2300ca77caf2b8e7e17e979dea6c301911

6.3 TEMĂ DE CONTROL

1. Funcţia $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

este integrabilă?

Răspuns. Integrabilă (are un singur punct de discontinuitate).

2. Să se arate că $f:[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

nu este integrabilă.

Răspuns. Nu este mărginită.

3. Să se calculeze ariile domeniilor plane:

$$D=\left\{(x,y)\left|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right.\right\}.$$

Răspuns. πab.

4. $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 9,\ x\le y\le 3x\right\}$.

Răspuns. $\dfrac{4\pi}{3}$.

Să se calculeze următoarele integrale duble:

5. $\iint\limits_D x\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde $D=[0,1]\times[0,\pi]$.

Răspuns. 1.

6. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde

$$D=\left\{(x,y)\middle| x\in[1,2],\ \frac{1}{x}\le y\le x\right\}.$$

Răspuns. $\frac{9}{4}$.

7. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2-4x-4y+10\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde

$$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+4y^2-2x-16y+13\le 0\right\}.$$

Răspuns. $\frac{17\pi}{2}$.

8. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le x\right\}$.

Răspuns. $\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.

9. $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde

$$D=\left\{(x,y)\middle| \frac{1}{4}\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ x\ge 0, a,b>0\right\}.$$

Răspuns. $\frac{\pi ab\sqrt{3}}{4}$.

10. Să se calculeze integrala dublă

$$I=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde D domeniul delimitat de dreptele

$$y=x,\ y=x+a,\ y=a,\ y=3a\ \ (a>0).$$

Răspuns. $14a^4$.

11. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafeţele:

$$z=0,\ x^2+y^2=1,\ x+y+z=3.$$

Răspuns. 3π.

12. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafeţele:

$$z=xy^2,\ x^2+y^2=R^2,\ y=0,\ x=0,$$

aflat în primul cadran.

Răspuns. $\dfrac{R^5}{15}$.

13. Să se calculeze masa unei plăci plane de grosime neglijabilă dacă densitatea $\rho(x,y)=x^2+y^2$, iar $D=\left\{(x,y)\middle|1\le\dfrac{x^2}{4}+y^2\le 4\right\}$.

Răspuns. $\dfrac{75\pi}{2}$.

14. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane de grosime neglijabilă cu densitatea $\rho(x,y)=y$ şi care are forma dată de domeniul

$$D=\left\{(x,y)\middle|x+y\le 2,\ y\ge x^2\right\}.$$

Răspuns. $x_{\mathrm{G}}=-\dfrac{25}{32},\ y_{\mathrm{G}}=\dfrac{235}{112}$.

15. Să se afle momentul de inerţie în raport cu axa Ox a triunghiului delimitat de dreptele $x=2, y=2, x+y-2=0$.

Răspuns. 4.

16. Dacă $u:[a_1,b_1]\to\mathbb{R}_+$ şi $v:[a_2,b_2]\to\mathbb{R}_+$ sunt integrabile, atunci:

(i) $f:[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=u(x)+v(y)$ este Darboux integrabilă pe D şi

$$\iint\limits_D f=(b_2-a_2)\int_{a_1}^{b_1}u+(b_1-a_1)\int_{a_2}^{b_2}v;$$

(ii) $g = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = u(x)v(y)$ este Darboux integrabilă pe D şi

$$\iint\limits_D g = \left(\int_{a_1}^{b_1} u \right) \cdot \left(\int_{a_2}^{b_2} v \right).$$

17. (i) Fie $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \ x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \{0\} \ \text{ sau } \ y \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,1]; \\ 1 - \dfrac{1}{q}, \ x, y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \ x = \dfrac{p}{q}, \ p, q \in \mathbb{N}^*, \ (p,q) = 1. \end{cases}$$

Să se arate că f este Darboux integrabilă pe $[0,1]^2$.

(ii) Dacă $f^{(x)} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f^{(x)}(y) = f(x,y)$, $\forall\, x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ să se arate că $f^{(x)}$ nu este integrabilă pe $[0,1]$, $\forall\, x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

18. Fie mulţimea

$$G = \left\{ (x,y) \in [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2 \,\middle|\, x = \frac{m}{n},\ y = \frac{m'}{n},\ m, m', n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \text{ şi } (m,n) = 1 = (m',n) \right\}$$

şi funcţia $g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, \ (x,y) \in G; \\ 0, \ (x,y) \in [0,1]^2 - G. \end{cases}$$

(i) Să se arate că g nu este integrabila Darboux pe $[0,1]^2$.

