CLASA a XII-a ALGEBRĂ

1. Ordinul unui element al unui grup (D. Heuberger)

2. Teoremele lui Lagrange şi Cauchy pentru grupuri finite (D. Heuberger)

3. Aplicaţii ale teoremei lui Lagrange în probleme de teoria numerelor (V. Pop)
   - 3.1. Noţiuni şi rezultate utilizate
   - 3.2. Funcţii aritmetice. Funcţia lui Euler
   - 3.3. Teoreme fundamentale

4. Condiţii suficiente de comutativitate în grupuri (D. Heuberger)
   - 4.1. Centrul unui grup
   - 4.2. (a, b) – Grupuri comutative
   - 4.3. Câteva grupuri de exponent 2

5. Morfisme de grupuri (D. Heuberger, V. Pop)
   - 5.1. Caracteristici ale lui Hom (G;H)
   - 5.2. Caracteristici ale lui End (G) pentru unele grupuri finite
   - 5.3. Transport de structură

6. Congruenţe de grupuri. Grupuri cât. Teoreme de izomorfism (V. Pop, V. Lupşor)
   - 6.1. Relaţii de echivalenţă definite de subgrupuri
   - 6.2. Relaţii de congruenţă. Subgrupuri normale
   - 6.3. Nucleul unui morfism
   - 6.4. Teoreme de izomorfism

7. Grupuri de transformări geometrice (V. Pop, V. Lupşor)
   - 7.1. Planul euclidian. Modele geometrice şi algebrice
   - 7.2. Principalele izometrii ale planului
   - 7.3. Interpretări geometrice ale unor grupuri remarcabile

8. Inele (D. Heuberger)
   - 8.1. Centrul unui inel
   - 8.2. Condiţii suficiente pentru inele Boole
   - 8.3. Inele şi corpuri de caracteristică finită

9. Ecuaţii funcţionale pe structuri algebrice (V. Pop)
   - 9.1. Ecuaţii funcţionale pe grupuri de numere reale

10. Polinoame cu coeficienţi într-un inel comutativ (D. Heuberger)
   - 10.1. Ireductibilitate şi descompunere în Zp[X]
   - 10.2. Inelul resturilor inelului A[x] modulo un polinom f Є A[x]

Coordonator Vasile Pop
Viorel Lupşor

CLASA a XII-a ANALIZĂ

1. Funcţii primitivabile (Gh. Boroica)
   1.1. Funcţii primitivabile
   1.2. Operaţii cu funcţii primitivabile
   1.3. Clase de funcţii discontinue primitivabile

2. Metode de calcul al primitivelor (I. Magdaş)
   2.1. Aspecte teoretice
   2.2. Calculul primitivelor unor funcţii iraţionale
   2.3. Calculul primitivelor funcţiilor trigonometrice şi hiperbolice

3. Criterii de integrabilitate (N. Muşuroia)
   3.1. Funcţii integrabile
   3.2. Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann
   3.3. Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann

4. Metode de calcul al integralelor definite (A. Magdaş)
   4.1. Metode de integrare a funcţiilor

5. Şiruri şi integrala Riemann (A. Magdaş)
   5.1. Calculul limitelor unor şiruri utilizând integrala definită
   5.2. Şiruri ai căror termeni generali conţin integrala definită

6. Teoreme de medie. Inegalităţi integrale (A. Magdaş)
   6.1. Teoreme de medie ale calculului integral
   6.2. Inegalităţi integrale remarcabile

7. Aplicaţii ale calculului integral (A. Magdaş)
   7.1. Calculul ariilor
   7.2. Calculul volumelor

8. Ecuaţii diferenţiale şi integrale (Gh. Boroica)
   8.1. Ecuaţii diferenţiale de ordin întâi şi doi
   8.2. Ecuaţii diferenţiale clasice de ordin întâi

Coordonator Vasile Pop
Viorel Lupşor

MATEMATICĂ
PROGRAMA ŞCOLARA PENTRU CLASELE DE EXCELENŢA
X-XII

ARGUMENT

Studiul matematicii prin clasele de excelenţă, urmăreşte în principal crearea unui cadru organizat, în care elevii talentaţi la matematică, proveniţi din diferite medii şcolare, să poată intra în contact, şi în timp relativ scurt, să formeze un grup performant. Aceşti elevi, beneficiind de o pregătire pe măsura potenţialului lor intelectual, vor contribui ulterior la formarea unei elite româneşti în domeniul matematicii.

Realizarea unei programe pentru clasele de excelenţă, precum şi modul în care se va lucra pe această programă, constituie o noutate pentru învăţământul românesc. Din acest motiv elaborarea prezentei programe trebuie înţeleasă ca o etapă necesară unui început de drum.

Un colectiv de cadre didactice din învăţământul preuniversitar şi universitar din CRTCP Cluj, cu experienţă în domeniul pregătirii elevilor capabili de performanţe superioare, au format o echipă care a realizat programa şi manualul care conţine exerciţii şi probleme extrem de utile pentru desăvârşirea pregătirii acestor elevi.

În selectarea conţinuturilor programei s-a ţinut cont de tendinţele actuale în formularea subiectelor la concursurile şi olimpiadele şcolare, dar şi de tradiţiile şcolii româneşti de matematică. Numeroasele cărţi şi reviste adresate ″vârfurilor″ au constituit o importantă sursă bibliografică în tratarea temelor. Temele propuse constituie o extindere firească a programei analitice obligatorii de matematică şi parcurgerea lor este necesară pentru abordarea unor probleme mai dificile. Anumite teme vor fi tratate pe parcursul mai multor ani de studiu (evident cu o problematică corespunzătoare) asigurându-se astfel continuitatea şi coerenţa procesului de învăţare. Mai trebuie precizat că la elaborarea programei echipa a avut în vedere faptul că matematica nu este un produs finit, ci un proces intelectual în care, pe suportul unor cunoştinţe solide, primează iniţiativa personală. Astfel, această programă oferă posibilităţi autentice de opţiune pentru profesori şi elevi.

Programa se adresează elevilor claselor X-XII şi a fost concepută pentru un număr de 2 ore/săptămână (în cele 30 de săptămâni ale anului şcolar în care se lucrează cu clasele sau grupele de excelenţă). Ca o completare la programa obligatorie de matematică, competenţelor generale le-au mai fost adăugate încă două care au rolul de a orienta demersul didactic către formarea unor ansambluri structurate de cunoştinţe generate de specificul activităţii intelectuale matematice la nivel de performanțe superioare. Programa are următoarele componente:

- competențe generale
- competențe specifice şi conținuturile corelate cu acestea
- valori şi atitudini
- sugestii metodologice.

Competențe generale

1. **Folosirea corectă a terminologiei specifice matematicii în contexte variate**
2. **Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice**
3. **Utilizarea corectă a algoritmilor matematici în rezolvarea de probleme cu grade diferite de dificultate**
4. **Exprimarea şi redactarea corectă şi coerentă în limbaj formal sau în limbaj cotidian, a rezolvării sau a strategiilor de rezolvare a unei probleme**
5. **Analiza unei situații problematice şi determinarea ipotezelor necesare pentru obținerea concluziei**
6. **Generalizarea unor proprietăți prin modificarea contextului inițial de definire a problemei sau prin îmbunătățirea sau generalizarea algoritmilor**
7. **Emiterea unor judecăți de valoare pentru rezolvarea problemelor inventiv şi euristic-creative**
8. **Dobândirea unei imagini de ansamblu a matematicii elementare ca parte a unui sistem aflat în permanentă evoluție şi interacțiune cu lumea înconjurătoare**

Competenţe specifice	*Conţinuturi*
1.1. Identificarea legăturilor dintre primitivabilitate şi proprietatea Darboux 1.2. Utilizarea metodei schimbării de variabilă în cele două variante la calculul primitivelor 2. Prelucrarea inegalităţilor clasice în scopul obţinerii unor inegalităţi integrale 3. Aplicarea unor schimbări de variabilă consacrate la calculul primitivelor funcţiilor iraţionale 4. Exprimarea unei funcţii dintr-o ecuaţie diferenţială sau integrală 5.1. Utilizarea integralei definite la calculul limitelor unor şiruri, stabilirea unor identităţi şi inegalităţi 5.2. Interpretarea graficului pentru stabilirea formulei de calcul a ariei cuprinsă între două curbe plane 6.1. Utilizarea integralei definite la calculul volumului unor corpuri geometrice care nu sunt de rotaţie 7. Realizarea unor implicaţii între problemele tipice ale calculului integral şi cele date la concursurile şi olimpiadele şcolare 8. Conştientizarea potenţialului inter-disciplinar al calculului integral	**Elemente de Analiză Matematică** **Primitive** • Funcţii primitivabile • Metode de calcul a primitivelor - schimbarea de variabilă - calculul primitivelor unor funcţii iraţionale (cu ajutorul unor algoritmi consacraţi, de ex.: Euler, Cebâşev) - calculul primitivelor funcţiilor trigonometrice şi hiperbolice **Integrale definite** • Criterii de integrabilitate • Proprietăţi generale ale funcţiilor integrabile • Metode de calcul a integralelor definite • Identităţi deduse prin integrare • Şiruri şi integrala Riemann • Teoreme de medie • Inegalităţi integrale **Aplicaţii ale calculului integral** • Calculul ariei cuprinsă între două curbe • Volumul unor corpuri geometrice **Ecuaţii diferenţiale şi integrale** • Ecuaţii diferenţiale de ordinul I şi II • Ecuaţii cu variabile separabile • Ecuaţii integrale de tip Voltera

1. Caracterizarea unor grupuri prin ordinul elementelor sale sau prin endomorfismele care se pot defini pe acestea 2. Identificarea proprietăţilor unor grupuri, inele şi corpuri particulare 3.1. Utilizarea structurilor algebrice în probleme de teoria numerelor 3.2. Rezolvarea de ecuaţii funcţionale pe structuri algebrice 4. Stabilirea unor condiţii care să asigure ca un inel să fie comutativ, Boole, sau de caracteristică finită 5. Studierea unor grupuri, inele şi corpuri particulare şi interpretarea rezultatelor 6. Determinarea unor analogii între polinoamele cu coeficienţi reali şi cele cu coeficienţi într-un corp comutativ 7. Realizarea unor implicaţii între problemele tipice cu structuri algebrice şi cele propuse la concursurile şi olimpiadele şcolare 8. Conştientizarea vastului potenţial pe care îl au structurile algebrice în stabilirea unor proprietăţi matematice globale	**Elemente de algebră** **Grupuri :** • Ordinul unui element al unui grup • Teoremele lui Lagrange şi Cauchy pentru grupuri • Condiţii suficiente de comutativitate în grupuri : - centrul unui grup - grupuri de exponent 2 • Morfisme de grupuri : - caracteristici ale lui End(G) pentru unele grupuri finite - transport de structuri • Grupuri de transformări geometrice • Teoreme de izomorfism pentru grupuri. Grupuri cât **Inele şi corpuri :** • Inele : - centrul unui inel - condiţii suficiente pentru inele Boole - inele şi corpuri de caracteristică finită • Polinoame cu coeficienţi într-un inel comutativ : - ireductibilitate şi descompunere în Z_n[X] - inelul A_f al resturilor inelului A[X] modulo un polinom f din A[X] **Aplicaţii ale structurilor algebrice în probleme de teoria numerelor** **Ecuaţii funcţionale pe structuri algebrice**

VALORI ŞI ATITUDINI

Noul curriculum şcolar pentru clasele de excelență propus la matematică are în vedere formarea la elevi a următoarelor valori şi atitudini în plus față de cele specificate prin curriculumul şcolar obligatoriu :

- Manifestarea unor opinii competente cu privire la abordarea problemelor intuitiv şi euristic-creative bazate pe explorare, inspirație şi invenție
- Dezvoltarea unei gândiri reflexive, independente, flexibilă şi abstractă specifică matematicii
- Interesul pentru modul de dezvoltare a ideilor şi rezultatelor matematice
- Curiozitatea față de noile deschideri din domeniul matematicii

SUGESTII METODOLOGICE

Prin prezentul curriculum pentru clasele de excelență se intenționează ca, pe parcursul liceului, elevii să dobândească competențe şi să-şi structureze un set de valori şi atitudini specifice pregătirii de înaltă performanță. Acestea se regăsesc în următoarele aspecte ale învățării, vizate de practica pedagogică :

- Analizarea şi elaborarea unui plan de rezolvare pentru problemele atipice şi/sau dificile din domeniile studiate
- Formarea obişnuinței de a formula probleme şi situații problemă
- Analiza unei probleme din punct de vedere al ideii centrale
- Reparcurgerea căii de rezolvare a problemei pentru a obține un rezultat mai bun, ameliorat sau optimizat printr-o reproiectare creativă
- Identificarea unor metode de lucru valabile pentru clase de probleme
- Inițeirea şi realizarea creativă a unei investigații pornind de la tematica propusă
- Formarea deprinderii de a anticipa rezultate matematice pornind de la datele existente
- Formarea obişnuinței de a face conexiuni intra şi interdisciplinare

Acest curriculum are drept obiectiv ca fiecare elev capabil de performanțe superioare să-şi poată dezvolta competențele într-un ritm individual, de a-şi transfera cunoştințele acumulate dintr-o zonă de studiu în alta. Pentru aceasta se recomandă următoarele activități :

- Alternarea prezentării conținuturilor, cu moduri variate de antrenare a gândirii
- Solicitarea de frecvente corelații intra şi interdisciplinare

- Punerea elevului în situația ca el însuşi să formuleze sarcini de lucru adecvate
- Obținerea de soluții sau interpretări variate pentru aceeaşi unitate informațională
- Prevederea de sarcini rezolvabile prin activitatea în grup
- Utilizarea unor softuri educaționale

Având în vedere specificul claselor de excelență, metodele folosite in practice instructiv-educativă vizează următoarele aspecte:

- Utilizarea strategiilor euristice, care lasă elevul să-şi asume riscul incertitudinii, al încercării şi erorii, specifice investigației ştiințifice
- Utilizarea strategiilor creative, care lasă elevul să se afirme în planul originalității, spontaneității, diversității şi care pun accentul pe capacitatea de reflecție, sinteză, evaluare critică şi creație
- O îmbinare şi o alternanță sistematică a activității bazate pe efort individual cu cele care solicită efort colectiv
- Însuşirea unor metode de informare şi de documentare independentă, care oferă deschiderea spre autoinstruire şi spre învățarea continuă

ALGEBRĂ

1. Ordinul unui element al unui grup

1. 1. Proprietăți ale ordinului unui element al unui grup

Proprietățile noțiunii de ordin al unui element al unui grup sunt de multe ori foarte utile în probleme de concurs, facilitând deseori rezolvarea acestora.

Considerăm cunoscute noțiunile şi rezultatele fundamentale ale teoriei grupurilor studiate în liceu (grup, subgrup, morfisme de grupuri).

În cele ce urmează, G este o mulțime nevidă, căreia o lege de compoziție notată multiplicativ îi conferă structură de grup.

Notăm cu ord(G) sau $|G|$ numărul elementelor grupului G, dacă G are un număr finit de elemente şi spunem că ord(G) = + ∞ dacă G are o infinitate de elemente.

Reamintim următoarele concepte şi proprietăți:

1.1.1. Definiție *Fie $(G, \cdot)$ un grup şi X o submulțime nevidă a sa.*
Notăm cu $\langle X\rangle = \bigcap\left\{H \mid X \subseteq H,\ H \text{ subgrup al lui } G\right\}$.

1.1.2. Proprietate *$(\langle X\rangle, \cdot)$ este un subgrup al lui G (numit subgrupul generat de mulțimea X).*

1.1.3. Observații

a) $\langle X\rangle$ este cel mai mic subgrup (în raport cu relația de ordine „$\subseteq$") al lui G, astfel încât $X \subseteq \langle X\rangle$.

b) $\langle X\rangle =$
$\left\{\alpha \in G \mid \exists n \in N^*, \exists x_1, x_2, ..., x_n \in G,\ \exists x_1, x_2, ..., x_n \in Z, \alpha = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot ... \cdot x_n^{k_n}\right\}$

c) Dacă $x \in G$, atunci subgrupul generat de elementul x este $\langle x\rangle = \{x^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

1.1.4. Definiție *Grupul $(G, \cdot)$ se numeşte grup ciclic dacă există $x \in G$ astfel încât $\langle x\rangle = G$. În acest caz elementul x se numeşte generator al grupului G.*

1.1.5. Observație Dacă $(G, \cdot)$ este un grup ciclic de ordinul n, a este un generator al grupului G şi $k \in \mathbf{Z}$, atunci a^k este un generator al lui G dacă şi numai dacă $(n, k) = 1$.

1.1.6. Definiție *Grupul $(G, \cdot)$ se numeşte finit generat dacă există $n \in \mathbf{N}^*$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in G$ astfel încât $\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle = G$.*
În acest caz elementele $a_1, a_2, ..., a_n$ se numesc generatori ai grupului G.

1.1.7. Observații

a) Orice grup ciclic este comutativ.
b) Orice grup finit este finit generat.

Exemple de grupuri ciclice: $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{Z}_n, +)$, $(U_n, \cdot)$, unde U_n este grupul rădăcinilor de ordinul n ale unității.

1.1.8. Definiție *Fie grupul $(G, \cdot)$ cu elementul neutru e.*
Elementul $x \in G$ este de ordin finit dacă $\exists\, m \in \mathbf{N}^*$, $x^m = e$.
În acest caz, $\min \{ m \in \mathbf{N}^* / x^m = e \} \overset{not}{=} ord(x)$ se numește ordinul elementului x.
Elementul $x \in G$ este de ordin infinit dacă x nu este de ordin finit.

1.1.9. Teoremă *Fie grupul $(G, \cdot)$ și $x \in G$.*
a) *Dacă $ord(x) = n \in \mathbf{N}^*$, atunci elementele $e, x, ..., x^{n-1}$ sunt distincte două câte două și $\forall k \in \mathbf{Z}$, $x^k = x^{k(\text{mod } n)}$.*
b) *$ord(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, $k_1 \neq k_2$, avem $x^{k_1} \neq x^{k_2}$.*

1.1.10. Consecințe

C 1. Fie grupul $(G, \cdot)$. Dacă $x \in G$ și $ord(x) = n \in \mathbf{N}^*$, atunci $ord\langle x\rangle = n$ și $\langle x\rangle = \{e, x, ..., x^{n-1}\}$.

C 2. Grupul finit G de ordinul $n \in \mathbf{N}^*$ este ciclic $\Leftrightarrow$ G are un element ordinul n.

C 3. Fie grupul $(G, \cdot)$. Dacă $x \in G$, $ord(x) = n \in \mathbf{N}^*$ și $k \in \mathbf{Z}$, $x^k = e$, atunci n / k.

<u>*Demonstrație:*</u> Conform teoremei împărțirii cu rest, $\exists!\ q, r \in \mathbf{Z}$, $0 \leq r < ord(x)$, astfel încât $k = ord(x) \cdot q + r$.
Atunci $x^k = x^{nq+r} = (x^n)^q \cdot x^r$ și cum $x^n = e$, rezultă că $x^k = x^r$ și deci $x^r = e$.
Dar $n = ord(x) = \min \{m \in \mathbf{N}^* \mid x^m = e\}$ și rezultă $r = 0$, deci $k = n \cdot q$, adică n / k.

C 4. Orice element al unui grup finit are ordinul finit.

C 5. Orice două grupuri ciclice de același ordin sunt izomorfe. Dacă G este un grup ciclic de ordinul n, atunci $(G, \cdot) \approx (\mathbf{Z}, +)$

C 6. Orice subgrup al unui grup ciclic este ciclic.

C 7. Dacă $x, y \in G$, atunci
a) $ord(x) = ord(x^{-1})$
b) $ord(x \cdot y) = ord(y \cdot x)$

Demonstrație:

a) I. Dacă $ord(x) = n \in \mathbf{N}^*$ avem $x^n = e$ și $\left(x^{-1}\right)^n = \left(x^n\right)^{-1} = e^{-1} = e$.
Fie $k = ord(x^{-1})$. Din **C3.** rezultă k / n.
Cum $e = \left(x^{-1}\right)^k = \left(x^k\right)^{-1}$, rezultă că $x^k = e$ și cum $ord(x) = n$, din **C3.** rezultă că n / k. Așadar $n = k$.
II. Dacă $ord(x) = +\infty$ să presupunem că $ord(x^{-1}) = k \in \mathbf{N}^*$. Atunci din cazul anterior rezultă că $ord(x) = ord(x^{-1})^{-1} = k$, fals. Așadar $ord(x^{-1}) = +\infty$.
b) I. Dacă $ord(x \cdot y) = n \in \mathbf{N}^*$ avem $(x \cdot y)^k = e \Leftrightarrow x \cdot (y \cdot x)^{k-1} \cdot y = e \Leftrightarrow (y \cdot x)^k \cdot y = y \Leftrightarrow (y \cdot x)^k = e$, așadar $ord(y \cdot x) = k' \in \mathbf{N}^*$ și k' / k.
Dar $(y \cdot x)^{k'} = e \Leftrightarrow y \cdot (x \cdot y)^{k'-1} \cdot x = e \Leftrightarrow (x \cdot y)^{k'} = e$ și cum $ord(x \cdot y) = k$ rezultă și k / k' și deci $k = k'$.
II. Dacă $ord(x \cdot y) = +\infty$, presupunând că $ord(y \cdot x) = k \in \mathbf{N}^*$ rezultă ca mai înainte că $ord(x \cdot y) = k$, fals. Așadar $ord(y \cdot x) = +\infty$.

C 8. Dacă $f : G \to G'$ este un morfism injectiv de grupuri multiplicative și $a \in G$,
atunci $ord(a) = ord(f(a))$.

Demonstrație:

I. Dacă $ord(a) = k \in \mathbf{N}^*$ avem $e' = f(a^k) = (f(a))^k$ și deci și ordinul elementului $f(a) \in G'$ este finit. Fie $t = ord(f(a)$. Rezultă că t / k.
Dar $e' = f(a^t) = (f(a))^t$ și pentru că f este o funcție injectivă rezultă că $a^t = e$ și cum $ord(a) = k$ avem și k / t, deci $k = t$.
II. Dacă $ord(a) = +\infty$, presupunem că $ord(f(a)) = k \in \mathbf{N}^*$.
Atunci $(f(a))^k = e = f(a^k)$ și din injectivitatea lui f rezultă că $a^k = e$, ceea ce este fals. Așadar $ord\ (f(a)) = +\infty$.

Să observăm că afirmația anterioară este adevărată și în cazul izomorfismelor de grupuri, ceea ce întărește imaginea intuitivă că elementele asociate printr-un izomorfism „au aceleași proprietăți”.

C 9. Fie grupul $(G, \cdot)$ şi $a, b \in G$ cu $ord(a) = m \in \mathbf{N}^*$, $ord(b) = n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $a \cdot b = b \cdot a$. Notăm cu $d = (m, n)$, $p = [m, n]$. Atunci:

a) $ord(a \cdot b) / p$

b) $\frac{p}{d} / ord(a \cdot b)$

<u>*Demonstraţie:*</u> Se ştie că dacă $a \cdot b = b \cdot a$, atunci $\forall\ k \in \mathbf{Z}$, $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$

a) Avem $m = d \cdot m_1$ şi $n = d \cdot n_1$, cu $m_1, n_1 \in \mathbf{N}$, $(m_1, n_1) = 1$, iar $p = d \cdot m_1 \cdot n_1$.

$(a \cdot b)^p = (a \cdot b)^{d \cdot m_1 \cdot n_1} = a^{m \cdot n_1} \cdot b^{n \cdot m_1} = (a^m)^{n_1} \cdot (b^n)^{m_1} = e \overset{1.1.10, C3}{\Rightarrow} k / p$,

unde $ord(a \cdot b) = k$ (este evident că $ord(a \cdot b) \in \mathbf{N}^*$).

b) $\frac{p}{d} = m_1 \cdot n_1$. Demonstrăm că $m_1 \cdot n_1 / k$.

$(a \cdot b)^k = e \Rightarrow a^k = b^{-k} \Rightarrow a^{k \cdot n} = b^{-k \cdot n} = e \overset{1.1.10, C3}{\Rightarrow} m / k \cdot n \Leftrightarrow d \cdot m_1 / k \cdot d \cdot n_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} m_1 / k \cdot n_1 \\ (m_1, n_1) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_1 / k.$

Analog rezultă că n_1 / k şi cum $(m_1, n_1) = 1$ obţinem $m_1 \cdot n_1 / k$

Observaţii:

a) $ord(a \cdot b) / m \cdot n$

b) Dacă $a, b \in G$, $a \cdot b = b \cdot a$, $ord(a) = m$, $ord(b) = n$ şi $(m, n) = 1$, atunci $ord(a \cdot b) = [m, n] = m \cdot n$.

c) Există situaţii când $ord(a, b) = \frac{[m, n]}{(m, n)} = m_1 \cdot n_1$.

De exemplu, în grupul $(\mathbf{Z}_{12}, +)$, $ord(\hat{6}) = 2$, $ord(\hat{2}) = 6$ şi $ord(\hat{2} + \hat{6}) = 3$.

d) Există situaţii când $ord(a \cdot b) = [m, n]$, chiar dacă $(m, n) \neq 1$.

De exemplu, în grupul $(\mathbf{Z}_{24}, +)$, $ord(\hat{6}) = 4$, $ord\left(\widehat{12}\right) = 6$ şi $ord\left(\widehat{12} + \hat{6}\right) =$

4.

C 10. Fie grupul $(G, \cdot)$ şi $x \in G$, $ord(x) = n \in \mathbf{N}^*$. Atunci:

a) $\forall\ k \in \mathbf{Z}$, $ord(x^k) / n$

b) $\forall\ k\in\mathbf{Z}$, $\operatorname{ord}(x^k) = \dfrac{n}{(k, n)}$.

<u>*Demonstrație:*</u> **a)** $\left(x^k\right)^n = e \overset{1.1.10, C3}{\Rightarrow} \operatorname{ord}(x^k) / n$.

b) Fie $d = (k, n)$. Atunci există $n_1, k_1 \in \mathbf{Z}$ astfel încât $n = d\cdot n_1$, $k = d\cdot k_1$, $(n_1, k_1) = 1$.

Cum $\left(x^k\right)^{n_1} = x^{n\cdot k_1} = e \overset{1.1.10, C3}{\Rightarrow} \operatorname{ord}(x^k) / n_1$ (1)

Fie $s = \operatorname{ord}(x^k)$. Avem $x^{k\cdot s} = e$ şi cum $\operatorname{ord}(x) = n \overset{1.1.10, C3}{\Rightarrow} n / k\cdot s \Rightarrow d\cdot n_1 / d\cdot k_1\cdot s \Rightarrow n_1 / k_1\cdot s$ şi deoarece $(n_1, k_1) = 1$ rezultă că n_1 / s.

Ținând cont de (1) obținem $n_1 = s$, adică $\operatorname{ord}(x^k) = n_1 = \dfrac{n}{d} = \dfrac{n}{(k, n)}$.

C 11. Fie $(G, \cdot)$ un grup ciclic de ordinul n, $G = \langle a\rangle$ şi $k\in\mathbf{Z}$.
Atunci: a^k este generator al grupului $\Leftrightarrow (k, n) = 1$.

<u>*Demonstrație:*</u> Reamintim următoarea

Lemă *Fie $k, n\in\mathbf{Z}$. Atunci: $(k, n) = 1 \Leftrightarrow \exists\, t, s\in\mathbf{Z}$, $k\cdot t + n\cdot s = 1$*

„$\Rightarrow$” Cum $\langle a^k\rangle = G$, există $t\in\mathbf{Z}$ astfel încât $\left(a^k\right)^t = a$ şi deci $a^{k\cdot t-1} = e \overset{1.1.10, C3}{\Rightarrow} \operatorname{ord}(a) = n / (k\cdot t - 1) \Rightarrow \exists\, s\in\mathbf{Z}$, $k\cdot t - 1 = s\cdot n \Leftrightarrow n\cdot(-s) + k\cdot t = 1 \overset{\text{Lemă}}{\Leftrightarrow} (k, n) = 1$.

„$\Leftarrow$” $(k, n) = 1 \overset{\text{Lemă}}{\Leftrightarrow} \exists\, t, s\in\mathbf{Z}$, $k\cdot t + n\cdot s = 1$.

Atunci $a = a^{k\cdot t + n\cdot s} = \left(a^k\right)^t\cdot\left(a^n\right)^s = \left(a^k\right)^t$ şi deci $a\in\langle a^k\rangle$ şi cum grupul G este generat de a, rezultă că $G \subseteq \langle a^k\rangle$. Dar $\langle a^k\rangle \subseteq G$ şi deci $G = \langle a^k\rangle$.

Să observăm că există $\varphi(n)$ generatori ai lui G.

Consecință Dacă $(G, \cdot)$ este un grup ciclic de ordinul p, cu $p\in\mathbf{N}$ număr prim, atunci: **a)** orice element al lui G este generator al grupului
b) G nu are subgrupuri proprii.

Bibliografie

1. Gh. Andrei, C-tin Caragea, V. Ene – *Algebră – Culegere de probleme pentru examene de admitere şi olimpiade şcolare*, Ed. Scorpion 7, Bucureşti 1995

2. M. Burtea, G. Burtea – *Matematică – clasa a XII-a – Elemente de analiză matematică. Algebră superioară*, Ed. Carminis 2001

3. I. Purdea, Gh Pic – *Tratat de algebră modernă*, vol I, Ed Academiei, Bucureşti, 1977

4. D. Andrica, N. Bişboacă, I. Şerdean, M. Andronache, M. Piticari, D. Zaharia - *Matematică – Manual pentru clasa a XII-a*, M1, Ed. Plus, 2002

5. Colecția „Gazeta Matematică"

Probleme rezolvate

R1.2.1. *Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $g \in G$, cu $ord(g) = m \cdot n$, unde $m, n \in \mathbf{N}^*$, $(m, n) = 1$*
Să se demonstreze că există şi sunt unice $a, b \in G$ astfel încât $g = a \cdot b = b \cdot a$ şi $ord(a) = m$, $ord(b) = n$.

<u>Soluţie:</u> <u>Existenţa</u> Cum $(m, n) = 1$, există $k, t \in \mathbf{Z}$ astfel încât $m \cdot k + n \cdot t = 1$ (1)
Fie $a = g^{n \cdot t}$ şi $b = g^{m \cdot k}$. Observăm că $a^m = \left(g^{n \cdot t}\right)^m = \left(g^{m \cdot n}\right)^t = e$ şi analog $b^n = e$.
Cum $a^m = e$, din 1.1.10, C 3. rezultă că $ord(a) = p \in \mathbf{N}^*$ şi p / m (2)
Presupunem că $p \neq m$. Atunci $a^p = \left(g^{n \cdot t}\right)^p = g^{n \cdot t \cdot p}$ şi cum $ord(g) = m \cdot n$, din 1.1.10, C 3, rezultă că $m \cdot n / n \cdot t \cdot p$ şi deci $m / t \cdot p$. Din (1) rezultă că $(m, t) = 1$ şi obţinem $m / p \overset{(2)}{\Rightarrow} p = m \Leftrightarrow ord(a) = m$. Analog se demonstrează că $ord(b) = n$.
<u>Unicitatea</u> Fie $a, b \in G$ astfel încât $g = a_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot a_1$ şi $ord(a_1) = m$, $ord(b_1) = n$.
Atunci $g^n = (a_1 \cdot b_1)^n = a_1^n \cdot b_1^n = a_1^n$. Fie k, t din relaţia (1).
Avem $n \cdot t = 1 - m \cdot k$ şi $a_1^{n \cdot t} = g^{n \cdot t}$, deci $a_1 \cdot \left(a_1^m\right)^{-k} = g^{n \cdot t}$ şi cum $a_1^m = e$, rezultă $a_1 = g^{n \cdot t} = a$ (a este cel din demonstraţia existenţei)
Analog rezultă că $b_1 = g^{m \cdot k} = b$.

R1.2.2. *Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $x \in G$, un element de ordin finit.*
Dacă $m, n \in \mathbf{Z}$ astfel încât $(m, n) = 1$, $ord(x^m) = n$ şi $ord(x^n) = m$, să se demonstreze că $ord(x) = m \cdot n$.

<u>Soluţie:</u> Fie $d = ord(x)$. Din 1.1.10, C 10, cum x^m şi x^n comută, avem că
$ord(x^{m+n}) / ord(x)$, deci $m \cdot n / d$ (1)
Din $ord(x^m) = n$ rezultă că $x^{m \cdot n} = e$ şi deci (1.1.10, C 3.) $d / m \cdot n$.
Folosind şi relaţia (1) rezultă că $d = m \cdot n$.

R1.2.3. *Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1) *Orice submulţime H a sa care este parte stabilă în raport cu operaţia grupului, este subgrup al lui G.*

2) Toate elementele grupului G sunt de ordin finit.

Marian Andronache

<u>Soluție:</u> „1 $\Rightarrow$ 2” Fie $x \in G$. Cum $(G, \cdot)$ este grup, rezultă că $\forall\, t \in \mathbf{N}^*$, $x^t \in G$ şi deci mulţimea $H = \{x^t \mid t \in \mathbf{N}^*\}$ este parte stabilă a lui G în raport cu operaţia grupului. Aşadar, conform ipotezei, H este subgrup al lui G şi deci H conţine elementul neutru e al lui G. În consecinţă, există $k \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $x^k = e$ şi deci afirmaţia (2) este adevărată.

„2 $\Rightarrow$ 1” Fie $H \subset G$, H parte stabilă a lui G în raport cu operaţia lui G.
Fie $x \in H$. Din ipoteză rezultă că $\exists\, k \in \mathbf{N}^*$, $x^k = e$.
Cum H este parte stabilă, avem $x^h \in H$, $\forall\, h \in \mathbf{N}^*$ şi deci $e \in H$.
$x^k = e \Rightarrow x^{-1} = x^{k-1}$ şi cum H este parte stabilă avem că şi x^{k-1} (adică x^{-1}) se află în H. Aşadar H este subgrup al lui G.

Observaţii

1. Există grupuri infinite cu toate elementele de ordin finit.
De exemplu $(\mathbf{Z}_p[X], +)$, dacă p este un număr prim.

2. Dacă $(G, \cdot)$ este un grup finit, atunci $\forall\, H \subset G$, avem:
H e parte stabilă a lui G în raport cu operaţia lui G $\Leftrightarrow$ H e subgrup al lui G.

3. Dacă impunem condiţia de finitudine doar asupra lui H obţinem rezultatul cunoscut:
Pentru grupul $(G, \cdot)$ şi mulţimea finită $H \subset G$,
H e parte stabilă a lui G în raport cu operaţia lui G $\Leftrightarrow$ H e subgrup al lui G.

R1.2.4. *Să se demonstreze că orice subgrup al unui grup ciclic este ciclic.*

<u>Soluție:</u> Fie $(G, \cdot)$ un grup ciclic.

<u>I. Dacă $\mathrm{ord}(G) = +\infty$</u> şi $G = \langle a \rangle$, atunci grupul G este izomorf cu $(\mathbf{Z}, +)$ (un izomorfism este $f : G \to \mathbf{Z}$, $f(a^k) = k$, $\forall\, k \in \mathbf{Z}$) şi cum subgrupurile lui $\mathbf{Z}$ sunt de forma $n\mathbf{Z} = \langle n \rangle$, cu $n \in \mathbf{Z}$, rezultă că şi subgrupurile lui G sunt ciclice, pe baza următorului rezultat cunoscut:

Lemă *dacă grupurile $(G, \cdot)$ şi $(G', \cdot)$ sunt izomorfe şi $f : G \to G'$ este un izomorfism, atunci: H este subgrup al lui G $\Leftrightarrow$ f(H) este subgrup al lui G′.*

II. Dacă $ord(G) = n \in \mathbf{N^*}$ şi $G = \langle a \rangle$, subgrupurile improprii ale lui G fiind evident ciclice, fie H un subgrup propriu al lui G, $H = \{a^{k_1}, a^{k_2}, ..., a^{k_t}\}$, cu
$k_1 < k_2 < ... < k_t$ numere naturale nenule.
Demonstrăm, prin inducţie după s, că $H = \langle a^{k_1} \rangle$, deci că $\forall\ s \in \mathbf{N^*}$, $a^{k_s} \in \langle a^{k_1} \rangle$.
Pentru $s = 2$, a^{k_1}, $a^{k_2} \in H$. Cum H e subgrup al lui G obţinem $\left(a^{k_1}\right)^{-1} \cdot a^{k_2} \in H$ şi deci $a^{k_2 - k_1} \in H$ şi din $k_2 - k_1 < k_2$ rezultă că avem $k_2 = 2 \cdot k_1$ şi $a^{k_2} \in \langle a^{k_1} \rangle$.
Presupunem că avem $k_{s-1} = (s-1) \cdot k_1$ şi demonstrăm că şi $k_s = k_1 \cdot s$.

Avem: $k_s - k_1 > k_s - k_2 > ... > k_s - k_{s-1}$ şi $a^{k_s - k_1}$, $a^{k_s - k_2}$, ..., $a^{k_s - k_{s-1}} \in H$ iar
$k_s - k_1$, $k_s - k_2$, ..., $k_s - k_{s-1} \in \{k_1, k_2, ..., k_{s-1}\}$ şi deci $k_s - k_{s-1} = k_1$ şi folosind ipoteza de inducţie obţinem $k_s = s \cdot k_1$ şi $a^{k_s} = \left(a^{k_1}\right)^s \in \langle a^{k_1} \rangle$, aşadar H este ciclic, generat de a^{k_1}.

2. Teoremele lui Lagrange şi Cauchy pentru grupuri finite

2. 1. Teorema lui Lagrange şi teorema lui Cauchy

2.1.1. Definiție *Fie H un subgrup al grupului $(G,\cdot)$. Se definesc relațiile de echivalență ρ_H, ρ'_H (la stânga, respectiv la dreapta) pe G, după cum urmează:*
$x\,\rho_H\,y \Leftrightarrow x^{-1}y\in H$ şi $x\,\rho'_H\,y \Leftrightarrow yx^{-1}\in H$.
xH si Hx sunt clasele de echivalență la stânga, respectiv la dreapta ale lui x în raport cu H ($y\in xH \Leftrightarrow x\,\rho_H\,y$ şi $y\in Hx \Leftrightarrow x\,\rho'_H\,y$)

Mulțimile $G/\rho_H = \{H, xH, yH, ...\}$ şi $G/\rho'_H = \{H, Hx, Hy, ...\}$ sunt mulțimile claselor de echivalență la stânga, respectiv la dreapta în raport cu H.

2.1.2. Observații

1) Funcția $f: G/\rho_H \to G/\rho'_H$ dată prin relația $f(xH) = Hx^{-1}$ este bijectivă, $|G/\rho_H| = |G/\rho'_H| = |G:H|$ şi se numeşte indicele subgrupului H în grupul G.

2) $xH \cap yH \neq 0 \Leftrightarrow xH = yH$

Într-adevăr, dacă $a\in xH \cap yH$, atunci $\exists\, h_1, h_2\in H$, astfel încât $a = xh_1 = yh_2$.
Atunci $x = yh_2h_1^{-1}$ şi cum $h_2h_1^{-1}\in H$, rezultă că $x\in yH$, aşadar $xH \subseteq yH$.
Analog se demonstrează cealaltă incluziune.

2.1.3. Definiție *Fie N un subgrup al grupului $(G,\cdot)$. N se numeşte subgrup normal dacă şi numai dacă pentru orice $x\in G$, $xN = Nx$.*

2.1.4. Observații

1) Dacă N este subgrup normal al lui G, $G/\rho_N = G/\rho'_N = G/N = \{N, xN, yN, ...\}$
Se demonstrează uşor că G / N este grup (numit grupul factor al lui G în raport cu N) împreună cu operația „·“ definită astfel: $xN\cdot yN = (xy)N$.

2) $|G/N| = |G:N|$

3) Orice subgrup de indice 2 este normal.

Demonstrație: Fie N un subgrup de indice 2. Atunci $G = N \cup xN$ (cu clasele N şi xN disjuncte) şi de asemenea $G = N \cup Nx$ (cu clasele N şi Nx disjuncte). Rezultă deci că $xN = Nx$ şi N este subgrup normal.

2.1.5. Teorema lui Lagrange

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit şi H un subgrup al lui G. Atunci:

a) *ord(H) / ord(G)*

b) *ord(G) = ord(H)·ord(G / H)*

Demonstrație:

Fie ρ_H relația de echivalență la stânga din definiția 2.1. Conform observației 2 ce îi urmează, mulțimea claselor de echivalență la stânga în raport cu H este o partiție a mulțimii G (adică $\bigcup_{x\in G} xH = G$ şi clasele sunt disjuncte două câte două). Mai mult, funcția $f : H \to xH$ dată prin $f(h) = xh$ este bijectivă, deci $\forall$ x, y$\in$G, $|xH| = |yH| = |H|$. Aşadar, ord(G) = ord(H)$\cdot$ord(G / ρ_H), unde G / ρ_H este mulțimea claselor de echivalență modulo ρ_H, numită şi mulțime cât a lui G în raport cu relația de echivalență ρ_H.

2.1.6. Consecințe: Fie $(G, \cdot)$ un grup finit. Atunci:

1) Pentru orice $x\in G$, ord(x) / ord(G)

2) Pentru orice $x\in G$, $x^{ord(G)} = e$, unde e este elementul neutru al grupului G.

3) Orice grup de ordin prim este ciclic (deci izomorf cu $(\mathbf{Z_p}, +)$)

2.1.7. Teorema lui Cauchy

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit şi p un număr prim, p / ord(G). Atunci numărul soluțiilor ecuației $x^p = 1$ este un multiplu nenul al lui p.

Demonstrație:

Fie ord(G) = n şi $S = \{(a_1, a_2, ..., a_p) \mid a_i\in G, \forall i\in\{1, 2, ..., p\}$ şi $a_1\cdot a_2\cdots a_p = 1\}$

Pentru orice alegere a elementelor $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$, $a_p=(a_1\cdot a_2\cdots a_{p-1})^{-1}$, deci a_p este unic determinat. Aşadar $ord(S) = n^{p-1}$ (1)

Definim relația de echivalență „~" pe S :

$x\sim y \Leftrightarrow x$ este o permutare circulară a lui y.

Dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_p$, clasa de echivalență a lui $x = (a_1, a_2, ..., a_p)$ conține un singur element şi exact p elemente în caz contrar.

Într-adevăr, fie $x = (a_1, a_2, ..., a_p)$ şi i, j, primul respectiv ultimul rang pentru care $a_i = a_j$ şi $a_i = a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{ik} = a_j$ pentru $i < i_1 < \cdots < i_k < j$ şi $k > 0$, iar pentru $k = 0$, $i_1 = j$. Ca să obținem prin permutări circulare aceleaşi elemente pe locurile $i, i_1, \cdots, i_k, j$ (şi eventual să nu rezulte permutări distincte ale lui x), ar trebui ca „distanțele" dintre elemente să fie aceleaşi, deci $p - j + i = j - i_k = \cdots = i_2 - i_1 = s$.

Aşadar $j - i_k = s, \cdots, i_2 - i_1 = s, i_1 - i = s$ şi adunând relațiile membru cu membru obținem $j - i = (k+1)\cdot s$ şi cum $p = s + j - i$, avem $p = (k+2)\cdot s$. Cum p este număr prim, rezultă s = 1 şi deci $j = p - 1 + i$. Cum însă $j \le p$, obținem că $p - 1 + i \le p$, deci că $i \le 1$. Aşadar $i = 1$ şi $j = p$ şi suntem în prima situație, cu toate elementele lui x identice. Deci dacă cel puțin 2 elemente ale permutării diferă, atunci există exact p permutări circulare ce se pot obține din permutarea respectivă (a p elemente).

Fie r numărul claselor cu un element (r este deci numărul soluțiilor ecuației $x^p = 1$) şi t numărul claselor cu câte p elemente.

Din relația (1), rezultă că $n^{p-1} = r + p\cdot t$ şi cum p / n, rezultă că p / r.

Observăm că $r \neq 0$, pentru că $(1, 1, \cdots, 1)\in S$

2.1.8. Consecințe

1) Dacă $(G, \cdot)$ e un grup finit şi p e un număr prim, $p / ord(G)$, atunci există

$x\in G$ astfel încât $ord(x) = p$.

2) Numărul subgrupurilor de ordin p ale lui G, (în condițiile consecintei 1) este congruent cu 1 (mod p).

Demonstrație: Din teorema lui Cauchy, există elemente de ordinul p ale grupului G. Notăm cu $k\in \mathbf{N}^*$ numărul subgrupurilor de ordinul p ale lui G. Numărul p fiind prim, acestea sunt ciclice.

$H_i = \langle x_i\rangle$, $\forall\, i\in\{1, 2, ..., k\}$ şi $H_i \cap H_j = \{e\}$, $\forall\, i, j\in\{1, 2, ..., k\}$, $i \neq j$.

Fie H mulțimea soluțiilor ecuației $x^p = 1$. Rezultă $H = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_k$ şi deci $ord(H) = ord(H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_k) = k(p - 1) + 1$.

Din teorema lui Cauchy, cum numărul soluțiilor ecuației $x^p = 1$ este un multiplu nenul al lui p, rezultă $k(p - 1) + 1 \equiv 0 \pmod p$, deci $k \equiv 1 \pmod p$.

2.1.9. Propozitie *Fie $(G,\cdot)$ un grup finit astfel încât pentru orice $x\in G$, $x^2 = e$*

Atunci: ***a)*** *$(G,\cdot)$ este grup comutativ*

b) *există $k\in N$, astfel încât $ord(G) = 2^k$*

Demonstratie Prima parte a propoziției este un exercițiu foarte cunoscut, prezent în manuale, care este adevărat şi pentru cazul în care G nu este grup finit.

Vom prezenta trei demonstrații pentru afirmația de la b).

Soluția I: Vom demonstra concluzia prin inducție după $n = ord(G)$:

Pentru $n = 1$, evident, $ord(G) = 2^0$. Fie $m\in\mathbf{N}^*$, $m>1$

Presupunem că afirmația e adevărată pentru grupurile de ordin mai mic decât m cu proprietatea din enunț. Fie $(G, \cdot)$ un grup de ordin m şi fie $x\in G$. Cum G este grup comutativ (conform cu punctul a)), subgrupul $N = \{e, x\}$ este un subgrup normal al lui G, adică pentru orice $y\in G$, $yN = Ny$.

Cum $(xN)xN = x^2N = eN = N$, pentru orice $x\in G$, rezultă că $(G / N, \cdot)$ este un grup factor care are proprietatea din enunț.

Din teorema lui Lagrange avem că $\mathrm{ord}(G / N) = \dfrac{\mathrm{ord}(G)}{\mathrm{ord}(N)} < \mathrm{ord}(G) = m$ şi deci din ipoteza de inducţie rezultă că există $k \in N^*$ astfel încât $\mathrm{ord}(G / N) = 2^k$. Atunci $\mathrm{ord}(G) = 2 \cdot \mathrm{ord}(G / N) = 2^{k+1}$ şi conform principiului inducţiei matematice, afirmaţia b) este adevărată pentru orice grup finit cu proprietatea din enunţ.
Soluţia a II-a: Vom organiza grupul G ca spaţiu vectorial şi pentru simplitatea scrierii, vom considera de această dată operaţia grupului în notaţie aditivă.
Pe $(G, +)$, care are toate elementele de ordin ≤ 2, se poate introduce o structură de Z_2 – spaţiu vectorial. Cele 4 axiome ale spaţiului vectorial se verifică prin calcul direct, mulţimea scalarilor fiind finită. Se defineşte $\hat{1} \cdot x = x$ şi $\hat{0} \cdot x = 0$.
Cum G este un spaţiu vectorial finit, el este de dimensiune finită.
Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază a acestuia.
Atunci, $\forall\, x \in G$, $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{Z}_2$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i$.
Aşadar, numărul elementelor din G coincide cu numărul n-uplurilor $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ ce se pot forma cu elemente din $\mathbf{Z}_2$, deci cu numărul funcţiilor ce se pot defini de la o mulţime cu n elemente la $\mathbf{Z}_2$, care este 2^n.
Soluţia a III-a: Presupunem că ordinul grupului G nu este o putere a lui 2. Atunci $\exists\, p \in \mathbf{N}$, p număr prim, $p \geq 3$, astfel încât $p \,/\, \mathrm{ord}(G)$. Atunci, din consecinţa 1 a teoremei lui Cauchy rezultă că există $a \in G$, $\mathrm{ord}(a) = p$. Avem $a^p = e$ şi cum $a^2 = e$ obţinem $a^{(p,2)} = a^1 = e$, fals. Aşadar $\exists\, n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{ord}(G) = 2^n$.

<u>2.1.10. Generalizare</u> *Fie $(G, \cdot)$ un grup finit şi $p \in \mathbf{N}$ un număr prim astfel încât $\forall x \in G$, $x^p = e$. Atunci ordinul lui G este o putere a lui p.*

Demonstraţia acestui rezultat se face cel mai uşor prin reducere la absurd şi folosind teorema lui Cauchy, ca în cazul precedent.

Bibliografie

1. Gh. Andrei, C-tin Caragea, V. Ene – Algebră – Culegere de probleme pentru examene de admitere şi olimpiade şcolare, Ed. Scorpion 7, Bucureşti 1995
2. M. Burtea, G. Burtea – Matematică – clasa a XII-a – Elemente de analiză matematică. Algebră superioară, Ed. Carminis 2001
3. D. Popescu, C-tin Vraciu – Elemente de teoria grupurilor finite, Ed Ştiinţifică şi Enciclopedică Bucureşti 1986 – pag 77 - 78
4. Colecţia G. M.

Probleme rezolvate

R2.2.1. *Fie $(G, \cdot)$ un grup finit. Dacă m şi n sunt divizori ai ordinului grupului, atunci ecuaţiile $x^m = e$ şi $x^n = e$ au o singură soluţie comună dacă şi numai dacă $(m, n) = 1$.*

Mihai Piticari

<u>Soluţie:</u> Observăm că $x = e$ este soluţie comună a ecuaţiilor.
„$\Leftarrow$” $(m, n) = 1 \Rightarrow \exists\, h, k \in \mathbf{Z},\ m \cdot h + n \cdot k = 1$.
Fie $a \in G$ o soluţie comună a celor două ecuaţii. Atunci $a^{m \cdot h} = e$, $a^{n \cdot k} = e$ şi obţinem $a = a^{m \cdot h + n \cdot k} = e$
„$\Rightarrow$” Fie $(m, n) = d$. Dacă $d \geq 2$, există $p \in \mathbf{N}$, p prim, astfel încât p / d.
Din consecinţa 1 a teoremei lui Cauchy rezultă că există $b \in G \setminus \{e\}$, $\text{ord}(b) = p$ $\Rightarrow$ $b^p = e$ şi cum $b^d = e$ $\Rightarrow$ ecuaţia $x^d = e$ nu are soluţie unică, fals. Rezultă $d=1$.

R2.2.2. *Fie $(G, \cdot)$ un grup finit. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
a) *G este ciclic*
b) *Pentru orice $d \in \mathbf{N}^*$, există cel mult un subgrup de ordinul d în G.*

<u>Soluţie:</u> Reamintim că pentru $n \in \mathbf{N}$, indicatorul $\varphi(n)$ al lui Euler ($\varphi(n)$ este numărul tuturor numerelor naturale mai mici decât n şi prime cu n) verifică formula lui Gauss: $\sum_{d / n} \varphi(d) = n$ (sumarea făcându-se după toţi divizorii lui n, inclusiv 1 şi n).
„$a \Rightarrow b$” Dacă $\text{ord}(G) = n$ şi d / n, $d \in \mathbf{N}^*$, atunci unicul subgrup de ordinul d al lui G este $H = \{x \in G \mid x^d = 1\}$

Într-adevăr, $\text{ord}(H) = d$, pentru că grupul ciclic G are un element de ordinul d $\left(\text{dacă } G = \langle y \rangle \Rightarrow \text{ord}\left(y^{\frac{n}{d}}\right) = d\right)$, care se află în H şi care de fapt îl generează pe H. Presupunând că există $H' \neq H$, H' subgrup de ordinul d al lui G, avem că $\forall\, x \in H'$, $x^{\text{ord}(H')} = x^d = 1$ $\Rightarrow$ $x \in H$ $\Rightarrow$ $H' \subset H$ şi cum au acelaşi număr de elemente, rezultă că $H' = H$.
„$b \Leftarrow a$” Dacă afirmaţia b) este adevărată, pentru $d \in \mathbf{N}^*$, fie

$M_d = \{a \in G \mid ord(a) = d\}$. Mulțimile M_d sunt disjuncte două câte două şi reuniunea lor este mulțimea elementelor lui G. În plus, dacă $x \in M_d \Rightarrow ord(x) / d$.
Dar $ord(x) / ord(G) = n$. În concluzie, $M_d \neq \varnothing \Leftrightarrow d / n \Leftrightarrow \exists$ un subgrup ciclic H_d, de ordin d al lui G, Din ipoteză, H_d este unicul subgrup de ordin d al lui G şi deci $M_d = \{a \in G \mid \langle a \rangle = H_d\}$, iar $|M_d| = \varphi(d)$.

Avem $n = |G| = \sum_{d / n} |M_d| = \sum_{d/n} \varphi(d)$.

Relația anterioară este adevărată (Gauss) şi cum unul dintre divizorii lui n din formula anterioară este chiar n, există un subgrup ciclic H_n de ordinul n, al lui G. Atunci $G = H_n$ şi G este ciclic.

R2.2.3. *Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $4n + 2$ elemente ($n \in \mathbf{N}$). Să se determine numărul elementelor $x \in G$ astfel încât $x^{2n+1} = e$.*

Marian Andronache

<u>*Soluție:*</u> Fie $G = \{e, a_1, ..., a_{n-1}\}$ şi S(G) mulțimea permutărilor lui G (a funcțiilor bijective de la G la G).
Pentru $a \in G$, funcția $\sigma_a : G \to G$, $\sigma_a(x) = a \cdot x$, $\forall\, x \in G$ este în S(G), iar $f : G \to S(G)$, $f(a) = \sigma_a$, $\forall\, a \in G$ este un morfism injectiv de grupuri.
Fie $H = f(G)$. Atunci $G \approx f(G) = H = \{\sigma_e, \sigma_{a_1}, ..., \sigma_{a_{n-1}}\}$ şi H este un subgrup al lui S(G) (Acest rezultat este teorema lui Cayley). $2 / ord(G) \Rightarrow \exists\, a \in G$, $ord(a) = 2$
Atunci, $\sigma_a^2(x) = a(ax) = x$, $\forall\, x \in G \Rightarrow \sigma_a^2 = \bar{e}$ (permutarea identică)
$a \neq e \Rightarrow \sigma_a$ nu are puncte fixe $\Rightarrow$ în σ_a apar $2n + 1$ perechi de tipul $\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma_a$ este produsul a $2n + 1$ transpoziții disjuncte $\Rightarrow \varepsilon(\sigma_a) = -1$ (1)

În consecință, H este un grup de permutări care are o permutare impară şi de aici, numărul permutărilor pare din H este egal cu numărul permutărilor impare din H (= 2n + 1). Într-adevăr, dacă $e, \sigma_1, ..., \sigma_{k-1}$ sunt toate permutările pare din H şi $\sigma_k, ..., \sigma_{n-1}$ sunt toate permutările impare din H, avem $\sigma_k^2, ..., \sigma_k \cdot \sigma_{n-1}$ permutări pare $\Rightarrow n - k \leq k$ şi cum $\sigma_k \cdot e, \sigma_k \cdot \sigma_1, ..., \sigma_k \cdot \sigma_{k-1}$ sunt permutări impare $\Rightarrow k \leq n - k$ şi deci $k = n - k$.

Fie $A = \{ x \in G \mid x^{2n+1} = e \}$ şi $x \in A$.

$\bar{e} = f(e) = (f(x))^{2n+1} = (\sigma_x)^{2n+1} \Rightarrow \varepsilon((\sigma_x)^{2n+1}) = 1 \Rightarrow \varepsilon(\sigma_x) = 1 \Rightarrow \sigma_x$ permutare pară $\Rightarrow |A| \le 2n + 1$ (2)

Fie $B = \{ x \in G \mid x^{2n+1} \ne e \}$ şi $y \in B \Rightarrow a \overset{not}{=} y^{2n+1} \ne e$ şi $a^2 = e \overset{(1)}{\Rightarrow} \varepsilon(\sigma_a) = -1$

$\sigma_a = f(a) = (f(y))^{2n+1} = (\sigma_y)^{2n+1}$ şi cum $\varepsilon(\sigma_a) = -1$ obținem că $\varepsilon(\sigma) = -1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |B| \le 2n + 1$ (3) Din (2) şi (3) deducem că $|A| = |B| = 2n + 1$.

R2.2.4. *Demonstrați că un grup cu 4n+2 elemente admite cel mult un subgrup cu 2n+1 elemente.*

Eugen Păltănea, Sabin Tăbârcă

<u>*Soluție:*</u> Dacă H e un subgrup al lui G $\Rightarrow$ ord(H) < 4n + 2 $\Rightarrow$ ord(H) $\le$ 2n + 1.

Pentru $n = 0$ enunțul este adevărat.

