1 |\ln x| dx$

R: convergentă

6. $\int_0^\infty [3e^{-2x}] dx$

R: convergentă

7. $\int_0^1 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

R: Calculăm $\lim_{u \rightarrow 0} \int_u^1 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \sin 1 \implies$ convergentă

8. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

R: $\frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{\pi}{2x^3} \implies$ convergentă

9. $\int_0^\infty e^{\sin x} \cdot \frac{\sin 2x}{x^\lambda} dx, \lambda > 0$

R: convergentă, cf. criteriului lui Abel, unde $f(x) = e^{\sin x} \cdot \sin 2x$, $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$

Să se studieze convergența și să se calculeze:

10. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, a < b$

R: $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \implies$ convergentăFacem substituția $x = a \cos^2 y + b \sin^2 y$

11. Fie $F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx, y > 0$ și $F(0) = -1$. Să se arate că $F'(0) \neq \int_{0+0}^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right)_{y=0} dx$.

Folosind posibilitatea de derivare sub semnul integral, să se calculeze:

12. $F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg} x} \operatorname{arctg}(y \operatorname{tg} x) dx, y \geq 0$.

R: $F(y) = \frac{\pi}{2} \ln(y+1)$

13. $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \sin x}{1-a \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x}, |a| < 1$

R: $I(a) = \pi \operatorname{arcsin} a$

14. $I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx, a^2 < 1$

R: $I(a) = \pi(\sqrt{1-a^2} - 1)$ Să se calculeze următoarele integrale cu ajutorul funcțiilor Γ și B :

15. $\int_0^\infty e^{-x^p} dx, p > 0$

R: $\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)$

16. $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$

R: $\frac{\pi}{8}$

17. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$

R: $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

18. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)}$

R: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

19. $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx, m, n > 0$

R: $\frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}}, 0 < m < n$

20. $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2} dx$

R: $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

21. $\int_{-\infty}^\infty e^{-2x^2+x+1} dx$

R: $\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{9}{8}} \cdot \sqrt{2\pi}$

Capitolul 9

Integrale curbilinii

9.1 Noțiuni teoretice

Drumuri parametrizate

Definiția 9.1. Fie J un interval real; se numește **drum parametrizat** pe J cu valori în \mathbb{R}^n orice aplicație continuă $\gamma : J \mapsto \mathbb{R}^n$.

Definiția 9.2. Dacă notăm $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$, atunci relațiile

$$x_1 = \gamma_1(t), x_2 = \gamma_2(t), \dots, x_n = \gamma_n(t)$$

se numesc **ecuațiile parametrice** ale drumului γ .

Definiția 9.3. Dacă $J = [a, b]$, atunci $\gamma(a)$ și $\gamma(b)$ se numesc **capetele** (extremitățile) drumului. Drumul se numește **închis** dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Opusul drumului $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ este, prin definiție,

$$\gamma^- : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n, \gamma^-(t) = \gamma(a + b - t).$$

Evident, γ și γ^- au aceeași imagine.

Dacă $\gamma_1 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ și $\gamma_2 : [b, c] \mapsto \mathbb{R}^n$ sunt două drumuri parametrizate, atunci drumul concatenat $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a, c] \mapsto \mathbb{R}^n$ este definit prin

$$\gamma_1 \cup \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b, c] \end{cases}$$

Imaginea lui $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este reuniunea imaginilor drumurilor γ_1 și γ_2 .

Definiția 9.4. Un drum $\gamma : J \mapsto \mathbb{R}^n$ se numește **neted** dacă aplicația γ este de clasă \mathcal{C}^1 și $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in J$.

Definiția 9.5. Un drum se numește **neted pe porțiuni** dacă este concatenarea unui număr finit de drumuri netede.

Definiția 9.6. Două drumuri $\gamma_1 : I \mapsto \mathbb{R}^n$ și $\gamma_2 : J \mapsto \mathbb{R}^n$ se numesc **echivalente cu aceeași orientare** (notăm $\gamma_1 \sim \gamma_2$) dacă există un difeomorfism strict crescător $\phi : I \mapsto J$ astfel încât $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$. Dacă difeomorfismul de mai sus este strict descrescător, atunci cele două drumuri se numesc **echivalente cu orientări opuse**.

În cazurile particulare $n = 2$ (plan) și $n = 3$ (spațiu) notațiile uzuale sunt $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ și respectiv $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Lungimea unui drum neted $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ este:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Integrala curbilinie de prima speță

Fie $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ un drum neted și fie $f : D \mapsto \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $D \supseteq \gamma([a, b])$. Integrala curbilinie de prima speță a funcției f pe drumul γ este, prin definiție:

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Dacă γ_1 și γ_2 sunt două drumuri parametrizate echivalente (indiferent de orientare) atunci $\int_{\gamma_1} f ds = \int_{\gamma_2} f ds$.

Aplicații

- i. Dacă f este funcția constantă 1, atunci se obține lungimea drumului γ .
- ii. Dacă imaginea lui γ este un fir material având densitatea f , atunci masa M și coordonatele centrului de greutate G sunt date de formulele:

$$M = \int_{\gamma} f ds,$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{\gamma} x f ds, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_{\gamma} y f ds, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_{\gamma} z f ds.$$

Integrala curbilinie de speța a doua

Fie $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ o 1-formă diferențială cu funcțiile P, Q, R continue pe un deschis $D \subseteq \mathbb{R}^3$ și fie

$$\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

un drum parametrizat neted cu imaginea inclusă în D . Integrala curbilinie a formei diferențiale α de-a lungul drumului γ este, prin definiție:

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_a^b (P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t) + R(\gamma(t))z'(t)) dt.$$

Definiția se generalizează evident la n variabile. De exemplu, în două variabile:

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_a^b (P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t)) dt.$$

Dacă γ_1 și γ_2 sunt două drumuri parametrizate echivalente cu aceeași orientare, atunci integralele corespunzătoare sunt egale:

$$\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha.$$

Dacă cele două drumuri parametrizate sunt echivalente dar cu orientări opuse, atunci integralele corespunzătoare diferă prin semn.

Notații vectoriale

Unei 1-forme diferențiale $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ i se asociază (în mod canonic) câmpul de vectori $\bar{V} : D \mapsto R^3$, $\bar{V} = (P, Q, R)$. Dacă γ este un drum parametrizat neted (cu imaginea inclusă în D), atunci integrala $\int_{\gamma} \alpha$ se mai notează și $\int_{\gamma} \bar{V} d\bar{r}$, numindu-se circulația câmpului \bar{V} de-a lungul drumului γ . În particular, dacă $\bar{V} = \bar{F}$ este un câmp de forțe, atunci circulația $\int_{\gamma} \bar{F} d\bar{r}$ este lucrul mecanic efectuat de forța \bar{F} pe drumul γ .

Forme diferențiale exacte

Definiția 9.7. O 1-formă diferențială $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ se numește **exactă** pe mulțimea D dacă există f o funcție (numită potențial scalar sau primitivă) de clasă $C^1(D)$ astfel încât $Df = \alpha$, sau, echivalent:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R,$$

în orice punct din D . Câmpul de vectori $\bar{V} = (P, Q, R)$ asociat formei diferențiale α se numește în acest caz **câmp de gradienti**.

Definiția 9.8. O 1-formă diferențială $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ se numește **închisă** pe D dacă sunt verificate (în orice punct din D) egalitățile:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Definițiile de mai sus se generalizează în mod evident la n variabile. Importanța formelor diferențiale exacte este dată de următorul rezultat:

Teorema 9.1. (Independența de drum a integralei curbilinii) Fie $\alpha = Df$ o 1-formă diferențială exactă pe D și fie γ un drum parametrizat neted cu imaginea inclusă în D având extremitățile $p, q \in D$; atunci:

i. $\int_{\gamma} Df = f(q) - f(p)$.

ii. dacă în plus drumul γ este închis, atunci $\int_{\gamma} Df = 0$.

Din teorema de simetrie a lui Schwarz rezultă că orice formă diferențială exactă (cu potențialul scalar de clasă C^2) este în mod necesar și închisă. Reciproca acestei afirmații este, în general, falsă. De exemplu, forma diferențială

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

este închisă pe $R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dar nu este exactă pe această mulțime. Are loc totuși următorul rezultat fundamental:

Teorema 9.2. (Teorema lui Poincare) Fie α o 1-formă diferențială de clasă C^1 închisă pe deschisul $D \subseteq R^n$. Atunci pentru orice $x \in D$ există o veciătate deschisă a sa $U \subseteq D$ și o funcție $f \in C^1$ astfel încât $Df = \alpha$ pe U .

Intr-o formulare succintă teorema afirmă că orice 1-formă diferențială închisă este local exactă.

Există mulțimi pe care teorema de mai sus este adevărată global. De exemplu, dacă mulțimea D este stelată (adică există un punct $x_0 \in D$ cu proprietatea că segmentul $[x_0, x] \subseteq D, \forall x \in D$) atunci orice 1-formă diferențială închisă pe D este exactă pe D .

9.2 Probleme rezolvate

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța întâi :

1. $\int_C x ds, C : y = x^2, x \in [0, 2]$

Soluție. Folosim formula de calcul a integralei curbilinii de prima speță pentru curbe care nu sunt date parametric $C : y = \varphi(x), x \in [a, b]$:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$$

Avem $\int_C x ds = \int_0^2 x \sqrt{1 + 4x^2} dx$ (cu schimbarea $u = 1 + 4x^2$) □

2. $\int_C y^5 ds, C : x = \frac{y^4}{4}, y \in [0, 2]$

Soluție. Analog cu exercițiul 1:

$$\begin{aligned} \int_C y^5 ds &= \int_0^2 y^5 \sqrt{1 + y^6} dy = \frac{1}{6} \int_0^2 6y^5 \sqrt{1 + y^6} dy = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{2^6} \sqrt{1 + t} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2^6} = \frac{1}{9} (\sqrt{65^3} - 1) \end{aligned} \quad \square$$

3. $\int_C z(x^2 + y^2) ds, C : x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, t \in [0, 1]$

Soluție. $\int_C z(x^2 + y^2) ds = \int_0^1 t(t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t) \cdot \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt = \int_0^1 t^3 \sqrt{2 + t^2} dt =$
 $= \frac{1}{2} \int_0^1 u \sqrt{2 + u} du = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (p^2 - 2) \cdot p \cdot 2p dp = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} p^2 (p^2 - 2) dp =$
 $= \frac{p^5}{5} / \sqrt{3} - 2 \frac{p^3}{3} / \sqrt{2} \quad \square$

4. $\int_C x^2 ds, C : x^2 + y^2 = 2, x \geq 0, y \geq 0$

Soluție. Curba C reprezintă un sfert de cerc. Parametrizarea cercului este $x = \sqrt{2} \cos \theta, y = \sqrt{2} \sin \theta$, iar din $x \geq 0, y \geq 0 \implies \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_C x^2 ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 \theta \sqrt{2 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta} d\theta = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta =$$

$$= \sqrt{2} (\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta) / 0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad \square$$

5. $\int_C x^2 ds$, unde C este arcul de cerc definit prin intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu planul $y = x$, parcurs de la punctul $A(0, 0, -a)$ la punctul $B(0, 0, a)$.

Soluție. Folosind coordonatele sferice găsim o reprezentare parametrică a arcului de cerc C :

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \theta$$

$$y = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \theta$$

$$z = a \cos \theta$$

unde $\rho = a, \varphi = \frac{\pi}{4}, \theta \in [0, \pi]$

$$\int_C x^2 ds = \int_0^{\pi} \frac{a^2}{2} \sin^2 \theta \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \cos \theta\right)^2 + (-a \sin \theta)^2} d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{a^3}{2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{a^3}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{a^3}{2} \left[\frac{1}{2} \theta / 0^{\pi} - \sin 2\theta / 0^{\pi} \right] = \frac{a^3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{a^3 \pi}{4} \quad \square$$

6. $\int_C xy ds$, unde C este curba de intersecție a suprafețelor $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ situată în primul octant.

Soluție. Curba este intersecția dintre o sferă și un cilindru și o parametrizăm folosind coordonate cilindrice:

$$x = \frac{a}{2} \cos \theta$$

$$y = \frac{a}{2} \sin \theta$$

$$z = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

unde $\rho = \frac{a}{2}$, z se obține făcând sistem între cele două ecuații ale suprafețelor și păstrând doar valoarea pozitivă deoarece curba se află în primul octant, adică $z \geq 0$, iar $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ deoarece $x \geq 0, y \geq 0$, curba fiind în primul octant

$$\begin{aligned} \int_C xy ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{4} \cos \theta \sin \theta \sqrt{\left(-\frac{a}{2} \sin \theta\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \cos \theta\right)^2} d\theta = \\ &= \frac{a^3}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{a^3}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \frac{a^3}{16} \left(\frac{-\cos 2\theta}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{16} \quad \square \end{aligned}$$

7. Să se calculeze lungimea arcului de curbă dat prin $y = \operatorname{ch} x$, $0 \leq x \leq \ln 2$.

$$\begin{aligned} \text{Soluție. } l &= \int_C ds = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^{\ln 2} \operatorname{ch} x dx = \\ &= \operatorname{sh} x \Big|_0^{\ln 2} = \frac{3}{4} \quad \square \end{aligned}$$

8. Să se calculeze centrul de greutate al barei $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $0 \leq x \leq a$.

$$\begin{aligned} \text{Soluție. } x_G &= \frac{\int_C x ds}{\int_C ds} = \frac{\int_0^a x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx}{\int_0^a \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx} = \frac{ax \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^a - a \int_0^a \operatorname{sh} \frac{x}{a} dx}{a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^a} = \\ &= \frac{a^2 \operatorname{sh} 1 - a^2 \operatorname{ch} \frac{x}{a} \Big|_0^a}{a \operatorname{sh} 1} = \frac{2a}{e+1} \\ y_G &= \frac{\int_C y ds}{\int_C ds} = \frac{a \int_0^a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx}{a \operatorname{sh} 1} = \frac{\frac{a}{2} \int_0^a (\operatorname{ch} \frac{2x}{a} + 1) dx}{a \operatorname{sh} 1} = \frac{a(e^4 - 1 + 4e^2)}{4e(e^2 - 1)} \quad \square \end{aligned}$$

Să se calculeze următoarele integrale curbilunii de speța doua:

9. $\int_C \frac{dx}{2a+y} - \frac{dy}{a+x}$, unde C este curba simplă care are drept imagine porțiunea din cercul $x^2 + y^2 + 2ay = 0$ ($a > 0$), pentru care $x + y \geq 0$ și extremitatea inițială în punctul $A_1(a, -a)$.

Soluție. Cercul are centrul în punctul $(0, -a)$ și raza a . Dreapta $x + y = 0$ este a doua bisectoare, iar inegalitatea $x + y \geq 0$ reprezintă semiplanul determinat de această dreaptă, care conține punctul $(1, 1)$. Bisectoarea a doua taie cercul în punctele $A_1(a, -a)$ și $O(0, 0)$. Atunci, reprezentarea parametrică a curbei este

$$x = a \cos t, y = -a + a \sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Integrala devine:

$$I = \int_C \frac{dx}{2a+y} - \frac{dy}{a+x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-a \sin t}{a+a \sin t} - \frac{a \cos t}{a+a \cos t} dt$$

Folosind identitățile

$$\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) - 1 \text{ și } \cos t = 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1 \text{ obținem}$$

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) - 1}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)} + \frac{2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} \right] dt = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)} + 1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} \right] dt = \\ &= -2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \operatorname{tg} \frac{t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi + 2 \quad \square \end{aligned}$$

10. $\int_C x dy - y dx$, $C : x^2 + y^2 = 4$, $y = \sqrt{3}x$, $x \geq 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$

Soluție. $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, unde $C_1 : y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x \in [0, \sqrt{3}]$,
 $C_2 : x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, $C_3 : y = x\sqrt{3}, x \in [0, 1]$

Atunci

$$\begin{aligned} \int_C xdy - ydx &= \int_{C_1} xdy - ydx + \int_{C_2} xdy - ydx + \int_{C_3} xdy - ydx = \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} [2 \cos t \cdot 2 \cos t - 2 \sin t \cdot (-2 \sin t)] dt + \\ &+ \int_1^0 (x\sqrt{3} - x\sqrt{3}) dx = \frac{2\pi}{3} \quad \square \end{aligned}$$

11. $\int_C (y-2z)dx - (z-x)dy + (2x-y)dz$, unde C este curba simplă și închisă care are drept imagine cercul din spațiu aflat la intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ cu planul $x-y+z = 0$; are ambele capete în punctul $A \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{a}{\sqrt{2}} \right)$; determină pe acest cerc sensul trigonometric direct (sau invers acelor de ceasornic) dacă privim dinspre partea pozitivă a axei Ox .

Soluție. Proiecția cercului dat pe planul xOy este o elipsă și ecuația sa se obține eliminând pe z între ecuațiile $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ și $x - y + z = 0$. Ecuația elipsei va fi

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (x-y)^2 = a^2 &\iff x^2 - xy + y^2 = \frac{a^2}{2} \iff \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Punând $x - \frac{y}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin t, t \in [0, 2\pi]$ obținem o parametrizare parametrică a elipsei:

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{a}{\sqrt{6}} \sin t, y = \frac{2a}{\sqrt{6}} \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

Înlocuind expresiile lui x și y din reprezentarea de mai sus în ecuația planului $x - y + z = 0$ îl determinăm pe z ca funcție de t și obținem reprezentarea curbei C :

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{a}{\sqrt{6}} \sin t, y = \frac{2a}{\sqrt{6}} \sin t, z = \frac{a}{\sqrt{6}} \sin t - \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, t \in [0, 2\pi]$$

Avem

$$\begin{aligned} \int_C (y-2z)dx - (z-x)dy + (2x-y)dz &= \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2a}{\sqrt{2}} \cos t \left(-\frac{a}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{a}{\sqrt{6}} \cos t \right) + \frac{2a}{\sqrt{2}} \cos t \cdot \frac{2a}{\sqrt{6}} \cos t + \frac{2a}{\sqrt{2}} \cos t \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{6}} \cos t + \frac{a}{\sqrt{2}} \sin t \right) \right] dt = \int_0^{2\pi} \frac{4a^2}{\sqrt{3}} \cos^2 t dt = \frac{4a^2}{\sqrt{3}} \quad \square \end{aligned}$$

12. Folosind integrala curbilinie, să se calculeze aria buclei foliului lui Descartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Soluție. Reprezentarea parametrică a curbei este

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}, t \in [0, \infty) \text{ (aceasta se obține intersectând curba dreapta } y = tx)$$

Aria se calculează după formula $A = \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx$

Avem

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{3at}{1+t^3} \cdot \left(\frac{3at^2}{1+t^3} \right)' - \frac{3at^2}{1+t^3} \cdot \left(\frac{3at}{1+t^3} \right)' dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty 9a^2 \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt = \\ &= \frac{3a^2}{2} \end{aligned} \quad \square$$

13. Să se calculeze $\int_\Gamma ydx + xdy$ pe un drum cu capetele $A(2, 1)$ și $B(1, 3)$.

Soluție. Forma diferențială $\alpha = ydx + xdy$ este închisă pe \mathbb{R}^2 și deci este exactă. Rezultă că integrala este independentă de drumul particular care unește

punctele A și B . Integrala se calculează pe un drum particular, de exemplu pe segmentul $[AB]$, a cărei parametrizare este:

$$x(t) = \frac{5-t}{2}, \quad y(t) = t, \quad t \in [1, 3].$$

O altă metodă constă în a determina un potențial scalar f pentru 1-forma diferențială α :

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x y_0 dx + \int_{y_0}^y x dy = xy + k,$$

k fiind o constantă arbitrară. Integrala cerută în enunț este:

$$\int_\Gamma \alpha = f(B) - f(A) = 1,$$

Γ fiind un drum arbitrar având capetele A și B .

□

14. Fie $P, Q, R : \Omega = \{(x, y, z) ; y > 0, z \geq 0\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$P(x, y, z) = x^2 - yz + \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$Q(x, y, z) = y^2 - zx - \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$R(x, y, z) = z^2 - xy.$$

Notând cu $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, să se calculeze $\int_\Gamma \omega$, unde Γ este un drum parametrizat arbitrar (inclus în Ω) ce unește punctele $A(1, 1, 0)$ și $B(-1, 1, 0)$.

Soluție. Observăm că ω este o 1-formă diferențială închisă :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - z = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -y = \frac{\partial P}{\partial z},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -x = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Domeniul Ω este stelat, așadar ω este exactă pe Ω . Rezultă că $\int_{\Gamma} \omega$ nu depinde de drumul parametrizat Γ , ci doar de extremitățile A și B și de orientare (de la A către B).

Fie parametrizarea $x(t) = -t$, $y(t) = 1$, $z(t) = 0$, $t \in [-1, 1]$; obținem:

$$\int_{\Gamma} \omega = - \int_{-1}^1 \left(t^2 + \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}.$$

Să mai facem observația că raționamentul de mai sus nu mai este corect dacă drumul nu ar fi inclus în Ω , deoarece, pe un astfel de domeniu ω nu ar mai fi exactă și deci integrala nu ar mai fi independentă de drum.

De exemplu, să considerăm punctele $C(1, -1, 0)$, $D(-1, -1, 0)$ și drumul Γ_1 format prin concatenarea segmentelor (orientate) $[AC] \cup [CD] \cup [DB]$. Atunci $\int_{\Gamma_1} \omega \neq \int_{\Gamma} \omega$. Intr-adevăr, cu parametrizarea:

$$[AC] : x(t) = 1, y(t) = -t, z(t) = 0, t \in [-1, 1],$$

$$[CD] : x(t) = t, y(t) = -1, z(t) = 0, t \in [-1, 1],$$

$$[DB] : x(t) = -1, y(t) = t, z(t) = 0, t \in [-1, 1].$$

se obține:

$$\int_{\Gamma_1} \omega = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} + 3\frac{\pi}{2}.$$

□

15. Fie $P, Q : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid xy = -1\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$P(x, y) = \frac{y}{1 + xy}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{1 + xy}$$

și fie $\alpha = Pdx + Qdy$. Să se calculeze integrala $\int_{\Gamma} \alpha$, unde Γ este un drum arbitrar având capetele $A(-1, -1)$ și $B(3, 3)$ și nu intersectează hiperbola $xy = -1$.

Soluție. Forma diferențială α este închisă :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{(1 + xy)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \neq -1.$$

Mulțimea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > -1\}$ este stelată, deci pe Ω α este exactă. Rezultă că integrala este independentă de drumul particular

(inclus în Ω) care unește punctele A și B . Un potențial scalar pentru α pe mulțimea Ω este:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{y_0}{1 + xy_0} dx + \int_{y_0}^y \frac{x}{1 + xy} dy = \ln(1 + xy) + k, xy > -1,$$

și deci integrala este:

$$\int_{\Gamma} \alpha = f(B) - f(A) = \ln 5.$$

□

Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integral este o diferențială totală, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare:

16. $\int_{(\frac{1}{3}, -2)}^{(3, 0)} \frac{y}{1+xy} dx + \frac{x}{1+xy} dy$, luată pe o curbă a cărei imagine nu intersectează hiperbola $xy = -1$.

Soluție. Avem $P(x, y) = \frac{y}{1+xy}$ și $Q(x, y) = \frac{x}{1+xy}$ ($xy \neq -1$)

Mulțimea pe care sunt definite P și Q nu formează un domeniu. Vom considera numai mulțimea D a punctelor din plan pentru care $xy + 1 > 0$. Mulțimea D conține punctele $A_1(\frac{1}{3}, -2)$ și $A_2(3, 0)$, deoarece avem $\frac{1}{3} \cdot (-2) + 1 = \frac{1}{3} > 0$ și $3 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$. Această mulțime este un domeniu simplu conex, deci putem aplica teorema 11.2. Funcțiile P și Q admit derivate parțiale continue pe D și avem $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{(1+xy)^2}$. În concluzie integrala nu depinde de drum. Pentru calculul ei trebuie să găsim o curbă care unește punctele A_1 și A_2 . Să observăm că nu putem lua curba care are drept imagine segmentul A_1A_2 și nici curba care are drept imagine segmentul A_1A_3 reunit cu segmentul A_3A_2 , unde $A_3(3, -2)$, deoarece aceste contururi intersectează hiperbola $xy = -1$. Dacă notăm $A_4(\frac{1}{3}, 0)$ se observă că segmentele A_1A_4 și A_4A_2 nu intersectează hiperbola $xy = -1$. Să luăm curba simplă C care are drept imagine aceste segmente. Ea este reuniunea curbilor $C_1 : x = \frac{1}{3}, y = t, t \in [-2, 0]$ și $C_2 : x = t, y = 0, t \in [\frac{1}{3}, 3]$. Atunci

$$\begin{aligned} \int_C \frac{y}{1+xy} dx + \frac{x}{1+xy} dy &= \int_{C_1} \frac{y}{1+xy} dx + \frac{x}{1+xy} dy + \int_{C_2} \frac{y}{1+xy} dx + \frac{x}{1+xy} dy = \\ &= \int_{-2}^0 \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}t} dt + \int_{\frac{1}{3}}^3 0 dt = \ln 3 \end{aligned} \quad \square$$

17. $\int_{(1,1,0)}^{(2,3,1)} yz dx + xz dy + xy dz$

Soluție. Funcțiile $p = yz, Q = xz, R = xy$ sunt definite și admit derivate parțiale continue în tot spațiul. Avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = y, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = x$$

deci expresia de sub semnul integral este o diferențială totală și integrala curbilinie nu depinde de drum. Fie punctele $A_1(1, 1, 0), A_2(1, 1, 1), A_3(2, 1, 1), A_4(2, 3, 1)$. Vom alege curba simplă care are drept imagine segmentele A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 și are primul capăt în punctul A_1 . Ea este reuniunea curbelor

$$C_1 : x = 1, y = 1, z = t, t \in [0, 1], C_2 : x = t, y = 1, z = 1, t \in [1, 2], \\ C_3 : x = 2, y = t, z = 1, t \in [1, 3].$$

Atunci:

$$\int_C \frac{y}{1+xy} dx + \frac{x}{1+xy} dy = \int_{C_1} \frac{y}{1+xy} dx + \frac{x}{1+xy} dy + \int_{C_2} \frac{y}{1+xy} dx + \frac{x}{1+xy} dy = \\ = \int_0^1 dt + \int_1^2 dt + \int_1^3 2dt = 6 \quad \square$$

18. Să se stabilească domeniul în care expresia $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} dx + \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x} dy$ este o diferențială totală și să se găsească o primitivă a ei în acest domeniu.

Soluție. Funcțiile P și Q sunt definite și continue în tot planul. Pentru $y \neq 0$ ele admit derivate parțiale continue și avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{|y|} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 \right) = \frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

Deoarece $\frac{y}{|y|} = 1$ numai pentru $y > 0$, rezultă că cele două derivate parțiale sunt egale numai în semiplanul superior, ce reprezintă domeniul căutat.