(ii) Dacă $y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $y = \dfrac{m}{n}$; $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $(m,n) = 1$,

iar

$$g_y(x) = \begin{cases} 1, \ x = \dfrac{k}{n}, \ (k,n) = 1, k \leq n; \\ 0, \ x \in [0,1] - \left\{ x = \dfrac{k}{n} \,\middle|\, (k,n) = 1, k \leq n \right\}, \end{cases}$$

să se arate că g_y este integrabilă pe $[0,1]$ şi $\displaystyle\int_0^1 g_y = 0$.

2300ca77caf2b8e7e17e979dea6c301955

19. Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 2y,\ y + x^2 \le 2 \right\}$

$$f(x,y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}.$$

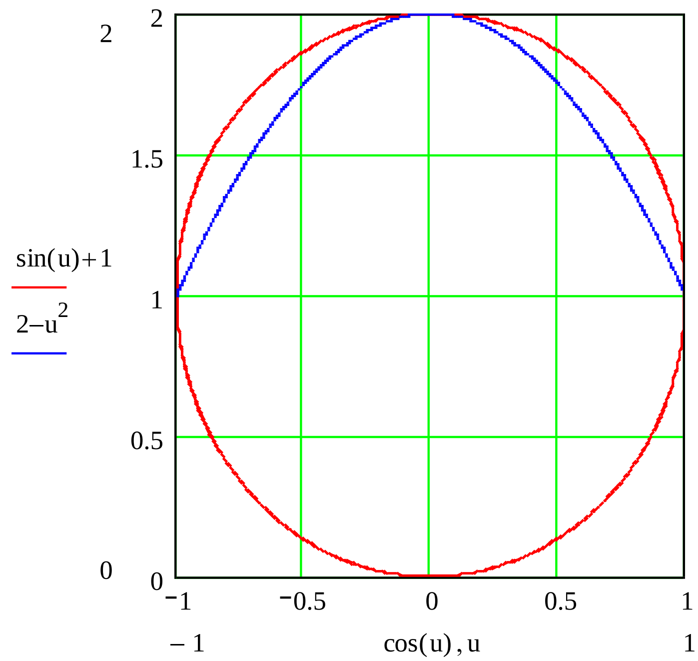

Fig. 6.24

Să se arate că f este integrabilă pe D şi $\iint\limits_D f = 1 - \frac{5}{8}\ln 3$.

20. Fie $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } (x,y) \in \left((\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \right) \cup \left(((\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,1]) \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right); \\ 0, \text{ dacă } (x,y) \in \left((\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right) \cup \left(((\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,1]) \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \right). \end{cases}$$

Să se demonstreze că f nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]^2$, există $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$, dar nu există $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$.

21. Să se arate că mulţimea

2300ca77caf2b8e7e17e979dea6c301966

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x^2+y^2\right)^2\le a^2\left(x^2-y^2\right)\right\},\ a\neq 0$$

are arie şi să se determine aria sa.

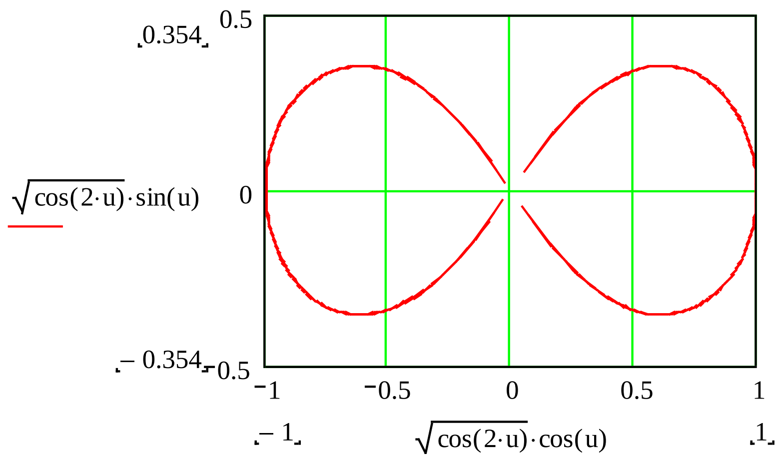

Fig. 6.25

Răspuns. aria $E=a^2$.

22. Să se arate că transformarea

$$T=\begin{cases}u=x+y\\ v=xy\end{cases},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

aplică domeniul $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy\ge 1,\ x+y\le 4,\ y\ge 0\right\}$ pe domeniul

$$\Delta=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2\le u\le 4,\ 1\le v\le \frac{u^2}{4}\right\}.$$

Să se arate că:

$$\iint_{\Delta}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\neq\iint_{D}\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

şi să se explice de ce nu este aplicabilă teorema de schimbare de variabilă.