Pentru $n \ge 1$, dacă $H = \{e, x_1, ..., x_{2n}\}$ este nu subgrup al lui G cu 2n + 1 elemente şi $x \in G$, ord(x) = 2 (există, din consecința teoremei lui Cauchy), atunci $x \notin H \Rightarrow x \cdot x_i \notin H, \ \forall \ i = \overline{1, 2n} \Rightarrow G = H \cup \{x \cdot x_i \mid i = \overline{1, 2n}\}$.

Demonstrăm că $\forall$ y, z$\in$G \ H, $y \cdot z \in H$ (1)

Fie y, z$\in$G \ H $\Rightarrow \exists\ x_i, x_j \in H$, $y = x \cdot x_i$, $z = x \cdot x_j$. $x_i \cdot x \notin H \Rightarrow \exists\ x_k \in H$, $x_i \cdot x = x \cdot x_k$

Atunci $y \cdot z = x \cdot x_i \cdot x \cdot x_j = x \cdot (x_i \cdot x) \cdot x_j = x \cdot x \cdot x_k \cdot x_j = x_k \cdot x_j$.

Deci $y \cdot z = x_k \cdot x_j$ şi cum $x_k, x_j \in H$ deducem că $y \cdot z \in H$, aşadar (1) este adevărată.

Presupunem că există subgrupul H′ al lui G, de ordin 2n+1, cu H′ $\ne$ H.

Avem $H \cap H'$ subgrup al lui G şi $H \cap H' \ne H$, $H \cap H' \ne H'$.

Notăm $\text{ord}(H \cap H') = p \Rightarrow p / 2n+1$, $p \ne 2n+1$. Atunci $p < \left[\frac{2n+1}{2}\right] = n$.

Notăm, după o eventuală redenumire a elementelor, $H \cap H' = \{e, x_1, x_2, ..., x_{p-1}\}$.

Atunci $H' = \{e, x_1, x_2, ..., x_{p-1}, y_p, ..., y_{2n}\}$ cu $\{y_p, ..., y_{2n}\} \subset x \cdot H = G \setminus H$.

Din (1) obținem $y_p^2, y_p \cdot y_{p+1}, ..., y_p \cdot y_{2n} \in H \cap H'$ şi deci

$p = |H \cap H'| \ge 2n - p + 1 \ge n + 1$, fals.

Observații: 1) Dacă G are un subgrup H cu $2n+1$ elemente, atunci din (1) rezultă că subgrupurile K ale lui G astfel încât $K \cap H = \{e\}$ sunt de ordinul 2.
2) Dacă $|G| = 4n+2$, atunci G nu poate avea doar subgrupuri proprii de ordinul 2 (ar rezulta că ordinul lui G este o putere a lui 2, fals.)

R2.2.5. *Fie $(G, \cdot)$ un grup finit și H_1, H_2 subgrupuri ale lui G. Fie mulțimea $H_1H_2 = \{x\cdot y \,/\, x\in H_1,\ y\in H_2\}$. Dacă $\max\{ord(H_1), ord(H_2)\} > \frac{1}{2}ord(G)$, să se demonstreze că $H_1H_2 = G$.*

<u>Soluție:</u> s Presupunem că $ord(H_1) \geq ord(H_2)$, deci că $ord(H_1) > \frac{n}{2}$, unde $ord(G) = n$. Atunci, cum din teorema lui Lagrange avem că $ord(H_1) / ord(G)$, rezultă că $ord(H_1) = n$ și deci $H_1 = G$. Așadar $H_1H_2 = GH_2 = \{x\cdot y \mid x\in G, y\in H_2\}$ Elementul neutru e al grupului G se află și în H_2 și deci, oricare ar fi $x\in G$,
$x = x\cdot e\in GH_2$, așadar $G \subset GH_2$ și cum și $GH_2 \subset G$, rezultă că $G = GH_2 = H_1H_2$.

3. Aplicaţii ale teoremei lui Lagrange în probleme de teoria numerelor

3.1. Noţiuni şi rezultate utilizate

Deoarece cunoştinţele necesare înţelegerii acestei teme sunt puţine, vom rezuma toate rezultatele ce le vom folosi.

3.1.1. Dacă $(G,\cdot)$ este un grup şi $(H,\cdot)$ un subgrup al său atunci relaţiile $\rho_H \subset G\times G$ şi $\rho'_H \subset G\times G$ definite prin:

$$(x,y)\in\rho_H \overset{def}{\Leftrightarrow} x^{-1}y\in H \quad \text{şi} \quad (x,y)\in\rho'_H \Leftrightarrow xy^{-1}\in H$$

sunt relaţii de echivalenţă pe G iar clasele de echivalenţă au toate acelaşi cardinal ca mulţimea *H*.

3.1.2. Dacă $(G,\cdot)$ este un grup finit şi $(H,\cdot)$ este un subgrup al său, atunci $|H|$ divide $|G|$. (Lagrange)

(Dacă $|H|=k, |G|=n$ atunci $k\,|\,n$ şi dacă $n=km$ numărul *m*se numeşte indicele lui *H* în *G* şi se notează $[G:H]$, avem $|G|=|H|[G:H]$).

3.1.3. Dacă $(G,\cdot)$ este un grup finit şi $x\in G$ un element al său, atunci ordinul lui *x* este finit (există $k\in\mathbf{N}^*$ minim cu $x^k=1$) şi $ord(x)$ divide $|G|$.

(Ordinul lui *x* este cardinalul subgrupului ciclic generat de *x*).

3.1.4. Dacă $G=\langle a\rangle$ există un grup ciclic finit (generat de *a*) şi $|G|=n$, atunci un element $a^k\in G$ generează tot grupul *G* dacă şi numai dacă $(k,n)=1$.

3.1.5. În monoidul $(\mathbf{Z}_n,\cdot)$, al claselor de resturi modulo *n*, un element $\hat{k}$ este element inversabil, dacă şi numai dacă $(k,n)=1$.

3.1.6. Dacă $(M,\cdot)$ este un monoid şi notăm $U(M)$ mulţimea elementelor inversabile din *M*, atunci $(U(M),\cdot)$ formează o structură de grup.

3.1.7. Dacă $(G,\cdot)$ este un grup abelian finit atunci

$$\prod_{g\in G} g = \prod_{\sigma(g')\le 2} g'$$

(al doilea termen al egalităţii este produsul tuturor elementelor din *G* care au ordinul doi).

Demonstraţie. Dacă $g\in G$ şi $ord(g)\ge 3$ atunci $g\ne g^{-1}$ şi $ord(g)=ord(g^{-1})$, deci mulţimea $\{g\in G\,|\,ord(g)\ge 3\}$ o putem partiţiona în mulţimi de forma $\{g,g^{-1}\}$ (numărul elementelor de ordin ≥ 3 este par) şi atunci $\prod_{ord(g)\ge 3} g = 1 \ \ (g\cdot\overline{g}'=1)$.

3.1.8. Numărul elementelor de ordin diferit de 2, dintr-un grup finit este impar.

(Elementele de ordin ≥ 3 se cuplează în perechi $\{g, g'\}$ deci sunt în număr par şi se mai adaugă 1 care este de ordin 1.)

3.1.9. În orice grup finit de ordin par, există elemente de ordin 2.

(Numărul elementelor de ordin diferit de 2 este impar, deci şi numărul celor de ordin 2 este impar, adică cel puțin 1.)

3.2. Funcții aritmetice. Funcția lui Euler

În teoria numerelor apar numeroase funcții aritmetice (definite pe $\mathbf{N}^*$) unele din ele foarte des (clasice). Vom aminti câteva din ele şi vom da câteva proprietăți ale lor, ocupându-ne în special de funcția lui Euler.

3.2.1. Definiție. Se numeşte funcție aritmetică orice funcție $f:\mathbf{N}^* \to \mathbf{C}$.

3.2.2. Observație. • În general în teoria numerelor se consideră că 0 nu este număr natural şi din acest motiv se notează cu **N** mulțimea $\{1,2,3,...\}$. Noi vom nota $\{1,2,3,...\} = \mathbf{N}^*$ pentru a menține notația adoptată în manualele noastre.

• Majoritatea funcțiilor aritmetice clasice sunt definite cu valori în **N**, dar pentru definirea unor funcții "inverse" este necesară extinderea codomeniului.

• Vom nota mulțimea funcțiilor aritmetice cu F_a.

3.2.3. Definiție. O funcție aritmetică $f \in F_a$ se numeşte funcție multiplicativă dacă $f \neq 0$ şi $f(mn) = f(m)f(n)$ pentru orice pereche de numere *m, n* relativ prime, $(m,n) = 1$.

3.2.4. Observație. a) Dacă f este o funcție multiplicativă atunci $f(1) = 1$ (pentru $n \in \mathbf{N}^*$ cu $f(n) \neq 0$ avem $f(1,n) = f(1)f(n) \Leftrightarrow f(n) = f(1)f(n)$ deci $f(1) = 1$).

b) O funcție multiplicativă este unic determinată de valorile pe care le ia în puterile numerelor prime, adică pe mulțimea $M = \{p^k \mid k \in \mathbf{N}^*, p$ număr prim$\}$.

(Dacă $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$ este descompunerea în factori primi a numărului *n* atunci $f(n) = f(p_1^{k_1}) f(p_2^{k_2}) ... f(p_m^{k_m})$.)

c) Dacă f este o funcție multiplicativă şi notăm cu D_n mulțimea divizorilor (naturali) lui *n* atunci avem:

$$\sigma_f(n) = \sum_{d \in D_n} f(d) =$$

$$= (1 + f(p_1) + f(p_1^2) + ... + f(p_1^{k_1}))...(1 + f(p_m) + f(p_m^2) + ... + f(p_m^{k_m}))$$

unde $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$, $p_1, p_2, ..., p_m$ fiind numere prime.

(În produsul din membrul doi, efectuând înmulțirea parantezelor se obțin termeni de forma $f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) ... f(p_m^{\alpha_m})$ care se regăseşte în membrul stâng al egalității pentru divizorul $d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_m^{\alpha_m}$,
$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_m^{\alpha_m}) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) ... f(p_m^{\alpha_m})$).

d) Dacă f este funcție multiplicativă atunci funcția σ_f definită prin $\sigma_f(n) = \sum_{d|n} f(d)$ este tot o funcție multiplicativă.

3.2.5. Definiție. Se spune că funcția aritmetică $f \in F_a$ este o funcție complet multiplicativă dacă $f \neq 0$ şi $f(mn) = f(m) f(n)$ pentru orice pereche $(m,n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.

3.2.6. Observație. a) O funcție complet multiplicativă este în particular o funcție multiplicativă, deci are toate proprietățile acestor funcții.

b) O funcție complet multiplicativă este unic determinată de valorile pe care le ia în numerele prime.
(Avem $f(1) = 1$ şi $f(p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}) = (f(p_1))^{k_1} (f(p_2))^{k_2} ... (f(p_m))^{k_m}$.)

c) Proprietatea c) din observația anterioară, pentru funcții complet multiplicative devine:

$$\sigma_f(n) = \sum_{d|n} f(d) =$$

$$= (1 + f(p_1) + ... + (f(p_1))^{k_1})...(1 + f(p_m) + ... + (f(p_m))^{k_m})$$

unde $n = p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ este descompunerea lui n în factori primi.

d) Dacă s este un număr arbitrar (natural, întreg, real sau chiar complex) este evident că funcția $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{C}$, $f(n) = n^s$ este complet multiplicativă.

În cazul $s = 0$ egalitatea c) devine

$$\sum_{d|n} 1 = (1 + k_1)(1 + k_2)...(1 + k_m),$$

deci $T(n)$, numărul divizorilor lui n este $T(n) = (1 + k_1)(1 + k_2)...(1 + k_n)$, unde $k_1, k_2, ..., k_n$ sunt exponenții numerelor prime care apar în descompunerea lui n în factori primi.

Funcția $T : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$, $T(n) =$ numărul divizorilor naturali ai lui *n* este o funcție aritmetică multiplicativă, dar nu este complet multiplicativă.

În cazul $s=1$ egalitatea c) devine

$$\sum_{d|n} d = \frac{p_1^{k_1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{k_2}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_m^{k_m}-1}{p_m-1}$$

deci $\sigma(n)$, suma divizorilor naturali ai numărului *n* este:

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{k_2}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_m^{k_m}-1}{p_m-1}$$

unde $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ este descompunerea lui *n* în factori primi.

Funcția $\sigma : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$, $\sigma(n) =$ suma divizorilor naturali ai numărului *n* este o funcție aritmetică multiplicativă (dar nu complet multiplicativă).

Pe mulțimea *F* a funcțiilor aritmetice se definesc operațiile:

Suma: $f, g \in F_a$, $f+g \in F_a$, $(f+g)(n) \overset{def}{=} f(n)+g(n), n \in \mathbf{N}$

Produsul: $f, g \in F_a$, $fg \in F_a$, $(fg)(n) \overset{def}{=} f(n)g(n), n \in \mathbf{N}$

Produsul Dirichlet (de convoluție): $f, g \in F_a$, $f * g \in F_a$

$$(f * g)(n) \overset{def}{=} \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

(Suma se face după toți divizorii naturali *d* ai lui *n*.)

3.2.7. Observație. Se pot verifica cu uşurință (recomandăm ca exerciții) următoarele afirmații:

a) $(F_a, +)$ este un grup comutativ cu elementul neutru funcția $f = 0$.

b) $(F_a, \cdot)$ este un monoid comutativ cu elementul neutru funcția $f = 1$ şi elementele inversabile, funcțiile care nu iau valoarea zero.

c) $(F_a, *)$ este un monoid cu elementul neutru funcția δ definită prin

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{daca} \quad n = 1 \\ 0, & \text{daca} \quad n \neq 1 \end{cases}$$ (**funcția lui Dirac**).

Elementele inversabile în acest monoid comutativ sunt funcțiile *f* pentru care $f(1) \neq 0$ şi elementul simetric față de legea "$*$" al lui *f* este o funcție $f^* : \mathbf{N}^* \to \mathbf{C}$ care se defineşte recurent prin relațiile

$$f^*(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(1)}, & n > 1 \\ -\dfrac{1}{f(1)} \displaystyle\sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} f(d) f^*\left(\frac{n}{d}\right), & n > 1 \end{cases}$$

sau

$$f^*(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{f(1)}, & n>1\\ -\dfrac{1}{f(1)}\sum\limits_{\substack{d|n\\ d\neq n}} f^*(d)f\left(\dfrac{n}{d}\right), & n>1\end{cases}$$

d) Produsul obişnuit şi produsul Dirichlet sunt operaţii distributive faţă de sumă:

$$f(g+h)=fg+fh$$
$$f*(g+h)=(g+h)*f=f*g+f*h.$$

e) $(F_a,+,\cdot)$ şi $(F_a,+,*)$ sunt inele comutative unitare.

f) Dacă notăm cu M mulţimea funcţiilor aritmetice multiplicative atunci $(M,*)$ formează o structură de grup.

(Produsul Dirichlet a două funcţii multiplicative dă o funcţie multiplicativă; Pentru orice două funcţii multiplicative g şi h există o unică funcţie multiplicativă f cu proprietatea: $f*g=h$.)

g) Funcţia $\mu\in F_a$ cu proprietatea $\mu*1=\delta$, unde 1 este funcţia constantă $f=1$, iar δ este funcţia Dirac se numeşte **funcţia lui Moebius** (este simetrica funcţiei 1 faţă de produsul de convoluţie, deci $\mu=1^*$).

Se deduce uşor că expresia funcţiei lui Moebius este

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & \text{daca } n=1\\ 0, & \text{daca in descompunerea lui } n \text{ in factori primi exista exponenti diferiti de } 1\\ (-1)^m, & \text{daca } n \text{ este produs de } m \text{ numere prime (distincte)}\end{cases}$$

b) Funcţia lui Moebius are următoarele proprietăţi:

μ_1: $\sum\limits_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & \text{daca } n=1\\ 0, & \text{daca } n>1\end{cases}$ (din definiţie)

(sau $\sigma_\mu=\sigma$ (conform observaţiei 3d))

μ_2: Funcţia lui Moebius este o funcţie multiplicativă.

(Se poate constata direct din expresia ei sau folosind punctul f) al observaţiei 6).

μ_3: Pentru orice funcţie multiplicativă f, avem egalitatea

$$\sigma_{\mu f}(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f(d)=(1-f(p_1))(1-f(p_2))...(1-f(p_m))$$

unde $p_1,p_2,...,p_m$ sunt numerele prime care apar în descompunerea lui n în factori primi.

(Funcția μf fiind produs de funcții multiplicative, este o funcție multiplicativă şi aplicăm relația dată de Observația 3c)

$$\sigma_{\mu f}(n) = (1 + \mu f(p_1) + \mu f(p_1^2) + ... + \mu f(p_1^{k_1}))...(1 + \mu f(p_m) + ... + \mu f(p_m^{k_m}))$$

în care $\mu(p_1) = \mu(p_2) = ... = \mu(p_m) = -1$, $\mu(p_1^2),...,\mu(p_1^{k_1})$, $\mu(p_m^2),...,\mu(p_m^{k_m})$ sunt zero, deci

$$\sigma_{\mu f}(n) = (1 - f(p_1))(1 - f(p_2))...(1 - f(p_m))$$

μ_4: $\displaystyle\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_m}\right), \quad n > 1$

(Se aplică μ_3 pentru funcția multiplicativă $f(d) = \frac{1}{d}$.)

3.2.8. Definiție. Funcția aritmetică $\varphi : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$, $\varphi(n) =$ numărul numerelor naturale *k*, mai mici sau egale cu *n* şi prime cu *n*, se numeşte **funcția aritmetică a lui Euler.**

3.2.9. Observație. $\varphi(n) = \{k \in \mathbf{N}^* \mid 1 \le k \le n$ şi $(k, n) = 1\}$.

b) Dacă $(\mathbf{Z}_n, +)$ este grupul claselor de resturi modulo *n* atunci $\hat{k} \in \mathbf{Z}_n$ este generator pentru $\mathbf{Z}_n$ dacă şi numai dacă $(k, n) = 1$, deci $\varphi(n)$ este numărul generatorilor din $\mathbf{Z}_n$ al grupului $\mathbf{Z}_n$.

c) Dacă $(\mathbf{Z}_n, \cdot)$ este monoidul multiplicativ al claselor de resturi modulo *n*, o clasă $\hat{k} \in \mathbf{Z}_n$ este element inversabul dacă şi numai dacă $(k, n) = 1$, deci dacă $(U(\mathbf{Z}_n), \cdot)$ este grupul unităților modulului $(\mathbf{Z}_n, \cdot)$ atunci $\varphi(n) = |U(\mathbf{Z}_n)|$ (ordinul grupului $(U(\mathbf{Z}_n), \cdot)$) ($\varphi(n)$ este numărul elementelor inversabile ale inelului $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$).

3.2.10. Propoziție. Funcția lui Euler $\varphi : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ are expresia

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$$

unde $p_1, p_2, ..., p_m$ sunt numerele prime care apar în descompunerea lui *n* în factori primi $(n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m})$.

Demonstrație. Notăm $\varphi(n) = n - \psi(n)$, unde $\psi(n)$ este numărul numerelor mai mici saue egale cu *n*, neprime cu *n*. Dacă singurii divizori ai lui *n* sunt $p_1, p_2, ..., p_m$ atunci un număr $1 < a \le n$ este neprim cu *n* dacă şi numai dacă el se divide cucel puțin unul din numerele p_1 sau p_2 sau ... p_m.

Considerăm mulțimile $A_i = \{a \mid 1 < a \le n, p_i \mid a\}$, $i = \overline{1, m}$ şi atunci

$$\psi(n)=\left|\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right|=\sum_{i=1}^{m}|A_i|-\sum_{1\le 1<j\le m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|-...$$

(conform principiului includerii şi excluderii).

Dar

$$|A_i|=\frac{n}{p_i},\quad |A_i\cap A_j|=\frac{n}{p_ip_j},\quad |A_i\cap A_j\cap A_k|=\frac{n}{p_ip_jp_k},...$$

deci

$$\varphi(n)=n\left(1-\sum\frac{1}{p_i}+\sum\frac{1}{p_ip_j}-\sum\frac{1}{p_ip_jp_k}+...\right)=$$

$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$$

3.2.11. Observație. a) Funcția φ poate fi dată şi prin expresia

$$\varphi(n)=(p_1^{k_1}-p_1^{k_1-1})(p_2^{k_2}-p_2^{k_2-1})...(p_m^{k_m}-p_m^{k_m-1})$$

dacă $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_m^{k_m}$ este descompunerea lui n în factori primi.

b) Funcția φ este funcție aritmetică multiplicativă

$$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)\quad \text{dacă}\quad (m,n)=1.$$

3.3. Teoreme fundamentale

3.3.1. Teorema lui Euler. Dacă $a\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$, $n\ge 2$ şi $(a,n)=1$ atunci

$$a^{\varphi(n)}\equiv 1(\bmod n)$$

Demonstrație. Dacă $(a,n)=1$ atunci în $\mathbf{Z}_n$, $\hat{a}\in U(\mathbf{Z}_n)$ deci $\hat{a}$ este element al grupului multiplicativ $(U(\mathbf{Z}_n),\cdot)$ care are ordinul $\varphi(n)$. Conform teoremei lui Lagrange ordinul lui $\hat{a}$ divide $\varphi(n)$, deci oricum $(\hat{a})^{\varphi(n)}=\hat{1}$ în $\mathbf{Z}_n$ sau $a^{\varphi(n)}=\hat{1}$ sau $a^{\varphi(n)}\equiv 1(\bmod n)$.

3.3.2. Teorema lui Fermat (mică). Dacă $p\in\mathbf{N}^*$ este un număr prim şi $a\in\mathbf{Z}$ un număr întreg, atunci

$$a^p\equiv a(\bmod p).$$

Demonstrație. Dacă $\hat{a}=\hat{0}$ în $\mathbf{Z}_p$ atunci $(\hat{0})^p=\hat{0}$.

Dacă $\hat{a}\ne\hat{0}$ în $\mathbf{Z}_p$, atunci $\hat{a}\in\mathbf{Z}_p\setminus\{\hat{0}\}=\mathbf{Z}_p^*$ iar $(\mathbf{Z}_p^*,\cdot)$ este grup cu $(p-1)$ elemente ($(\mathbf{Z}_p,+,\cdot)$ este corp). Ordinul oricărui element

$\hat{a} \in \mathbf{Z}_p^*$ divide ordinul grupului, deci oricum $(\hat{a})^{p-1} = \hat{1}$ în $\mathbf{Z}_p$ sau $a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ sau $a^p \equiv a(\mathrm{mod}\, p)$.

3.3.3. Teorema lui Wilson. Dacă $p \geq 2$ este un număr natural atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

a) *p* este număr prim

b) $(p-1)!+1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$

Demonstrație. Avem $U(\mathbf{Z}_p) = \mathbf{Z}_p^*$ (grup multiplicativ cu $(p-1)$ elemente) şi conform C7 avem:

$$(1) \quad \prod_{\hat{k} \in \mathbf{Z}_p^*} \hat{k} = \prod_{ord(\hat{k})=2} \hat{k}'$$

dar $ord(\hat{k}') = 2$ dacă $(\hat{k}')^2 = \hat{1}$ sau $(\hat{k}'-\hat{1})(\hat{k}'+\hat{1}) = \hat{0}$ sau $p \mid (k'-1)(k'+1)$ şi p fiind prim divide unul din factori, deci $p \mid (k'-1)$ sau $p \mid (k'+1)$, adică $\hat{k}' = \hat{1}$ sau $\hat{k}' = -\hat{1}$ (singurele clase de ordin 2). Relația (1) devine $\hat{1} \cdot \hat{2} ... (p-1) = \hat{1}(-\hat{1}) = -\hat{1}$ deci $(p-1)! \equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$ sau $(p-1)!+1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$.

Reciproc. Dacă p este neprim, $p = ab$, $a > 1, b > 1$, atunci $a < p-1$, $b < p-1$ şi $a \mid (p-1)!$. Dacă am avea $(p-1)!+1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$ atunci $(p-1)!+1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, a)$ (contradicție cu $(p-1)! \equiv 0(\mathrm{mod}\, a)$).

Bibliografie

I. M. Vinogradov: Bazele teoriei numerelor, Ed.Academiei Române, 1954

I. Cucurezeanu: Probleme de aritmetică şi teoria numerelor, Ed.Tehnică, Bucureşti 1976

P. Radovici: Probleme de teoria elementară a numerelor, Ed.Tehnică, Bucureşti 1986

D. Buşneag, F.Boboc, D. Piciu: Aritmetică şi teoria numerelor, Ed.Univ. Craiova 1999

Probleme rezolvate

R3.4.1. Fie *p* un număr prim. să se arate că ecuația $x^2 \equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$ are soluție, dacă şi numai dacă $p = 2$ sau $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$.

Soluție. Din teorema lui Wilson, *p* fiind prim rezultă $(p-1)! \equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$. Dacă $p > 2$ atunci *p* este impar, $\dfrac{p-1}{2}$ este întreg şi avem:

$$(p-1)! = \left(1\cdot 2 \ldots \frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\ldots(p-1)\right) = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k(p-k) \equiv \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k(-k)(\mathrm{mod}\, p)$$

deci $(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} x^2$ şi atunci avem relația $(-1)^{\frac{p-1}{2}} x^2 \equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$. Pentru $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$, $\dfrac{p-1}{2}$ este par deci relația devine $x^2 \equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$. Dacă $p \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$ şi presupunem că există *a* cu $a^2 \equiv -(\mathrm{mod}\, p)$ avem:

$$a^{p-1} \equiv (a^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1(\mathrm{mod}\, p),$$

dar cum $a^{p-1} \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$ rezultă că *p* nu divide *a*, deci din Teorema lui Fermat rezultă $a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ şi ajungem la contradicția $1 \equiv (-1)(\mathrm{mod}\, p)$, căci $p > 2$. Pentru $p = 2$ avem $1^2 \equiv 1 \equiv -1(\mathrm{mod}\, 2)$, deci ecuația $x^2 = -1$ are soluție.

Observație. Problema poate fi formulată astfel: Să se arate că dacă *p* este un număr prim de forma $4m+1, m \in \mathbf{N}$ şi *A* este o mulțime de $p-1$ numere consecutive, atunci *A* nu poate fi partiționată în două submulțimi de numere, care să aibă produsele elementelor aceleaşi.

R3.4.2. Fie *p* un număr prim şi *k* un număr natural cu condiția $1 \le k \le p$. Să se arate că numărul $(p-k)!(k-1)! + (-1)^{k-1}$ este divizibil cu *p*.

(A. Simionov)

Soluție. Avem congruențele modulo *p*: $1 \equiv -(p-1), 2 \equiv -(p-2), \ldots,$ $k-1 \equiv -(p-k+1)$ care înmulțite dau

$$(k-1)! \equiv (-1)^{k-1}(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)$$

deci: $(p-k)!(k-1)! \equiv (-1)^{k-1}(p-1)! \equiv (-1)^k$ (ultima egalitate datorită teoremei lui Wilson).

Observație. Problema poate fi privită ca o generalizare a teoremei lui Wilson, care o obținem în cazul particular $p = k$.

R3.4.3. Să se arate că dacă *p* este un număr prim şi *a* un număr întreg atunci *p* divide pe $(p-1)!a^p + a$.

Soluție. Scriem teoremele lui Fermat şi Wilson:

$$p \mid ((p-1)!+1), \quad p \mid (a^p - a) \quad \text{deci}$$

$$p \mid (a^p((p-1)!+1)-(a^p-a) \quad \text{sau} \quad p \mid (a^p(p-1)!+a).$$

Observație. Problema reunește rezultatele teoremelor Fermat și Wilson: pentru $a=1$ obținem teorema lui Wilson și apoi deoarece $(p-1)! \equiv -1 (\mod p)$ rezultă $((p-1)!a^p + a) \equiv (-a^p + a)$ deci $-(a^p - a) \equiv 0 (\mod p)$ sau $a^p \equiv a (\mod p)$.

R3.4.4. Fie p un număr prim și *a, b* numere întregi. Să se arate că dacă $p \mid (a^p - b^p)$ atunci $p^2 \mid (a^p - b^p)$.

Soluție. Din teorema lui Fermat $a^p \equiv a, b^p = b (\mod p)$ deci $a \equiv b (\mod p)$. Putem scrie $a = b + mp$ și atunci:

$$a^p - b^p = (b+mp)^p - b^p = C_p^1 b^{p-1} mp + C_p^2 b^{p-2} m^2 p^2 + \ldots + C_p^p m^p p^p =$$

$$= p^2 (b^{p-1} m + C_p^2 b^{p-2} m^2 + C_p^3 b^{p-3} m^3 p + \ldots + C_p^p m^p p^{p-2})$$

care este divizibil cu p^2.

R3.4.5. Să se arate că pentru orice numere naturale *a, b* relativ prime (cu $(a,b)=1$) numărul $(a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} - 1)$ este divizibil cu produsul ab).

Soluție. Din teorema lui Euler $a^{\varphi(b)} \equiv 1 (\mod b)$ și $b^{\varphi(a)} \equiv 1 (\mod a)$ deci putem scrie $a^{\varphi(b)} = 1 + kb$ și $b^{\varphi(a)} = 1 + ma$ cu $k \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$, atunci $(a^{\varphi(b)} - 1)(b^{\varphi(a)} - 1) = (km)(ab)$ deci $(a^{\varphi(b)} b^{\varphi(a)} - a^{\varphi(b)} - b^{\varphi(a)} + 1)$ este divizibil cu ab și cum $a^{\varphi(b)} b^{\varphi(a)}$ este și el divizibil, rezultă concluzia dorită.

R3.4.6. Să se demonstreze următoarea caracterizare a numerelor prime: Un număr natural $p \geq 2$ este număr prim dacă și numai dacă $\varphi(p) \mid (p-1)$ și $(p+1) \mid \sigma(p)$ (unde φ este funcția lui Euler și σ este "funcția suma divizorilor").

Soluție. "⇒" Dacă *p* este număr prim atunci $\varphi(p) = p - 1$ și $\sigma(p) = p + 1$.

"⇐" Fie $n \in \mathbf{N}^*$ cu proprietatea $n \geq 2$, $\varphi(n) \mid (n-1)$ și $(n+1) \mid \sigma(n)$. Mai întâi să observăm că pentru orice $n > 2$ numărul $\varphi(n)$ este par. (Din expresia lui $\varphi(n)$, dacă *n* conține în descompunerea în factori primi numere prime *p* diferite de 2 (impare) atunci $\varphi(n) = (p^k - p^{k+1})m = p^{p-1}(p-1)m$ care este număr par. Dacă $n = 2^k, k > 2$ atunci $\varphi(n) = 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$ care este par). Din relația $\varphi(n) \mid (n-1)$ rezultă că *n* trebuie să fie impar (conține în descompunerea în factori primi numai puteri de numere prime impare (diferite de 2)).

Arătăm că toți factorii din descompunere sunt numere prime (fără exponent). Dacă prin absurd ar exista $p_i^{k_i}$ factori în *n* cu $k_i \geq 2$ atunci $(p^{k_i} - p_i^{k_i - 1}) \mid \varphi(n) \mid (n-1)$ deci $p_i^{k_i - 1} \mid (n-1) = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m} - 1$ ceea ce este fals.

Deci $n = p_1 p_2 ... p_m$. Atunci $\varphi(n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_m - 1)$ şi $\sigma(n) = (p_1 + 1)(p_2 + 1)...(p_m + 1)$, cu $p_1, p_2, ..., p_m$ impare, deci $2^m \mid \varphi(n)$ şi $2^m \mid \sigma(n)$.

Dacă $m \geq 2$ atunci $4 \mid \varphi(n) \mid (n-1)$, deci $4m$ divide $(n+1)$. Din ipoteză numărul $\dfrac{\sigma(n)}{n+1}$ este întreg, $(n+1)$ este par, nedivizibil cu 4, iar $\sigma(n)$ este divizibil cu 2^m. Atunci $2^{m-1} \mid \dfrac{\sigma(n)}{n+1}$ şi atunci

$$2^{m-1} < \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{(p_1 + 1)...(p_m + 1)}{p_1 ... p_m} = \left(1 + \frac{1}{p_1}\right)...\left(1 + \frac{1}{p_m}\right) < \left(1 + \frac{1}{3}\right)^m = \left(\frac{4}{3}\right)^m,$$

inegalitate falsă, deci $m = 1$ şi atunci $n = p_1$ număr prim.

R3.4.7. Să se arate că $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ pentru orice număr natural *n*.

Soluţie. Vom demonstra prin inducţie, după numărul factorilor primi din descompunerea lui *n*.

Fie $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m} = n_1 p_m^{k_m}$ (facem inducţia după *m*). Avem

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = \sum_{d'|n_1} \varphi(d') + \sum_{d'|n_1} \varphi(d' p_m) + ... + \sum_{d'|n_1} \varphi(d' p_m^{k_m}) =$$

$$= \sum_{d'|n_1} \varphi(d') + \sum_{d'|n_1} \varphi(d')\varphi(p_m) + ... + \sum_{d'|n_1} \varphi(d')\varphi(p_m^{k_m}) =$$

$$= (1 + \varphi(p_m) + ... + \varphi(p_m^{k_m})) \sum_{d'|n_1} \varphi(d') =$$

$$= (1 + (p_m - 1) + (p_m^2 - p_m) + ... + (p_m^{k_m} - p_m^{k_m - 1})) \sum_{d'|n_1} \varphi(d') = p_m^{k_m} n_1 = n$$

(am folosit faptul că φ este o funcţie aritmetică multiplicativă).

R3.4.8. Să se arate că dacă $S(n)$ este suma numerelor naturale prime cu *n*, mai mici ca *n* atunci $S(n) = \dfrac{n\varphi(n)}{2}$, pentru orice $n \geq 2$.

Soluţie. $S(2) = \dfrac{2 \cdot 1}{2} \Leftrightarrow 1 = 1$. Pentru $n > 2$ numărul $\varphi(n)$ este par şi grupăm cele $\varphi(n)$ numere în grupe de forma $\{1, n-1\}, \{a, n - a_1\}, ..., \{a_q, n - a_q\}$ unde $q = \dfrac{\varphi(n)}{2}$. Suma lor este $nq = \dfrac{n\varphi(n)}{2}$.

4. Condiții suficiente de comutativitate în grupuri

4.1. Centrul unui grup

Vom evidenția câteva proprietăți interesante ale centrului unui grup, a căror utilizare în probleme de concurs duce la soluții elegante şi accesibile.

Multe din problemele de comutativitate în grupuri, altfel delicate, se rezolvă mai uşor dacă ținem seama de structura algebrică de subgrup a centrului unui grup.

Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $X \subset G$ o submulțime a sa.

4.1.1. Definiție
Mulțimea $Z(X) = \{ g \in G \,/\, g \cdot x = x \cdot g, \quad \forall\, x \in X \}$ *se numeşte centralizatorul mulțimii X*

4.1.2. Definiție
Mulțimea $Z(G) = \{ g \in G \,/\, g \cdot x = x \cdot g, \ \forall x \in G \}$ *se numeşte centrul grupului G.*

Exemplu: Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ. Centrul grupului $(GL_n(A), \cdot)$ al matricelor inversabile din $M_n(A)$ este $Z(GL_n(A)) = \{a \cdot I_n \mid a \in U(A)\}$
Într-adevăr, alegând matricea $E_{1i} \in M_n(A)$ care are 1 pe poziția $(1, i)$ şi 0 în rest şi matricea $B = (b_{ij}) \in Z(GL_n(A))$, din $B \cdot A_{1i} = A_{1i} \cdot B$ obținem $a_{11} = a_{ii}$, $\forall\, i = \overline{1, n}$ şi $a_{i1} = ... = a_{i\, i-1} = a_{i\, i+1} = ... = a_{in} = 0$. De aici, $B = a \cdot I_n$ şi $B \in GL_n(A) \Leftrightarrow a \in U(A)$

4.1.3. Propoziție *Pentru orice mulțime* $X \subset G$, $(Z(X), \cdot)$ *este subgrup al lui* $(G, \cdot)$

Demonstrație: Dacă $g_1, g_2 \in Z(X)$ avem $(g_1 \cdot g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot (x \cdot g_2) = (g_1 \cdot x) \cdot g_2 = (x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 \cdot g_2)$ deci $g_1 \cdot g_2 \in Z(X)$.
Din $g_1 \cdot x = x \cdot g_1$ rezultă $x \cdot g_1^{-1} = g_1^{-1} \cdot x$ deci $g_1^{-1} \in Z(X)$.

4.1.4. Observații
1) Subgrupul $Z(X)$ este format din elementele lui G care comută cu toate elementele mulțimii X.
2) $Z(X) = \bigcap\limits_{x \in X} Fix(i_x)$, unde $Fix(i_x)$ este mulțimea punctelor fixe ale automorfismului interior i_x, $i_x(g) = g^{-1} \cdot x \cdot g$, $\forall\, g \in G$.
3) $Z(X) = \{g \in G \mid [x, g] = 1, \forall\, x \in X\}$, unde $[x, g] = x \cdot g \cdot x^{-1} \cdot g^{-1}$ este comutatorul elementelor x şi g.

4) Dacă $X_1 \subset X_2$ atunci $Z(X_2) \subset Z(X_1)$, în particular centrul grupului G, $Z(G)$ este subgrup în orice centralizator $Z(X)$, deci $Z(G) = \bigcap_{x\in G} Z(X)$ şi în consecinţă $Z(G)$ este subgrup al lui G.

5) Spunem că $y\in G$ este conjugat cu $x\in G$ ($x \sim y$) dacă $\exists\, g\in G$, $y = g^{-1}\cdot x\cdot g$.
Dacă $X = \{x\}$ şi grupul G este finit, atunci numărul elementelor lui G conjugate
cu x este $\left|\{g^{-1}\cdot x\cdot g \mid g\in G\}\right| = [G : Z(X)]$, adică indicele subgrupului centralizator $Z(X)$ în G.

<u>*Demonstraţie*</u> Demonstrăm afirmaţia 5.
Considerăm pe G relaţia de echivalenţă la dreapta definită de subgrupul $Z(X)$,
$g_1\ \rho\ g_2 \Leftrightarrow g_1\cdot g_2^{-1} \in Z(X) \Leftrightarrow g_1\cdot g_2^{-1}\cdot x = x\cdot g_1\cdot g_2^{-1}$.
Clasa unui element este $\hat{g} = Z(X)\cdot g$.
Definim funcţia F pe mulţimea claselor G / ρ cu valori în mulţimea elementelor din G, conjugate cu x, $C(x) = \{g^{-1}\cdot x\cdot g \mid g\in G\}$; $F : G / \rho \to C(x)$, $F(\hat{g}) = g^{-1}\cdot x\cdot g$
Arătăm că funcţia F este bine definită (nu depinde de alegerea reprezentantului g al clasei $\hat{g}$). Dacă $g_1\in \hat{g}$, arătăm că $g_1^{-1}\cdot x\cdot g_1 = g^{-1}\cdot x\cdot g$.
$g_1^{-1}\cdot x\cdot g_1 = g^{-1}\cdot x\cdot g \Leftrightarrow \left(g\cdot g_1^{-1}\right)\cdot x = x\cdot\left(g\cdot g_1^{-1}\right) \Leftrightarrow g\cdot g_1^{-1} \in Z(X) \Leftrightarrow g\ \rho\ g_1 \Leftrightarrow$ $g_1\in \hat{g}$
Fie $\hat{g}_1, \hat{g}_2 \in G / \rho$. $F(\hat{g}_1) = F(\hat{g}_2) \Leftrightarrow g_1^{-1}\cdot x\cdot g_1 = g_2^{-1}\cdot x\cdot g_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(g_1\cdot g_2^{-1}\right)\cdot x = x\cdot\left(g_1\cdot g_2^{-1}\right) \Leftrightarrow g_1\cdot g_2^{-1} \in Z(X) \Leftrightarrow g_1\ \rho\ g_2 \Leftrightarrow \hat{g}_1 = \hat{g}_2$.
Aşadar funcţia F este bijectivă şi G / ρ şi $C(x)$ au acelaşi număr de elemente.

<u>**4.1.5. Definiţie**</u> *Mulţimea $N(X) = \{\, g\in G \,/\, g\cdot X = X\cdot g \,\}$ se numeşte normalizatorul mulţimii X.*

<u>**4.1.6. Propoziţie**</u> *Pentru orice submulţime $X \subset G$, normalizatorul $(N(X), \cdot)$ este un subgrup al grupului $(G, \cdot)$.*

<u>*Demonstraţie:*</u> Dacă $g_1, g_2\in N(X)$ avem $(g_1\cdot g_2)\cdot X = g_1\cdot(g_2\cdot X) = g_1\cdot(X\cdot g_2) = (g_1\cdot X)\cdot g_2 = (X\cdot g_1)\cdot g_2 = X\cdot(g_1\cdot g_2)$, deci $g_1\cdot g_2\in N(X)$.
Pentru $g\in G$, $g\cdot X = X\cdot g \Leftrightarrow X = g^{-1}\cdot X\cdot g \Leftrightarrow X\cdot g^{-1} = g^{-1}\cdot X \Leftrightarrow g^{-1}\in N(X)$.

<u>**4.1.7. Observaţii**</u>
1) $N(X) = \{g\in G \mid i_g(X) = X\}$, este format din elementele $g\in G$ pentru care mulţimea X este invariantă faţă de automorfismul interior i_g.

2) $Z(X)$ este subgrup al lui $N(X)$.
3) Dacă H este subgrup al lui G, atunci H este subgrup al lui $N(H)$
4) Subgrupul H al lui G este subgrup normal dacă şi numai dacă $N(H) = G$
5) Clasa de conjugare a mulţimii X, $C(X) = \{g^{-1}\cdot X\cdot g \mid g\in G\} \subset P(G)$ are cardinalul $|C(X)| = [G : N(X)]$, adică indicele subgrupului $N(X)$ în G.
(Se arată la fel ca în observaţia 4.1.4. punctul 5)

<u>4.1.8. Propoziţie</u> *Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $(H, \cdot)$ un subgrup al său. Fie $n, p\in$ $\mathbf{Z}$.*
Notăm cu $d = (n, p)$. Dacă $x\in G$ şi $x^n \in H$ şi $x^p \in H$, atunci şi $x^d \in H$.

<u>Demonstraţie:</u>
Dacă $d = (n, p) > 0$, atunci există $h, k\in\mathbf{Z}$ astfel încât $h\cdot n + k\cdot p = d$.
Cum H este subgrup al lui G şi $x^n\in H$, rezultă că $(x^n)^h = x^{h\cdot n}\in H$.
Analog rezultă că $x^{k\cdot p}\in H$.
Din axioma 1 a subgrupului obţinem că $x^{h\cdot n}\cdot x^{k\cdot p} = x^{h\cdot n+k\cdot p} = x^d \in H$.

<u>4.1.9. Consecinţe</u>
C1. *Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $n, p\in \mathbf{Z}$. Notăm cu $d = (n, p)$.*
Dacă $x\in G$ şi $x^n \in Z(G)$ şi $x^p \in Z(G)$, atunci şi $x^d \in Z(G)$.

C2. *Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $n, p\in \mathbf{Z}$, $(n, p) = 1$.*
Dacă $\forall x\in G$, $x^n \in Z(G)$ şi $x^p \in Z(G)$, atunci $(G, \cdot)$ este grup abelian.

<u>4.1.10. Propoziţie</u> *Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $n\in \mathbf{Z}$.*
Dacă $f : G \to G$, $f(x) = x^n$ este un morfism surjectiv, atunci $\forall x\in G$, $x^{n-1} \in$ $Z(G)$.

<u>Demonstraţie:</u> Fie $x\in G$. Atunci $\exists!\ z\in G$, $x\cdot z = y$. Aşadar $x^{n-1}\cdot y = x^{n-1}\cdot(x\cdot z) =$ $x^n\cdot z$.
Cum f este un morfism surjectiv, $\exists\ u\in G$, $u^n = z$.
Deci $x^{n-1}\cdot y = x^n\cdot z = x^n\cdot u^n \overset{f\ \text{morfism}}{=} (x\cdot u)^n = x\cdot(u\cdot x)^{n-1}\cdot u = x\cdot(u\cdot x)^n\cdot(u\cdot x)^{-1}\cdot u =$
$= x\cdot(u\cdot x)^n\cdot x^{-1}\cdot u^{-1}\cdot u \overset{f\ \text{morfism}}{=} x\cdot u^n\cdot x^n\cdot x^{-1} = x\cdot z\cdot x^{n-1} = y\cdot x^{n-1}$.
Aşadar, $x^{n-1}\cdot y = y\cdot x^{n-1}$, $\forall\ x, y \in G$, adică $\forall\ x\in G$, $x^{n-1} \in Z(G)$.

4.2. (a, b) – grupuri comutative

<u>4.2.1. Definiţie</u> *Fie $a, b\in\mathbf{Z}$. Un grup $(G, \cdot)$ se numeşte (a, b) – grup dacă aplicaţiile $x \to x^a$ şi $x \to x^b$ sunt endomorfisme ale lui G.*

Ne punem problema: care sunt perechile $(a, b)\in\mathbf{Z}^2$ pentru care orice (a, b) – grup este comutativ? Răspunsul este dat de următorul rezultat:

4.2.2. Teoremă *Fie $a, b\in\mathbf{Z}$. Orice (a, b) – grup este abelian dacă şi numai dacă $(a\cdot(a-1), b\cdot(b-1)) = 2$.*

Demonstraţie:
Necesitatea: Presupunem că $\exists\ n\in\mathbf{N},\ n \geq 2$ astfel încât $(a\cdot(a-1), b\cdot(b-1)) = 2\cdot n$.
Demonstrăm că în acest caz există un (a, b) – grup neabelian.
$n \geq 2 \Rightarrow \exists\ p\in\mathbf{N}$, p prim, astfel încât p / n.
I. $p \neq 2$ Fie grupul $(G, \cdot)$ de ordin p^3, neabelian, de exponent p (adică în care $\forall\ g\in G,\ g^p = 1$) definit astfel:
$G = \langle u, v, w \mid u^p = v^p = w^p = 1,\ v\cdot u = u\cdot v\cdot w,\ w\cdot u = u\cdot w,\ w\cdot v = v\cdot w \rangle$
Cum p / n, rezultă cazurile:
1) $p / (a, b)$; 2) $p / (a-1, b)$; 3) $p / (a, b-1)$; 4) $p / (a-1, b-1)$

În fiecare dintre aceste situaţii se demonstrează că G este un (a, b) – grup.

De exemplu în cazul 3), ţinând cont de faptul că $g^p = 1,\ \forall\ g\in G$ şi că
$a \equiv 0 \pmod p$ şi $b \equiv 0 \pmod p$, aplicaţia $x \rightarrow x^a = 1$ este morfismul nul iar aplicaţia $x \rightarrow x^b = x$ este morfismul identic.
II. $p = 2$ Exemplul anterior nu mai este potrivit, deoarece orice grup de exponent 2 este abelian. În schimb, grupul cuaternionilor $H = \{-1, 1, -i, i, -j, j, -k, k\}$ ale cărui elemente au proprietăţile $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $i\cdot j = k$; $i\cdot k = -j$; $j\cdot i = -k$; $j\cdot k = i$; $k\cdot i = j$; $k\cdot j = -i$ este un grup necomutativ de ordinul 8 şi de exponent 4.
Deoarece $4 / (a\cdot(a-1), b\cdot(b-1))$ şi $(a, a-1) = (b, b-1) = 1$, distingem cazurile:
1) $4 / (a, b)$; 2) $4 / (a-1, b)$; 3) $4 / (a, b-1)$; 4) $4 / (a-1, b-1)$.
Rezultă în mod analog cu cazul I că H este un (a, b) – grup necomutativ.
Suficienţa: Fie $(G, \cdot)$ un (a, b) – grup astfel încât $(a\cdot(a-1), b\cdot(b-1)) = 2$ şi $x, y\in G$
Aplicaţia $x \rightarrow x^a$ este endomorfism, adică $(x\cdot y)^a = x^a\cdot y^a$ (1)
şi $\exists\ u, v\in\mathbf{Z},\ u\cdot a\cdot(a-1) + v\cdot b\cdot(b-1) = 2$ (2)
Simplificând (1) obţinem: $(x\cdot y)^{a-1} = y^{a-1}\cdot x^{a-1}$ (3)
şi $(x\cdot y)^a = (x\cdot y)^{a-1}\cdot(x\cdot y) \overset{(3)}{=} (y^{a-1}\cdot x^{a-1})\cdot(x\cdot y) = y^{a-1}\cdot x^a\cdot y = x^a\cdot y^a$
de unde după simplificări deducem: $x^a\cdot y^{a-1} = y^{a-1}\cdot x^a$ (4)

Din (1) şi (4) rezultă: $(x\cdot y)^{a(a-1)}$

$= \left((x\cdot y)^a\right)^{a-1} \overset{(1),(3)}{=} y^{a(a-1)}\cdot x^{a(a-1)} = \left((y)^a\right)^{a-1}\cdot\left((x)^{a-1}\right)^a$

$\overset{(4)}{=} \left((x)^{a-1}\right)^a\cdot\left((y)^a\right)^{a-1} = x^{a(a-1)}\cdot y^{a(a-1)}$. Rezultă că $x^{a(a-1)}$ şi $y^{a(a-1)}$ comută.

Atunci $(x\cdot y)^{a(a-1)} = x^{a(a-1)}\cdot y^{a(a-1)} = y^{a(a-1)}\cdot x^{a(a-1)} = (y\cdot x)^{a(a-1)}$ (5)

şi $(x\cdot y)^2 \overset{(2)}{=} (x\cdot y)^{u\cdot a(a-1)+v\cdot b(b-1)} \overset{(5)}{=} (y\cdot x)^{u\cdot a(a-1)+v\cdot b(b-1)} \overset{(2)}{=} (y\cdot x)^2$ (6)

Demonstrăm că $x^{a(a-1)}\in Z(G)$.

Cum $2 / a(a-1)$, avem $2 / a$ sau $2 / (a-1)$.

Dacă $2 / a$, atunci $(x\cdot y)^a = \left((x\cdot y)^2\right)^{\frac{a}{2}} = (y\cdot x)^a \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x^a\cdot y^a = y^a\cdot x^a$ şi

$y^a\cdot x^a = x^a\cdot y^a = x^a\cdot y^{a-1}\cdot y \overset{(4)}{=} y^{a-1}\cdot x^a\cdot y$. Simplificând ultima relaţie obţinem $y\cdot x^a = x^a\cdot y$ şi cum y este arbitrar, deducem că $x^a\in Z(G)$, $\forall\ x\in G$.

Dacă $2 / (a-1)$, atunci $x^a\cdot y^a \overset{(1)}{=} (x\cdot y)^a = (x\cdot y)^{a-1}\cdot(x\cdot y) = \left((x\cdot y)^2\right)^{\frac{a-1}{2}}\cdot(x\cdot y) \overset{(6)}{=}$

$= \left((y\cdot x)^2\right)^{\frac{a-1}{2}}\cdot(x\cdot y) = (y\cdot x)^{a-1}\cdot(x\cdot y) \overset{(3)}{=} \left(x^{a-1}\cdot y^{a-1}\right)\cdot(x\cdot y)$ şi după simplificări deducem că $x\cdot y^{a-1} = y^{a-1}\cdot x$, $\forall\ x, y\in G$, adică $y^{a-1}\in Z(G)$, $\forall\ y\in G$.

Aşadar, în orice situaţie, $x^{a(a-1)}\in Z(G)$, $\forall\ x\in G$. (7)

Analog se demonstrează că $x^{b(b-1)}\in Z(G)$, $\forall\ x\in G$.

Avem $(x\cdot y)^2 \overset{(2)}{=} (x\cdot y)^{u\cdot a(a-1)+v\cdot b(b-1)} = (x\cdot y)^{u\cdot a(a-1)}\cdot(x\cdot y)^{vb(b-1)} \overset{(5)}{=} \left(x^{a(a-1)}\cdot y^{a(a-1)}\right)^u\cdot$

$\cdot\left(x^{b(b-1)}\cdot y^{b(b-1)}\right)^v \overset{(7)}{=} x^{u\cdot a(a-1)+v\cdot b(b-1)}\cdot y^{u\cdot a(a-1)+v\cdot b(b-1)} \overset{(2)}{=} x^2\cdot y^2$.

Aşadar $(x\cdot y)^2 = x^2\cdot y^2$, $\forall\ x, y\in G \Rightarrow y\cdot x = x\cdot y$, $\forall\ x, y\in G$, deci grupul este abelian.

4.3. Câteva grupuri de exponent 2

4.3.1. Definiţie *Fie $(G,\ \cdot)$ un grup finit cu elementul neutru e. Cel mai mic număr natural nenul n cu proprietatea că pentru orice $x\in G$, $x^n = e$ se numeşte exponentul grupului G.*

4.3.2. Observaţii

a) Dacă $p\in\mathbf{N}$ este un număr prim şi grupul finit G are exponentul p, G se mai numeşte p-grup elementar.

b) Se ştie (2.1.10) că ordinul unui p-grup elementar este o putere nenulă a lui p.

c) Pentru orice număr prim $p \geq 3$ există p-grupuri necomutative. De exemplu, grupul multiplicativ $G_p = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in Z_p \right\}$ este un grup necomutativ cu p^3 elemente şi are exponentul p.

(Etapa județeană a Olimpiadei de matematică, 2003)

d) Dacă $p = 2$, se ştie că orice grup de exponent 2 este comutativ.

Iată câteva condiții suficiente pentru ca un grup comutativ finit să aibă exponentul 2:

4.3.3. Propoziție *Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu cel puțin 3k elemente ($k \in \mathbf{N}^*$) astfel încât oricare ar fi 3k elemente ale sale există printre acestea k+1 elemente de ordin ≤ 2. Dacă G nu are elemente de ordinul 4, atunci toate elementele lui G sunt de ordin ≤ 2.*

Dana Heuberger

Demonstrație Presupunem că există $c \in G$, $\text{ord}(c) \geq 3 \overset{\text{ord}(c) \neq 4}{\Rightarrow} \text{ord}(c^2) \geq 3$.

Fie $e, a_1, a_2, ..., a_{k-1} \in G$, elemente de ordin ≤ 2. (e = elementul neutru al grupului)

Rezultă că $e, c, c^2, a_1, a_1 \cdot c, a_1 \cdot c^2, ..., a_{k-1}, a_{k-1} \cdot c, a_{k-1} \cdot c^2$ sunt 3k elemente distincte ale lui G, dintre care doar $e, a_1, a_2, ..., a_{k-1}$ au ordinul 2, contradicție.

Rezultă că G nu are alemente de ordin ≥ 3.

4.3.4. Propoziție *Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu cel puțin n elemente, unde $n \in \mathbf{N}^*$, n □ 0 (mod n). Dacă oricare ar fi n elemente ale sale există printre acestea $\left[\frac{n}{3}\right] + 2$ elemente de ordin ≤ 2 şi G nu are elemente de ordinul 4, atunci toate elementele lui G sunt de ordin ≤ 2.*

Dana Heuberger

Demonstrație Presupunem că există $c \in G$, $\text{ord}(c) \geq 3 \overset{\text{ord}(c) \neq 4}{\Rightarrow} \text{ord}(c^2) \geq 3$.

$n = 3k + r$, $k = \left[\frac{n}{3}\right]$, $r \in \{1, 2\}$.

Alegem k+1 elemente de ordin ≤ 2 ale lui G: $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$.
Atunci $a_1, a_1 \cdot c, a_1 \cdot c^2, a_2, a_2 \cdot c, a_2 \cdot c^2, ..., a_k, a_k \cdot c, a_k \cdot c^2, a_{k+1}, a_{k+1} \cdot c$ sunt 3k+2 elemente distincte ale lui G, dintre care doar k+1 au ordinul ≤ 2, contradicţie.

4.3.5. Propoziţie. *Fie $(G, \cdot)$ un grup finit comutativ de ordin $n \ge \left[\frac{3p}{2}\right]$, ($p \in \mathbf{N}$, $p \ge 2$). Dacă oricare ar fi p elemente ale sale există printre acestea 2 elemente de ordin ≤ 2 şi G nu are elemente de ordinul 4, atunci toate elementele lui G sunt de ordin ≤ 2.*

Dana Heuberger

Demonstraţie Dacă $p = 2$, ipoteza înseamnă că toate elementele grupului au ordin ≤ 2.
Pentru $p \ge 3$, din p elemente ale grupului alegem elementele a_1, a_2 de ordinul 2. Celorlalte $p-2$ elemente le mai adăugăm 2 elemente şi obţinem alte p elemente
ale grupului, din care mai alegem 2 elemente de ordin ≤ 2: a_3, a_4.
Continuăm procedeul cu elementele rămase, până când obţinem:
1) $n - p + 2$ elemente de ordin ≤ 2, dacă $n - p$ este un număr par,
2) $n - p + 1$ elemente de ordin ≤ 2, dacă $n - p$ este un număr impar.
Aşadar am obţinut $n - p + r$ elemente de ordinul ≤ 2 ale grupului, cu $r \in \{1, 2\}$
Fie $c \in G$, unul din cele $p - r$ elemente cărora nu le cunoaştem ordinul.
Presupunem că $\text{ord}(c) \ge 3 \overset{\text{ord}(c) \ne 4}{\Rightarrow} \text{ord}(c^2) \ge 3$.
Obţinem elementele $c \cdot a_i, c^2 \cdot a_i \in G$, $i \in \{1, 2, ..., n - p + r\}$ de ordin ≥ 3, în număr de $2 \cdot (n - p + r)$ şi distincte două câte două.
$n \ge \left[\frac{3p}{2}\right] \Rightarrow n > \frac{3p}{2} - 1 \Leftrightarrow 2n > 3p - 2 \ge 3p - 2r \Rightarrow 2n - 2p + 2r > p$, ceea ce înseamnă că am găsit mai mult de p elemente ale grupului care au ordinul > 2, contradicţie cu ipoteza.
Rezultă că şi celelalte $p - r$ elemente ale grupului au ordinul ≤ 2, adică toate elemente ale grupului au ordinul ≤ 2.