Fie (x', y') un punct din semiplanul superior și $C(x', y') : x = x't, y = y't, t \in [0, 1]$, o curbă care are ca imagine segmentul ce unește punctele $(0, 0)$ și (x', y') . O primitivă a expresiei diferențiale din enunț va fi dată de relația

$$F(x', y') = \int_{C(x', y')} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ = \int_0^1 x' \sqrt{\sqrt{x'^2 + y'^2} - x'} + y' \sqrt{\sqrt{x'^2 + y'^2} + x'} \sqrt{t} dt = \\ = \frac{2}{3} (x' \sqrt{\sqrt{x'^2 + y'^2} - x'} + y' \sqrt{\sqrt{x'^2 + y'^2} + x'}) \quad \square$$

19. Stabilind în prealabil că expresia

$$\left(\frac{z+xy}{xz} + \frac{y}{x^2+y^2} \right) dx + x \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x^2+y^2} \right) dy + \frac{z-xy}{z^2} dz, \text{ definită}$$

pentru $x > 0, z > 0$, este o diferențială totală, să se găsească o primitivă a ei.

Soluție. Domeniul D definit de inegalitățile $x > 0, z > 0$ este simplu conex. Funcțiile

$P = \frac{z+xy}{xz} + \frac{y}{x^2+y^2}, Q = x \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x^2+y^2} \right), R = \frac{z-xy}{z^2}$ sunt continue și admit derivate parțiale continue pe D . Avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{z} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{y}{z^2}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{x}{z^2}$$

Rezultă că expresia dată este o diferențială totală. Pentru calculul primitivei F vom lua punctul $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1) \in D$, punctul arbitrar $(x', y', z') \in D$ și o curbă C cu extremitatea finală în (x', y', z') , compusă din reuniunea curbelor

$$C_1 : x = t, y = 1, z = 1, t \in [1, x']$$

$$C_2 : x = x', y = t, z = 1, t \in [1, y']$$

$$C_3 : x = x', y = y', z = t, t \in [1, z']$$

$$\begin{aligned} \text{Atunci } F(x', y', z') &= \int_C Pdx + Qdy + Rdz = \sum_{i=1}^3 \int_{C_i} Pdx + Qdy + Rdz = \\ &= \int_1^{x'} \left(\frac{1+t}{t} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt + \int_1^{y'} x' \left(1 - \frac{1}{x'^2+t^2} \right) dt + \int_1^{z'} \frac{t-x'y'}{t^2} dt = \\ &= (\ln t + t + \arctg t) \Big|_1^{x'} + x' t \Big|_1^{y'} - \arctg \frac{1}{x'} \Big|_1^{y'} + \ln t \Big|_1^{z'} + \frac{x'y'}{t} \Big|_1^{z'} = \\ &= \ln x' z' + \arctg x' + \arctg \frac{1}{x'} - \arctg \frac{y'}{x'} + \frac{x'y'}{z'} - \frac{\pi}{4} \quad \square \end{aligned}$$

20. Să se calculeze circulația câmpului de vectori \vec{V} de-a lungul curbei Γ în următoarele cazuri:

a. $\vec{V} = -(x^2 + y^2)\vec{i} - (x^2 - y^2)\vec{j}$,

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4, y < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 2x = 0, y \geq 0\}.$$

b. $\vec{V} = x\vec{i} + xy\vec{j} + xyz\vec{k}$,

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + z = 3\}.$$

Soluție. Câmpului de vectori $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ i se asociază, prin definiție, 1-forma diferențială $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$; circulația lui \vec{V} de-a lungul lui Γ este, prin definiție integrala curbilinie: $\int_{\Gamma} \vec{V} d\vec{r} = \int_{\Gamma} \omega$.

a. Notăm:

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4, y < 0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 2x = 0, y \geq 0\}.$$

O parametrizare (în sens trigonometric pozitiv) pentru Γ se obține astfel:

$$\Gamma_1 : x(t) = 2 \cos t, y(t) = 2 \sin t, t \in [\pi, 2\pi),$$

$$\Gamma_2 : x(t) = 1 + \cos t, y(t) = \sin t, t \in [0, \pi].$$

b. Parametrizarea este: $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = 3 - \cos t, t \in [0, 2\pi)$.

□

9.3 Probleme propuse

Să se calculeze următoarele integrale curbilini de speța întâi:

1. $\int_C \sqrt{y(2-y)} ds$, unde $C : x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

R: $\frac{4}{3\sqrt{2}}$

2. $\int_C (x+y) ds, C : y = x + 2, 0 \leq x \leq 1$

R: $3\sqrt{2}$

3. $\int_C \sin x ds, C : y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

R: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$

4. $\int_C e^{x+y} ds$, unde C este curba simplă, închisă, rectificabilă și orientată pozitiv care are ca imagine triunghiul din plan cu vârfurile $A_1(-1, -1), A_2(1, -1), A_3(1, 1)$ și ambele capete în punctul A_1 .

R: $(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})(e^2 - e^{-2})$

5. $\int_C z(x^2 + y^2) ds$, unde $C : x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, t \in [0, 1]$

R: $\frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{15}$

6. $\int_C y ds, C : x^2 + y^2 = 1$

R: 0

7. Să se calculeze masa și centrul de greutate ale firului material omogen cu densitatea $\rho(x, y, z) = 1$ care este imaginea curbei $C : x = \sqrt{\pi^2 - t^2} \cdot \cos t, y = \sqrt{\pi^2 - t^2} \cdot \sin t, z = \sqrt{4\pi^2 - 1} \cdot \sqrt{\pi^2 - t^2}, t \in [-\pi, \pi]$

R: $M = \frac{3\pi^3}{2}, x_G = -\frac{8}{3\pi^2}, y_G = 0, z_G = \frac{16}{9} \cdot \sqrt{4\pi^2 - 1}$

Să se calculeze următoarele integrale de speța a doua:

8. $\int_C xy dx - y^2 dy$, unde $C : x = t^2, y = t^3, t \in [0, 1]$

R: $-\frac{1}{21}$

9. $\int_C xdy$, unde $C : x = e^t, y = \ln(1 + e^t), t \in [0, \ln 2]$
R: $1 + \ln \frac{2}{3}$
10. $\int_C xdx + e^x dy$, unde $C : x = \ln(1 + t), y = \sqrt{1 + t}, t \in [0, 1]$
R: $\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$
11. $\int_C (\arcsin y)dx + x^3 dy$, unde $C : x = -t, y = \sqrt{1 - t^2}, t \in [-1, 1]$
R: $\frac{3\pi}{8} - 2$
12. $\int_C (x + y)dx - ydy$, $C : xy = 2, y = 2x, y = \frac{x}{2}, x \geq 0$
R: $-\frac{15}{8} - 2 \ln 2$
13. $\int_C \frac{x+y}{x-y}(xdx - ydy)$, $C : x^2 + y^2 = 1, y = 0, y = x \operatorname{tg} \alpha, \alpha < \frac{\pi}{4}, x \geq 0$
R: $\ln \sqrt{1 - \sin 2\alpha}$
14. $\int_C (y + 1)dx + x^2 dy$, unde C este curba simplă și rectificabilă care are drept imagine porțiunea din parabola $y = x^2 - 1$, cuprinsă între punctele $A_1(1, 0)$ și $A_2(-1, 0)$ și primul capăt în punctul A_1 .
R: $-\frac{2}{3}$
15. $\int_C ydx - (x - a)dy$, unde C este curba simplă, închisă și orientată pozitiv, care are drept imagine elipsa $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) și ambele extremități în originea coordonatelor.
R: $-2\pi ab$
16. $\int_C \sqrt{y^2 + z^2}dx + \sqrt{z^2 + x^2}dy + \sqrt{x^2 + y^2}dz$, unde C este curba simplă care are drept imagine segmentul din spațiu AB , cu $A(-1, -1, -1)$ și $B(2, 2, 2)$ și primul capăt în punctul A .
R: $\frac{15\sqrt{2}}{2}$
17. $\int_C ydx + zdy + xdz$, unde C este curba simplă și închisă care are drept imagine triunghiul din spațiu ABC cu vârfurile $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$; are ambele capete în punctul A și determină orientarea (A, B, C) .
R: $-\frac{3}{2}$
18. $\int_C \sqrt{1 - x^2}dx + xdy$, unde $C : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, x \geq 0$ parcursă în sens direct.
R: π
19. Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integral este o diferențială totală, să se calculeze următoarea integrală curbilinie, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare $\int_{(2,1)}^{(1,3)} ydx + xdy$.
R: 1

20. Stabilind în prealabil că expresia $(y^2 - 3x^2)dx + 2xydy$ este diferențială totală , să se găsească o primitivă a ei.

R: $F(x, y) = -x^3 + x'y^2$

Capitolul 10

Integrale duble

10.1 Noțiuni teoretice

Fie f o funcție mărginită și definită pe domeniul mărginit $D \subset \mathbb{R}^2$. Se consideră o partiție a planului în intervale bidimensionale, din care reținem pe acelea ce conțin puncte din D . Notăm prin $\omega_k, k = \overline{1, n}$, intervalele bidimensionale reținute, numerotate într-o ordine oarecare. Fie diviziunea Δ mulțimea acestor intervale. Norma diviziunii Δ notată $\nu(\Delta)$, este cea mai mare dintre dimensiunile intervalelor $\omega_k, k = \overline{1, n}$. Suma Riemann atașată funcției f corespunzătoare diviziunii Δ a domeniului D este

$$\sigma_{\Delta}(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \text{aria}(\omega_k), (\xi_k, \eta_k) \in \omega_k$$

Integrala dublă a funcției f extinsă la domeniul D este

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \lim_{\nu(\Delta) \rightarrow 0} \sigma_{\Delta}(f)$$

limita fiind aceeași pentru orice alegere a punctelor intermediare (ξ_k, η_k) .

Pentru calculul integralei duble se disting următoarele două tipuri fundamentale de domenii de integrare:

a) Domeniul D_y este **simplic în raport cu axa Oy** dacă este definit de inegalitățile $a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$, unde α și β sunt funcții continue pe $[a, b]$. Dacă f este continuă pe D_y , atunci

$$\int \int_{D_y} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dx dy$$

b) Domeniul D_x este **simplic în raport cu axa Ox** dacă este definit de inegalitățile $c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)$, unde γ și δ sunt funcții continue pe $[c, d]$. Dacă f este continuă pe D_x , atunci

$$\int \int_{D_x} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx$$

Schimbarea de variabile la integrala dublă Fie D' un domeniu compact în planul Ouv și D un domeniu compact în planul Oxy . Fie T o transformare definită pe D' cu valorile pe D , dată de funcțiile reale φ și ψ , de două variabile reale ,

$$T : \begin{cases} x = \varphi(u, v), & (u, v) \in D' \\ y = \psi(u, v), & (u, v) \in D' \end{cases}$$

Presupunem că :

- 1° T este continuă pe D' și biunivocă pe $Int(D')$
- 2° Funcțiile φ și ψ au derivate parțiale continue și mărginite pe $Int(D')$
- 3° Pe $Int(D')$, jacobianul transformării T este diferit de zero:

$$J = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

Teorema 10.1. (Teorema de schimbare de variabile la integrala dublă) Dacă f este o funcție reală definită și integrabilă Riemann pe D , avem

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

Vom da câteva exemple de schimbări de variabile utilizate mai des:

a) Transformarea de la **coordonate polare** (notate cu θ și ρ) la coordonatele carteziene:

$$T : \begin{cases} x = \rho \cos \theta, & (\theta, \rho) \in D' \\ y = \rho \sin \theta, & (\theta, \rho) \in D' \end{cases}$$

unde $D' = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 / \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ sau

$$D' = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 / \rho \geq 0, -\pi \leq \theta \leq \pi\}$$

Jacobianul transformării, în modul, este $\left| \frac{D(x, y)}{D(\theta, \rho)} \right| = \rho$

b) Transformarea de la **coordonate polare generalizate** (notate cu θ și ρ) la coordonatele carteziene:

$$T : \begin{cases} x = a\rho \cos^\alpha \theta, & \rho \geq 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ y = b\rho \sin^\alpha \theta, & \rho \geq 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

unde $a, b, \alpha > 0$

Jacobianul transformării, în modul, este $\left| \frac{D(x, y)}{D(\theta, \rho)} \right| = \alpha ab \rho \cos^{\alpha-1} \theta \sin^{\alpha-1} \theta$

Pe lângă calculul ariilor domeniilor plane și al volumelor, dăm și următoarele aplicații ale integralelor duble:

a) Masa unei plăci plane D , de densitate $\rho(x, y) > 0$ este

$$M = \int \int_D \rho(x, y) dx dy$$

b) Coordonatele centrului de greutate G al unei plăci plane D , cu densitatea de masă $\rho(x, y) > 0$ sunt

$$x_G = \frac{1}{M} \int \int_D x \rho(x, y) dx dy, y_G = \frac{1}{M} \int \int_D y \rho(x, y) dx dy$$

c) Momentele de inerție ale plăcii în raport cu axele de coordonate Ox și Oy sunt respectiv

$$I_x = \int \int_D y^2 \rho(x, y) dx dy, I_y = \int \int_D x^2 \rho(x, y) dx dy$$

Momentul de inerție al plăcii în raport cu originea este $I_O = I_x + I_y$

10.2 Probleme rezolvate

Să se calculeze următoarele integrale:

1. $I = \int \int_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, dacă D este domeniul mărginit de dreptele $x = 0, y = 1, y = \sqrt[3]{2}, y = x$.

Soluție. Domeniul D este simplu în raport cu ambele axe. Vom considera domeniul D simplu în raport cu axa Ox și vom integra în ordinea x, y , deoarece, în acest caz, reprezentările parametrice ale curbelor care mărginesc domeniul D au o expresie mai simplă.

Proiecția domeniului D pe axa Oy este intervalul $[1, \sqrt[3]{2}]$. Reprezentarea parametrică a curbei care îl mărginește la stânga este $x = 0, 1 \leq y \leq \sqrt[3]{2}$, iar reprezentarea parametrică a curbei care îl mărginește la dreapta este $x = y, 1 \leq y \leq \sqrt[3]{2}$. Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\sqrt[3]{2}} \left(\int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dx \right) dy = \\ &= \int_1^{\sqrt[3]{2}} \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}) \right] \Big|_0^y dy = \\ &= \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{y^2}{2} (\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})) dy = \frac{1}{6} [\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})] \quad \square \end{aligned}$$

2. $I = \int \int_D (1 - y) dx dy$, unde $D = \{x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, y \leq x^2, x \geq 0\}$

Soluție. Domeniul D este porțiunea cuprinsă între cercul cu centrul în punctul $B(0, 1)$ și raza 1 și parabola $y = x^2$, din primul cadran; el este simplu în raport cu ambele axe. Vom integra în ordinea y, x , deci vom considera domeniul D simplu în raport cu axa Oy . Aflăm coordonatele punctului A de intersecție a cercului cu parabola, rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

și obținem $A(1, 1)$. Rezultă că proiecția domeniului D pe axa Ox este intervalul $[0, 1]$. Curba care mărginește inferior domeniul D este arcul de cerc OA , situat pe semicercul inferior; reprezentarea sa parametrică se obține rezolvând în raport cu y ecuația cercului și este $y = \alpha(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0, 1]$

Curba care mărginește superior domeniul D este porțiunea din parabola $y = x^2$, cuprinsă între punctele O și A , deci are reprezentarea parametrică $y = \beta(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$.

Reducem acum integrala dublă la o integrală iterată, în ordinea y, x :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x^2} (1-y) dy \right) dx = - \int_0^1 \frac{1}{2} (1-y) /_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 [(1-x^2)^2 + x^2 - 1] dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (x^4 - x^2) dx = \frac{1}{15} \quad \square \end{aligned}$$

3. $I = \int \int_D xy dx dy$, unde D e domeniul limitat de curbele $xy = 1$, $x+y = \frac{5}{2}$.

Soluție. Curbele se intersectează în punctele $A(\frac{1}{2}, 2)$, $B(2, \frac{1}{2})$ obținute rezolvând sistemul

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Domeniul D este arcul hiperbolei echilatre $xy = 1$ cuprins între punctele A și B și segmentul din dreapta $x + y = \frac{5}{2}$ mărginit de punctele A și B .

$$\text{Atunci } I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy dy \right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 x \frac{y^2}{2} /_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} dx \text{ etc.} \quad \square$$

4. $I = \int \int_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy$, unde D e domeniul $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, 1]$.

Soluție. Domeniul D este un dreptunghi care se scrie ca reuniunea dintre D_1 și D_2 , unde $D_1 = \{(x, y) / -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ și $D_2 = \{(x, y) / -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$. Atunci

$$I = \int \int_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy = \int \int_{D_1} \sqrt{x^2-y} dx dy + \int \int_{D_2} \sqrt{y-x^2} dx dy$$

$$\begin{aligned} \int \int_{D_1} \sqrt{x^2-y} dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{x^2} \sqrt{x^2-y} dy \right) dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^0 -\sqrt{z} dz \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{3} z^{3/2} /_0^{x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{3} x^3 dx = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Analog } \int \int_{D_2} \sqrt{y-x^2} dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 \sqrt{y-x^2} dy \right) dx \text{ etc.} \quad \square$$

5. $I = \int \int_D (|x| + |y|) dx dy$, unde $D : |x| + |y| \leq 1$.

Soluție. Domeniul D este un pătrat de vârfuri $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ și se scrie ca reuniunea a patru domenii D_1, D_2, D_3, D_4 , după cum x și y se află în primul, al doilea, al treilea, respectiv al patrulea cadran.

Atunci

$$I = \int \int_{D_1} (x+y) dx dy + \int \int_{D_2} (-x+y) dx dy + \int \int_{D_3} (-x-y) dx dy + \\ + \int \int_{D_4} (x-y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x+y) dy \right) dx + \int_{-1}^0 \left(\int_0^{1+x} (-x+y) dy \right) dx + \\ + \int_{-1}^0 \left(\int_{-1-x}^0 (-x-y) dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{x-1}^0 (x-y) dy \right) dx \text{ etc.} \quad \square$$

6. $I = \int \int_D \frac{1}{\sqrt{x}} dx dy$, unde $D : y^2 \leq 8x, y \leq 2x, y + 4x \leq 24$.

Soluție. Aflăm punctele de intersecție dintre parabola $y^2 = 8x$ și dreptele $y = 2x$ și $y + 4x = 24$, rezolvând sistemele

$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ y = 2x \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ y + 4x = 24 \end{cases}$$

și obținem $O(0, 0), A(2, 4), B\left(\frac{9}{2}, 6\right), C(8, -8)$

$$I = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{8x}}^{2x} \frac{1}{\sqrt{x}} dy \right) dx + \int_2^{\frac{9}{2}} \left(\int_{-\sqrt{8x}}^{\sqrt{8x}} \frac{1}{\sqrt{x}} dy \right) dx + \int_{\frac{9}{2}}^8 \left(\int_{-\sqrt{8x}}^{24-4x} \frac{1}{\sqrt{x}} dy \right) dx = \\ = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} (2x + \sqrt{8x}) dx + \int_2^{\frac{9}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} (\sqrt{8x} + \sqrt{8x}) dx + \int_{\frac{9}{2}}^8 \frac{1}{\sqrt{x}} (24 - 4x + \sqrt{8x}) dx \\ \text{etc.} \quad \square$$

7. $I = \int \int_D y dx dy$, unde D este domeniul mărginit de parabola $y^2 = 2x$, cercul $x^2 + y^2 - 2x = 0$ și dreapta $x = 2$.

Soluție. $I = \int_0^2 \left(\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} y dy \right) dx = \int_0^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{4}{3}$ □

Să se calculeze, trecând la coordonate polare, următoarele integrale duble:

8. $I = \int \int_D \frac{y^2}{x^2} dx dy$, unde $D = \{(x, y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$

Soluție. Domeniul D e porțiunea din exteriorul cercului $x^2 + y^2 = 1$ care se află în interiorul cercului $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Trecem la coordonate polare $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ și obținem $1 \leq \rho^2 \leq 2\rho \cos \theta$, deci $\rho \in [1, 2 \cos \theta]$. Cum $\cos \theta \geq \frac{1}{2}$ avem $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

$$\begin{aligned}
\text{Atunci } I &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^{2\cos\theta} \operatorname{tg}^2\theta \cdot \rho d\rho \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2\theta - 1) \operatorname{tg}^2\theta d\theta = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4\sin^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [2(1 - \cos 2\theta) - \operatorname{tg}^2\theta] d\theta = \theta / \frac{\pi}{3} - \\
&- \frac{\sin 2\theta}{2} / \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2} dt = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(2\sqrt{3} - \operatorname{arctg} t / \sqrt{3} \right) = \frac{2\pi}{3} - \\
&- \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \right) = \pi - \frac{1}{2} - \sqrt{3} \quad \square
\end{aligned}$$

9. $I = \iint_D \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy$, unde $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Soluție. $x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} = 0$ este un cerc de centru $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ și rază $\frac{1}{2}$, iar $x^2 + y^2 = 1$ este un cerc cu centrul în $(0,0)$ și de rază 1. Vom considera $D_1 : x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \leq 0$ și $D_2 = D \setminus D_1$.

$$\left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| = \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}, & \text{dacă } (x,y) \in D_2 \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2, & \text{dacă } (x,y) \in D_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Atunci } I &= \iint_{D_2} \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) dx dy - \iint_{D_1} \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) dx dy = \\
&= \iint_D \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) dx dy - 2 \iint_{D_1} \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) dx dy = I_1 - \\
&- 2I_2
\end{aligned}$$

Calculăm I_1 folosind coordonatele polare $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, $\rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_D \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(\rho^2 - \rho \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2}} \right) \rho d\rho \right] d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3} \cdot \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2}} \right) / \rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2}} \right) d\theta = \frac{1}{4} \theta / 2\pi - \\
&- \frac{1}{3\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}} (\sin\theta / 2\pi - \cos\theta / 2\pi) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Calculăm I_2 folosind coordonatele polare $x = \rho \cos \theta + \frac{1}{2\sqrt{2}}, y = \rho \sin \theta + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \rho \in [0, \frac{1}{2}], \theta \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iint_{D_1} \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\rho^2 \cos^2\theta + \frac{\rho \cos\theta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8} + \right. \right. \\
&+ \left. \rho^2 \sin^2\theta + \frac{\rho \sin\theta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8} - \frac{\rho \cos\theta + \rho \sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \right) \rho d\rho \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\rho^2 - \frac{1}{4} \right) \rho d\rho \right] d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\rho^2 - \frac{1}{4} \right) \rho d\rho = 2\pi \cdot \left(\frac{\rho^4}{4} / \frac{1}{2} - \frac{\rho^2}{8} / \frac{1}{2} \right) = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2^4 \cdot 4} - \frac{1}{2^2 \cdot 8} \right) = \\
&= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{64} \right) = -\frac{\pi}{32}
\end{aligned}$$

$$\text{Așadar, } I = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{32} \right) = \frac{9\pi}{16} \quad \square$$

10. $I = \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, $D : 4x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1, y \geq 0$

Soluție. Domeniul D este porțiunea aflată în exteriorul cercului de centru $(0,0)$ și rază 1, în interiorul elipsei de semiaxe 1 și 2 și în semiplanul superior.

Trecem la coordonate polare $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$. Obținem

$$4\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \leq 4 \implies \rho^2 \leq \frac{4}{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \text{ și } \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \geq 1, \text{ deci } \rho \in \left[1, \frac{2}{\sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} \right]$$

Cum $y \geq 0$ avem $\sin \theta \geq 0$, deci $\theta \in [0, \pi]$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \left(\int_1^{\frac{2}{\sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}} \frac{\rho \sin \theta}{\rho} \cdot \rho d\rho \right) d\theta = \int_0^\pi \sin \theta \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_1^{\frac{2}{\sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}} d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{4 \sin \theta}{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_1^{-1} \frac{-4dy}{4y^2 + 1 - y^2} - \frac{1}{2} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2dy}{3y^2 + 1} + 1 = 2\sqrt{3} \arctg \sqrt{3}y \Big|_{-1}^1 + 1 = 2\sqrt{3} \cdot \frac{2\pi}{3} + 1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} + 1 \quad \square \end{aligned}$$

11. $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

Soluție. În coordonate polare domeniul de integrare este dreptunghiul $(\rho, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, 1]$, și deci:

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho e^{\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{\rho^2} \Big|_0^1 d\varphi = \pi(e - 1).$$

□

12. $\iint_D (1 + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - y \leq 0, x \geq 0\}$

Soluție. Înlocuind pe x și y în condițiile ce definesc domeniul D , obținem

$$\rho \leq \sin \varphi, \cos \varphi \geq 0$$

și deci

$$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}), \rho \in [0, \sin \varphi].$$

Rezultă :

$$\iint_D (1 + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho(1 + \rho) d\rho = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{9}.$$

□

13. $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy, D$ fiind mărginit de curbele de ecuații

$$x^2 + y^2 = e^2, y = x\sqrt{3}, x = y\sqrt{3}, x \geq 0.$$

Soluție. Domeniul de integrare în coordonate polare este dreptunghiul $(\rho, \varphi) \in [0, e] \times [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, deci:

$$\begin{aligned} \int \int_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy &= \int_0^e d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \rho \ln(1+\rho^2) d\varphi = \\ &= \frac{\pi(1+e^2)}{12} (\ln(1+e^2) - 1) + \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

□

14. Să se calculeze, trecând la coordonate polare generalizate integrala $I = \int \int_D |xy| dx dy$, unde $D : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \leq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, x \geq 0$.

Soluție. Folosim schimbarea $x = a\rho \cos \theta, y = b\rho \sin \theta, \theta \in [-\pi, \pi], \rho \geq 0$. Jacobianul, în modul, al acestei transformări este $|J| = ab\rho$. În noile coordonate polare, ecuația curbei ce mărginește domeniul nostru este $\rho^4 = \rho^2 \cos 2\theta$. Așadar, $\rho \in [0, \sqrt{\cos 2\theta}]$. Condiția $x \geq 0$ implică $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dar și $\cos 2\theta \geq 0$, deci $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Integrala devine:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} a^2 b^2 \rho^3 \cos \theta |\sin \theta| d\rho \right) d\theta = \\ &= \frac{a^2 b^2}{4} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \cdot \cos \theta \cdot |\sin \theta| d\theta = \frac{a^2 b^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \cdot \sin 2\theta d\theta = \frac{a^2 b^2}{24} \quad \square \end{aligned}$$

15. Să se determine aria mulțimii plane D mărginită de curba $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 + y^3), a \in \mathbb{R}$.

Soluție. În coordonate polare, ecuația curbei se scrie $\rho = a(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)$.