Răspuns. T nu este biunivocă.

23. Să se calculeze, trecând la coordonate polare generalizate, integrala dublă:

$$I=\iint_{D}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde:

2300ca77caf2b8e7e17e979dea6c301977

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 \le \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},\ x\ge 0\right\};\ a,b\in\mathbb{R}_+^*.$$

Răspuns. $\dfrac{a^2b^2}{24}$.

24. Fie funcţia continuă $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ şi domeniul

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x}{2}\le x^2+y^2\le x,\ \frac{y}{2}\le x^2+y^2\le y\right\}.$$

Folosind o schimbare de variabile adecvată să se arate că transformarea este regulată şi că:

$$\iint_D \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2} f\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) f\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

2300ca77caf2b8e7e17e979dea6c301988

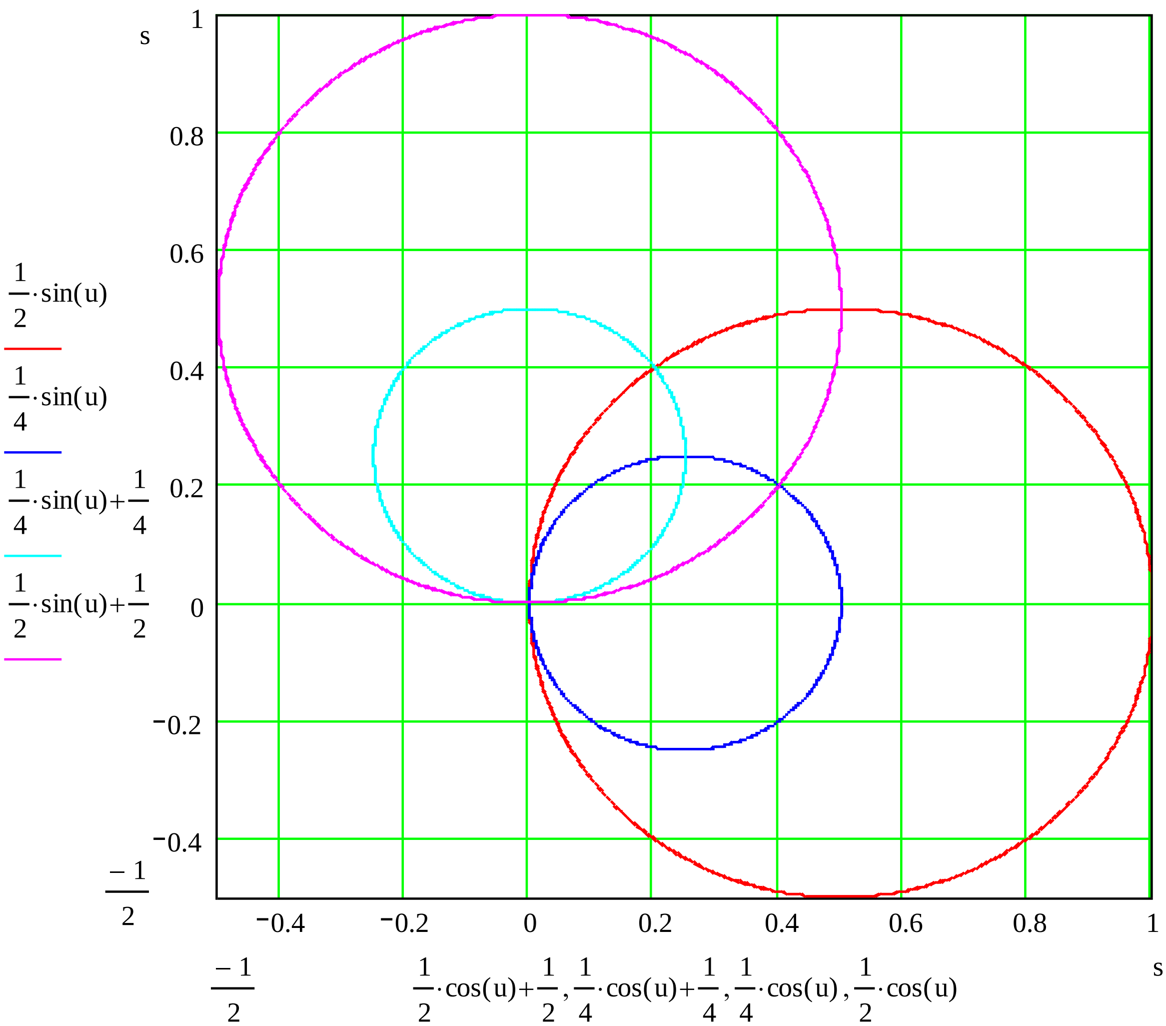

Fig. 6.27

25. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate, momentele statice şi momentele de inerţie ale plăcii omogene