4.3.6. Propoziţie *Dacă $(G, \cdot)$ este un grup finit de ordin $n \ge 2p-1$, ($p \in \mathbf{N}$, $p \ge 2$) şi oricare ar fi p elemente ale sale există printre acestea 2 elemente din Z(G) atunci grupul este comutativ.*

Dana Heuberger

Demonstrație Dacă $p = 2$, ipoteza înseamnă că toate elementele grupului au ordin ≤ 2, deci grupul este comutativ.
Pentru $p \geq 3$, procedând analog cu problema anterioară se obține:
$\text{ord}(Z(G)) \geq n - p + r \geq 2p - 1 - p + r = p + r - 1 > p - r$, căci $r \in \{1, 2\}$.
Aşadar $\text{ord}(Z(G)) > \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(G)$ şi cum $Z(G)$ este un subgrup al grupului $(G, \cdot)$, din teorema lui Lagrange rezultă că $Z(G) = G$ şi deci grupul este comutativ.

Bibliografie

1. T. Albu, Ion D. Ion – Itinerar elementar în algebra superioară Ed ALL, Bucureşti, 1997
2. Gh. Andrei, C-tin Caragea, V. Ene – Algebră – Culegere de probleme pentru examene de admitere şi olimpiade şcolare, Ed. Scorpion 7, Bucureşti 1995
3. M. Deaconescu – „Asupra comutativității grupurilor”, G. M. 4-5 / 1990, pag. 133-134 şiG. M. 9 / 1991, pag. 324-325
4. D. Heuberger – „Aplicații ale centrului unui grup”, Argument, revista de matematică a C. N. „Gh. Şincai” Baia Mare, nr. 3, pag 9-12
5. D. Heuberger – „Câteva grupuri cu toate elementele de ordin ≤ 2”, Argument, revista de matematică a C. N. „Gh. Şincai” Baia Mare, nr. 5, pag 10-12
6. D. Isac – „Probleme de comutativitate”, revista „Astra Matematică”, vol 1, nr2,
1990, pag. 32-34
7. I. Purdea, Gh Pic – Tratat de algebră modernă, vol I, Ed Academiei, Bucureşti, 1977
8. D. Andrica, N. Bişboacă I. Şerdean, M. Andronache, M. Piticari, D. Zaharia
Matematică – Manual pentru clasa a XII-a, M1, Ed. Plus, 2002
9. Colecția G. M.

Probleme rezolvate

R4.4.1. *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup de ordinul* $p \in \boldsymbol{N}$ *astfel încât există* $n \in \boldsymbol{Z}$ *pentru care funcțiile* $f, g : G \to G$, $f(x) = x^n$ *și* $g(x) = x^{n+2}$ *sunt endomorfisme surjective. Demonstrați că:*

a) *dacă* p *este impar, atunci grupul* $(G, \cdot)$ *este abelian.*

b) *dacă* p *este par,* $p \geq 4$, $p \neq 2^k$ $(k \in \boldsymbol{N})$, *atunci* $|Z(G)| \geq 3$.

Dana Heuberger

<u>*Soluție:*</u> Fie $x \in G$. Din propoziția 4.1.10. rezultă că $x^{n-1} \in Z(G)$ și $x^{n+1} \in Z(G)$.

Fie $d = (n-1, n+1)$. Atunci $d / (n-1)$ și $d / (n+1)$, deci $d / 2$.

Așadar $d \in \{1, 2\}$ și $x^d \in Z(G)$ (1)

Notând cu e elementul neutru al grupului, avem că $e = x^p \in Z(G)$ și din (1) rezultă că și $x^{(d, p)} \in Z(G)$.

a) p impar $\Rightarrow$ $(d, p) = 1$ și deci $x^1 \in Z(G)$, $\forall\ x \in G$. Așadar grupul G este abelian.

b) Dacă $d = 1$, atunci relația (1) devine $x \in Z(G)$, $\forall\ x \in G$, adică G este comutativ

Dacă $d = 2$, (1) $\Leftrightarrow$ $x^2 \in Z(G)$, $\forall\ x \in G$.

Cum $d = 2 = (n-1, n+1)$, rezultă că n este impar.

Din teorema lui Cauchy obținem că există $t \geq 3$, t număr prim, $t / \mathrm{ord}(G)$.

Atunci G are cel puțin un element x_0 de ordinul t.

Avem $x_0^t = e \in Z(G)$ și $x_0^2 \in Z(G)$, deci $x_0^{(t, 2)} = x_0 \in Z(G)$.

Cum $p = \mathrm{ord}(G)$ este par, din aceeași teoremă rezultă că există $a \in G$, $\mathrm{ord}(a) = 2$.

Din faptul că f și g sunt morfisme obținem pentru a și un element oarecare $x \in G$:

$(a \cdot x)^n = a^n \cdot x^n \overset{n \text{ impar}}{=} a \cdot x^n$ și analog $(a \cdot x)^{n+2} = a \cdot x^{n+2}$.

Cum $(a \cdot x)^{n+2} = (a \cdot x)^2 \cdot (a \cdot x)^n$, folosind relațiile anterioare obținem:

$(a \cdot x)^2 \cdot a \cdot x^n = a \cdot x^{n+2} \Leftrightarrow (a \cdot x)^2 \cdot a = a \cdot x^2 \Leftrightarrow a \cdot x \cdot a \cdot x \cdot a = a \cdot x^2 \Leftrightarrow x \cdot a \cdot x \cdot a = x^2 \Leftrightarrow$

$x \cdot a \cdot x \cdot a^2 = x^2 \cdot a \overset{\text{ord } a=2}{\Leftrightarrow} x \cdot a \cdot x = x^2 \cdot a \Leftrightarrow a \cdot x = x \cdot a \Leftrightarrow a \in Z(G)$.

Cum $e, a, x_0 \in Z(G)$, evident $|Z(G)| \geq 3$.

Să observăm că există grupuri de ordinul 2^k (cu $k \in \boldsymbol{N}^*$) pentru care $|Z(G)| < 3$.

Un astfel de grup este grupul cuaternionilor $K = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, cu

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k$, $j \cdot k = i$, $k \cdot i = j$, $j \cdot i = -k$, $k \cdot j = -i$, $i \cdot k = -j$ care are $Z(G) = \{1, -1\}$. Aşadar condiţia $p \neq 2^k$ $(k \in \mathbf{N})$ este esenţială.

R4.4.2. *Fie $(G, \cdot)$ un grup de ordinul $p \in \mathbf{N}$, cu $p \geq 2$ impar. Dacă funcţia*
$f : G \to G$, $f(x) = x^5$ este un morfism surjectiv, atunci grupul $(G, \cdot)$ este abelian.

Dana Heuberger

<u>Soluţie:</u> Fie $x \in G$. f fiind surjectivă, din propoziţia 4.1.10. rezultă că $x^4 \in Z(G)$.

<u>Metoda I.</u> Fie $x, y \in G$. f morfism $\Leftrightarrow$ $(x \cdot y)^5 = x^5 \cdot y^5$ $\Leftrightarrow$ $(y \cdot x)^4 = x^4 \cdot y^4$ (1)

$x^4 \cdot y^4 \overset{x^4 \in Z(G)}{=} y^4 \cdot x^4 \overset{(1)}{=} (x \cdot y)^4 \overset{(1)}{\Rightarrow} (x \cdot y)^4 = (y \cdot x)^4$ (2)

$p = 2 \cdot t + 1 \Rightarrow (x \cdot y)^{2 \cdot t+1} = (y \cdot x)^{2 \cdot t+1} = e$ (3)

Ridicând la pătrat relaţia (3) obţinem: $(x \cdot y)^{4 \cdot t+2} = (y \cdot x)^{4 \cdot t+2}$

Din (2) obţinem $(x \cdot y)^{4 \cdot t} = (y \cdot x)^{4 \cdot t}$ şi folosind şi relaţia precedentă deducem: $(x \cdot y)^2 = (y \cdot x)^2 \Rightarrow (x \cdot y)^{2 \cdot t} = (y \cdot x)^{2 \cdot t}$. Folosind şi relaţia (3) obţinem $x \cdot y = y \cdot x$ şi cum x şi y sunt oarecare, rezultă că G este abelian.

<u>Metoda a II-a.</u> Cum $e = x^p \in Z(G)$ deducem din propoziţia 4.1.8. că şi $x^{(4, p)} = x^1 \in Z(G)$, $\forall x \in G$, adică G e abelian.

<u>*Observaţii*</u>:

1) Este evidentă eleganţa metodei a doua, chiar dacă necesită cunoştinţe în plus.

2) Se poate demonstra analog următoarea generalizare:

Fie $(G, \cdot)$ un grup de ordinul $p \in \mathbf{N}$, cu $p \geq 2$ impar şi fie $k \in \mathbf{N}$.

Dacă funcţia $f : G \to G$, $f(x) = x^{2^k+1}$ este un morfism surjectiv, atunci grupul $(G, \cdot)$ este abelian.

3) Fie $(G, \cdot)$ un grup de ordinul $p \in \mathbf{N}$, cu $p \geq 2$ impar.

Dacă $\forall x \in G$, $\exists k \in \mathbf{N}$ astfel încât $x^{2^k} \in Z(G)$, atunci grupul G este abelian.

R4.4.3. *Fie grupul $(G, \cdot)$ şi $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ astfel încât funcţia*
$f : G \to G$, $f(x) = x^{n+1}$ este un automorfism al lui G. Să se demonstreze că:

a) *Funcția* $g : G \to G,\ g(x) = x^n$ *este un endomorfism al lui* G.
b) *Dacă* g *este injectivă sau* g *este surjectivă, atunci* G *este grup abelian.*

(Olimpiada Județeană Constanța, 1994)

<u>*Soluție:*</u> **a)** f automorfism $\Rightarrow$ f morfism surjectiv $\overset{4.1.10}{\Rightarrow}$ $x^n \in Z(G),\ \forall\, x \in G$
Fie $x,\ y \in G$. $g(x \cdot y) = (x \cdot y)^n = (x \cdot y)^{n+1} \cdot (x \cdot y)^{-1} = (x \cdot y)^{n+1} \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} = x^{n+1} \cdot y^{n+1} \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} =$
$= x^{n+1} \cdot y^n \cdot x^{-1} \overset{y^n \in Z(G)}{=} x^{n+1} \cdot x^{-1} \cdot y^n = x^n \cdot y^n,\ \forall\, x, y \in G \Rightarrow$ g este endomorfism.

b) <u>I. g injectivă</u> Fie $x, y \in G$. Avem $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \overset{x^n \in Z(G)}{=} y^n \cdot x^n = (y \cdot x)^n \overset{g \text{ inj}}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow x \cdot y = y \cdot x,\ \forall\, x, y \in G \Leftrightarrow$ G este grup abelian.
<u>II. g surjectivă</u> Fie $x, y \in G$. Atunci $\exists\, \alpha \in G,\ \alpha^n = y$.
$x \cdot y = x \cdot \alpha^n \overset{\alpha^n \in Z(G)}{=} \alpha^n \cdot x = y \cdot x,\ \forall\, x, y \in G \Rightarrow$ G este grup abelian.

5. Morfisme de grupuri

Considerăm cunoscute noțiunile despre morfisme de grupuri din programa şcolară. Notăm, ca de obicei, $End(G) = \{f : G \to G \mid f \text{ endomorfism}\}$ şi

$$Aut(G) = \{f : G \to G \mid f \text{ automorfism}\}$$

În cele ce urmează vom stabili câteva proprietăți interesante referitoare la aceste mulțimi.

5.1. Caracteristici ale lui Hom(G, H)

Pentru început vom expune câteva proprietăți generale în legătură cu morfismele de grupuri.

Fie (G, B) şi (H, ( ) două grupuri.
Notăm cu $Hom(G, H) = \{ f \in G^H \mid f \text{ morfism de grupuri}\}$.
Dacă grupul (H, ( ) este comutativ, atunci pe mulțimea Hom(G, H) putem defini o lege de compoziție internă, determinată în mod natural de cele două operații date: dacă f, g∈Hom(G, H), definim h = f(g prin h(x) = (f(g)(x) = f(x)(g(x), ∀ x∈G

<u>5.1.1. Propoziție</u> *Dacă (G, B) şi (H, ( ) sunt grupuri, iar (H, ( ) este comutativ, atunci (Hom(G, H), ( ) este grup comutativ (cu elementul neutru funcția constantă $f(x) = e_H$, $\forall x \in G$ şi simetricul unui morfism f fiind morfismul $\bar{f}$, cu $\bar{f}(x) = f(x^{-1})$, $\forall x \in G$).*

<u>Demonstrație:</u> Dacă f, g∈Hom(G, H) atunci (f(g)(xBy) = f(xBy)(g(xBy) =
= (f(x)(f(y))((g(x)(g(y)) = (f(x)(g(x))((f(y)(g(y)) = (f(g)(x)((f(g)(y),
deci f(g este morfism.
Dacă e_H este elementul neutru din H şi notăm tot cu e_H morfismul constant $e_H(x) = e_H$, $\forall x \in H$, atunci $f \cdot e_H = e_H \cdot f = f$, pentru orice f∈Hom(G, H).
Definind $\bar{f}$ prin $\bar{f}(x) = f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$, $\forall x \in G$, $\bar{f}$ verifică relația $f \cdot \bar{f} = \bar{f} \cdot f = e_H$.
Asociativitatea se verifică uşor.

<u>5.1.2. Observații</u> a) Dacă (G, ( ) este un grup comutativ, atunci mulțimea endomorfismelor (End(G), ( ) formează o structură de grup.

b) Fără ipoteza de comutativitate, operația „(” nu e lege de compoziție pe End(G)

În continuare vom considera (G, ·) un grup arbitrar şi vom urmări structurile algebrice dotate cu operația de compunere a funcțiilor definite pe G.

Definim End(G) = Hom(G, G) mulțimea endomorfismelor lui G.
Aut(G) = $\{f \in End(G) \mid f$ bijectivă$\}$ mulțimea automorfismelor lui G.
Inn(G) = $\{i_G \in Aut(G) \mid g \in G\}$, unde $i_G(x) = g^{-1} \cdot x \cdot g$, $\forall\ x \in G$
mulțimea automorfismelor interioare ale lui G.

<u>5.1.3. Propoziție</u>
a) *(End(G), B) este monoid.*
b) *(Aut(G), B) este grup*
c) *Aut(G) = U(End(G)) este grupul unităților monoidului End(G).*

<u>Demonstrație:</u> **a)** În general, compunerea morfismelor este morfism, elementul neutru este funcția identică a lui G, care este endomorfism, compunerea funcțiilor este asociativă.
b), c) Este suficient să demonstrăm c), deci că automorfismele sunt elementele inversabile ale monoidului (End(G), B), ceea ce este evident, din definiție.

<u>5.1.4. Propoziție</u> *Mulțimea automorfismelor interioare (Inn(G), B) formează un subgrup normal în grupul automorfismelor (Aut(G), B).*

<u>Demonstrație:</u> Dacă $i_{g_1}, i_{g_2} \in Inn(G)$, atunci $i_{g_1} B\, i_{g_2} = i_{g_2 \cdot g_1} \in Inn(G)$,
$(i_g)^{-1} = i_{g^{-1}}$,
deci (Inn(G), B) este subgrup. Pentru a verifica faptul că Inn(G) este subgrup normal în Aut(G) trebuie să arătăm că $f^{-1} B Inn(G) B f = Inn(G)$, $\forall\ f \in Aut(G)$.
$(f^{-1} B i_g B f)(x) = f^{-1}(i_g(f(x))) = f^{-1}(g^{-1} \cdot f(x) \cdot g) = f^{-1}(g^{-1}) \cdot x \cdot f^{-1}(g) =$
$\left(f^{-1}(g)\right)^{-1} \cdot x \cdot f^{-1}(g) =$
$= (g')^{-1} \cdot x \cdot g' = i_{g'}(x)$, unde $g' = f^{-1}(G)$, deci Inn(G) e subgrup normal în Aut(G).

<u>5.1.5. Propoziție</u> *Dacă (G, ·) este un grup, atunci funcția $F : G \to$ Inn(G),* *F(g) = $i_{g^{-1}}$ este un morfism surjectiv de grupuri şi nucleul său este Ker(F) = Z(G), centrul grupului G.*

Demonstrație: Avem $F(g_1 \cdot g_2) = i_{(g_1 \cdot g_2)^{-1}} = i_{g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}} = i_{g_1^{-1}} \circ i_{g_2^{-1}} = F(g_1) \circ F(g_2)$, deci F este morfism (evident surjectiv).

$\mathrm{Ker}(F) = \{g \in G \mid F(g) = 1_G\} = \{g \in G \mid i_{g^{-1}}(x) = x, \forall x \in G\} =$

$= \{g \in G \mid g \cdot x \cdot g^{-1} = x, \ \forall x \in G\} = \{g \in G \mid g \cdot x = x \cdot g, \ \forall x \in G\} = Z(G)$

5.1.6. Observație Conform primei teoreme de izomorfism, Z(G) este subgrup normal în G şi grupul cât G / Z(G) este izomorf cu grupul Inn(G).
Deci: $G / Z(G) \approx \mathrm{Inn}(G)$

Cu ajutorul automorfismelor interioare se defineşte o relație de echivalență importantă pe mulțimea P(G) a submulțimilor unui grup G, relația de conjugare.

5.1.7. Definiție *Spunem că $X_1, X_2 \in P(G)$ sunt submulțimi conjugate (şi notăm $X_1 \sim X_2$), dacă există un automorfism interior $f \in \mathrm{Inn}(G)$ astfel ca $f(X_1) = X_2$.*

Dacă H este un subgrup al lui G, se defineşte relația de conjugare relativă la H:

5.1.8. Definiție *Spunem că $X_1, X_2 \in P(G)$ sunt submulțimi conjugate relativ la subgrupul H (şi notăm $X_1 \overset{H}{\sim} X_2$) dacă există $h \in H$ astfel ca $X_2 = h^{-1} \cdot X_1 \cdot h = i_H(X_1)$*

5.1.9. Observații

a) Relația de conjugare este o relație de echivalență pe P(G). Mai mult, toate mulțimile dintr-o clasă de echivalență au acelaşi cardinal.

b) Relația de conjugare relativă la un subgrup este o relație de echivalență pe P(G) şi toate mulțimile unei clase de echivalență au acelaşi cardinal.

c) Dacă grupul G este comutativ, atunci relația de conjugare este relația de egalitate.

d) Dacă subgrupul H este inclus în centrul grupului G atunci relația de conjugare relativă la H este relația de egalitate.

Dacă restrângem relațiile de conjugare la submulțimile lui G formate din câte un element, identificând $g \in G$ cu $\{g\} \in P(G)$ obținem relații pe G:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists\, g\in G,\ y = g^{-1}\cdot x\cdot g \qquad \text{şi} \qquad x \overset{H}{\sim} y \Leftrightarrow \exists\, h\in H,\ y = h^{-1}\cdot x\cdot h$$

5.1.10. Observaţii

a) Clasele de echivalenţă pentru relaţiile de conjugare sunt:

$$\hat{x} = \{g^{-1}\cdot x\cdot g \mid g\in G\} \qquad \text{şi} \qquad \hat{x}_H = \{h^{-1}\cdot x\cdot h \mid h\in G\}$$

b) O clasă de conjugare este formată dintr-un singur element, $\hat{x} = \{x\}$ dacă şi numai dacă $x\in Z(G)$.

c) Dacă notăm cu $\hat{G}$ mulţimea claselor de conjugare pentru un grup finit, avem:

$$|G| = \sum_{\hat{g}\in\hat{G}} |\hat{g}| = |Z(G)| + \sum_{\substack{\hat{g}\in\hat{G}\\ |\hat{g}|\geq 2}} |\hat{g}|.$$

Exemplu: Considerăm grupul $GL_n(\mathbf{C})$ al matricelor pătratice de ordinul n, nesingulare. Relaţia de conjugare este relaţia de asemănare: două matrice A, B sunt asemenea (conjugate) dacă există o matrice $P\in GL_n(\mathbf{C})$ astfel ca $B = P^{-1}\cdot A\cdot P$.

5.2. Caracteristici ale lui End(G) pentru unele grupuri finite

Fie grupul comutativ $(G, \cdot)$. Pe $End(G)$ definim operaţia:

$\cdot : End(G) \times End(G) \to End(G)$, $(f\cdot g)(x) \overset{def}{=} f(x)\cdot g(x)$, $\forall\, x\in G$. (ca în 5.1.)

Atunci (5.1.1.) $(End(G), \cdot)$ este grup abelian, iar dacă grupul G este finit, atunci, evident şi grupul $End(G)$ este finit.

Reamintim că elementul neutru al acestui grup este funcţia constantă $\bar{e} \in End(G)$

$\bar{e}(x) = e$, $\forall\, x\in G$ şi că pentru $f\in End(G)$, $\bar{f} \in End(G)$, $\bar{f}(x) = f(x^{-1})$ este simetricul său în grupul $(End(G), \cdot)$.

5.2.1. Propoziţie *Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian finit. Atunci numărul endomorfis-melor lui G are aceeaşi paritate cu numărul elementelor lui G.*

Marian Andronache

Demonstraţie: Dacă $|End(G)| = 2k$, cu $k\in\mathbf{N}^*$, din teorema lui Cauchy obţinem că există $f\in End(G)$, $ord(f) = 2$ (şi deci $f \neq \bar{e}$). Aşadar, $\forall\, x\in G$, $f^2(x) = \bar{e}(x) = e$.

Fie $x \in G$ astfel încât $f(x) \neq e$. Atunci $ord(f(x)) = 2$ şi deci G are un element de ordin par, aşadar (din teorema lui Lagrange) rezultă că $ord(G)$ este par.
Reciproc, dacă $ord(G)$ este par, există $a \in G$, $ord(a) = 2$.
Cum $(End(G), \cdot\ ) =$ este grup, avem $1_G^{|End(G)|}(a) = \bar{e}(a) = e$ şi deci $a^{|End(G)|} = e$ şi cum $a^2 = e$ rezultă că $|End(G)|$ este par (din 1.1.10, C3.)

5.2.2. Propoziţie *Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian finit şi H un subgrup al său. Notăm $F(H) = \{f \in End(G) / f(H) = H\}$. Atunci: $f \in F(H) \Leftrightarrow \bar{f} \in F(H)$.*

Demonstraţie: „$\Rightarrow$" Dacă $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.
Atunci: $\bar{f}(x) \overset{def}{=} f(x^{-1}) \overset{ip}{\in} H$ şi deci $\bar{f}(H) \subset H$.
Fie $y \in H$. Atunci, cum $f(H) = H$, $\exists\ x \in H$, $y = f(x) = \bar{f}(x^{-1}) \Rightarrow y \in \bar{f}(H)$ şi deci $H \subset \bar{f}(H)$. În concluzie, $\bar{f}(H) = H$, adică $\bar{f} \in F(H)$.
„$\Leftarrow$" Evident, folosind implicaţia „$\Rightarrow$" şi faptul că $\bar{\bar{f}} = f$.

5.2.3. Propoziţie *Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian finit şi $H \neq \{e\}$ un subgrup al său,*
a) *Dacă există $a \in H$, cu $a^2 \neq e$, atunci $/F(H)/$ este par.*
b) *Dacă există $a \in G$, cu $a^2 \neq e$, atunci $/Aut(G)/$ este par.*

Marian Andronache

Demonstraţie: **a)** Fie $f \in F(H)$. Atunci $f(a^2) \in H$.
G fiind grup finit, funcţia surjectivă $f_{/H} : H \to H$ este şi injectivă şi cum $f(e) = e$ şi $a^2 \neq e$, rezultă că $f(a^2) \neq e$.
Avem (din 5.2.2.) că şi $\bar{f} \in F(H)$.
Presupunem că $f = \bar{f}$. Atunci $f(a) = \bar{f}(a) = f(a^{-1})$ şi deci $f(a^2) = e$, fals.
Aşadar, $F(H) = \bigcup_{f \in H} \{f, \bar{f}\}$ şi deci $|F(H)|$ este par.
b) G fiind grup finit, endomorfismele f astfel încât $f(G) = G$ sunt şi injective şi deci $F(G) = Aut(G)$ şi din punctul a) rezultă concluzia.

5.2.4. Consecinţă *Grupurile comutative finite care au un număr impar de automorfisme sunt grupul nul şi grupurile de ordinul 2.*

Demonstraţie: Din proprietatea anterioară deducem că pentru ca $|Aut(G)|$ să fie impar e necesar ca $\forall\ a \in G$, $a^2 = e$. Atunci G se poate organiza ca $\mathbf{Z}_2$ –

spațiu vectorial. Dacă $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ este o bază în G, $\forall$ $x\in G$, $\exists!$ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \{0, 1\}$ astfel încât $x = e_1^{\alpha_1} \cdot e_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot e_k^{\alpha_k}$.

<u>I. $k \geq 2$</u> Definim $f : G \to G$, $f(x) = f\left(e_1^{\alpha_1} \cdot e_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot e_k^{\alpha_k}\right) = e_1^{\alpha_2} \cdot e_2^{\alpha_1} \cdot ... \cdot e_k^{\alpha_k}$.

Se verifică ușor că $f \in Aut(G)$ și $fBf = 1_G$, adică $ord(f) = 2$, deci $|Aut(G)|$ e par.

<u>II. $k = 1$</u> Atunci $G \approx \mathbf{Z}_2$ și $Aut(\mathbf{Z}_2) = \{1_{Z_2}\}$.

<u>III. $k = 0$</u> Atunci $G = \{e\}$ și $Aut(G) = \{1_G\}$.

Așadar grupurile căutate sunt $\{e\}$ și grupurile cu 2 elemente.

<u>**5.2.5. Definiție**</u> *Fie $(G, \cdot)$ un grup. Funcția $f : G \to G$ are proprietatea (S) dacă oricare ar fi un subgrup H al lui G, f(H) este un subgrup al lui G.*

<u>**5.2.6. Propoziție**</u> *Fie $(G, \cdot)$ un grup și H un subgrup propriu al său. Atunci funcția $f : G \to G$, $f(x) = \begin{cases} x, x \in H \\ e, x \in G \setminus H \end{cases}$ are proprietatea (S) și f nu este un endomorfism al lui G.*

<u>*Demonstrație:*</u> Evident, $f(H) = H$ și $\forall$ H_1 subgrup al lui G, $f(H_1) = H_1 \cap H$. Cum intersecția a 2 subgrupuri ale lui G este un subgrup al lui G, obținem că f are proprietatea (S).

Fie $a\in H$, $a \neq e$ și $b \in G \setminus H$. Atunci $a \cdot b \in G \setminus H$.

Rezultă $e = f(a \cdot b)$, iar $f(a) \cdot f(b) = a$ și deci f nu este morfism.

<u>**5.2.7. Propoziție**</u> *Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $|G| \geq 3$. Dacă orice funcție cu (S) este un endomorfism al lui G, atunci $(G, \cdot) \approx (\mathbf{Z}_3, +)$.*

Marian Andronache

<u>*Demonstrație:*</u> Din propoziția anterioară deducem că pentru ca ipoteza să fie verificată este necesar ca G să nu aibă subgrupuri proprii. (Așadar, dacă G este grup finit, ordinul său trebuie să fie prim)

Presupunem că $ord(G) \geq 4$. Atunci G nu are elemente de ordinul 2 (un element de ordinul 2 ar genera un subgrup propriu)

Fie $a, b\in G \setminus \{e\}$, $a \neq b$, $a^{-1} \neq b$ și funcția $f : G \to G$, $f(x) = \begin{cases} b, x = a \\ a, x = b \\ x, \text{în rest} \end{cases}$.

din ipoteză, cum f are proprietatea (S) rezultă că f este nu endomorfism al lui G.
Avem $a^{-1} \neq a$ şi $a^{-1} \neq b$ (din alegerea făcută).
Mai mult, $b^{-1} = (f(a))^{-1} = f(a^{-1}) = a^{-1} \Rightarrow b = a$, contradicţie.
Aşadar $ord(G) = 3$ şi $(G, \cdot) \approx (\mathbf{Z}_3, +)$.

5.3. Transport de structură

Scopul acestui paragraf este de a furniza o metodă mai simplă de a demonstra că o mulţime are structură de grup în raport cu o operaţie oarecare, decât metoda verificării efective a axiomelor din definiţie. Pentru aceasta, va fi suficient să identificăm o funcţie bijectivă convenabilă de la mulţimea respectivă la un grup cunoscut, datorită următorului rezultat:

5.3.1. Teoremă *Fie $(G, ()$ un grup, M o mulţime nevidă şi $f : G \to M$ o funcţie bijectivă. Atunci:*
a) *există o unică lege „B” pe M astfel încât $\forall x, y \in G$, $f(x(y) = f(x)Bf(y)$*
b) *(M, B) este un grup izomorf cu $(G, ()$*
(Spunem că legea „B” este obţinută prin transportul legii „(” de la G la M, prin funcţia f.)

Demonstraţie: Fie $\alpha, \beta \in M$. Definim $\alpha B\beta = f(f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(\beta))$
$f^{-1}(\alpha) \in G$, $f^{-1}(\beta) \in G \Rightarrow f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(\beta) \in G \Rightarrow \alpha B\beta \in G$ şi „B” e lege de compoziţie
Asociativitatea: Fie $\alpha, \beta, \gamma \in M$. $(\alpha B\beta)B\gamma = f(f^{-1}(\alpha B\beta)(f^{-1}(\gamma)) =$

$$f(f^{-1}(f(f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(\beta)))(f^{-1}(\gamma)) = f((f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(\beta))(f^{-1}(\gamma)) \underset{asoc}{\overset{*}{=}} f(f^{-1}(\alpha)((f^{-1}(\beta)(f^{-1}(\gamma)))$$

$= f((f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(f(f^{-1}(\beta))(f^{-1}(\gamma)))) = f((f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(\beta B\gamma)) = \alpha B(\beta B\gamma)$
Element neutru: Dacă $e \in G$ este elementul neutru, notăm $e' = f(e) \in M$.
Fie $\alpha \in M$. $\alpha Be' = f(f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(e')) = f(f^{-1}(\alpha)(e) = f(f^{-1}(\alpha) = \alpha$.
Analog rezultă $e'B\alpha = \alpha$ şi deci e' este elementul neutru al lui (M, B).
Elemente simetrizabile: Fie $\alpha \in M \overset{f \text{ bijectivă}}{\Rightarrow} \exists!\, x \in G$, $f(x) = \alpha$.
Notăm $\alpha' = f(x')$, unde x' este simetricul din G al lui x.
$\alpha B\alpha' = f(f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(\alpha')) = f(x(x') = f(e) = e'$ şi analog obţinem $\alpha' B\alpha = e'$,
aşadar α' este simetricul din M al lui α.
În concluzie, (M, B) este grup.
Mai mult, $\forall x, y \in G$, $f(x)Bf(y) = f(f^{-1}(f(x))(f^{-1}(f(y))) = f(x(y)$.
Demonstrăm acum că „B” este unica lege cu proprietatea din enunţ.

Fie „$\perp$” o lege de compoziție pe M astfel încât $f(x(y) = f(x) \perp f(y)$, $\forall$ x, $y \in G$.

Pentru $\alpha, \beta \in M$, $\exists!$ $x, y \in G$ astfel încât $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$.

$\alpha \perp \beta = f(x) \perp f(y) = f(x(y) = f(f^{-1}(\alpha)(f^{-1}(\beta)) = \alpha B \beta$, așadar legile coincid.

5.3.2. Observații

a) Dacă grupul $(G, ($ este comutativ, atunci și grupul (M, B) este comutativ.

b) f este un izomorfism de la G la M.

c) Dacă pentru grupul $(G, ($ și mulțimea nevidă M avem funcția bijectivă

$g : M \to G$, atunci există o unică lege „B” pe M astfel încât

$$\forall\ x, y \in G,\quad g(xBy) = g(x)(g(y),$$

și anume: $$\forall\ \alpha, \beta \in M,\ \alpha B \beta = g^{-1}(g(\alpha)(g(\beta))$$

iar (M, B) este un grup izomorf cu grupul $(G, ($.

5.3.3. Exemple

1) a) să se arate că funcția $f\,(-1, 1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ este bijectivă.

b) Să se înzestreze mulțimea $G = (-1, 1)$ cu o structură de grup comutativ.

Soluție: **a)** f este strict crescătoare, deci injectivă.

f e continuă pe $(-1, 1)$ și $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \infty$, deci f e și surjectivă.

b) Conform observației 5.3.2. c), considerând grupul comutativ $(\mathbf{R}, +)$ și definind legea „B” astfel: $xBy = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2} + \mathrm{tg}\dfrac{\pi y}{2}\right)$, $\forall\ x, y \in (-1, 1)$,

obținem că (G, B) este grup abelian și $(G, B) \approx (\mathbf{R}, +)$.

2) Determinați grupul $(G, ($ știind că funcția $f: (0, \infty) \to G$, $f(x) = x+1$ este un izomorfism de grupuri de la $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$ la $(G, ($.

Soluție: f bijectivă $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\, f = G$, dar $\mathrm{Im}\, f = (1, \infty)$ și deci $G = (1, \infty)$.

Grupul $(G, ($ se obține prin transport de structură al grupului $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$ prin funcția f și deci legea este: $x(y = f(f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(y))$, $\forall\ x, y \in (1, \infty)$.

Avem $f^{-1}: (1, \infty) \to (0, \infty)$, $f^{-1}(y) = y-1$ și deci

$$x(y = f((x-1)(y-1)) = (x-1)(y-1)+1 = x\cdot y - x - y + 2,\ \forall\ x, y \in (1, \infty)$$

Bibliografie

1. Gh. Andrei, C-tin Caragea, **V. Ene** – Algebră – Culegere de probleme pentru examene de admitere şi olimpiade şcolare, Ed. Scorpion 7, Bucureşti 1995
2. M. Burtea, G. Burtea – Matematică – clasa a XII-a – Elemente de analiză matematică. Algebră superioară, Ed. Carminis 2001
3. I. Purdea, Gh Pic – Tratat de algebră modernă, vol I, Ed Academiei, Bucureşti, 1977
4. T. Albu, Ion D. Ion – Itinerar elementar în algebra superioară Ed ALL, Bucureşti, 1997
5. D. Andrica, N. Bişboacă, I. Şerdean, M. Andronache, M. Piticari, D. Zaharia - Matematică – Manual pentru clasa a XII-a, M1, Ed. Plus, 2002
6. Colecția G. M.

Probleme rezolvate

R5.4.1. *Să se arate că $Hom(\mathbf{Z}, G) \approx G$, pentru orice grup G. ($\mathbf{Z}$ este grupul aditiv al numerelor întregi)*

<u>Soluție:</u> Un morfism $f \in Hom(\mathbf{Z}, G)$ este unic determinat de valoarea $f(1)$, pentru că $\forall\ k \in \mathbf{Z}$, $f(l) = k \cdot f(1)$.

Se verifică uşor că funcția $F : Hom(\mathbf{Z}, G) \to G$, $F(f) = f(1)$ este un izomorfism de grupuri.

R5.4.2. *Să se arate că $End(\mathbf{Q}) \approx \mathbf{Q}$.*

<u>Soluție:</u> Se demonstrează uşor că dacă $f \in End(\mathbf{Q})$ şi $f(1) = a \in \mathbf{Q}$, atunci $\forall\ x \in \mathbf{Q}$, $f(x) = a \cdot x$ şi că funcția $F : End(\mathbf{Q}) \to \mathbf{Q}$, $F(f) = f(1)$ este un izomorfism de grupuri.

R5.4.3. *Să se arate că $Hom(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) = \{0\}$, unde cu 0 am notat morfismul nul.*

<u>Soluție:</u> Dacă $f \in Hom(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ şi $f(1) = a \in \mathbf{Z}$, atunci $\forall\ n \in \mathbf{N}^*$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot a$ şi deci $\frac{1}{n} \cdot a \in \mathbf{Z}$, $\forall\ n \in \mathbf{N}^*$. În consecință $a = 0$ şi f este morfismul nul.

R5.4.4. *Fie $(G, \cdot)$ un grup, iar $u, v \in End(G)$. Definim funcțiile $f, g : G \to G$,*
$f(x) = x - v(u(x))$, $g(x) = x - u(v(x))$. să se arate că f este surjectivă dacă şi numai dacă g este surjectivă.

<u>Soluție:</u> Se cunoaşte următorul rezultat:

Lemă *Fie M şi N două mulțimi nevide şi funcția $f : M \to N$. Atunci:*
1) *f este injectivă $\Leftrightarrow$ f admite o retractă (o inversă la stânga), adică*
$\exists\, g : N \to M$ astfel încât $g\mathrm{B}f = 1_M$
2) *f este surjectivă $\Leftrightarrow$ f admite o secțiune (o inversă la dreapta), adică*
$\exists\, h : N \to M$ astfel încât $f\mathrm{B}g = 1_N$
3) *f este bijectivă $\Leftrightarrow$ f este inversabilă la stânga şi la dreapta $\Leftrightarrow$ f este inversabilă.*

Observații a) Este posibil ca $f : G \to H$ să fie un morfism injectiv de grupuri şi nici o retractă a sa să nu fie morfism de grupuri. De exemplu, morfismul $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ $f(n) = 3n$ este injectiv. Dacă ar exista retracta $r : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ care să fie şi morfism, am avea $1 = (rBf)(1) = r(f(1)) = r(3) = 3r(1)$, relație imposibilă în $\mathbf{Z}$.
b) Este posibil ca nici o secțiune a unui morfism surjectiv să nu fie morfism. De exemplu, $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$, $f(x) = \hat{x}$ este un morfism surjectiv, dar singurul morfism de la $\mathbf{Z}_n$ la $\mathbf{Z}$ este morfismul nul.

Revenim la soluția problemei:

Presupunem că f e surjectivă. Din lemă, deducem că $\exists$ $s: G \to G$, $fBs = 1_G$, adică $\forall$ $x\in G$, $(1_G - vBu)(s(x)) = x$, deci $(vBuBs)(x) = s(x) - x$, $\forall$ $x\in G$ (1)
Demonstrăm că funcția $\alpha : G \to G$, $\alpha(x) = x + (uBsBv)(x)$ este o secțiune a lui g.
Într-adevăr, $(gB\alpha)(x) = \alpha(x) - (uBv)(\alpha(x)) = x + (uBsBv)(x) - (uBv)(x + (uBsBv)(x)) =$

$$\overset{u\circ v\in End(G)}{=} x+(uBsBv)(x)-(uBv)(x)-(uBvBuBsBv)(x) \overset{(1)}{=}$$

$$x+(uBsBv)(x)-(uBv)(x)-u(s(v(x)) - v(x)) \overset{u\in End(G)}{=} x + (uBsBv)(x) -(uBv)(x) - (uBsBv)(x) + u(v(x)) = x, \ \forall\ x\in G.$$

Analog se demonstrează cealaltă implicație.

R5.4.5. *Fie $Aut(D_n)$ grupul automorfismelor grupului diedral de grad n. Să se arate că $ord(Aut(D_n)) = \varphi(n)\cdot n$, unde φ este indicatorul lui Euler.*

Olimpiadă, Constanța 1988

<u>*Soluție :*</u> Reamintim că dacă $n\in\mathbf{N}^*$, $\varphi(n)$ este numărul numerelor naturale mai mici decât n şi prime cu n şi că D_n este grupul izometriilor planului ce invariază poligonul regulat cu n laturi ($n\in\mathbf{N}^*$, $n \geq 3$). Dacă ρ este rotația de unghi $\frac{2\pi}{n}$ în jurul centrului poligonului, iar ε este simetria față de o axă de simetrie a poligonului, atunci $ord(\rho) = n$, $ord(\varepsilon) = 2$, $\rho\cdot\varepsilon = \varepsilon\cdot\rho^{n-1}$ şi grupul diedral de grad n este $D_n = \{e, \rho, \rho^2, ..., \rho^{n-1}, \varepsilon, \varepsilon\cdot\rho, \varepsilon\cdot\rho^2, ..., \varepsilon\cdot \rho^{n-1}\}$

Reamintim de asemenea că dacă $(G, \cdot)$ şi $(G' \cdot)$ sunt grupuri, f este un morfism injectiv de grupuri şi $a\in G$, atunci $ord(a) = ord(f(a))$, $ord(a^k) = \frac{m}{(k,m)}$, unde $m = ord(a)$.

Revenind la soluția problemei, pentru ca $f \in Aut(D_n)$ să fie bine definit, este suficient să știm cum acționează asupra elementelor $\varepsilon, \rho \in D_n$.
Fie $k, p \in \{0, 1\}$, $s, t \in \{0, 1, ..., n-1\}$, astfel încât $f(\rho) = \varepsilon^k \cdot \rho^t$ şi $f(\varepsilon) = \varepsilon^p \cdot \rho^s$.
Presupunem că $t = 0$ şi deci că $f(\rho) = \varepsilon^k$, aşadar sau $f(\rho) = e$, ceea ce contrazice injectivitatea lui f, sau $f(\rho) = \varepsilon$, imposibil, pentru că ρ şi ε nu au acelaşi ordin.
Aşadar $t \neq 0$. Presupunem $k \neq 0$ si deci $f(\rho) = \varepsilon \cdot \rho^t$. Dar $\varepsilon \cdot \rho^t$ este o simetrie, deci are ordinul 2, iar $f(\rho)$ are ordinul n, contradicție.
Aşadar, $k = 0$ si $f(\rho) = \rho^t$, cu $t \in \{0, 1, ..., n-1\}$.
Mai mult, $ord(\rho^t) = \frac{n}{(t, n)}$ şi cum $ord(\rho) = n = ord(f(\rho))$, rezultă că $(t, n) = 1$ şi
deci există $\varphi(n)$ posibilități pentru a alege $f(\rho)$ (1)
Pentru ca $f(\varepsilon)$ să aibă acelaşi ordin cu ε, care este o simetrie, trebuie ca $f(\varepsilon)$ să fie tot o simetrie, deci de forma $f(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \rho^s$, cu $s \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Există deci n posibilități de a alege $f(\varepsilon)$. Folosind afirmația (1) deducem că există $\varphi(n) \cdot n$ posibilități de a alege $f(\varepsilon)$ şi $f(\rho)$ şi aşadar există $\varphi(n) \cdot n$ automorfisme ale lui D_n .

6. Congruențe pe grupuri. Grupuri cât. Teoreme de izomorfism

6.1. Relații de echivalență definite de subgrupuri

Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $H \subset G$ o submulțime. Pe mulțimea G definim relațiile $\rho_H \subset G\times G$ şi $\rho'_H \subset G\times G$ prin:

$$(x,y)\in\rho_H \overset{def}{\Leftrightarrow} x^{-1}y\in H$$

$$(x,y)\in\rho'_H \overset{def}{\Leftrightarrow} yx^{-1}\in H$$

6.1.1. Propoziție. Relațiile ρ_H şi ρ'_H sunt relații de echivalență pe G dacă şi numai dacă $(H,\cdot)$ este subgrup în $(G,\cdot)$.

Demonstrație. Dacă $(H,\cdot)$ este subgrup în $(G,\cdot)$ atunci $e\in H$ sau $x^{-1}x\in H$ sau $xx^{-1}\in H$ deci $(x,x)\in\rho_H$ şi $(x,x)\in\rho'_H$.

H este parte stabilă deci dacă $(x,y)\in\rho_H$ şi $(y,z)\in\rho_H$ atunci $x^{-1}y\in H$ şi $y^{-1}z\in H$ deci $(x^{-1}y)(y^{-1}z)=x^{-1}z\in H$ sau $(x,z)\in\rho_H$ deci relația ρ_H este tranzitivă (la fel şi relația ρ'_H).

Dacă $(x,y)\in\rho_H$ atunci $x^{-1}y\in H$ care este subgrup şi atunci $(x^{-1}y)^{-1}=y^{-1}x\in H$ sau $(y,x)\in\rho_H$ deci relația ρ_H este simetrică. În concluzie relația ρ_H este echivalența pe *G* (la fel şi relația ρ'_H).

Reciproc. Să presupunem că ρ_H este relație de chivalență şi să arătăm că $(H,\cdot)$ este subgrup în $(G,\cdot)$.

Din reflexivitatea relației ρ_H, $(x,x)\in H$ deci $x^{-1}x=1\in H$.

În loc de $x\in H$ putem scrie $1\cdot x\in H$ sau $(1,x)\in\rho_H$ şi din simetria relației ρ_H rezultă $(x,1)\in\rho_H$ sau $x^{-1}\cdot 1\in\rho_H$ deci $x^{-1}\in H$.

Dacă $x\in H$ şi $y\in H$ atunci $x^{-1}\in H$, $(x^{-1},1)\in\rho_H$, $(1,y)\in\rho_H$ şi din tranzitivitatea relației ρ_H rezultă $(x^{-1},y)\in\rho_H$ sau $xy\in H$. În concluzie *H* este subgrup. Analog se arată că din ρ'_H relație de echivalență rezultă *H* este subgrup.

6.1.2. Definiție. Dacă $(G,\cdot)$ este grup şi $(H,\cdot)$ un subgrup al său, relațiile ρ_H şi ρ'_H se numesc relațiile de echivalență induse de subgrupul *H* (la stânga, respectiv la dreapta).

6.1.3. Observație. a) Clasele de echivalență pentru relația ρ_H sunt $\hat{x}=x\cdot H=\{xh \mid h\in H\}$, iar pentru relația ρ'_H sunt $\hat{x}'=H\cdot x=\{hx\mid h\in H\}$.

b) Între clasele de echivalență la stânga şi dreapta există bijecția $xH \mapsto Hx$, mulțimile cât G/ρ_H şi G/ρ'_H sunt cardinal echivalente.

c) Dacă $H = \{1\}$ relațiile ρ_H şi ρ'_H sunt relațiile de egalitate iar dacă $H = G$, relațiile ρ_H şi ρ'_H sunt relațiile universale,

6.2. Relații de congruență. Subgrupuri normale

Fie $(G,\cdot)$ un grup.

6.2.1. Definiție. O relație de echivalență pe *G*, $\rho \subset G \times G$ se numeşte relație de congruență pe *G* sau relație de echivalență compatibilă cu structura de grup dacă din ipotezele $(x_1, x_2) \in \rho$ şi $(y_1, y_2) \in \rho$ rezultă $(x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2) \in \rho$. Vom nota cu $C(G)$ mulțimea congruențelor pe *G*.

6.2.2. Exemplu. Pe grupul $(\mathbf{Z},+)$ relația $R = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid |x| = |y|\}$ este o relație de echivalență dar nu o relație de congruență, dar relația $\rho = \{(x, y) \mid x$ şi y au aceeaşi paritate$\}$ este o relație de congruență.

6.2.3. Propoziție. Dacă $\rho \subset G \times G$ este o relație de congruență pe grupul $(G,\cdot)$ atunci:

a) Din $(x, y) \in \rho$ rezultă $(x^{-1}, y^{-1}) \in \rho$.

b) Din $(x_1, x_2) \in \rho$ şi $(y_1, y_2) \in \rho$ rezultă $(x_1 y_1^{-1}, x_2 y_2^{-1}) \in \rho$.

Dar:

a) Avem $x^{-1} \rho x^{-1}$ şi $x \rho y$ deci $x x^{-1} \rho x^{-1} y$ sau $1 \rho x^{-1} y$. Din $1 \rho x^{-1} y$ şi $y^{-1} \rho y^{-1}$ rezultă $y^{-1} 1 \rho (x^{-1} y) y^{-1}$ sau $y^{-1} \rho x^{-1}$ sau $x^{-1} \rho y^{-1}$.

b) Din a) rezultă că dacă $(y_1, y_2) \in \rho$ atunci $(y_1^{-1}, y_2^{-1}) \in \rho$ şi adăugând $(x_1, x_2) \in \rho$ rezultă $(x_1 y_1^{-1}, x_2 y_2^{-1}) \in \rho$.

6.2.4. Observație. Dacă $\rho \subset G \times G$ este o congruență pe *G* atunci clasa de echivalență în raport cu ρ a elementului neutru $\rho\langle 1 \rangle = \{x \in G \mid (x,1) \in \rho\} = H$ este un subgrup iar relațiile de echivalență ρ_H şi ρ'_H definite de *H* sunt $\rho_H = \rho'_H = \rho$. Reciproca nu este adevărată, nu orice subgrup $H \leq G$ determină o congruență pe *G*.

6.2.5. Definiție. Se spune că subgrupul $(N,\cdot)$ este subgrup normal în grupul $(G,\cdot)$ dacă $xN = Nx$ pentru orice $x \in G$.
$(\{xg = g \in N\} = \{gx \mid g \in N\})$ şi notăm $N \lhd G$.

6.2.6. Propoziție. Dacă $(N,\cdot)$ este subgrup în $(G,\cdot)$ atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $(N,\cdot)$ este subgrup normal în $(G,\cdot)$ $(N \triangleleft G)$

b) $xNx^{-1} = N$ pentru orice $x \in G$

c) Relațiile de echivalență induse de N, ρ_N și $\rho_N^{'}$ coincid $(\rho_N = \rho_N^{'})$.

d) Mulțimile cât G/ρ_N și $G/\rho_N^{'}$ coincid.

Demonstrație. a) $\Leftrightarrow$ b) $xN = Nx$ dacă și numai dacă pentru orice $g \in N$ există $g' \in N$ astfel ca $xg = g'x \Leftrightarrow xgx^{-1} = g'$ sau putem inversa *g* cu *g′*.

b) $\Leftrightarrow$ c) $x\rho_N y \Leftrightarrow x^{-1}y \in N \Leftrightarrow y \in xN$

$$x\rho_N^{'} y \Leftrightarrow yx^{-1} \in N \Leftrightarrow y \in Nx$$

deci $\rho_N = \rho_N^{'} \Leftrightarrow xN = Nx, x \in G$.

c) $\Leftrightarrow$ d) $\rho_N = \rho_N^{'} \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{x}', x \in G \Leftrightarrow G/\rho_N = G/\rho_N^{'}$.

6.2.7. Observație. a) Într-un grup abelian orice subgrup este subgrup normal.

b) Dacă indicele subgrupului *H* în *G* este 2, $[G:H] = 2$ atunci *H* este normal în *G*.
($[G:H] = 2 \Leftrightarrow G = H \cup xH = H \cup Hx$ cu $x \notin H$ și cum $xH \cap H = \varnothing$ rezultă $xH = Hx$.)

c) În grupul permutărilor $(S_n, \circ)$ subgrupul altern $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn}\sigma = 1\}$ este normal.
($S_n = A_n \cup I_n$ unde $I_n = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn}\sigma = -1\}$, dacă τ este o transpoziție atunci $I_n = A_n \circ \sigma = \sigma \circ A_n$ deci A_n este subgrup de indice 2.)

d) Centrul unui grup *G*, $Z(G)$ este subgrup normal în *G*.

Legătura dintre subgrupurile normale și congruente este dată de următoarea afirmație:

6.2.8. Propoziție. Relația de echivalență $\rho \subset G \times G$ pe grupul *G* este o congruență pe *G* dacă și numai dacă există un subgrup normal $N \triangleleft G$ astfel ca $\rho = \rho_N$.

Demonstrație. Dacă $\rho \in C(G)$ este congruență, definim $N = \rho\langle 1\rangle = \{x \in G \mid x\rho 1\} = \{x \in G \mid 1\rho x\}$. Arătăm că $N \triangleleft G$ și că $\rho = \rho_N$.

Dacă $x, y \in N$ atunci $x\rho 1$, $y\rho 1$ deci $xy\rho 1$ sau $xy \in N$. Din $x\rho 1$ rezultă $x^{-1}\rho 1^{-1} = 1$ deci $x^{-1} \in N$, în concluzie $(N,\cdot)$ este subgrup în *G*.

Pentru a arăta că *N* este subgrup normal trebuie verificată egalitatea $xNx^{-1} = N$. E suficient să arătăm că pentru orice $x \in G$ și orice $g \in N = \rho\langle 1\rangle$ elementul $xgx^{-1} \in \rho\langle 1\rangle$.

Avem $x\rho x, g\rho 1, x^{-1}\rho x^{-1}$ din care rezultă $xgx^{-1}\rho xx^{-1}=1$. Pentru a arăta că $\rho=\rho_N=\rho_N^{'}$ observăm că

$$x\rho_N y \Leftrightarrow x^{-1}y\in N=\rho\langle 1\rangle \Leftrightarrow (xy^{-1})\rho 1 \Leftrightarrow xy^{-1}y\rho y \Leftrightarrow x\rho y$$

şi analog $x\rho_N^{'}y \Leftrightarrow x\rho y$.

Reciproc. Dacă $N\triangleleft G$ arătăm că ρ_N este congruenţă pe *G*. Avem

$x_1\rho_N x_2 \Leftrightarrow x_1^{-1}x_2\in N \Leftrightarrow x_2\in x_1N$

$y_1\rho_N y_2 \Leftrightarrow y_2\in y_1N$ şi atunci

$x_2y_2=(x_1N)(y_1N)=x_1(Ny_1)N=x_1(y_1N)N=(x_1y_1)N$

deci $x_1y_1\rho_N x_2y_2$.

6.2.9. Observaţie. Funcţia $F:C(G)\to S_N(G)$ ($S_N(G)$ este mulţimea subgrupurilor normale în *G*) definită prin $F(\rho)=\rho\langle 1\rangle$ cu inversa $F^{-1}:S_N(G)\to C(G)$, $F^{-1}(N)=\rho_N$ realizează o corespondenţă biunivocă între congruenţe şi subgrupuri normale.

6.3. Nucleul unui morfism. Grupuri cât

Fie $(G,\cdot)$ şi $(G',\cdot)$ două grupuri şi $f:G\to G'$ un morfism de grupuri.

6.3.1. Propoziţie. Dacă $f:G\to G'$ este un morfism de grupuri atunci mulţimea $\ker f=\{x\in G \mid g(x)=1'\}$ este 1' este elementul neutru al grupului $(G',\cdot)$, este un subgrup normal în *G* numit nucleul morfismului *f*.

Demonstraţie. Dacă $x,y\in\ker f$ atunci $f(1)=1'$ sau $f(yy^{-1})=1'$ sau $f(y)f(y^{-1})=1'$ sau $f(y^{-1})=1'$ deci $y^{-1}\in\ker f$ şi

$f(xy^{-1})=f(x)f(y^{-1})=1'\cdot 1'=1'$ deci $xy^{-1}\in\ker f$.

Dacă $x\in G$, $g\in\ker f$ atunci

$f(xgx^{-1})=f(x)f(g)f(x^{-1})=f(x)\cdot 1'\cdot f(x^{-1})=f(x)f(x^{-1})=f(x)(f(x))^{-1}=1'$ deci $xgx^{-1}\in\ker f$, ceea ce arată că grupul $\ker f$ este normal în *G*.

6.3.2. Observaţie. Se ştie că pentru orice funcţie $f:G\to M$ relaţia $Kerf=\{(x,y)\in G\times G \mid f(x)=f(y)\}$ reprezintă o relaţie de echivalenţă pe *G*.

6.3.3. Propoziţie. Dacă $f:G\to G'$ este morfism de grupuri atunci relaţiile $\rho_{\ker f}$ şi $Kerf$ coincid.

Demonstraţie. Avem

$$(x,y)\in Kerf \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow f(x)(f(y))^{-1}=1'$$

$\Leftrightarrow f(x)f(y^{-1}) = 1' \Leftrightarrow f(xy^{-1}) = 1' \Leftrightarrow xy^{-1} \in \ker f \Leftrightarrow (x,y) \in \rho^{'}_{\ker f} = \rho_{\ker f}$.

6.3.4. Observație. Dacă $f : G \to G'$ este un morfism de grupuri atunci relația $Kerf$ este o congruență pe *G*.

6.3.5. Propoziție. Dacă $(N,\cdot)$ este subgrup normal în grupul $(G,\cdot)$ atunci pe mulțimea cât $G/\rho_N = G/\rho_{N'}$ se poate defini o structură de grup defininf operația pe clase: $\hat{x} \cdot \hat{y} = x \cdot y$, $x, y \in G$.

Demonstrație. Mai întâi să arătăm că operația este bine definită, adică dacă $x_1, x_2 \in \hat{x}$ şi $y_1, y_2 \in \hat{y}$ atunci $x_1y_1 = x_2y_2 = xy$, ceea ce rezultă uşor pentru că relația ρ_N este congruentă. Se verifică uşor că elementul neutru al grupului $(G/\rho_N,\cdot)$ este $\hat{1} = N$, operația este asociativă, inversul lui $\hat{x}$ este $(\hat{x})^{-1} = (x^{-1})$.