Din ecuația curbei se constată că aria este situată în regiunea din plan pentru care $x + y \geq 0$ (deoarece $0 \leq (x^2 + y^2)^2 = a(x^3 + y^3) = a(x+y)(x^2 - xy + y^2)$), deci $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$. Atunci aria va fi

$$\begin{aligned} A &= \int \int_D dx dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^{a(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)} \rho d\rho \right) d\theta = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)^2 d\theta = \frac{5\pi a^2}{16} \quad \square \end{aligned}$$

16. Să se calculeze ariile mulțimilor plane D mărginite de curbele de ecuații:

a. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a$ și b fiind două constante pozitive.

b. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x > 0, a$ fiind o constantă pozitivă.

c. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy, a$ fiind o constantă pozitivă.

Soluție. a. Ecuația elipsei în coordonate polare generalizate, $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$, este $\rho = 1$ și deci obținem:

$$\text{aria}(D) = \int \int_D dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab\rho d\rho = \pi ab.$$

b. Ecuația curbei în coordonate polare este $\rho^2 = a^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$, sau $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, și deci domeniul de integrare în coordonate polare este

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \rho \in (0, a\sqrt{\cos 2\varphi}).$$

Rezultă :

$$\text{aria}(D) = \int \int_D dx dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho = \frac{a^2}{2}.$$

c. Ecuația lemniscatei în coordonate polare este $\rho^2 = 2a^2 \cos \varphi \sin \varphi$. Domeniul de integrare este $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $\rho \in (0, a\sqrt{\sin 2\varphi})$; obținem:

$$\text{aria}(D) = \int \int_D dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = a^2.$$

□

17. Cu ajutorul unor schimbări de variabile adecvate, să se calculeze integrala $I = \int \int_D x dx dy$, unde $D : 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2, x \geq 0$.

Soluție. Domeniul D este mărginit de hiperbolele echilaterale $xy = 1$ și $xy = 2$ și de dreptele $y = x$ și $y = 2x$. Vom face transformarea $T : u = xy, v = \frac{y}{x}, x > 0, y > 0$. Această transformare este regulată și inversa sa este $T^{-1} : x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}, u > 0, v > 0$.

Imaginea domeniului D prin transformarea T este dreptunghiul $\Delta : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2$ și jacobianul transformării T^{-1} este $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{2v} \neq 0$. Aplicând formula de schimbare de variabile și apoi iterând, obținem

$$I = \int \int_{\Delta} \sqrt{\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du \cdot \int_1^2 \frac{1}{v\sqrt{v}} dv = \frac{1}{3}(5\sqrt{2} - 6) \quad \square$$

18. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ și fie $f : D \mapsto [0, \infty)$ o funcție continuă. Să se calculeze volumul mulțimii

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

în următoarele cazuri:

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2y\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq x, y > 0\}$, $f(x, y) = xy$.
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2x + 2y - 1\}$, $f(x, y) = y$.

Soluție. Volumul mulțimii Ω este dat de formula

$$\text{vol}(\Omega) = \int \int_D f(x, y) dx dy$$

a. Trecând la coordonate polare, se obține:

$$\text{vol}(\Omega) = \int \int_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^3 d\rho = \frac{3}{2}\pi.$$

b. Cu aceeași metodă, se obține:

$$\text{vol}(\Omega) = \int \int_D xy dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi d\rho = \frac{1}{24}.$$

c. Cu schimbarea de variabile:

$$x = 1 + \rho \cos\varphi, \quad y = 1 + \rho \sin\varphi, \quad (\rho, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi),$$

rezultă :

$$\text{vol}(\Omega) = \int \int_D y dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(1 + \rho \sin\varphi) d\rho = \pi.$$

□

19. Găsiți volumul corpului solid Ω ce se întinde deasupra planului xOy , sub planul $z = x$ și sub cilindrul $x^2 + y^2 = 4$.

Soluție. Regiunea de bază R este un semicerc de rază 2, dar datorită simetriei putem integra peste primul cadran și apoi dublăm rezultatul.

$$V = \int \int_R z dx dy = 2 \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-y^2}} x dx \right) dy = \frac{16}{3} \quad \square$$

20. Găsiți volumul solidului Ω mărginit de planele $z = 6$, $z = 2y$ și de cilindrii parabolici $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

Soluție. Deoarece cilindrii parabolici sunt perpendiculari pe planul xOy . Solidul Ω are laturile verticale, deci ne putem gândi la Ω ca fiind între planele $z_1 = 6$, $z_2 = 2y$ și deasupra regiunii R din planul xOy care e mărginit de parabolele $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. Parabolele se intersectează în punctele $(-1, 1)$ și $(1, 1)$. Atunci volumul este

$$V = \int \int_R (z_1 - z_2) dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{2-x^2} (6 - 2y) dy \right) dx = \frac{32}{3} \quad \square$$

21. Găsiți volumul corpului solid Ω ce se află în interiorul sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ și cilindrii $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Soluție. Integrăm funcția $f(x, y) = (4 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$ pe discul R mărginit de cercul cu centrul $(1, 0)$ și raza 1. Volumul cerut V e de două ori acela al părții de deasupra planului xOy :

$$V = 2 \int \int_R \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$$

Trecem la coordonate polare : $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, 0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ și obținem

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \theta} (4 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \rho d\rho \right) d\theta = \frac{2}{3} \quad \square$$

22. Găsiți volumul solidului mărginit deasupra de paraboloidul $z = 8 - x^2 - y^2$ și jos de paraboloidul $z = x^2 + y^2$.

Soluție. Curba de intersecție a celor doi paraboloidi se găsește făcând sistem între ecuațiile suprafețelor și rezultă $x^2 + y^2 = 4$. Deci solidul e deasupra discului $x^2 + y^2 \leq 4$. Atunci

$$V = \int \int_{x^2 + y^2 \leq 4} (8 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (8 - 2\rho^2) \rho d\rho \right) d\theta = 16\pi \quad \square$$

23. Calculați volumul mărginit de suprafețele $x^2 + z^2 = 2z, x^2 + z^2 = 3y, y = 0$.

Soluție. $V = \int \int_D y dx dz$, unde D este domeniul mărginit de cercul $x^2 + z^2 = 2z, y = 0$, paraboloidul $x^2 + z^2 = 3y$ de rotație în jurul axei Oy , precum și de cilindrul $x^2 + z^2 = 2z$. Trecând la coordonate polare $z = \rho \cos \theta, x = \rho \sin \theta, \rho \in [0, 2 \cos \theta], \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ se obține

$$V = \frac{1}{3} \int \int_D (x^2 + z^2) dx dz = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \theta} \rho^3 d\rho \right) d\theta = \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

24. Să se calculeze volumul mărginit de planul $z = 0$, de paraboloidul eliptic $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ și de cilindrul drept ale cărui generatoare trec prin curba de intersecție a sferei $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ cu paraboloidul dat.

$$V = \int \int_D z dx dy = \int \int_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy,$$

unde D este domeniul din planul xOy mărginit de elipsa obținută prin intersecția paraboloidului cu sfera $x^2 + y^2 + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - R \right)^2 = R^2$. Se face schimbarea de variabile $x = au \cos v, y = bu \sin v, J = abu$ de unde ecuația curbei C care limitează domeniul va fi $u^2 = 2R - a^2 \cos^2 v - b^2 \sin^2 v$. Deci

$$V = ab \int_0^{2\pi} \left(\int_0^u u^3 du \right) dv = \frac{ab}{4} \int_0^{2\pi} u^4 dv = \pi \frac{ab}{2} \left[\left(2R - \frac{a^2 + b^2}{2} \right)^2 + \frac{(a^2 - b^2)^2}{2} \right] \quad \square$$

25. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele Ox și Oy ale ariei cuprinse între curba $x^3 + y^3 = 3x^2$ și axa Ox pentru $0 \leq x \leq 3$.

$$\text{Soluție. } I_x = \int \int_D y^2 dx dy = \int_0^3 \left(\int_0^{\sqrt[3]{x^2(3-x)}} y^2 dy \right) dx = \frac{9}{4}$$

$$I_y = \int \int_D x^2 dx dy = \int_0^3 \left(\int_0^{x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}} dy \right) dx = \int_0^3 x^{\frac{8}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}} dx$$

Se face schimbarea de variabilă $x = 3t$ și se obține

$$\begin{aligned} I_y &= 3^4 \int_0^1 t^{\frac{8}{3}}(1-t)^{\frac{1}{3}} dt = 3^4 B\left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right) = 3^4 \frac{\Gamma(\frac{11}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(5)} = \\ &= 3^4 \frac{\Gamma(3+\frac{2}{3})\Gamma(1+\frac{1}{3})}{4!} = 3^4 \frac{\frac{8}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}{24} = \frac{10}{3} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{20\pi}{3\sqrt{3}} \quad \square \end{aligned}$$

26. Să se calculeze momentul de inerție în raport cu originea unei plăci plane omogene mărginită de curbele $y = 0$, $x + y - 6 = 0$, $y^2 = 8x$.

Soluție. Intersectând curbele obținem punctele $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(0, 6)$. Momentul de inerție în raport cu originea este

$$\begin{aligned} I_0 &= \int \int_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^4 \left(\int_{\frac{y^2}{8}}^{6-y} (x^2 + y^2) dx \right) dy = \\ &= \int_0^4 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \Big|_{\frac{y^2}{8}}^{6-y} dy = \int_0^4 \left[\frac{(6-y)^3}{3} + y^2(6-y) - \frac{y^6}{3 \cdot 8^3} - \frac{y^4}{8} \right] dy = \\ &= 136 - \frac{128}{5} - \frac{32}{21} \quad \square \end{aligned}$$

27. Să se afle coordonatele centrului de greutate al unei plăci omogene, mărginită de curbele $y^2 = 2ax$, $x^2 = 2ay$.

Soluție. Din motive de simetrie coordonatele centrului de greutate se găsesc pe prima bisectoare, deci $x_G = y_G$, unde $x_G = \frac{\int \int_D x dx dy}{\int \int_D dx dy}$

$$I_1 = \int_0^{2a} \left(\int_{\frac{x^2}{2a}}^{\sqrt{2ax}} x dy \right) dx = \frac{6}{5} a^3$$

$$I_2 = \int_0^{2a} \left(\int_{\frac{x^2}{2a}}^{\sqrt{2ax}} dy \right) dx = \frac{4}{3} a^2$$

Deci $x_G = y_G = \frac{9}{10} a$ □

28. Să se calculeze cu o eroare mai mică decât 10^{-2} integralele:

a. $\int \int_A \frac{dx dy}{1+xy}$, $A = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$.

b. $\int \int_B \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2)}}$, $dx dy$, unde:

$$B = \{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq (e-1)^2\}.$$

Soluție. a.

$$\begin{aligned} \int \int_A \frac{dx dy}{1+xy} &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^1 \frac{dy}{1+xy} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+xy)}{x} \Big|_0^1 dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}} \cong \frac{65}{144}. \end{aligned}$$

b. Folosim coordonatele polare:

$$\begin{aligned} \int \int_B \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2)}} &= 4\pi \int_1^{e-1} \frac{\ln \rho}{\rho-1} d\rho = \\ &= 4\pi \int_0^{e-2} \frac{\ln(1+u)}{u} du = 4\pi \int_0^{e-2} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \rho^n d\rho = \\ &= 4\pi \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (e-2)^{n+1}}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

In continuare se aproximează suma seriei alternate obținute. \square

10.3 Probleme propuse

Să se calculeze următoarele integrale:

1. $I = \int \int_D xy dx dy$, dacă D este domeniul limitat de parabola $y = x^2$ și de dreapta $y = 2x + 3$.

$$\mathbf{R:} I = \int_{-1}^3 \left(\int_{x^2}^{2x+3} xy dy \right) dx = 53 + \frac{1}{3}$$

2. $I = \int \int_D \arcsin \sqrt{x+y} dx dy$, unde D este domeniul mărginit de dreptele $x+y=0$, $x+y=1$, $y=-1$, $y=1$.

$$\mathbf{R:} I = \int_{-1}^1 \left(\int_{-y}^{1-y} \arcsin \sqrt{x+y} dx \right) dy = \frac{\pi}{4}$$

Să se calculeze în coordonate polare următoarele integrale duble:

3. $I = \int \int_D \arcsin \frac{1}{2\pi} (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} dx dy$, unde $D : \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq (2\pi)^2$

$$\mathbf{R:} I = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{\pi}^{2\pi} \left(\arcsin \frac{\rho}{2\pi} \right) \rho d\rho = \pi^3 \left(\frac{7\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

4. $I = \int \int_D xe^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, unde $D : a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2$, $-x \leq y \leq x$

$$\mathbf{R:} I = \int_a^b \rho^2 e^\rho d\rho \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta = \sqrt{2} [e^b (b^2 - 2b + 2) - e^a (a^2 - 2a + 2)]$$

5. $I = \int \int_D (x^2+y^2+xy-x-y) dx dy$, unde $D : 4 \leq x^2+y^2 \leq 9$, $y \geq x \geq 0$

$$\mathbf{R:} I = \int_2^3 d\rho \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho^3 + \rho^3 \frac{\sin 2\theta}{2} - \rho^2 \cos \theta - \rho^2 \sin \theta \right) d\theta = \frac{65(\pi+1)}{16} - \frac{19}{3}$$

6. Să se determine aria mulțimii plane D limitată de lemniscata lui Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

R: Tinând cont de simetria lemniscatei în raport cu cele două axe de coordonate, aria este $A = 4 \int \int_{D_1} dx dy$, unde prin trecere la coordonate polare obținem $A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} \rho d\rho \right) d\theta$ etc.

7. Cu ajutorul unor schimbări de variabile adecvate, să se calculeze integrala $I = \int \int_D (x + y)^4 (x - y)^2 dx dy$, unde D : pătratul mărginit de dreptele $x + y = 1, x + y = -1, x - y = -1, x - y = 3$.

R: Fac transformarea $T : u = x + y, v = x - y$

8. Să se calculeze aria patrulaterului curbiliniu mărginit de parabolele $x^2 = ay, x^2 = by, y^2 = cx, y^2 = dx, 0 < a < b, 0 < c < d$.

R: Fac transformarea $T : u = \frac{x^2}{y}, v = \frac{y^2}{x}$ și folosim formula $A = \int \int_D dx dy$

9. Presupunem că R e regiunea plană mărginită de hiperbolele $xy = 1, xy = 3, x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 4$. Găsiți momentul de inerție $I_0 = \int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$ al acestei regiuni.

R: Fac transformarea $T : u = xy, v = x^2 - y^2$ și obținem $I_0 = 3$

10. Găsiți volumul V al solidului ce se întinde sub suprafața $z = 1 + xy$ și deasupra dreptunghiului $R : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ din planul xOy .

R: $V = \int_0^2 \left(\int_0^1 (1 + xy) dy \right) dx = 3$

11. Găsiți volumul V al solidului mărginit inferior de planul xOy și superior de paraboloidul $z = 25 - x^2 - y^2$.

R: $V = 4 \int_0^5 \left(\int_0^{\sqrt{25-x^2}} (25 - x^2 - y^2) dy \right) dx = \frac{625\pi}{2}$

12. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafețele $z = \alpha x, z = \beta x, x^2 + y^2 = 2ax, 0 < \alpha < \beta, a > 0$.

R: $V = \int \int_D (\beta - \alpha) x dx dy$, unde D este interiorul cercului $x^2 + y^2 = 2ax$. Atunci $V = (\beta - \alpha) \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \rho (a + \rho \cos \theta) d\rho \right) d\theta = \pi(\beta - \alpha)a^3$

13. Să se calculeze volumul limitat de suprafețele $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$.

R: $V = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx = \frac{88}{105}$

Capitolul 11

Integrale triple

11.1 Noțiuni teoretice

Fie $f(x, y, z)$ o funcție mărginită pe domeniul mărginit $V \subset \mathbb{R}^3$. Se consideră o partiție a spațiului în intervale tridimensionale, din care reținem pe acelea ce conțin puncte din V . Fie diviziunea $\Delta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, v_i , $i = \overline{1, n}$ fiind un astfel de interval. Norma diviziunii Δ , notată $\nu(\Delta)$, este cea mai mare dintre dimensiunile intervalelor v_i , $i = \overline{1, n}$. Suma Riemann atașată funcției $f(x, y, z)$, corespunzătoare diviziunii Δ a lui V , este

$$\sigma_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \text{vol}(v_i), (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in v_i$$

Integrala triplă a funcției $f(x, y, z)$ extinsă la domeniul V este

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dv = \lim_{\nu(\Delta) \rightarrow 0} \sigma_{\Delta}(f)$$

limita fiind aceeași pentru orice alegere a punctelor intermediare (ξ_i, η_i, ζ_i) .

De obicei calculul integralei triple se reduce la următoarele cazuri:

a) Domeniul V este cuprins între planele $z = c$ și $z = d$ și secțiunea cu planul $z = z_0$, $c \leq z_0 \leq d$ se proiectează în planul xOy după domeniul D_z . Atunci, dacă f este continuă în V , avem

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dv = \int_c^d \left(\int \int_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

b) Domeniul V este limitat de o suprafață cilindrică cu generatoarele paralele cu axa Oz (a cărei intersecție cu planul xOy închide domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$), de suprafața inferioară $z = \varphi_1(x, y)$, $(x, y) \in D$ și de suprafața superioară $z = \varphi_2(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Dacă f este continuă în V , atunci

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dv = \int \int_D \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Schimbarea de variabilă în integrala triplă Fie transformarea

$$T : x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w), z = \chi(u, v, w)$$

pentru care funcțiile φ, ψ, χ satisfac condițiile:

- sunt funcții continue împreună cu derivatele lor parțiale;
- stabilesc o corespondență biunivocă și bicontinuuă între punctele domeniului V din spațiul $Oxyz$ și punctele domeniului V' din spațiul $O'uvw$;
- determinantul funcțional $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ păstrează semn constant în V .

În condițiile asupra transformării T , integrala triplă se transformă după formula

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dv = \int \int \int_{V'} f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)] |J| dv'$$

În cazul coordonatelor cilindrice ρ, θ, z cu $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = z$, formula schimbării de variabile devine

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dv = \int \int \int_{V'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz$$

pentru coordonate sferice ρ, θ, φ cu $x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta$ avem

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dv = \int \int \int_{V'} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$$

Aplicații a) Volumul corpului V este $vol(V) = \int \int \int_V dv$

b) Masa unui corp V și coordonatele centrului de greutate G al corpului V , pentru densitatea de masă $\rho(x, y, z)$ sunt

$$M = \int \int \int_V \rho(x, y, z) dv$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int \int \int_V x \rho(x, y, z) dv$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int \int \int_V y \rho(x, y, z) dv$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int \int \int_V z \rho(x, y, z) dv$$

c) Momentele de inerție în raport cu planele și axele de coordonate au expresiile

$$I_{xOy} = \int \int \int_V z^2 \rho(x, y, z) dv$$

$$I_{yOz} = \int \int \int_V x^2 \rho(x, y, z) dv$$

$$I_{zOx} = \int \int \int_V y^2 \rho(x, y, z) dv$$

$$I_{Ox} = \int \int \int_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv$$

$$I_{Oy} = \int \int \int_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv$$

$$I_{Oz} = \int \int \int_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dv$$

11.2 Probleme rezolvate

Să se calculeze următoarele integrale triple:

1. $I = \int \int \int_V \frac{xyz}{(1+x^2+y^2+z^2)^n} dx dy dz$, unde $V : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, n > 3$

Soluție.
$$I = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{xyz}{(1+x^2+y^2+z^2)^n} dz \right) dy \right] dx =$$

$$= -\frac{1}{2(n-1)} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^{n-1}} \Big|_0^1 dy \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2(n-1)} \int_0^1 x \left[\int_0^1 \frac{y}{(2+x^2+y^2)^{n-1}} - \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{n-1}} \right] dy dx =$$

$$= \frac{1}{4(n-1)(n-2)} \int_0^1 x \left[\frac{1}{(2+x^2+y^2)^{n-2}} - \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{n-2}} \right] \Big|_0^1 dx =$$

$$= \frac{1}{4(n-1)(n-2)} \int_0^1 x \left[\frac{1}{(3+x^2)^{n-2}} - \frac{2}{(2+x^2)^{n-2}} + \frac{1}{(1+x^2)^{n-2}} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{8(n-1)(n-2)(n-3)} \left(1 + \frac{81}{3^n} - \frac{64}{4^n} - \frac{24}{2^n} \right) \quad \square$$

2. $I = \int \int \int_V \frac{1}{(a+x+y+z)^4} dx dy dz$, $a > 0$, unde $V : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq a$

Soluție.
$$I = \int_0^a \left[\int_0^{a-x} \left(\int_0^{a-x-y} \frac{1}{(a+x+y+z)^4} dz \right) dy \right] dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^a \left(\int_0^{a-x} \frac{1}{(a+x+y+z)^3} \Big|_0^{a-x-y} dy \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^a \left(\int_0^{a-x} \left[\frac{1}{(2a)^3} - \frac{1}{(a+x+y)^3} \right] dy \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^a \left[\frac{a-x}{(2a)^3} + \frac{1}{2(2a)^2} - \frac{1}{2(a+x)^2} \right] dx = \frac{1}{48a} \quad \square$$

3. $I = \int \int \int_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, unde V e limitat de suprafața conică $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ și planul $z = a > 0$

Soluție. Proiecția lui V pe planul xOy este discul $D : x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0$. Obținem

$$I = \int \int_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^a \sqrt{x^2 + y^2} dz \right) dx dy =$$

$$= \int \int_D [a\sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)] dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a (a\rho^2 - \rho^3) d\rho \right) d\theta = \frac{\pi a^4}{6} \quad \square$$

$$4. I = \int \int \int_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \text{ unde } V : x^2 + y^2 + z^2 \leq az$$

Soluție. Corpul este interiorul sferei cu centrul în $C(0, 0, \frac{a}{2})$ și raza $\frac{a}{2}$.

Trecem la coordonate sferice $x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta, \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, deoarece $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq az$, deci $\cos \theta \geq 0$. Obținem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \cos \theta} \rho^3 \sin \theta d\rho \right) d\theta \right] d\varphi = \frac{\pi a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^4 \theta d\theta = \\ &= -\frac{\pi a^4}{10} \cos^5 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{10} \quad \square \end{aligned}$$

$$5. I = \int \int \int_V z dx dy dz, \text{ unde } V : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0$$

Soluție. Intersecția conului $x^2 + y^2 = z^2$ și a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ este un cerc situat în planul $z = \frac{a}{\sqrt{2}}$, cu centrul în punctul $C(0, 0, \frac{a}{\sqrt{2}})$ și raza $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Avem

$$I = \int \int_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z dz \right) dx dy = \frac{1}{2} \int \int_D (a^2 - 2x^2 - 2y^2), \text{ unde } D \text{ este discul } x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Atunci } I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} (a^2 \rho - 2\rho^3) d\rho \right) d\theta = \frac{\pi a^4}{8} \quad \square$$

$$6. I = \int \int \int_V \frac{1}{(a^2 + x^2 + y^2 - z)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz, \text{ unde } V : x^2 + y^2 \geq az, x^2 + y^2 \leq a^2, z \geq 0$$

$$\text{Soluție. } I = \int \int_D \left(\int_0^{\frac{x^2+y^2}{a}} \frac{1}{(a^2 + x^2 + y^2 - z)^{\frac{3}{2}}} dz \right) dx dy, \text{ unde } D : x^2 + y^2 \leq a^2$$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= -2 \int \int_D \left[(a^2 + x^2 + y^2 - \frac{x^2+y^2}{a})^{-\frac{1}{2}} - (a^2 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \right] dx dy = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{\rho}{(a^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\rho}{[a^2 + (1 - \frac{1}{a})\rho^2]^{\frac{1}{2}}} \right] d\rho d\theta = 4\pi a(\sqrt{2} - 1) - \\ &= \frac{4\pi a}{a-1}(\sqrt{2a^2 - a} - a) \quad \square \end{aligned}$$

$$7. I = \int \int \int_V (x + y + z)^2 dx dy dz, \text{ unde } V \text{ este partea comună sferei } x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2 \text{ și paraboloidului } x^2 + y^2 = 2az.$$

Soluție. Cele două suprafețe se intersectează după cercul $x^2 + y^2 = 2a^2, z = a$. Corpul este cuprins între planele $z = 0$ și $z = a\sqrt{3}$.

Secțiunea cu planul $z = ct$ este $D_z : x^2 + y^2 \leq 2az, z \in [0, a]$ și $x^2 + y^2 \leq 3a^2 - z^2, z \in [a, a\sqrt{3}]$

Așadar,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \left(\int \int_{x^2+y^2 \leq 2az} (x+y+z)^2 dx dy \right) dz + \\ &+ \int_a^{a\sqrt{3}} \left(\int \int_{x^2+y^2 \leq 3a^2-z^2} (x+y+z)^2 dx dy \right) dz = \\ &= \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2az}} (\rho \cos \theta + \rho \sin \theta + z)^2 \rho d\rho d\theta \right) dz + \\ &+ \int_a^{a\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3a^2-z^2}} (\rho \cos \theta + \rho \sin \theta + z)^2 \rho d\rho d\theta \right) dz = \\ &= \frac{1}{5} \pi a^5 \left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6} \right) \quad \square \end{aligned}$$

8. $I = \int \int \int_V xy dx dy dz$, unde V este mărginit de cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$ și planele $z = 0, z = 1, y = x, y = \sqrt{3}x$.

Soluție. Trecem la coordonate cilindrice $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = z, 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq z \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ (deoarece $x \leq y \leq x\sqrt{3} \implies \rho \cos \theta \leq \rho \sin \theta \leq \sqrt{3}\rho \cos \theta \implies 1 \leq \tan \theta \leq \sqrt{3} \implies \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$)

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^R \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \rho^3 \cos \theta \sin \theta d\theta dz d\rho = 2 \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^1 dz \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2\theta d\theta = \frac{R^4}{8} \left(-\frac{\cos 2\theta}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{R^4}{8} \left[-\frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ &= -\frac{R^4}{32} \quad \square \end{aligned}$$

9. $\int \int \int_{\Omega} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}} dx dy dz,$
 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y \geq 0, z \geq 0, x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1\}$

Soluție. Coordonatele sferice generalizate sunt:

$$x = a\rho \sin \theta \cos \varphi, y = b\rho \sin \theta \sin \varphi, z = c\rho \cos \theta,$$

având același domeniu maxim fiind $(\rho, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ și jacobianul $J = abc\rho^2 \sin \theta$.

Pentru domeniul Ω vom lua $a = 1, b = 3, c = 2$, și obținem:

$$\begin{aligned} &\int \int \int_{\Omega} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}} dx dy dz = \\ &= \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\pi} 6\rho^2 (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \sin \theta d\varphi = 6\pi \int_0^1 \rho^2 (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} d\rho = \\ &= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^4 t dt = 6\pi \int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1 + u^2)^4} du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3\pi \left(-\frac{u}{3(1+u^2)^3} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{du}{3(1+u^2)^3} \right) = \pi \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)^3} = \\
&= \pi \left(\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)^2} - \int_0^\infty \frac{u^2}{(1+u^2)^3} du \right) = \frac{3}{4}\pi \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{3}{16}\pi.
\end{aligned}$$

□

10. $\int \int \int_{\Pi} z \, dx \, dy \, dz,$
 $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1\}$

Soluție. Pentru Π , domeniul în coordonate sferice este

$$\varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \rho \in [0, 2 \cos \theta]$$

și deci:

$$\begin{aligned}
\int \int \int_{\Pi} z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho^3 \sin \theta \cos \theta \, d\rho = \\
&= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{4}{3}\pi.
\end{aligned}$$

□

11. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafețele: $z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2$.