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\le a^2,\ x^2+y^2\ge ax,\ y\ge 0\right\},\ a>0.$$

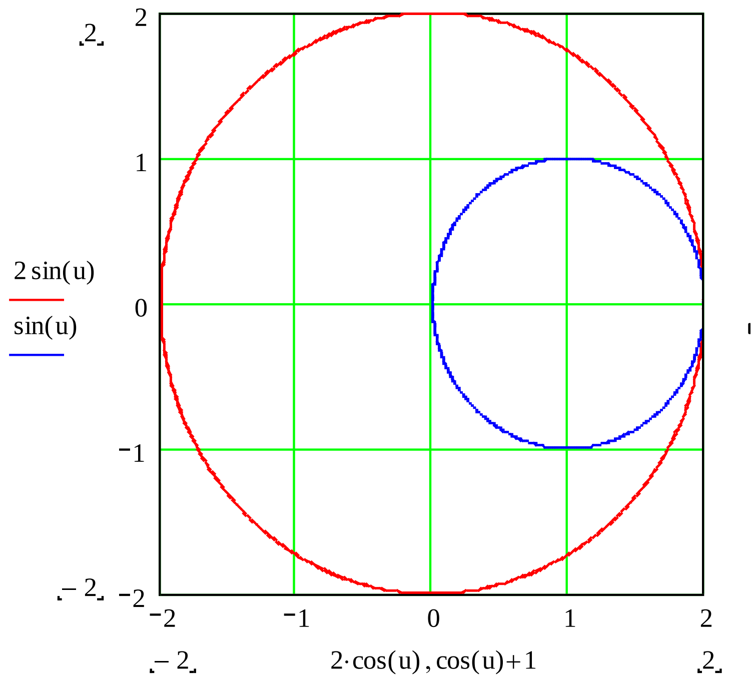

Fig. 6.27

Răspuns.

$$\begin{cases} x_G = -\dfrac{a}{6}; \quad J_x = \dfrac{15}{128}\pi a^4; \\ J_G = \dfrac{14}{9\pi}a; \quad J_y = \dfrac{11}{128}\pi a^4; \\ S_x = \dfrac{7}{12}a^3; \quad J_{xy} = -\dfrac{1}{24}a^4; \\ S_y = -\dfrac{\pi}{16}a^3. \end{cases}$$

26. Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}$; $D = \left\{ (x,y) \middle| x^2 + y^2 \le \left(3\pi/2\right)^2 \right\}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y; \ -3\pi/2 \le x \le 3\pi/2, \ \cos x \le y \le \sqrt{\left(3\pi/2\right)^2 - x^2}; \\ x - y; \ -3\pi/2 \le x \le 3\pi/2, \ \sqrt{\left(3\pi/2\right)^2 - x^2} \le y < \cos x. \end{cases}$$

Să se arate că f este integrabilă Riemann pe D şi să se calculeze $\iint_D f$.

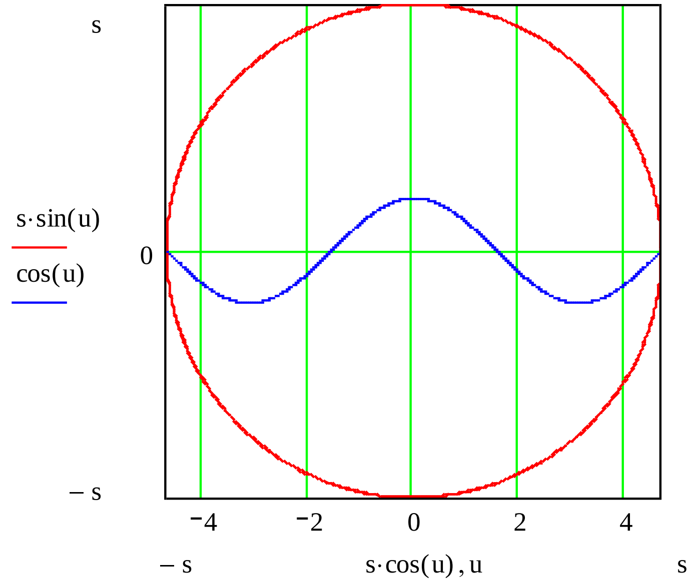

Fig. 6.28

Răspuns. $\frac{3}{2}\cdot\pi\cdot\left(3\pi^2-1\right)$.