6.3.6. Definiție. Dacă *N* este subgrup normal în *G*, grupul $(G/\rho_N,\cdot)$ se numeşte grup cât şi se notează G/N.

6.3.7. Observație. a) Funcția $p_N : G \to G/N$, $p_N(x) = \hat{x} = xN = Nx$ se numeşte proiecția canonică şi este un morfism surjectiv de grupuri pentru care nucleul $\ker p_N = N$.

b) Orice subgrup normal este nucleul unui morfism de grupuri.

6.3.8. Exemple. Dacă $G = (\mathbf{Z},+)$ şi $N = (n\mathbf{Z},+)$ atunci grupului $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ este grupul $(\mathbf{Z}_n,+)$ al claselor de resturi modulo *n*. ($n \in N$, $n \geq 2$).

6.4. Teoreme de izomorfism

6.4.1. Teoremă. Dacă $f : G \to G'$ este un morfism surjectiv de grupuri atunci grupurile $G/\ker f$ şi G' sunt izomorfe.

Demonstrație. Considerăm diagrama:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & G' \\
& G/\ker f \arrow[ur, dotted, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

unde $p : G \to G/\ker f$ este proiecția canonică $p(x) = \hat{x}$ şi definim $\bar{f} : G/\ker f \to G'$ prin $\bar{f}(\hat{x}) = f(x)$ (astfel ca diagrama să fie comutativă, adică $f = \bar{f} \circ p$).

Arătăm că funcția $\bar{f}$ este bine definită (nu depinde de alegerea reprezentantului într-o clasă) şi că funcția $\bar{f}$ este izomorfism de grupuri.

Dacă $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ atunci $f(x_1) = f(x_2)$ deci $\bar{f}(\hat{x}_1) = \bar{f}(\hat{x}_2)$. Avem

$$\bar{f}(\hat{x} \cdot \hat{y}) = \bar{f}(xy) = f(xy) = f(x)f(y) = \bar{f}(\hat{x})\bar{f}(\hat{y})$$

$$\bar{f}(\hat{x}_1) = \bar{f}(\hat{x}_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1 x_2^{-1}) = 1'$$

$$x_1 x_2^{-1} \in \ker f \Leftrightarrow \hat{x}_1 = \hat{x}_2 .$$

6.4.2. Observație. Dacă $f : G \to G'$ este izomorfism de grupuri atunci grupurile $G/\ker f$ şi $f(G)$ sunt izomorfe.

6.4.3. Teoremă. Dacă $f : G \to G'$ este un morfism surjectiv de grupuri şi H este subgrup normal în G atunci $f(H)$ este subgrup normal în G' iar grupurile G/H şi $G'/f(H)$ sunt izomorfe.

Demonstrație. Dacă $y \in G'$ şi f este surjectivă, există $x \in G$ astfel ca $f(x) = y$. Avem $xH = Hx$ deci $f(xH) = f(Hx)$ sau $f(x)f(H) = f(H)f(x)$ adică $yH' = H'y, y \in G'$ unde $H' = f(H)$, deci $f(H)$ este normal în G'.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & G' \arrow[d, "p'"] \\
G/H \arrow[r, "\bar{f}"] & G'/f(H)
\end{tikzcd}$$

Notăm proiecțiile canonice $p : G \to G/H$, $p(\hat{x}) = \hat{x} = xH$ şi $p' : G' \to G'/f(H)$, $p(y) = \hat{y} = yf(H)$. Funcția $g = p' \circ f : G \to G'/f(H)$ este compunere de morfisme surjective, deci morfism surjectiv, pentru care putem aplica teorema 1 de izomorfism şi avem:

$$G/\ker g \approx G'/f(H)$$

Rămâne să arătăm că $\ker g = H$.

Avem $x \in \ker g \Leftrightarrow g(x) = \hat{1}' \Leftrightarrow p'(f(x)) = \hat{1}' \Leftrightarrow f(x) = \hat{1} \Leftrightarrow$ $f(x) \in H' \Leftrightarrow f(x) \in f(H) \Leftrightarrow x \in H$

Ultima echivalență trebuie justificată: dacă prin absurd ar exista $x \in G \setminus H$ astfel ca $f(x) \in f(H)$ atunci fie $h \in H$ astfel ca $f(x) = f(h) \Leftrightarrow$ $f(x\overline{h}^{-1}) = 1' \Leftrightarrow xh^{-1} \in \ker f \subset H$ $(f^{-1}(\{1'\}) \subset f^{-1}(f(H)))$ şi atunci $xh^{-1}h \in H$ deci $x \in H$.

Bibliografie

[1] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele algebrei.*
[2] C. Niță, T. Spircu, *Probleme de algebră*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1974.
[3] T. Spircu, *Structuri algebrice prin probleme*, Ed. Ştiințifică, Bucureşti, 1991.
[4] D. Popescu, C. Vraciu, *Elemente de teoria grupurilor finite,* Ed. Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.
[5] I. Purdea, *Tratat de algebră.*
[6] I. Purdea, *Culegere de probleme de teoria grupurilor*, UBB Cluj, 1985.

Probleme rezolvate

R6.5.1. Fie $f: G \to G'$ un morfism de grupuri. Să se arate că:

a) Dacă $K \triangleleft G'$ atunci $f^{-1}(K) \triangleleft G$.

b) Dacă *f* este surjectiv şi $H \triangleleft G$ atunci $f(H) \triangleleft G'$.

c) Dacă *f* este surjectiv, aplicația $H \mapsto f(H)$ realizează o bijecție între mulțimea subgrupurilor normale din *G* care conțin $\ker f$ şi mulțimea subgrupurilor normale din *G*'.

Soluție. a) Dacă $x, y \in f^{-1}(K)$ atunci $f(xy^{-1}) = f(x)(f(y))^{-1} \in K$ deci $xy^{-1} \in f^{-1}(K)$, $f^{-1}(K)$ este subgrup.

Dacă $x \in G$ şi $h \in f^{-1}(K)$ atunci

$$f(xhx^{-1}) = f(x)f(h)(f(x))^{-1} = yky^{-1} \in K$$

deci $xhx^{-1} \in f^{-1}(K)$ şi astfel $f^{-1}(K)$ este normal în *G*.

b) Dacă $z,u \in f(H)$, $z = f(x), y = f(y), x, y \in H$ atunci $xy^{-1} \in H$, $f(xy^{-1}) \in f(H)$ sau $zu^{-1} \in f(H)$ deci $f(H) \le G'$.

Pentru a arăta normalitatea lui $f(H)$ în *G′* trebuie să folosim ipoteza surjectivității lui *f* (altfel $f(H)$ este normal doar în $f(G)$). Pentru $z \in G'$ şi $k \in f(H)$ există $x \in G$ şi $h \in H$ astfel ca $f(x) = z$ şi $f(h) = k$. Cum *H* este normal în *G* rezultă $xhx^{-1} \in H$ deci $f(xhx^{-1}) \in f(H)$ sau $zkz^{-1} \in f(H)$, deci $f(H) \triangleleft G'$.

c) Vom arăta mai întâi că dacă *f* este surjectiv, atunci aplicația $H \mapsto f(H)$ realizează o bijecție de la mulțimea subgrupurilor lui *G* care conțin $\ker f$ la mulțimea tuturor subgrupurilor lui *G′*.

Fie $K \le G'$. Arătăm că există un unic subgrup $H \le G$ astfel ca $\ker f \le H$ şi $f(H) = K$. Mai întâi arătăm unicitatea: dacă $\ker f \le H \le G$ şi $f(H) = K$ arătăm că $H = f^{-1}(K)$. Pentru $h \in H$, $f(h) \in f(H) = K$ şi $h \in f^{-1}(K)$ deci $H \le f^{-1}(K)$. Reciproc, fie $x \in f^{-1}(K)$, deci $f(x) \in K = f(H)$, există $h \in H$ astfel ca $f(x) = f(h)$, deci $xh^{-1} \in \ker f \subset H$ şi $x = (xh^{-1})h \in H$ în concluzie $H = f^{-1}(K)$.

Fie acum $H = f^{-1}(K)$. Ştim că $H \le G$ şi dacă $x \in \ker f$ avem $f(x) = 1' \in K$ deci $x \in f^{-1}(K) = H$, adică $\ker f \le H$. În fine, dacă $x \in H$ avem $f(x) \in K$, deci $f(H) \subset K$. Reciproc, dacă $y \in K$ şi $y = f(x)$ atunci $x \in f^{-1}(K)$ deci $y = f(x) \in f(H)$, astfel $f(H) = K$.

R6.5.2. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $AutG$ grupul automorfismelor lui *G*, iar $IntG = \{f_g \in AutG \mid f_g(x) = gxg^{-1}, x \in G\}$ mulțimea automorfismelor interioare. Să se arate că $G/Z(G) \approx IntG$. ($Z(G)$ este centrul grupului *G*).

Soluție. Considerăm funcția $F: G \to IntG$, $F(g) = fg$. Se verifică faptul că F este morfism surjectiv de grupuri. Avem

$$\ker F = \{g \in G \mid f_g = 1_g\} = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x, x \in G\} =$$
$$= \{g \in G \mid gx = xg, x \in G\} = Z(G).$$

Conform teoremei de izomorfism

$$G / Z(G) \approx IntG$$

(izomorfismul este $gZ(G) \mapsto f_g$).

R6.5.3. Fie $GL_n(\mathbf{R})$ grupul general liniar (al matricelor nesingulare) şi $SL_n(\mathbf{R})$ grupul special liniar (al matricelor cu determinantul 1). Să se arate că $SL_n(\mathbf{R})$ este subgrup normal în $GL_n(\mathbf{R})$ şi

$$GL_n(\mathbf{R}) / SL_n(\mathbf{R}) \approx \mathbf{R}^*$$

Soluție. Considerăm funcția determinant:

$$\det : GL_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^*$$

şi din $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ rezultă că este morfism de grupuri (surjectiv). Nucleul său este $\ker(\det) = \{A \in GL_n(\mathbf{R}) \mid \det A = 1\} = SL_n(\mathbf{R})$, care fiind nucleul unui morfism este subgrup normal şi se aplică teorema de izomorfism.

Observație. În $GL_n(\mathbf{Z}_p)$ unde p este prim avem:

$$GL_n(\mathbf{Z}_p) / SL_n(\mathbf{Z}_p) \approx \mathbf{Z}_{p-1}$$

R6.5.4. Să se arate că dacă *m, n* sunt numere naturale prime între ele atunci $\mathbf{Z}_{mn} \approx \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$.

Soluție. Considerăm funcția $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$, $f(x) = (\overline{x}, \hat{x})$, unde am notat $\mathbf{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ şi $\mathbf{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, ..., n-1\}$. Avem

$$f(x+y) = (\overline{x+y}, x+y) = (\overline{x} + \overline{y}, \hat{x} + \hat{y}) = (\overline{x}, \hat{x}) + (\overline{y}, \hat{y}) = f(x) + f(y)$$

deci *f* este morfism de grupuri.

Arătăm că *f* este surjectivă: fie $(\overline{y}, \hat{z}) \in \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}$, arătăm că există $x \in \mathbf{Z}$ astfel ca $f(x) = (\overline{y}, \hat{z})$ sau $m \mid (x-y), n \mid (x-z)$ sau $x = y + k_1 m$ şi $x = z + k_2 n$, deci trebuie arătat că există k_1, k_2 astfel ca $y + k_1 m = z = k_2 n$ sau $y - z = k_2 n - k_1 m$. Dar se ştie că dacă $(m,n) = 1$ atunci orice număr (în particular $y - z$) se poate reprezenta sub forma $\alpha n + \beta m$, cu $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ (în cazul nostru $\alpha = k_2$, $\beta = -k_1$). Din teorema de izomorfism:

$$\mathbf{Z} / \ker f \approx \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n.$$

Determinăm $\ker f$. Dacă $x \in \ker f$ atunci $f(x) = (\overline{0}, \hat{0})$ sau $(\overline{x}, \hat{x}) = (\overline{0}, \hat{0})$ deci $m \mid x$ şi $n \mid x$ deci $[m,n] \mid x$ dar din $(m,n) = 1$ rezultă $[m,n] = mn$ deci $\ker f = mn\mathbf{Z}$ şi atunci $\mathbf{Z} / mn\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{mn}$.

R6.5.5. Să se arate că $\mathbf{C}^* / U \approx \mathbf{R}_+^*$ şi $\mathbf{C}^* / \mathbf{R}_+^* \approx U$ (unde *U* este cercul unitate).

Soluție. Definim funcția $f:\mathbf{C}^* \to \mathbf{R}_+^*$, $f(z)=|z|$ (modulul lui *z*) care este morfism surjectiv şi $\ker f=\{z\in \mathbf{C}^* \mid |z|=1\}=U$ deci $\mathbf{C}^*/U\approx \mathbf{R}_+^*$.

Considerăm funcția $g:\mathbf{C}^*\to \mathbf{C}^*$, $g(z)=\dfrac{z}{|z|}$ care este morfism cu imaginea $\operatorname{Im} g=U$ şi nucleul $\ker g=\{z\in \mathbf{C}^* \mid z=|z|\}=\mathbf{R}_+^*$. Din teorema de izomorfism:

$$\mathbf{C}^*/\mathbf{R}_+^*\approx U.$$

R6.5.6. Pentru un număr prim *p* şi un număr natural *n* definim grupurile $C_{p^n}=\{z\in \mathbf{C} \mid z^{p^n}=1\}$, subgrupuri în $\mathbf{C}^*$ şi definim $C_{p^\infty}=\bigcup_{n\in \mathbf{N}} C_{p^n}$.

Să se arate că:

a) C_{p^∞} este subgrup în $\mathbf{C}^*$.

b) Orice subgrup propriu al lui C_{p^∞} este ciclic, de forma C_{p^n}.

c) $C_{p^\infty}/C_{p^n}\approx C_{p^\infty}$.

Soluție. a) Avem $C_{p^0}\subset C_{p^1}\subset C_{p^2}\subset\ldots\subset C_{p^n}\subset\ldots$ din care se arată uşor că $\bigcup_{n\in \mathbf{N}} C_{p^n}$ este grup.

b) Orice element al grupului C_{p^∞} este de ordin finit, ordinul său fiind de forma $p^n, n\in \mathbf{N}$.

Fie *H* un subgrup în C_{p^∞}. Dacă *H* conține un element *x* de ordin p^n atunci $x, x^2, x^3,\ldots, x^p,\ldots, x^{p^n}$ sunt distincte, toate din C_{p^n} în număr de p^n şi deci $\langle x\rangle \subset H$ sau $C_{p^n}\subset H$ şi atunci dacă ordinele elementelor lui *H* formează o mulțime infinită $H=C_{p^\infty}$. Dacă această mulțime este finită, atunci fie p^n ordinul maxim al unui element din *H*, avem $H=C_{p^n}$.

c) Definim funcția $f:C_{p^\infty}\to C_{p^\infty}$, $f(z)=z^{p^n}$ şi se verifică faptul că *f* este morfism surjectiv:

$$f(C_{p^n})=C_{p^0}=\{1\},\ f(C_{p^{n+1}})=f(C_{p^1}),\ldots, f(C_{p^{n+m}})=C_{p^m}\ldots$$

şi $\ker f=C_{p^n}$, deci din teorema de izomorfism

$$C_{p^\infty}/C_{p^n}\approx C_{p^\infty}$$

7.Grupuri de transformări geometrice

7.1. Planul euclidian. Modele geometrice şi algebrice

Studiul geometriei planului euclidian este greoi dacă ne mărginim la definiția axiomatică a geometriei euclidiene plane. Folosirea unor metode algebrice este în multe probleme mai clară şi eficace. De aceea, în funcție de specificul problemelor, vom putea privi planul euclidian în mai multe moduri.

a) **Axiomatic** (de exemplu după axiomele lui Hilbert), ceea ce generează "geometria sintetică".

b) **Vectorial.** Planul este privit ca mulțime de vectori, imaginea intuitivă a unui spațiu vectorial real de dimeniune doi, $V=\{a\overline{v}_1+b\overline{v}_2 \mid a,b\in\mathbf{R}\}$ cu $\overline{v}_1,\overline{v}_2$ vectori liniar independenți. În cele mai multe cazuri baza va fi $\{\overline{v}_1,\overline{v}_2\}=\{\overline{i},\overline{j}\}$ şi atunci planul este $\overline{\mathbf{R}}^2=\{\overline{v}=x\overline{i}+y\overline{j} \mid x,y\in\mathbf{R}\}$. Acest mod de a privi planul euclidian conduce la geometria vectorială.

c) **Analitic.** Planul este privit ca mulțime de puncte, reprezentare intuitivă a produsului cartezian $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, deci planul este $\mathbf{R}^2=\{A(x_A,y_A) \mid x_A,y_A\in\mathbf{R}\}$. Acest mod de a privi planul, conduce la geometria analitică.

d) **Complex.** Planul este privit ca imaginea intuitivă a mulțimii numerelor complexe (planul complex) $\mathbf{C}=\{z=x+iy \mid x,y\in\mathbf{R}\}$, unde $i^2=-1$, care conduce la geometria planului complex.

Ultimele trei moduri de abordare a geometriei euclidiene plane au avantajul că pot fi cu uşurință folosite multe rezultate şi metode din algebră, dar au şi suficiente dezavantaje privind frumusețea, ingeniozitatea şi eleganța soluțiilor sintetice.

Legăturile între cele patru modele ale planului euclidian sunt pe scurt următoarele:

a)→b) Dacă în planul π alegem un punct fix O şi două puncte A, B necoliniare cu O atunci segmentele orientate $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$ pot fi luate ca vectori ce formează baza spațiului de vectori. Dacă $\overline{v}_1=\overline{OA}$, $\overline{v}_2=\overline{OB}$ şi uniformizăm distanțele (definim $\|\overline{v}_1\|=d(O,B), \|\overline{v}_2\|=d(O,B)$). Dacă punctele A, O, B sunt luate astfel ca $\angle AOB=90^\circ$ şi $d(O,A)=d(O,B)=1$ atunci notăm $\overline{OA}=\overline{i}$, $\overline{OB}=\overline{j}$ şi planul π devine $\overline{\mathbf{R}}^2=\{\overline{v}=x\overline{i}+y\overline{j} \mid x,y\in\mathbf{R}\}$ în care baza canonică $\{\overline{i},\overline{j}\}$ este ortonormată.

b)↔c) Avem

$$\overline{\mathbf{R}}^2=\{\overline{v}=x\overline{i}+y\overline{j} \mid x,y\in\mathbf{R}\} \text{ şi } \mathbf{R}^2=\{M(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}\}.$$

Definim corespondenţa $\overline{\mathbf{R}}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ prin

$$\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} \mapsto M_{\bar{v}}(x, y) \in \mathbf{R}^2$$

Punctul $M_{\bar{v}}$ se numeşte vârful vectorului $\bar{v}$.

Reciproc. De la $\mathbf{R}^2$ la $\overline{\mathbf{R}}^2$ definim aplicaţia

$$M(x, y) \mapsto \bar{r}_M = x\bar{i} + y\bar{j} \in \overline{\mathbf{R}}^2,$$

vectorul $\bar{r}_M$ se numeşte vectorul de poziţie al punctului *M*.

c) $\leftrightarrow$d) De la $\mathbf{R}^2$ la **C** definim funcţia

$$F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}, \quad F(x, y) = z = x + iy,$$

cu funcţia inversă $F^{-1} : \mathbf{C} \to \mathbf{R}, F^{-1}(z) = F^{-1}(x + iy) = (x, y) = (\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$.

De la modelele b), c), d) la modelul axiomatic a), reţinem interpretarea intuitivă a planului ca mulţime de puncte.

Toate noţiunile geometriei: punct, dreaptă, segment, semidreaptă, unghi, măsură a unghiurilor, distanţă, coliniaritate, concurenţă, paralelism, perpendicularitate, figuri geometrice sunt în corespondenţă în cele patru modalităţi de a privi planul euclidian.

7.2. Principalele izometrii ale planului

7.2.1. Translaţia

7.2.1. Definiţie. Se numeşte translaţie în planul π, orice funcţie $f : \pi \to \pi$ prin care toate punctele planului se deplasează în aceeaşi direcţie şi sens, cu aceeaşi distanţă între punct şi imaginea sa.

7.2.2. Observaţie. a) Translaţia privită în planul de vectori $\overline{\mathbf{R}}^2$ este o funcţie $t_{\bar{a}}$ determinată de un vector $\bar{a} \in \overline{\mathbf{R}}^2$ fixat,

$$t_{\bar{a}} : \overline{\mathbf{R}}^2 \to \overline{\mathbf{R}}^2, \quad t_{\bar{a}}(\bar{v}) = \bar{a} + \bar{v}, \quad \bar{v} \in \overline{\mathbf{R}}^2.$$

b) Translaţia privită în planul punctual $\mathbf{R}^2$ este o funcţie $T_{(x_0, y_0)} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $T_{(x_0, y_0)}(x, y) = (x + x_0, y + y_0)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Relaţiile

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases} \qquad T(x, y) = (x', y')$$

se numesc ecuaţiile translaţiei. (Originea (0,0) este mutată în punctul (x_0, y_0)).

c) Ca transformare geometrică, translația invariază distanțele $(d(A,B)=d(t(A),t(B)))$, invariază unghiurile, transformă drepte în drepte paralele, cercuri în cercuri.

d) Compunerea a două translații este tot o translație.

7.2.3. Propoziție. Mulțimea T a translațiilor planului π, formează un grup comutativ $(T,\circ)$ subgrup al grupului $(S_\pi,\circ)$ al bijecțiilor planului π.

Demonstrație. O translație este evident o funcție bijectivă, deci $T\subset S_\pi$. Avem $t_{\bar{a}_1}\circ t_{\bar{a}_2}=t_{\bar{a}_2}\circ t_{\bar{a}_1}=t_{\bar{a}_1+\bar{a}_2}$ şi $(t_{\bar{a}})^{-1}=t_{-\bar{a}}$.

7.2.2. Simetria centrală

7.2.4. Definiție. Se numeşte simetrie centrată (față de punctul A) o funcție $s_A:\pi\to\pi$ care are un punct fix $A\in\pi$ ($s_A(A)=A$), punct care este mijlocul oricărui segment $[M,M']$ unde $M'=s_A(M)$.

7.2.5. Observație. a) Dacă privim planul ca mulțime de vectori, simetria față de origine se defineşte prin $s_O(\bar{v})=-\bar{v}$, iar simetria față de punctul A (de vector de poziție $\bar{r}_A$) este: $s_A:\overline{\mathbf{R}}^2\to\overline{\mathbf{R}}^2$

$$s_A(\bar{v})=2\bar{r}_A-\bar{v},\quad \bar{v}\in\overline{\mathbf{R}}^2$$

b) Ecuațiile analitice ale simetriei $s_A:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ sunt

$$s_A(x,y)=(x',y') \text{ cu } x'=2x_A-x \text{ şi } y'=2y_A-y.$$

c) Simetria centrală este o funcție bijectivă care păstrează distanțele, unghiurile şi este involutivă ($s_A\circ s_A=1_\pi$ sau $s_A=(s_A)^{-1}$).

7.2.6. Propoziție. a) Compunerea a două simetrii centrale (față de A şi B, $A\neq B$) este o translație (de vector $\overline{BA}$).

Dacă $t_{\bar{a}}$ este o translație şi s_A o simetrie centrală, funcția compusă $t_{\bar{a}}\circ s_A$ este o simetrie centrală şi avem:

$$t_{\bar{a}}\circ s_A=s_A\circ t_{(-\bar{a})}.$$

Demonstrație. a) $s_A\circ s_B(\bar{v})=s_A(s_B(\bar{v}))=s_A(2\bar{r}_B-\bar{v})=$
$=2\bar{r}_A-(2\bar{r}_B-\bar{v})=2\overline{BA}+\bar{v}=t_{2\overline{BA}}(\bar{v})$ cu $s_B\circ s_A(\bar{v})=t_{\overline{AB}}(\bar{v})$.

b) Din $t_{\bar{a}}(\bar{v})=\bar{a}+\bar{v}$ şi $s_A(\bar{v})=2\bar{r}_A-\bar{v}$ rezultă:

$$(t_{\bar{a}}\circ s_A)(\bar{v})=t_{\bar{a}}(2\bar{r}_A-\bar{v})=\bar{a}+2\bar{r}_A-\bar{v}=2\left(\frac{\bar{a}}{2}+\bar{r}_A\right)-\bar{v}=s_{A'}(\bar{v})$$

unde $\bar{r}_{A'} = \frac{\bar{a}}{2} + \bar{r}_A$ sau $AA' = \frac{\bar{a}}{2}$. Analog se arată că $s_A \circ t_{(-\bar{a})} = s_{A'}$.

O proprietate remarcabilă a unor figuri geometrice este simetria lor.

7.2.7. Definiție. Dacă F este o figură plană şi $s_A : \pi \to \pi$ este o simetrie centrală cu proprietatea $s_A(F) = F$, se spune că figura F este invariantă la simetria s_A sau că figura F admite punctul A ca centru de simetrie (figura F este central simetrică).

7.2.8. Exemplu. Un poligon regulat cu n laturi are un centru de simetrie dacă n este par şi nu are centru de simetrie dacă n este impar.

7.2.9. Propoziție. a) Dacă F este o figură central simetrică față de punctul A atunci figurile $F_1 = F \cup s_A(F)$ şi $F_2 = F \cap s_A(F)$ sunt figuri central simetrice față de punctul A.

b) O figură geometrică formată dintr-un număr finit de puncte sau o figură geometrică mărginită, admite cel mult un centru de simetrie.

Demonstrație. a) Avem

$$s_A(F_1) = s_A(F \cup s_A(F)) = s_A(F) \cup s_A(s_A(F)) = s_A(F) \cup F = F_1$$

şi analog $s_A(F_2) = F_2$.

b) Dacă prin absurd, figura F ar avea două puncte de simetrie A şi B atunci $(s_A \circ s_B)^n(F) = F, n \in \mathbf{N}^*$. Dar $s_A \circ s_A = t_{\overline{BA}}$ şi $(s_A \circ s_B)^n = t_{n \cdot \overline{BA}}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Pentru un punct $M \in F$ şirul de puncte $(M_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ definit prin $\bar{r}_{M_n} = \bar{r}_M + n \cdot \overline{BA}, n \in \mathbf{N}^*$ este format din puncte distincte (o infinitate) şi este nemărginit.

7.2.3. Simetria axială

7.2.10. Definiție. Se numeşte simetrie axială (față de dreapta d) o funcție $s_d : \pi \to \pi$ cu proprietatea că mediatoarea segmentului $[M, M']$ cu $M' = s_d(M)$ este dreapta d pentru orice punct $M \in \pi$. Dreapta d se numeşte axă de simetrie, iar punctul M' se numeşte simetricul lui M față de d.

7.2.11. Observație. a) În $\overline{\mathbf{R}}^2$ şi $\mathbf{R}^2$ simetriile axiale față de drepte arbitrare au ecuații complicate. Dacă însă axa de simetrie este Ox sau Oy atunci $s_{Ox}(x, y) = (-x, y)$ şi $s_{Oy}(x, y) = (x, -y)$ iar față de prima bisectoare este $s(x, y) = (y, x)$.

b) Orice simetrie axială este o funcție bijectivă, involutivă $(s_d \circ s_d = 1_\pi)$, păstrează unghiurile şi distanțele (este izometrie).

7.2.12. Propoziție. Compunerea a două simetrii axiale este:
- translație, dacă axele de simetrie sunt paralele
- simetrie centrală, dacă axele sunt ortogonale
- rotație, dacă axele sunt concurente, neperpendiculare.

Demonstrație. (Indicație) Se poate considera că planul a fost raportat la un reper astfel ca axele să fie:
- paralele cu Oy
- axele Ox şi Oy
- axa Ox şi dreapta ce trece prin origine $d_2 : y = (\text{tg}\alpha)x$.

7.2.13. Definiție. O figură geometrică plană F pentru care există o simetrie axială s_d care o invariază $(s_d(F) = F)$ se numeşte figură cu axă de simetrie (axial-simetrică) iar dreapta d se numeşte axă de simetrie a figurii.

7.2.14. Exemplu. - Un triunghi isoscel are o axă de simetrie.

- Un poligon regulat cu n laturi, are n axe de simetrie (diagonalele mari şi mediatoarele laturilor dacă n este par, mediatoarele laturilor dacă n este impar).

7.2.15. Propoziție. Dacă dreptele d_1 şi d_2 sunt axe de simetrie neparalele pentru figura F atunci dreptele $d_{12} = s_{d_1}(d_2)$ şi $d_{21} = s_{d_2}(d_1)$ sunt de asemenea axe de simetrie ale figurii F.

Demonstrație. Dacă $M \in F$ notăm $M_1 = s_{d_1}(M)$, $M_{12} = s_{d_2}(M_1) = S_{d_2} \circ s_{d_1}(M)$, $M_2 = s_{d_2}(M)$. Punctele M, M_1, M_{12}, M_2 sunt în F iar M_{12} şi M_2 sunt simetrice față de $d_{21} = s_{d_2}(d_1)$, deci d_{21} este axă de simetrie.

7.2.16. Consecință. Dacă figura F are doar două axe de simetrie, atunci ele sunt perpendiculare.

7.2.4. Rotația

7.2.17. Definiție. Se numeşte rotație în plan o funcție $R_\alpha : \pi \to \pi$ care admite un singur punct fix $A \in \pi$ şi pentru orice punct M unghiul orientat $\angle MAM'$ cu $M' = R_\alpha(M)$ are măsura α.

Punctul fix A se numeşte centru de rotație iar unghiul α este unghiul de rotație (dacă $\alpha > 0$ rotația se face în sens trigonometric iar dacă $\alpha < 0$ se face în sens opus).

7.2.18. Observație. a) În $\mathbf{R}^2$ rotația de unghi α în jurul originii are ecuațiile $R_\alpha(x, y) = (x', y')$ cu

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

sau

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

matricea $M_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ se numeşte matrice de rotaţie de unghi α.

Rotaţia în jurul unui punct arbitrar are ecuaţiile:

$$\begin{cases} x' = x_0 + (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha \\ y' = y_0 + (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha \end{cases}$$

b) Cel mai comod se lucrează cu rotaţii în planul complex **C**. Dacă $\varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$ este un număr complex de modul 1, atunci funcţia $R_\alpha(z) = \varepsilon z$ este rotaţia de unghi α în jurul originii. Pentru un punct A din plan de afix $z_A \in \mathbf{C}$ rotaţia cu unghi α în jurul lui A este dată de funcţia

$$R_{A,\alpha} : \mathbf{C} \to \mathbf{C},\ R_{A,\alpha}(z) = z_A + \varepsilon(z - z_A).$$

În particular funcţia $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = iz$ realizează o rotaţie cu unghi $\frac{\pi}{2}$ în jurul originii.

c) Orice rotaţie este o funcţie bijectivă iar inversa este rotaţie în sens opus. Rotaţiile sunt izometrii ale planului.

7.2.19. Propoziţie. Mulţimea rotaţiilor R_0 de centru dat $O \in \pi$ formează un grup comutativ $(R_O, \circ)$.

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că $(R_O, \circ)$ este subgrup în grupul bijecţiilor planului $(S_\pi, \circ)$. Avem $R_\alpha \circ R_\beta = R_\beta \circ R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$ şi $(R_\alpha)^{-1} = R_{-\alpha}$.

7.2.20. Observaţie. Un subgrup remarcabil al grupului rotaţiilor de centru O este subgrupul $R_n = \{R_o, R_{\frac{2\pi}{n}}, R_{\frac{4\pi}{n}}, ..., R_{\frac{(n-1)2\pi}{n}}\}$, subgrup de ordin n, izomorf cu grupul rădăcinilor de ordin n ale unităţii în **C**.

7.2.21. Propoziţie. a) Orice rotaţie se poate obţine prin compunerea a două simetrii centrale (una din axe poate fi fixată în mod arbitrar din mulţimea dreptelor ce trec prin centrul de rotaţie).

b) Compunerea dintre o translaţie şi o rotaţie este o rotaţie.

c) Mulţimea tuturor translaţiilor şi a tuturor rotaţiilor formează un grup $(T \cup R, \circ)$, subgrup de izometrii ale planului.

Demonstrație. a) Dacă alegem două drepte d_1, d_2 ce trec prin A şi $\angle d_1, d_2 = \frac{\alpha}{2}$ atunci $s_{d_1} \circ s_{d_2} = R_{A,\alpha}$.

b) Lucrăm în planul complex: fie $t = t_{z_1}(z) = z_1 + z$ o translație şi $R = R_{z_0,\alpha}(z) = z_0 + \varepsilon(z - z_0)$ o rotație.

Avem $(t \circ R)(z) = (z_1 + z_0) + \varepsilon(z - z_0)$. Punctul fix al acestei transformări este z_2 cu $(t \circ R)(z_2) = z_2$, $z_2 = z_0 + \frac{z_1}{1-\varepsilon}$, deci putem scrie $(t \circ R)(z) = z_2 + \varepsilon(z - z_2)$ care arată că $t \circ R$ este o rotație de acelaşi unghi α în jurul punctului z_2.

Pentru compunerea inversă avem

$$(R \circ t)(z) = z_0 + \varepsilon(z + z_1 - z_0) = z_0 + \varepsilon(z_1 - z_0) + \varepsilon z.$$

Punctul fix este $z_3 = z_0 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} z_1$ şi putem scrie

$$(R \circ t)(z) = z_3 + \varepsilon(z - z_3).$$

c) Urmărind demonstrația punctului b) rezultă că pentru orice două puncte A_1, A_2, orice rotație în jurul lui A_1 poate fi obținută prin compunerea unei rotații în jurul lui A_2 cu o translație (rotațiile pot fi mutate în origine).

Dacă $f, g \in T \cup R$ considerăm cazurile

c1) $f, g \in R, f = R_1, g = R_2$. Fie A_2 centrul de rotație pentru R_2 şi R_1 rotația în jurul lui A_2 obținută din R_1 compusă cu translația $R_1 = t \circ R_1'$. Avem $f \circ g = t \circ R_1' \circ R_2 = t \circ R_3$ care este o rotație.

c2) $f \in R$ şi $g \in T$. Conform propoziției anterioare $f \circ g$ şi $g \circ f$ sunt rotații.

c3) $f, g \in T$, atunci $f \circ g \in T$.

Mai avem: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ şi din $f, g \in T \cup R$ rezultă $(f \circ g)^{-1} \in T \cup R$.

7.2.22. Definiție. O figură geometrică plană *F* pentru care există o rotație de unghi $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ care o invariază, se numeşte figură cu simetrie de ordin *n*.

7.2.23. Observație. • O figură care admite simetrie de ordin par, admite centru de simetrie.

• O figură care nu se reduce la un punct şi care este invariantă la o rotaţie de unghi α cu $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ are o mulţime infinită de puncte (punctele $R^n(M) = M_n, n \in \mathbf{N}$ sunt distincte şi formează o mulţime densă pe cercul cu centrul în centrul de rotaţie O şi rază OM).

7.2.24. Observaţie. În geometria euclidiană plană mai sunt şi alte transformări geometrice importante, cum ar fi omotetiile şi inversiunile. Acestea nu sunt izometrii dar şi ele faţă de compunerea funcţiilor determină structuri algebrice de grup. Mulţimea omotetiilor de pol O şi a inversiunilor de centru O formează un grup numit grupul conform al punctului O.

7.3. Izometriile planului euclidian

7.3.1. Definiţie. O funcţie $f:\pi \to \pi$ se numeşte izometrie sau transformare ortogonală, dacă păstrează distanţele:

$$d(A,B) = d(f(A), f(B)), \quad \text{pentru orice} \quad A,B \in \pi.$$

Mulţimea izometriilor o notăm I.

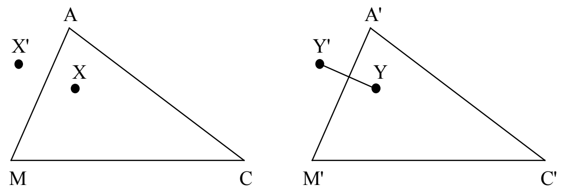
7.3.2. Propoziţie. Orice izometrie este o funcţie bijectivă, iar inversa este tot o izometrie.

Demonstraţie. Dacă $f(A) = f(B)$ atunci

$$d(A, B) = d(f(A), f(B)) = 0$$

deci $A = B$ (funcţia f este injectivă).

Pentru a demonstra surjectivitatea, considerăm ABC un triunghi şi fie $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$. Triunghiul ΔABC şi $\Delta A'B'C'$ sunt congruente. Fie $Y \in \pi$, vom arăta că există $X \in \pi$ astfel ca $f(X) = Y$. Dacă Y nu este pe dreapta $A'B'$ luăm Y' simetricul lui Y faţă de $A'B'$ şi considerăm punctele X, X' astfel ca $\Delta AXB \equiv \Delta A'YB'$ şi $\Delta AX'B \equiv \Delta A'Y'B'$.



Avem: $f(X) \in \{Y, Y'\}, f(X') \in \{Y, Y'\}$. Dacă $f(X) = Y$ atunci $f(X') = Y'$ şi dacă $f(X) = Y'$ atunci $f(X') = Y$.

Pentru funcţia inversă avem:

$$d(A,B) = d(f(f^{-1}(A)), f(f^{-1}(B))) = d(f^{-1}(A), f^{-1}(B))$$

deci f^{-1} este izometrie.

7.3.3. Propoziție. În raport cu compunerea funcțiilor, mulțimea izometriilor $(I,\circ)$ formează un grup, subgrup al bijecțiilor planului.

Demonstrație. Pentru orice mulțime M se defineşte grupul simetric al mulțimii M, $S(M)=\{f:M\to M \mid f$ S(M) bijectivă$\}$ şi $(S(M),\circ)$ este grup.

Este suficient să arătăm că $(I,\circ)$ este subgrup în $(S(\pi),\circ)$. Dacă $f,g\in I$ atunci
$d((f\circ g)(A),(f\circ g)(B))=d(f(g(A)),f(g(B)))=d(g(A),g(B))=d(A,B)$.

Am arătat că dacă $f\in I$ atunci $f^{-1}\in I$.

Se defineşte segmentul $[A,B]$ astfel:

$$[A,B]=\{M\in\pi \mid d(A,M)+d(M,B)=d(A,B)\}$$

şi se poate arăta:

7.3.4. Propoziție. Dacă $f:\pi\to\pi$ este o izometrie atunci:

a) Un segment $[A,B]$ este dus în segmentul $[f(A),f(B)]$.

b) O semidreaptă $[A,B$ este dusă în semidreapta $[f(A),f(B)$.

c) O dreaptă *AB* este dusă în dreapta $f(A)f(B)$.

d) Un unghi $\angle AOB$ este dus în unghiul $\angle f(A)f(O)f(B)$ şi măsurile lor sunt egale.

e) Un cerc $C(O,R)$ este dus în cercul $C(f(O),R)$ şi discul este dus în disc.

f) Un semiplan limitat de dreapta *AB* este dus într-un semiplan mărginit de dreapta $f(A)f(B)$.

g) Două drepte paralele sunt duse în două drepte paralele.

O importanță deosebită în studiul izometriilor planului o au punctele fixe şi figurile invariante.

Fie $F\subset\pi$ o mulțime de puncte (numită figură geometrică) şi $f:\pi\to\pi$ o izometrie.

7.3.5. Definiție. Se spune că figura *F* este invariantă la izometria *f* sau că izometria *f* invariază figura *F* dacă $f(F)=F$. Dacă $F=\{A\}$ se spune că punctul *A* este punct fix pentru *f*.

7.3.6. Propoziție. Dacă $F\subset\pi$ este o figură geometrică plană şi notăm cu $S(F)=\{f\in I \mid f(F)=F\}$ atunci $(S(F),\circ)$ este un subgrup al grupului izometriilor planului, numit grupul de simetrie al figurii *F*.

7.3.7. Observație. Mulțimea punctelor fixe ale unei izometrii *f* poate fi:

a) mulțimea vidă (translațiile)

b) un punct (rotațiile)

c) o dreaptă (simetriile axiale)

d) tot planul (aplicație identică).

Clasificarea izometriilor planului se face urmând ideile din următoarele afirmații:

7.3.8. Propoziție. Două izometrii f_1, f_2 care iau valori egale în trei puncte necoliniare date, sunt identice.

Demonstrație. Funcția $f = f_1 \circ f_2^{-1}$ are trei puncte fixe *A, B, C*. Dreptele *AB, BC, CA* sunt duse identic în *AB, BC, CA* deci sunt formate din puncte fixe. Dreptele *MN* cu $M \in AB, N \in BC$ generează întreg planul şi *MN* este dusă identic în *MN*, deci tot planul este format din puncte fixe pentru *f*.

7.3.9. Propoziție. Dacă triunghiurile ΔABC şi $\Delta A'B'C'$ sunt congruente atunci există o izometrie $f:\pi \to \pi$ cu proprietatea $f(A)=A'$, $f(B)=B'$ şi $f(C)=C'$.

Demonstrație. Dacă definim $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$, f se prelungeşte unic la izometria pe punctele $M \in AB$ şi pe punctele $N \in BC$, iar apoi unic pe punctele dreptelor *MN*.

7.3.10. Teorema de structură a izometriilor planului

Fie $f:\pi \to \pi$ este o izometrie a planului π.

a) Dacă *f* are cel puțin trei puncte fixe necoliniare atunci *f* este aplicație identică $f = 1_\pi$.

b) Dacă *f* are cel puțin două puncte fixe A_1 şi A_2 atunci $f = 1_\pi$ sau *f* este simetrie axială față de dreapta A_1A_2.

c) Dacă *f* are cel puțin un punct fix *A*, atunci $f = 1_\pi$ sau *f* este o simetrie axială față de o dreaptă ce trece prin *A*, sau *f* este o rotație în jurul lui A_1.

d) Orice izometrie *f* este de forma $f = R \circ t$ sau de forma $s_d \circ t$ unde *R* este o rotație, *t* o translație şi s_d o simetrie axială.

Demonstrație. a) Dacă prin absurd există $B \in \pi$ cu $f(B)=B' \neq B$ şi A_1, A_2, A_3 sunt punctele fixe necoliniate atunci

$$d(A_i,B)=d(f(A_i),f(B))=d(A_i,f(B))=d(A_i,B')$$

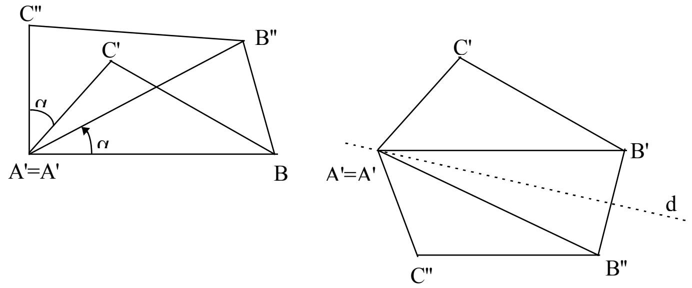
deci punctele A_1, A_2, A_3 sunt pe mediatoarea segmentului $[B,B']$, adică sunt coliniare.

b) Dacă există $B \in \pi$ cu $f(B)=B' \neq B$ atunci ca la a), A_1 şi A_2 sunt pe mediatoarea *d* a segmentului $[B,B']$. Pentru izometria $s_d \circ f$ punctele B, A_1, A_2 sunt puncte fixe necoliniare deci $s_d \circ f = 1_A, f = s_d$.

c) Dacă $f \neq 1_\pi$, $f(B)=B' \neq B$ şi *d* este mediatoarea segmentului $[B,B']$, funcția $g = s_d \circ f$ are puncte fixe pe A_1 şi *B* şi conform punctului b) avem $g = 1_\pi$ sau $g = s_{d_1}$ unde d_1 este dreapta A_1B. Dacă $s_d \circ f = 1_\pi$ atunci $f = s_d$ şi dacă $s_d \circ f = s_{d_1}$ atunci $f = s_d \circ s_{d_1} = R$ (compunerea a două simetrii axiale este o rotaţie).

d) Fie ΔABC un triunghi cu $d(A,B) \neq d(A,C)$ şi $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Triunghiurile ΔABC şi $\Delta A'B'C'$ sunt congruente.

Dacă translatăm triunghiul ABC astfel ca A să ajungă în A' şi notăm $t(A) = A''$, $t(B) = B''$, $t(C) = C''$ atunci triunghiurile $\Delta A'B'C'$ şi $\Delta A''B''C''$ sunt congruente. Ele pot fi suprapuse sau printr-o rotaţie în jurul lui $A' = A''$ sau printr-o rotaţie în jurul lui $A' = A''$ sau printr-o simetrie faţă de dreapta d mediatoarea segmentului $B'B''$.



7.4. Interpretări geometrice ale unor grupuri remarcabile

Numeroase grupuri abstracte au interpretări geometrice interesante, ele fiind grupuri de simetrie ale unor figuri geometrice plane sau din spaţiu. Vom da câteva exemple des întâlnite.

7.4.1. Interpretarea grupurilor ciclice

Orice grup ciclic este izomorf sau cu $(\mathbf{Z},+)$ sau cu $(\mathbf{Z}_n,+)$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Pentru o interpretare a grupului $(\mathbf{Z},+)$ considerăm figura geometrică formată din punctele unei drepte ce determină o diviziune echidistantă (de exemplu punctele de pe axa Ox de coordonate (abscise) numere întregi). Deci $F = \{A_k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Avem $\overline{A_k A_{k+1}} = \bar{v}, k \in \mathbf{Z}$ şi pentru orice $k \in \mathbf{Z}$, figura F este invariantă la translaţia $t_{k\bar{v}}$. Mulţimea tuturor acestor translaţii $(\{t_{k\bar{v}} \mid k \in \mathbf{Z}\},\circ)$ formează un grup izomorf cu $\mathbf{Z}$. $(t_{k_1\bar{v}} \circ t_{k_2\bar{v}} = t_{(k_1+k_2)\bar{v}})$.

În concluzie $(\mathbf{Z},+)$ **este grupul translaţiilor unei diviziuni echidistante a unei drepte.**

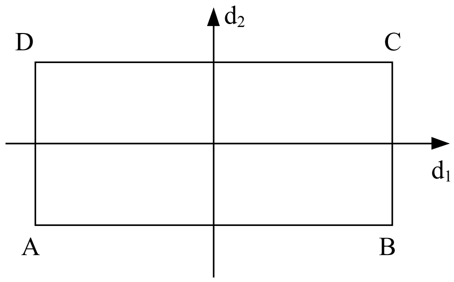
Pentru grupul ciclic $(\mathbf{Z}_n,+)$ folosim grupul izomorf $(U_n,\cdot)=\{z\in\mathbf{C}\mid z^n=1\}$ al rădăcinilor de ordin n ale unității. Avem

$$U_n=\left\{\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\mid k=\overline{0,n-1}\right\}$$

şi corespunzător notăm $R_n=\{R_{\frac{2k\pi}{n}}\mid k=\overline{0,n-1}\}$ mulțimea rotațiilor cu unghiurile $\left\{0,\frac{2\pi}{n},2\cdot\frac{2\pi}{n},\ldots,(n-1)\frac{2\pi}{n}\right\}$ în jurul originii. Am văzut că orice astfel de rotație este $R_{\frac{2k\pi}{n}}(z)=\varepsilon_k z,\ k=\overline{0,n-1}$ şi grupurile $(R_n,\circ)$ şi $(U_n,\cdot)$ sau $(\mathbf{Z}_n,+)$ sunt izomorfe. Pe de altă parte, dacă notăm cu $A_1,A_2,\ldots,A_n$ vârfurile unui poligon regulat cu centrul O, este evident că acesta este invariant la orice rotație $R\in R_n$. În concluzie $(R_n,\circ)$ este grupul rotațiilor unui poligon regulat cu n laturi, deci **orice grup ciclic finit este grupul rotațiilor unui poligon regulat.**

7.4.2. Grupul lui Klein

Considerăm un dreptunghi $ABCD$ care nu este pătrat. Vom arăta că grupul Klein $(K_4,\circ)$ este grupul de simetrie $S(F)$ unde $F=\{A,B,C,D\}$. Orice izometrie duce puncte diametral opuse în puncte diametral opuse.



Dacă $f(A)=C$ atunci $f(C)=A,\ f(B)\in\{B,D\},\ f(D)\in\{B,D\}$ pentru cazul $f(B)=B$ obținem contradicția

$$d(A,B)=d(f(A),f(B))=d(C,B)$$

deci obținem doar situația $f(B)=D$ şi $f(D)=B$ care este simetrică față de centrul dreptunghiului.

Dacă $f(A)=A$ atunci $f(C)=C,\ f(B)\in\{B,D\},\ f(D)\in\{B,D\}$. Pentru cazul $f(B)=D$ obținem contradicția

$$d(A,B)=d(f(A),f(B))=d(A,D)$$

rămâne doar cazul $f(B)=B,\ f(D)=D$ şi obținem $f=1_\pi$.

Dacă $f(A)=B$ atunci $f(C)=D$ şi $f(B)\in\{A,C\}$, $f(D)\in\{A,C\}$. Pentru $f(B)=C$ obţinem contradicţia

$$d(A,B)=d(f(A),f(B))=d(B,C),$$

deci $f(B)=A$ şi $f(D)=C$ iar $f=s_{d_2}$ este simetrica axială faţă de dreapta d_2 mediatoarea laturilor $[AB]$ şi $[CD]$.

Dacă $f(A)=D$ se obţine $f=s_{d_1}$ simetria faţă de mediatoarea celorlalte laturi. În concluzie $S(F)=\{1_\pi, s_{d_1}, s_{d_2}, s_0\}$. Se observă făcând tabla Cayley de compunere a grupului $S(F)$ că $(S(F),\circ)\approx(K_4,\circ)$.

$$K_4=\{1,a,b,c \mid a^2=b^2=c^2=1\}$$

O posibilă generalizare este următoarea:

Considerăm grupul $\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2\times...\times\mathbf{Z}_2=\mathbf{Z}_2^n$, izomorf cu grupul părţilor unei mulţimi cu *n* elemente $(P(a_1,a_2,...,a_n),\Delta)$ (operaţia de diferenţă simetrică $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$).

În caz particular $n=2, K_4\approx\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$.

În cazul $n=3$ se consideră ca figură F o prismă dreptunghiulară dreaptă. Grupul său de simetrie este format din trei simetrii faţă de plane paralele cu feţele, simetrii axiale, faţă de drepte paralele cu laturile, simetria centrală faţă de centrul figurii şi aplicaţia identică, deci acest grup are opt elemente şi $S(F)\approx\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$.

7.4.3. Grupul diedral

Am văzut că rotaţiile care invariază un poligon regulat cu *n* laturi formează un grup de ordin *n*, dar mai sunt şi alte izometrii care invariază acest poligon. În general grupul diedral D_n este grupul simetriilor unui poligon regulat P_n, deci $D_n=S(P_n)$.

Dacă R_n este grupul rotaţiilor atunci $R_n\subset D_n$ şi deci $P_n=[A_1,A_2,...,A_n]$ pentru orice $f\in D_n$ cu $f(A_1)=A_k$ există o rotaţie *R* astfel ca $f\circ R(A_1)=A_1$, deci putem să ne rezumăm a căuta doar izometriile care au pe A_1 ca punct fix.

Dacă $r=2k$ şi $f(A_1)=A_1$ atunci $f(A_{k+1})=A_{k+1}$ (din condiţia de izometrie două puncte diametral opuse sunt duse în puncte diametral opuse. Punctele cele mai apropiate de A_1 sunt A_2 şi A_{2k}, deci $f(A_2)\in\{A_2,A_{2k}\}$, $f(A_{2k})=\{A_2,A_{2k}\}$. Dacă $f(A_2)=A_2$ şi $f(A_{2k})=A_{2k}$ se deduce $f=1_\pi$. Dacă

$f(A_2) = A_{2k}$ şi $f(A_{2k}) = A_2$ se deduce $f = s_{d_1}$ este simetria faţă de dreapta A_1A_{k+1}. Se obţine $2n = 4k$ izometrii

$$\{R_1, R_2, ..., R_n, R_1 \circ s_{d_1}, R_2 \circ s_{d_1}, ..., R_n \circ s_{d_1}\} = S(P_n) = D_n.$$

Dacă notăm cu R rotaţia de unghi $\frac{2\pi}{n}$ şi s simetria faţă de o diagonală atunci D_n este grupul generat de r şi s ca subgrup al grupului izometriilor planului

$$D_n = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, r \cdot s, r^2 s, ..., r^{k-1} s\}$$

sau $D_n = \langle x, y \rangle$ unde $x^n = 1$, $y^2 = 1$ şi $xy = yx^{-1}$ (are un generator de ordin n, un generator de ordin 2 şi o relaţie de "comutare" $(xy = yx^{-1})$).

Dacă $n = 2k + 1$ este impar şi $f(A_1) = A_1$ atunci $f(A_k) \in \{A_k, A_{k+1}\}$ şi $f(A_{k+1}) \in \{A_k, A_{k+1}\}$ fiind punctele cele mai depărtate de A_1. Raţionând analog se deduce că dacă $f(A_k) = A_k$ şi $f(A_{k+1}) = A_{k+1}$ atunci $f = 1_\pi$ iar dacă $f(A_k) = A_{k+1}$ şi $f(A_{k+1}) = A_k$ atunci $f = s_{d_1}$ este simetria faţă de mediatoarea segmentului $[A_k, A_{k+1}]$ (care trece prin A_1). Obţinem tot un grup cu $2n$ elemente.

Se ştie că un grup este un grup de permutări, subgrup într-un grup de bijecţii. Este uşor de arătat că grupul diedral D_n este izomorf cu subgrupul lui $(S_n, \circ)$ generat de permutările

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & ... & n & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & ... & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Bibliografie

[1] D. Smaranda, N. Soare, *Transformări geometrice*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1988.

[2] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.

[3] D. Popescu, C. Vraciu, *Elemente de teoria grupurilor finite*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[4] T. Albu, Ion G. Ion, *Itinerar elementar în algebra superioară*, Editura ALL Educational, Bucureşti, 1997.

Probleme rezolvate

R7.5.1. Să se determine grupurile de simetrie pentru următoarele figuri geometrice plane:

a) triunghi

b) trapez

c) paralelogram

d) romb

e) dreaptă.

Soluţie. a) Fie triunghiul ΔABC. Dacă triunghiul nu este echilateral sau isoscel şi $a > b > c$ punctele cele mai depărtate *B* şi *C* (în care se realizează diametrul mulţimii) sunt duse în *B* sau *C*, iar cele mai apropiate *A* şi *B* în *A* sau *B*. se obţine $f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C$, deci $f = 1_\pi$ şi atunci $S(\Delta ABC) = \{1_\pi\}$.

Dacă triunghiul ΔABC este isoscel $b = c$ atunci din $d(A,B) = d(A,C)$ rezultă $d(f(A), f(B)) = d(f(A), f(C))$ deci $f(A) = A$ şi $f(B) \in \{B,C\}$, $f(C) \in \{B,C\}$. Dacă $f(B) = B$ şi $f(C) = C$ atunci $f = 1_\pi$ iar dacă $f(B) = C$ şi $f(C) = B$ atunci $f = s_d$ unde d este mediatoarea laturii $[BC]$, deci $S(\Delta ABC) = \{1_\pi, s_d\}$. Dacă triunghiul este echilateral, suntem în cazul particular al unui poligon regulat cu 3 laturi deci $S(\Delta ABC) = D_3$ care are 6 elemente.

b) Fie *T* trapezul *ABCD* cu bazele $AB \parallel CD, d(A,B) \neq d(D,C)$, de exemplu $d(A,B) > d(D,C)$. O funcţie $f \in S(T)$ este în particular o izometrie a planului, deci duce drepte paralele în drepte paralele şi atunci $f(A) \in \{A,B\}, f(B) = \{A,B\}, f(C) \in \{C,D\}, f(D) \in \{C,D\}$. Dacă trapezul nu este isoscel avem $f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C, f(D) = D$ şi $S(T) = \{1_\pi\}$ iar dacă trapezul este isocel $S(T) = \{1, s_d\}$ unde s_d este simetria faţă de mediatoarea laturilor paralele.

c) $S(P) = \{1_\pi\}$

d) $S(R) = K_4$ (simetriile faţă de diagonale, faţă de centrul rombului şi simetria identică).

e) Dacă $f(A) = A'$ atunci pentru orice cu $d(A,B) = x$ notăm cu $B_1^{'}$ şi $B_2^{'}$ cele două puncte de pe *d* cu proprietatea $d(A', B_1^{'}) = d(A', B_2^{'}) = x$. Atunci $f(B) \in \{B_1^{'}, B_2^{'}\}$, cele două variante dau o translaţie sau o translaţie compusă cu o simetrie centrală, deci *f* este de forma $f = t_{\overline{a}}$ sau $f = u_{\overline{a}}$ cu $t_{\overline{a}}(\overline{v}) = \overline{a} + \overline{v}$ şi

$u_{\bar{a}}(\bar{v}) = \bar{a} - \bar{v}$. Avem: $S(d) = \{t_{\bar{a}}, u_{\bar{a}} \mid \bar{a} \in \overline{\mathbf{R}}\}$ (avem $u_{\bar{a}} \circ u_{\bar{b}} = t_{\bar{a}-\bar{b}}$, $u_{\bar{a}} \circ t_{\bar{b}} = u_{\bar{a}-\bar{b}}$, $t_{\bar{b}} \circ u_{\bar{a}} = u_{\bar{a}+\bar{b}}$ şi $t_{\bar{a}} \circ t_{\bar{b}} = t_{\bar{a}+\bar{b}}$), sau $s(d) \approx \mathbf{R} \times \mathbf{Z}_2$.