Soluție. $vol = \int \int \int_V dx \, dy \, dz = \int \int_D \left(\int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz \right) dx \, dy =$
 $= \int \int_D (x^2 + y^2) dx \, dy$, unde $D: y = x, y = x^2, 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x$

Atunci

$$\begin{aligned}
vol &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^x dx = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{3}{35}
\end{aligned}$$

□

12. Să se afle volumul corpului definit de $x^2 + y^2 + z^2 \leq 18, x^2 + y^2 + z^2 \geq 8, x^2 + y^2 \leq z^2, z > 0$.

Soluție. Intersectând sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 18$ cu conul $z^2 = x^2 + y^2, z > 0$ obținem cercul $x^2 + y^2 = 9, z = 3$, cu centrul în punctul $C(0, 0, 3)$ și raza $CA = 3$

Avem $\operatorname{tg} \theta = \frac{CA}{OC} = 1 \implies \theta = \frac{\pi}{4}$

Folosind coordonate sferice $x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta, 2 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \varphi < 2\pi$ rezultă :

$$\begin{aligned}
vol &= \int \int \int_V dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_2^3 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \, d\theta \int_2^3 \rho^2 \, d\rho = 19\pi(2 - \sqrt{2})
\end{aligned}$$

□

13. Să se calculeze volumul cuprins între paraboloidii $x^2 + y^2 = 2 + z$, $x^2 + y^2 = 10 - z$.

Soluție. Intersecția celor doi paraboloidi este cercul $x^2 + y^2 = 6$ situat în planul $z = 4$.

$$\begin{aligned} \text{vol} &= \int \int \int_V dx dy dz = \int \int_{x^2+y^2 \leq 6} \left(\int_{x^2+y^2-2}^{10-x^2-y^2} dz \right) dx dy = \\ &= \int \int_{x^2+y^2 \leq 6} (12 - 2x^2 - 2y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{6}} (12 - \rho^2) \rho d\rho d\theta = 54\pi \quad \square \end{aligned}$$

14. Să se calculeze volumul mărginit de suprafața $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x$.

Soluție. Trecând la coordonate sferice, ecuația suprafeței se scrie $\rho = a \sqrt[3]{\sin \theta \cos \varphi}$

Din ecuația suprafeței rezultă că dacă $a > 0$, trebuie ca $x \geq 0$, deci suprafața este situată în semispațiul din fața planului yOz , așa că $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\theta \in [0, \pi]$

Obținem

$$\begin{aligned} \text{vol} &= \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \sqrt[3]{\sin \theta \cos \varphi}} \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \frac{a^3}{3} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi a^3}{3} \quad \square \end{aligned}$$

15. Să se calculeze volumele mulțimilor Ω mărginite de suprafețele de ecuații:

a. $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z \geq 0$.

b. $z = x^2 + y^2 - 1$, $z = 2 - x^2 - y^2$.

c. $z = 4 - x^2 - y^2$, $2z = 5 + x^2 + y^2$.

d. $x^2 + y^2 = 1$, $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

e. $x^2 + y^2 = 4a^2$, $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x + y + z = 3$, $x \geq 0$, $z \geq 0$, $a \in (0, 1)$.

f. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = x^2$, $x \geq 0$.

Soluție. a. Curba de intersecție dintre elipsoid și con este elipsa de ecuații

$$4x^2 + 2y^2 = 1, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Proiecția pe planul xOy a lui Ω este

$$D = \{(x, y); 4x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

Rezultă :

$$\text{vol}(\Omega) = \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int \int_D dx dy \int_{\sqrt{2x^2+y^2}}^{\sqrt{1-2x^2-y^2}} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \int_D \left(\sqrt{1 - 2x^2 - y^2} - \sqrt{2x^2 + y^2} \right) dx dy = \\
&= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2}\rho^2} - \sqrt{\frac{1}{2}\rho^2} \right) \frac{1}{2\sqrt{2}} \rho d\varphi = \frac{\pi}{3}(\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

b. Curba de intersecție a celor doi paraboloidi este cercul de ecuații

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{2}, z = \frac{1}{2}.$$

Proiecția pe planul xOy a lui Ω este

$$D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq \frac{3}{2}\},$$

și deci obținem:

$$\begin{aligned}
\text{vol}(\Omega) &= \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int \int_D dx dy \int_{x^2+y^2-1}^{2-x^2-y^2} dz = \\
&= \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} d\rho \int_0^{2\pi} (3 - \rho^2) \rho d\varphi.
\end{aligned}$$

c. Curba de intersecție dintre cei doi paraboloidi este cercul $x^2 + y^2 = 1$ situat în planul $z = 3$. Notând cu $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, rezultă :

$$\begin{aligned}
\text{vol}(\Omega) &= \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int \int_D dx dy \int_{\frac{1}{2}(1+x^2+y^2)}^{4-x^2-y^2} dz = \\
&= \int \int_D \frac{3}{2}(1 - x^2 - y^2) dx dy = \frac{3}{2} \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (1 - \rho^2) \rho d\varphi = \frac{3}{4}\pi.
\end{aligned}$$

d. Curba de intersecție dintre cilindru și con este cercul $x^2 + y^2 = 1$ situat în planul $z = 1$. Notând cu $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, rezultă :

$$\begin{aligned}
\text{vol}(\Omega) &= \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int \int_D dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz = \\
&= \int \int_D (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (1 - \rho) \rho d\varphi = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

e. Proiecția lui Ω pe planul xOy este

$$D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4a^2, x^2 + (y - a)^2 \geq a^2, x > 0\},$$

și deci obținem:

$$\text{vol}(\Omega) = \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int \int_D dx dy \int_0^{3-x-y} dz =$$

$$= \int_0^\pi d\varphi \int_{2a \sin \varphi}^{2a} \rho(3 - \rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi) d\rho.$$

f. Curba de intersecție dintre sferă și con este cercul $y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$, situat în planul $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Proiecția mulțimii Ω pe planul yOz este discul $D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 \leq \frac{1}{2}\}$; rezultă :

$$\begin{aligned} \text{vol} &= \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int \int_D dy dz \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx = \\ &= \int \int_D \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{y^2 + z^2} \right) dy dz = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} d\rho \int_0^{2\pi} \rho^2 d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{12} \pi. \end{aligned}$$

□

16. Să se calculeze masa corpului V de densitate $\rho(x, y, z) = z$ mărginit de suprafețele $x^2 + y^2 + z^2 = 24$, $x^2 + y^2 = 2z$.

Soluție. Intersecția celor două suprafețe este cercul $x^2 + y^2 = 8$ situat în planul $z = 8$

$$\begin{aligned} M &= \int \int \int_V z dx dy dz = \int \int_{x^2+y^2 \leq 8} \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{24-x^2-y^2}} z dz \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int \int_{x^2+y^2 \leq 8} \left[24 - x^2 - y^2 - \left(\frac{x^2+y^2}{2} \right)^2 \right] dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \left(24 - \rho^3 - \frac{\rho^4}{4} \right) d\rho = \frac{176\pi}{3} \end{aligned}$$

□

17. Să se determine coordonatele centrului de greutate al unui corp omogen definit de $x^2 + y^2 \leq 2z$, $x + y - z \leq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Soluție. } M &= \int \int \int_V dx dy dz = \int \int_{x^2+y^2-2(x+y) \leq 0} \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} dz \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int \int_{x^2+y^2-2(x+y) \leq 0} (2x + 2y - x^2 - y^2) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^2 - \rho^3) d\rho = \pi \\ &\text{(unde am folosit trecerea la coordonate polare } x = 1 + \rho \cos \theta, y = \\ &= 1 + \rho \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \int \int_V x dx dy dz &= \int \int_{x^2+y^2-2(x+y) \leq 0} \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} x dz \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int \int_{x^2+y^2-2(x+y) \leq 0} x(2x + 2y - x^2 - y^2) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^2 - \rho^3)(1 + \rho \cos \theta) d\rho = \pi \end{aligned}$$

Deci $x_G = 1$

$$\begin{aligned} \iint \int_V y dx dy dz &= \iint_{x^2+y^2-2(x+y) \leq 0} \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} y dz \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2-2(x+y) \leq 0} y(2x+2y-x^2-y^2) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^2 - \rho^3)(1 + \rho \sin \theta) d\rho = \pi \end{aligned}$$

Deci $y_G = 1$

$$\begin{aligned} \iint \int_V z dx dy dz &= \iint_{x^2+y^2-2(x+y) \leq 0} \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} z dz \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2-2(x+y) \leq 0} \left[(x+y)^2 - \frac{(x^2+y^2)^2}{4} \right] dx dy \end{aligned}$$

Trecem la coordonate polare $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, $0 \leq \rho \leq 2(\sin \theta + \cos \theta)$ și obținem

$$\iint \int_V z dx dy dz = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} \rho \left(\rho^2 + \rho^2 \sin 2\theta - \frac{\rho^4}{4} \right) d\rho = \frac{5\pi}{3}$$

Deci $z_G = \frac{5}{3}$ □

18. Să se afle masa și să se determine poziția centrului de greutate al sferei $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$, dacă densitatea în punctele sferei este invers proporțională cu distanța de la aceste puncte la origine.

Soluție. Densitatea în punctul $M_0(x, y, z)$ este $\rho(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Deci masa va fi

$$M = k \iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz$$

V este cuprins între planele $z = 0$ și $z = 2a$, iar secțiunea cu planul $z = \text{const}$ este $x^2 + y^2 \leq 2az - z^2$. Așadar,

$$\begin{aligned} M &= k \int_0^{2a} \left(\iint_{x^2+y^2 \leq 2az-z^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy \right) dz = \\ &= k \int_0^{2a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2az-z^2}} \rho(\rho^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} d\rho d\theta dz = \\ &= k \int_0^{2a} \left[2\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2az-z^2}} \right] dz = 2k\pi \int_0^{2a} (\sqrt{2az} - z) dz = \frac{4}{3}k\pi a^2 \end{aligned}$$

Procedând analog se obține

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{k}{M} \int_0^{2a} \left(\iint_{x^2+y^2 \leq 2az-z^2} z \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy \right) dz = \\ &= \frac{2k\pi}{M} \int_0^{2a} (\sqrt{2az}^{\frac{3}{2}} - z^2) dz = \frac{4}{5}a, x_G = y_G = 0 \end{aligned} \quad \square$$

19. Să se calculeze momentul de inerție în raport cu axa Oz al corpului omogen de densitate $\rho(x, y, z) = \rho_0$ mărginit de suprafețele sferice $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ și $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Soluție. Corpul este mărginit inferior de S_1 și superior de S_2 . Suprafețele S_1 și S_2 se intersectează după cercul $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ din planul $z = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
I_{Oz} &= \int \int \int_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz = \rho_0 \int \int \int_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \\
&= \rho_0 \int \int_{x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}} \left(\int_{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} (x^2 + y^2) dz \right) dx dy = \\
&= \rho_0 \int \int_{x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}} (x^2 + y^2) z \Big|_{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy = \\
&= \rho_0 \int \int_{x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}} (x^2 + y^2) (2\sqrt{1 - x^2 - y^2} - 1) dx dy = \\
&= \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{4}} \rho^3 (2\sqrt{1 - \rho^2} - 1) d\rho d\theta = \frac{53\rho_0\pi}{480} \quad \square
\end{aligned}$$

11.3 Probleme propuse

Să se calculeze următoarele integrale triple:

1. $I = \int \int \int_V xyz dx dy dz$, unde $V : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$

R: $I = \frac{1}{8} a^2 b^2 c^2$

2. $I = \int \int \int_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz$, unde V este interiorul elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

R: $I = \frac{\pi^2 abc}{4}$

3. $I = \int \int \int_V z dx dy dz$, unde $V : z^2 = \frac{h^2}{a^2} (x^2 + y^2), z = 0, z = h$

R: $I = \frac{\pi}{4} a^2 h^2$

4. $I = \int \int \int_V [x^2 + y^2 + (z - 2)^2]^{-\frac{1}{2}} dx dy dz$, unde $V : x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$

R: $I = \pi \left(\ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3} + 3\sqrt{10} - \sqrt{2} - 8 \right)$

5. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafața $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

R: $vol = \frac{\pi^2 abc}{4}$

6. Să se determine volumul corpului omogen mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ și paraboloidul $x^2 + y^2 = 3z$.

R: $vol = \int \int_{x^2 + y^2 \leq 3} \left(\int_{\frac{x^2 + y^2}{3}}^{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dz \right) dx dy$ etc.

7. Să se calculeze masa corpului mărginit de elipsoidul $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$, știind că densitatea lui variază după legea $\rho(x, y, z) = k|z|, k$ constantă.

R: $M = 3k\pi$

8. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al corpului omogen de densitate $\rho(x, y, z) = 1$ mărginit de suprafețele $x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{9}$, $z = 0$, $z = 3$.

R: $x_G = y_G = 0, z_G = \frac{9}{4}$

Capitolul 12

Integrale de suprafață

12.1 Noțiuni teoretice

I. Integrale de suprafață de prima speță . Fie Σ o suprafață regulată dată prin $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Fie $\Delta = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ o diviziune a suprafeței Σ , realizată prin rețeaua curbelor coordonate, $s_i, i = \overline{1, n}$, fiind porțiunile elementare de suprafață . Fie d_i diametrul celei mai mici sfere ce conține elementul de suprafață s_i . Norma diviziunii Δ este numărul $\nu(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$. Fie punctul $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in s_i$, ales arbitrar.

Fie $F(x, y, z)$ o funcție continuă pe Σ . Se numește **integrală de suprafață de prima speță** , numărul real

$$\int \int_{\Sigma} F(x, y, z) d\sigma = \lim_{\nu(\Delta) \rightarrow 0} \sigma_{\Delta}(F), \sigma_{\Delta}(F) = \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) s_i,$$

limita fiind aceeași pentru orice alegere a punctelor intermediare. Valoarea integralei de suprafață de prima speță este independentă de alegerea suprafeței de integrare.

Integrală de suprafață de prima speță se calculează după formula

$$\int \int_{\Sigma} F(x, y, z) d\sigma = \int \int_D F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

unde

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}$$

reprezintă coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței.

Dacă suprafața regulată Σ este dată sub forma explicită $z = f(x, y)$,

$(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, atunci

$$\int \int_{\Sigma} F(x, y, z) d\sigma = \int \int_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy, p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

II. Integrale de suprafață de speța a doua. Fie funcțiile $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ continue în punctele suprafeței Σ . Fie Σ_+ fața suprafeței regulate Σ , definită de versorul normalei $n(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Integrala de suprafață de speța a doua se reduce la o integrală de suprafață de speța întâi

$$\int \int_{\Sigma_+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \int \int_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma$$

Aplicații

a) Aria porțiunii de suprafață Σ este

$$A = \int \int_{\Sigma} d\sigma = \int \int_D \sqrt{EG - F^2} dx dy$$

b) Masa M și coordonatele centrului de greutate G al porțiunii Σ de suprafață pe care este distribuită densitatea de masă $\rho(x, y, z)$ sunt date de

$$M = \int \int_{\Sigma} \rho(x, y, z) d\sigma$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int \int_{\Sigma} x \rho(x, y, z) d\sigma$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int \int_{\Sigma} y \rho(x, y, z) d\sigma$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int \int_{\Sigma} z \rho(x, y, z) d\sigma$$

c) Momentul de inerție al porțiunii Σ de suprafață, în raport cu originea, se calculează cu formula

$$I_0 = \int \int_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\sigma$$

12.2 Probleme rezolvate

Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de prima speță :

- $I = \int \int_{\Sigma} (x + y + z) d\sigma$, unde Σ este suprafața $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$

Soluție. Pentru suprafața Σ considerăm reprezentarea $x = a \sin \theta \cos \varphi$,
 $y = a \sin \theta \sin \varphi$, $z = a \cos \theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

Calculăm coeficienții primei forme fundamentale:

$$E = a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + a^2 \sin^2 \theta = a^2$$

$$F = a \cos \theta \cos \varphi \cdot a \sin \theta (-\sin \varphi) + a \cos \theta \sin \varphi \cdot a \sin \theta \cos \varphi + a(-\sin \theta) \cdot 0 = -a^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi + a^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$G = a^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + 0 = a^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{Găsim } d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dx dy = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (a \sin \theta \cos \varphi + a \sin \theta \sin \varphi + a \cos \theta) a^2 \sin \theta d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} [a^3 \sin^2 \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{a^3}{2} \sin 2\theta] d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [a^3 \sin^2 \theta (\sin \varphi / 0^{2\pi} - \cos \varphi / 0^{2\pi}) + \frac{a^3}{2} \sin 2\theta \cdot \varphi / 0^{2\pi}] d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi a^3 \sin 2\theta d\theta = \pi a^3 \left(-\frac{\cos 2\theta}{2} \right) / 0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi a^3}{2} (\cos \pi - \cos 0) = \pi a^3 \quad \square \end{aligned}$$

2. $I = \int \int_{\Sigma} \frac{1}{x+y+z} d\sigma$, unde Σ este porțiunea din planul $x + y + z = a$ decupată de planele de coordonate

Soluție. Suprafața Σ este triunghiul ABC cu $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$ și se proiectează în planul $z = 0$ după triunghiul OAB . Deci ecuația suprafeței Σ poate fi scrisă sub forma explicită $z = a - x - y$, $(x, y) \in \triangle OAB$ din planul xOy . Avem $p = -1$, $q = -1$, $d\sigma = \sqrt{3} dx dy$. Atunci

$$I = \int \int_{\triangle OAB} \frac{1}{a} \sqrt{3} dx dy = \frac{\sqrt{3}}{a} \int_0^a \int_0^{a-x} dy dx = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \square$$

3. $I = \int \int_{\Sigma} z d\sigma$, unde Σ este porțiunea din paraboloidul $z = \frac{x^2+y^2}{2}$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 = 8$

Soluție. Suprafața Σ se proiectează în planul xOy după domeniul plan $D : x^2 + y^2 \leq 8$. Deci $\Sigma : z = \frac{x^2+y^2}{2}$, $(x, y) \in D$. Avem $p = x$, $q = y$, $d\sigma = (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} dx dy$. Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int \int_D \frac{1}{2} (x^2 + y^2) (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^3 (1 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} d\rho d\theta = \\ &= \pi \left[\frac{1}{5} (1 + \rho^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} (1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right] / 0^{2\sqrt{2}} = \frac{596}{15} \pi \quad \square \end{aligned}$$

4. $I = \int \int_{\Sigma} (xy + yz + zx) d\sigma$, unde Σ este porțiunea din suprafața conică $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $a > 0$

Soluție. Avem $p = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, d\sigma = \sqrt{2}dxdy$. Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_{x^2+y^2-2ax \leq 0} \sqrt{2}[xy + (x+y)\sqrt{x^2+y^2}]dxdy = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{2}[\rho^2 \sin \theta \cos \theta + \rho^2(\cos \theta + \sin \theta)]\rho d\rho d\theta = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}[\sin \theta \cos \theta \frac{\rho^4}{4} / 2^{a \cos \theta} + (\cos \theta + \sin \theta) \frac{\rho^4}{4} / 2^{a \cos \theta}]d\theta = \\ &= 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta \cos^5 \theta + \cos^5 \theta + \sin \theta \cos^4 \theta)d\theta \text{ etc.} \quad \square \end{aligned}$$

5. $I = \int_{\Sigma} xyz d\sigma$, Σ este suprafața paraboloidului $x^2 + y^2 = z$ situată între planele $z = 0, z = 1$ cu $x, y \geq 0$

Soluție. Avem $p = 2x, q = 2y, d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$. Atunci

$$I = \int_D xy(x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy, \text{ unde } D : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0$$

Rezolvăm integrala trecând la coordonate polare:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^5 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cos \theta \sin \theta d\rho d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^1 \rho^5 \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = \\ &= \left(-\frac{1}{4} \cos 2\theta\right) / \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 \sqrt{1 + 4t} dt \text{ (am făcut schimbarea de variabilă } \rho^2 = t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int_0^1 t^2 \sqrt{1 + 4t} dt = \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt{5}} \left(\frac{y^2-1}{4}\right)^2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} y dy = \\ &= \frac{1}{128} \int_1^{\sqrt{5}} y^2 (y^4 - 2y^2 + 1) dy = \frac{1}{128} \left(\frac{y^7}{7} / \sqrt{5} - 2\frac{y^5}{5} / \sqrt{5} + \frac{y^3}{3} / \sqrt{5}\right) = \\ &= \frac{1}{128} \left(\frac{125\sqrt{5}}{7} - \frac{1}{7} - 10\sqrt{5} + \frac{2}{5} + \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{128} \left(\frac{200\sqrt{5}}{21} - \frac{8}{105}\right) \text{ (am} \\ &\text{făcut schimbarea } \sqrt{1 + 4t} = y \implies t = \frac{y^2-1}{4} \implies dt = \frac{1}{2} y dy) \quad \square \end{aligned}$$

6. Să se calculeze integrala de suprafață de prima speță

$$\int_{\Sigma} F(x, y, z) d\sigma$$

în următoarele cazuri:

- $F(x, y, z) = |xyz|, \Sigma : z^2 = x^2 + y^2, z \in [0, 1]$.
- $F(x, y, z) = y\sqrt{z}, \Sigma : x^2 + y^2 = 6z, z \in [0, 2]$.
- $F(x, y, z) = z^2, \Sigma = \{(x, y, z); z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 - 6y \leq 0\}$.

Soluție. a. Parametrizarea carteziană a conului este:

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Rezultă :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |xyz| d\sigma &= \int \int_D |xy| \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \\ &= \sqrt{2} \int \int_D |xy| \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \frac{4\sqrt{2}}{5}. \end{aligned}$$

b. Parametrizarea carteziană a paraboloidului este:

$$z = f(x, y) = \frac{1}{6}(x^2 + y^2), D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 12\}.$$

Rezultă :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} y \sqrt{z} d\sigma &= \int \int_D y \sqrt{\frac{1}{6}(x^2 + y^2)} \sqrt{1 + \frac{1}{9}(x^2 + y^2)} dx dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{12}} \rho^3 \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{9}} \sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

c. Cu parametrizarea carteziană

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 6y\}.$$

rezultă :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} z^2 d\sigma &= \int \int_D (x^2 + y^2) dx dy = \\ &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{6 \sin \varphi} \rho^3 d\rho = \frac{243}{2} \pi. \end{aligned}$$

□

7. Să se calculeze aria porțiunii din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 - ay = 0$ situată în semispațiul $z \geq 0$.

Soluție. Proiecția suprafeței în planul xOy se face pe domeniul (D) : $x^2 + y^2 - ay \leq 0, z = 0$. Deoarece $(\Sigma)z = (a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}, (x, y) \in D$, rezultă $p = -x(a^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}, q = -y(a^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$ și $d\sigma = a(a^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} dx dy$.

Atunci aria este

$$\begin{aligned} A &= \int \int_D a(a^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} dx dy = a \int_0^{\pi} \int_0^{a \sin \theta} \rho(a^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} d\rho d\theta = \\ &= a^2 \int_0^{\pi} (1 - |\cos \theta|) d\theta = (\pi - 2)a^2 \end{aligned} \quad \square$$

8. Să se calculeze aria suprafeței $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > 0$ pentru care $x + y \leq a, x, y \geq 0$.

Soluție. Avem $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $p = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, $q = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$,
 $d\sigma = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$

Atunci aria este

$$A = \int \int_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy, \text{ unde } D : x + y \leq a, x \geq 0, y \geq 0$$

$$A = a \int_0^a \int_0^{a-x} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx = a \int_0^a \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{a-x} dx =$$

$$= a \int_0^a \arcsin \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx$$

Facem substituția $t = \arcsin \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ și obținem

$$A = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t \cos t}{(1 + \sin^2 t)^2} dt$$

Folosim metoda de integrare prin părți și obținem

$$A = 2a^2 \left(-\frac{t}{1 + \sin^2 t} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \sin^2 t} = -\frac{a^2 \pi}{2} + 2a^2 I_1, \text{ unde}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \sin^2 t}$$

Pentru calculul lui I_1 facem substituția $u = \operatorname{tg} t$ și avem

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{du}{2u^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}u \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Așadar, } A = \frac{\pi a^2}{2} (\sqrt{2} - 1) \quad \square$$

9. Să se calculeze aria porțiunii de pe suprafața $z = x^2$ decupată de planele $x + y = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$.

Soluție. Fie Σ partea de pe suprafața cilindrului $z = x^2$ decupată de planele $x + y = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$

$$\text{Avem } p = 2x, q = 0, d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2} dx dy$$

Atunci aria este

$$A = \int \int_D \sqrt{1 + 4x^2} dx dy, \text{ unde } D : x + y \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0$$

$$A = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}-x} \sqrt{1 + 4x^2} dy dx \text{ etc} \quad \square$$

10. Să se calculeze aria porțiunii din suprafața $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2$ interioară conului $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$.

Soluție. O reprezentare parametrică a lui Σ este

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, y = a \sin \theta \sin \varphi, z = a \cos \theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{4}], \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\text{Prin calcul rezultă } E = a^2, F = 0, G = a^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{Obținem } A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta =$$

$$= a^2 (2 - \sqrt{2}) \quad \square$$

11. Să se calculeze aria suprafeței
- Σ
- dată de

$$\Sigma = \{(x, y, z) / (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2), x, y, z \geq 0\}$$

Soluție. În coordonate sferice, ecuația suprafeței devine $\rho = a \sin \theta$

Ecuațiile parametrice ale pânzei Σ vor fi

$$x = a \sin^2 \theta \cos \varphi, y = a \sin^2 \theta \sin \varphi, z = a \sin \theta \cos \theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{Calculăm } \sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{Aia este } A = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta d\varphi = \frac{a^2 \pi}{8} \quad \square$$

12. Să se calculeze aria suprafeței
- Σ
- dată de

$$\Sigma = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 = 2az, (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2), x \geq 0, a > 0\}$$

Soluție. Vrem să calculăm aria decupată de cilindrul $(x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)$ în paraboloidul $x^2 + y^2 = 2az$.

$$\text{Avem } \Sigma : z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2), p = \frac{x}{a}, q = \frac{y}{a}, d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}} dx dy$$

$$\text{Atunci } A = \int \int_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}} dx dy, \text{ unde } D : (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)$$

Scriem în coordonate polare ecuația lemniscatei și obținem $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $\rho \in [0, a\sqrt{\cos 2\theta}]$

$$\text{Atunci } A = \frac{2}{a} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho \sqrt{a^2 + \rho^2} d\rho d\theta = \frac{a^2}{9} (20 - 3\pi) \quad \square$$

13. Să se calculeze aria suprafeței
- Σ
- dată de

$$\Sigma = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 = (1 - z)^2, x^2 + y^2 + 2y \geq 1, z \in [0, 1]\}$$

Soluție. Vrem să calculăm aria porțiunii din conul $x^2 + y^2 = (1 - z)^2$ pentru $z \in [0, 1]$, decupată de cilindrul $x^2 + (y + 1)^2 = 2$ în exterior.

$$\text{Avem } \Sigma : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, p = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, q = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, d\sigma = \sqrt{2} dx dy$$

$$\text{Atunci } A = \int \int_D \sqrt{2} dx dy, \text{ unde } D : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + (y + 1)^2 \geq 2$$

Trecem la coordonate polare $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ și obținem $2 \leq \rho^2 \cos^2 \theta + (\rho \sin \theta + 1)^2$ și $\rho^2 \leq 1 \implies \rho \in [-\sin \theta + \sqrt{1 + \sin^2 \theta}, 1]$.