Să se calculeze următoarele integrale:

27. $\iint_D (1-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dacă

$$D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+(y-1)^2\le 1,\ y\le x^2,\ x\ge 0\right\}.$$

Răspuns. $\frac{1}{15}$.

28. $\int_0^1\left(\int_{\arcsin y}^{\arcsin\sqrt{y}}\frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

Răspuns. Se va schimba ordinea de integrare, $I=\frac{\pi^2}{8}-1$.

29. $\iint_D \arcsin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dacă

$$D=\left\{(x,y)\middle|\, \pi^2\le x^2+y^2\le(2\pi)^2\right\}.$$

Răspuns. $\pi^3\left(\frac{7}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

30. $\iint_D \frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dacă

$$D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 2x\right\}.$$

Răspuns. $\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

31. $\iint_D \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dacă

$$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\ge 1,\ x\ge\frac{1}{\sqrt{2}},\ x+y\le\sqrt{2},\ x-y\le\sqrt{2}\right\}.$$

Răspuns. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi^2}{32}$.

32. $\iint_D |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dacă

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2\le\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},\ x\ge 0\right\},\ a,b\in\mathbb{R}_+^*.$$

Răspuns. $\frac{a^2b^2}{24}$.

33. $\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$, dacă $R>0$.

Răspuns. $\frac{\pi}{4}\left[\left(1+R^2\right)\ln\left(1+R^2\right)-R^2\right]$.

34. Să se calculeze aria domeniului plan limitat de curba

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2ax^3.$$

Răspuns. $\frac{5}{8}\pi a^2$.

35. Să se calculeze aria figurii limitate de curbele

$$x^2+y^2=2x;\ x^2+y^2=4x;\ y=x \ \text{şi}\ y=0.$$

Răspuns. Se trece la coordonate polare, $A=3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$.

36. Să se calculeze integrala $\iint_S e^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dacă S este un triunghi curbiliniu mărginit de parabola $y^2=x$ şi dreptele $x=0,\ y=1$.

Răspuns. $\frac{1}{2}$.

37. Să se calculeze integrala

$$\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dacă domeniul D este limitat de elipsa,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b\in\mathbb{R}_{+}^{*}.$$

Răspuns. $\frac{2}{3}\pi ab$.

38. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unui sector circular omogen de rază a şi unghi la vârf 2α.

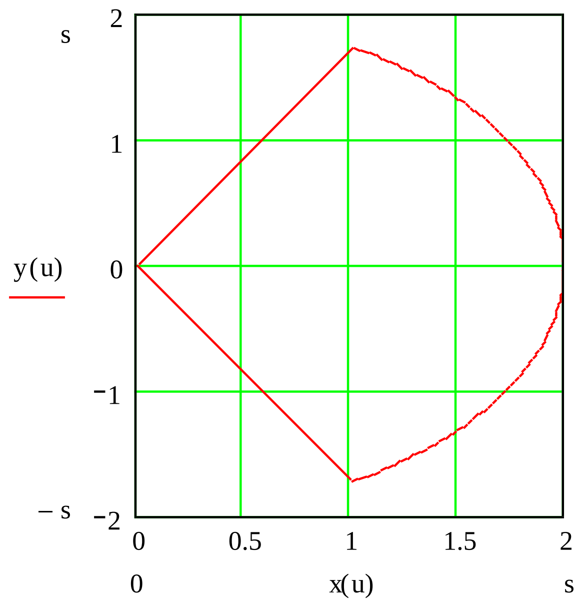

Fig. 6.29

Răspuns. $\begin{cases} x_G = \dfrac{2a\sin\alpha}{3\alpha}; \\ y_G = 0. \end{cases}$

39. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unei plăci omogene limitată de curbele $x^2 = ay,\ x + y = 2a,\ a > 0$.

Răspuns. $\begin{cases} x_G = -\dfrac{a}{2}; \\ y_G = \dfrac{8}{5}a. \end{cases}$

40. Să se calculeze aria domeniului plan limitat de curbele

$$xy = a^2;\ x + y = \frac{5}{2}a,\ a > 0.$$

Răspuns. $\dfrac{15}{8} - 2\ln 2$.