R7.5.2. Să se arate că dacă d_1, d_2, d_3 sunt drepte concurente atunci simetriile axiale $s_{d_1}, s_{d_2}, s_{d_3}$ verifică egalitatea

$$s_{d_3} \circ s_{d_2} \circ s_{d_1} = s_{d_1} \circ s_{d_2} \circ s_{d_3}.$$

Soluţie. Compunerea a două simetrii axiale s_{d_2} şi s_{d_1} este o rotaţie $R_\alpha = s_{d_2} \circ s_{d_1}$ şi atunci $R_{-\alpha} = s_{d_1} \circ s_{d_2}$. Pe de altă parte rotaţia R_α poate fi obţinută prin compunerea $R_\alpha = s_{d_3} \circ s_{d_4}$ şi $R_{-\alpha} = s_{d_4} \circ s_{d_3}$, avem

$$s_{d_3} \circ s_{d_2} \circ s_{d_1} = s_{d_3} \circ R_\alpha = s_{d_3} \circ s_{d_3} \circ s_{d_4} = s_{d_4}$$

$$s_{d_1} \circ s_{d_2} \circ s_{d_3} = R_{-\alpha} \circ s_{d_3} = s_{d_4} \circ s_{d_3} \circ s_{d_3} = s_{d_4}$$

(compunerea a trei simetrii axiale este o simetrie axială).

R7.5.3. Să se arate că dacă dreptele $d_1, d_2, ..., d_n$ sunt concurente atunci $s_{d_1} \circ s_{d_2} \circ ... \circ s_{d_n}$ este rotaţie sau simetrie axială.

Soluţie. Dacă $n = 2k$ este număr par $s_{d_1} \circ s_{d_2}$, $s_{d_3} \circ s_{d_4}, ..., s_{d_{n-1}} \circ s_{d_n}$ sunt rotaţii şi compunerea lor este tot o rotaţie.

Dacă $n = 2k+1$, $s_{d_1} \circ s_{d_2} \circ ... \circ s_{d_{n-1}} = R$ este rotaţie şi putem scrie $R = s_d \circ s_{d_n}$. Atunci $s_{d_1} \circ s_{d_2} \circ ... \circ s_{d_n} = s_d \circ s_{d_n} \circ s_{d_n} = s_d$.

R7.5.4. Să se arate că dacă $d_1, d_2, ..., d_{2n+1}$ sunt drepte concurente atunci $s_{d_1} \circ s_{d_2} \circ ... \circ s_{d_{2n+1}} = s_{d_{2n+1}} \circ s_{d_{2n}} \circ ... \circ s_{d_1}$.

Soluţie. Se face inducţie după *n*.

8. Inele

Considerăm cunoscute toate noțiunile şi proprietățile referitoare la inele şi corpuri din programa şcolară. Inelele cu care vom lucra sunt peste tot în această carte, ca în materia de liceu, inele unitare, iar morfismele de inele (şi corpuri) sunt morfisme unitare de inele (corpuri) unitare.

8.1. Centrul unui inel

Multe din problemele de concurs cu structuri algebrice conțin condiții ce asigură comutativitatea unui grup sau a unui inel. Deseori, noțiunile de centru al unui grup şi centru al unui inel sunt instrumente eficiente de lucru în cazul unor astfel de probleme.

<u>8.1.1. Definiție</u> *Fie inelul* $(A, +, \cdot)$. *Mulțimea* $Z(A) = \{x \in A \,/\, x \cdot y = y \cdot x, \ \forall y \in A\}$ *se numeşte centrul inelului* A.

<u>8.1.2. Observații</u> Fie inelul $(A, +, \cdot)$.

a) $Z(A) \neq \varnothing$ $(1 \in Z(A))$

b) Fie $k \in \mathbf{Z}$. Notând $k = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{k \text{ ori}}$, avem $k \in Z(A)$.

c) Inelul $(A, +, \cdot)$ este comutativ $\Leftrightarrow$ $A = Z(A)$

Următorul rezultat, foarte util, se demonstrează uşor:

<u>8.1.3. Propoziție</u> *Fie inelul* $(A, +, \cdot)$. *Atunci:*

a) *Centrul* $Z(A)$ *al inelului este un subgrup al grupului aditiv* $(A, +)$.

b) *Fie inelele* $(A_1, +, \cdot)$ *şi* $(A_2, +, \cdot)$. *Atunci* $A_1 \approx A_2 \ \Rightarrow \ Z(A_1) \approx Z(A_2)$.

c) *Fie inelul comutativ* $(A, +, \cdot)$. *Atunci* $Z(\mathcal{M}_n(A)) = \{a \cdot I_n \,/\, a \in A\}$ *şi* $A \approx Z(\mathcal{M}_n(A))$

<u>8.1.4. Lemă</u> *Fie corpul comutativ* $(L, +, \cdot)$, $m \in \mathbf{N}^*$ *şi* $A \in \mathcal{M}_m(L)$ *o matrice nilpotentă* $(\exists p \in \mathbf{N}^*,\ A^p = 0_m)$. *Atunci* $A^m = 0_m$.

<u>*Demonstrație:*</u> Dacă $m = 1$, $\mathcal{M}_1(L) = L$ şi A este element nilpotent în corpul L, deci $A = 0$.

Pentru $m \geq 2$, notăm cu r cel mai mic număr natural astfel încât $A^r = 0_m$.

Presupunem că $r > m$.

Din teorema Hamilton – Cayley, $A^m + a_{m-1}A^{m-1} + ... + a_1A + a_0I_m = 0_m$, (1) unde $p_A(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + ... + a_1X + a_0 \in L[X]$ este polinomul caracteristic al matricei A. Deoarece $A^k \neq 0_m$, $\forall\, k = \overline{1, r}$ şi $A^k = 0_m$, $\forall\, k \geq r$, înmulţind pe rând relaţia (1) cu $A^{r-1}, A^{r-2}, ..., A^{r-m}$ obţinem $a_0 = a_1 = .. = a_{m-1} = 0$ şi (1) devine $A^m = 0_m$, ceea ce contrazice minimalitatea lui r. Aşadar $r \leq m$, de unde rezultă că $A^m = A^r \cdot A^{m-r} = 0_m$.

<u>8.1.5. Propoziţie</u> *Fie corpurile comutative $(K, +, \cdot)$ şi $(L, +, \cdot)$ şi $m, n \in \mathbf{N}^*$, $n > m$. Singurul morfism de inele de la $M_n(K)$ la $M_m(L)$ este morfismul nul.*

<u>Demonstraţie:</u> Fie $f : M_n(K) \to M_m(L)$ un morfism de inele.
Pentru fiecare $a \in K$, notăm $e_{ij}(a) \in M_n(K)$, $i, j = \overline{1, n}$ matricea care are pe poziţia (i, j) elementul $a \in K$ şi celelalte elemente egale cu 0 şi

$$U = U(a) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_{12}(a) + \sum_{k=2}^{n-2} e_{k,\,k+1}(1)$$

Avem $U^p = e_{1,p+1}(a) + \sum_{k=2}^{n-p} e_{k,\,k+p}(1)$, $p = \overline{1, n-2}$; $U^{n-1} = e_{1,n}(a)$; $U^n = 0_n$.

Fie $A = f(U) \in M_m(L)$. Avem $A^n = (f(U))^n \overset{f \text{ morfism}}{=} f(U^n) = f(0_n) = 0_m$,
deci $A \in M_m(L)$ este o matrice nilpotentă. Din Lema 8.1.4. rezultă $A^m = 0_m$.
$n > m \Rightarrow 0_m = A^{n-1} = (f(U))^{n-1} = f(U^{n-1}) = f(e_{1,n}(a))$, deci $f(e_{1,n}(a)) = 0_m$, $\forall\, a \in K$ (1)

Avem $e_{i,j}(a) = e_{i,1}(1) \cdot e_{1,j}(a)$ $\forall\, a \in K$, $\forall\, i, j = \overline{1, n}$.

Obţinem $f(e_{i,j}(a)) = f(e_{i,1}(1)) \cdot f(e_{1,j}(a)) \overset{(1)}{=} 0_m$, $\forall\, a \in K$, $\forall\, i, j = \overline{1, n}$ (2)

Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$.

Avem $A = \sum_{1 \leq i,j \leq n} e_{ij}(a_{ij})$ şi $f(A) = f\left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} e_{ij}(a_{ij})\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} f(e_{ij}(a_{ij})) \overset{(2)}{=} \sum_{1 \leq i,j \leq n} 0_m = 0_m$

şi cum A a fost oarecare, deducem că f este morfismul nul.

Observaţie Pentru $m = 1$ şi $L = K$ obţinem că singurul morfism de inele de la $M_n(K)$ la K este morfismul nul.

8.1.6. Propoziție *Fie corpurile comutative* $(K, +, \cdot)$ *şi* $(L, +, \cdot)$ *şi* $m, n \in \mathbf{N}^*$.
Inelele $M_n(K)$ *şi* $M_m(L)$ *sunt izomorfe dacă şi numai dacă* $m = n$ *şi* $K \approx L$.

Demonstrație: „$\Leftarrow$” Dacă inelele K şi L sunt izomorfe şi m = n, fie $f : K \to L$ un izomorfism.
Se verifică atunci că funcția $f^* : M_n(K) \to M_n(L)$, $f^*\left(\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}\right) = \left(f\left(a_{ij}\right)\right)_{1\le i,j\le n}$
este un izomorfism de inele.
„$\Rightarrow$” Avem (8.1.3.) $M_n(K) \approx M_m(L) \Rightarrow Z(M_n(K)) \approx Z(M_m(L))$.
Cum $K \approx Z(M_n(K))$ şi $L \approx Z(M_m(L))$, rezultă $K \approx L$.
Fie $f : M_n(K) \to M_n(L)$ un izomorfism de inele. Din propoziția 8.1.5. rezultă că $n \le m$. Dar şi funcția $f^{-1} : M_n(L) \to M_n(K)$ este un izomorfism de inele şi din aceeaşi propoziție deducem că $m \le n$, deci $m = n$.

8.1.7. Propoziție *Fie inelul* $(A, +, \cdot)$ *şi* $n, p \in \mathbf{Z}$. *Notăm cu* $d = (n, p)$.
Dacă $x \in A$ *astfel încât* $n \cdot x \in Z(A)$ *şi* $p \cdot x \in Z(A)$, *atunci şi* $d \cdot x \in Z(A)$.

Demonstrația proprietății anterioare este o consecință imediată a propoziției 4.1.8.

8.1.8. Consecință *Fie inelul* $(A, +, \cdot)$ *şi* $n, p \in \mathbf{Z}$.
Dacă $(n, p) = 1$ *şi* $\forall x \in A$, $n \cdot x \in Z(A)$ *şi* $p \cdot x \in Z(A)$, *atunci inelul este comutativ.*

8.1.9. Teorema lui Mac Hale *Fie inelul* $(A, +, \cdot)$. *Dacă există endomorfismul surjectiv* f *al grupului aditiv* $(A, +)$ *astfel încât* $\forall x \in A$, $(x^2 - f(x)) \in Z(A)$, *atunci inelul este comutativ.*

Demonstrație: Fie $x \in A$. Din ipoteză, $x^2 - f(x) \in Z(A)$ (1)
Cum $-x \in A$, din (1) obținem $x^2 + f(x) \in Z(A)$ (2)
Scăzând din (2) relația (1), obținem, deoarece $(Z(A), +)$ este grup, $2 \cdot f(x) \in Z(A)$
$\overset{f \text{ surj}}{\Rightarrow} \forall a \in A,\ 2 \cdot a \in Z(A)$

Fie $x, y \in A$. Cum $x + y \in A$, din (1) obținem $(x+y)^2 - f(x+y) \in Z(A)$

$(x+y)^2 - f(x+y) = x^2 - f(x) + y^2 - f(y) + x\cdot y + y\cdot x$ şi cum $x^2 - f(x)$, $y^2 - f(y) \in Z(A)$ obţinem $x\cdot y + y\cdot x \in Z(A)$. Atunci: $\forall\, x, y\in A$, $x\cdot(x\cdot y + y\cdot x) = (x\cdot y + y\cdot x)\cdot x$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \forall\, x, y\in A,\ x^2\cdot y = y\cdot x^2 \Leftrightarrow \forall x\in A,\ x^2\in Z(A) \overset{(1)}{\Rightarrow} \forall\, x\in A,\ f(x)\in Z(A)$ $\overset{f\ surj}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow\ \forall\, a\in A,\ a\in Z(A) \Leftrightarrow$ A e comutativ.

8.1.10. Propoziţie *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel şi f, g endomorfisme surjective ale sale.*
Oricare din condiţiile următoare asigură comutativitatea lui A:
a) *$\forall x\in A,\ (f(x^3) - g(x^2))\in Z(A)$*
b) *$\forall x\in A,\ (f(x) - g(x^3))\in Z(A)$*

Demonstraţie: **a)** Fie $x\in A$. Din ipoteză, $f(x^3) - g(x^2)\in Z(A)$ (1)
Cum $-x\in A$, din (1) obţinem $- f(x^3) - g(x^2)\in Z(A)$ (2)
(1) – (2) şi (1) + (2) $\Rightarrow$ $2f(x^3)$, $2g(x^2)\in Z(A) \overset{surj}{\Rightarrow} \forall\, a\in A,\ 2a^3, 2a^2\in Z(A)$
f şi g morfisme $\Rightarrow$ $f(1) = g(1) = 1$ şi $\forall\, k\in \mathbf{Z}$, $f(k) = k\in Z(A)$.
$x \leftarrow x+1$ în (1) $\Rightarrow$ $f((x+1)^3) - g((x+1)^2)\in Z(A)$ şi ţinând cont de faptul că f şi g sunt morfisme, obţinem: $\forall\, x\in A$, $f(3x^2+3x) - g(2x)\in Z(A)$ (3)
$x \leftarrow -x$ în (3) $\Rightarrow$ $\forall\, x\in A$, $f(3x^2-3x) + g(2x)\in Z(A)$ (4)
(3) – (4) $\Rightarrow$ $\forall\, x\in A$, $f(6x) - g(4x)\in Z(A)$ (5)
$x \leftarrow x+1$ în (3) $\Rightarrow$ $f(3x^2+9x+6) - g(2x+2)\in Z(A) \Leftrightarrow f(3x^2+9x) - g(2x) + 4\in Z(A) \overset{4\in Z(A)}{\Leftrightarrow} f(3x^2+9x) - g(2x)\in Z(A) \overset{-(3)}{\Rightarrow} f(6x)\in Z(A) \overset{(5)}{\Rightarrow} g(4x)\in Z(A) \overset{surj}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow\ \forall\, a\in A,\ 4a, 6a\in Z(A) \Rightarrow \forall\, a\in A,\ 2a\in Z(A)$ (6).
(3) $\Leftrightarrow$ $2f(x^2) + 2f(x) - 2g(x) + f(x^2+x)\in Z(A) \overset{(6)}{\Rightarrow} f(x^2+x)\in Z(A) \overset{surj}{\Rightarrow}$
$\forall\, a\in A,\ a^2 + a\in Z(A)$ (7)
Cum funcţia $h: A \to A$, $h(a) = -a$ este un endomorfism surjectiv al lui (A, +), din (7) rezultă, folosind teorema lui Mac Hale, că inelul A este comutativ.
b) Fie $x\in A$. Din ipoteză, $f(x) - g(x^3)\in Z(A)$ (1)
$x \leftarrow x+1 \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x) - g(x^3) - 3g(x^2) - 3g(x)\in Z(A) \overset{(1)}{\Rightarrow} \forall\, x\in A,\ 3g(x^2) + 3g(x)\in Z(A) \overset{surj}{\Rightarrow} \forall\, a\in A,\ 3a^2 + 3a\in Z(A)$ (2)
$x, y\in A \overset{(1)}{\Rightarrow} 3(x+y)^2 + 3(x+y)\in Z(A) \overset{(1)}{\Rightarrow} \forall\, x, y\in A,\ 3xy + 3yx\in Z(A) \Rightarrow$
$\Rightarrow x(3xy+3yx) = (3xy+3yx)x \Leftrightarrow \forall\, x, y\in A,\ 3x^2\cdot y = y\cdot(3x^2) \Rightarrow \forall\, x\in A,$
$3x^2\in Z(A)$

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\forall$ a$\in$A, 3a$\in$Z(a) (3)

x, y$\in$A $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ f(x+y) – g((x+y)^3)$\in$Z(A) $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ g(x^{2}y+y^{2}x+xyx+xy^2+yx^2+yxy)$\in$Z(A)

$\overset{surj}{\Rightarrow}$ $\forall$ a, b$\in$A, a^{2}b+b^{2}a+aba+ab^2+ba^2+bab$\in$Z(A) (4)

b $\leftarrow$ –b $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $\forall$ a, b$\in$A, –a^{2}b+b^{2}a–aba+ab^2–ba^2+bab$\in$Z(A) (5)

(4) – (5) $\Rightarrow$ $\forall$ a, b$\in$A, 2a^{2}b+2aba+2ba^2$\in$Z(A) (6)

(6) $\Rightarrow$ a$\cdot$(2a^{2}b+2aba+2ba^2) = (2a^{2}b+2aba+2ba^2)$\cdot$a $\Leftrightarrow$ (2a^3)$\cdot$b = b$\cdot$(2a^3), $\forall$ a, b$\in$A $\Rightarrow$ $\forall$ a$\in$A, 2a^3$\in$Z(A) şi cum din (3) avem şi că $\forall$ a$\in$A, 3a^3$\in$Z(A) rezultă că

$\forall$ a$\in$A, a^3$\in$Z(A) $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\forall$ x$\in$A, f(x)$\in$Z(A) $\overset{surj}{\Rightarrow}$ $\forall$ a$\in$A, a$\in$Z(A), deci A e comutativ.

8. 2. Condiții suficiente pentru inele Boole

<u>8.2.1. Definiție</u> *Fie inelul (A, +, ·). Dacă $\forall x\in A$, $x^2=x$ (toate elementele inelului sunt idempotente), atunci inelul se numeşte inel Boole.*

<u>8.2.2. Teoremă</u> ***a)*** *Orice inel Boole este comutativ.*
b) *Dacă un inel Boole nu are divizori ai lui zero, atunci el are cel mult două elemente.*

<u>Demonstrație:</u> **a)** Fie (A, +, ·) un inel Boole. Atunci, $\forall$ x$\in$A, x^2= x (1)

x $\leftarrow$ x + 1 $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\forall$ x$\in$A, x^2 + x + x + 1 = x + 1 $\Leftrightarrow$ $\forall$ x$\in$A, x + x = 0 (2)

x $\leftarrow$ x + y $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\forall$ x, y$\in$A, x^2 + x$\cdot$y + y$\cdot$x + y^2 = x + y $\Leftrightarrow$ $\forall$ x, y$\in$A, x$\cdot$y = –y$\cdot$x

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ y$\cdot$x = –y$\cdot$x $\Rightarrow$ $\forall$ x, y$\in$A, x$\cdot$y = y$\cdot$x, deci inelul este comutativ.

b) Fie x, y$\in$A. Atunci x$\cdot$y(x + y) $\overset{com}{=}$ x^2$\cdot$y + x$\cdot$y^2 $\overset{(1)}{=}$ xy + xy $\overset{(2)}{=}$ 0.

Aşadar, $\forall$ x, y$\in$A, x$\cdot$y(x + y) = 0 (3)

y = 1 $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\forall$ x$\in$A, x(x + 1) = 0 şi dacă A nu are divizori ai lui 0, rezultă că

$\forall$ x$\in$A, x = 0 sau x = –1 $\overset{(2)}{=}$ 1 şi deci $|A|\le 2$.

Există mai multe probleme cunoscute în care apar condiţii suficiente ca un inel să fie inel Boole. Astfel, egalităţile de forma $x^6 = x$, $\forall\, x\in A$ sau $x^{12} = x$,
$\forall\, x\in A$ sau $x^{20} = x$, $\forall\, x\in A$ implică idempotenţa tuturor elementelor inelului.
Ne propunem să generalizăm aceste relaţii.

<u>8.2.3. Definiţie</u> *Fie $n\in N$, $n \geq 2$.*
Inelul $(A, +, \cdot)$ se numeşte n – inel dacă $\forall a\in A$, $a^n \in A$.

<u>8.2.4. Lemă</u> *Dacă $(A, +, \cdot)$ este un n – inel, atunci $\forall m\in \mathbf{Z}$, $\forall a\in A$, $a^{m(n-1)+1} = a$.*

<u>Demonstraţie:</u> Prin inducţie după $m\in \mathbf{N}$. Pentru $m = 0$ este evident.
Fie $k\in \mathbf{N}$. Presupunem că $\forall\, a\in A$, $a^{k(n-1)+1} = a$
Pentru $a\in A$, $a^{(k+1)(n-1)+1} = a^{k(n-1)+1}\cdot a^{n-1} \overset{\text{ip ind}}{=} a\cdot a^{n-1} = a^n = a$ şi din principiul I de inducţie rezultă că $\forall\, m\in \mathbf{N}$, $a^{m(n-1)} = e$. Atunci $a^{-m(n-1)} = (a^{m(n-1)})^{-1} = e$.

<u>8.2.5. Lemă</u> *Fie $n = n_0 + n_1\cdot 2 + ... + n_{r-1}\cdot 2^{r-1} + n_r\cdot 2^r$, cu $n_i\in\{0, 1\}$, $\forall i=\overline{0, r}$, scrierea numărului natural n în baza de numeraţie 2. Dacă s dintre numerele n_i sunt egale cu 1, atunci există exact 2^s coeficienţi binomiali C_n^k impari.*

Să observăm că $6 = 110_{(2)} = 5 + 1$, $12 = 1100_{(2)} = 11 + 1$, $20 = 1010_{(2)} = 19 + 1$, ceea ce sugerează următorul enunţ:

<u>8.2.6. Teoremă</u> *Fie $n\in \mathbf{N}^*$ şi $(A, +, \cdot)$ un n – inel. Oricare dintre următoarele condiţii este suficientă pentru ca A să fie inel Boole:*
(i) *$\exists\, k, m, p\in \mathbf{N}^*$, $k > m$, p prim, astfel încât $n = 2^k + 2^m = p + 1$*
(ii) *$\forall\, x\in A$ avem $x + x = 0$ şi $\exists\, k\in \mathbf{N}^*$ astfel încât $n = 2^k + 1$.*

<u>Demonstraţie:</u> **(i)** n este par $\Rightarrow$ $(-1)^n = 1$. A fiind n – inel, avem $(-1)^n = -1$, de unde rezultă $1 + 1 = 0$ şi deci dintre coeficienţii binomiali $\left\{C_n^k \,\middle|\, k = \overline{0, n}\right\}$ sunt nenuli doar cei impari, aceştia fiind egali cu 1.

$n = 2^k + 2^m$ înseamnă că în scrierea în baza 2 a lui n avem doar două cifre de 1. În acest caz, din Lema 8.2.5., există exact 4 coeficienţi binomiali nenuli: $C_n^0 = C_n^n = 1 = C_n^r = C_n^{n-r}$, cu $r\in \left\{1, ..., \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$.

$(1 + a)^n = 1 + a \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k = 1 + a \Rightarrow C_n^r \cdot a^r + C_n^{n-r} \cdot a^{n-r} = 0 \Leftrightarrow a^r = a^{n-r} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^{2r} = a^n = a$. Cum $2r < n = p+1 \Rightarrow 2r-1 < p \overset{\text{p prim}}{\Rightarrow} (2r-1, p) = 1 \Rightarrow \exists$ h, $k \in \mathbf{Z}$,

$(2r-1)\cdot k = (n-1)\cdot h + 1$ şi din Lema 8.2.4. deducem că $a^{(2r-1)\cdot k} = a$ (1).
$a^{2r} = a \Rightarrow$ A este un 2r – inel şi din lema 8.2.4. rezultă $a^{(2r-1)\cdot k+1} = a$ (2).
(1), (2) $\Rightarrow a^2 = a$, $\forall a \in A$ şi A este un inel Boole.

(ii) Avem $1 + 1 = 0$ şi scrierea în baza 2 având tot două cifre nenule, rezultă că

dintre coeficienţii binomiali $\left\{C_n^k \,\middle|\, k = \overline{0, n}\right\}$ sunt nenuli doar 4, aceştia fiind, deoarece n este impar, $C_n^0 = C_n^n = 1 = C_n^1 = C_n^{n-1}$.

$(1 + a)^n = 1 + a \Leftrightarrow a^{n-1} + a = 0 \Leftrightarrow a^{n-1} = a \Leftrightarrow a = a^n = a^2$, $\forall a \in A$.

8. 3. Inele şi corpuri de caracteristică finită.

8.3.1. Definiţie *Fie inelul $(A, +, \cdot)$ cu elementele neutre 0, respectiv 1. Dacă $ord(1) = n \in \mathbf{N}^*$, spunem că inelul are caracteristica $char(A) = n$. Dacă $ord(1) = \infty$, spunem că inelul are caracteristica $char(A) = 0$.*

8. 3.2. Observaţie Un inel finit nu poate avea caracteristica 0, pentru că atunci $\langle 1 \rangle$ este un subgrup cu o infinitate de elemente al grupului finit $(A, +)$, fals.

8.3.3. Propoziţie *Fie inelul $(A, +, \cdot)$ şi mulţimea $P(A) = \{n\cdot 1 \,/\, n \in \mathbf{Z}\}$ (am notat $n\cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ ori}}$). Mulţimea $P(A)$ este un subinel al lui A (numit subinelul prim al lui A) şi orice subinel al lui A include $P(A)$ ($P(A)$ este cel mai mic subinel al lui A, în raport cu relaţia de incluziune).*

8.3.4. Propoziţie *Fie inelul $(A, +, \cdot)$. Atunci:*
a) *$char(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) \approx \mathbf{Z}$.*
b) *$char(A) = n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow P(A) \approx \mathbf{Z}_n$.*

8.3.5. Propoziţie *Caracteristica unui domeniu de integritate A este sau 0 sau un număr prim. În particular, orice corp finit are caracteristica un număr prim.*

Demonstrație: Fie $\mathrm{char}(A) = n \in \mathbf{N}$. Dacă $n \neq 0$, presupunem că n nu este un număr prim.
Atunci $\exists\ p, t \in \mathbf{N}^*$, $n = p \cdot t$ şi $0 = \underbrace{1+1+...+1}_{\text{n ori}} = \underbrace{(1+1+...+1)}_{\text{p ori}} \cdot \underbrace{(1+1+...+1)}_{\text{t ori}}$

de unde, A fiind domeniu de integritate, deducem că $\underbrace{(1+1+...+1)}_{\text{p ori}} = 0$ sau

$\underbrace{(1+1+...+1)}_{\text{t ori}} = 0$, contradicție cu $\mathrm{ord}(1) = n$. Aşadar n este prim.

8.3.6. Propozitie *Dacă $(A, +, \cdot)$ este un inel finit a cărui caracteristică este un număr prim p, atunci există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $|A| = p^n$.*

Demonstrație: Pe $(A, +)$, care are toate elementele nenule de ordinul p, se poate introduce o structură de $\mathbf{Z}_p$ – spațiu vectorial astfel: $\hat{1} \cdot x = x$ şi $\hat{0} \cdot x = x$, $\forall\ x \in A$, iar $\hat{k} \cdot x = \underbrace{(x + x + ... + x)}_{\text{k ori}}$, $\forall\ k \in R_p$. Se verifică uşor axiomele spațiului vectorial.
Cum A este un spațiu vectorial finit, el admite o bază de dimensiune finită, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset A$, cu $n \in \mathbf{N}^*$. Atunci $\forall\ x \in A$, $\exists!\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{Z}_p$ astfel încât $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ şi deci $|A|$ coincide cu numărul n – uplurilor $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ ce se pot forma cu elemente din $\mathbf{Z}_p$, deci cu p^n.

8.3.7. Propoziție *Fie $(K, +, \cdot)$ un corp finit. Atunci:*
a) *Există $p, n \in \mathbf{N}^*$, p prim, astfel încât $\mathrm{ord}(K) = p^n$*
b) *Orice funcție $f : K \to K$ este polinomială.*

Demonstrație: **a)** Rezultă imediat din propozițiile 8.3.5. şi 8.3.6.
b) Fie $K = \{k_1, k_2, ..., k_m\}$ un corp finit şi funcția $f : K \to K$.
Vom demonstra că găsim o funcție polinomială, $g : K \to K$, $g(x) = a_m \cdot x^{m-1} + a_{m-1} \cdot x^{m-2} + ... + a_1 \cdot x + a_0$, cu $a_i \in K$, $i = \overline{0, m}$, astfel încât $f = g$.

Într-adevăr, impunând condițiile: $\begin{cases} g(k_1) = f(k_1) \\ g(k_2) = f(k_2) \\ \vdots \\ g(k_m) = f(k_m) \end{cases}$ obținem un sistem în necunoscutele $a_0, a_1, ..., a_m$. Sistemul este un sistem Cramer, căci determinantul sistemului este un determinant de tip Vandermonde, $V(k_1, k_2, ..., k_m)$ şi elementele $k_1, k_2, ..., k_m$ fiind distincte, $V(k_1, k_2, ..., k_m)$ este un element nenul al corpului K deci este inversabil în K. Aşadar sistemul anterior are soluţie unică în K, ceea ce implică $f = g$. În concluzie, orice funcţie $f : K \to K$ este o functie polinomială de grad $\leq \text{ord}(K) - 1$.

8.3.8. Propoziţie *Fie $(A, +, \cdot)$ este un inel cu $0 \neq 1$.*
Dacă orice funcţie $f : A \to A$ este polinomială, atunci $(A, +, \cdot)$ este corp.

Demonstraţie: Fie $a \in A$, $a \neq 0$ şi funcţia $f_a : A \to A$, $f_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$

(1)

Din ipoteză, f_a este polinomială, adică $\exists\ n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in A$, astfel încât

$$f_a(x) = \alpha_n \cdot x^n + \alpha_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... \alpha_1 \cdot x + \alpha_0, \quad \forall\ x \in A$$

(2)

$a \neq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f_a(0) = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} \alpha_0 = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} f_a(x) = \alpha_n \cdot x^n + \alpha_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... \alpha_1 \cdot x, \ \forall\ x \in A$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \alpha_n \cdot a^n + \alpha_{n-1} \cdot a^{n-1} + ... \alpha_1 \cdot a = 1 \iff (\alpha_n \cdot a^{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot a^{n-2} + ... \alpha_1) \cdot a = 1.$

Notând $b = \alpha_n \cdot a^{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot a^{n-2} + ... \alpha_1$, avem $b \cdot a = 1$. Demonstrăm că şi $a \cdot b = 1$.

$b \cdot a = 1 \overset{1 \neq 0}{\Rightarrow} b \neq 0 \overset{\text{ana log}}{\Rightarrow} \exists\ c \in A,\ c \cdot b = 1.$

$c \cdot b \cdot a = c \cdot (b \cdot a) = c \cdot 1 = 1$ şi $c \cdot b \cdot a = (c \cdot b) \cdot a = 1 \cdot a = a$ şi deci $c = a$, adică $a \cdot b = 1$.

Aşadar $U(A) = A^*$, adică $(A, +, \cdot)$ este corp.

8.3.9. Propoziţie *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ cu $0 \neq 1$.*
Dacă orice funcţie $f : A \to A$ este polinomială, atunci A este un corp finit.

Demonstraţie: Funcţia f_a din 8.3.8. este polinomială şi dacă A este o mulţime infinită, atunci, din construcţie, f_a are o infinitate de rădăcini. Din 8.3.8. rezultă că $(A, +, \cdot)$ este corp şi deci $f_a = 0$, contradicţie cu modul în care am definit-o. Aşadar $(A, +, \cdot)$ este un corp finit.

8.3.10 Propoziţie *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel integru, de caracteristică $p \in \mathbf{N}^*$.*
Atunci operaţiile din A induc pe $K = \{1 \cdot k \mid k = \overline{0, p-1}\}$ o structură de corp.

Demonstrație: Inelul fiind integru, p este prim (8.3.5.). Enunțul este evident, datorită transportului de structură pe care îl putem construi, de la corpul ($\mathbf{Z}_p$, +, ·) la mulțimea K. Proprietatea la care ne referim este următoarea:

Lemă *Fie inelul $(A, +, \cdot)$, mulțimea nevidă B și funcția bijectivă $f : A \to B$. Pe B definim: $u \oplus v = f(f^{-1}(u) + f^{-1}(v))$ și $u \otimes v = f(f^{-1}(u) \cdot f^{-1}(v))$. Atunci:*
a) *$(B, \oplus, \otimes)$ este inel (funcția f realizează transportul de structură de la A la B)*
b) *$(A, +, \cdot)$ comutativ $\Rightarrow$ $(B, \oplus, \otimes)$ comutativ*
c) *$(A, +, \cdot)$ cu divizori ai lui 0 $\Rightarrow$ $(B, \oplus, \otimes)$ cu divizori ai lui 0.*
d) *a inversabil în A $\Rightarrow$ f(a) inversabil în B și $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$*

Funcția $f : \mathbf{Z}_p \to K$, $f(\hat{k}) = k$, $\forall\, k \in R_p$ este bijectivă și asigură, conform lemei anterioare, transportul de structură de la $\mathbf{Z}_p$ la K, operațiile fiind chiar cele induse de cele ale inelului A.

Într-adevăr, $\forall\, u, v \in K$, $u \oplus v = f(\hat{u} + \hat{v}) = (u + v)(\text{mod } p) \overset{\text{char}(A)=p}{=} u + v$

și $u \otimes v = f(\hat{u} \cdot \hat{v}) = (u \cdot v)(\text{mod } p) \overset{\text{char}(A)=p}{=} u \cdot v$.

Se poate demonstra (neelementar) următorul rezultat:

8.3.11 Propoziție *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel integru, de caracteristică $p \in \mathbf{N}^*$, cu un număr finit de elemente inversabile.*
Atunci operațiile din A induc pe $L = U(A) \cup \{0\}$ o structură de corp.

Bibliografie

1. Ioan Băietu – Proprietăți în inele integre, G. M. 1 / 2001, pag. 5-8
2. A. Bejancu – Asupra problemei C:728, G.M. 2-3 / 1992, pag. 53-54
3. M. Burtea, G. Burtea – Matematică – clasa a XII-a – Elemente de analiză matematică. Algebră superioară, Ed. Carminis 2001
4. M. Ghergu – Asupra unei probleme de concurs, G. M. 11 / 1996, pag 541-544
5. D. Isac – Probleme de comutativitate, revista „Astra Matematică" vol 1, nr. 2, 1990, pag 32-34
6. D. Isac – Condiții suficiente pentru inele Boole, G. M. 3 / 1995, pag. 107-108
7. D. Andrica, N. Bişboacă I. Şerdean, M. Andronache, M. Piticari, D. Zaharia – Matematică – Manual pentru clasa a XII-a, M1, Ed. Plus, 2002
8. Colecția G. M.

Probleme rezolvate

R8.4.1. *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel astfel încât $\forall x \in A,\ x^3 - x^2 \in Z(A)$. Demonstrați că inelul este comutativ.*

<u>Soluție:</u> Avem $\forall\ x \in A,\ x^3 - x^2 \in Z(A)$ (1)

$x \leftarrow -x$ în (1) $\Rightarrow \forall\ x \in A,\ -x^3 - x^2 \in Z(A)$ (2)

(1) – (2) și (1) + (2) $\Rightarrow \forall\ x \in A,\ 2\cdot x^3,\ 2\cdot x^2 \in Z(A)$ (3)

$x \leftarrow x+1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \forall\ x \in A,\ (x+1)^3 - (x+1)^2 \in Z(A) \overset{(3)}{\Rightarrow} \forall\ x \in A,\ x^3 + x \in Z(A) \overset{-(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \forall\ x \in A,\ x^2 - x \in Z(A)$ (4)

1_A fiind endomorfism surjectiv al grupului $(A, +)$, relația (4) este chiar ipoteza teoremei lui Mac Hale, deci inelul este comutativ.

R8.4.2. *Fie $n \geq 2$ și $G = U(\mathbf{Z}_n)$. Dacă $\forall x \in G,\ x^{-1} = x$,*

a) *demonstrați că $ord(G)$ este o putere a lui 2.*

b) *determinați numărul n.*

Olimpiada Națională, 1987

<u>Solutie:</u> Punctul **a)** rezultă din propoziția 2.1.9.

b) Conform punctului **a)**, există $k \in \mathbf{N}$ astfel încât $ord(G) = \varphi(n) = 2^k$.

Fie $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$, cu $p_1 < p_2 < ... < p_t$ numere prime.

$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots p_t^{\alpha_t - 1} \cdot (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdot ... \cdot (p_t - 1) = 2^k$, de unde rezultă că $p_1 = 2$, $\alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_t = 1$ și $p_i = 2^{s_i} + 1$, pentru $i \in \{2, 3, ..., t\}$. Deci $n = 2^{\alpha_1} \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$.

Atunci existã izomorfismul de inele $f : \mathbf{Z}_n \to Z_p \times Z_{p_2} \times ... \times Z_{p_t}$, $f(\hat{x}) = (\hat{x}, \hat{x}, ..., \hat{x})$ unde $p = 2^{\alpha_1}$ și $p_2 < ... < p_t$ sunt numere prime impare

Evident, pentru $i \geq 2$, $\hat{x}$ de pe locul i este clasa lui x în Z_{p_i} și clasa lui x în $\mathbf{Z}_p$, pentru $i = 1$.

Cum $\hat{x}^2 = 1$, $\forall\ x \in G$, avem că $f(\hat{x}^2) = (\hat{x}^2, \hat{x}^2, ..., \hat{x}^2) = f(\hat{1}) = (\hat{1}, \hat{1}, ..., \hat{1})$, adicã $\hat{x}^2 = \hat{1}$ în Z_{p_i}.

Elementelor inversabile din $\mathbf{Z}_n$ le corespund n-upluri de elemente inversabile din $Z_p \times Z_{p_2} \times ... \times Z_{p_t}$ și reciproc.

Cum $(2, p_i) = 1$, rezultă că $\hat{2} \in U(Z_{p_i})$, $\forall\ i \in \{2, ..., t\}$.

Elementul $(\hat{1}, \hat{2}, \hat{2}, ..., \hat{2})$ este inversabil în $Z_p \times Z_{p_2} \times ... \times Z_{p_t}$ și deci există $\hat{x} \in U(\mathbf{Z}_n)$ astfel încât $f(\hat{x}) = (\hat{1}, \hat{2}, \hat{2}, ..., \hat{2})$. Așadar, conform argumentației de mai înainte, $\hat{2}^2 = \hat{1}$ în Z_{p_i} și în concluzie, $p_i = 3$, $\forall\ i \in \{2, ..., t\}$.

Aceasta implică $t = 2$, pentru că factorii primi din descompunerea lui n au fost luați distincți.
Deci $n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1}$, cu $\beta_1 \geq 0$. Cum $(5, n) = 1$, rezultă că $\hat{5} \in U(\mathbf{Z}_n)$ şi deci $\hat{5}^2 = \hat{1}$ în $\mathbf{Z}_n$, ceea ce implică $n / 24$ şi deci $n \in \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ şi toate aceste valori verifică enunțul.

R8.4.3. *Să se arate că produsul elementelor diferite de zero ale unui corp finit abelian este egal cu −1.*

Olimpiada Natională, 1981

<u>Solutie:</u> Este cunoscut următorul rezultat fundamental:

Teorema lui Wedderburn *Orice corp finit este comutativ.*

Această teoremă, deşi cu o demonstrație care depăşeşte programa de liceu, simplifică multe probleme. În cazul de față, se poate renunța la condiția de comutativitate din ipoteză.
Fie $(K, +, \cdot)$ corpul finit cu care lucrăm. Atunci $(K^*, \cdot)$ este grup finit şi produsul elementelor sale este egal cu produsul elementelor sale de ordin ≤ 2 (conform problemei P.1.3.1.) .

Căutăm aşadar eventualele elemente de ordin 2 ale lui $(K^*, \cdot)$.

Fie $x \in K^*$ astfel încât $x^2 = 1$. Atunci $(x-1)(x+1) = 0$ şi cum corpul K nu are divizori ai lui zero, avem că $x-1 = 0$ sau $x+1 = 0$.
Deci singurul element de ordin 2 al lui K este $x = -1$ şi în consecință, produsul tuturor elementelor nenule ale lui K este egal cu -1.

R8.4.4. *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu 5 elemente. Să se arate că 5 e cel mai mic număr $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\ ori} = 0$ şi să se demonstreze că A este comutativ.*

Olimpiada Județeană, 1981

<u>Soluție:</u> $(A, +)$ este un grup de ordinul 5 şi din teorema lui Lagrange rezultă că $ord(1) / 5$. Cum $ord(1) > 1$, rezultă că $ord(1) = 5$ şi deci $(A, +)$ este grup ciclic generat de 1. Elementele 0 şi 1 comută cu toate celelalte.
Fie $x, y \in A \setminus \{0, 1\}$, $x = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{k\ ori}$ şi $y = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{t\ ori}$. Avem atunci:

$$xy = (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k\ ori})\cdot(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{t\ ori}) = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{k\cdot t\ ori} = (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{t\ ori})\cdot(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k\ ori}) = yx$$

şi deci inelul A este comutativ.

9. Ecuații funcționale pe structuri algebrice

Structurile algebrice reprezintă abstractizări ale unor mulțimi, operații, proprietăți. Prin aceste abstractizări se câștigă în generalitate dar se pierde în particularitate. Între două structuri algebrice de același tip, funcțiile reprezentative sunt morfismele sau morfismele parțiale, motiv pentru care în general soluțiile ecuațiilor funcționale se reprezintă cu ajutorul morfismelor.

9.1. Ecuații funcționale pe grupuri de numere reale

Una dintre primele ecuații funcționale, considerată de Cauchy înainte de 1900 a deschis cele două drumuri principale pe care s-a dezvoltat studiul ecuațiilor funcționale pur algebric sau cu condiții ce țin de analiza matematică. De fapt ecuația lui Cauchy,

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x+y)=f(x)+f(y),\quad x,y\in\mathbf{R},$$

reprezintă ecuația endomorfismelor grupului aditiv (**R**,+). Aceste morfisme se numesc funcții aditive pe **R**.

Pentru rezolvarea acestei ecuații folosirea doar a structurii de grup nu este suficientă, ideea care a condus după foarte multe studii la determinarea tuturor soluțiilor a fost de a folosi structura de spațiu vectorial a lui(**R**,+) peste corpul (**Q**,+,·).

Definiția 9.1.1. Ecuația funcțională

$$(C):\begin{cases} f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \\ f(x+y)=f(x)+f(y);\quad x,y\in\mathbf{R}\end{cases}$$

se numeşte ecuația lui Cauchy iar soluțiile ei se numesc funcții aditive.

Teorema 9.1.2. Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcție aditivă, atunci:

(a) $f(q)=qf(1)$, pentru orice $q\in\mathbf{Q}$

(b) $f(qx)=qf(x)$, pentru orice $q\in\mathbf{Q}$ şi $x\in\mathbf{R}$

(c) Mulțimea $Kerf=\{x\in\mathbf{R}\mid f(x)=0\}$ este un subgrup al grupului (**R**,+), numit subgrupul perioadelor funcției *f*.

(d) Mulțimea $Fixf=\{x\in\mathbf{R}\mid f(x)=x\}$ este un subgrup al grupului (**R**,+), numit subgrupul punctelor fixe.

(e) Funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)-f(1)\cdot x$, $x\in\mathbf{R}$ este funcție aditivă şi restricția ei la **Q** este $g|_{\mathbf{Q}}=0$.

Demonstrație. Din condiția $f(x+y)=f(x)+f(y)$; $x,y\in\mathbf{R}$, prin inducție rezultă $f(x_1+x_2+...+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$ şi în particular $f(nx)=nf(x)$; $n\in\mathbf{N}$

$f(0)=0$

$f(-nx)+f(nx)=f(0)=0$, deci $f(-nx)=-nf(x)$.

Deci $f(kx)=kf(x)$; $k\in\mathbf{Z}$, $x\in\mathbf{R}$.

Avem: $f(x)=f\left(\frac{x}{n}+...+\frac{x}{n}\right)=nf\left(\frac{x}{n}\right)$, deci $f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x)$ şi $f\left(\frac{mx}{n}\right)=\frac{1}{n}f(mx)=\frac{m}{n}f(x)$; $m,n\in\mathbf{Z}$, $n\neq 0$, $x\in\mathbf{R}$, deci $f(qx)=qf(x)$; $x\in\mathbf{R}$, $q\in\mathbf{Q}$.

Pentru $x=1$ obținem $f(q)=qf(1)$, $q\in\mathbf{Q}$, deci punctele (a) şi (b) din teoremă sunt demonstrate.

(c) Dacă $x,y\in Kerf \Rightarrow f(x)=f(y)=0 \Rightarrow f(-y)=0$ şi din $f(x-y)=f(x)+f(-y)=0 \Rightarrow x-y\in Kerf$.

(d) Dacă $f(x)=x, f(y)=y$ atunci $f(-y)=-f(y)=-y$ şi $f(x-y)=f(x)+f(-y)=x-y$, deci $x-y\in Fixf$.

(e) Din (a) $f(q)=qf(1)$; $q\in\mathbf{Q}$, deci $f(q)=f(q)-qf(1)=0$. Avem $g(x+y)=f(x+y)-(x+y)f(1)=f(x)-xf(1)+f(y)-yf(1)=g(x)+g(y)$ $x,y\in\mathbf{R}$, deci g este aditivă.

Observația 9.1.3. • Din (a) rezultă că restricția la **Q** a unei funcții aditive este perfect determinată de valoarea $f(1)$. (Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ şi $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ sunt funcții aditive cu proprietatea $f(1)=g(1)$ atunci $f|_{\mathbf{Q}}=g|_{\mathbf{Q}}$).

• În general, dacă $\lambda\in\mathbf{R}$ atunci mulțimea $A_\lambda=\{x\in\mathbf{R}\,|\,f(x)=\lambda x\}$ formează un subgrup în (**R**,+).

• Din punctul (c) rezultă că orice funcție aditivă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este de forma $f(x)=g(x)+ax$, unde $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este funcția aditivă şi $g|_{\mathbf{Q}}=0$, deci clasa funcțiilor în care se caută soluțiile ecuației lui Cauchy se poate restrânge la funcțiile ce au restricția la **Q**, funcția nulă.

Observația 9.1.4. se poate arăta că dacă restrângem clasa funcțiilor *f* în care căutăm soluțiile atunci în oricare din clasele de funcții: continue, local mărginite, monotone, singurele soluții sunt de forma $f(x)=ax$, $\alpha\in\mathbf{R}$ unde $a\in\mathbf{R}$ este o constantă arbitrară.

Definiția 9.1.5. O funcție discontinuă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care verifică ecuația lui Cauchy: $f(x+y)=f(x)+f(y), x,y\in\mathbf{R}$, se numeşte funcție Hamel.

Observația 9.1.6. Funcțiile Hamel sunt soluțiile nebanale ale ecuației Cauchy, deci funcțiile aditive care nu sunt de forma $f(x) = ax, x \in \mathbf{R}$. Determinarea funcțiilor Hamel necesită câteva cunoştințe care nu sunt înglobate în cursurile standard.

Definiția 9.1.7. Se numeşte bază Hamel, orice bază a spațiului vectorial $(\mathbf{R},+)$ peste corpul $(\mathbf{Q},+,\cdot)$.

Observația 9.1.8. (a) Dacă $(K,+,\cdot)$ este un corp comutativ şi $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ este un subcorp al său, atunci grupul $(K,+)$ poate fi organizat ca spațiu vectorial peste corpul $(\mathbf{Q},+,\cdot)$, cu ajutorul aplicației $\varphi : Q \times K \to K$, $\varphi(q,k) = q \cdot k$.

(b) Dacă $H = \{h_i \mid i \in I\}$ este o bază Hamel atunci pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ există şi sunt unici: $i_1(x),...,i_n(x) \in I$, $q_1(x),...,q_n(x) \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât

$$x = \sum_{k=1}^{n} q_k(x) h_{i_k}(x)$$

(Dacă $q_k \in \mathbf{Q}, h_k \in H, k = \overline{1,n}$ şi $\sum_{k=1}^{n} q_k \cdot h_k = 0$, atunci $q_k = 0, k = \overline{1,n}$).

(c) Dacă $h_1, h_2 \in \mathbf{R}$ şi sunt independente peste **Q**, atunci mulțimea $\mathbf{Z}[h_1,h_2] = \{n_1h_1 + n_2h_2 \mid n_1,n_2 \in \mathbf{Z}\}$ este densă în **R**.

Teorema 9.1.9. Dacă $H = \{h_i \mid i \in I\}$ este o bază Hamel, atunci cardinalul său este $|H| = |I| = c$ (puterea continuului).

Demonstrație. Dacă *H* ar fi numărabilă atunci mulțimile

$$A_n = \{q_1h_1 + ... + q_nh_n \mid q_k \in \mathbf{Q}, k = \overline{1,n}\}$$

ar fi numărabile şi la fel mulțimea $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \mathbf{R}$, contradicție $(\aleph_0 \neq c)$

Dacă *H* este nenumărabilă $(|H| > \aleph_0)$ arătăm că $|H| = |\mathbf{Q}(H)|$, unde $\mathbf{Q}(H)$ este subspațiul generat de *H* peste **Q**

$(\mathbf{Q}(H) = \left\{\sum_{k=1}^{n} q_k h_{i_k} \mid n \in \mathbf{N}, q_k \in \mathbf{Q}, h_{i_i} \in H\right\})$.

Cardinalul mulțimii părților cu *n*elemente din *H* este $|H|^n = |H|$, $n \in \mathbf{N}$. Pentru fiecare parte $\{h_{i_1},...,h_{i_n}\} \subset H$ avem $|\mathbf{Q}(\{h_{i_1},...,h_{i_n}\})| = |\mathbf{Q}^n| = \aleph_0$, deci $\mathbf{Q}(H) = \aleph_0 |H| = |H|$ şi cum $\mathbf{Q}(H) = \mathbf{R}$ rezultă $|H| = c$.

Observația 9.1.10. (a) Dimensiunea lui **R** ca spațiu vectorial peste **Q** este *c*.

(b) Pentru orice bază Hamel *H*, există o funcție bijectivă $\varphi:[0,1]\to H$. Notând $\varphi(t)=h_t$ rezultă $H=\{h_t \mid t\in[0,1]\}$.

Folosirea de către G. Hamel a bazelor Hamel, a fost decisivă în tentativa de rezolvare completă a ecuației funcționale Cauchy.

Observația 9.1.11. Dacă *f, g* sunt funcții aditive, iar *a, b* sunt numere reale, atunci funcțiile $a\cdot f+b\cdot g$ și $f\circ g$ sunt funcții aditive. Mulțimea funcțiilor aditive formează un spațiu vectorial real și un inel.

Teorema 9.1.12. Orice funcție aditivă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este un endomorfism al spațiului vectorial **R** peste **Q**.

Demonstrație. Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcție aditivă avem:

$$f(0+0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$$

$$f(x-x)=f(x)+f(-x)\Rightarrow f(-x)=-f(x),\quad x\in\mathbf{R}.$$

Pentru $n\in\mathbf{N}$, $f(x_1+...+x_n)=f(x_1)+...+f(x_n)$, deci $f(nx)=nf(x)$.

Pentru $m\in\mathbf{N}^*$, $f(x)=f\left(m\dfrac{x}{m}\right)=mf\left(\dfrac{x}{m}\right)\Rightarrow f\left(\dfrac{x}{m}\right)=\dfrac{1}{m}f(x)$.

Pentru $q\in\mathbf{Q}_+^*$, $q=\dfrac{n}{m}$ avem $f(qx)=f\left(n\cdot\dfrac{1}{m}\cdot x\right)=nf\left(\dfrac{1}{m}x\right)=$

$=\dfrac{n}{m}f(x)=qf(x)$, deci *f* este **Q**-omogenă.

Pentru $x,y\in\mathbf{R}$, $r,q\in\mathbf{Q}$ avem:

$$f(rx+qy)=f(rx)+f(qy)=rf(x)+qf(y)$$

deci *f* este **Q**-liniară, adică *f* este endomorfism.

Teorema 9.1.13. Dacă $H\subset\mathbf{R}$ este o bază Hamel și $f_H:H\to\mathbf{R}$ este o funcție arbitrară, atunci există o unică funcție aditivă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ pentru care restricția $f|_H=f_H$.

Demonstrație. Un endomorfism este unic determinat de valorile lui pe o bază. Dacă $x\in\mathbf{R}$ și exprimarea lui în baza *H* este $x=\sum_{k=1}^{n}q_k h_k$, $q_k\in\mathbf{Q}$, $h_k\in H$ atunci definim $f(x)=\sum_{k=1}^{n}q_k f_H(h_k)$ care definește unica prelungire **Q**-liniară a funcției f_H.

Observația 9.1.14. (a) Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este funcție aditivă dacă și numai dacă pentru orice bază Hamel $H=\{h_i \mid i\in I\}$ există o mulțime

$\{\alpha_i \mid i \in I\} \subset \mathbf{R}$ astfel ca pentru orice $x \in \mathbf{R}$, dacă $x = \sum_{k=1}^{n} q_k h_k$, $q_k \in \mathbf{Q}$, $h_k \in H$ este scrierea unică a lui *x* în baza *H*, atunci

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} q_k \alpha_k .$$

(b) Cardinalul mulțimii funcțiilor aditive este $c^c > c$ (mulțimea funcțiilor aditive este în bijecție cu mulțimea tuturor funcțiilor $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$).

(c) Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție aditivă şi H o bază Hamel, atunci mulțimea $f(H)$ este bază Hamel dacă şi numai dacă funcția *f* este bijectivă (izomorfism de **Q**-spații vectoriale).

Alte ecuații funcționale de tip Cauchy sunt:

$$(1)\ \begin{cases} f : \mathbf{R} \to (0,\infty) \\ f(x+y) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbf{R} \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} f : (0,\infty) \to \mathbf{R} \\ f(xy) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbf{R} \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} f : (0,\infty) \to (0,\infty) \\ f(xy) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbf{R} \end{cases} .$$

Observația 9.1.15. O funcție $f : \mathbf{R} \to (0,\infty)$ care verifică ecuația (1) este un morfism de grupuri, de la grupului aditiv $(\mathbf{R},+)$ la grupul multiplicativ $((0,\infty),\cdot)$, rezolvarea ecuației (1) revine la determinarea acestor morfisme. Se cunoaşte că cele două grupuri sunt izomorfe prin izomorfismul $\varphi : (0,\infty) \to \mathbf{R}$

$$\varphi(x) = \ln x, \quad x \in (0,\infty) .$$

Avem $\mathbf{R} \xrightarrow{f} (0,\infty) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}$, funcția *f* este morfism dacă şi numai dacă funcție $\varphi \circ f = g$ este endomorfism al grupului aditiv $(\mathbf{R},+)$, deci funcție aditivă. Se obține $f = \varphi^{-1} \circ g = e^g$.

Observația 9.1.16. O funcție $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ care verifică ecuația (2) este morfism de grupuri, de la grupul multiplicativ $((0,\infty),\cdot)$ la grupul aditiv $(\mathbf{R},+)$. Folosind izomorfismul $\psi : \mathbf{R} \to (0,\infty), \psi(x) = e^x$, între aceste grupuri, avem:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\psi} (0,\infty) \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

Funcția f este morfism dacă şi numai dacă funcția $g = f \circ \psi$ este endomorfism al grupului aditiv $(\mathbf{R},+)$, deci funcția *g* este aditivă. Se obține:

$$f = g \circ \psi^{-1} \Leftrightarrow f(x) = g(\ln x), \quad x \in (0,\infty) .$$

Observația 9.1.17. Funcțiile nenule care verifică ecuația (3) sunt endomorfismele grupului multiplicativ $((0,\infty),\cdot)$.Folosind izomorfismele $\varphi(x)=\ln x$ și $\psi(x)=e^x$ cu grupul aditiv $(\mathbf{R},+)$ avem:

$$\mathbf{R}\xrightarrow{\psi}(0,\infty)\xrightarrow{f}(0,\infty)\xrightarrow{\varphi}\mathbf{R}$$

Funcția f este endomorfism al grupului $((0,\infty),\cdot)$ dacă și numai dacă funcția $g=\varphi\circ f\circ\psi$ este endomorfism al grupului aditiv $(\mathbf{R},+)$, deci funcția g este aditivă.

Se obține $f(x)=e^{g(\ln x)}$, $x\in(0,\infty)$.

Bibliografie

J.Dhombres: Some aspect of functional equations, Chualalongkorn Univ. Bangkok 1979
M.Kuczma: An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Univ. Slaski, Warszawa 1985
V.Pop: Funcții Hamel, G.M-A 2/2000
V.Pop: Ecuații funcționale, Ed.Mediamira Cluj, 2002

Probleme rezolvate

R9.2.1. Să se determine funcțiile *f* și $g:\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ astfel ca mulțimea matricelor $M=\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ f(x,y) & g(x,y)\end{bmatrix}, x\in\mathbf{Z}, y\in\mathbf{Z}\right\}$ să formeze un subinel al inelului $(M_2(\mathbf{Z}),+,\cdot)$.