Cum $1 \geq -\sin \theta + \sqrt{1 + \sin^2 \theta} \implies 2 \sin \theta \geq 0 \implies \theta \in [0, \pi]$

$$\text{Așadar, } A = \sqrt{2} \int_0^\pi \int_{-\sin \theta + \sqrt{1 + \sin^2 \theta}}^1 \rho d\rho d\theta = \sqrt{2} \quad \square$$

14. Să se calculeze aria suprafeței
- Σ
- dată de

$$\Sigma = \{(x, y, z) / az = xy, a > 0, x^2 + y^2 \leq a^2, z \geq 0\}$$

Soluție. Vrem să calculăm aria porțiunii $z = \frac{1}{a}xy$ paraboloidului hiperbolic, cuprinsă în interiorul cilindriului $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Atunci $A = \int \int_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$, unde $D : x^2 + y^2 \leq a^2$

Trecând la coordonate polare obținem

$$A = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 + \rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{2\pi a^2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \quad \square$$

15. Să se calculeze aria suprafeței Σ dată de

$$\Sigma = \{(x, y, z) / x^2 + z^2 = 1, y + z \leq 1, x, y, z \geq 0\}$$

Soluție. Vrem să calculăm aria cilindriului $x^2 + z^2 \leq 1$ pentru $x \geq 0$ decupată de prisma $y + z \leq 1, y, z \geq 0$

Pânza are ecuația $x = \sqrt{1 - z^2}, (y, z) \in D$, unde $D : y + z \leq 1, y, z \geq 0$

$$\text{Avem } p = 0, q = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}, d\sigma = \sqrt{1 + \frac{z^2}{1-z^2}} dx dy$$

$$\text{Atunci } A = \int \int_D \sqrt{1 + \frac{z^2}{1-z^2}} dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz dy = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \square$$

16. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al porțiunii de suprafață omogenă $(\Sigma)z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, decupată de suprafața $x^2 + y^2 = ax$.

Soluție. Trebuie să calculăm coordonatele centrului de greutate al unei porțiuni din suprafața unui con, decupată de un cilindru, densitatea fiind constantă (o luăm egală cu unitatea).

Suprafața se proiectează în planul xOy după domeniul $(D) : x^2 + y^2 \leq ax, z = 0$.

$$\text{Avem } p = x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}, q = y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}, d\sigma = \sqrt{2} dx dy$$

$$\text{Atunci } M = \int \int_{\Sigma} d\sigma = \sqrt{2} \int \int_D dx dy = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \rho d\rho d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi a^2$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int \int_{\Sigma} x d\sigma = \frac{\sqrt{2}}{M} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta = \frac{a}{2}$$

$$\text{Analog, } y_G = 0, z_G = \frac{16}{9} a \quad \square$$

17. Să se calculeze momentul de inerție, în raport cu axa Oz , al porțiunii sferice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x, y, z \geq 0$, de densitate de masă $\rho(x, y, z) = z$.

Soluție. Momentul de inerție în raport cu axa Oz este

$$I_{Oz} = \int \int_{\Sigma} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) d\sigma = \int \int_{\Sigma} (x^2 + y^2) z d\sigma$$

Pentru suprafața Σ avem reprezentarea:

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, y = a \sin \theta \sin \varphi, z = a \cos \theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Deoarece $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, rezultă

$$I_{Oz} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 \theta \cdot a \cos \theta \cdot a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\pi}{2} a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = \frac{a^5 \pi}{8} \quad \square$$

Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de speța a doua:

18. $I = \int \int_{\Sigma} x dy dz + y dx dz + z dx dy$, unde Σ este fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Soluție. Fie $\Phi = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$. Versorul normalei atașat feței exterioare a sferei este $\bar{n} = \frac{\text{grad}\Phi}{\|\text{grad}\Phi\|} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)$

Atunci $I = \int \int_{\Sigma} \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{a}\right) d\sigma = \int \int_{\Sigma} \frac{a^2}{a} d\sigma = a \int \int_{\Sigma} d\sigma = 4\pi a^3 \quad \square$

19. $I = \int \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{x} dy dz + \frac{1}{y} dz dx + \frac{1}{z} dx dy\right)$, unde Σ este fața interioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Soluție. Fie $\Phi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. Versorul normalei interioare corespunzătoare feței interioare elipsoidului este

$$\bar{n} = -\frac{\text{grad}\Phi}{\|\text{grad}\Phi\|} = \frac{1}{A} \left(-\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2}\right), \text{ unde}$$

$$A = \|\text{grad}\Phi\| = 2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Deci, } I &= \int \int_{\Sigma} \left(-\frac{2}{a^2 A} - \frac{2}{b^2 A} - \frac{2}{c^2 A}\right) d\sigma = -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \int \int_{\Sigma} \frac{2}{A} d\sigma = \\ &= -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \int \int_{\Sigma} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}} d\sigma \end{aligned}$$

Luăm pentru elipsoid reprezentarea $x = a \sin \theta \cos \varphi$, $y = b \sin \theta \sin \varphi$, $z = c \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

Obținem

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= [\cos^2 \theta (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) + c^2 \sin^2 \theta] \cdot \sin^2 \theta (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) - (-a^2 \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi + b^2 \cos \theta \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi) = \\ &= a^2 b^2 \cos^2 \theta \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + a^2 c^2 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi + a^2 b^2 \cos^2 \theta \cos^4 \varphi \sin^2 \theta + \\ &+ b^2 c^2 \sin^4 \theta \cos^2 \varphi + 2a^2 b^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \sin^2 \theta = \\ &= a^2 b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + a^2 b^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \cdot \\ &\cdot (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + a^2 c^2 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi + b^2 c^2 \sin^4 \theta \cos^2 \varphi = a^2 b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cdot \\ &\cdot (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + a^2 c^2 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi + b^2 c^2 \sin^4 \theta \cos^2 \varphi = \\ &= a^2 b^2 c^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\cos^2 \theta}{c^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2}\right) = \\ &= a^2 b^2 c^2 \sin^2 \theta \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) \implies \\ &\implies d\sigma = abc |\sin \theta| \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}} d\theta d\varphi \implies \\ &\implies I = -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} abc |\sin \theta| d\theta d\varphi = \\ &= -4\pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \quad \square \end{aligned}$$

20. $I = \int \int_{\Sigma} (y - z)dydz + (z - x)dx dz + (x - y)dx dy$, unde Σ este fața exterioară închisă a conului $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq h$

Soluție. Suprafața Σ se compune din suprafețele Σ_1 - fața laterală a conului și Σ_2 - secțiunea conului cu planul $z = h$. Deci

$$I = \int \int_{\Sigma_1} + \int \int_{\Sigma_2} = I_1 + I_2$$

Deoarece fața exterioară a lui Σ_2 are versorul normal $\bar{n}_2(0, 0, 1)$ obținem

$$I_2 = \int \int_{\Sigma_2} (x - y)d\sigma = \int \int_D (x - y)dx dy, \text{ unde } D : x^2 + y^2 \leq h^2, z = 0 \text{ este proiecția lui } \Sigma_2 \text{ în planul } xOy. \text{ Trecând la coordonate polare rezultă } I_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho^2(\cos \theta - \sin \theta)d\rho d\theta = 0$$

Fie $\Phi = z - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ ecuația suprafeței Σ_1 . Un vector normal la suprafața Σ_1 este vectorul $\text{grad}\Phi = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$ și $\|\text{grad}\Phi\| = \sqrt{2}$

Deoarece versorul \bar{n}_1 formează unghi obtuz cu Oz , rezultă $\cos \gamma < 0$, deci $\bar{n}_1 = -\frac{\text{grad}\Phi}{\|\text{grad}\Phi\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$

Atunci

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \int_{\Sigma_1} \left[\frac{x(y-z) + y(z-x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - (x - y) \right] d\sigma = \sqrt{2} \int \int_{\Sigma_1} (y - x)d\sigma = 2 \int \int_D (y - x)dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho^2(\sin \theta - \cos \theta)d\rho d\theta = 0$$

Deci $I = 0$ □

21. $I = \int \int_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + zxdxdy$, unde Σ este fața exterioară a suprafeței piramidei mărginită de planele $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a, a > 0$

Soluție. Avem $I = \int \int_{AOB} + \int \int_{BOC} + \int \int_{COA} + \int \int_{ABC}$, unde $AOB : z = 0, x + y \leq a, x \geq 0, y \geq 0$ cosinuşii directori ai normalei fiind $(0, 0, -1)$;

$BOC : x = 0, y + z \leq a, y \geq 0, z \geq 0$ cosinuşii directori ai normalei fiind $(-1, 0, 0)$;

$COA : y = 0, x + z \leq a, x \geq 0, z \geq 0$ cosinuşii directori ai normalei fiind $(0, -1, 0)$;

$ABC : z = a - x - y, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ cosinuşii directori ai normalei fiind $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

Așadar,

$$I = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \int \int_{ABC} (xy + yz + zx)d\sigma = \int \int_D [(x + y)(a - x - y) + xy]dx dy, \text{ unde } D : x + y \leq a, x \geq 0, y \geq 0$$

Deci

$$I = \int_0^a \int_0^{a-x} (ax + ay - x^2 - y^2 - xy)dy dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^a \left(axy/a + \frac{ay^2}{2}/a - x^2y/a - \frac{y^3}{3}/a - x\frac{y^2}{2}/a \right) dx = \\
&= \int_0^a \left(a^2x + \frac{a^3}{2} - x^2a - \frac{a^3}{3} - x\frac{a^2}{2} \right) dx \text{ etc.} \quad \square
\end{aligned}$$

22. $I = \int \int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}} dx dy$, unde Σ este fața exterioară a paraboloidului $4x^2 + y^2 = z, 0 \leq z \leq 1$

Soluție. Pe fața exterioară a lui Σ , normala la Σ face cu Oz un unghi obtuz, deci versorul ei este $\bar{n} = -\frac{\text{grad}\Phi}{\|\text{grad}\Phi\|}$, unde $\Phi = z - 4x^2 - y^2$. Deci $\bar{n} = -\frac{1}{\sqrt{64x^2+4y^2+1}} (-8x, -2y, 1)$

Atunci

$$\begin{aligned}
I &= \int \int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{64x^2+4y^2+1}} \right) d\sigma = \\
&= \int \int_D \frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{64x^2+4y^2+1}} \right) \cdot \sqrt{64x^2 + 4y^2 + 1} dx dy, \text{ deoarece} \\
&p = 8x, q = 2y, d\sigma = \sqrt{64x^2 + 4y^2 + 1} dx dy
\end{aligned}$$

Trecând la coordonate polare $x = \frac{\rho}{2} \cos \theta, y = \rho \sin \theta, \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi)$, obținem:

$$\begin{aligned}
I &= - \int \int_D \frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}} dx dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} d\theta d\rho = \\
&= -\pi \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} d\rho = -\pi \cdot \sqrt{\rho^2+1}/1/0 = -\sqrt{2}\pi + \pi \quad \square
\end{aligned}$$

23. Să se calculeze fluxul câmpului de vectori \bar{V} prin suprafața Σ în următoarele cazuri:

- $\bar{V} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \Sigma : z^2 = x^2 + y^2, z \in [0, 1]$.
- $\bar{V} = y\bar{i} - x\bar{j} + z^2\bar{k}, \Sigma : z = x^2 + y^2, z \in [0, 1]$.
- $\bar{V} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (y\bar{i} - x\bar{j} + \bar{k}), \Sigma : z = 4 - x^2 - y^2, z \in [0, 1]$.

Soluție. Fluxul câmpului de vectori \bar{V} prin suprafața Σ în raport cu normala \bar{n} este, prin definiție, $\mathcal{F}_{\Sigma}(\bar{V}) = \int_{\Sigma} \bar{V} \bar{n} d\sigma$, \bar{n} fiind versorul normalei la suprafața Σ .

Dacă $\Phi : D \mapsto \mathbb{R}^3$ este o parametrizare a lui Σ , atunci fluxul este:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\Sigma}(\bar{V}) &= \int_{\Sigma} \bar{V} \bar{n} d\sigma = \int \int_D (\bar{V} \circ \Phi) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dudv = \\
&= \int \int_D \left(\bar{V} \circ \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dudv,
\end{aligned}$$

ultima paranteză fiind produsul mixt al vectorilor $\bar{V} \circ \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial u}$ și $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$.

- a. Considerând parametrizarea carteziană $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, obținem

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} \left(-x\bar{i} - y\bar{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\bar{k} \right)$$

și deci fluxul este 0 deoarece vectorii \vec{V} și \vec{n} sunt ortogonali.

b. Considerând parametrizarea carteziană

$$z = x^2 + y^2, D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\},$$

obținem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\vec{V}) = \int \int_D (x^2 + y^2)^2 dx dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^5 d\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

c. Cu parametrizarea carteziană

$$z = 4 - x^2 - y^2, D = \{(x, y); 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

obținem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\vec{V}) = \int \int_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_{\sqrt{3}}^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi(2 - \sqrt{3}).$$

□

12.3 Probleme propuse

Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de prima speță :

1. $I = \int \int_\Sigma xy d\sigma$, unde $\Sigma : y^2 + z^2 = R^2, 0 \leq x \leq a, y \geq 0, z \geq 0$

R: $I = \frac{a^2 R^2}{2}$

2. $I = \int \int_\Sigma \frac{1}{(x^2 + y^2)^q} d\sigma$, unde $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x, y, z \geq 0$

R: $I = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2} R^{2(1-q)} \frac{\Gamma(1-q)}{(1-2q)\Gamma(\frac{1}{2}-q)}$

3. $I = \int \int_\Sigma (2x + \frac{4}{3}y + z) d\sigma$, unde $\Sigma : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, x, y, z \geq 0$

R: $I = 4\sqrt{61}$

4. $I = \int \int_\Sigma xy d\sigma$, unde Σ este porțiunea din planul $(P) : 2x + y + 2z = 1$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 1$

R: $I = \frac{3}{2}\pi$

5. Să se calculeze aria porțiunii din paraboloidul $x^2 + y^2 = 2z$, mărginită de planul $z = 2$.

R: $A = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$

6. Să se afle aria pânzei (Σ) , definită prin

$\Sigma = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \leq y \leq x\sqrt{3}, x, z \geq 0\}$

R: $A = \frac{\pi a^2}{12}$

7. Să se calculeze aria suprafeței

$$\Sigma = \{(x, y, z) / x + y + z = 2, x^2 \leq y \leq x, x, z \geq 0\}$$

$$\mathbf{R}: A = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

8. Să se calculeze aria suprafeței

$$\Sigma = \{(x, y, z) / (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x, y, z \geq 0\}$$

$$\mathbf{R}: A = \frac{\pi^2 a^2}{16}$$

9. Să se găsească centrul de greutate al unei calote sferice omogene de rază
- R
- și înălțime
- $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}R$
- .

$$\mathbf{R}: x_G = y_G = 0, z_G = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

10. Să se determine coordonatele centrului de greutate al suprafeței omogene
- $\Sigma : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 2 - z, z \geq 0$
- .

$$\mathbf{R}: x_G = y_G = 0, z_G = \frac{2\pi\sqrt{125}}{3}$$

Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de speța doua:

- 11.
- $I = \int \int_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$
- , unde
- Σ
- este fața interioară a sferei
- $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$$\mathbf{R}: I = -\pi a^4$$

- 12.
- $I = \int \int_{\Sigma} z dxdy$
- , unde
- Σ
- este fața exterioară a elipsoidului
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

$$\mathbf{R}: I = \frac{4}{3}\pi abc$$

- 13.
- $I = \int \int_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dxdy$
- , unde
- Σ
- este fața exterioară închisă a cilindrului
- $x^2 + y^2 = a^2, -h \leq z \leq h$

$$\mathbf{R}: I = 3\pi a^2 h$$

Capitolul 13

Formule integrale

13.1 Noțiuni teoretice

I) Divergența și rotorul unui câmp vectorial

Definiția 13.1. Dacă se fixează un reper ortogonal plan xOy de versori \bar{i}, \bar{j} și dacă $\bar{v}(x, y) = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$ este un câmp vectorial de clasă $C^1(U)$, unde $U \subset \mathbb{R}^2$ este un deschis, atunci se pot defini, pentru orice punct $a \in U$:

$$\operatorname{div}_a \bar{v} = \frac{\partial P}{\partial x}(a) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a) \text{ divergența lui } \bar{v} \text{ în punctul } a$$

$$\operatorname{rot}_a \bar{v} = \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial y}(a) \right] (\bar{i} \times \bar{j}) \text{ rotorul lui } \bar{v} \text{ în punctul } a$$

precum și forma diferențială de gradul I în U , $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

Definiția 13.2. Câmpul \bar{v} se numește **câmp de gradienti** în U dacă există un câmp scalar $\varphi \in C^1(U)$ numit **potențial scalar** al lui \bar{v} astfel încât $\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi$, adică $P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ în fiecare punct din U .

Dacă, în plus, $\varphi \in C^2(U)$, atunci

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] (\bar{i} \times \bar{j}) = 0 \text{ și}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Delta \varphi \text{ (laplacianul lui } \varphi)$$

Câmpurile de gradienti se mai numesc **câmpuri derivând dintr-un potențial**.

Exemplul 13.1. Orice câmp constant $\bar{v}(x, y) = \bar{a} = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j}$ este un câmp de gradienti, deoarece luând $\varphi(x, y) = a_1 x + a_2 y$ avem $\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi$

Exemplul 13.2. Pentru câmpul plan newtonian $\bar{v} = -k \frac{\bar{r}}{r^3}$ (unde $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}, r = \sqrt{x^2 + y^2}, k > 0$ constant) definit în $U = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ avem $\operatorname{div} \bar{v} = \frac{k}{r^3}, \operatorname{rot} \bar{v} = 0$ și $\bar{v} = \operatorname{grad} \left(\frac{k}{r} \right)$ în fiecare punct din U .

Reluăm cele de mai sus pentru cazul spațiului \mathbb{R}^3 , raportat la un reper ortogonal $Oxyz$ de versori $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Definiția 13.3. Fie $\bar{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ un câmp de clasă $C^1(U), U \subset \mathbb{R}^3$ fiind un deschis fixat. Pentru orice punct $a \in U$ se definesc scalarul

$$\operatorname{div}_a \bar{v} = \frac{\partial P}{\partial x}(a) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a) + \frac{\partial R}{\partial z}(a)$$

numit **divergența** lui \bar{v} în a și vectorul

$$\operatorname{rot}_a \bar{v} = \left[\frac{\partial R}{\partial y}(a) - \frac{\partial Q}{\partial z}(a) \right] \bar{i} + \left[\frac{\partial P}{\partial z}(a) - \frac{\partial R}{\partial x}(a) \right] \bar{j} + \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial y}(a) \right] \bar{k}$$

numit **rotorul** lui \bar{v} în a care poate fi scris sugestiv astfel $\operatorname{rot}_a \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

(”dezvoltând” acest determinant simbolic după linia întâi).

Semnificația concretă a rotorului

Considerând vectorul \bar{v} care reprezintă vectorul viteză a unui punct oarecare într-o rotație de viteză unghiulară $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, în jurul unei axe $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ rotorul acestui vector are componentele $2p, 2q, 2r$; el este așadar dublul vectorului viteză de rotație. Într-un mod mai general, să considerăm vectorul viteză \bar{v} într-un punct (x, y, z) oarecare al unui fluid și o sferă foarte mică cu centrul (x, y, z) . Dacă am solidifica porțiunea de fluid care umple sfera, suprimând în același timp fluidul care înconjoară sfera în așa fel încât sfera să fie lăsată numai sub influența vitezelor câștigate, în mecanica fluidelor se arată că mișcarea pe care o va lua sfera se va compune dintr-o translație definită de viteza \bar{v} a punctului (x, y, z) și o rotație egală cu $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\bar{v}$.

Proprietăți de calcul ale divergenței și rotorului

1) Fie \bar{v} și \bar{w} două câmpuri vectoriale de clasă C^1 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. Atunci pentru orice punct $a \in U$,

$$\operatorname{div}_a(\bar{v} + \bar{w}) = \operatorname{div}_a(\bar{v}) + \operatorname{div}_a(\bar{w})$$

$$\operatorname{rot}_a(\bar{v} + \bar{w}) = \operatorname{rot}_a(\bar{v}) + \operatorname{rot}_a(\bar{w})$$

iar dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ este constantă, atunci

$$\operatorname{div}_a(\lambda\bar{v}) = \lambda\operatorname{div}_a(\bar{v})$$

$$\operatorname{rot}_a(\lambda\bar{v}) = \lambda\operatorname{rot}_a(\bar{v})$$

2) Dacă \bar{c} este un vector constant, atunci $\operatorname{div}_a(\bar{c}) = 0$, $\operatorname{rot}_a(\bar{c}) = 0$, în fiecare punct din \mathbb{R}^3 . Dacă se notează $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ (vectorul de poziție), atunci $\operatorname{div}\bar{r} = 3$, $\operatorname{rot}\bar{r} = 0$, $\operatorname{div}(\bar{c} \times \bar{r}) = 0$, $\operatorname{rot}(\bar{c} \times \bar{r}) = 2\bar{c}$.

3) Fie φ un câmp scalar și \bar{v} un câmp vectorial, ambele de clasă C^1 într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. Atunci pentru orice $a \in U$ au loc relațiile

$$\operatorname{div}_a(\varphi\bar{v}) = \varphi(a)\operatorname{div}_a(\bar{v}) + \bar{v}(a) \cdot \operatorname{grad}_a\varphi$$

$$\operatorname{rot}_a(\varphi\bar{v}) = \varphi(a)\operatorname{rot}_a\bar{v} - \bar{v}(a) \times \operatorname{grad}_a\varphi$$

Exemplul 13.3. Fie câmpul vectorial $\bar{v} = x^2y\bar{i} + yz\bar{j} - 2xyz\bar{k}$ de clasă C^∞ în \mathbb{R}^3 . Atunci

$$\operatorname{div}\bar{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz) = z$$

$$\text{rot} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & yz & -2xyz \end{vmatrix} = -(2xz + y)\bar{i} + 2yz\bar{j} - x^2\bar{k}$$

Exemplul 13.4. Pentru câmpul newtonian $\bar{v} = -k\frac{\bar{r}}{r^3}$ ($k > 0$ constant) avem $\bar{v} = \varphi\bar{r}$, unde $\varphi = -\frac{k}{r^3}$, deci $\text{div}\bar{v} = \text{div}(\varphi\bar{r}) = \varphi\text{div}\bar{r} + \bar{r} \cdot \text{grad}\varphi$ și cum $\text{grad}\varphi = -k\text{grad}(r^{-3}) = 3kr^{-4}\frac{\bar{r}}{r} = \frac{3k}{r^5}\bar{r}$, rezultă $\text{div}\bar{v} = 3\left(-\frac{k}{r^3}\right) + \frac{3k}{r^5}(\bar{r} \cdot \bar{r}) = 0$ (deoarece $\bar{r} \cdot \bar{r} = r^2$)

$$\begin{aligned} \text{rot}\bar{v} &= \text{rot}(\varphi\bar{r}) = \varphi\text{rot}\bar{r} - \bar{r} \times \text{grad}\varphi = -\bar{r} \times \text{grad}\varphi = -\bar{r} \times \left(\frac{3k}{r^5}\bar{r}\right) = \\ &= -\frac{3k}{r^5}(\bar{r} \times \bar{r}) = 0 \end{aligned}$$

Exemplul 13.5. Câmpul vectorial $\bar{v} = -y\bar{i} + x\bar{j}$ este un "câmp de vârtejuri" deoarece el este de forma $\bar{v} = \text{rot}\bar{w}$ (de exemplu luând $\bar{w} = xz\bar{i} + yz\bar{j}$). Terminologia este motivată de faptul că în fiecare punct $a = (x_0, y_0)$ vectorul $\bar{v}(x_0, y_0) = -y_0\bar{i} + x_0\bar{j}$ cu punctul de aplicație în a , este tangent la cercul cu centrul în origine trecând prin punctul a .

Gradientul, divergența, rotorul se mai numesc **operatorii diferențiali de ordinul I în teoria câmpurilor**.

Există o posibilitate de unificare a proprietăților de calcul ale gradientului, divergenței și rotorului, pentru câmpuri de clasă C^1 , cu ajutorul unui operator simbolic $\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$ numit **operatorul nabla** (sau "vectorul nabla", având drept componente operatorii de derivare parțială). Vom considera convențiile $\text{grad}\varphi = \nabla\varphi$ ca produs între câmpul scalar φ și "vectorul" ∇ , $\text{div}\bar{v} = \nabla \cdot \bar{v}$ ca produs scalar între "vectorul" ∇ și vectorul \bar{v} și $\text{rot}\bar{v} = \nabla \times \bar{v}$ ca produs vectorial între "vectorul" ∇ și vectorul \bar{v} . De fapt, convenind să definim "produsul" lui $\frac{\partial}{\partial x}$ (respectiv $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$) cu un câmp scalar φ ca fiind $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ (respectiv $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$), rezultă

$$\nabla\varphi = \left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \bar{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \text{grad}\varphi$$

și dacă $\bar{v} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$, atunci

$$\nabla \cdot \bar{v} = \left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}) = \text{div}\bar{v}$$

$$\nabla \times \bar{v} = \left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot}\bar{v}$$

Reguli de calcul:

$$\nabla c = 0 \text{ (dacă } c \text{ este o constantă scalară)}$$

$$\nabla \cdot \bar{c} = 0, \nabla \times \bar{c} = 0 \text{ (dacă } \bar{c} \text{ este un vector constant)}$$

$$\nabla \cdot (\varphi\bar{v}) = \bar{v} \cdot (\nabla\varphi) + \varphi(\nabla \cdot \bar{v}) = \bar{v} \cdot \text{grad}\varphi + \varphi\text{div}\bar{v}$$

$$\nabla \times (\varphi\bar{v}) = -\bar{v} \times (\nabla\varphi) + \varphi(\nabla \times \bar{v}) = -\bar{v} \times \text{grad}\varphi + \varphi\text{rot}\bar{v}$$

$\nabla \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \bar{w} \cdot (\nabla \times \bar{v}) - \bar{v} \cdot (\nabla \times \bar{w})$, adică $\text{div}(\bar{v} \times \bar{w}) = \bar{w} \cdot \text{rot} \bar{v} - \bar{v} \cdot \text{rot} \bar{w}$; în particular, $\nabla \cdot (\bar{c} \times \bar{r}) = \bar{r} \cdot \text{rot} \bar{c} - \bar{c} \cdot \text{rot} \bar{r} = 0$ dacă \bar{c} este vector constant, iar \bar{r} este vectorul de poziție.