Soluție. Notăm $A(x,y)=\begin{bmatrix} x & y \\ f(x,y) & g(x)\end{bmatrix}$. Mulțimea *M* trebuie să fie stabilă față de operația de adunare, deci pentru orice $x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbf{Z}$, există $x_3,y_3\in\mathbf{Z}$ astfel ca $A(x_1,y_1)+A(x_2,y_2)=A(x_3,y_3)$. Obținem pentru *f* și *g* relațiile

$$(1)\quad \begin{cases} f(x_1+x_2,y_1+y_2)=f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2) \\ g(x_1+x_2,y_1+y_2)=g(x_1,y_1)+g(x_2,y_2)\end{cases}$$

Dacă punem $x_1=x_2=y_1=y_2=0$ obținem $f(0{,}0)=g(0{,}0)=0$.

Dacă punem $x_1=y_2=0, x_2=x, y_1=y$ avem:

$$\begin{cases} f(x,y)=f(x,0)+f(0,y)=f_1(x)+f_2(x) \\ g(x,y)=g(x,0)+g(0,y)=g_1(x)+g_2(y)\end{cases}$$

$$f_1(x)=f(x,0),\quad f_2(x)=f(0,y)$$

unde am notat:

$$g_1(x)=g(x,0),\quad g_2(y)=g(0,y)$$

Dacă în relațiile (1) luăm $y_1=y_2=0$ obținem:

$$\begin{cases} f_1(x_1+x_2)=f_1(x_1)+f_1(x_2) \\ g_1(x_1+x_2)=g_1(x_1)+g_1(x_2)\end{cases}\quad x_1,x_2\in\mathbf{Z}$$

și pentru $x_1=x_2=0$, aceleași relații pentru funcțiile f_2 și g_2, deci funcțiile f_1,f_2,g_1,g_2 sunt aditive.

Din $h:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$, $f(x+y)=h(x)+h(y), x,y\in\mathbf{Z}$ rezultă $h(0)=0$, $h(n)=nh(1), h(-n)=-h(n)$ deci $h(x)=xh(1), x\in\mathbf{Z}$.

Atunci $f_1(x)=xf_1(1), f_2(x)=xf_2(1), g_1(x)=xg_1(1)$ și $g_2(x)=xg_2(1)$.

Punând condiția ca matricea unitate să fie în *M*

$$I_2\in M\Rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f(1{,}0) & g(1{,}0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow f(1{,}0)=0,\quad g(1{,}0)=1\Leftrightarrow f_1(1)\quad \text{și}\quad g_1(1)=1$$

deci

$$f_1(x)=0, \quad x\in\mathbf{Z} \quad \text{şi} \quad g_1(x)=x, \quad x\in\mathbf{Z}$$

Notând $f_2(1)=a\in\mathbf{Z}, g_2(1)=b\in\mathbf{Z}$ obţinem:

$$f(x,y)=ay \quad \text{şi} \quad g(x,y)=x+by\,, \quad \text{pentru} \quad (x,y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}.$$

Se verifică uşor că aceste condiţii sunt şi suficiente.

R9.2.2. Să se determine toate funcţiile *f* şi $g:\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$, pentru care $(M,+,\cdot)$ formează un inel şi $I_2\in M$, unde

$$M=\left\{\begin{bmatrix} x & f(x,y) \\ g(x,y) & y\end{bmatrix}, x,y\in\mathbf{Z}\right\}.$$

Soluţie. Notăm $A(x,y)=\begin{bmatrix} x & f(x,y) \\ g(x,y) & y\end{bmatrix}$.

Din $A(x_1,y_1)+A(x_2,y_2)\in M$ rezultă:

$$\begin{cases} f(x_1+x_2,y_1+y_2)=f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2) \\ g(x_1+x_2,y_1+y_2)=g(x_1,y_1)+g(x_2,y_2)\end{cases}$$

Pentru $y_1=y_2=0\Rightarrow f(x_1+x_2,0)=f(x_1,0)+f(x_2,0)\Rightarrow f(n,0)=nf(1,0)$, $n\in\mathbf{N}^*$, $f(0,0)=0$ şi $f(-n,0)=-nf(1,0)$, deci $f(k,0)=ak$, $k\in\mathbf{Z}$ unde $a=f(1,0)\in\mathbf{Z}$.

Analog se deduce $f(0,k)=bk, k\in\mathbf{Z}$, deci funcţiile *f* şi *g* sunt de forma:

$$\begin{cases} f(x,y)=ax+by \\ g(x,y)=cx+dy\end{cases} \quad x,y\in\mathbf{Z}$$

Din $I_2\in M\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & f(1,1)\\ g(1,1) & 1\end{bmatrix}$, deci $f(1,1)=g(1,1)=0$ $\Leftrightarrow a+b=c+d=0$.

Se verifică uşor că mulţimea

$$M=\left\{\begin{bmatrix} x & a(x-y) \\ c(x-y) & y\end{bmatrix}, x,y\in\mathbf{Z}\right\}$$

formează cu adunarea şi înmulţirea o structură de inel unitar.

În concluzie funcţiile sunt:

$$\begin{cases} f(x,y)=a(x-y), & (x,y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \\ g(x,y)=c(x-y), & (x,y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\end{cases}$$

unde $a\in\mathbf{Z}, c\in\mathbf{Z}$ sunt arbitrare.

R9.2.3. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $f:G\to G$ o funcţie care satisface ecuaţia funcţională

$$f(xf(y)) = f(x)y, \quad x, y \in G.$$

Să se arate că *f* este un automorfism cu proprietatea $f \circ f = 1_G$.

Soluție. Dacă $f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow f(x)y_1 = f(x)y_2$ deci funcția *f* este injectivă.

Pentru $x = y = 1$ (elementul neutru al grupului) avem:
$f(f(1)) = f(1) \Rightarrow f(1) = 1$.

Pentru $x = 1 \Rightarrow f(f(y)) = y, y \in G$, deci $f \circ f = 1_G$ (*f* este bijectivă şi $f^{-1} = f$).

Pentru orice $z \in G$, există $y \in G$ astfel ca $z = f(y), y = f(z)$ şi ecuația se scrie $f(xz) = f(x)f(z), x, z \in G$, deci $f \in Aut(G)$. Reciproc se verifică uşor că orice automorfism involutiv este soluție a ecuației date.

R9.2.4. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $f : G \to G$ o funcție cu proprietatea

$$E : f(f(x) \cdot f(y)) = x \cdot y, \quad \text{pentru orice} \quad x, y \in G.$$

1. Să se arate că există $a \in G$ şi $g : G \to G$ un morfism de grupuri, astfel ca $g \circ g = 1_G$ şi $f(x) = ag(x), x \in G$.

2. Să se determine toate funcțiile *f* cu proprietatea (*E*) în cazul $(G,\cdot) = (U_6,\cdot)$ unde $U_6 = \{z \in \mathbf{C} \mid z^6 = 1\}$.

Soluție. 1) Dacă *f* verifică ecuația funcțională (*E*) atunci:
f este bijectivă pentru $x = 1$
$f(f(1)f(y_1)) = y_1$
$f(f(1)f(y_2)) = y_2$
$f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2 = f$ este injectivă.

Pentru $f \in G$ avem $f(f(1)f(y)) = y$, deci *f* este surjectivă.

Dacă $f(1) = a$, atunci $ax = xa, x \in G, a^3 = 1$ şi $f(f(x)) = a^2x, x \in G$.

Pentru $\left.\begin{matrix} x = 1 \Rightarrow f(af(y)) = y \\ y = 1 \Rightarrow f(f(x)a) = x \end{matrix}\right\} \overset{x=y}{\Rightarrow} (faf(x)) = f(f(x)a)$

$\overset{f_{inj}}{\Rightarrow} af(x) = f(x)a \overset{f_{surj}}{\Rightarrow} az = za, z \in G$.

Pentru $x = y = 1 \Rightarrow f(a^2) = 1$ şi pentru $x = a^2 \Rightarrow f(f(y)) = a^2y$.

Pentru $x = y = a^2 \Rightarrow f(1) = a^4 \Leftrightarrow a = a^4 \Rightarrow a^3 = 1$.

Punând $x \to f(x), y \to f(y)$, rezultă:

$$f(a^4xy) = f(x)f(y) \Leftrightarrow f(axy) = f(x)f(y).$$

Făcând substituția $f(x) = ag(x)$, obținem pentru *g* relația $g(axy) = ag(x)g(y)$, din care pentru $y = 1 \Rightarrow g(ax) = ag(x)$, deci

$$g(zy)=g(z)g(y)$$

unde $z=ax$ şi y sunt arbitrare.

Din $f(f(y))=a^2y$, rezultă $g(g(y))=y \Leftrightarrow g^2=1_G$ şi din $f(f(1))=a^2 \Leftrightarrow f(a)=a^2 \Rightarrow a^2=ag(a) \Rightarrow g(a)=a$.

R9.2.5. Fie $(G,\cdot)$ un grup.

a) Să se arate că dacă ecuaţia funcţională

$$(E):\begin{cases} f:G\to G \\ f(xf(y))=yf(x^{-1}), \quad x\in G, \quad y\in G \end{cases}$$

are soluţie, atunci grupul G este comutativ.

b) Să se arate că singurele funcţii f care verifică (E) sunt automorfismele lui G pentru care $f\circ f=1_G$.

c) Dacă $G=K_4$ (grupul lui Klein), atunci mulţimea soluţiilor ecuaţiei (E) formează un grup izomorf cu K_4.

Soluţie. a) Pentru $x=1 \Rightarrow f(f(y))=yf(1)$. Dacă $f(f(y_1))=f(f(y_2)) \Rightarrow y_1f(1)=y_2f(1) \Rightarrow y_1=y_2$ deci f este injectivă.

Pentru $x=y=1 \Rightarrow f(f(1))=f(1) \overset{inj}{\Rightarrow} f(1)=1$ şi $f(f(y))=y$ deci f este bijectivă şi $f^{-1}=f$.

Pentru $y=1$ rezultă $f(x)=f(x^{-1}) \overset{inj}{\Rightarrow} x=x^{-1} \Rightarrow x^2=1, x\in G$.

Din $x^2=y^2=(xy)^2=1 \Rightarrow (xy)^2=x^2y^2 \Rightarrow x\cdot y\cdot x\cdot y=x\cdot x\cdot y\cdot y$

$\Rightarrow yx=xy, x,y\in G \Rightarrow G$ este comutativ.

b) Din $f(f(y))=y$ şi $f(x^{-1})=f(x)$, ecuaţia se scrie

$$f(xf(y))=f(f(y))f(x), x,y\in G,$$

deci

$$f(xz)=f(x)f(z), x,z\in G.$$

Reciproc se verifică relaţia dată pentru orice automorfism f cu $f^2=1_G$.

c) Fie $K_4=\{1,a,b,c\}$, $a^2=b^2=c^2=1$, $ab=c$, $bc=a$, $ca=b$. Trebuie determinate morfismele $f:K\to K$ cu $f^{-1}=f$. Evident $f(1)=1$ şi pentru că f este bijectivă, rezultă că f realizează o permutare τ a mulţimii $\{a,b,c\}$ cu $\tau^2=e$. Acestea sunt $\tau_1=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c\end{pmatrix}$, $\tau_2=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b\end{pmatrix}$, $\tau_3=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a\end{pmatrix}$, $\tau_4=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c\end{pmatrix}$ şi obţinem funcţiile: f_1,f_a,f_b,f_c definite prin tabelul de valori

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & a & b & c \\ f_1: & 1 & a & b & c \\ f_a: & 1 & a & c & b \\ f_b: & 1 & c & b & a \\ f_c: & 1 & b & a & c \end{array}$$

Aplicația $1 \to f_1, a \to f_a, b \to f_b, c \to f_c$ este un izomorfism de la K la $(\{f_1, f_a, f_b, f_c\}, \circ)$.

R9.2.6. Fie M o mulțime finită şi $G = P(M)$ mulțimea părților sale. Să se determine toate funcțiile $f : G \times G \to G$, care determină pe G o lege de compoziție $f(X,Y) = X * Y$, astfel ca $(G,*)$ să fie grup cu proprietatea că $X * Y \subset X \cup Y$, pentru orice $X, Y \in P(M)$.

Soluție. Din $\phi * \phi \subset \phi \Rightarrow \phi * \phi = \phi \Rightarrow \phi$ este element neutru. Arătăm prin inducție după cardinalul mulțimii X că $X * X = \phi$, pentru orice $X \in P(M)$.

Pentru $|X| = 0, X = \phi$ şi $X * X = \phi$.

Fie $A \in P(M)$, cu $|A| = n+1$.

Dacă $X \subset A$ este arbitrară, atunci $X * A \subset X \cup A = A$, deci translația $t_A : P(A) \to P(A), t_A(X) = X * A$ fiind injectivă, este surjectivă ($P(A)$ este finită), deci există $B \subset A$ astfel ca $t_A(B) = \phi \Leftrightarrow B * A = \phi$. Dacă presupunem că $B \neq A$, atunci $|B| \leq n$ şi din ipoteza de inducție $B * B = \phi$. Din $B * B = B * A$, rezultă $B = A$, deci $A * A = \phi$.

Arătăm prin inducție după $|B|$ că dacă $A \cap B = \phi$, atunci $A * B = A \cup B$.

Pentru $|B| = 0, B = \phi$ şi $A * \phi = A = A \cup \phi$.

Dacă $|B| = n+1, B = B_n \cup \{y\}$ cu $|B_n| = n, B_n \cap A = \phi, y \notin A$. Atunci

$$A * B = A * (B_n \cup \{y\}) = A * (B_n * \{y\}) = (A * B_n) * \{y\} =$$
$$= (A * B_n) \cup \{y\} = A \cup B_n \cup \{y\} = A \cup B.$$

Arătăm că

$$X * Y = X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$$

Fie $X \cap Y = Z, X - Z = U, Y - Z = V$, unde U, V, Z sunt disjuncte.

$$X * Y = (Z \cup U) * (Z \cup V) = (U * Z) * (Z * V) = U * Z * Z * V = U * V =$$
$$= U \cup V = (X - Z) \cup (Y - Z) = (X - Y) \cup (Y - X) = X \Delta Y.$$

Deci singura funcție este $f : P(M) \times P(M) \to P(M)$

$$f(X,Y) = X \Delta Y, \quad X, Y \in P(M)$$

(Δ = diferență simetrică).

R9.2.7. Fie M o mulțime finită şi $P(M)$ mulțimea părților sale. Să se determine toate funcțiile f şi $g: P(M)\times P(M)\to P(M)$ care determină operațiile $X*Y=f(X,Y)$, $X\circ Y=g(X,Y)$, astfel ca $(P(M),*,\circ)$ să fie un inel unitar şi să fie verificate incluziunile:

$$X*Y\subset X\cup Y \quad \text{şi} \quad X\circ Y\subset X\cap Y,$$

pentru orice $X,Y\in P(M)$.

Soluție. Vom arăta că signura structură de inel $(P(M),*,\circ)$ care verifică condițiile $X*Y\subset X\cup Y$ şi $X\circ Y\subset X\cap Y$ este inelul Boolean $(P(M),\Delta,\cap)$.

În problema R9.2.6 s-a arătat că singura structură de grup pe $P(M)$ care verifică relația $X*Y\subset X\cup Y$ este diferența simetrică, deci $f(X,Y)=X\Delta Y$.

Vom arăta în continuare că singura operație de monoid pe $P(M)$, distributivă față de Δ şi verificând condiția $X\circ Y\subset X\cap Y$, este $g(X,Y)=X\cap Y$.

Elementul neutru în monoidul $(P(M),\circ)$ este $E=M$. ($X=X\circ E\Rightarrow X\subset X\cap E$ pentru orice $X\subset M\Rightarrow M\subset M\cap E\Rightarrow M=E$).

Dacă $x,y\in M$, $x\neq y$ atunci

$$\{x\}\circ\{y\}=\varnothing$$

$$\{x\}\circ\{x\}\subset\{x\}\cap\{x\}=\{x\}, \quad \text{deci} \quad \{x\}\circ\{x\}\in\{\varnothing,\{x\}\}.$$

Dar $\{x\}\circ M=\{x\}$, $M=\{x_1,y_1,...,y_k\}=\{x\}\Delta\{y_1\}\Delta...\Delta\{y_k\}\Rightarrow$

$$\{x\}\circ M=(\{x\}\circ\{x\})\Delta(\{x\}\circ\{y_1\})\Delta...\Delta(\{x\}\circ\{y_k\})=\{x\}\circ\{x\}$$

$$\Rightarrow\{x\}\circ\{x\}=\{x\}$$

Folosind distributivitatea $A=\{a_1,a_2,...,a_p\}=a_1\Delta a_2\Delta...\Delta a_p$, $B=\{b_1,b_2,...,b_q\}=b_1\Delta b_2\Delta...\Delta b_q\Rightarrow A\circ B=A\cap B,\ A,B\in P(M)$.

Deci funcțiile căutate sunt unice:

$$f(X,Y)=X\Delta Y \quad \text{şi} \quad f(X,Y)=X\cap Y, \quad X,Y\in P(M).$$

10. Polinoame cu coeficienți într-un inel comutativ

10. 1. Ireductibilitate şi descompunere în $Z_p[X]$.

Unele ecuații algebrice cu coeficienți întregi se rezolvă spectaculos în **Z** folosind redusele acestora într-un corp $\mathbf{Z}_p$ convenabil ales. De aceea, în cele ce urmează vom prezenta un criteriu de ireductibilitate în inelul **Z**[X] – criteriul lui Schönemann – în care se foloseşte redusul modulo p ($p\in\mathbf{N}$ număr prim) al unui polinom cu coeficienți întregi şi apoi vom evidenția câteva proprietăți ale simbolului lui Legendre care conduc la stabilirea ireductibilității sau reductibilității unor polinoame din $\mathbf{Z}_p[X]$. Considerăm cunoscute noțiunile despre polinoamele cu coeficienți într-un inel din programa şcolară, precum şi teoremele lui Euler şi Fermat pentru $\mathbf{Z}_n$.

<u>**10.1.1. Definiție**</u> *Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ. $f\in K[X]$ cu $grad(f) = n \geq 1$ se numeşte reductibil (peste corpul K) daacă există $g, h\in K[X]$, ambele de grad strict mai mic decât n, astfel încât $f = g\cdot h$. În caz contrar, polinomul f se numeşte ireductibil (peste corpul K).*

<u>**10.1.2. Definiție**</u> *Fie $p \geq 2$ un număr prim şi $f\in \mathbf{Z}[X]$, $grad(f) = n$,*
$f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$.
Polinomul $\overline{f} \in \mathbf{Z}_p[X]$, $\overline{f}(X) = \overline{a_n}X^n + \overline{a_{n-1}}X^{n-1} + ... + \overline{a_1}X + \overline{a_0}$, unde $\overline{a_k}$ este clasa lui a_k din $\mathbf{Z}_p$ se numeşte polinomul redus modulo p al lui f.

<u>**10.1.3. Observație**</u> $grad\left(\overline{f}\right) \leq grad(f)$

<u>**10.1.4. Criteriul de ireductibilitate al lui Schönemann**</u>
Fie $p \geq 2$ un număr prim şi $f\in \mathbf{Z}[X]$ un polinom monic (cu coeficientul dominant egal cu 1) de forma $f(X) = g^n(X) + p\cdot h(X)$, unde $g, h\in \mathbf{Z}[X]$ şi $n\in \mathbf{N}$. Fie $\overline{g}$ şi $\overline{h}$ redusele polinoamelor g şi h în $\mathbf{Z}_p[X]$. Dacă $\overline{g}$ este ireductibil în $\mathbf{Z}_p[X]$ şi $\overline{g}$ nu divide $\overline{h}$, atunci f este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

<u>*Demonstrație:*</u> f fiind un polinom monic, $grad(h) < n\cdot grad(g)$ şi g este (poate fi ales) de asemenea polinom monic. Rezultă şi că $n \neq 0$.
Presupunem că f este reductibil în **Z**[X] $\Rightarrow$ $\exists$ $f_1, f_2\in$ **Z**[X], neconstante, astfel încât $f = f_1\cdot f_2$. Atunci şi $\overline{f_1}\cdot\overline{f_2} = \overline{f} = \overline{g}^n$.

Cum $\overline{g}$ este ireductibil în $\mathbf{Z}_p[X]$ rezultă că există $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, $n_1 + n_2 = n$, $\overline{f_1} = \overline{g}^{n_1}$, $\overline{f_2} = \overline{g}^{n_2}$. g fiind un polinom monic, rezultă că există $h_1, h_2 \in \mathbf{Z}[X]$, $\text{grad}(h_i) < n_i \cdot \text{grad}(g)$, $\forall\ i = \overline{1, 2}$ astfel încât $f_1 = g^{n_1} + p \cdot h_1$, $f_2 = g^{n_2} + p \cdot h_2$.
Atunci: $g^n + p \cdot h = \left(g^{n_1} + p \cdot h_1\right) \cdot \left(g^{n_2} + p \cdot h_2\right) \Rightarrow h = h_2 \cdot g^{n_1} + h_1 \cdot g^{n_2} + p \cdot h_1 h_2$.
Dacă $n_1, n_2 \in (0, \infty)$, din relația anterioară rezultă că $\overline{g}\ /\ \overline{h}$, fals.
Atunci $n_1 = 0$ sau $n_2 = 0$, adică $\text{grad}(f_2) = \text{grad}(f)$ sau $\text{grad}(f_1) = \text{grad}(f)$, deci f este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

10.1.5. Exemple

1) Fie $n \in \mathbf{N}^*$. Polinomul $f(X) = (X^2 + 4)^n + 7 \cdot (X^{2n-1} + 7)$ este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

Într-adevăr, fie polinoamele $g, h \in \mathbf{Z}[X]$, $g(X) = X^2 + 4$, $h(X) = X^{2n-1} + 7$.
Atunci $\overline{g} = X^2 + \overline{4}$ este ireductibil în $\mathbf{Z}_7[X]$ iar $\overline{h} = X^{2n-1}$ nu se divide cu $\overline{g}$ în același inel. Din criteriul lui Schönemann rezultă că f este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

2) Fie p un număr prim de forma $4k + 3$, iar $a, b \in \mathbf{Z}$ astfel încât $p\ /\ a$, $p\ /\ (b-1)$ și p^2 nu divide $(b-1)$. Polinomul $f(X) = X^{2p} + aX + b$ este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

Într-adevăr, scriind $f(X) = (X^2 + 1)^p + p \cdot h(X)$, notând $c = \frac{a}{p}$, $d = \frac{b-1}{p}$, avem:

$$h(X) = cX + d + \frac{1}{p} \cdot \left[-C_p^1 \left(x^2 + 1\right)^{p-1} + C_p^2 \left(x^2 + 1\right)^{p-2} - \ldots + C_p^{p-1} \left(x^2 + 1\right) \right],$$

Atunci $\overline{g} = X^2 + 1$ este ireductibil iar $\overline{g}$ nu divide $\overline{h}$, în $\mathbf{Z}_p[X]$ și deci din criteriul lui Schönemann rezultă că f este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

Iată o situație interesantă în care nu putem aplica criteriul lui Schönemann:

10.1.6. Proprietate *Fie p un număr prim, $p \geq 3$.*
Atunci polinomul $q(X) = X^2 + X + \hat{1}$ este ireductibil în $\mathbf{Z}_p[X]$ dacă și numai dacă $p \equiv 2 \pmod 3$.

Mircea Becheanu

Demonstrație: Fie $a = \prod_{k=1}^{p-1}(k^2 + k + 1)$.

q este ireductibil în $\mathbf{Z}_p[X] \Leftrightarrow$ q nu are rădăcini în $\mathbf{Z}_p \Leftrightarrow$ $a \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Determinăm restul împărțirii lui a la p. Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$.

Atunci $k^2 + k + 1 = (\varepsilon - k)(\bar{\varepsilon} - k)$ și $a = \prod_{k=1}^{p-1}(\varepsilon - k)\cdot\prod_{k=1}^{p-1}(\bar{\varepsilon} - k) = f(\varepsilon)\cdot f(\bar{\varepsilon})$,

unde $f(X) = (X-1)((X-2)\ldots(X-p+1) \in \mathbf{Z}[X]$. Fie $g(X) = X^{p-1} - 1 \in \mathbf{Z}[X]$.

Cum $\hat{f}$ și $\hat{g}$ au aceleași rădăcini în $\mathbf{Z}_p$, (toate elementele din $\mathbf{Z}_p^*$) rezultă $\hat{f} = \hat{g}$ și deci există $h \in \mathbf{Z}[X]$, astfel încât $f = g + p\cdot h$.

Obținem $a = f(\varepsilon)\cdot f(\bar{\varepsilon}) = [g(\varepsilon) + p\cdot h(\varepsilon)][g(\bar{\varepsilon}) + p\cdot h(\bar{\varepsilon})] = g(\varepsilon)\cdot g(\bar{\varepsilon}) + p\cdot b + p^2\cdot b_1$, unde $b = g(\varepsilon)\cdot h(\bar{\varepsilon}) + g(\bar{\varepsilon})h(\varepsilon)$ și $b_1 = h(\varepsilon)h(\bar{\varepsilon})$.

Din $g, h \in \mathbf{Z}[X]$, rezultă că există $u, v \in \mathbf{Z}$, astfel încât $b = u + v\cdot\varepsilon$.

Din $b = \bar{b}$ obținem $u + v\cdot\varepsilon = u + v\cdot\bar{\varepsilon} \Rightarrow v(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow b = u \in \mathbf{Z}$. analog rezultă că $b_1 \in \mathbf{Z}$.

$g(\varepsilon)\cdot h(\bar{\varepsilon}) = (\varepsilon^{p-1} - 1)(\bar{\varepsilon}^{\,p-1} - 1) = 2 - (\varepsilon^{p-1} + \bar{\varepsilon}^{\,p-1}) = 2 - 2\cdot\mathrm{Re}(\varepsilon^{p-1}) = 2 - 2\cdot\cos\frac{2\pi(p-1)}{3}$

Obținem $a \equiv 2 - 2\cdot\cos\frac{2\pi(p-1)}{3} \pmod{p}$

Dacă $p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a \equiv 0 \pmod{p}$, iar dacă $p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow a \equiv 3 \pmod{p}$

Așadar $q(X)$ este ireductibil în $\mathbf{Z}_p[X] \Leftrightarrow p \equiv 2 \pmod{3}$.

10.1.7. Definiție *Fie $p \in \mathbf{N}$ un număr prim și $d \in \mathbf{Z}$. Spunem că d este un rest pătratic modulo p dacă există $a \in \mathbf{Z}$ cu $d \equiv a^2 \pmod{p}$.*

10.1.8. Observații **a)** Orice $d \in \mathbf{Z}$ este rest pătratic modulo 2.

b) Dacă p / d, atunci d este rest pătratic modulo p.

c) d este un rest pătratic modulo p dacă există $r \in R_p$ cu $d \equiv r^2 \pmod{p}$.

Este interesant cazul $p > 2$ și $d \in \mathbf{Z}$, $(d, p) = 1$.

10.1.9. Definiție *Fie $p \geq 2$ un număr prim și $d \in \mathbf{Z}$ cu $(d, p) = 1$.*

Numărul $\left(\frac{d}{p}\right) = \begin{cases} 1, & d \text{ e rest pătratic mod } p \\ -1, & \text{în caz contrar} \end{cases}$ *se numește simbolul lui Legendre.*

10.1.10. Definiție *Fie $p \in \mathbf{N}$ număr prim. Mulțimea $R \subset \mathbf{Z}$ se numește sistem redus de resturi modulo p dacă are proprietățile:*

1) $r \in R \Rightarrow r \not\equiv 0 \pmod{p}$

2) $\forall r, s \in R, r \neq s \Rightarrow r \not\equiv s \pmod{p}$

3) $|R| = p-1$.

10.1.11. Propoziție *Fie $p \geq 2$ un număr prim și $a, b \in \mathbf{Z}$, $(a, p) = (b, p) = 1$. Atunci au loc afirmațiile:*

1) *Dacă $a \equiv b \pmod{p}$, $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.*

2) $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$, *în particular* $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$.

3) $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$ *(Criteriul lui Euler)*

4) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

5) $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$.

Demonstrație: Proprietățile (1) și (2) sunt evidente.

Pentru a demonstra (3), vom folosi de mai multe ori următorul rezultat:

Fie corpul comutativ $(K, +, \cdot)$ și polinomul $f \in K[X]$, $grad(f) \geq 1$. Atunci f are cel mult n rădăcini în K.

Numărul p fiind prim, inelul $\mathbf{Z}_p$ este un corp cu p elemente.

Avem $a \equiv b \pmod{p} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b}$ în $\mathbf{Z}_p$.

Fie mulțimea de numere întregi $R = \left\{\pm 1, \pm 2, ..., \pm \frac{p-1}{2}\right\}$. R este un sistem redus de resturi modulo p. Notând $\overline{R} = \left\{\overline{r} \mid r \in R\right\}$, deducem că $\mathbf{Z}_p^* = \overline{R}$.

Notăm $\mathbf{Z}_p^{*2} = \{ \overline{x}^2 \mid \overline{x} \in \mathbf{Z}_p^* \}$. Obținem $\mathbf{Z}_p^{*2} = \left\{ \overline{1}^2, \overline{2}^2, ..., \overline{\left(\frac{p-1}{2} \right)}^2 \right\}$.

Dacă $1 \le r < s \le \frac{p-1}{2}$, atunci $r^2 \not\equiv s^2 \pmod p$, adică $\overline{r}^2 \ne \overline{s}^2$.

Într-adevăr, presupunând $\overline{r}^2 = \overline{s}^2 = \overline{a}$, polinomul $X^2 - \overline{a} \in \mathbf{Z}_p[X]$ ar avea cel puțin
4 rădăcini distincte în $\mathbf{Z}_p$, şi anume $\overline{r}, -\overline{r}, \overline{s}, -\overline{s}$ ($\overline{r} \ne \overline{0}$, $\overline{2} \ne \overline{0} \Rightarrow \overline{r} \ne -\overline{r}$), fals.

Aşadar $| \mathbf{Z}_p^{*2} | = \frac{p-1}{2}$. Mai mult, $\overline{a} \in \mathbf{Z}_p^{*2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{p} \right) = 1$.

Pentru $\overline{a} \ne \overline{0}$, din Mica Teoremă a lui Fermat avem: $\left(\overline{a}^{\frac{p-1}{2}} \right)^2 = \left(\overline{a} \right)^{p-1} = \overline{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\overline{a}^{\frac{p-1}{2}} - \overline{1} \right) \cdot \left(\overline{a}^{\frac{p-1}{2}} + \overline{1} \right) = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{a}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$ sau $\overline{a}^{\frac{p-1}{2}} = -\overline{1}$. Relațiile anterioare nu pot avea loc simultan, căci ar rezulta $\overline{1} = -\overline{1}$ şi deci $\overline{2} = \overline{0}$, adică $p = 2$, fals.

Fie $\overline{a} \in \mathbf{Z}_p^{*2} \Rightarrow \exists\, x \in \mathbf{Z}$, cu $\overline{x} \ne \overline{0}$, astfel încât $\overline{a} = \overline{x}^2$.

Atunci $\overline{a}^{\frac{p-1}{2}} = \left(\overline{x}^2 \right)^{\frac{p-1}{2}} = \overline{x}^{p-1} = \overline{1}$, deci $\mathbf{Z}_p^{*2} \subset M$, unde M este mulțimea rădăci-nilor din $\mathbf{Z}_p$ ale polinomului $X^{\frac{p-1}{2}} - \hat{1}$, ceea ce implică $\frac{p-1}{2} = | \mathbf{Z}_p^{*2} | \le | M | \le \frac{p-1}{2} \Rightarrow \mathbf{Z}_p^{*2} = M$.

Adică $\left(\frac{a}{p} \right) = 1 \Leftrightarrow \overline{a} \in \mathbf{Z}_p^{*2} \Leftrightarrow \overline{a}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1} \Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$

şi $\left(\frac{a}{p} \right) = -1 \Leftrightarrow \overline{a} \notin \mathbf{Z}_p^{*2} \Leftrightarrow \overline{a}^{\frac{p-1}{2}} \ne \overline{1} \Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$.

în concluzie, relația (3) este adevărată.

(4) rezultă din (3), deoarece $\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ (mod p) şi numerele anterioare fiind egale sau cu 1 sau cu -1 şi $1 \not\equiv -1$ (mod p), rezultă că ele sunt egale.
Demonstrăm relaţia (5).

$$(3) \Rightarrow \left(\frac{ab}{p}\right) \equiv (ab)^{\frac{p-1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} \cdot b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right) \pmod p$$

Cum $\left(\frac{ab}{p}\right), \left(\frac{a}{p}\right), \left(\frac{b}{p}\right) \in \{1, -1\}$ şi $1 \not\equiv -1$ (mod p), deducem că $\left(\frac{ab}{p}\right)$ şi

$\left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$ nu pot fi decât ambele egale cu 1, sau ambele egale cu -1, adică

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right).$$

10.1.12. Corolar *Fie $p \geq 2$ un număr prim şi $a \in \mathbf{Z}$. Au loc afirmaţiile:*

1) *Dacă $p = 2$, atunci polinomul $X^2 - \overline{a} \in \mathbf{Z}_2[X]$ este reductibil în $\mathbf{Z}_2[X]$*

2) *Dacă $p > 2$, atunci polinomul $X^2 - \overline{a} \in \mathbf{Z}_p[X]$ este reductibil în $\mathbf{Z}_p[X]$ $\Leftrightarrow$*

$\Leftrightarrow$ $a \equiv 0$ (mod p) sau $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (mod p)

3) *Dacă $p > 2$, atunci polinomul $X^2 - \overline{a} \in \mathbf{Z}_p[X]$ este ireductibil în $\mathbf{Z}_p[X]$ $\Leftrightarrow$*

$\Leftrightarrow$ $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ (mod p)

Demonstraţie: **1)** Avem $X^2 - \overline{a} = X^2 - \overline{a}^2 = (X - \overline{a}) \cdot (X + \overline{a})$

2) $X^2 - \overline{a}$ reductibil în $\mathbf{Z}_p[X] \Leftrightarrow X^2 - \overline{a}$ are o rădăcină în $\mathbf{Z}_p[X] \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0}$ sau

($\overline{a} \neq \overline{0}$ şi $\exists\ \overline{x} \in \mathbf{Z}_p$, $\overline{x}^2 = \overline{a}$) $\Leftrightarrow a \equiv 0$ (mod p) sau $\left(\frac{a}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow a \equiv 0$ (mod p) sau $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (mod p).

Următoarele rezultate, împreună cu formulele din 10.1.11., permit calculul simbolului lui Legendre prin reduceri succesive:

10.1.13. Legea reciprocității pătratice a lui Legendre-Gauss

Dacă p și q sunt două numere naturale prime impare distincte, atunci:

a) $\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$

b) $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

10. 2. Inelul resturilor inelului A[X] modulo un polinom $f\in A[X]$

În cele ce urmează, $(A, +, \cdot)$ este un inel comutativ dat și în inelul A[X] am fixat polinomul $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$, cu $n\in\mathbf{N}^*$ și $a_n\in U(A)$

Dacă $a_n = 1$, f se numește polinom unitar (monic). În inelul A[X] funcționează teorema împărțirii cu rest. Notăm cu g (mod f), restul r al împărțirii lui g la f.

Vom arăta că pentru orice număr natural $n \geq 1$, mulțimea polinoamelor din A[X] de grad cel mult $n-1$ poate fi înzestrată în mod natural cu o structură de inel comutativ, în raport cu polinomul unitar f de gradul n din A[X].

10.2.1. Lemă *Fie $g_1, g_2\in A[X]$. Atunci, $\forall\ h_1, h_2\in A[X]$, avem:*

1) $((g_1 + h_1\cdot f)\cdot(g_2 + h_2\cdot f))\ (mod\ f) = (g_1\cdot g_2)\ (mod\ f)$

2) $((g_1 + h_1\cdot f) + (g_2 + h_2\cdot f)\ (mod\ f) = (g_1 + g_2)\ (mod\ f)$.

Demonstrație: Din teorema împărțirii cu rest, există $q, r\in A[X]$, astfel încât $g_1\cdot g_2 = f\cdot q + r$, cu $grad(r) < n$.

Așadar, $(g_1 + h_1\cdot f)\cdot(g_2 + h_2\cdot f) = g_1\cdot g_2 + f\cdot(g_1.h_2 + g_2\cdot h_1 + h_1\cdot h_2\cdot f) =$
$= f\cdot(g_1.h_2 + g_2\cdot h_1 + h_1\cdot h_2\cdot f + q) + r$. Datorită unicității restului, deducem că:
$(g_1\cdot g_2)\ (mod\ f) = r = ((g_1 + h_1\cdot f)\cdot(g_2 + h_2\cdot f))\ (mod\ f)$

Cealaltă egalitate se demonstrează analog.

În cele ce urmează vom folosi următoarea notație:

$$A_f = \{b_{n-1}X^{n-1} + ... + b_1X + b_0 \mid b_i\in A,\ i = \overline{0, n-1}\} = \{g\in A[X] \mid grad(g) < n\}$$

A_f este în mod evident o parte stabilă a lui A[X] în raport cu operația de adunare a polinoamelor „+”. Deoarece pentru orice $g\in A[X]$, g (mod f)$\in A_f$, are sens să definim pe A_f operația: $g_1(g_2 = (g_1\cdot g_2)\ (mod\ f)$, $\forall\ g_1, g_2\in A_f$.

10.2.2. Propoziţie *(A_f, +, ( ) este un inel comutativ.*

Demonstraţie: Dacă g, h$\in A_f$, evident $g - h \in A_f$ şi deci $(A_f, +)$ este un subgrup al grupului $(A[X], +)$, adică $(A_f, +)$ este un grup abelian.
Fie $g_1, g_2, g_3 \in A_f$. $g_1(g_2$ fiind restul împărţirii lui $g_1 \cdot g_2$ la f, există $q \in A[X]$, astfel încât $g_1 \cdot g_2 = f \cdot q + g_1(g_2$. Folosind lema 10.2.1., obţinem:
$(g_1(g_2)(g_3 = ((g_1(g_2) \cdot g_3) \text{ (mod f)} = ((g_1 \cdot g_2 - f \cdot q) \cdot g_2 \text{ (mod f)} = ((g_1 \cdot g_2) \cdot g_3) \text{ (mod f)}$
Analog se demonstrează că $g_1((g_2(g_3) = (g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)) \text{ (mod f)}$ şi datorită asociativităţii din A[X], rezultă că $g_1(g_2)(g_3 = g_1((g_2(g_3)$.
Folosind aceeaşi lemă, obţinem:
$(g_1+g_2)(g_3 = ((g_1+g_2) \cdot g_3) \text{ (mod f)} = (g_1 \cdot g_3 + g_2 \cdot g_3) \text{ (mod f)} = (g_1 \cdot g_2) \text{ (mod f)} +$
$+ (g_2 \cdot g_3) \text{ (mod f)} = g_1(g_2 + g_2(g_3$.
Cum $1 \in A_f$ şi „(" este comutativă, deducem că $(A_f, +, ( )$ este un inel comutativ

10.2.3. Definiţie *Inelul (A_f, +, ( ) se numeşte inelul resturilor inelului A[X], modulo polinomul f .*

10.2.4. Definiţie *Inelul comutativ (C, +, ·) se numeşte extindere comutativă a inelului (A, +, ·) dacă $A \subset C$ şi A este subinel (unitar) al lui C.*

10.2.5. Observaţii

1) Dacă $g_1, g_2 \in A_f$ şi $\text{grad}(g_1 \cdot g_2) < n$, atunci $g_1 \cdot g_2 = g_1(g_2 \in A_f$.
În particular, $\forall$ a, b$\in$A, $a(b = a \cdot b \in A$, aşadar A este un subinel (unitar) al lui A_f şi deci inelul A_f este o extindere comutativă a inelului A.
Avem: $A = A_f \Leftrightarrow \text{grad}(f) = 1$ şi dacă $\text{grad}(f) \geq 2$, A_f nu este un subinel al lui A[X], deşi $A_f \subset A[X]$.
Aşadar A[X] este o extindere a inelului $A_f \Leftrightarrow \text{grad}(f) = 1$.
2) dacă $g \in A_f$ şi $m \in \mathbf{N}^*$, atunci notăm $g^{*m} = \underbrace{g * g * ... * g}_{\text{m ori}}$

Atunci, $\forall\, g \in A_f$, $\exists!\, b_0, b_1, ..., b_{n-1} \in A$ astfel încât

$$g(X) = b_{n-1}(X^{*(n-1)} + ... + b_1(X + b_0.$$

3) Deoarece $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$, deducem că

$$a_nX^n = f(X) \cdot 1 + (-a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - ... - a_1X - a_0) \text{ şi}$$

$(a_nX^n) \text{ (mod f)} = -a_{n-1}X^{n-1} - ... - a_1X - a_0 = -a_{n-1}(X^{*(n-1)} - ... - a_1(X - a_0(1$.
Cum $a_n(X^{*n} = (a_nX^n) \text{ (mod f)}$, rezultă $a_n(X^{*n} = -a_{n-1}(X^{*(n-1)} - ... - a_1(X - a_0(1$
$\Leftrightarrow a_n(X^{*n} + a_{n-1}(X^{*(n-1)} + ... + a_1(X + a_0(1 = 0$, adică elementul X al inelului A_f este o rădăcină a polinomului $f \in A[X]$.

4) Dacă $g \in A_f$, $grad(g) = n$, cu coeficientul dominant inversabil în A, atunci inelele A_f şi A_g au grupurile abeliene subiacente identice, dar dacă $n \geq 2$, de obicei operaţiile de înmulţire diferă. Mai mult, în general, inelele A_f şi A_g nu sunt izomorfe.

Dacă $g = v \cdot f$, cu $v \in U(A)$, atunci inelele A_g şi A_f coincid.
Într-adevăr, $\forall\ h \in A[X]$, $\exists\ q \in A[X]$, $h = f \cdot q + h \ (\mathrm{mod}\ f)$ şi deci
$h = (f \cdot v) \cdot (v^{-1} \cdot q) + h \ (\mathrm{mod}\ f) = g \cdot (v^{-1} \cdot q) + h \ (\mathrm{mod}\ f) \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad h \ (\mathrm{mod}\ f) = h \ (\mathrm{mod}\ g),\ \forall\ h \in A[X].$
În particular, pentru $v = a_n^{-1}$, unde a_n este coeficientul dominant al lui f, avem că $A_f = A_{f_1}$, unde $f_1 = v \cdot f$ şi f_1 este un polinom unitar. Aşadar putem presupune de la început că polinomul f este unitar.

10.2.6. Definiţie *Fie inelul $(A, +, \cdot)$ şi $(B, +, \cdot)$ o extindere comutativă a inelului A. Elementul $b \in B$ este rădăcină a polinomului $f \in A[X]$ dacă $f(b) = 0$.*

Folosind această definiţie şi observaţia 3, deducem:

10.2.7. Propoziţie *Pentru orice inel comutativ $(A, +, \cdot)$ şi orice polinom $f \in A[X]$ de grad $n \geq 1$ având coeficientul dominant un element inversabil al lui A, există o extindere comutativă a lui A, şi anume inelul A_f, care conţine o rădăcină a lui f.*

10.2.8. Observaţie Folosind teorema lui Bézout şi raţionând prin inducţie, obţinem că pentru orice inel comutativ $(A, +, \cdot)$ şi orice poliom $f \in A[X]$ de grad $n \geq 1$ având coeficientul dominant un element inversabil al lui A există o extindere comutativă $\overline{A}$ a lui A, astfel încât, în inelul $\overline{A}$, f să fie produsul coeficientului dominant a_n cu n polinoame unitare de gradul 1.

În cele ce urmează, studiem cazul în care inelul A este un corp comutativ, K. În acest context, singura condiţie care trebuie impusă polinomului f este ca $grad(f) = n \geq 1$. Rezultatul care urmează este analogul celui deja cunoscut: inelul $(R_n, \oplus, \otimes)$ este corp $\Leftrightarrow$ n este număr prim (ireductibil).

10.2.9. Propoziţie *Fie corpul comutativ $(K, +, \cdot)$ şi polinomul $f \in K[X]$, cu $grad(f) = n \geq 1$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1) *$(K_f, +, ()$ este corp.*
2) *$(K_f, +, ()$ este domeniu de integritate.*
3) *f este un polinom ireductibil.*

Demonstrație: Implicația „1 $\Rightarrow$ 2” este evidentă.
„2 $\Rightarrow$ 3” Presupunem că f este reductibil.
Atunci există $g_1, g_2 \in K[X] \setminus \{0\}$, $grad(g_1) < n$, $grad(g_2) < n$, astfel încât $f = g_1 \cdot g_2$.
Rezultă $g_1(g_2 = (g_1 \cdot g_2) \pmod{f} = 0$, fals, deoarece K_f este domeniu de integritate.
„3 $\Rightarrow$ 1” Demonstrăm că dacă f este un polinom ireductibil, atunci

$$\forall\ g \in K_f \setminus \{0\},\ \exists\ h \in K_f, \text{ astfel încât } g(h = 1.$$

Fie d cel mai mare divizor comun (unitar) în $K[X]$ al polinoamelor f şi g.
Atunci d / f şi deoarece f este ireductibil, rezultă sau $d = 1$, sau $d = f$.
Dacă $d = f$, cum d / g, rezultă f / g, fals ($g \in K_f \setminus \{0\}$ şi deci $grad(g) < grad(f)$)
Aşadar $d = 1$. Atunci, există $f_1, g_1 \in K[X]$ astfel încât $g \cdot g_1 + f \cdot f_1 = 1$.
Fie $h = g_1 \pmod{f}$ $\Rightarrow$ $\exists\ q \in K[X]$ astfel încât $g_1 = f \cdot q = h \overset{10.2.1}{\Rightarrow}$
$(g \cdot g_1) \pmod{f} = (g \cdot (f \cdot q + h)) \pmod{f} = (g \cdot h) \pmod{f} = g(h$.
Cum $g \cdot g_1 = f \cdot (-f_1) + 1$, deducem că $(g \cdot g_1) \pmod{f} = 1$, deci $g(h = 1$.
Aşadar $(K_f, +, (\ )$ este corp.

<u>10.2.10. Observație</u> Dacă $g \in K[X]$ este un polinom neconstant, atunci g se scrie ca un produs de polinoame ireductibile: $g = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_m$. Din propoziția anterioară, K_{f_1} este o extindere comutativă a corpului K şi conform propoziției 10.2.7., corpul K_{f_1} conține o rădăcină a lui f_1.

Aplicând teorema lui Bézout şi raționând prin inducție după gradul lui g, deducem că există un corp $\overline{K}$ - extindere a lui K, ce conține toate rădăcinile polinomului g (polinomul g, considerat ca polinom peste corpul $\overline{K}$, poate fi exprimat ca un produs de polinoame de gradul I peste $\overline{K}$)

<u>10.2.11. Exemple</u> Fie K un corp finit cu q elemente şi $f \in K[X]$, cu $grad(f) = n \geq 1$.
Avem $K_f = \{b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0 \mid b_i \in K,\ i = \overline{0, n-1}\}$.
Mai mult, $\sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i X^i \ \Leftrightarrow\ b_i = c_i,\ \forall\ i = \overline{0, n-1}$.
Rezultă că funcția $f : K^n \to K_f$, $f(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) = b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0$ este bijectivă, aşadar $|K_f| = |K^n|$ şi deci inelul K_f are q^n elemente.
Atunci (10.2.9) K_f este corp $\Leftrightarrow$ f este ireductibil în $K[X]$.

Ştim că orice polinom $f \in K[X]$ de grad 2 sau 3 este ireductibil în $K[X]$ dacă şi numai dacă f nu are nici o rădăcină în K.

Fie $p \in \mathbf{N}$ un număr prim. Alegând $K = \mathbf{Z}_p$, rezultă că putem construi efectiv, prin procedeul descris mai sus, corpuri cu p^n elemente ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$), de îndată ce cunoaştem cel puţin un polinom $f \in \mathbf{Z}_p[X]$, de grad n şi ireductibil.

De exemplu, în $\mathbf{Z}_2[X]$, polinomul $f(X) = X^2 + X + \hat{1}$ este ireductibil şi corpul $(Z_2)_f$ are 4 elemente.

Într-adevăr, $(Z_2)_f = \{a + bX \mid a, b \in \mathbf{Z}_2\} = \{\hat{0}, \hat{1}, X, \hat{1} + X\}$ iar tablele operaţiilor sunt:

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	X	$\hat{1}+X$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	X	$\hat{1}+X$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}+X$	X
X	X	$\hat{1}+X$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{1}+X$	$\hat{1}+X$	X	$\hat{1}$	$\hat{0}$

(	$\hat{0}$	$\hat{1}$	X	$\hat{1}+X$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	X	$\hat{1}+X$
X	$\hat{0}$	X	$\hat{1}+X$	$\hat{1}$
$\hat{1}+X$	$\hat{0}$	$\hat{1}+X$	$\hat{1}$	X

deoarece $X(X = X^2 \pmod{f}$ $\Rightarrow$ $X(X = X + \hat{1}$, $(X+\hat{1})(X = \hat{1}$, $(X+\hat{1})((X+\hat{1}) = X$

Considerând inelul $(Z_2)_g$, cu $g(X) = X^2$, rezultă că $X(X = \hat{0}$, deci inelul cu 4 elemente $(Z_2)_g$ are elementul nenul nilpotent X. Aşadar inelul $(Z_2)_g$ nu este izomorf cu inelul produs direct $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, deoarece acesta nu are elemente nilpotente.

<u>10.2.12. Definiţie</u> *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ. Perechea (B, α) se numeşte A – algebră, dacă B este un inel şi $\alpha : A \to B$ este un morfism de inele, cu proprietatea că $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $\alpha(a) \cdot b = b \cdot \alpha(a)$.*
α se numeşte morfismul structural al A – algebrei.
A - Algebra (B, α) este comutativă dacă inelul B este comutativ.

Când nu e pericol de confuzie, nu se specifică morfismul structural al A – algebrei B.

<u>10.2.13. Exemple</u> **1)** Dacă A este un subinel unitar şi comutativ al inelului B, care este conţinut în $Z(B)$, atunci B este o A – algebră, de morfism structural incluziunea canonică. În particular, orice extindere comutativă a lui

A este o A – algebră. Aşadar, **R** este o **Q** – algebră, **C** este o **R** – algebră, iar dacă inelul A este comutativ, atunci inelele A[X] şi A_f (cu $f \in A[X]$ având coeficientul dominant inversabil în A) sunt A – algebre comutative.
2) Orice inel A are o unică structură de **Z** – algebră, cu morfismul structural $\alpha : \mathbf{Z} \to A$, $\alpha(n) = n\cdot 1$, $\forall\ n \in \mathbf{Z}$.

3) Dacă (A, +, ·) este un inel comutativ, atunci inelul $M_n(A)$ este o A – algebră, de morfism structural $\alpha : A \to M_n(A)$, $\alpha(a) = a\cdot I_n$

10.2.14. Definiţie *Fie (A, +, ·) un inel comutativ, (B, α) o A – algebră,* $u \in B$ *şi* $f \in A[X]$, $f(X) = a_n\cdot X^n + ... + a_1\cdot X + a_0$. *Elementul* $f(u) = \alpha(a_n)\cdot u^n + ... + \alpha(a_1)\cdot u + \quad + \alpha(a_0)$ *se numeşte valoarea polinomului f în u. Elementul* $u \in B$ *se numeşte rădăcină a lui f dacă* $f(u) = 0$.

10.2.15. Observaţii **1)** De obicei, dacă nu se poate face nici o confuzie, notăm $\alpha(a) = a$, pentru $a \in A$ şi avem: $f(u) = a_n\cdot u^n + ... + a_1\cdot u + a_0\cdot e$, unde e este elementul unitate al inelului B.
2) Evident, $\forall$ f, $g \in A[X]$, $\forall\ u \in B$, $(f+g)(u) = f(u)+g(u)$ şi $(f\cdot g)(u) = f(u)\cdot g(u)$.
În consecinţă, funcţia $\alpha_u : A[X] \to B$, $\alpha_u(f) = f(u)$, $\forall\ f \in A[X]$, este un morfism de inele, numit morfismul de evaluare în u al polinoamelor din A[X].
3) În condiţiile din definiţia 10.2.14., notăm $A[u] = \{f(u) \mid f \in A[X]\} = (\mathrm{Im}(\alpha_u))$
α_u fiind morfism de inele, rezultă că A[u] este un subinel comutativ al lui B, fiind şi o A – algebră de morfism structural $\varphi: A \to A[u]$, $\varphi(a) = a\cdot e$, $\forall\ a \in A$.
Inelul A[u] se numeşte A – subalgebra lui B generată de elementul $u \in B$.

10.2.16. Definiţie *Fie (A, +, ·) un inel comutativ, (B, α) o A – algebră şi* $u \in B$. *Elementul u este algebric peste A dacă* $\exists f \in A[X]$, $f \neq 0$, *cu* $f(u) = 0$.
În caz contrar, u se numeşte transcendent peste A.

10.2.17. Propoziţie *Fie corpul (K, +, ·) şi (B, +, ·) o K - algebră.*
Fie $u \in B$, *algebric peste K şi* $f \in K[X]$ *un polinom nenul de grad minim astfel încât* $f(u) = 0$. *Atunci* $\forall g \in K[X]$, *cu* $g(u) = 0$, *avem* f / g.

Demonstraţie: Din teorema împărţirii cu rest, $\exists$ q, $r \in K[X]$ astfel încât $g = f\cdot q + r$, cu $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(f)$. Atunci: $0 = g(u) = f(u)\cdot q(u) + r(u) = r(u)$.
Cum f este polinom de grad minim printre polinoamele nenule din K[X] care au rădăcina α, rezultă $r = 0$, deci f / g.

10.2.18. Observație Dacă $f \in K[X]$, $f(X) = a_n \cdot X^n + ... + a_1 \cdot X + a_0$, cu $a_n \neq 0$, este un polinom ca şi în 10.2.17., atunci şi $a_n^{-1} \cdot f = f_1$ este tot un polinom nenul din $K[X]$ care are rădăcina u şi în plus, este unitar.

10.2.19. Definiție *Fie u un element algebric al unei K – algebre B. Polinomul unitar de grad minim din $K[X]$ care are rădăcina u, se numeşte polinomul minimal (peste K) al lui u.*

10.2.20. Observație Polinomul minimal peste corpul K al unui element algebric al unei K – algebre este unic determinat. El se notează $\mathrm{Min}(u, K)$.

10.2.21. Propoziție *Fie B o K – algebră peste corpul comutativ K, $u \in B$ un element algebric peste K, $f = \mathrm{Min}(u, K)$ şi $n = \mathrm{grad}(f)$. Atunci:*

1) *$\forall b \in K[u]$, $\exists!\ g \in K_f$ astfel încât $b = g(u)$*

2) *Funcția $\beta : K_f \to K[u]$, $\beta(g) = g(u)$, $\forall g \in K_f$ este un izomorfism de inele.*

3) *$K[u]$ este domeniu de integritate $\Leftrightarrow$ $K[u]$ este corp $\Leftrightarrow$ f este ireductibil.*

Demonstrație: **1)** Fie $b \in K[u] \Rightarrow \exists\, h \in K[X]$, $h(u) = b$. Alegem $g = h \pmod f$
Din teorema împărțirii cu rest, $\exists!\ q \in K[X]$, $h = f \cdot q + g \Rightarrow h(u) = b = g(u)$.
Presupunem că există $g' \in K_f$, $g' \neq g$, astfel încât $g'(u) = b$.
Obținem $(g - g')(u) = 0$, aşadar u este rădăcină a lui $g - g'$
Cum $\mathrm{grad}(g - g') < n = \mathrm{grad}(f)$ iar $f = \mathrm{Min}(u, K) \Rightarrow g - g' = 0 \Leftrightarrow g = g'$.
2) Din 1) rezultă că f este surjectivă.
Fie $g_1, g_2 \in K_f$, cu $\beta(g_1) = \beta(g_2)$. Atunci $g_1(u) = g_2(u) \Leftrightarrow (g_1 - g_2)(u) = 0$
$\mathrm{grad}(g_1 - g_2) < n$ şi $f = \mathrm{Min}(u, K) \Rightarrow g_1 - g_2 = 0 \Leftrightarrow g_1 = g_2$.
Aşadar f este şi injectivă, deci este bijectivă.
Pentru $g_1, g_2 \in K_f$, din teorema înpărțirii cu rest, $\exists\, q \in K_f$, $g_1 \cdot g_2 = f \cdot q + g_1(g_2$.
Avem $\beta(g_1(g_2) = (g_1(g_2)(\alpha) = (g_1 \cdot g_2 - f \cdot q)(\alpha) = g_1(\alpha) \cdot g_2(\alpha) - f(\alpha) \cdot q(\alpha) =$
$= g_1(\alpha) \cdot g_2(\alpha) = \beta(g_1) \cdot \beta(g_2)$; $\beta(g_1 + g_2) = (g_1 + g_2)(\alpha) = g_1(\alpha) + g_2(\alpha) = \beta(g_1) +$
$\beta(g_2)$, aşadar β este izomorfism de inele.
3) $K[u] \approx K_f$ şi concluzia rezultă din propoziția 10.2.9.

10.2.22. Observații **1)** Dacă $g \in K[X]$ e un polinom unitar, ireductibil şi pentru $u \in B$, $g(u) = 0$, atunci $g = \mathrm{Min}(u, K)$.
Într-adevăr, avem (din 10.2.17) că $\mathrm{Min}(u, K) \,/\, g$ şi amândouă fiind iredctibile, iar $\mathrm{Min}(u, K)$ fiind de grad ≥ 1, rezultă concluzia.
2) Izomorfismul din proprietatea precedentă este evident unizomorfism de K – algebre.

3) Propoziția anterioară nu funcționează în general pentru elementele algebrice peste un inel comutativ arbitrar A, pentru că nu se poate defini noțiunea de polinom minimal al unui element algebric peste un inel.

De exemplu, numărul $\frac{1}{3}\in\mathbf{Q}$ este algebric peste **Z**, fiind rădăcina polinomului $3X-1\in\mathbf{Z}[X]$, dar nu există nici un polinom unitar din $\mathbf{Z}[X]$ cu rădăcina $\frac{1}{3}$.

<u>10.2.23. Exemple</u>

1) Dacă $f\in\mathbf{Q}[X]$ este un polinom ireductibil de grad n şi $z\in\mathbf{C}$ este o rădăcină a lui f, atunci $\mathbf{Q}[z] = \{a_{n-1}\cdot z^{n-1} + ... + a_1\cdot X + a_0 \mid a_i\in\mathbf{Q},\ i=\overline{0, n-1}\}$ este un subcorp al lui **C** şi numerele complexe $1, z, z^2, ..., z^{n-1}$ sunt liniar independente peste **Q**.

De exemplu, dacă $d\in\mathbf{Z}\setminus\{0, 1\}$ este un număr liber de pătrate, atunci polinomul $X^2 - d$ este ireductibil în $\mathbf{Q}[X]$, deci $\mathrm{Min}(\sqrt{d}, \mathbf{Q}) = X^2 - d$ şi $\mathbf{Q}[\sqrt{d}\,] = \{a+b\sqrt{d} \mid a, b\in\mathbf{Q}\}$ este un subcorp al lui **C**. Numerele complexe $1, \sqrt{d}$ sunt liniar independente peste **Q**.

2) Dacă avem corpul comutativ $(K, +, \cdot)$ şi $f\in K[X]$ este un polinom unitar de grad ≥ 1, considerând K – algebra K_f, din propoziția 10.2.7. deducem că $X\in K_f$ este algebric peste K şi $\mathrm{Min}(X, K) = f$.

<u>10.2.24. Propoziție</u> *Fie $p\in\mathbf{N}$ un număr prim, $f\in\mathbf{Z}_p[X]$ un polinom ireductbil de grad $n\geq 1$ şi $a\in\mathbf{N}$. Condiția necesară şi suficientă ca să existe un inel A cu n elemente având proprietățile*

(i) $\underbrace{1+1+...+1}_{p\ ori} = 0$ *(char(A) = p)*

(ii) *ecuația $f(x) = 0$ are soluții în A*

este ca să existe $k\in\mathbf{N}^*$ astfel încât $a = p^{k\cdot n}$.

<u>*Demonstrație:*</u> Fie $K = \mathbf{Z}_p$ şi corpul cu p^n elemente K_f.

„⇐" Dacă $a = p^{k\cdot n}$, considerăm inelul $A = \underbrace{K_f\times K_f\times ...\times K_f}_{k\ ori}$, care are (din

10.2.4)

proprietățile cerute.

„⇒" Presupunem că există un inel A cu a elemente, cu proprietățile din ipoteză.

Este evident că A este o K – algebră de morfism structural $\alpha : K\to A$, $\alpha(\hat{k})$ $= k$.

Fie $u \in A$ o soluție a ecuației $f(x) = 0$ şi funcția $\beta : K_f \to A$, $\beta(g) = g(u)$. Atunci, din Propoziția 10.2.21. ştim că β este un morfism injectiv de inele. Mai mult, β induce un izomorfism al lui K_f pe $\mathrm{Im}\,\beta = K[u] \overset{\text{not}}{=} P$.
Atunci P este un subinel al lui $(A, +, \cdot)$, fiind de fapt izomorf cu K_f, deci având p^n elemente. Deducem (inelul A admițând o structură de P – spațiu vectorial), că $\exists\, k \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $|A| = |P|^k$ ($\dim_P(A) = k$) şi deci că $\exists\, k \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $a = p^{k \cdot n}$.

10.2.25. Aplicații

1) Orice inel finit $(A, +, \cdot)$ în care $1+1 = 0$, iar ecuația $x^4+x^3+1 = 0$ are soluție în A, are proprietatea că $\exists\, k \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $|A| = 16^k$.

Soluție: Se ia $p = 2$ şi $f = X^4+X^3+\hat{1} \in \mathbf{Z}_2[X]$

2) Fie $a, p \in \mathbf{N}^*$ şi p prim, $p \equiv 3 \pmod 4$. Condiția necesară şi suficientă ca să existe un inel A cu a elemente care să aibă proprietățile:
(i) $\mathrm{char}(A) = 2$
(ii) ecuația $x^2+1 = 0$ are soluție în A
este: $\exists\, k \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $a = p^{2 \cdot k}$.

Soluție: Se alege $f = X^2+\hat{1} \in \mathbf{Z}_p[X]$, care este ireductibil, conform cu 10.1.13.
3) Fie $a, p \in \mathbf{N}^*$. Condiția necesară şi suficientă ca să existe un inel A cu a elemente care să aibă proprietățile:
(i) $\mathrm{char}(A) = 2$
(ii) ecuația $x^2+x+1 = 0$ are soluție în A
este: $\exists\, k \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $a = 4^k$.

Soluție: Se alege $p = 2$ şi $f = X^2+X+\hat{1} \in \mathbf{Z}_p[X]$

Bibliografie

T. Albu *- Construcții elementare de inele şi corpuri, G. M. 8, 9, 10 / 1998*
M. Andronache *- O proprietate de descompunere a polinoamelor din* $\mathbf{Z}_n[X]$*, G.M. 5-6 / 1993, pag. 165-166*
M. Burtea, G. Burtea *- Matematică – clasa a XII-a – Elemente de analiză matematică. Algebră superioară, Ed. Carminis 2001*

M. Crainic, N. Crainic – *Rezolubilitatea ecuațiilor polinomiale în inele, G.M. 4 / 1999, pag. 153-155*
M. Ganga - *Teme şi probleme de matematică, Ed. Tehnică, 1991, pag. 149-150*
M. Țena – *Cinci teme de aritmetică superioară, Biblioteca Societății de Ştiințe Matematice din România, Imprimeria Coresi, 1991*
D. Buşneag, Al. Dincă, D. Ebâncă, C-tin P. Niculescu, M. Popescu, I. Vladimirescu, G. Vraciu – *Concursul de matematică „Gheorghe Țițeica" 1979-1998, Ed GIL, Zalău, 1999*
Colecția G. M.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. Funcții primitivabile

Importanța noțiunii de primitivă pentru calculul integral al funcțiilor reale de o variabilă reală este pusă în evidență în manualul de analiză matematică al clasei a XII-a. Pe de o parte, se constată în acest manual că datorită formulei lui Leibniz-Newton calculul integralei Riemann a unei funcții integrabile Riemann care admite primitive poate fi redus la determinarea unei primitive a acestei funcții iar, pe de altă parte, se arată apoi că, în cazul unei funcții continue, se poate construi o primitivă a acesteia cu ajutorul integralei Riemann.

1.1. Funcții primitivabile

1.1.1. Definiție. Fie *J* un interval nedegenerat din $\mathbb{R}$, adică *J* este un interval nevid care nu se reduce la un singur punct. O funcție derivabilă $F: J \to \mathbb{R}$ se numeşte **primitivă** pe *J* a unei funcții $f: J \to \mathbb{R}$ dacă *F* este derivabilă pe *J* şi $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in J$. Când punctul *x* din această definiție este o extremitate a lui *J*, prin $F'(x)$ se notează derivata laterală a lui *F* în *x*.

Se spune că o funcție $f: J \to \mathbb{R}$ este **primitivabilă** (sau **admite primitive**, sau, încă, este o **derivată**) pe *J* dacă există o primitivă a lui *f* pe *J*. Noțiunea de primitivă a fost introdusă de I. Newton (1665) sub denumirea de fluentă.

Notăm în continuare cu *J* un interval nedegenerat din $\mathbb{R}$.

1.1.2. Propoziție. Dacă $f: J \to \mathbb{R}$ admite o primitivă *F* pe *J*, atunci restricția lui *F* la orice interval nedegenerat $I \subset J$ este o primitivă a restricției lui *f* la *I*.

1.1.3. Propoziție. Dacă *F* şi *G* sunt două primitive ale aceleiaşi funcții $f: J \to \mathbb{R}$, atunci există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$F(x) - G(x) = k,$$

pentru orice $x \in J$.

Demonstrație. Notăm $H = F - G$. *H* este derivabilă pe *J* şi $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ pentru orice $x \in J$. Rezultă că există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $H(x) = k$ pentru orice $x \in J$, adică $F(x) - G(x) = k$ pentru orice $x \in J$.

1.1.4. Observație. Notăm în continuare cu $C(J)$ sau C mulțimea funcțiilor continue pe *J* şi cu $\mathcal{P}(J)$ mulțimea funcțiilor care au primitive pe intervalul nedegenerat *J*.

Acceptăm în continuare următorul rezultat

1.1.5.Teoremă. *Dacă funcția f este continuă pe intervalul nedegenerat J, atunci f are primitive pe J.*

1.1.6. Observație. Datorită importanței ei în analiza matematică, teorema 1.1.5 este denumită de mulți autori teorema fundamentală a calculului diferențial şi integral. Facem observația că reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată. Aceasta va rezulta din următorul exemplu.

1.1.7. Exemplu. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin:

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Demonstrație. Funcția *f* este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nu există, punctul $x=0$ este un punct de discontinuitate de speța a doua, deci *f* nu este continuă pe $\mathbb{R}$. Integrând prin părți pe orice interval ce nu conține originea obținem

$$\int \sin\frac{1}{x}\,dx=\int x^2\cdot\left(\cos\frac{1}{x}\right)'dx=x^2\cdot\cos\frac{1}{x}-\int 2x\cdot\cos\frac{1}{x}\,dx$$

(1)

Aceasta ne sugerează să luăm funcția ajutătoare, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Funcția *g* fiind continuă pe $\mathbb{R}$ (aşa a fost luată în $x=0$), are primitivă pe $\mathbb{R}$ şi notăm *G* o primitivă a funcției *g*. Utilizând (1) deducem că dacă *f* are primitive, atunci o primitivă pentru *f* va fi de forma:

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}-G(x)+c_1, & x\neq 0,\\ c_2, & x=0.\end{cases}$$

Determinăm constantele c_1 şi c_2 astfel încât *F* să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=f(x)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$. Din construcția lui *F* avem că *F* este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ şi $F'(x)=f(x)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Din condiția de continuitate pentru *F* în $x=0$ obținem:

$c_2 = -G(0) + c_1$ şi avem

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} - G(x) + c_1, & x \neq 0, \\ -G(0) + c_2, & x = 0. \end{cases}$$

(2)

Cum

$$F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x} - G(x) + G(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x} - \frac{G(x) - G(0)}{x - 0}\right) = 0 - G'(0) = -g(0) = 0 = f(0).$$

Rezultă că F este derivabilă în $x = 0$ şi $F'(0) = f(0)$. Deducem că F dată de (2) este primitivă pentru *f*.

1.1.8. Teoremă. (Darboux 1875). *Dacă $f : J \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe J atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux pe J.*

1.1.9. Proprietate (condiție necesară de existență a primitivelor). Fie $f : J \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe *J*. Atunci *f* are proprietatea lui Darboux pe *J*. Avem deci incluziunea $P(J) \subset \mathcal{D}_a(J)$.

Demonstrație. Fie *F* o primitivă a lui *f*. Atunci din teorema lui Darboux rezultă că F' are proprietatea lui Darboux, deci *f* are proprietatea lui Darboux pe *J*.

1.1.10. Consecință. Fie $f : J \to \mathbb{R}$ o funcție care nu are proprietatea lui Darboux pe *J*. Atunci *f* nu admite primitive pe *J*.

Demonstrație. Presupunem contrariul. Rezultă că *f* are primitive pe *J* şi din Proprietatea 1.1.9 rezultă că *f* are proprietatea lui Darboux, contradicție.

1.1.11. Consecință. Dacă $f : J \to \mathbb{R}$ (*J* interval din $\mathbb{R}$) este o funcție astfel încât $\operatorname{Im} f$ nu este interval, atunci *f* nu are primitive pe *J*.

1.1.12. Proprietate. Dacă funcția $f : J \to \mathbb{R}$ are un punct de discontinuitate de prima speță, atunci funcția *f* nu admite primitive.

Demonstrație. Presupunem că *f* are primitive. Atunci deducem că *f* are proprietatea lui Darboux, de unde obținem că *f* nu are nici un punct de discontinuitate de prima speță, contradicție.

1.1.13. Exemplu. Funcția $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \in (0,\infty)\setminus\{1\} \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

nu are primitive pe $(0,\infty)$.

Soluție. Avem că f este continuă pe $(0,\infty)\setminus\{1\}$ şi $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1\\ f(1)=2\end{array}\right| \Rightarrow x=1$ este un punct de discontinuitate de prima speță, deci f nu are primitive pe $(0,\infty)$.

1.1.4. Propoziție. Fie funcțiile $f,g:J\to\mathbb{R}$ primitivabile pe J şi $\lambda\in\mathbb{R}$. Atunci funcțiile $f+g$, λf, $f-g$ sunt primitivabile pe *J*.

Demonstrație. Fie $G,F:J\to\mathbb{R}$ primitive pentru *g* şi *f*. Atunci rezultă imediat că funcțiile $F+G$, λF, $F-G$ sunt primitive, respectiv pentru $f+g$, λf, $f-g$.

1.1.15. Teoremă. *Dacă $I\subset\mathbb{R}$ este un interval nedegenerat, care nu este deschis şi interiorul căruia este notat cu J, iar $f:I\to\mathbb{R}$ este o funcție care admite primitive, atunci sunt adevărate următoarele afirmații:*

a) Dacă $F_0:J\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\big|_J$, atunci F_0 are limită finită în fiecare punct $a\in I\setminus J$, iar funcția $F:I\to\mathbb{R}$, definită prin

$$F(x)=\begin{cases} F_0(x)\ ,\ x\in J\\ \lim\limits_{t\to a}F_0(t),\ x=a\in I\setminus J\end{cases}\qquad(1)$$

este o primitivă a lui f.

b) Dacă $F:I\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă pentru care $F\big|_J$ este o primitivă a lui $f\big|_J$, atunci F este o primitivă a lui f.

Demonstrație. a) Fie funcția $G:I\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui *f*. Atunci $G\big|_J$ este o primitivă a lui $f\big|_J$. Deoarece funcția F_0 este tot o primitivă a lui $f\big|_J$, există un număr real *c* astfel încât să aibă loc egalitatea

$$F_0(x)=G(x)+c,\ \ (\forall)x\in J.\qquad(2)$$

Fie acum *a* un punct oarecare din $I\setminus J$. Funcția *G* fiind derivabilă în *a*, este continuă în acest punct şi din această cauză avem

$$\lim_{x\to a}G(x)=G(a).$$

Ținând seama de relația (2), rezultă

$$\lim_{x\to a}F_0(x)=G(a)+c.\qquad(3)$$

Din relațiile (1), (2) şi (3) deducem că

$$F(x)=G(x)+c \text{ pentru orice } x\in I.$$

În consecință, *F* este o primitivă a lui *f*.

b) Alegând $F_0 = F\Big|_J$ şi aplicând afirmaţia a), deducem că F este o primitivă a lui f.

1.1.16. Observaţie. Din Teorema 1.1.15 rezultă un procedeu practic de determinare a unei primitive pentru o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$, care admite primitive şi care este definită pe un interval nedegenerat $I \subset \mathbb{R}$ care nu este deschis; se determină mai întâi o primitivă F_0 a restricţiei lui f la interiorul lui I, iar apoi se prelungeşte F_0 la I prin formula (1), obţinând astfel o primitivă F a lui f.

1.1.17. Exemplu. Să se determine primitivele funcţiei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{x^2}, \text{ pentru orice } x \in (0,1].$$

Soluţie. Funcţia f are primitive pe $(0,1]$ fiind continuă. Determinăm mai întâi o primitivă a funcţiei $f_0 = f\Big|_{(0,1)}$. Aplicând formula de integrare prin părţi găsim

$$\int f_0(x)dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \arcsin x\, dx = -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Notăm $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$, de unde $\varphi'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ şi obţinem

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)-1}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right) + C.$$

Rezultă

$$\int f_0(x)dx = -\frac{1}{x}\arcsin x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right) + C.$$

Restricţia la $(0,1)$ a funcţiei continue $F : (0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(x) = -\frac{1}{x}\arcsin x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right) \text{ pentru orice } x \in (0,1],$$

este deci o primitivă a lui f_0. Prin urmare, funcţia F este, conform Teoremei 1.1.15, o primitivă a lui f, aşa că avem

$$\int f(x)\,dx = F + C.$$

1.1.18. Observație. Se poate arăta că o funcție reală, definită pe un interval nedegenerat $I \subset \mathbb{R}$ care nu este deschis şi a cărei restricție la interiorul lui *I* admite primitive, nu trebuie să admită neapărat primitive. Pentru aceasta este suficient să analizăm problema rezolvată R.1.4.1. De aceea, nu se poate renunța în Teorema 1.1.15 la ipoteza că funcția $f: I \to \mathbb{R}$ să aibă primitive.

În practică se întâmplă de multe ori ca o anumită metodă de găsire a primitivelor (inclusiv cea a prelungirii, descrisă anterior) să nu fie aplicabilă pe întregul interval $I \subseteq \mathbb{R}$, ci doar pe anumite subintervale $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ale lui *I* $(n \geq 2)$ a căror reuniune este *I* şi pentru care

$$\operatorname{Int}(I_j) \cap \operatorname{Int}(I_k) = \varnothing,$$

dacă $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \neq k$.

Se pune atunci întrebarea, cum să se "racordeze" primitivele găsite pe cele *n* subintervale astfel încât să se obțină o primitivă a lui *f*. În continuare dăm răspunsul la această întrebare în cazul în care *I* este reuniunea a două intervale fără puncte interioare comune.

1.1.19. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, a un punct interior lui I, $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție şi $F_1: J \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui $f\big|_J$, iar $F_2: K \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui $f\big|_K$, unde s-a notat*

$$J = (-\infty, a) \cap I \text{ și } K = [a, \infty) \cap I.$$

Atunci funcția $F: I \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) - F_1(a), & x \in I,\ x < a \\ F_2(x) - F_2(a), & x \in I,\ x \geq a \end{cases}$$

este o primitivă a lui f.

Demonstrație. Observăm că în fiecare punct $x \in I \setminus \{a\}$ funcția *F* este derivabilă şi $F'(x) = f(x)$. A rămas de cercetat dacă funcția *F* este derivabilă în *a*. Întrucât

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{F_1(x) - F_1(a) - 0}{x - a} = F_1'(a) = f(a),$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{F_2(x) - F_2(a) - 0}{x - a} = F_2'(a) = f(a),$$

deducem că funcția *F* este derivabilă în $x = a$ şi $F'(a) = f(a)$. În concluzie, funcția *F* este o primitivă a lui *f*.

1.1.20. Observație. Rezultatul anterior se poate extinde pentru cazul în care intervalul *I* se poate scrie ca o reuniune de *n* intervale distincte $(n \geq 2)$ având interioarele disjuncte două câte două.

Rezultatul următor ne dă modul de scriere a primitivei unei funcţii continue şi periodice, cunoscând o primitivă, a restricţiei funcţiei respective la un interval de lungime egal cu perioada funcţiei.

1.1.21. Teoremă. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie periodică având perioada* $T>0$, *a un număr real, iar* $F_0:[a,a+T]\to\mathbb{R}$ *o primitivă a lui* $f\Big|_{[a,a+T]}$. *Atunci funcţia* $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *, definită prin*
$F(x)=F_0(x-k\cdot T)+k(F_0(a+T)-F_0(a))$, $(\forall)\ x\in(a+kT,a+(k+1)T]$, $k\in\mathbb{Z}$, *este o primitivă a lui f.*

Demonstraţie. Fie x_0 un punct oarecare din $\mathbb{R}$, $x_0\in(a+kT,a+(k+1)T)$, $k\in\mathbb{Z}$. Atunci rezultă că *F* este derivabilă în x_0 şi

$$F'(x_0)=F_0'(x_0-kT)=f(x_0-kT)=f(x_0).$$

Dacă $x_0=a+(k+1)T$, $k\in\mathbb{Z}$, atunci

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{F_0(x-kT)-F_0(a+T)}{x-kT-(a+T)}=F_0'(a+T)=f(a+T)=f(x_0),$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{F_0(x-(k+1)T)-F_0(a)}{x-(k+1)T-a}=F_0'(x_0)=f(a)=f(x_0),$$

Deci şi în acest caz *F* este derivabilă în x_0, iar $F'(x_0)=f(x_0)$. Prin urmare, *F* este o primitivă a lui *f*.

1.1.22. Exemplu. Să se determine primitivele funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x},\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

Soluţie. Avem

$$f(x)=\frac{4}{(1-\cos 2x)^2+(1+\cos 2x)^2}=\frac{4}{2+2\cos^2(2x)}=\frac{2}{1+\cos^2 2x}=$$

$$=\frac{2}{1+\dfrac{1+\cos 4x}{2}}=\frac{4}{3+\cos 4x}.$$

Funcţia *f* este continuă pe $\mathbb{R}$ şi periodică cu perioada principală $T_0=\frac{\pi}{2}$.

Fie $f_0=f\Big|_{\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]}$ (restricţia lui f la $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$) şi notăm F_0 o primitivă a sa. Pentru $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ avem

$$\int \frac{4}{3+\cos 4x}dx = \int \frac{4}{3+\dfrac{1-\operatorname{tg}^2(2x)}{1+\operatorname{tg}^2(2x)}}dx = \int \frac{4(1+\operatorname{tg}^2 2x)}{4+2\operatorname{tg}^2 2x}dx = \int \frac{2(1+\operatorname{tg}^2 2x)}{2+\operatorname{tg}^2 2x}dx =$$

$$= \int \frac{(\operatorname{tg} 2x)'}{\operatorname{tg}^2 2x+2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right) + C \ .$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to -\frac{\pi}{4}\\ x>-\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-\pi\sqrt{2}}{4} \text{ şi } \lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{4}\\ x<\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4},$$

deducem că funcția $F_0 : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$,

$$F_0(x) = \begin{cases} \dfrac{-\pi\sqrt{2}}{4} & , \ x = -\dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right), & x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4} & , \ x = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

este o primitivă a funcției f_0. Cum *f* este periodică cu perioada $T_0 = \frac{\pi}{2}$, va rezulta că funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(x) = F_0\left(x - k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + k\cdot\left(F_0\left(\frac{\pi}{4}\right) - F_0\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right), \ (\forall)$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{-\pi}{4} + \frac{(k+1)\pi}{2}\right]$$

$k \in \mathbb{Z}$, este o primitivă a lui *f*. Obținem

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(2x-k\pi)}{\sqrt{2}}\right) + k\cdot\frac{2\pi\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(2x)}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\cdot k \ ,$$

$(\forall)\ x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{-\pi}{4} + \frac{(k+1)\pi}{2}\right], \ k \in \mathbb{Z}$ şi

$$\int f(x)dx = F + C \ .$$

1.1.23. Propoziție. Dacă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este primitivabilă şi aditivă, adică satisface ecuația funcțională a lui Cauchy,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R} \ ,$$

atunci $f(x)=k\cdot x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde $k\in\mathbb{R}$ este o constantă arbitrară.

Demonstrație. Fie F o primitivă pentru f şi (a_n) un şir de numere reale convergent către zero cu $a_n\neq 0$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$. În conformitate cu relația din ipoteză obținem:

$$f(x+a_n)-f(a_n)=f(x) \text{ pentru orice } x\in\mathbb{R} \text{ şi } n\in\mathbb{N}.$$

Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, funcția $G_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$G_n(x)=F(x+a_n)-x\cdot f(a_n)$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$G_n'(x)=F'(x+a_n)-f(a_n)=f(x+a_n)-f(a_n)=f(x)$$

oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. Cum funcțiile F şi G_n sunt primitive pentru funcția căutată f, rezultă că există constantele c_n astfel ca

$$F(x+a_n)-x\,f(a_n)=F(x)+c_n, \text{ pentru orice } x\in\mathbb{R} \text{ şi } n\in\mathbb{N},$$

din care pentru $x=0$ rezultă $c_n=F(a_n)-F(0)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Obținem

$$F(x+a_n)=x\,f(a_n)+F(x)+F(a_n)-F(0) \text{ pentru orice } x\in\mathbb{R} \text{ şi } n\in\mathbb{N}.$$

De aici, pentru $x=1$ rezultă

$$f(a_n)=F(1+a_n)-F(1)-F(a_n)+F(0),\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}.$$

Aşadar,

$$f(x)=F'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{F(x+a_n)-F(x)}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x\,f(a_n)+F(a_n)-F(0)}{a_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[x\frac{\left(F(1+a_n)-F(1)\right)}{a_n}+(1-x)\cdot\frac{F(a_n)-F(0)}{a_n}\right]=x\cdot F'(1)+(1-x)F'(0)=$$

$$=x\,f(1)+(1-x)\,f(0)=x\cdot f(1),$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$, căci punând $x=y=0$ în relația din ipoteză găsim $f(0)=0$. În concluzie, $f(x)=kx$, $k\in\mathbb{R}$.

1.2. Operații cu funcții primitivabile

1.2.1. Propoziție. Dacă funcțiile $f,g:J\to\mathbb{R}$ au primitive pe J şi $\lambda\in\mathbb{R}$, atunci funcțiile $f+g$, λf, $f-g$ au primitive pe J.

Demonstrație. Vezi Propoziția 1.1.14 din paragraful precedent.

1.2.2. Observație. Un rezultat similar nu este adevărat pentru produsul, câtul, compunerea (atunci când au sens) a două funcții care au primitive pe intervalul J. Vom da în continuare condiții suficiente pentru ca produsul a două funcții primitivabile să fie funcție primitivabilă.

1.2.3. Exemplu. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date prin

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{1}{x} - \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & , x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{1}{x} + \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & , x = 0 \end{cases}.$$

Să se arate că funcțiile f și g admit primitive pe $\mathbb{R}$, dar funcția $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție. Avem $f = f_1 - f_2$, $g = f_1 + f_2$, unde $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt date de

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin^2 \left(\dfrac{1}{x} \right), & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & , x = 0 \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Deoarece funcțiile f_1 și f_2 au primitive pe $\mathbb{R}$, deducem că f și g au primitive pe $\mathbb{R}$ ca diferență, respectiv sumă de funcții primitivabile. Avem

$$\left(\sin^2 \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) \left(\sin^2 \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right) = \sin^4 \frac{1}{x} - \sin^2 \frac{1}{x} = -\sin^2 \frac{1}{x} \cdot \cos^2 \frac{1}{x} =$$

$$= -\frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{2}{x} \right) \leq 0$$

și $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4} \sin^2 \left(\dfrac{2}{x} \right), & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{4} & , x = 0 \end{cases}$.

Funcția $f \cdot g$ nu are primitivă pe $\mathbb{R}$ deoarece nu are proprietatea lui Darboux.

1.2.4. Propoziție. Fie $f, g : J \to \mathbb{R}$, J interval, două funcții cu proprietățile

1) f admite primitive pe J;
2) g este derivabilă cu derivata continuă pe J.

Atunci funcția $f \cdot g$ admite primitive pe J.

Demonstrație. Fie funcția $u : J \to \mathbb{R}$ dată prin $u(x) = g(x) \cdot F(x)$, unde F este o primitivă a funcției f. Avem că u este derivabilă pe J și $u' = g \cdot f + g' \cdot F$, de unde $g \cdot f = u' - g' \cdot F$. Dar funcția u' are primitive (funcția u) și $g' \cdot F$ are primitive căci este continuă. Rezultă că $f \cdot g$ este primitivabilă ca și diferență de două funcții primitivabile.

1.2.5. Propoziție. Fie $f, g : J \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ interval, două funcții cu proprietățile:

1) *f* admite primitive pe *J*;
2) $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in J$;
3) *g* este continuă pe *J*.

Atunci funcția $f \cdot g$ admite primitive pe *J*.

Demonstrație. Fie $F : J \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției *f*. Din $F'(x) = f(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in J$ rezultă că funcția *F* este strict monotonă. Considerăm funcția $H : J \to F(J)$, dată prin $H(x) = F(x)$, $(\forall)\ x \in J$. Funcția *H* astfel definită este derivabilă, surjectivă, injectivă (fiind strict monotonă) şi $H'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in J$. Rezultă că funcția inversă $H^{-1} : F(J) \to J$ este derivabilă.

Funcția $g \circ H^{-1} : F(J) \to \mathbb{R}$ admite primitive, fiind funcție continuă. Fie $G : F(J) \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $g \circ H^{-1}$. Atunci, funcția $G \circ H : J \to \mathbb{R}$ este derivabilă fiind compunerea a două funcții derivabile. De asemenea

$$(G \circ H)'(x) = G'(H(x)) \cdot H'(x) = (g \circ H^{-1})(H(x)) \cdot H'(x) = g(x) \cdot f(x),\ (\forall)\ x \in J.$$

Prin urmare, funcția $G \circ H$ este o primitivă a funcției $f \cdot g$.

1.2.6. Teoremă (W. Wilkosz). *Fie* $f, g : J \to \mathbb{R}$, *J interval, două funcții cu proprietățile:*

1) *f admite primitive pe J*;
2) *f mărginită superior sau inferior*;
3) *g este continuă.*

Atunci funcția $f \cdot g$ *admite primitive.*

Demonstrație. Presupunem că *f* este mărginită inferior. Atunci există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) > m$, $(\forall)\ x \in J$. Considerăm funcția $h : J \to \mathbb{R}$ dată prin $h(x) = m$, $(\forall) x \in J$. Atunci funcția $f - h$ admite primitive şi nu se anulează pe *J*. Conform Propoziției 1.2.5 rezultă că funcția $(f - h) \cdot g$ admite primitive pe *J*. Deoarece $h \cdot g$ admite primitive fiind continuă, deducem că $f \cdot g$ are primitive pe *J*. Analog se procedează dacă *f* este mărginită superior.

1.2.7. Propoziție. Fie $f, g : J \to \mathbb{R}$, *J* interval din $\mathbb{R}$, două funcții cu proprietățile:

1) *f* admite primitive;
2) *g* este derivabilă şi cu derivata mărginită.

Atunci funcția $f \cdot g$ admite primitive pe *J*.

Demonstrație. Fie *F* o primitivă a funcției *f*. Atunci funcția $F \cdot g$ este derivabilă şi $(F \cdot g)' = f \cdot g + F \cdot g' \Leftrightarrow f \cdot g = (F \cdot g)' - F \cdot g'$.

Conform Propoziției 1.2.6, rezultă că funcția $F \cdot g'$ admite primitive. Prin urmare, $f \cdot g$ admite primitive.

1.2.8. Observație. Funcțiile din Exemplul 1.2.3 sunt primitivabile dar produsul lor nu mai este o funcție primitivabilă. Cele două funcții, din exemplul respectiv, au fost alese în aşa fel încât produsul lor să nu aibă proprietatea lui Darboux (deci să nu fie o funcție care are primitive). Se pune, în mod natural, problema primitivabilității câtului a două funcții primitivabile. Procedeul utilizat pentru alegerea funcțiilor din Exemplul 1.2.3 nu poate fi folosit şi pentru câtul a două funcții primitivabile, căci Jarnik [7] a stabilit următorul rezultat:

1.2.9. Teoremă. *Fie* $f, g : J \to \mathbb{R}$ *două funcții cu proprietățile*:

1) *f, g primitivabile pe J*;
2) $g(x) \neq 0$ *pentru orice* $x \in J$.

Atunci funcția $\dfrac{f}{g}$ *are proprietatea lui Darboux pe J.*

1.2.10. Observație. Există funcții primitivabile al căror cât nu este o funcție primitivabilă. Se poate arăta că funcția $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(0) = \dfrac{1}{2}$, iar pentru $x \neq 0$ graficul lui *g* este format din părți egale de triunghiuri isoscele de înălțime egală cu 1 construite pe segmentele $\left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$, $\left[-\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n+1}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$, are primitive pe $[-1,1]$. Pe de altă parte, pentru $a > 0$, funcția $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{a+g(x)}, & x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ \dfrac{2a}{a+1}, & x = 0 \end{cases}$, unde *g* este funcția anterioară, este cât a două funcții primitivabile, dar *f* nu este o funcție primitivabilă.

1.2.11. Propoziție. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : J \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ interval, două funcții cu proprietățile:

1) *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$;
2) *g* este de două ori derivabilă cu g'' continuă pe *J*;
3) $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in J$.

Atunci funcția $f \circ g$ admite primitive.

Demonstrație. Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției *f*. Atunci funcția $F \circ g$ este derivabilă pe *J* şi $(F \circ g)' = (f \circ g) \cdot g'$. De aici rezultă că $f \circ g = \dfrac{1}{g'} \cdot (F \circ g)'$. Deoarece funcția $(F \circ g)'$ este primitivabilă iar funcția $\dfrac{1}{g'}$

este derivabilă şi cu derivata continuă, folosind Propoziţia 1.2.4 deducem că $f \circ g$ admite primitive pe *J*.

1.3. Clase de funcţii discontinue primitivabile

1.3.1. Propoziţie. Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este continuă şi satisface condiţia $\lim\limits_{|y|\to\infty}\dfrac{F(y)}{y}\overset{\text{not.}}{=}M(f)\in\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$ fixat şi *F* este o primitivă pentru *f*, atunci funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right), & x\neq x_0 \\ M(f)\ , & x=x_0\end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Deoarece *f* este continuă pe $\mathbb{R}$, ea admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie *F* o primitivă pentru *f* ce se anulează în x_0. Integrând prin părţi pe un interval *J* ce nu conţine punctul x_0, obţinem:

$$\int f\left(\frac{1}{x-x_0}\right)dx=-\int\left(F\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)'(x-x_0)^2\,dx=-F\left(\frac{1}{x-x_0}\right)(x-x_0)^2+$$
$$+\int 2\cdot F\left(\frac{1}{x-x_0}\right)(x-x_0)\,dx\,.$$

de unde

$$g(x)=\left(-F\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\cdot(x-x_0)^2\right)'+2F\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\cdot(x-x_0),\ (\forall)\ x\in J\,. \qquad (1)$$

Deoarece

$$\lim_{x\to x_0}F\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\cdot 2(x-x_0)=\lim_{\alpha\to 0}F\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot 2\alpha=\lim_{|y|\to\infty}F(y)\cdot\frac{2}{y}\overset{\text{ip.}}{=}2\cdot M(f)\,,$$

rezultă că funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\begin{cases}2(x-x_0)\cdot F\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right), & x\neq x_0\\ 2\cdot M(f) & , x=x_0\end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ deci primitivabilă. Fie *H* o primitivă pentru *h*. Considerăm funcţia $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $u(x)=\begin{cases}\left(-F\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\cdot(x-x_0)^2\right)', & x\neq x_0\\ -M(f) & , x=x_0\end{cases}$.

Funcția $\mathcal{U}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{U}(x)=\begin{cases}-(x-x_0)^2\cdot F\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right), & x\neq x_0\\ 0 & , x=x_0\end{cases}$ este o primitivă pentru *u*. Într-adevăr, pentru $x\neq x_0$ avem $\mathcal{U}'(x)=u(x)$, iar în $x=x_0$ avem

$$\mathcal{U}'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\mathcal{U}(x)-\mathcal{U}(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-(x-x_0)^2F\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)}{x-x_0}=-\lim_{\alpha\to 0}\alpha\cdot F\left(\frac{1}{\alpha}\right)=$$

$$=-\lim_{|y|\to\infty}\frac{F(y)}{y}=-M(f)=u(x_0).$$

Din (1) rezultă $g=u+h$ şi de aici obținem că *g* are primitive ca şi sumă de funcții primitivabile.

1.3.2. Consecințe. a) Fie $x_0\in\mathbb{R}$ şi funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă. Dacă există $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{F(y)}{y}\overset{\text{not.}}{=}M(f)\in\mathbb{R}$, unde *F* este o primitivă pentru *f*, atunci funcția

$g:[x_0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right), & x>x_0\\ M(f), & x=x_0\end{cases}$ admite primitive pe $[x_0,\infty)$.

b) Fie $x_0\in\mathbb{R}$ şi funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă. Dacă există $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{F(y)}{y}\overset{\text{not.}}{=}M(f)\in\mathbb{R}$, unde *F* este o primitivă pentru *f*, atunci funcția

$g:(\infty,x_0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right), & x<x_0\\ M(f), & x=x_0\end{cases}$ admite primitive pe $(\infty,x_0]$.

1.3.3. Exemplu. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție. Fie funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=x\cdot\sin(x^2)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$. Funcția *h* este continuă pe $\mathbb{R}$, iar $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $H(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(x^2)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$, este o primitivă pentru *h*. Cum

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{H(y)}{y}=\lim_{|y|\to\infty}\frac{-\cos(y^2)}{2y}=0,$$

folosind Propoziția 1.3.1, cu $x_0=0$, rezultă că *f* are primitive pe $\mathbb{R}$.

1.3.4. Propoziție. Fie $f:J\to\mathbb{R}$ şi $g:J\to\mathbb{R}$ ($J\subset\mathbb{R}$ interval) două funcții derivabile, *f* având derivata mărginită. Avem:

a) Dacă $f(x)\neq 0$, pentru orice $x\in J$, atunci funcția $f'\cdot\left(g'\circ\frac{1}{f}\right)$ admite primitive.

b) Dacă $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=0$ şi mulțimea $A=\{x\in J\,|\,f(x)=0\}$ este nevidă şi finită, atunci funcție $h_\lambda:J\to\mathbb{R}$,

$$h_\lambda(x)=\begin{cases} f'(x)\cdot g'\left(\dfrac{1}{f(x)}\right), & x\in J\setminus A\\ \lambda &, x\in A\end{cases},\ \text{unde } \lambda\in\mathbb{R},$$

admite primitive dacă şi numai dacă $\lambda=0$.

Demonstrație. a) Funcția $f^2\cdot\left(g\circ\frac{1}{f}\right)$ este derivabilă pe *J* şi

$$\left(f^2\cdot\left(g\circ\frac{1}{f}\right)\right)'=2f\cdot f'\cdot\left(g\circ\frac{1}{f}\right)-f^2\cdot f'\cdot\left(g'\circ\frac{1}{f}\right)\cdot\frac{1}{f^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'\cdot\left(g'\circ\frac{1}{f}\right)=2f\cdot f'\cdot\left(g\circ\frac{1}{f}\right)-\left(f^2\cdot\left(g\circ\frac{1}{f}\right)\right)'.$$

Funcția $2f\cdot f'\cdot\left(g\circ\frac{1}{f}\right)$ admite primitive conform teoremei lui Wilkosz. Rezultă că funcția $f'\cdot\left(g'\circ\frac{1}{f}\right)$ admite primitive, fiind o combinație liniară de funcții care admit primitive.

b) Avem $h_\lambda=h_0+u_\lambda$, unde $u_\lambda:J\to\mathbb{R}$, $u_\lambda(x)=\begin{cases}0, & x\in J\setminus A\\ \lambda, & x\in A\end{cases}$. Dacă vom demonstra că h_0 admite primitive, atunci va rezulta că h_λ admite primitive dacă şi numai dacă u_λ admite primitive, adică dacă şi numai dacă $\lambda=0$.

Fie funcția $H : J \to \mathbb{R}$, $H(x) = \begin{cases} f^2(x) \cdot g\left(\dfrac{1}{f(x)}\right), & x \in J \setminus A \\ 0 & , x \in A. \end{cases}$ Funcția H este evident derivabilă pe $J \setminus A$ şi

$$H'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) \cdot g\left(\frac{1}{f(x)}\right) - f'(x) \cdot g'\left(\frac{1}{f(x)}\right),$$

pentru orice $x \in J \setminus A$.

Fie $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ elementele mulțimii A. Atunci, avem:

$$\lim_{x \to a_i} \frac{H(x) - H(a_i)}{x - a_i} = \lim_{x \to a_i} \frac{f^2(x) \cdot g\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)}{x - a_i} = \lim_{x \to a_i} \frac{f(x) - f(a_i)}{x - a_i} \cdot f(x) \cdot g\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 0$$

pentru orice $i = \overline{1, n}$. Prin urmare, H este derivabilă pe J şi

$$H'(x) = \begin{cases} 2f(x) \cdot f'(x) \cdot g\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) - h_p(x), & x \in J \setminus A \\ 0 & , x \in A \end{cases}$$

Considerăm funcția $G : J \to \mathbb{R}$, dată prin:

$$G(x) = \begin{cases} 2f(x) \cdot f'(x) \cdot g\left(\dfrac{1}{f(x)}\right), & x \in J \setminus A \\ 0 & , x \in A \end{cases}$$

Atunci, avem relația

$$H' = G - h_0 \Leftrightarrow h_0 = G - H'.$$

Funcția G este continuă în a_i pentru orice $i = \overline{1, n}$. Conform teoremei lui Wilkosz, restricția funcției G la orice interval $J' \subset J$ şi care nu conține nici unul din punctele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ admite primitive. Aplicând de un număr finit de ori Teorema 1.1.15, rezultă că funcție G admite primitive. Prin urmare, $h_0 = G + H'$ admite primitive şi Propoziția este demonstrată.

1.3.5. Propoziție. Fie $f : J \to \mathbb{R}$ şi $g : J \to \mathbb{R}$ (J interval) două funcții derivabile, f cu derivata continuă, mulțimea $A = \{x \in J \mid f(x) = 0\}$ este nevidă şi finită, iar $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$. Pentru fiecare $\lambda \in \mathbb{R}$ se consideră funcția $h_\lambda : J \to \mathbb{R}$, dată prin

$$h_\lambda(x)=\begin{cases} f'(x)\cdot g'\left(\dfrac{1}{f(x)}\right), & x\in J\setminus A \\ \lambda \quad , & x\in A \end{cases}.$$

Atunci, funcția h_λ admite primitive dacă şi numai dacă $\lambda=0$.

Demonstrație. Procedând ca în demonstrația Propoziției 1.3.4, se obține relația

$$h_\lambda = G - H' + u_\lambda,$$

unde G, H, u_λ sunt funcțiile introduse în Propoziția 1.3.4. Funcția G admite primitive fiind continuă. Atunci rezultă că h_λ admite primitive $\Leftrightarrow$ u_λ admite primitive $\Leftrightarrow$ $\lambda=0$.

1.3.6. Exemplu. Fie funcția $h_p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h_p(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\alpha}{x}, & x\neq 0\\ p\ , & x=0\end{cases}$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$ şi $p\in\mathbb{R}$. Să se arate că h_p admite primitive dacă şi numai dacă $p=0$.

Soluție. Pentru $\alpha=0$ concluzia rezultă imediat. Fie în continuare $\alpha\neq 0$. Pentru funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date prin $f(x)=\dfrac{x}{\alpha}$ şi $g(x)=-\cos x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, se poate aplica Propoziția 1.3.5 cu $A=\{0\}$. Facem precizarea că se poate da o altă soluție acestei probleme utilizând integrarea prin părți.

1.3.7. Exemplu. Fie funcția $h_p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h_p(x)=\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\alpha}{x}\right), & x\neq 0\\ p\ , & x=0\end{cases}$, unde $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Atunci h_p are primitive $\Leftrightarrow p=0$.

Soluție. Se aplică Propoziția 1.3.5, pentru funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\alpha}$ şi $g(x)=\sin x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Bibliografie

1. **D. Andrica,** *Asupra unei clase largi de funcții primitivabile*, G.M. (serie metodică) 6/1989, pag. 214-220 şi 4/1986, pag. 169-176

2. **Bătinețu – Giurgiu D.M., şi alții,** *Probleme date la Olimpiadele de matematică pentru licee*, Editura Ştiințifică, Bucureşti 1992
3. **V. Berinde,** *O clasă de funcții discontinue primitivabile*, G.M. 6/1989, pag. 214-220
4. **Gh. Boroica,** *Lucrare metodico-ştiințifică pentru obținerea gradului didactic I cu tema: Primitive. Primitive generalizate. Calcul de primitive*, Baia Mare, 1996
5. **W.W., Breckner,** *Observații privind calculul primitivelor*, Univ. Babeş-Bolyai Cluj-Napoca, Lucrările Seminarului de Didactica Matematicii, vol.6, pag. 81-96 (1991)
6. **I.L. Dinulescu şi Gh. Nedelea,** *Tratarea unitară a unor probleme privind existența primitivelor unor funcții*, G.M. 8/1995
7. **M. Ganga,** *Teme şi probleme de matematică*, Editura Tehnică, pag. 166-198
8. **I. Muntean,** *Primitive şi primitive generalizate*, Lucrările Seminarului de Didactica Matematicii, 2(1986), pag. 129-152
9. **L. Petracovici,** *În legătură cu existența primitivelor unor funcții uzuale*, Univ. de Nord Baia Mare, Lucrările Seminarului de Creativitate Matematică, vol. I (1991-1992), pag. 139-144
10. **V. Postolică,** *Utilizarea primitivelor în rezolvarea unor ecuații funcționale*, Lucrările Seminarului de Didactica Matematicii, 8(1992), pag. 139-144
11. **D. Săvulescu şi alții,** *Culegere de probleme date la concursurile interjudețene Spiru Haret-Gh. Vrânceanu*, 1985-1993
12. **G. Sirețchi,** *Calcul diferențial şi integral*, vol.2, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1985, pag. 260-267
13. *** * *,** Gazeta Matematică, 1975-2003
14. *** * *,** Revista Matematică de Timişoara, 1990-2003
15. *** * *,** Revista de Matematică Dan Barbilian, 1(1995), Editura Paralela 45
16. *** * *,** Revista de Matematică Argument, 1999-2003
17. *** * *,** Revista de Matematică din Suceava, 2(1992)

Probleme rezolvate

R1.4.1. Fie a un număr real, iar $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x)=\begin{cases} a & , \ x=0 \\ \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x\in(0,\infty). \end{cases}$$

Să se arate că f nu admite primitive pe $[0,\infty)$.

Soluție. Funcția $f_0=f\Big|_{(0,\infty)}$, fiind continuă admite primitive, pe care le putem determina utilizând formula de integrare prin părți:

$$\int f_0(x)\,dx=\int x'\cdot\sin\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx=x\sin\frac{1}{x}+\int\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx=$$

$$=x\cdot\sin\frac{1}{x}+C\ .$$

În particular, funcția $F_0:(o,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin

$$F_0(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}\text{, pentru orice } x\in(0,\infty),$$

este o primitivă a lui f_0. Observăm că $\lim\limits_{x\to0}F_0(x)=0$. Dacă f ar admite primitive, atunci funcția $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin

$$F(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\in(0,\infty) \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$$

ar fi în baza afirmației a) din Teorema 1.1.15 o primitivă a lui f. Dar, această concluzie este falsă, căci se vede imediat că funcția F nu este derivabilă în $x=0$ deoarece

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sin\frac{1}{x},$$

care nu există. Prin urmare, f nu admite primitive.

R1.4.2. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă cu derivata continuă, demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $g(x)=\begin{cases} f(x)\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$ admite primitive.

Soluție. Metoda I. Avem:

$$g(x)=\begin{cases}\left(f(x)-f(0)\right)\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}+\begin{cases}f(0)\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}=u(x)+f(0)\cdot v(x),$$

unde u este continuă pe $\mathbb{R}$ şi deci, posedă primitive, iar v are primitive în conformitate cu Exemplul 1.1.7.

Deducem că g are primitive pe $\mathbb{R}$ căci g se obține ca şi o combinație liniară de funcții primitivabile.

Metoda a II-a. Notăm $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $u(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$ şi avem $g=f\cdot u$. Deoarece f este continuă iar u este primitivabilă şi mărginită, în conformitate cu Propoziția 1.2.6 deducem că funcția g are primitive pe $\mathbb{R}$.

Metoda a III-a. Funcția u de la metoda anterioară este primitivabilă iar f este derivabilă având derivata continuă. În conformitate cu Propoziția 1.2.4 deducem că funcția $g=f\cdot u$ are primitive pe $\mathbb{R}$.

Să observăm că era suficient ca funcția f să fie continuă.

R1.4.3. Se dau funcțiile $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)\cdot\sin x$ şi $h(x)=f(x)\cdot\cos x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. să se arate că dacă funcțiile g şi h au primitive pe $\mathbb{R}$, atunci f are primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție. Fie funcțiile $u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date prin $u(x)=\sin x\cdot g(x)$, $v(x)=\cos x\cdot h(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Utilizând propoziția 1.2.4 deducem că funcțiile u şi v au primitive pe $\mathbb{R}$. Dar

$$u(x)+v(x)=f(x)\cdot\sin^2 x+f(x)\cdot\cos^2(x)=f(x),\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

Deducem că f este primitivabilă ca şi sumă de funcții primitivabile.

R1.4.4. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin

$$f(x)=\begin{cases}\cos\left(\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{x^2+1}}\right), & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases},$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție. Fie funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$. Funcția g admite primitive pe $\mathbb{R}$. Avem $f(x)=g(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Fie $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției g, iar funcția $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin

$H(x)=\sqrt{1+x^2}\cdot G(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Avem că H este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi derivata sa este

$$H'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot G(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))+\sqrt{x^2+1}\cdot g(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot G(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))+f(x) \text{ pentru orice } x\in\mathbb{R}.$$

Rezultă că $f(x)=H(x)-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot G(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi deducem că *f* admite primitive ca diferenţă de două funcţii care admit primitive (prima funcţie are primitivă pe *H* în timp ce a doua funcţie este primitivabilă fiind continuă).

R1.4.5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie monotonă cu proprietatea că f^2 are primitive pe $\mathbb{R}$.

a) Să se arate că f^4 are primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Daţi un exemplu de o funcţie *f* cu proprietatea de mai sus pentru care f^3 nu are primitive.

Soluţie. a) Deoarece *f* este monotonă rezultă că *f* poate avea numai discontinuităţi de speţa I şi, de aici obţinem că $f^2=f\cdot f$ poate avea doar discontinuităţi de speţa I. Cum f^2 are primitive, rezultă că f^2 are proprietatea lui Darboux. Dacă am presupune că f^2 are cel puţin un punct de discontinuitate de speţa I, conform Propoziţiei 1.1.12 ar rezulta că f^2 nu admite primitive, contradicţie. Rămâne f^2 continuă pe $\mathbb{R}$. De aici $f^4=f^2\cdot f^2$ este continuă, ca urmare f^4 are primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ -1, & x\ge 0\end{cases}$. Avem *f* descrescătoare, $f^2=1$ şi o primitivă pentru funcţia f^2 este funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$. Dar funcţia $f^3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este dată prin

$$f^3(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ -1, & x\ge 0\end{cases}$$

şi aceasta nu are proprietatea lui Darboux pentru că $f^3(\mathbb{R})=\{-1,1\}$ care nu este interval. Ca urmare, f^3, nu admite primitive.

R1.4.6. Să se arate că oricare ar fi $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^*$, funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.

Soluție. Fie funcțiile $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_i(x)=\begin{cases}|x-a_i|\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$ unde $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Deoarece $f_i(x)=g(x)\cdot h(x)$, unde $g(x)=|x-a_i|$ este continuă pe $\mathbb{R}$ și $h(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$ are primitive pe $\mathbb{R}$ și este mărginită, deducem în conformitate cu Teorema 1.2.6 că funcția f_i are primitive pe $\mathbb{R}$. Cum $f=f_1+f_2+\ldots+f_n$, rezultă că *f* are primitive pe $\mathbb{R}$, deci *f* are proprietatea lui Darboux.

R1.4.7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție injectivă. Dacă funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\sin(f(x))$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$, are primitive pe $\mathbb{R}$, să se arate că *f* are primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție. Funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=x+\sin x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$, este continuă și bijectivă. Deoarece funcția *f* este injectivă rezultă că $g=h\circ f$ este injectivă și cum *g* are primitivă pe $\mathbb{R}$, deducem că *g* are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. Rezultă că *g* este strict monotonă și continuă. Din *h* continuă și bijectivă, iar *g* continuă, rezultă $f=h^{-1}\circ g$ este continuă, deci *f* are primitive pe $\mathbb{R}$.

R1.4.8. Să se determine toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ care satisfac ecuația funcțională $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)\cdot f(y)}$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$ știind că funcția compusă $\ln\circ f$ are primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție. Deoarece $f>0$ putem logaritma relația din ipoteză și obținem

$$\ln f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln f(x)+\frac{1}{2}\ln f(y)\ \text{pentru orice}\ x,y\in\mathbb{R},$$

de unde notând $\varphi(x)=\ln f(x)$ avem:

$$2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)=\varphi(x)+\varphi(y)\ \text{pentru orice}\ x,y\in\mathbb{R}.$$

Punem $y=0$ în relația precedentă și obținem

$$2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)=\varphi(x)+\varphi(0) \text{ pentru orice } x\in\mathbb{R}.$$

Folosim ultimele două relații şi obținem

$$\varphi(x+y)=2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)-\varphi(0)=\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi(0),\ (\forall)\ x,y\in\mathbb{R},$$

sau notând $u(x)=\varphi(x)-\varphi(0)$ avem

$$u(x+y)=u(x)+u(y) \text{ pentru orice } x,y\in\mathbb{R}.$$

Cum funcția u este primitivabilă ca şi diferență de două funcții primitivabilă, utilizând Propoziția 1.1.23 găsim $u(x)=kx$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ cu $k\in\mathbb{R}$ arbitrar. În sfârşit, $\varphi(x)=k\cdot x+\varphi(0)$ şi $f(x)=e^{k\cdot x+\varphi(0)}$, de unde $f(x)=c\cdot e^{k\cdot x}$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$, $c>0$ şi $k\in\mathbb{R}$ constante arbitrare.

R1.4.9. Să se calculeze o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dată prin $f(x)=\sqrt{1-\sin x}$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

Soluție. Funcția f fiind continuă pe $\mathbb{R}$, admite primitivă. Ea este periodică, cu perioada principală $T=2\pi$. Pentru $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$,

$$f(x)=\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}=\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$$

şi

$$F_0(x)=-2\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}$$

este o primitivă a restricției $f\Big|_{\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]}$. Aplicând Teorema 1.1.21 rezultă că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$F(x)=F_0(x-2k\pi)+k\left(F_0\left(\frac{5\pi}{2}\right)-F_0\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

pentru orice $x\in\left((4k+1)\frac{\pi}{2},(4k+5)\frac{\pi}{2}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$, este o primitivă a lui *f*.

Deoarece $F_0\left(\frac{5\pi}{2}\right)-F_0\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\sqrt{2}$ şi $\cos(k\pi)=(-1)^k$, $k\in\mathbb{Z}$, obținem că

$$F(x)=2\cdot(-1)^{k+1}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)+4k\sqrt{2},$$

pentru orice $x\in\left((4k+1)\frac{\pi}{2},(4k+5)\frac{\pi}{2}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$ este o primitivă pentru *f*.

R1.4.10. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\left[\cos\left(\frac{1}{x-5}\right)-\frac{2}{(x-5)}\cdot\sin\left(\frac{1}{x-5}\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{(x-5)^2}}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{5\}\\ 0, & x=5\end{cases}$$

are primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție. Fie funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(\cos x-2x\cdot\sin x)\cdot e^{-x^2}$. Funcția *g* este continuă pe $\mathbb{R}$ iar $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=\sin x\cdot e^{-x^2}$ este o primitivă a lui *g*. Deoarece $M(g)=\lim\limits_{|y|\to\infty}\frac{G(y)}{y}=\lim\limits_{|y|\to\infty}\frac{\sin y}{y\cdot e^{y^2}}=0$, utilizând Propoziția 1.3.1 deducem că funcția *f* are primitive pe $\mathbb{R}$.

R1.4.11. Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=0.$$

Să se arate că funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\begin{cases}g'\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ admite primitive.

Soluție. Se aplică Propoziția 1.3.5 pentru funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de problemă.

R1.4.12. Fie $p\in\mathbb{R}$. Funcția $h_p:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ dată prin

$$h_p(x)=\begin{cases}(\cos^n x)\cdot\cos\left(\frac{1}{\sin x}\right), & x\in(-\pi,\pi)\setminus\{0\}\\ p, & x=0\end{cases},\ n\in\mathbb{N}^*,$$

admite primitive dacă şi numai dacă $p=0$.