Exemplul 13.6. Calculăm cu ajutorul lui ∇ divergența și rotorul câmpului vectorial $\bar{v} = \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} \bar{r}$ de clasă C^∞ în $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, unde \bar{c} este un vector constant, iar \bar{r} vectorul de poziție. Avem

$$\text{div} \bar{v} = \nabla \cdot \bar{v} = \bar{r} \cdot \left(\nabla \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} \right) + \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} (\nabla \cdot \bar{r}) = \bar{r} \cdot \text{grad} \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} + 3 \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} = \bar{r} \cdot \frac{\bar{c} \cdot r^4 - (\bar{c} \cdot \bar{r}) \cdot 4r^3 \frac{\bar{r}}{r}}{r^8} + 3 \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} = \frac{(\bar{r} \cdot \bar{c}) r^4 - (\bar{c} \cdot \bar{r}) \cdot 4r^2 (\bar{r} \cdot \bar{r})}{r^8} + 3 \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} = 0, \text{ deoarece } \bar{c} \cdot \bar{r} = r^2$$

$$\text{rot} \bar{v} = \nabla \times \bar{v} = -\bar{r} \times \text{grad} \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} + \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} \text{rot} \bar{r} = -\bar{r} \times \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} = -\bar{r} \times \frac{\bar{c} \cdot r^4 - (\bar{c} \cdot \bar{r}) \cdot 4r^2 \bar{r}}{r^8} = \frac{1}{r^4} (\bar{c} \times \bar{r})$$

Dacă φ este un câmp scalar de clasă C^2 , iar $\bar{v} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ un câmp vectorial de clasă C^2 (într-un anumit deschis din \mathbb{R}^3), atunci au sens următoarele:

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot} \bar{v}) &= \text{div} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \text{div} \left[\bar{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \bar{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Analog } \text{rot}(\text{grad} \varphi) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) - \bar{j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad} \varphi) &= \text{div} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{k} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi \end{aligned}$$

$\text{rot}(\text{rot} \bar{v}) = \text{grad}(\text{div} \bar{v}) - \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right)$, unde derivata unui câmp vectorial se calculează pe componente.

II) Formula lui Green-Riemann

Definiția 13.4. Fixăm un reper ortogonal plan xOy de versori \bar{i}, \bar{j} . O mulțime $M \subset \mathbb{R}^2$ se numește **compact bordat** dacă M este compactă și frontiera $\text{Fr} M$ este reuniunea unui număr finit de curbe plane parametrizate presupuse de clasă C^1 pe porțiuni, nesingulare, simple și închise; în plus, presupunem că $\text{Fr} M$ este orientată pozitiv.

Exemplul 13.7. Exemple de compacti bordați sunt intergraficele proiectabile pe Ox de tipul $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ cu $g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții de clasă C^1 astfel în cât $g_1 \leq g_2$; în mod similar se pot considera intergrafice proiectabile pe Oy .

Definiția 13.5. Un compact bordat $M \subset \mathbb{R}^2$ este **elementar** dacă M se poate descompune ca reuniunea unui număr finit de intergrafice proiectabile

pe Ox , având două câte două în comun cel mult puncte ale frontierelor și dacă M admite o descompunere similară în intergrafice proiectabile pe Oy .

Exemplul 13.8. Triunghiurile, poligoanele convexe, discurile sunt compacti bordați elementari.

Teorema 13.1. (formula Green-Riemann) Fie $M \subset \mathbb{R}^2$ un compact bordat elementar și $P(x, y), Q(x, y)$ funcții de clasă C^1 pe un deschis care conține M . Atunci

$$\int_{FrM} Pdx + Qdy = \int \int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Corolarul 13.1. In condițiile teoremei 13.1, fie câmpul vectorial $\bar{v} = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$. Atunci circulația lui \bar{v} în lungul lui FrM este

$$\int_{FrM} \bar{v} \cdot d\bar{r} = \int \int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

In particular, dacă $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ în M , atunci această circulație este nulă.

Exemplul 13.9. Dacă M este un compact bordat elementar care nu conține originea, atunci $\int_{FrM} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$

Intr-adevăr, în acest caz $P = \frac{y}{x^2 + y^2}, Q = -\frac{x}{x^2 + y^2}$, deci $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ și se aplică corolarul 13.1

Dacă $IntM$ conține punctul $(0, 0)$, atunci P și Q nu mai sunt funcții de clasă C^1 pe nici un deschis care conține M . In acest caz, alegând un disc D centrat în origine de rază ρ , conținut în M rezultă

$$\begin{aligned} \int_{FrM} Pdx + Qdy &= \int_{FrD} Pdx + Qdy = \int_{x^2 + y^2 = \rho^2} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho \cos t}{\rho^2} \cdot (-\rho \sin t) - \frac{\rho \sin t}{\rho^2} \cdot \rho \cos t \right] dt = 2\pi. \end{aligned}$$

III) Formula Gauss-Ostrogradski

Definiția 13.6. O Suprafață Σ în \mathbb{R}^3 se numește **închisă** dacă Σ se obține prin "deformare continuă" din suprafața sferei unitate

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

adică există o aplicație bijectivă $\varphi: S \rightarrow \Sigma$ astfel încât φ și φ^{-1} să fie continue.

Exemplul 13.10. Sfera, elipsoidul, cilindrul $\{x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 3\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 3\}$ sunt suprafețe închise; planele nu sunt suprafețe închise.

Definiția 13.7. Fie un compact bordat elementar M în planul xOy , două funcții $f_1 \leq f_2$ de clasă C^1 pe un deschis din planul xOy care conține M și se ia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in M, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$. O astfel de mulțime se numește **intergrafic proiectabil pe planul xOy** ; în mod analog, se pot considera intergrafice proiectabile pe planele xOz, yOz .

Definiția 13.8. O mulțime $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se numește **compact elementar** dacă Ω poate fi descompus ca reuniune a unui număr finit de intergrafice

proiectabile pe planul xOy având două câte două intersecții neglijabile (au în comun cel mult puncte ale frontierelor) și au loc descompuneri similare ale lui Ω în intergrafice proiectabile pe yOz și xOz ; în plus, se presupune că frontiera $\Sigma = \text{Fr}\Omega$ se compune dintr-un număr finit de suprafețe închise, nesingulare, orientate. Dacă Ω este un compact elementar, atunci se poate defini în mod natural versorul normală exterioară \bar{N}_e în punctul curent al frontierei $\Sigma = \text{Fr}\Omega$.

Exemplul 13.11. Intergraficele, sfera $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$, elipsoidul $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, cilindrul $\{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$ împreună cu bazele, inelul sferic $\{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ etc. sunt compacti elementari.

Teorema 13.2. (formula Gauss-Ostrogradski) Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un compact elementar cu frontiera o suprafață închisă Σ și $\bar{v} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe un deschis care conține Ω . Atunci fluxul lui \bar{v} prin Σ după normala exterioară $\bar{n} = \bar{N}_e$ este egal cu integrala divergenței lui \bar{v} pe Σ , adică

$$\int \int_{\Sigma} (\bar{v} \cdot \bar{n}) d\sigma = \int \int \int_{\Omega} (\text{div} \bar{v}) dx dy dz$$

Observația 13.1. Folosind notațiile din teorema 13.2, dacă $\varphi(x, y, z)$, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ este un câmp scalar de clasă C^1 ($U \supset \Omega$) și dacă \bar{a} este un vector constant arbitrar, atunci pentru $\bar{v} = \varphi \cdot \bar{a}$ avem $\text{div} \bar{v} = \bar{a} \cdot \text{grad} \varphi$ și formula devine $\bar{a} \cdot \int \int_{\Sigma} \varphi \cdot \bar{N} d\sigma = \bar{a} \cdot \int \int \int_{\Omega} (\text{grad} \varphi) dx dy dz$ (integrarea se face pe componente); cum \bar{a} este arbitrar, rezultă **formula gradientului**:

$$\int \int_{\Sigma} \varphi \bar{N} d\sigma = \int \int \int_{\Omega} (\text{grad} \varphi) dx dy dz$$

Observația 13.2. Dacă \bar{w} este un câmp vectorial de clasă C^1 pe U și notăm $\bar{v} = \bar{w} \times \bar{a}$ (cu \bar{a} vector constant arbitrar), atunci $\text{div} \bar{v} = \bar{a} \cdot \text{rot} \bar{w}$ și cf. Teoremei 13.2 rezultă **formula rotorului**:

$$\int \int_{\Sigma} (\bar{w} \times \bar{a}) \cdot \bar{N} d\sigma = \int \int \int_{\Omega} (\bar{a} \cdot \text{rot} \bar{w}) dx dy dz,$$

adică

$$\bar{a} \cdot \int \int_{\Sigma} (\bar{N} \times \bar{w}) d\sigma = \bar{a} \cdot \int \int \int_{\Omega} \text{rot} \bar{w} dx dy dz;$$

deoarece \bar{a} este un vector arbitrar, rezultă

$$\int \int_{\Sigma} (\bar{N} \times \bar{w}) d\sigma = \int \int \int_{\Omega} \text{rot} \bar{w} dx dy dz$$

Exemplul 13.12. Fie Ω un compact elementar având ca frontieră o suprafață închisă Σ care nu conține originea. Fie $\bar{v} = \frac{\bar{r}}{r^3}$ câmpul newtonian. Dacă 0 nu aparține lui Ω , atunci $\text{div} \bar{v} = 0$ în fiecare punct din Ω și cf. Teoremei 13.2 rezultă că fluxul lui \bar{v} prin Σ este nul. Dacă $0 \in \text{Int}\Omega$, atunci

există o bilă deschisă $B_\rho = \{x^2 + y^2 + z^2 < \rho^2\} \subset \Omega$. Considerăm compactul elementar $\Omega \setminus B_\rho$ având ca frontieră $\text{Fr}\Omega \cup S_\rho$. Deoarece $\text{div}\bar{v} = 0$ în $\Omega \setminus B_\rho$, rezultă, cf. Teoremei 13.2, că fluxul lui \bar{v} prin Σ și prin S_ρ este același (în ambele cazuri după normala exterioară). Dar normala exterioară la S_ρ este $\frac{\bar{r}}{r}$ și fluxul lui \bar{v} prin S_ρ este $\int \int_{S_\rho} \frac{\bar{r}}{r^3} \cdot \frac{\bar{r}}{r} d\sigma = \int \int_{S_\rho} \frac{\rho^2}{\rho^4} d\sigma = \frac{1}{\rho^2} \cdot \text{aria}S_\rho = 4\pi$

În general, dacă Σ este o porțiune de suprafață de clasă C^1 , nesingulară orientată, astfel încât 0 nu aparține lui Σ se numește **unghi solid** ω în care Σ este văzută din origine, fluxul câmpului $\bar{v} = \frac{\bar{r}}{r^3}$ prin Σ , adică $\omega = \int \int_\Sigma \frac{\bar{r}}{r^3} \cdot \bar{n} d\sigma$

Exemplul 13.13. Presupunem că un lichid, având densitatea de volum constantă c , se află într-un recipient Ω asimilat cu un compact elementar conținut în semispațiul $z < 0$ din \mathbb{R}^3 . Presupunem de asemenea că "presiunea crește proporțional cu adâncimea", deci câmpul presiunilor lichidului este $\bar{v} = cz\bar{k}$, c fiind densitatea de volum. Fluxul lui \bar{v} prin frontiera Σ a lui Ω se numește **forța ascensională** Φ a lichidului. Așadar, deoarece $\text{div}\bar{v} = c$, rezultă $\Phi = \int \int_\Sigma \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = \int \int \int_\Omega (\text{div}\bar{v}) dx dy dz = c \cdot \text{vol}(\Omega) =$ masa lichidului, obținându-se astfel **legea lui Arhimede**.

IV) Formula lui Stokes

Definiția 13.9. Fie Σ o suprafață de ecuație carteziană $z = f(x, y)$, cu f funcție de clasă C^2 pe un deschis $D \subset \mathbb{R}^2$, cu orientarea pozitivă asociată reprezentării parametrice $x = u, y = v, z = f(u, v), \forall (u, v) \in D$. Dacă $M \subset D$ este un compact bordat elementar, atunci este bine definită o porțiune din suprafața Σ , anume $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y), (x, y) \in M\}$. Curba $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y), (x, y) \in \text{Fr}M\}$ cu orientarea indusă de pe $\text{Fr}M$ se numește **bordul orientat al lui S_1** ; notând cu \bar{N} versorul normalei la suprafața S_1 în punctul curent P al lui C_1 , cu $\bar{\tau}$ versorul tangentei în punctul P la curba C_1 și cu \bar{n}_e versorul normalei exterioare la bordul C_1 (situat în planul tangent la Σ în punctul P , perpendicular pe $\bar{\tau}$ și "ieșind" din S_1) rezultă că $\bar{N} = \bar{n}_e \times \bar{\tau}$. Orientarea fixată pe bordul C_1 poate fi prezentată sugestiv astfel: "un observator care parcurge C_1 în sensul lui $\bar{\tau}$ și având capul spre \bar{N} , are mâna stângă înspre S_1 ".

Definiția 13.10. O porțiune de suprafață orientată (de clasă C^2) S se numește **elementară** dacă se poate descompune într-un număr finit de porțiuni de suprafață S_1, S_2, \dots, S_p prin arce decurbă care sunt părți ale bordurilor orientate corespunzătoare. În acest caz se poate defini bordul orientat C al lui S , ca fiind drumul închis obținut prin juxtapunerea arcelor de curbă care aparțin numai la câte unul din bordurile porțiunilor S_1, S_2, \dots, S_p .

Teorema 13.3. (formula lui Stokes) Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o porțiune de suprafață elementară de clasă C^2 și C bordul orientat, închis al lui S . Fie \bar{v} un câmp vectorial de clasă C^1 pe un deschis din \mathbb{R}^3 care conține S . Atunci circulația lui \bar{v} în lungul lui C este egală cu fluxul rotorului lui \bar{v} prin S , adică

$$\int_C \bar{v} \cdot d\bar{r} = \int \int_S \text{rot}\bar{v} \cdot \bar{N} d\sigma$$

Exemplul 13.14. Considerăm octantul de sferă $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x, y, z \geq 0$ și calculăm circulația câmpului newtonian $\bar{v} = \frac{\bar{r}}{r^3}$ în lungul bordului C .

Cf. teoremei 13.3, luând pentru S porțiunea de sferă corespunzătoare, rezultă

$$\int_C \bar{v} \cdot d\bar{r} = \int \int_S \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{N} d\sigma = 0, \text{ deoarece } \operatorname{rot} \bar{v} = \operatorname{rot} \frac{\bar{r}}{r^3} = 0$$

13.2 Probleme rezolvate

1. Să se verifice formula lui Green pentru funcțiile $P(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, dacă $(x, y) \neq (0, 0)$ și $P(0, 0) = 0$ și $Q(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, dacă $(x, y) \neq (0, 0)$ și $Q(0, 0) = 0$ pentru domeniul $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Soluție. Funcțiile P și Q nu sunt continue în origine, deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty, y = mx} P(x, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + m^2 x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \neq 0 \text{ și}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty, y = mx} Q(x, y) = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} \neq 0 \text{ pentru } m \neq 0$$

Prin urmare, nu se poate aplica Teorema 13.1, funcțiile P și Q nefiind continue în D . Totuși formula lui Green este verificată. Observăm că $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$, pentru $(x, y) \neq (0, 0)$ și $\frac{\partial P}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial Q}{\partial x}(0, 0) =$

$= 0$ (cu ajutorul definiției). Deci $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ în D și membrul drept din formula lui Green este egal cu 0. Pentru a arăta că și primul membru al formulei are tot valoarea 0, folosim pentru cercul $(C) : x^2 + y^2 = 1$ reprezentarea $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$. Obținem

$$\int_C P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \cos t \sin t) dt = 0$$

Deci formula lui Green se verifică. \square

Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Green, următoarele integrale curbilini :

2. $I = \int_C y^2 dx + x^2 dy$, $(C) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ și $x = t, y = 0, t \in [-1, 1]$

Soluție. Curba (C) mărginește domeniul $D : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$ și este o curbă regulată închisă. Funcțiile $P(x, y) = y^2, Q(x, y) = x^2$ sunt continue și cu derivate parțiale continue în D și $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x - y)$. Se poate aplica teorema 13.1:

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy = 2 \int \int_D (x - y) dx dy = 2 \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 (\cos \theta - \sin \theta) d\rho d\theta =$$

$$= 2 \int_0^\pi (\cos \theta - \sin \theta) d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho = -\frac{4}{3} \quad \square$$

3. $I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{(x^2 + y^2)})] dy$, $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

Soluție. Avem $P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = y[xy + \ln(x + \sqrt{(x^2 + y^2)})]$
și $\frac{\partial Q}{\partial x} = y \left(y + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Atunci $I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D y^2 dx dy$, unde $D : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 \leq 0$

Trecând la coordonate polare $x = 2 + \rho \cos \theta$, $y = 3 + \rho \sin \theta$,

$\theta \in [0, 2\pi)$, $\rho \in [0, 1]$, obținem

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho(9 + 6\rho \sin \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) d\rho d\theta = 10\pi \quad \square$$

4. $I = \int_{ABO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$, unde ABO e semicercul $x^2 + y^2 - ax = 0$, $y \geq 0$ parcurs în sens trigonometric

Soluție. Completăm conturul ABO cu segmentul OA . Atunci

$$I = \int_{OABO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy - \int_{OA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = I_1 - I_2$$

Calculăm I_1 cu teorema 13.1 :

$$I_1 = m \iint_D dx dy = \frac{m\pi a^2}{8}, \text{ unde } D : x^2 + y^2 - ax \leq 0, y \geq 0$$

Pentru a calcula I_2 , parametrizăm segmentul $OA : x = t, y = 0, t \in [0, a] \implies I_2 = 0 \quad \square$

5. $I = \int_C (x + y) dx - (x - y) dy$, unde $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Soluție. $I = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \left[\frac{\partial - (x - y)}{\partial x} - \frac{\partial (x + y)}{\partial y} \right] dx dy =$
 $= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} -2 dx dy = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 ab \rho d\rho d\theta = -2\pi ab \quad \square$

6. $I = \int_C 2 \arctg \frac{y}{x} dx + [x + \ln(x^2 + y^2)] dy$, unde $C : (x - 2)^2 + y^2 = 1$

Soluție. Avem $P(x, y) = 2 \arctg \frac{y}{x}$, $Q(x, y) = x + \ln(x^2 + y^2)$ și

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 + 2x}{x^2 + y^2}$$

Atunci $I = \iint_{(x-2)^2 + y^2 \leq 1} \left(\frac{x^2 + y^2 + 2x}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \right) dx dy =$
 $= \iint_{(x-2)^2 + y^2 \leq 1} dx dy = \pi \quad \square$

7. Fie $\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$.

a. Să se calculeze integrala curbilinie $\int_{C(O, R)} \alpha$, unde, am notat cu $C(O, R)$ cercul de centru O și rază $R > 0$.

b. Să se calculeze $\int_{\Gamma} \alpha$, unde, Γ este o curbă arbitrară închisă astfel încât $O \notin \Gamma$.

Soluție. a. Să observăm, mai întâi că $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\})$, deci pentru calculul integralei de la punctul a nu se poate aplica formula Green-Riemann. Folosim definiția integralei curbilinii; parametrizăm cercul:

$$x(t) = R \cos t, y(t) = R \sin t, t \in [0, 2\pi)$$

și obținem:

$$\int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

b. Notăm cu K compactul mărginit de curba Γ . Distingem două cazuri: dacă $O \notin K$ (se poate aplica formula Green-Riemann) sau dacă $O \in K$ (nu se poate aplica formula Green-Riemann).

Presupunem mai întâi că $O \notin K$; atunci:

$$\int_{\Gamma} \alpha = \int \int_K \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) dx dy = 0.$$

Presupunem acum că $O \in K$; fie $R > 0$ astfel încât $\mathcal{C}(O, R)$ este inclus în interiorul lui K . Notăm cu $D(O, R)$ discul deschis de centru O și rază R . Fie A compactul $A = K \setminus D(O, R)$. Bordul orientat al lui A este reuniunea $\partial A = \Gamma \cup \mathcal{C}(O, R)$, sensul pe cerc fiind sensul trigonometric negativ. Deoarece $O \notin A$, avem:

$$\int_{\partial A} \alpha = \int \int_A 0 dx dy = 0.$$

Rezultă :

$$\int_{\Gamma} \alpha = \int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha = 2\pi.$$

□

8. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii direct și aplicând formula Green-Riemann:

a. $\int_{\Gamma} e^{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} (-y dx + x dy)$, $\Gamma = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$.

b. $\int_{\Gamma} xy dx + \frac{x^2}{2} dy$,

$\Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \leq 0 \leq y\} \cup \{(x, y) \mid x + y = -1, x \leq 0, y \leq 0\}$.

Soluție. Pentru calculul direct se parametrizează cele două curbe și se aplică definiția integralei curbilinii. Vom calcula acum integralele cu ajutorul formulei Green-Riemann.

a. Elipsa Γ este închisă iar 1-forma diferențială este de clasă C^1 pe \mathbb{R}^2 , deci putem aplica formula Green-Riemann (notăm K mulțimea compactă mărginită de Γ):

$$\int_{\Gamma} e^{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} (-y dx + x dy) = \int \int_K 2e^{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy,$$

integrala dublă calculându-se cu coordonate polare generalizate.

b. Curba Γ nu este închisă, deci nu putem aplica direct formula Green-Riemann. Fie $A(0, -1)$ și $B(0, 1)$ și fie $[AB]$ segmentul orientat (de la A către B) determinat de aceste puncte. Fie $\Lambda = \Gamma \cup [AB]$; atunci Λ este o curbă închisă și deci, aplicând formula Green-Riemann, obținem (notăm cu K compactul mărginit de Λ):

$$\int_{\Lambda} xydx + \frac{x^2}{2}dy = \int \int_K 0dxdy = 0.$$

Rezultă deci:

$$\int_{\Gamma} xydx + \frac{x^2}{2}dy = - \int_{[AB]} xydx + \frac{x^2}{2}dy = 0,$$

ultima integrală curbilinie calculându-se imediat cu definiția. \square

9. Să se calculeze circulația câmpului de vectori \bar{V} pe curba Γ în cazurile:

a. $\bar{V} = y^2\bar{i} + xy\bar{j}$,

$$\Gamma = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, y > 0\} \cup \{(x, y); y = x^2 - 1, y \leq 0\}.$$

b. $\bar{V} = e^x \cos y\bar{i} - e^x \sin y\bar{j}$.

Γ este o curbă arbitrară continuă în semiplanul superior care unește punctele $A(1, 0)$ și $B(-1, 0)$, sensul fiind de la A către B .

Soluție. a. Vom aplica formula Green-Riemann; notând cu K interiorul curbei Γ , obținem:

$$\int_{\Gamma} \bar{V}d\bar{r} = \int \int_K -y dxdy = - \int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} ydy.$$

b. Curba nu este închisă; fie $[BA]$ segmentul orientat (de la B către A) și fie curba închisă $\Lambda = \Gamma \cup [BA]$. Calculăm circulația lui \bar{V} pe curba Λ cu ajutorul formulei Green-Riemann (notăm cu K compactul mărginit de Λ):

$$\int_{\Lambda} \bar{V}d\bar{r} = \int \int_K 0dxdy = 0,$$

deci circulația pe curba Γ este egală cu circulația pe segmentul orientat $[AB]$:

$$\int_{\Gamma} \bar{V}d\bar{r} = \int_{[AB]} \bar{V}d\bar{r} = - \int_0^1 e^t dt = 1 - e.$$

\square

Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradski, următoarele integrale:

10. $I = \int \int_{\Sigma} 2x^2yzdydz + z^2dzdx + xyz^2dxdy$, unde Σ e fața exterioară a semielipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ limitat de planul $z = 0$.

Soluție. $I = \int \int \int_V (4xyz + 0 + 2xyz)dxdydz = 6 \int \int \int_V xyzdxdydz =$
 $= 6 \int \int_D \left(\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} xyzdz \right) dxdy = 6 \int \int_D xy \frac{z^2}{2} \Big|_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dxdy =$
 $= 3c^2 \int \int_D xy \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dxdy =$
 $= 3c^2 \int \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} xy \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dxdy =$
 $= 3c^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 a\rho \cos\theta b\rho \sin\theta (1 - \rho^2) ab\rho d\rho d\theta =$
 $= 3a^2b^2c^2 \int_0^1 \rho^3(1 - \rho^2)d\rho \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta =$
 $= 3a^2b^2c^2 \left(\frac{\rho^4}{4} \Big|_0^1 - \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^1 \right) \frac{1}{4} (-\cos 2\theta \Big|_0^{2\pi}) = 0 \quad \square$

11. $I = \int \int_{\Sigma} x^3dydz + x^2ydzdx + x^2zdx dy$, unde Σ este suprafața cilindrului $x^2 + y^2 = r^2$ cuprinsă între planele $z = 0, z = a$

Soluție. $I = \int \int \int_V (3x^2 + x^2 + x^2)dxdydz = \int \int \int_V 5x^2dxdydz =$
 $= \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^a \rho^3 \cos^2\theta dz d\rho d\theta = \frac{5\pi ar^4}{4} \quad \square$

12. Să se determine fluxul câmpului vectorial $\bar{v} = 2x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}$ prin suprafața $\Sigma : y^2 + z^2 = ax, 0 \leq x \leq a$ după normala \bar{n} la suprafață care face un unghi ascuțit cu semiaxa negativă Ox .

Soluție. Fluxul Φ al câmpului vectorial \bar{v} prin suprafața Σ este dat de integrala de suprafață $\Phi = \int \int_{\Sigma} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma$.

Inchidem suprafața Σ cu discul Σ_1 situat în planul $x = a$.

Notăm $S = \Sigma_1 \cup \Sigma$.

Teorema 13.2 ne dă $\int \int_S \bar{v} \cdot \bar{N} d\sigma = \int \int \int_V \operatorname{div} \bar{v} dxdydz$, unde \bar{N} e normala exterioară la suprafața S și $\operatorname{Fr} V = S$

Avem $\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 2$

Atunci $\int \int_S \bar{v} \cdot \bar{N} d\sigma = \int \int \int_V 2dxdydz = 2 \int \int_D \left(\int_{\frac{y^2+z^2}{a}} dx \right) dydz =$
 $= 2 \int \int_D \left(a - \frac{y^2+z^2}{a} \right) dzdy$, unde $D : y^2 + z^2 \leq a^2$

Deci $\int \int_S \bar{v} \cdot \bar{N} d\sigma = \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(a - \frac{\rho^2}{a} \right) \rho d\theta d\rho = \pi a^3$

Dar, $\int \int_S \bar{v} \cdot \bar{N} d\sigma = \int \int_{\Sigma} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma + \int \int_{\Sigma_1} \bar{v} \cdot \bar{n}_1 d\sigma$, unde $\bar{n}_1 = (1, 0, 0)$ e normala la suprafața Σ_1 . Rezultă $\Phi = \int \int_S \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = \pi a^3 - \int \int_{\Sigma_1} \bar{v} \cdot \bar{n}_1 d\sigma$

Pe suprafața $\Sigma_1 : x = a, (y, z) \in D, d\sigma = dxdy$. Atunci

$\int \int_{\Sigma_1} \bar{v} \cdot \bar{n}_1 d\sigma = \int \int_{\Sigma_1} 2xd\sigma = \int \int_D 2adzdy = 2a \operatorname{aria}(D) = 2\pi a^3 \implies$
 $\implies \Phi = \int \int_S \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = \pi a^3 - 2\pi a^3 = -\pi a^3 \quad \square$

13. Să se determine fluxul câmpului vectorial $\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ prin suprafața închisă de cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$ și planele $z = 0$ și $z = a$, după normala exterioară la suprafața.

Soluție. Fluxul Φ al câmpului vectorial \bar{v} prin suprafața închisă Σ este dat de integrala de suprafață $\Phi = \int \int_{\Sigma} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma$.

Cf. Teoremei 13.2 avem $\Phi = \int \int_{\Sigma} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = \int \int \int_V \operatorname{div} \bar{v} dx dy dz$, unde V este volumul închis de suprafața Σ .

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

$$\text{Atunci } \Phi = \int \int \int_V 3 dx dy dz = 3 \operatorname{vol}(V) = 3\pi R^2 a$$

Calculăm fluxul direct, fără Teorema 13.2. Fie $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, unde Σ_1 e baza cilindriului cu normala $\bar{n}_1 = (0, 0, -1)$, Σ_2 e baza cilindriului cu normala $\bar{n}_2 = (0, 0, 1)$, Σ_3 e suprafața laterală a cilindriului cu normala $\bar{n}_3 = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|} = \frac{(2x, 2y, 0)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0\right)$, unde $f = x^2 + y^2 - R^2$

Atunci

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \int_{\Sigma_1} \bar{v} \cdot \bar{n}_1 d\sigma + \int \int_{\Sigma_2} \bar{v} \cdot \bar{n}_2 d\sigma + \int \int_{\Sigma_3} \bar{v} \cdot \bar{n}_3 d\sigma = \int \int_{\Sigma_1} -z d\sigma + \\ &+ \int \int_{\Sigma_2} z + \int \int_{\Sigma_3} \left(x \cdot \frac{x}{R} + y \cdot \frac{y}{R} + z \cdot 0\right) d\sigma = \int \int_{\Sigma_1} 0 + \int \int_{\Sigma_2} a + \\ &+ \int \int_{\Sigma_3} \frac{x^2 + y^2}{R} = \int \int_{\Sigma_2} a + \int \int_{\Sigma_3} R = a \cdot \operatorname{aria} \Sigma_2 + R \cdot \operatorname{aria} \Sigma_3 = \\ &= a\pi R^2 + R2\pi Ra = 3\pi R^2 a \end{aligned} \quad \square$$

14. Calculați fluxul câmpului vectorial $\bar{v} = x\bar{i} + z^2\bar{j} + y^2\bar{k}$ prin suprafața laterală a conului $z^2 = x^2 + y^2$ mărginit de planul $z = 1$, pentru $z \geq 0$.

Soluție. Pentru a aplica formula lui Gauss-Ostrogradski închidem supra-

fața formată din conul $z^2 = x^2 + y^2$ cu discul $z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$

$$\text{Avem } \operatorname{div} \bar{v} = 1 \implies \Phi = \int \int_{\Sigma} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = \int \int \int_{\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1} dx dy dz = \frac{\pi}{3}$$

Calculăm fluxul lui \bar{v} prin discul $z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$ care mărginește conul după normala exterioară. Aplicăm definiția observând că $\bar{n} = \bar{k}$ și $\bar{v} \cdot \bar{n} = y^2$. Deci $\int \int_{z=1, x^2 + y^2 \leq 1} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = \int \int_{z=1, x^2 + y^2 \leq 1} y^2 d\sigma = \int \int_{x^2 + y^2 \leq 1} y^2 dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2 \theta d\theta d\rho = \frac{\pi}{4}$

Fluxul cerut va fi diferența dintre fluxul lui \bar{v} prin con și fluxul lui \bar{v} prin discul $z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$, deci $\Phi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ \square

15. (Legea lui Gauss) Pentru orice $q > 0$, considerăm câmpul scalar

$$f(x, y, z) = \frac{q}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi r}$$

și fie câmpul de gradienti:

$$\bar{E} = -\text{grad} f.$$

Câmpul scalar f reprezintă potențialul electric (sau potențial Newtonian) asociat sarcinei electrice q plasate în O , iar \bar{E} este câmpul electric generat (sau câmp Newtonian).

a. Să se explicitizeze \bar{E} și să se demonstreze că este câmp solenoidal, adică : $\text{div} \bar{E} = 0$.

b. Să se demonstreze că fluxul câmpului \bar{E} prin orice suprafață închisă ce nu conține originea în interior este nul.

c. Să se demonstreze că fluxul câmpului \bar{E} prin orice suprafață închisă ce conține originea în interior este q , (legea lui Gauss).

Soluție. a. Putem calcula \bar{E} direct cu definiția, sau aplicând proprietățile gradientului; obținem:

$$\bar{E} = -\text{grad} f = \frac{q}{4\pi} \frac{\bar{r}}{r^3}.$$

Arătăm acum că \bar{E} este solenoidal:

$$\text{div} \bar{E} = -\text{grad}(\text{div} f) = -\Delta f = \frac{q}{4\pi r^6} (3r^3 - 3r(x^2 + y^2 + z^2)) = 0.$$

b. Fie Σ o suprafață închisă ce nu conține originea în interior. Deoarece câmpul electric \bar{E} este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, sunt îndeplinite ipotezele formulei Gauss-Ostrogradski și deci, (notăm cu K compactul mărginit de Σ și cu \bar{n} versorul normalei exterioare la Σ), obținem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\bar{E}) = \int_\Sigma \bar{E} \bar{n} d\sigma = \int \int \int_K \text{div} \bar{E} dx dy dz = 0.$$

c. Fie acum Σ o suprafață închisă ce conține originea în interior. Deoarece \bar{E} nu este de clasă C^1 pe compactul K mărginit de Σ , (\bar{E} nefiind de clasă C^1 în origine), nu putem aplica formula Gauss-Ostrogradski pentru a calcula fluxul lui \bar{E} prin Σ . Fie $R > 0$ astfel încât sfera de centru O și rază R (notată în continuare cu S), să fie inclusă în interiorul lui Σ . Fie suprafața (închisă) $\Sigma_1 = \Sigma \cup S$, orientată după normala exterioară (deci pe S este normala interioară la sferă). Fie K_1 mulțimea compactă mărginită de Σ_1 . Deoarece $O \notin K_1$, fluxul lui \bar{E} prin Σ_1 este nul (conform (b)). Rezultă că fluxul lui \bar{E} prin Σ este egal cu fluxul lui \bar{E} prin S (orientată după normala exterioară $\bar{n} = \frac{\bar{r}}{R}$ la sferă):

$$\mathcal{F}_\Sigma(\bar{E}) = \int_S \bar{E} \bar{n} d\sigma = \frac{q}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = q.$$

□

16. Fie $\bar{v} = yz\bar{i} + 2xz\bar{j} - x^2\bar{k}$. Să se calculeze fluxul lui \bar{v} prin elipsoidul $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 8$ după normala exterioară, precum și circulația lui \bar{v} în lungul curbei C de intersecție a elipsoidului cu planul $z = 1$, parcursă pozitiv o dată în raport cu Oz .

Soluție. Cum $\text{div}\bar{v} = 0$, rezultă, cf. Teoremei 13.2, că fluxul $\Phi = 0$

Pentru circulație putem aplica teorema 13.3, luând ca suprafață Σ porțiunea din planul $z = 1$ interioară curbei C .

Avem $\text{rot}\bar{v} = -2x\bar{i} + (2x + y)\bar{j} + z\bar{k}$ și $\bar{n} = \bar{k}$

Atunci $\int_C \bar{v}d\bar{r} = \int \int_{\Sigma} (\text{rot}\bar{v}) \cdot \bar{n}d\sigma = \int \int_{\Sigma} d\sigma = \text{aria}\Sigma = 2\pi$ (Aria unei elipse de semiaxe a, b este πab și se poate calcula cu ajutorul integralei curbilinii) \square

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii cu ajutorul formulei lui Stokes:

17. $I = \int_C ydx + zdy + xdz$, unde C este cercul $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, parcurs în sens invers sensului de mișcare a acelor de ceasornic, dacă privim din direcția pozitivă a axei Ox

Soluție. $I = \int_C ydx + zdy + xdz = \int \int_{\Sigma} -dydz - dzdx - dx dy = -\int \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\sqrt{3} \int \int_{\Sigma} d\sigma$, deoarece $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ sunt cosinuzii directori ai normalei la fața Σ

Dacă D este interiorul proiecției cercului C pe planul xOy , atunci (prin eliminarea lui z între cele două ecuații ale lui C) $D : x^2 + xy + y^2 \leq \frac{a^2}{2}, z = 0$

Deci $I = -\sqrt{3} \int \int_D dx dy = -\pi a^2 \sqrt{3}$ \square

18. $I = \int_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, unde C este elipsa obținută prin intersecția cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ cu planul $x + z = 1$, parcursă astfel încât proiecția curbei C pe planul xOy să fie orientată pozitiv

Soluție. Avem $\Sigma : z = 1 - x, (x, y) \in D$, unde D este discul din planul xOy mărginit de curba Γ -proiecția curbei C în acest plan. Integrala se calculează pe fața superioară a suprafeței Σ cu normala $\bar{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, $d\sigma = \sqrt{2}dx dy$

$I = \int \int_{\Sigma} -2dydz - 2dzdx - 2dx dy = -2 \int \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) d\sigma = -\frac{4}{\sqrt{2}} \int \int_D \sqrt{2}dx dy = -4\text{aria}D = -4\pi$ \square

19. Fie Σ emisfera superioară a sferei unitate și $\bar{v} = z\bar{i} + x\bar{j} + xyz\bar{k}$. Aflați fluxul rotorului lui \bar{v} prin Σ orientată după normala exterioară.

Soluție. Folosind teorema 13.3 avem de calculat circulația lui \bar{v} de-a lungul cercului $z = 0, x^2 + y^2 = 1$:

$$\int_C \bar{v} d\bar{r} = \int_C z dx + x dy + xyz dz = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi$$

Integrala poate fi calculată direct:

$$\operatorname{rot} \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & xyz \end{vmatrix} = xz\bar{i} + (1 - yz)\bar{j} + \bar{k} \text{ și observăm că } \bar{n} = \bar{r}$$

$$\text{Deci } \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{n} = x^2 z + y(1 - yz) + z$$

$$\begin{aligned} \int \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma &= \int \int_{\Sigma} [x^2 z + y(1 - yz) + z] d\sigma = \\ &= \int \int_{x^2 + y^2 \leq 1} [(x^2 - y^2 + 1)\sqrt{1 - x^2 - y^2} + y] \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \\ &= \int \int_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 - y^2 + 1) dx dy + \int \int_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy = \pi \text{ (prin} \\ &\text{ trecere la coordonate polare)} \quad \square \end{aligned}$$

20. Găsiți circulația câmpului vectorial $\bar{v} = y^2 \bar{i} + xy \bar{j} + (x^2 + y^2) \bar{k}$ prin conturul format din intersecția paraboloidului $x^2 + y^2 = Rz$ cu planele $x = 0, y = 0, z = R$ parcurs în sens pozitiv relativ la normala exterioară a paraboloidului.

$$\text{Soluție. Direct: } \int_{OAB} \bar{v} d\bar{r} = \int_{\widehat{OA}} \bar{v} d\bar{r} + \int_{\widehat{AB}} \bar{v} d\bar{r} + \int_{\widehat{BO}} \bar{v} d\bar{r}$$

Scriem ecuațiile parametrice ale curbelor:

$$\widehat{OA} : x = 0, y = t, z = \frac{t^2}{R}, t \in [0, R]$$

$$\widehat{AB} : x = R \sin t, y = R \cos t, z = R, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\widehat{OB} : x = t, y = 0, z = \frac{t^2}{R}, t \in [0, R]$$

$$\int_{\widehat{OA}} \bar{v} d\bar{r} = \int_{\widehat{OA}} y^2 dx + xy dy + (x^2 + y^2) dz = \int_0^R t^2 \cdot \frac{2t}{R} dt = \frac{R^3}{2}$$

$$\int_{\widehat{AB}} \bar{v} d\bar{r} = - \int_0^R t^2 \cdot \frac{2t}{R} dt = -\frac{R^3}{2}$$

$$\int_{\widehat{AB}} \bar{v} d\bar{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \cos^3 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin^2 t \cos t dt$$

$$\begin{aligned} \text{Pentru calculul integralei } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt \text{ facem schimbarea } \sin t = \sqrt{u} \implies \\ \implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (1 - \sin^2 t) dt = \int_0^1 (1 - u) u^{-\frac{1}{2}} du = B\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \\ = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(2 + \frac{1}{2})} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 1}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Deducem că } \int_{\widehat{AB}} \bar{v} d\bar{r} = R^3$$

Circulația este $\int_{OAB} \bar{v} d\bar{r} = R^3 \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = R^3$ Cu teorema 13.3: Curba este porțiunea de paraboloid orientată după normala exterioară

$$\int_{OAB} \bar{v} d\bar{r} = \int \int_{z = \frac{1}{R}(x^2 + y^2), x^2 + y^2 \leq R^2, x, y \geq 0} \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma$$

$$\text{Avem } \operatorname{rot} \bar{v} = 2y\bar{i} - 2x\bar{j} - y\bar{k}$$

Fie $\varphi = -x^2 - y^2 + Rz$. Normala la suprafață este $\bar{n} = \frac{\text{grad}\varphi}{\|\text{grad}\varphi\|} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+R^2}}(-2x, -2y, R)$

$$\int \int_{z=\frac{1}{R}(x^2+y^2), x^2+y^2 \leq R^2, x, y \geq 0} \text{rot}\bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma =$$

$$= 3 \int \int_{x^2+y^2 \leq R^2, x, y \geq 0} \left(-\frac{2x}{R} \cdot 2y + \frac{4xy}{R} - y \right) dx dy =$$

$$= 3 \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\rho^2 \sin \theta d\theta d\rho = R^3 \quad \square$$

21. Calculați circulația vectorului $\bar{v} = (x+y)\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (z+x)\bar{k}$ de-a lungul elipsei $C : x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$. Se va verifica rezultatul aplicând formula lui Stokes și calculând fluxul rotorului lui \bar{v} prin suprafețele :

a) elipsa C ;

b) elipsoidul $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ situat deasupra planului xOy .

Soluție. Direct vom folosi reprezentarea parametrică a elipsei C :
 $x = \cos \theta, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, z = 0$ și obținem

$$\int_C \bar{v} d\bar{r} = \int_C (x+y)dx + (y+z)dy + (z+x)dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\left(\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) \cdot (-\sin \theta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \right] d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \right) d\theta = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Se va verifica rezultatul aplicând formula lui Stokes :

a) $\text{rot}\bar{v} = -(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}), \bar{n} = \bar{k}$

Atunci

$$\int \int_{\Sigma} (\text{rot}\bar{v}) \cdot \bar{n} d\sigma = -\int \int_{\Sigma} d\sigma = -\int \int_{x^2+2y^2 \leq 1} dx dy = -\frac{\pi}{2}$$

b) Pentru suprafața elipsoidului situată deasupra planului xOy se obține

$$\bar{n} = \frac{x\bar{i}+2y\bar{j}+4z\bar{k}}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}, (\text{rot}\bar{v}) \cdot \bar{n} = -\frac{x+2y+4z}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}, d\sigma = \frac{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}{4z} dx dy$$

Atunci

$$\int \int_{\Sigma} (\text{rot}\bar{v}) \cdot \bar{n} d\sigma = \int \int_{\Sigma} -\frac{x+2y+4z}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}} d\sigma =$$

$$= \int \int_{x^2+2y^2 \leq 1} -\frac{x+2y+4z}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}{4z} dx dy =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \int_{x^2+2y^2 \leq 1} \frac{x+2y+4z}{z} dx dy =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \int_{x^2+2y^2 \leq 1} \frac{x+2y+4\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2-2y^2}}{\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2-2y^2}} dx dy =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \int_{x^2+2y^2 \leq 1} \left(\frac{x+2y}{\sqrt{1-x^2-2y^2}} + 2 \right) dx dy =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{\rho(\cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta)}{\sqrt{1-\rho^2}} + 2 \right) \rho d\rho d\theta \right] = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \square$$

22. Să se calculeze direct și cu formula lui Stokes integrala curbilinie

$$\int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

unde Γ este poligonul de intersecție dintre cubul $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ și planul $x + y + z = \frac{3}{2}$.

Soluție. Γ este un hexagon regulat. Pentru a calcula integrala cu definiția trebuie parametrizate laturile hexagonului; de exemplu, latura din planul xOy are parametrizarea:

$$x(t) = t, y(t) = \frac{3}{2} - t, t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right].$$

Calculăm acum integrala aplicând formula lui Stokes. Fie Σ porțiunea din planul $x + y + z = \frac{3}{2}$ situată în interiorul cubului (interiorul hexagonului). Proiecția lui Σ pe planul xOy este mulțimea

$$D = \{(x, y); \frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{2}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

a cărei arie este $\frac{3}{4}$. O parametrizare (carteziană) a suprafeței Σ este

$$z = \frac{3}{2} - x - y, (x, y) \in D.$$

Aplicând formula lui Stokes, obținem:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz = \\ &= -2 \int_{\Sigma} (x + y)dx \wedge dy + (y + z)dy \wedge dz + (z + x)dz \wedge dx = \\ &= -2 \int \int_D 3dxdy = -6 \text{aria}(D) = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

□

13.3 Probleme propuse

Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Green, următoarele integrale curbilinie :

1. $I = \int_C e^{x^2+y^2}(-ydx + xdy), (C) : x^2 + y^2 = 1$

R: $I = \int_C e^{x^2+y^2}(-ydx + xdy) = 2\pi e$

2. $I = \int_C (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$, unde C este curba închisă de parabola $y = x^2$ și dreapta $y = x$, parcursă în sens direct

R: $I = -\frac{1}{3}$

3. $I = \int_C (x+y) dx - (x-y) dy$, $C : x^2 + y^2 = r^2$

R: $I = -2\pi r^2$

4. $I = \int_C (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, unde C este triunghiul cu vârfurile $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$

R: $I = -1$

Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradski, următoarele integrale:

5. $I = \int \int_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, Σ este fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

R: $I = 0$

6. $I = \int \int_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, Σ este fața exterioară a suprafeței închise $x^2 + y^2 = z^2$, $z = h$

R: $I = \frac{9\pi}{10} h^5$

7. $I = \int \int_{\Sigma} xyz(x dydz + y dzdx + z dxdy)$, unde $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x, y, z \geq 0$

R: $I = \frac{a^6}{8}$

Să se calculeze fluxul $\Phi = \int \int_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$ cu formula lui Gauss-Ostrogradski:

8. $\vec{v} = -y\vec{i} + x\vec{j}$, unde Σ este cubul unitate

R: $\Phi = 0$

9. $\vec{v} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, unde Σ este sfera unitate

R: $\Phi = 0$

10. $\vec{v} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$, unde Σ are fețele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$

R: $\Phi = \frac{1}{2}$

11. Să se calculede fluxul câmpului $\vec{v} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$ prin suprafața deschisă $\Sigma : x^2 + y^2 = 4 - z$, $z > 0$, direct și folosind formula Gauss-Ostrogradski, normala făcând unghi ascuțit cu Oz .

R: $\Phi = 0$

12. Fie $V : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1$ și $\vec{v} = 3x^2 z\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j} + z^3\vec{k}$. Să se calculeze $\int \int_{\text{Fr}V} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$.

R: $\int \int_{\text{Fr}V} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{216\pi}{5}$

13. Calculați fluxul vectorului $\bar{v} = \frac{\bar{r}}{r}$ prin suprafața $\Sigma : x^2 + y^2 = z^2, z = h, h > 0$. Să se verifice rezultatul cu formula Gauss-Ostrogradski.

R: $\Phi = 2\pi h^2(\sqrt{2} - 1)$

14. Calculați fluxul vectorului $\bar{v} = \frac{\bar{r}}{r^q}$ prin suprafața închisă mărginită de suprafețele $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0$. Să se verifice rezultatul cu formula Gauss-Ostrogradski.

R: $\Phi = \frac{\pi}{2} R^{3-q}$

Să se calculeze următoarele integrale curbilini cu ajutorul formulei lui Stokes:

15. $I = \int_C ydx + zdy + xdz$, unde $C : x = a \cos^2 t, y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin 2t, z = a \sin^2 t$

R: $I = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} a^2$ (scriem ecuația curbei C eliminând parametrul t și obținem $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + z = 0$)

16. $I = \int_{ABC} (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz$ luată de-a lungul laturilor triunghiului determinat de punctele $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$

R: $I = ab + bc + ac$

17. Calculați circulația câmpului vectorial $\bar{v} = y\bar{i} - z\bar{j} + x\bar{k}$ de-a lungul elipsei $y = x, \frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 = a^2$, versorul normalei la planul curbei $\bar{n} = \frac{\bar{i} - \bar{j}}{\sqrt{2}}$, folosind formula lui Stokes.

R: $2\pi a^2$

18. Aflați circulația câmpului vectorial $\bar{v} = 3z\bar{i} + 2y\bar{k}$ de-a lungul cercului cu centrul în $(1, 2, 3)$ de rază r din planul $x + y + z = 6$ parcurs în sens pozitiv față de $\bar{n} = \frac{\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{3}}$ folosind formula lui Stokes.

R: $-\frac{\pi r^2}{\sqrt{3}}$

19. Calculați circulația vectorului $\bar{v} = y\bar{i} + yz\bar{j} + zx\bar{k}$ de-a lungul cercului $C : x^2 + y^2 = 1, z = 2$. Se va verifica rezultatul aplicând formula lui Stokes și calculând fluxul rotorului lui \bar{v} ce străbate suprafața sferei $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$ situate deasupra planului $z = 2$.

R: $-\pi$

10. $I = \int \int_{\Sigma} 2x^2yzdydz + z^2dzdx + xyz^2dxdy$, unde Σ e fața exterioară a semielipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ limitat de planul $z = 0$.

Soluție. $I = \int \int \int_V (4xyz + 0 + 2xyz)dxdydz = 6 \int \int \int_V xyzdxdydz =$
 $= 6 \int \int_D \left(\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} xyzdz \right) dxdy = 6 \int \int_D xy \frac{z^2}{2} \Big|_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dxdy =$
 $= 3c^2 \int \int_D xy \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dxdy =$
 $= 3c^2 \int \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} xy \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dxdy =$
 $= 3c^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 a\rho \cos\theta b\rho \sin\theta (1 - \rho^2) ab\rho d\rho d\theta =$
 $= 3a^2b^2c^2 \int_0^1 \rho^3(1 - \rho^2)d\rho \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta =$
 $= 3a^2b^2c^2 \left(\frac{\rho^4}{4} \Big|_0^1 - \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^1 \right) \frac{1}{4} (-\cos 2\theta \Big|_0^{2\pi}) = 0 \quad \square$

11. $I = \int \int_{\Sigma} x^3dydz + x^2ydzdx + x^2zdx dy$, unde Σ este suprafața cilindrului $x^2 + y^2 = r^2$ cuprinsă între planele $z = 0, z = a$

Soluție. $I = \int \int \int_V (3x^2 + x^2 + x^2)dxdydz = \int \int \int_V 5x^2dxdydz =$
 $= \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^a \rho^3 \cos^2\theta dz d\rho d\theta = \frac{5\pi ar^4}{4} \quad \square$

12. Să se determine fluxul câmpului vectorial $\bar{v} = 2x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}$ prin suprafața $\Sigma : y^2 + z^2 = ax, 0 \leq x \leq a$ după normala \bar{n} la suprafață care face un unghi ascuțit cu semiaxa negativă Ox .

Soluție. Fluxul Φ al câmpului vectorial \bar{v} prin suprafața Σ este dat de integrala de suprafață $\Phi = \int \int_{\Sigma} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma$.

Inchidem suprafața Σ cu discul Σ_1 situat în planul $x = a$.

Notăm $S = \Sigma_1 \cup \Sigma$.

Teorema 13.2 ne dă $\int \int_S \bar{v} \cdot \bar{N} d\sigma = \int \int \int_V \operatorname{div} \bar{v} dxdydz$, unde \bar{N} e normala exterioară la suprafața S și $\operatorname{Fr} V = S$

Avem $\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 2$

Atunci $\int \int_S \bar{v} \cdot \bar{N} d\sigma = \int \int \int_V 2dxdydz = 2 \int \int_D \left(\int_{\frac{y^2+z^2}{a}} dx \right) dydz =$
 $= 2 \int \int_D \left(a - \frac{y^2+z^2}{a} \right) dzdy$, unde $D : y^2 + z^2 \leq a^2$

Deci $\int \int_S \bar{v} \cdot \bar{N} d\sigma = \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(a - \frac{\rho^2}{a} \right) \rho d\theta d\rho = \pi a^3$

Dar, $\int \int_S \bar{v} \cdot \bar{N} d\sigma = \int \int_{\Sigma} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma + \int \int_{\Sigma_1} \bar{v} \cdot \bar{n}_1 d\sigma$, unde $\bar{n}_1 = (1, 0, 0)$ e normala la suprafața Σ_1 . Rezultă $\Phi = \int \int_S \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = \pi a^3 - \int \int_{\Sigma_1} \bar{v} \cdot \bar{n}_1 d\sigma$

Pe suprafața $\Sigma_1 : x = a, (y, z) \in D, d\sigma = dxdy$. Atunci

$\int \int_{\Sigma_1} \bar{v} \cdot \bar{n}_1 d\sigma = \int \int_{\Sigma_1} 2xd\sigma = \int \int_D 2adzdy = 2a \operatorname{aria}(D) = 2\pi a^3 \implies$
 $\implies \Phi = \int \int_S \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = \pi a^3 - 2\pi a^3 = -\pi a^3 \quad \square$

13. Să se determine fluxul câmpului vectorial $\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ prin suprafața închisă de cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$ și planele $z = 0$ și $z = a$, după normala exterioară la suprafața.

Soluție. Fluxul Φ al câmpului vectorial \bar{v} prin suprafața închisă Σ este dat de integrala de suprafață $\Phi = \int \int_{\Sigma} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma$.

Cf. Teoremei 13.2 avem $\Phi = \int \int_{\Sigma} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = \int \int \int_V \operatorname{div} \bar{v} dx dy dz$, unde V este volumul închis de suprafața Σ .

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

$$\text{Atunci } \Phi = \int \int \int_V 3 dx dy dz = 3 \operatorname{vol}(V) = 3\pi R^2 a$$

Calculăm fluxul direct, fără Teorema 13.2. Fie $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, unde Σ_1 e baza cilindriului cu normala $\bar{n}_1 = (0, 0, -1)$, Σ_2 e baza cilindriului cu normala $\bar{n}_2 = (0, 0, 1)$, Σ_3 e suprafața laterală a cilindriului cu normala $\bar{n}_3 = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|} = \frac{(2x, 2y, 0)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0\right)$, unde $f = x^2 + y^2 - R^2$

Atunci

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \int_{\Sigma_1} \bar{v} \cdot \bar{n}_1 d\sigma + \int \int_{\Sigma_2} \bar{v} \cdot \bar{n}_2 d\sigma + \int \int_{\Sigma_3} \bar{v} \cdot \bar{n}_3 d\sigma = \int \int_{\Sigma_1} -z d\sigma + \\ &+ \int \int_{\Sigma_2} z + \int \int_{\Sigma_3} \left(x \cdot \frac{x}{R} + y \cdot \frac{y}{R} + z \cdot 0\right) d\sigma = \int \int_{\Sigma_1} 0 + \int \int_{\Sigma_2} a + \\ &+ \int \int_{\Sigma_3} \frac{x^2 + y^2}{R} = \int \int_{\Sigma_2} a + \int \int_{\Sigma_3} R = a \cdot \operatorname{aria} \Sigma_2 + R \cdot \operatorname{aria} \Sigma_3 = \\ &= a\pi R^2 + R2\pi Ra = 3\pi R^2 a \end{aligned} \quad \square$$

14. Calculați fluxul câmpului vectorial $\bar{v} = x\bar{i} + z^2\bar{j} + y^2\bar{k}$ prin suprafața laterală a conului $z^2 = x^2 + y^2$ mărginit de planul $z = 1$, pentru $z \geq 0$.

Soluție. Pentru a aplica formula lui Gauss-Ostrogradski închidem supra-

fața formată din conul $z^2 = x^2 + y^2$ cu discul $z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$

$$\text{Avem } \operatorname{div} \bar{v} = 1 \implies \Phi = \int \int_{\Sigma} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = \int \int \int_{\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1} dx dy dz = \frac{\pi}{3}$$

Calculăm fluxul lui \bar{v} prin discul $z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$ care mărginește conul după normala exterioară. Aplicăm definiția observând că $\bar{n} = \bar{k}$ și $\bar{v} \cdot \bar{n} = y^2$. Deci $\int \int_{z=1, x^2 + y^2 \leq 1} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = \int \int_{z=1, x^2 + y^2 \leq 1} y^2 d\sigma = \int \int_{x^2 + y^2 \leq 1} y^2 dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2 \theta d\theta d\rho = \frac{\pi}{4}$

Fluxul cerut va fi diferența dintre fluxul lui \bar{v} prin con și fluxul lui \bar{v} prin discul $z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$, deci $\Phi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ \square

15. (Legea lui Gauss) Pentru orice $q > 0$, considerăm câmpul scalar

$$f(x, y, z) = \frac{q}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi r}$$

și fie câmpul de gradienti:

$$\bar{E} = -\text{grad} f.$$

Câmpul scalar f reprezintă potențialul electric (sau potențial Newtonian) asociat sarcinii electrice q plasate în O , iar \bar{E} este câmpul electric generat (sau câmp Newtonian).

a. Să se explicitizeze \bar{E} și să se demonstreze că este câmp solenoidal, adică : $\text{div} \bar{E} = 0$.

b. Să se demonstreze că fluxul câmpului \bar{E} prin orice suprafață închisă ce nu conține originea în interior este nul.

c. Să se demonstreze că fluxul câmpului \bar{E} prin orice suprafață închisă ce conține originea în interior este q , (legea lui Gauss).

Soluție. a. Putem calcula \bar{E} direct cu definiția, sau aplicând proprietățile gradientului; obținem:

$$\bar{E} = -\text{grad} f = \frac{q}{4\pi} \frac{\bar{r}}{r^3}.$$

Arătăm acum că \bar{E} este solenoidal:

$$\text{div} \bar{E} = -\text{grad}(\text{div} f) = -\Delta f = \frac{q}{4\pi r^6} (3r^3 - 3r(x^2 + y^2 + z^2)) = 0.$$

b. Fie Σ o suprafață închisă ce nu conține originea în interior. Deoarece câmpul electric \bar{E} este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, sunt îndeplinite ipotezele formulei Gauss-Ostrogradski și deci, (notăm cu K compactul mărginit de Σ și cu \bar{n} versorul normalei exterioare la Σ), obținem:

$$\mathcal{F}_{\Sigma}(\bar{E}) = \int_{\Sigma} \bar{E} \bar{n} d\sigma = \int \int \int_K \text{div} \bar{E} dx dy dz = 0.$$

c. Fie acum Σ o suprafață închisă ce conține originea în interior. Deoarece \bar{E} nu este de clasă C^1 pe compactul K mărginit de Σ , (\bar{E} nefiind de clasă C^1 în origine), nu putem aplica formula Gauss-Ostrogradski pentru a calcula fluxul lui \bar{E} prin Σ . Fie $R > 0$ astfel încât sfera de centru O și rază R (notată în continuare cu S), să fie inclusă în interiorul lui Σ . Fie suprafața (închisă) $\Sigma_1 = \Sigma \cup S$, orientată după normala exterioară (deci pe S este normala interioară la sferă). Fie K_1 mulțimea compactă mărginită de Σ_1 . Deoarece $O \notin K_1$, fluxul lui \bar{E} prin Σ_1 este nul (conform (b)). Rezultă că fluxul lui \bar{E} prin Σ este egal cu fluxul lui \bar{E} prin S (orientată după normala exterioară $\bar{n} = \frac{\bar{r}}{R}$ la sferă):

$$\mathcal{F}_{\Sigma}(\bar{E}) = \int_S \bar{E} \bar{n} d\sigma = \frac{q}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = q.$$

□

16. Fie $\bar{v} = yz\bar{i} + 2xz\bar{j} - x^2\bar{k}$. Să se calculeze fluxul lui \bar{v} prin elipsoidul $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 8$ după normala exterioară, precum și circulația lui \bar{v} în lungul curbei C de intersecție a elipsoidului cu planul $z = 1$, parcursă pozitiv o dată în raport cu Oz .

Soluție. Cum $\text{div}\bar{v} = 0$, rezultă, cf. Teoremei 13.2, că fluxul $\Phi = 0$

Pentru circulație putem aplica teorema 13.3, luând ca suprafață Σ porțiunea din planul $z = 1$ interioară curbei C .

Avem $\text{rot}\bar{v} = -2x\bar{i} + (2x + y)\bar{j} + z\bar{k}$ și $\bar{n} = \bar{k}$

Atunci $\int_C \bar{v} d\bar{r} = \int \int_{\Sigma} (\text{rot}\bar{v}) \cdot \bar{n} d\sigma = \int \int_{\Sigma} d\sigma = \text{aria}\Sigma = 2\pi$ (Aria unei elipse de semiaxe a, b este πab și se poate calcula cu ajutorul integralei curbilinii) \square

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii cu ajutorul formulei lui Stokes:

17. $I = \int_C ydx + zdy + xdz$, unde C este cercul $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, parcurs în sens invers sensului de mișcare a acelor de ceasornic, dacă privim din direcția pozitivă a axei Ox

Soluție. $I = \int_C ydx + zdy + xdz = \int \int_{\Sigma} -dydz - dzdx - dx dy = -\int \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\sqrt{3} \int \int_{\Sigma} d\sigma$, deoarece $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ sunt cosinuşii directori ai normalei la fața Σ

Dacă D este interiorul proiecției cercului C pe planul xOy , atunci (prin eliminarea lui z între cele două ecuații ale lui C) $D : x^2 + xy + y^2 \leq \frac{a^2}{2}, z = 0$

Deci $I = -\sqrt{3} \int \int_D dx dy = -\pi a^2 \sqrt{3}$ \square

18. $I = \int_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, unde C este elipsa obținută prin intersecția cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ cu planul $x + z = 1$, parcursă astfel încât proiecția curbei C pe planul xOy să fie orientată pozitiv

Soluție. Avem $\Sigma : z = 1 - x, (x, y) \in D$, unde D este discul din planul xOy mărginit de curba Γ -proiecția curbei C în acest plan. Integrala se calculează pe fața superioară a suprafeței Σ cu normala $\bar{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, $d\sigma = \sqrt{2} dx dy$

$I = \int \int_{\Sigma} -2dydz - 2dzdx - 2dx dy = -2 \int \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) d\sigma = -\frac{4}{\sqrt{2}} \int \int_D \sqrt{2} dx dy = -4 \text{aria} D = -4\pi$ \square

19. Fie Σ emisfera superioară a sferei unitate și $\bar{v} = z\bar{i} + x\bar{j} + xyz\bar{k}$. Aflați fluxul rotorului lui \bar{v} prin Σ orientată după normala exterioară.

Soluție. Folosind teorema 13.3 avem de calculat circulația lui \bar{v} de-a lungul cercului $z = 0, x^2 + y^2 = 1$:

$$\int_C \bar{v} d\bar{r} = \int_C z dx + x dy + xyz dz = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi$$

Integrala poate fi calculată direct:

$$\operatorname{rot} \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & xyz \end{vmatrix} = xz\bar{i} + (1 - yz)\bar{j} + \bar{k} \text{ și observăm că } \bar{n} = \bar{r}$$

$$\text{Deci } \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{n} = x^2 z + y(1 - yz) + z$$

$$\begin{aligned} \int \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma &= \int \int_{\Sigma} [x^2 z + y(1 - yz) + z] d\sigma = \\ &= \int \int_{x^2 + y^2 \leq 1} [(x^2 - y^2 + 1)\sqrt{1 - x^2 - y^2} + y] \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \\ &= \int \int_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 - y^2 + 1) dx dy + \int \int_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy = \pi \text{ (prin} \\ &\text{ trecere la coordonate polare)} \quad \square \end{aligned}$$

20. Găsiți circulația câmpului vectorial $\bar{v} = y^2 \bar{i} + xy \bar{j} + (x^2 + y^2) \bar{k}$ prin conturul format din intersecția paraboloidului $x^2 + y^2 = Rz$ cu planele $x = 0, y = 0, z = R$ parcurs în sens pozitiv relativ la normala exterioară a paraboloidului.

$$\text{Soluție. Direct: } \int_{OAB} \bar{v} d\bar{r} = \int_{\widehat{OA}} \bar{v} d\bar{r} + \int_{\widehat{AB}} \bar{v} d\bar{r} + \int_{\widehat{BO}} \bar{v} d\bar{r}$$

Scriem ecuațiile parametrice ale curbelor:

$$\widehat{OA} : x = 0, y = t, z = \frac{t^2}{R}, t \in [0, R]$$

$$\widehat{AB} : x = R \sin t, y = R \cos t, z = R, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\widehat{OB} : x = t, y = 0, z = \frac{t^2}{R}, t \in [0, R]$$

$$\int_{\widehat{OA}} \bar{v} d\bar{r} = \int_{\widehat{OA}} y^2 dx + xy dy + (x^2 + y^2) dz = \int_0^R t^2 \cdot \frac{2t}{R} dt = \frac{R^3}{2}$$

$$\int_{\widehat{AB}} \bar{v} d\bar{r} = - \int_0^R t^2 \cdot \frac{2t}{R} dt = -\frac{R^3}{2}$$

$$\int_{\widehat{AB}} \bar{v} d\bar{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \cos^3 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin^2 t \cos t dt$$

$$\begin{aligned} \text{Pentru calculul integralei } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt \text{ facem schimbarea } \sin t = \sqrt{u} \implies \\ \implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (1 - \sin^2 t) dt = \int_0^1 (1 - u) u^{-\frac{1}{2}} du = B\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \\ = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(2 + \frac{1}{2})} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 1}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Deducem că } \int_{\widehat{AB}} \bar{v} d\bar{r} = R^3$$

Circulația este $\int_{OAB} \bar{v} d\bar{r} = R^3 \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = R^3$ Cu teorema 13.3: Curba este porțiunea de paraboloid orientată după normala exterioară

$$\int_{OAB} \bar{v} d\bar{r} = \int \int_{z = \frac{1}{R}(x^2 + y^2), x^2 + y^2 \leq R^2, x, y \geq 0} \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma$$

$$\text{Avem } \operatorname{rot} \bar{v} = 2y\bar{i} - 2x\bar{j} - y\bar{k}$$

Fie $\varphi = -x^2 - y^2 + Rz$. Normala la suprafață este $\bar{n} = \frac{\text{grad}\varphi}{\|\text{grad}\varphi\|} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+R^2}}(-2x, -2y, R)$

$$\int \int_{z=\frac{1}{R}(x^2+y^2), x^2+y^2 \leq R^2, x, y \geq 0} \text{rot}\bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma =$$

$$= 3 \int \int_{x^2+y^2 \leq R^2, x, y \geq 0} \left(-\frac{2x}{R} \cdot 2y + \frac{4xy}{R} - y \right) dx dy =$$

$$= 3 \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\rho^2 \sin \theta d\theta d\rho = R^3 \quad \square$$

21. Calculați circulația vectorului $\bar{v} = (x+y)\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (z+x)\bar{k}$ de-a lungul elipsei $C : x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$. Se va verifica rezultatul aplicând formula lui Stokes și calculând fluxul rotorului lui \bar{v} prin suprafețele :

a) elipsa C ;

b) elipsoidul $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ situat deasupra planului xOy .

Soluție. Direct vom folosi reprezentarea parametrică a elipsei C :
 $x = \cos \theta, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, z = 0$ și obținem

$$\int_C \bar{v} d\bar{r} = \int_C (x+y)dx + (y+z)dy + (z+x)dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\left(\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) \cdot (-\sin \theta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \right] d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \right) d\theta = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Se va verifica rezultatul aplicând formula lui Stokes :

a) $\text{rot}\bar{v} = -(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}), \bar{n} = \bar{k}$

Atunci

$$\int \int_{\Sigma} (\text{rot}\bar{v}) \cdot \bar{n} d\sigma = - \int \int_{\Sigma} d\sigma = - \int \int_{x^2+2y^2 \leq 1} dx dy = -\frac{\pi}{2}$$

b) Pentru suprafața elipsoidului situată deasupra planului xOy se obține

$$\bar{n} = \frac{x\bar{i}+2y\bar{j}+4z\bar{k}}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}, (\text{rot}\bar{v}) \cdot \bar{n} = -\frac{x+2y+4z}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}, d\sigma = \frac{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}{4z} dx dy$$

Atunci

$$\int \int_{\Sigma} (\text{rot}\bar{v}) \cdot \bar{n} d\sigma = \int \int_{\Sigma} -\frac{x+2y+4z}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}} d\sigma =$$

$$= \int \int_{x^2+2y^2 \leq 1} -\frac{x+2y+4z}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}{4z} dx dy =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \int_{x^2+2y^2 \leq 1} \frac{x+2y+4z}{z} dx dy =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \int_{x^2+2y^2 \leq 1} \frac{x+2y+4\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2-2y^2}}{\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2-2y^2}} dx dy =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \int_{x^2+2y^2 \leq 1} \left(\frac{x+2y}{\sqrt{1-x^2-2y^2}} + 2 \right) dx dy =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{\rho(\cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta)}{\sqrt{1-\rho^2}} + 2 \right) \rho d\rho d\theta \right] = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \square$$

22. Să se calculeze direct și cu formula lui Stokes integrala curbilinie

$$\int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

unde Γ este poligonul de intersecție dintre cubul $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ și planul $x + y + z = \frac{3}{2}$.

Soluție. Γ este un hexagon regulat. Pentru a calcula integrala cu definiția trebuie parametrizate laturile hexagonului; de exemplu, latura din planul xOy are parametrizarea:

$$x(t) = t, y(t) = \frac{3}{2} - t, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Calculăm acum integrala aplicând formula lui Stokes. Fie Σ porțiunea din planul $x + y + z = \frac{3}{2}$ situată în interiorul cubului (interiorul hexagonului). Proiecția lui Σ pe planul xOy este mulțimea

$$D = \{(x, y); \frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{2}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

a cărei arie este $\frac{3}{4}$. O parametrizare (carteziană) a suprafeței Σ este

$$z = \frac{3}{2} - x - y, (x, y) \in D.$$

Aplicând formula lui Stokes, obținem:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz = \\ & = -2 \int_{\Sigma} (x + y)dx \wedge dy + (y + z)dy \wedge dz + (z + x)dz \wedge dx = \\ & = -2 \int \int_D 3dxdy = -6 \text{aria}(D) = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

□

13.3 Probleme propuse

Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Green, următoarele integrale curbilinie :

1. $I = \int_C e^{x^2+y^2}(-ydx + xdy), (C) : x^2 + y^2 = 1$

R: $I = \int_C e^{x^2+y^2}(-ydx + xdy) = 2\pi e$

2. $I = \int_C (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$, unde C este curba închisă de parabolă $y = x^2$ și dreapta $y = x$, parcursă în sens direct

R: $I = -\frac{1}{3}$

3. $I = \int_C (x+y) dx - (x-y) dy$, $C : x^2 + y^2 = r^2$

R: $I = -2\pi r^2$

4. $I = \int_C (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, unde C este triunghiul cu vârfurile $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$

R: $I = -1$

Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradski, următoarele integrale:

5. $I = \int \int_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, Σ este fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

R: $I = 0$

6. $I = \int \int_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, Σ este fața exterioară a suprafeței închise $x^2 + y^2 = z^2$, $z = h$

R: $I = \frac{9\pi}{10} h^5$

7. $I = \int \int_{\Sigma} xyz(x dydz + y dzdx + z dxdy)$, unde $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x, y, z \geq 0$

R: $I = \frac{a^6}{8}$

Să se calculeze fluxul $\Phi = \int \int_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$ cu formula lui Gauss-Ostrogradski:

8. $\vec{v} = -y\vec{i} + x\vec{j}$, unde Σ este cubul unitate

R: $\Phi = 0$

9. $\vec{v} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, unde Σ este sfera unitate

R: $\Phi = 0$

10. $\vec{v} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$, unde Σ are fețele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$

R: $\Phi = \frac{1}{2}$

11. Să se calculede fluxul câmpului $\vec{v} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$ prin suprafața deschisă $\Sigma : x^2 + y^2 = 4 - z$, $z > 0$, direct și folosind formula Gauss-Ostrogradski, normala făcând unghi ascuțit cu Oz .

R: $\Phi = 0$

12. Fie $V : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1$ și $\vec{v} = 3x^2 z\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j} + z^3\vec{k}$. Să se calculeze $\int \int_{\text{Fr}V} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$.

R: $\int \int_{\text{Fr}V} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{216\pi}{5}$

13. Calculați fluxul vectorului $\bar{v} = \frac{\bar{r}}{r}$ prin suprafața $\Sigma : x^2 + y^2 = z^2, z = h, h > 0$. Să se verifice rezultatul cu formula Gauss-Ostrogradski.
R: $\Phi = 2\pi h^2(\sqrt{2} - 1)$
14. Calculați fluxul vectorului $\bar{v} = \frac{\bar{r}}{r^q}$ prin suprafața închisă mărginită de suprafețele $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0$. Să se verifice rezultatul cu formula Gauss-Ostrogradski.
R: $\Phi = \frac{\pi}{2} R^{3-q}$
- Să se calculeze următoarele integrale curbilini cu ajutorul formulei lui Stokes:
15. $I = \int_C ydx + zdy + xdz$, unde $C : x = a \cos^2 t, y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin 2t, z = a \sin^2 t$
R: $I = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} a^2$ (scriem ecuația curbei C eliminând parametrul t și obținem $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + z = 0$)
16. $I = \int_{ABC} (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz$ luată de-a lungul laturilor triunghiului determinat de punctele $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$
R: $I = ab + bc + ac$
17. Calculați circulația câmpului vectorial $\bar{v} = y\bar{i} - z\bar{j} + x\bar{k}$ de-a lungul elipsei $y = x, \frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 = a^2$, versorul normalei la planul curbei $\bar{n} = \frac{\bar{i} - \bar{j}}{\sqrt{2}}$, folosind formula lui Stokes.
R: $2\pi a^2$
18. Aflați circulația câmpului vectorial $\bar{v} = 3z\bar{i} + 2y\bar{k}$ de-a lungul cercului cu centrul în $(1, 2, 3)$ de rază r din planul $x + y + z = 6$ parcurs în sens pozitiv față de $\bar{n} = \frac{\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{3}}$ folosind formula lui Stokes.
R: $-\frac{\pi r^2}{\sqrt{3}}$
19. Calculați circulația vectorului $\bar{v} = y\bar{i} + yz\bar{j} + zx\bar{k}$ de-a lungul cercului $C : x^2 + y^2 = 1, z = 2$. Se va verifica rezultatul aplicând formula lui Stokes și calculând fluxul rotorului lui \bar{v} ce străbate suprafața sferei $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$ situate deasupra planului $z = 2$.
R: $-\pi$

Bibliografie

- [1] Angot , A. (1966) *Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică și din telecomunicații* , Ed.Tehnică , București.
- [2] Bădescu , R. , Maican , C. (1968) *Integrale utilizate în mecanică , fizică tehnică și calculul lor* , Ed.Tehnică , București.
- [3] Blăjină , O. A. (2001) *Maple în matematica asistată de calculator* , Ed.Albastră , Cluj-Napoca.
- [4] Brînzănescu , V. , Stănășilă , O. (1994) *Matematici speciale* , Ed.ALL, București.
- [5] Cavailles , J. (1969) *Studii asupra teoriei mulțimilor*, Ed. Științifică , București.
- [6] Chiriță , S. (1989) *Probleme de matematici superioare* , Ed.Did. și Ped., București.
- [7] Ciorănescu, N. (1955) *Curs de algebră și analiză matematică* , Ed.Tehnică , București.
- [8] Colojoară , I. , Miculescu ,R. , Mortici , C. (2002) *Analiză matematică .Teorie.Metode.Aplicații*, Ed.Art , București.
- [9] Costache , Tania-Luminița , Oprișan , Gh. (2004) *Transformări integrale*, Ed.Printech , București.
- [10] Costache , Tania-Luminița , Zamfir , Mariana (2005) *Analiză matematică* , Ed.Printech , București.
- [11] Costache , Tania-Luminița (2006) *Analiză matematică . Noțiuni teoretice. Aplicații* , Ed.Printech , București.
- [12] Cristescu , R. (1967) *Matematici generale* , Ed.Did. și Ped. , București.
- [13] Crstici , B. , Bânzaru , T. , Lipovan , O. , Neagu , M. , Neamțu , N., Neuhaus , N. , Rendi , B. , Rendi , D. , Sturz , I. (1981) *Matematici speciale* , Ed.Did. și Ped. , București.

- [14] Fihtenholtz , G.M. (1964) *Curs de calcul diferențial și integral (vol II-III)*, Ed.Tehnică , București.
- [15] Filipescu , D. , Grecu , E. , Medințu , R. (1975) *Matematici generale pentru subingineri.Culegere de probleme* , Ed.Did. și Ped. , București.
- [16] Francinou, S., Gianella, H., Nicolas S., (2004) *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures. Analyse 2* , Cassini, Paris.
- [17] Găină , S. , Câmpu , E. , Bucur , Gh. (1966) *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral (vol.II-III)* , Ed.Tehnică , București.
- [18] Gelbaum , B. R. , Olmsted , J.M.H. (1973) *Contraexemple în analiză* , Ed. Științifică , București.
- [19] Kaufmann , A. , Precigout , M. (1966) *Elemente de teoria mulțimilor și algebră modernă* , Ed. Tehnică , București.
- [20] Lica , D. , Micula , Maria , Căpățînă , Gh. , Objelean , N. , Marin , I. (2003) *Analiză matematică cu Maple* , București.
- [21] Luzin , N.N. (1950) *Calculul diferențial* , Editura de stat.
- [22] Năstăsescu , C. (1974) *Introducere în teoria mulțimilor* , Ed. Didactică și Pedagogică , București.
- [23] Niță , Ana , Stănășilă , Tatiana (1997) *1000 de probleme rezolvate și exerciții fundamentale pentru studenți și elevi* , Ed.ALL , București.
- [24] Olteanu , M. , Morărescu , C. (2003) *Continuitate și diferențiabilitate*, Ed.Printech , București.
- [25] Olteanu , M. , Morărescu , C. (2003) *Serii* , Ed.Printech , București.
- [26] Olteanu , M. (2004) *Analiză matematică . Noțiuni teoretice și probleme rezolvate* , Ed.Printech , București.
- [27] Pavel , Garofița , Tomuța , Floare Ileana , Gavrea , I. (1981) *Matematici speciale* , Ed.Dacia , Cluj-Napoca.
- [28] Rimer , D. (1968) *Noțiuni de teoria mulțimilor* , Ed. Didactică și Pedagogică , București.
- [29] Scheiber , E. , Lupu , M. (1998) *Matematici speciale.Rezolvarea problemelor asistată de calculator cu exemplificări în Derive, MathCAD, Maple, Mathematica* , Ed.Tehnică , București.
- [30] Stănășilă , O. (1981) *Analiză matematică* , Ed.Did. și Ped. , București.

- [31] Stuart , R.D. (1971) *Introducere în analiza Fourier cu aplicații în tehnică* , Ed.Tehnică , București.
- [32] Șaichin , A. (1958) *Exerciții și probleme de calcul diferențial* , Ed.Tehnică , București.
- [33] Tomescu , Rodica , Toma , Antonela , Stanciu , Victoria , Stan , B. *Caiet de seminar Nr. 2 Calcul integral* , Ed.Printech , București.
- [34] Trandafir , Rodica (1977) *Probleme de matematici pentru ingineri* , Ed.Tehnică , București.
- [35] Udriște , C. , Tănăsescu , Elena (1980) *Minime și maxime ale funcțiilor reale de variabile reale* , Ed.Tehnică , București.