Soluție. Avem $h_p=h_0+v$, unde $v(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\pi,\pi)\setminus\{0\}\\ p, & x=0\end{cases}$.

Vom arăta că h_0 admite primitive, de unde va rezulta că h_p admite primitive $\Leftrightarrow p=0$.

Aplicând Propoziția 1.3.5 pentru funcțiile $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sin x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$, rezultă că pentru $n=1$ funcția h_0 admite primitive.

Pentru $n\geq 2$ avem $h_0=r\cdot t$, unde $r,t:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ sunt date prin

$$r(x)=\begin{cases}\cos x\cdot\cos\left(\dfrac{1}{\sin x}\right), & x\in(-\pi,\pi)\setminus\{0\}\\ 0 & , x=0\end{cases} \text{ şi } v(x)=\cos^{n-1}x,\ (\forall)\ x\in(-\pi,\pi).$$

Cum r admite primitive iar g este derivabilă cu derivata continuă pe $(-\pi,\pi)$, va rezulta că $h_0=r\cdot t$ este primitivabilă şi pentru $n\geq 2$.

2. Metode de calcul al primitivelor

2.1. Aspecte teoretice

În acest paragraf vom reaminti metoda integrării prin părți, "prima metodă de schimbare de variabilă" şi vom prezenta pe scurt "a doua metodă de schimbare de variabilă" care nu este prevăzută în programa analitică a clasei a XII-a. Vom remarca faptul că în realitate avem o singură formulă de schimbare de variabilă, denumirile de prima şi a doua formulă fiind pur convenționale.

2.1.1. Teoremă (integrarea prin părți). Fie I un interval, $I \subseteq \mathbf{R}$, $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcții derivabile, cu derivate continue pe I, atunci funcțiile fg, $f'g$ şi fg' admit primitive şi ele sunt legate prin relația:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx .$$

2.1.2. Teoremă (prima metodă de schimbare de variabilă). Fie I,J intervale din $\mathbf{R}$ şi fie $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ două funcții cu proprietățile:

Ia) φ este derivabilă pe I

Ib) f admite primitive (fie F o primitivă a sa).

Atunci funcțiile $(f \circ \varphi)\varphi'$ admite primitive, iar funcția $F \circ \varphi$ este o primitivă a sa, adică

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = (F \circ \varphi)(x) + C .$$

În practică ea se utilizează sub forma:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} + C .$$

La prima metodă de schimbare de variabilă se caută să se pună funcția de integrat, h, sub forma $h(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ şi o primitivă H a lui h se obține compunând o primitivă F a lui f cu funcția φ, deci $H = F \circ \varphi$.

Există situații când este mai uşor de găsit o primitivă a funcției $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ decât o primitivă a funcției f.

La a doua metodă de schimbare de variabilă se cunoaşte o primitivă H a funcției $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ şi se cere să se găsească o primitivă a funcției f. F se obține din H astfel:

$$F = H \circ \varphi^{-1} .$$

2.1.3. Teoremă (a doua metodă de schimbare de variabilă). Fie I,J intervale din $\mathbf{R}$ şi fie $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ două funcții cu proprietățile:

IIa) φ bijectivă, derivabilă, cu derivata nenulă pe I

IIb) funcția $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ admite primitive (fie H o primitivă a sa).

Atunci funcția *f* admite primitive, iar funcția $H \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă a sa, adică

$$\int f(x)dx = (H \circ \varphi^{-1})(x) + C$$

Demonstrație. Funcția *H* fiind o primitivă a lui *h* este derivabilă şi

$$H' = h = (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Însă din ipoteza IIa) rezultă că funcția inversă φ^{-1} este derivabilă pe *J*, deci $H \circ \varphi^{-1}$ este derivabilă pe *J* şi

$$\begin{aligned}(H \circ \varphi^{-1})(x) &= H'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = \\ &= (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x))\varphi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = \\ &= f(x)\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x), (\forall)\ x \in J\end{aligned}$$

Aşadar, funcția $H \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă a lui *f*.

În practică ea se utilizează sub forma:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi'(x)} + C$$

2.1.4. Observație. Fie *f* şi φ două funcții $\varphi: I \to J$, $f: J \to \mathbf{R}$ cu proprietățile:

a) φ bijectivă, derivabilă cu derivata continuă şi nenulă pe *I*

b) *f* continuă pe *J*.

Ipotezele a) şi b) implică atât ipotezele Ia) şi Ib) din prima metodă de schimbare de variabilă, cât şi ipotezele IIa) şi IIb) din a doua metodă de schimbare de variabilă. În acest caz, pentru o funcție $F: J \to \mathbf{R}$ are loc echivalența:

F este o primitivă a lui $f \Leftrightarrow F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi)\varphi'$

Cu alte cuvinte în ipotezele a) şi b) cele două metode de schimbare de variabilă sunt echivalente, deci în realitate avem o singură formulă de schimbare de variabilă, denumirile de prima formulă şi a doua formulă sunt pur convenționale. Există însă mai multe variante de aplicare a ei care depind de expresia particulară a funcției de integrat şi de experiența celui care aplică formula.

2.1.5. Exemple. Să se calculeze:

a) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx, x \in \mathbf{R}$; b) $\int \sqrt{\frac{2+x}{3-x}}dx, x \in (-2,3)$.

Soluție. a) Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ este continuă. Luăm funcția $\varphi: (0,\infty) \to \mathbf{R}$, $\varphi(t) = \ln t$, φ este bijectivă, derivabilă, $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$ cu

$\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in (0,\infty)$. Căutăm o primitivă a funcției $h(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = \dfrac{t}{1+t}$.

Avem $\int h(t)dt = t - \ln(1+t) + C$. Notând cu $H(t) = t - \ln(1+t)$ primitiva lui *h*, rezultă în baza teoremei 2.1.3

$$\int f(x)dx = (H \circ \varphi^{-1})(x) + C = e^x - \ln(1+e^x) + C.$$

b) Notăm $\sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}} = t \Rightarrow x = \dfrac{3t^2-2}{t^2+1} = \varphi(t), \varphi:(0,\infty) \to (-2,3)$.

φ este bijectivă, derivabilă $\varphi'(t) = \dfrac{10t}{(t^2+1)^2}$, $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in (0,\infty)$.

Căutăm o primitivă a funcției $h(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = \dfrac{10t^2}{(t^2+1)^2}$.

Avem $\int h(t)dt = \dfrac{-5t}{(t^2+1)} + 5\text{arctg}t + C$ (se aplică formula de integrare prin părți), rezultă în baza teoremei 2.1.3

$$\int f(x)dx = -5\sqrt{6+x-x^2} + 5\text{arctg}\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} + C.$$

2.2. Calculul primitivelor unor funcții iraționale

2.2.1. Calculul primitivelor de forma $\int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, ..., \sqrt[n_k]{ax+b})dx$, unde R este o funcție rațională de *k*+1 variabile, $n_i \in \mathbf{N}^*, n_i \geq 2, i = \overline{1,k}$.

Fie *n* cel mai mic multiplu comun al numerelor $n_1, ..., n_k$. Atunci $(\forall) i = \overline{1,k}, (\exists) m_i \in \mathbf{N}$ astfel încât $n = n_i m_i$. Se face substituția $t = \sqrt[n]{ax+b}$.

Atunci $\sqrt[n_i]{ax+b} = \sqrt[n]{(ax+b)^{m_i}} = t^{m_i}$, $x = \dfrac{t^n - b}{a}$ şi $dx = \dfrac{n}{a}t^{n-1}dt$.

Prin urmare primitiva dată devine:

$$\int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t^{m_1}, ..., t^{m_k}\right)\frac{n}{a}t^{n-1}dt = \int R_1(t)dt,$$

unde R_1 este o funcție rațională în variabila *t*.

R2.2.1. Calculați $\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}}dx, x>0$.

Soluție. Se face substituția $t=\sqrt[6]{x+1}$. Obținem $x=t^6-1$, $dx=6t^5dt$, deci

$$F(t)=\int \frac{1+t^3}{1-t^2}\cdot 6t^5dt=6\int \frac{1-t+t^2}{1-t}t^5dt=6\int t^5dt+6\int \frac{t^7}{1-t}dt=$$
$$=t^6+6\left[\frac{1}{7}t^7+\frac{1}{6}t^6+\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+t+\ln(t-1)\right]+C.$$

Înlocuim mai departe t cu $\sqrt[6]{x+1}$.

2.2.2. Calculul primitivelor de forma $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, unde R este o funcție rațională de două variabile, $n\in\mathbf{N}^*, n\geq 2$.

Se face substituția $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ care conduce la primitiva dintr-o funcție rațională în t.

R2.2.2. Calculați $\int \frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx, x\in(0,2)$.

Soluție. Se face substituția $\sqrt{\frac{x}{2-x}}=t$, obținem $x=\frac{2t^2}{t^2+1}$, $dx=\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$. Avem

$$F(t)=\int \frac{4t^2}{(3t^2+1)(t^2+1)}dt,\quad \frac{4t^2}{(3t^2+1)(t^2+1)}=\frac{At+B}{3t^2+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1},$$

de unde $A=C=0, B=-2, D=2$.

Deci $F(t)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}t)+2\operatorname{arctg}t+C$, și înlocuind t cu $\sqrt{\frac{x}{2-x}}$ obținem

$$\int \frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3x}{2-x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2-x}}+C.$$

2.2.3. Calculul primitivelor de forma $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$, unde R este o funcție rațională de două variabile.

Metoda I. Calculul acestor integrale se reduce la calculul unor integrale din funcții raționale folosind niște substituții adecvate numite **substituțiile lui Euler**. Se deosebesc următoarele substituții:

(E1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$, dacă $a>0$. Semnul (+) sau (-) se alege în aşa fel încât să fie îndeplinite condițiile cerute la schimbarea de variabilă.

(E2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$, dacă $c\geq 0$.

(E3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_0)$, dacă $\Delta>0$, unde am notat cu x_0 o rădăcină a ecuației: $ax^2+bx+c=0$.

Observație. (i) Dacă $\Delta=0$ expresia de sub radical este un pătrat perfect şi funcția de integrat este rațională.

(ii) Deoarece prin ridicare la pătrat în toate cele trei cazuri obținem $x=R_1(t)$, $dx=R_1'(t)dt$ şi cum $\sqrt{ax^2+bx+c}=R_2(t)$, unde R_1 şi R_2 sunt funcții raționale, deducem că integrala se reduce la calculul primitivelor unei funcții raționale.

Metoda II. Se aduce trinomul ax^2+bx+c la forma canonică:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}$$

şi făcând substituția $t=x+\dfrac{b}{2a}$, integrala se aduce sub forma:

(1) $\int R(t,\sqrt{t^2+m^2})dt$ (2) $\int R(t,\sqrt{t^2-m^2})dt$

(3) $\int R(t,\sqrt{m^2-t^2})dt$ care se calculează folosind următoarele schimbări de variabilă:

(1) $t=m\operatorname{tg}u$ sau $t=m\operatorname{sh}u$

(2) $t=\dfrac{m}{\cos u}$ sau $t=m\operatorname{ch}u$

(3) $t=m\sin u$ sau $t=m\operatorname{th}u$

şi se ajunge la calculul primitivelor unei funcții trigonometrice sau hiperbolice (vezi 2.3).

R2.2.3. Calculați:

a) $\int \dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}dx,\ x\in\mathbf{R}$; b) $\int \dfrac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-x+1}},\ x\in(2,\infty)$,

c) $\int \dfrac{x^2}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}dx,\ x\in(1,\infty)$.

Soluţie. a) Se face substituţia (E1) $\sqrt{x^2+x+1}=-x+t$, de unde $x=\dfrac{t^2-1}{2t+1}$, $dx=\dfrac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt$. Avem

$$F(t)=\int \frac{2t(t^2+t+1)}{(t+1)(2t+1)^2}dt=\int\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{4t^2+t+1}{(t+1)(2t+1)^2}\right]dt$$

$$\frac{4t^2+t+1}{(t+1)(2t+1)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{2t+1}+\frac{C}{(2t+1)^2}$$

şi prin identificarea coeficienţilor obţinem: $A=4, B=-6, C=3$.

Deci $F(t)=\dfrac{1}{2}t-2\ln(t+1)+\dfrac{3}{2}\ln(2t+1)+\dfrac{3}{4}(2t+1)+C$

$$F(t)=2t-2\ln(t+1)+\frac{3}{2}\ln(2t+1)+C$$

Aşadar

$$\int\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}dx=2(x+\sqrt{x^2+x+1})-2\ln(x+1+\sqrt{x^2+x+1})+$$
$$+\frac{3}{2}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})+C.$$

b) Se face substituţia (E2) $\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$, de unde $x=\dfrac{2t-1}{t^2-1}$, $dx=\dfrac{-2(t^2-t+1)}{(t^2-1)^2}dt$. Avem

$$F(t)=2\int\frac{dt}{2t^2-2t-1}=\frac{4}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2t-1-\sqrt{3}}{2t-1+\sqrt{3}}\right|+C, \text{ de unde}$$

$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{4}{3}\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-(1+\sqrt{3})x+2}{2\sqrt{x^2-x+1}-(1-\sqrt{3})x+2}\right|+C.$$

c) Se face substituţia (E3) $\sqrt{x^2-1}=(x-1)t$, de unde $x=\dfrac{t+1}{t-1}$, $dx=\dfrac{-2}{(t-1)^2}dt$. Avem

$$F(t)=\int\frac{-(t+1)^2}{2t^2(t-1)^2}dt=\frac{1}{2}\int\left[-\frac{4}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{4}{t-1}-\frac{4}{(t-1)^2}\right]dt=$$
$$=-2\ln t+\frac{1}{2t}+2\ln(t-1)+\frac{2}{t-1}+C, \text{ de unde}$$

$$\int \frac{x^2}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}dx = 2\ln\left(1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{x^2-1}+x+C .$$

Primitivele următoare sunt cazuri particulare ale 2.2.3 deci se pot utiliza substituțiile lui Euler. Există însă nişte substituții mai simple pe care le vom prezenta în continuare:

(i) Calculul primitivelor de forma $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$

Metoda generală constă în a aduce trinomul de sub radical la forma canonică $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}$ şi apoi făcând substituția $t = x+\frac{b}{2a}$, integrala se reduce la una din formele:

$$(1)\int \sqrt{t^2+m^2}dt; \quad (2)\int \sqrt{t^2-m^2}dt; \quad (3)\sqrt{m^2-t^2}dt$$

care se calculează astfel:

$$(1)\ \int \sqrt{t^2+m^2}dt = \int \frac{t^2+m^2}{\sqrt{t^2+m^2}}dt = \int t(\sqrt{t^2+m^2})'dt + \int \frac{m^2}{\sqrt{t^2+m^2}}dt =$$

$$= t\sqrt{t^2+m^2} - \int \sqrt{t^2+m^2}dt + m^2\ln(t+\sqrt{t^2+m^2})$$

de unde

$(1)\ \int \sqrt{t^2+m^2}dt = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2+m^2}+\frac{m^2}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+m^2})+C$. Analog

$(2)\ \int \sqrt{t^2-m^2}dt = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2-m^2}-\frac{m^2}{2}\ln|t-\sqrt{t^2-m^2}|+C$ şi

$(3)\ \int \sqrt{m^2-t^2}dt = \frac{1}{2}t\sqrt{m^2-t^2}+\frac{m^2}{2}\arcsin\frac{t}{m}+C$.

R2.2.4. Calculați $\int \sqrt{x^2+3x+2}dx, x \geq -1$.

Soluție. $x^2+3x+2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$. Se face substituția $x+\frac{3}{2} = t$, $dx = dt$. Avem

$$\int \sqrt{t^2-\frac{1}{4}}dt = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}-\frac{1}{8}\ln\left|t-\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|+C, \text{ de unde}$$

$$\int \sqrt{x^2+3x+2}dx = \frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2+3x+2}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{3}{2}-\sqrt{x^2+3x+2}\right)+C .$$

(ii) Calculul primitivelor de forma $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, unde $P_n(x)$ este un polinom de gradul n (n≥1).

Punem

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (*)$$

unde $Q_{n-1}(x)$ este un polinom de gradul (n-1) cu coeficienți nedeterminați şi $\lambda \in \mathbf{R}$. Coeficienții polinomul $Q_{n-1}(x)$ şi numărul p sunt determinate derivând (*).

Observație. Pentru a calcula primitivele funcției $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ se aduce trinomul de sub radical la forma canonică şi apoi se face substituția $t = x + \frac{b}{2a}$.

R2.2.5. Calculați:

a) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$; b) $\int x^2\sqrt{x^2+4}dx$.

Soluție. a) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}} = a\sqrt{x^2+2x+2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $a, p \in \mathbf{R}$. Prin derivare obținem

$$\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{a(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

de unde egalând coeficienții avem: a=1, λ=2. Deci

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \sqrt{x^2+2x+2} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+2x+2} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} =$$

$$= \sqrt{x^2+x+2} + 2\ln(x+1+\sqrt{x^2+x+2}) + C.$$

b) $\int x^2\sqrt{x^2+4}dx = \int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx =$

$$= (ax^3+bx^2+cx+d)\sqrt{x^2+4} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

Derivând obținem:

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}=(3ax^2+2bx+c)\sqrt{x^2+4}+\frac{(ax^3+bx^2+cx+d)x}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}$$

de unde $x^4+4x^2=(3ax^2+2bx+c)(x^2+4)+(ax^3+bx^2+cx+d)x+\lambda$ şi identificând coeficienţii aceloraşi puteri ale lui x găsim:

$$a=\frac{1}{4},\quad b=0,\quad c=\frac{1}{2},\quad d=0,\quad \lambda=-2.$$

Prin urmare

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}dx=\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)\sqrt{x^2+4}-2\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C.$$

(iii) Calculul primitivelor de forma $\int\frac{dx}{(x-d)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$, unde $n\in\mathbf{N}^*$.

Aceste integrale se reduc la cele precedente cu ajutorul schimbării de variabilă $t=\frac{1}{x-d}$.

R2.2.6. Calculaţi:

a) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}, x>-1$; b) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-2x+3}}, x>0$.

Soluţie. a) Se face substituţia $t=\frac{1}{x+1}$, de unde $x=\frac{1}{t}-1$, $\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. Avem

$$\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}=\int\frac{-dt}{\sqrt{1+t^2}}=-\ln(t+\sqrt{t^2+1})+C\quad \text{ş.a.m.d}$$

b) Se face substituţia $t=\frac{1}{x}$, de unde $x=\frac{1}{t}$, $\sqrt{x^2-2x+3}=\frac{\sqrt{1-2t+3t^2}}{t}$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. Avem

$$\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\frac{\sqrt{1-2t+3t^2}}{t}}=\int\frac{-tdt}{\sqrt{3t^2-2t+1}}.$$

$3t^2-2+1=3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$ şi notând $t-\frac{1}{3}=u$, $dt=du$, avem:

$$\int\frac{-\left(u+\frac{1}{3}\right)du}{\sqrt{3u^2+\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{-u-\frac{1}{3}}{\sqrt{u^2+\frac{2}{9}}}du=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{u^2+\frac{2}{9}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\ln\left(u+\sqrt{u^2+\frac{2}{9}}\right)+C \text{ şi}$$

revenind obţinem:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-2x+3}}=-\frac{1}{3x}\sqrt{x^2-2x+3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x\sqrt{3}}\right)+C.$$

2.2.4. Calculul primitivelor de forma (i.e. binome) $\int x^m(ax^n+b)^p\,dx$, unde $a,b\in\mathbf{R}$; $m,n,p\in Q$ şi care îndeplinesc una din condiţiile de mai jos (numite **condiţiile lui Cebâşev**):

(C1) $p\in\mathbf{Z}$, unde $\frac{m+1}{n}=\frac{r}{s}$, atunci se face substituţia $t=(x^n)^{1/s}$

(C2) $\frac{m+n}{n}\in\mathbf{Z}$, unde $p=\frac{r}{s}$, atunci se face substituţia $t=(ax^n+b)^{1/s}$

(C3) $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbf{Z}$, unde $p=\frac{r}{s}$, atunci se face substituţia $t=(a+bx^{-n})^{1/s}$

Aceste substituţii reduc calculul primitivei $\int x^m(ax^n+b)^p\,dx$ la calculul primitivei dintr-o funcţie raţională.

Într-adevăr

(C1) cu substituţia $t=(x^n)^{1/s}$, avem $x=(t^s)^{1/n}$, $dx=\frac{s}{n}t^{\frac{s}{n}-1}dt$ de unde

$$\int (t^s)^{\frac{m}{n}}(at^s+b)^p\,\frac{s}{n}t^{\frac{s}{n}-1}\,dt=\frac{s}{n}\int t^{r-1}(at^s+b)^p\,dt=\int R(t)dt$$

(C2) cu substituţia $t=(ax^n+b)^{1/s}$, avem

$$x=\left(\frac{t^s-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}},\ dx=\frac{s}{na}\left(\frac{t^s-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}t^{s-1}dt$$

de unde

$$\int\left(\frac{t^s-b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}t^{sp}\,\frac{s}{na}\left(\frac{t^s-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}t^{s-1}dt=\frac{s}{na}\int\left(\frac{t^s-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}t^{r+s-1}dt=\int R(t)dt$$

(C3) cu substituţia $t=(a+bx^{-n})^{1/s}$, avem

$$x=\left(\frac{b}{t^s-a}\right)^{1/n},\ dx=\frac{-s}{nb}\left(\frac{b}{t^s-a}\right)^{\frac{1}{n}+1}t^{s-1}dt \quad \text{de unde}$$

$$\int\left(\frac{b}{t^s-a}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{bt^s}{t^s-a}\right)^{p}\frac{-s}{nb}\left(\frac{b}{t^s-a}\right)^{\frac{1}{n}+1}t^{s-1}dt=$$

$$=-\frac{s}{nb}\int\left(\frac{b}{t^s-a}\right)^{\frac{m+1}{n}+p+1}t^{r+s-1}dt=\int R(t)dt\,.$$

Observație. P.L. Cebâșev a arătat că, dacă p, $\frac{m+1}{n}$ și $\frac{m+1}{n}+p\notin\mathbf{Z}$, atunci primitiva dată nu se poate reduce la primitiva unei funcții raționale. Calculul primitivei nu poate fi făcut prin mijloace elementare.

R2.2.7. Calculați:

a) $\int\frac{x\sqrt[4]{x}}{(1+x\sqrt{x})^2}dx,\ x>0$; b) $\int x^3\sqrt{(1-\sqrt[3]{x^2})^3}\,dx,\ x<1$;

c) $\int x^{-1/2}(1-x^{-4/3})^{-5/8}dx$.

Soluție. a) $\frac{x\sqrt[4]{x}}{(1+x\sqrt{x})^2}=x^{5/4}(1+x^{3/2})^{-2}$ de unde $m=\frac{5}{4}$, $n=\frac{3}{2}$, $p=-2\in\mathbf{Z}$, deci suntem în cazul (C1). $\frac{m+1}{n}=\frac{3}{2}$. Facem substituția $t=(x^{3/2})^{1/2}=x^{3/4}$, de unde $x=t^{4/3}$, $dx=\frac{4}{3}t^{1/3}dt$ deci

$$F(t)=\int t^{\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}}(1+t^{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}})^{-2}\cdot\frac{4}{3}t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{4}{3}\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt=$$

$$=\frac{4}{3}\int t\left[\frac{-1}{2(1+t^2)}\right]'dt=\frac{4}{3}\left[-\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\text{arctg}t\right]+C$$

Deci $\int\frac{x+\sqrt[4]{x}}{(1+x\sqrt{x})^2}dx=\frac{-2\sqrt[4]{x^3}}{3(1+x\sqrt{x})}+\frac{2}{3}\text{arctg}\sqrt[4]{x^3}+C$

Observație. Pentru această integrală se pitea aplica și substituția indicată la 2.2.1 și anume $t=\sqrt[4]{x}$ care conducea la $F(t)=\int\frac{4t^8}{(1+t^6)^2}dt$, de unde cu o nouă substituție $u=t^3$ se ajunge la $F(u)=\frac{4}{3}\int\frac{u^2}{(1+u^2)^2}du$, ș.a.m.d.

b) $x^3\sqrt{(1-\sqrt[3]{x^2})^3} = x^3(1-x^{2/3})^{3/2}$ de unde $m=3$, $n=\frac{2}{3}$, $p=\frac{3}{2}$, $\frac{m+1}{n}=6\in\mathbf{Z}$ deci suntem în cazul (C2). Facem substituția $t=(1-x^{2/3})^{1/2}$, de unde $x=(1-t^2)^{3/2}$, $dx=-3t(1-t^2)^{1/2}dt$. Avem

$$F(t)=\int (1-t^2)^{9/2}(t^2)^{3/2}(-3t)(1-t^2)^{1/2}dt=-3\int t^4(1-t^2)^5dt, \text{ ş.a.m.d.}$$

c) $m=-\frac{1}{2}$, $n=-\frac{4}{3}$, $p=-\frac{5}{8}$, $\frac{m+1}{n}=-\frac{3}{8}$, $\frac{m+1}{n}+p=-1$ deci suntem în cazul (C3). Facem substituția $t=(x^{4/3}-1)^{1/8}$, de unde $x=(t^8+1)^{3/4}$, $dx=6t^7(1+t^8)^{-1/4}$. Avem $F(t)=6\int t^2dt=2t^3+C$, de unde

$$\int x^{-1/2}(1-x^{-4/3})^{-5/8}dx=2(x^{4/3}-1)^{3/8}+C.$$

2.3. Calculul primitivelor funcțiilor trigonometrice şi hiperbolice

2.3.1. Calculul primitivelor de forma

(1) $\int R(\mathrm{tg}x)dx$; (2) $\int R(\sin x,\cos x)dx$; (3) $\int R(\sin x,\cos x,\mathrm{tg}x,\mathrm{ctg}x)dx$

(4) $\int R(\sin nx,\cos nx,\mathrm{tg}nx,\mathrm{ctg}nx)dx,\ n\in\mathbf{N}^*,\ n\geq 2$

unde R este o funcție rațională.

(3) şi (4): Deoarece $\sin nx,\cos nx,\mathrm{tg}nx,\mathrm{ctg}nx$ sunt funcții raționale de $\sin x$ şi $\cos x$ rezultă că funcția

$$R(\sin nx,\cos nx,\mathrm{tg}nx,\mathrm{ctg}nx)=R_1(\sin x,\cos x)$$

şi deci primitivele de tipul (4) şi (3) se reduc la primitive de tipul (2).

(2): Deoarece $\sin x=\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$ şi $\cos=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$ rezultă că primitivele de tipul (2) se reduc la primitive de tipul (1) cu substituția $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

(1): Pentru a calcula primitiva $\int R(\mathrm{tg}x)$ se face substituția: $t=\mathrm{tg}x$, de unde $dx=\frac{1}{1+t^2}dt$, deci avem de calculat $\int R(t)\frac{1}{1+t^2}dt=\int R_1(t)dt$, unde R_1 este o funcție rațională.

R2.3.1. Calculați:

a) $\int \frac{1+\text{tg}x}{\sin 2\text{x}}dx$; b) $\frac{dx}{a+b\cos x}, a^2+b^2 \neq 0$.

Soluție. a) Se face substituția $\text{tg}x = t$, $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$

$$F(t) = \int \frac{(1+t)}{2t}dt = \frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{2}t + C,$$

de unde $\int \frac{1+\text{tg}x}{\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\ln(\text{tg}x) + \frac{\text{tg}x}{2} + C$

b) Se face substituția $t = \text{tg}\frac{x}{2}$. $\cos x = \frac{2t}{1+t^2}$, $x = 2\text{arctg}t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$$F(t) = \int \frac{2dt}{(a-b)t^2+(a+b)}.$$

Dacă a=b atunci $F(t) = \frac{2t}{a+b} + C$, de unde $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{a}\text{tg}\frac{x}{2} + C$.

Dacă a=-b *atunci* $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{a}\text{ctg}\frac{x}{2} + C$.

Dacă $|a| \neq |b|$ şi notăm $\lambda^2 = \left|\frac{a+b}{a-b}\right|$, atunci $F(t) = \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{t^2 \pm \lambda^2}$, deci

$$F(t) = \frac{2}{(a-b)\lambda}\text{arctg}\frac{t}{\lambda} + C \quad \text{sau} \quad F(t) = \frac{1}{(a-b)\lambda}\ln\frac{t-\lambda}{t+\lambda} + C.$$

Calculul primitivelor de tipul 2.3.1 se simplifică atunci când funcția R are proprietăți suplimentare:

2.3.2. Calculul primitivelor de forma $\int R(\sin x, \cos x)dx$, unde R este o funcție rațională de două variabile u şi v care satisface una din proprietățile:

(1) $R(-u,v) = -R(u,v)$. Atunci se face substituția $t = \cos x$.

(2) $R(u,-v) = -R(u,v)$. Atunci se face substituția $t = \sin x$.

(3) $R(-u,-v) = R(u,v)$. Atunci se face substituția $t = \text{tg}x$.

(4) $R(-u,v) = R(u,v)$. În acest caz $R(\sin x, \cos x) = R_2(\cos x)$ şi se face substituția $t = \text{tg}\frac{x}{2}$.

(5) $R(u,-v) = R(u,v)$. În acest caz $R(\sin x, \cos x) = R_2(\sin x)$ şi se face substituția $t = \text{tg}\frac{x}{2}$.

În primele trei cazuri calculul primitivei date se reduce la calculul primitivelor unei funcții raționale. În cazurile (4) şi (5) calculul primitivei date se reduce la calculul unei primitive mai simple, care se poate calcula făcând substituția $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

Într-adevăr:

(1) dacă $R(-u,v) = -R(u,v)$, funcția R este impară în u, atunci $\frac{R(u,v)}{u}$ este pară în u, deci $\frac{R(u,v)}{u} = R_1(u^2,v)$, prin urmare $R(u,v) = uR_1(u^2,v)$.

Pentru cazul studiat avem:

$$R(\sin x, \cos x) = \sin x \cdot R_1(\sin^2 x, \cos x) = -R_1(1-\cos^2 x, \cos x)(\cos x)'.$$

Făcând substituția $t = \cos x$, integrala devine

$$-\int R_1(1-t^2,t)dt = \int R_2(t)dt$$

unde R_2 este o funcție rațională.

(2) dacă $R(u,-v) = -R(u,v)$, funcția R este impară în v, atunci ca mai sus

$$R(\sin x, \cos x) = \cos x \cdot R_1(\sin x, \cos^2 x) = R_1(\sin x, 1-\sin^2 x)(\sin x)'$$

Făcând substituția $t = \sin x$, integrala devine

$$\int R_1(t, 1-t^2)dt = \int R_2(t)dt.$$

(3) dacă $R(-u,-v) = R(u,v)$, funcția R este pară în raport cu u şi v şi deci se poate exprima astfel:

$$R(u,v) = R\left(v \cdot \frac{u}{v}, v\right) = R_1\left(v^2, \frac{u}{v}\right).$$

Avem $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_1(\cos^2 x, \mathrm{tg}x)dx =$

$$= \int R_1\left(\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}, \mathrm{tg}x\right) = \int R_2(\mathrm{tg}x)dx$$

care se calculează făcând substituția $t = \mathrm{tg}x$ (vezi 2.3.1).

(4) dacă $R(-u,v) = R(u,v)$, funcția R este pară în raport cu u şi atunci

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_1(\sin^2 x, \cos x)dx =$$

$$\int R_1(1-\cos^2 x, \cos x)dx = \int R_2(\cos x)dx$$

(5) analog cu (4).

R2.3.2. Calculați:

a) $\int \frac{\sin x}{1+2\cos x+\sin^2 x}dx$, b) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$;

c) $\int \frac{\cos x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx$.

Soluție. a) Fie $R(u,v)=\frac{u}{1+2v+u^2}$. Avem $R(-u,v)=-R(u,v)$, deci suntem în cazul (1). Facem substituția $t=\cos x$, $\sin^2 x=1-t^2$, $dt=-\sin x dx$. Avem

$$F(t)=\int \frac{dt}{t^2-2t-2}=\int \frac{dt}{(t-1)^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{3}}{t-1+\sqrt{3}}\right|+C,$$

de unde $\int \frac{\sin x}{1+2\cos x+\sin^2 x}dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\cos x-1-\sqrt{3}}{\cos x-1+\sqrt{3}}\right|+C$.

b) Fie $R(u,v)=\frac{2uv}{u^4+v^4}$. Avem $R(u,-v)=-R(u,v)$, deci suntem în cazul (2). Facem substituția $t=\sin x$, $dt=\cos x dx$. Avem

$$F(t)=\int \frac{2tdt}{t^4+(1-t^2)^2}=\int \frac{tdt}{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\int \frac{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)' dt}{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{t^2-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+C=arctg(2t^2-1)+C.$$

Deci $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\operatorname{arctg}(2\sin^2 x-1)+C$.

c) Fie $R(u,v)=\frac{v}{u^3+v^3}$. Avem $R(-u,-v)=R(u,v)$, deci suntem în cazul (3). Facem substituția $t=\operatorname{tg}x$. $dx=\frac{1}{1+t^2}dt$,

$$\frac{\cos x}{\cos^3 x+\sin^3 x}=\frac{1}{\cos^2 x+\operatorname{tg}x\cdot\sin^2 x}=\frac{t^2+1}{t^3+1}$$

$$F(t)=\int \frac{dt}{t^3+1}=\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{3}\int \frac{t-2}{t^2-t+1}dt=\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{6}\int \frac{2t-1-3}{t^2-t+1}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C.$$

De aici $\int\frac{\cos x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx=\frac{1}{6}\ln\frac{(1+\mathrm{tg}x)^2}{\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2\mathrm{tg}x-1}{\sqrt{3}}+C$.

2.3.3. Calculul primitivelor de forma:

(1) $\int R(\mathrm{th}x)dx$; (2) $\int R(\mathrm{sh}x,\mathrm{ch}x)dx$; (3) $\int R(\mathrm{sh}x,\mathrm{ch}x,\mathrm{th}x)dx$ şi

(4) $\int R(\mathrm{sh}nx,\mathrm{ch}nx,\mathrm{th}nx)dx,\ n\in\mathbf{N}^*,\ n\geq 2$

unde R este o funcție rațională.

Reamintim: $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$.

Funcțiile hiperbolice au proprietăți asemănătoare cu a funcțiilor trigonometrice. Mai precis:

$$\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=1$$

$$\mathrm{sh}^2 x=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2x-1),\quad \mathrm{ch}^2 x=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2x+1)$$

$$\mathrm{sh}x=\frac{2\mathrm{th}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{th}^2\frac{x}{2}},\quad \mathrm{ch}x=\frac{1+\mathrm{th}^2\frac{x}{2}}{1-\mathrm{th}^2\frac{x}{2}},\quad \mathrm{th}x=\frac{2\mathrm{th}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{th}^2\frac{x}{2}}$$

Există două metode de calcul a acestor primitive:

Metoda I. Facem substituția $t=\mathrm{th}\frac{x}{2}$, $dx=\frac{2dt}{1-t^2}$ pentru (1) şi $t=\mathrm{th}x$ pentru (2) şi (3) şi astfel calculul primitivelor (1), (2) şi (3) se reduce la calculul primitivelor unor funcții raționale. Pentru a calcula (4) vom exprima $\mathrm{sh}nx,\mathrm{ch}nx$ şi $\mathrm{th}nx$ ca funcție de $\mathrm{sh}x$ şi $\mathrm{ch}x$.

Metoda a II-a. Facem substituția $e^x=t$, atunci:

$$\mathrm{sh}x=\frac{t^2-1}{2t},\quad \mathrm{ch}x=\frac{t^2+1}{2t},\quad \mathrm{th}x=\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad dx=\frac{1}{t}dt$$

deci primitivele se reduc la calculul primitivelor unor funcții raționale.

R2.3.3. Calculați:

a) $\int \mathrm{sh}^2 x dx$; b) $\int \mathrm{th}^2 x dx$.

Soluție. a) Facem substituția $e^x=t$, $x=\ln t$, $dx=\frac{1}{t}dt$.

$$F(t)=\int\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2\frac{1}{t}dt=\int\frac{(t^2-1)^2}{4t^3}dt=\frac{1}{4}\int\left(t^2-2+\frac{1}{t^2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3}-2t-\frac{1}{t}\right)+C$$

de unde $\int \mathrm{sh}^2 x dx=\frac{1}{12}e^{3x}-\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{4e^x}+C$.

b) Facem substituția $\mathrm{th}x=t$, $dx=\frac{1}{1-t^2}dt$. Avem

$$F(t)=\int\frac{t^2}{1-t^2}dt=-t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C,$$

de unde $\int \mathrm{th}^2 x dx=-\mathrm{th}x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\mathrm{th}x}{1-\mathrm{th}x}\right|+C$.

2.3.4. Calculul primitivelor de forma $\int \sin^m x\cos^n x dx,\ m,n\in\mathbf{Z}$.

Metoda I. Prin recurență. Vom nota $I_{m,n}=\int \sin^m x\cos^n x dx$.

Distingem următoarele cazuri:

(1) Dacă $m,n\in\mathbf{Z}, m\neq -1, m+n\neq 0$ utilizând formula de integrare prin părți obținem:

$$I_{m,n}=\int\cos^{n-1}x\left(\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}\right)'dx=$$

$$=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}-\frac{n-1}{m+1}\int\sin^{m+1}x\cos^{n-2}x(-\sin x)dx=$$

$$=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\sin^{m}x\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx=$$

$$=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}(I_{m,n-2}-I_{m,n})$$

de unde

$$I_{m,n}=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$$

(2) Dacă $m,n\in\mathbf{Z}, n\neq -1, m+n\neq 0$ se obține în mod analog relația:

$$I_{m,n}=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}$$

(3) Dacă $m,n\in\mathbf{Z}, m+n=0$ atunci primitiva de calculat este:

$$\int \operatorname{tg}^n x dx = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx$$

sau $\int \operatorname{ctg}^n x dx = \frac{-1}{n-1}\operatorname{ctg}^{n-1}x - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x dx$

Într-adevăr:

$$\int \operatorname{tg}^n x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{n-2} x (\operatorname{tg} x)' dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx$$

$$\int \operatorname{ctg}^n x dx = \int \operatorname{ctg}^{n-2} x \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx =$$

$$= \int \operatorname{ctg}^{n-2} x (-\operatorname{ctg} x)' dx - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x dx = \frac{-1}{n-1}\operatorname{ctg}^{n-1}x - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x dx$$

(4) Dacă $m = n = -1$ obținem primitiva cunoscută $\int \frac{dx}{\sin 2x}$.

Observație. (i) Pentru n=0 obținem din (2)

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

(ii) Pentru m=0 obținem din (1):

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$$

(iii) Luând în (2): $m := -n+2$ şi $n := 0$ obținem

$$\int \frac{1}{\sin^{n-2} x} dx = \frac{\cos x}{(n-2)\sin^{n-1} x} + \frac{n-1}{n-2}\int \frac{1}{\sin^n x} dx$$

de unde $\int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{-\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$

(iv) Luând în (1): $m := 0$ şi $n := -n+2$ obținem

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

Metoda II. Distingem următoarele cazuri:

(1) Dacă $m+n$ impar, atunci m sau n este impar.

- dacă m este impar, $m = 2k+1$ atunci:

$$\sin^m x \cos^n x = \sin^{2k} x \cos^n x(-\cos x)' = (1-\cos^2 x)^k \cos^n x(-\cos x)'$$

şi se face substituția $\cos x = t$ care conduce la calculul primitivelor unei funcții raționale

- dacă n este impar se face substituția $\sin x = t$

(2) Dacă $m+n$ par, atunci:
- dacă m şi n sunt impare procedăm ca mai sus
- dacă m şi n sunt pare, se trece la arcul dublu sau se face substituția $t=\mathrm{tg}x$.

R2.3.4. Calculați:

a) $\int \sin^{10} x\cos^3 xdx$; b) $\int \sin^4 x\cos^2 xdx$;

c) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; d) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Soluție. a) $\int \sin^{10} x\cos^3 xdx=\int \sin^{10} x(1-\sin^2 x)(\sin x)'dx=$

$$=\frac{\sin^{11} x}{11}-\frac{\sin^{13} x}{13}+C$$

b) $\int \sin^4 x\cos^2 xdx=\int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \frac{\cos 2x-1}{2}dx=$

$$=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x\cos 2xdx-\frac{1}{4}\int \sin^2 2xdx=$$

$$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x(\sin 2x)'dx-\frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\frac{\sin^3 2x}{3}-\frac{x}{8}+\frac{\sin 4x}{32}+C$$

c) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}=\int \frac{(\mathrm{tg}x)'dx}{\cos^2 x}=\int (1+\mathrm{tg}^2 x)(\mathrm{tg}x)'dx=\mathrm{tg}x+\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}+C$

d) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}=\int \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)}dx$

Facem substituția $\cos x=t$, $\sin xdx=-dt$. Avem

$$F(t)=-\int \frac{dt}{(t^2-1)^2}=-\int \frac{1-t^2+t^2}{(t^2-1)^2}dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}\int t\left(\frac{-1}{t^2-1}\right)'dt=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{t}{2(t^2-1)}+C$$

Deci $\int \frac{dx}{\sin^3 x}=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+C$.

2.3.5. Calculul primitivelor de forma

$\int \sin\lambda x\sin\mu xd$; $\int \cos\lambda x\cos\mu xdx$; $\int \sin\lambda x\cos\mu xdx$; $\lambda,\mu\in \mathbf{R}$

Se vor utiliza relațiile trigonometrice cunoscute:

$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

pentru $a = \lambda x$ şi $b = \mu x$. Primitivele date se reduc la primitive de forma $\int \sin \alpha x dx$, $\int \cos \beta x dx$.

R2.3.5. Calculaţi: $\int \sin 9x \sin x dx$.

Soluţie.

$$\int \sin 9x \sin x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 8x - \cos 10x) dx = \frac{\sin 8x}{16} - \frac{\sin 10x}{20} + C.$$

Bibliografie

[1] G. M. Fihtenholţ, *Curs de calcul diferenţial şi integral*, Ed. Tehnică, 1964.

[2] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral*, vol. I şi II, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[3] V. Arsinte, *Probleme elementare de calcul integral*, Ed. Univers, Bucureşti, 1985.

[4] A. Magdaş, G. Lobonţ, S. Ursu, I. Diaconu, *Matematică*, Manual pentru cls. a XII-a, Ed. Studium, 2002.

[5] B. Demidovici şi colab., *Culegere de probleme de analiză matematică*, Moscova, 1977.

3.[redacted]

3.1. Funcții integrabile

Amintim câteva rezultate teoretice referitoare la funcțiile integrabile. Fie a, b $\in$ R, cu a<b, iar $f:[a,b]\to R$ o funcție dată.

3.1.1 <u>**Definiție**</u> : Se numeşte <u>diviziune</u> a intervalului $[a,b]$, orice sistem ordonat $\Delta=(x_0,x_1,...,x_{n-1},x_n)$ de n+1 puncte cu proprietatea că $a=x_0<x_1<...<x_n=b$.

Dacă $\Delta=(x_0,x_1,...,x_{n-1},x_n)$ este o diviziune a intervalului $[a,b]$, atunci numărul $\|\Delta\|=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,...,x_n-x_{n-1}\}$ se numeşte <u>norma diviziunii</u> Δ. Notăm cu $\mathrm{D}[a,b]$ mulțimea tuturor diviziunilor intervalului $[a,b]$.

3.1.2. <u>**Definiție**</u> : Fie $\Delta=(x_0,x_1,...,x_{n-1},x_n)\in\mathrm{D}[a,b]$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$un sistem de puncte intermediare, unde $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$, $i=\overline{1,n}$. Numărul real $\sigma(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ se numeşte <u>suma Riemann</u> asociată funcției f, diviziunii Δ şi punctelor intermediare $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$.

3.1.3. <u>**Definiție**</u> : Funcția $f:[a,b]\to R$ se numeşte <u>integrabilă Riemann</u> pe intervalul $[a,b]$, dacă pentru orice şir de diviziuni $\Delta_n=(x_0^n,x_1^n,...,x_{n-1}^n,x_n^n)$, $n\in N^*$, ale intervalului $[a,b]$, cu $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i^n, $x_{i-1}^n\le\xi_i^n\le x_i^n$, $1\le i\le k_n$, şirul sumelor Riemann $\left(\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_i^n)\right)_{n\ge1}$ este convergent la acelaşi număr I_f.

Numărul real I_f se numeşte integrala definită a funcției f pe intervalul $[a,b]$ şi se notează $\int_a^b f(x)dx$.

3.1.4. <u>**Teoremă**</u> : Dacă funcția $f:[a,b]\to R$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci funcția f este mărginită.

3.1.5. <u>**Observație**</u> : Deci o funcție care nu este mărginită pe $[a,b]$, nu este integrabilă pe $[a,b]$.

3.1.6. <u>**Exemplu**</u> : Dacă $\alpha>0$, funcția $f_\alpha:[0,1]\to R$, $f_\alpha(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{x^\alpha}, & x\in(0,1]\end{cases}$ nu este integrabilă pe [0, 1], deoarece este nemărginită.

Există funcții mărginite neintegrabile.

3.1.7 **Exemplu** : Funcția lui Dirichlet $f:[0,1]\to R$, $f(x)=\begin{cases}0, & x \in Q\\ 1, & x\, R\setminus Q\end{cases}$

nu este integrabilă pe [0, 1].

Fie $\Delta=(0=x_0<x_1<...<x_n=1)$. Dacă $\xi_i, i=\overline{1,n}$ sunt raționale, atunci $\sigma_\Delta(f,\xi_i)=1$, deci $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sigma(f,\xi_i)=1$. Dacă ξ_i, $i=\overline{1,n}$ sunt iraționale, atunci $\sigma_\Delta(f,\xi_i)=0$, deci $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sigma(f,\xi_i)=0$. Cum $1\neq 0$, rezultă că funcția f nu este integrabilă Riemann pe [0, 1].

3.1.8. **Teoremă** : (Leibniz-Newton). Fie $f:[a,b]\to R$ o funcție integrabilă care admite primitive pe $[a,b]$. Atunci, pentru orice primitivă F a funcției f are loc egalitatea: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

3.2 Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann

Fie a<b, iar $f:[a,b]\to R$ o funcție mărginită. Notăm cu $m=\inf\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$, $M=\sup\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$. Fie $\Delta=(x_0,x_1,...,x_{n-1},x_n)$ $\in \mathcal{D}[a,b]$. Pentru fiecare k=1, 2, …,n, notăm: $m_k=\inf\{f(x)\,|\,x\in[x_{k-1},x_k]\}$, $M_k=\sup\{f(x)\,|\,x\in[x_{k-1},x_k]\}$. Suma $s(f,\Delta)=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k(x_k-x_{k-1})$ se numeşte suma Darboux inferioară, asociată funcției f şi diviziunii Δ . Suma $S(f,\Delta)=\sum\limits_{k=1}^{n}M_k(x_k-x_{k-1})$ se numeşte suma Darboux superioară asociată funcției f şi diviziunii Δ.

Funcția f fiind mărginită, avem: $m(b-a)\le s(f,\Delta)\le\sigma(f,\xi_k)\le S(f,\Delta)\le M(b-a)$, pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_k, $k=\overline{1,n}$. Se arată că:

a) Pentru orice $\Delta', \Delta'' \in \mathcal{D}$ [a, b] avem: $s(f,\Delta')\le S(f,\Delta'')$

b) Există $\sup\{\,s(f,\Delta)|\,\Delta\in\mathcal{D}\ [a,b]\,\}\overset{not}{=}\underline{\int_a^b} f(x)dx$ (integrala Darboux inferioară a lui *f*).

c) Există $\inf\{S(f,\Delta) \mid \Delta \in \mathcal{D}[a,b]\} \overset{not}{=} \overline{\int_a^b} f(x)dx$ (integrala Darboux superioară a lui *f*).

3.2.1. <u>Teoremă</u> : (criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann)

Fie $f:[a,b]\to R$ o funcție mărginită. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) *f* este integrabilă Riemann
2) Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice $\Delta \in \mathcal{D}$ [a, b] cu $\|\Delta\| < \delta$ avem $S(f,\Delta) - s(f,\Delta) < \varepsilon$
3) $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Cu ajutorul Criteriului lui Darboux se demonstrează integrabilitatea funcțiilor monotone, respectiv a funcțiilor continue pe un compact.

3.2.2. <u>Teoremă</u> : Dacă $f:[a,b]\to R$ este o funcție monotonă pe [a, b], atunci funcția f este integrabilă Riemann pe [a, b].

3.2.3. <u>Teoremă</u> : Dacă $f:[a,b]\to R$ este o funcție continuă pe [a, b], atunci funcția f este integrabilă Riemann pe [a, b].

3.2.4 <u>Teoremă</u> : Dacă funcția $f:[a,b]\to R$ este integrabilă Riemann pe [a, b], atunci pentru orice c din [a, b], restricțiile funcției f la [a, c], respectiv [c, b] sunt funcții integrabile Riemann şi $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

<u>Demonstrație</u> : Notăm cu f_1, respectiv f_2 restricțiile funcției f la intervalele [a, c], respectiv [c, b]. Funcția f fiind integrabilă, există $\delta > 0$: $S(f,\Delta) - s(f,\Delta) < \varepsilon$ (1) pentru orice $\Delta \in \mathcal{D}$ [a, b] cu $\|\Delta\| < \delta$. Fie $\Delta_0 \in \mathcal{D}$ [a, c] cu $\|\Delta_0\| < \delta$. Evident există $\Delta \in \mathcal{D}$ [a, b] cu $\Delta \cap [a,c] = \Delta_0$ şi $\|\Delta\| < \delta$. Atunci: $S(f_1,\Delta_0) - s(f_1,\Delta_0) \le S(f,\Delta) - s(f,\Delta)$ (2). Din (1) şi (2) rezultă $S(f_1,\Delta_0) - s(f_1,\Delta_0) \le \varepsilon$. Prin urmare, din T 3.2.1 f_1 este integrabilă. Analog se arată că f_2 este integrabilă.

3.2.5. Dacă $f:[a,b]\to R$ este integrabilă Riemann pe [a, b], atunci pentru orice interval [c, d]$\subseteq$[a, b], restricția funcției f la [c, d] este integrabilă Riemann.

Demonstrație : Din T 3.2.4 rezultă că $g = f\big|_{[a,d]}$ este integrabilă. Pentru c din [a,d], din T 3.2.4 aplicată funcției g rezultă că $g\big|_{[c,d]}$ este integrabilă.

3.2.6. Observație : Dacă pentru funcția $f:[a,b]\to R$, există un interval [c,d] $\subset [a,b]$ astfel încât $f\big|_{[c,d]}$ să nu fie integrabilă Riemann, atunci funcția f nu este integrabilă Riemann pe [a, b].

3.2.7. Aplicație : Funcția lui Dirichlet , $f:[0,1]\to R$, $f(x)=\begin{cases}0, & x \in Q\\ 1, & x\, R\setminus Q\end{cases}$ nu este integrabilă pe [0, 1].

Demonstrație : Pentru orice diviziune $\Delta\in$ D [0, 1], avem $s(f,\Delta)=0$ și $S(f,\Delta)=1$. Deci $\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0 \neq 1 = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ și neintegrabilitatea lui f rezultă din T 3.2.1

3.2.8. Aplicație : Funcția lui Riemann:

$$f:[0,1]\to R, \quad f(x)=\begin{cases}0, \; x\in[0,1]\setminus Q \;\; sau \;\; x=0\\ \dfrac{1}{q}, \; x=\dfrac{p}{q}, \; q\geq 1; \; p,q\in Z; (p,q)=1\end{cases}$$ este

integrabilă pe [0,1] și $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Demonstrație : Observăm că funcția f este mărginită pe [0, 1]. Pentru orice $\Delta=(x_0,x_1,...,x_{n-1},x_n)$ $\in$ D [0, 1] avem $m_i=\inf\{f(x)\,|\, x\in[x_{i-1},x_i]\}=0, i=\overline{1,n}$, deoarece fiecare interval $[x_{i-1},x_1]$ conține numere iraționale. Deci $\underline{\int_0^1} f(x)dx \overset{(1)}{=} 0$. Fie $\varepsilon>0$. Alegem un k natural, astfel încât $k^{-3}(2k^2-k+2)<\varepsilon$. Pentru $n=k^3$ considerăm diviziunea $\Delta=(x_0,x_1,...,x_{n-1},x_n)$ a lui [0, 1], unde $x_i=\dfrac{i}{n}, i=\overline{1,n}$. Mulțimea $P=\left\{\dfrac{p}{q}\in[01]\,|\, p,q\in Z, (p,q)=1, 1\leq q\leq k\right\}$ are cel mult $2+1+2+...+(k-1)=2+\dfrac{k}{2}(k-1)$ elemente, de aceea mulțimea $I=\{\, i\in\{1,2,...,n\}\,|\, P\cap[x_{i-1},x_i]\neq\varnothing\,\}$ conține cel mult

$2+\frac{k}{2}(k-1)+\frac{k}{2}(k-1)=k^2-k+2$ elemente. Notăm $M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}=0$. Avem $M_i\le 1$ când $i\in I$ şi $M_i\le\frac{1}{k}$ când $i\notin I$.

Rezultă: $0\le\overline{\int_0^1} f(x)dx\le S(f,\Delta)=\sum_{i\in I}M_i(x_i-x_{i-1})+\sum_{i\notin I}M_i(x_i-x_{i-1})\le$

$\le 1\left(k^2-k+2\right)\frac{1}{n}+\frac{1}{k}n\frac{1}{n}=k^{-3}\left(2k^2-k+2\right)<\varepsilon$. Aşadar şi $\overline{\int_0^1} f(x)dx\overset{(2)}{=}0$. Din (1) şi (2), pe baza teoremei T 3.2.1 deducem că funcţia f este integrabilă şi că $\int_0^1 f(x)dx=0$.

3.2.9. **Aplicaţie** : Funcţia g:[0,1]$\to\{0,1\}$, $g(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\in(0,1]\end{cases}$ este integrabilă.

Demonstraţie : Funcţia g este monotonă, deci integrabilă.

3.2.10. **Aplicaţie** : Fie f:[1, 2]$\to R$, o funcţie cu proprietatea că pentru orice a, b din [1, 2], cu a<b, există $\xi,\eta\in(a,b)$ astfel încât $f(\xi)=\xi$ şi $f(\eta)=2\eta$. Să se arate că funcţia f nu este integrabilă.

Demonstraţie : Fie Δ_n o diviziune a lui [1,2] definită de punctele $x_k=1+\frac{k}{n},\ k=\overline{0,n}$. Avem $\|\Delta_n\|=\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$. Din ipoteză există $\xi_k,\eta_k\in(x_{k-1},x_k)$ cu $f(\xi_k)=\xi_k$ şi $f(\eta_k)=2\eta_k$, $k=\overline{1,n}$. Atunci:

$\sigma_f(\Delta_n,\xi_k)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\sigma_\varphi(\Delta_n,\xi_k)$, unde $\varphi:[1,2]\to R,\varphi(x)=x$ este o funcţie continuă, deci integrabilă. Atunci:

$\lim_{n\to\infty}\sigma(\Delta_n,\xi_k)=\lim_{n\to\infty}\sigma_\varphi(\Delta_n,\xi_k)=\int_1^2 x\,dx=\frac{3}{2}$. Analog considerăm $\tau:[1,2]\to R,\tau(x)=2x$, avem: $\lim_{n\to\infty}\sigma_f(\Delta_n,\xi_k)=\lim_{n\to\infty}\sigma_\tau(\Delta_n,\xi_k)=\int_1^2 2x\,dx=3$.

Aşadar, şirurile de sume Riemann $(\sigma(\Delta_n,\xi_k))_{n\ge1}$ şi $(\sigma(\Delta_n,\eta_k))_{n\ge1}$ au limite diferite, prin urmare funcţia f nu este integrabilă.

3.2.11. **Aplicaţie** : Funcţia $f:[0,3]\to R,\ f(x)=\begin{cases}5x-2, & x\in[0,3]\cap Q\\ 2x+3, & x\in[0,3]\setminus Q\end{cases}$ nu este integrabilă pe Riemann pe [0, 3].

Demonstrație : Considerăm şirul de diviziuni $\Delta_n = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$, $n \in N^*$, cu $x_k = \frac{3k}{n}$, $k = \overline{0,n}$, căruia îi ataşăm două şiruri de sume integrale: $\sigma_f(\Delta_n, \xi_k)$ cu $\xi_k \in [0,3] \cap Q$, respectiv $\sigma_f(\Delta_n, \eta_k)$, cu $\eta_k \in [0,3] \setminus Q$. Folosind integrabilitatea funcțiilor continue $g:[0,3] \to R, g(x) = 5x-2$, respectiv $h:[0,3] \to R, h(x) = 2x+3$, obținem: $\lim_{n\to\infty} \sigma_f(\Delta_n, \xi_k) = \lim_{n\to\infty} \sigma_g(\Delta_n, \xi_k) = \int_0^3 (5x-2)dx = \frac{33}{2}$ şi $\lim_{n\to\infty} \sigma_f(\Delta_n, \eta_k) =$
$= \lim_{n\to\infty} \sigma_h(\Delta_n, \eta_k) = \int_0^3 (2x+3)dx = 18$. Deci funcția f nu este integrabilă.

3.2.12. Aplicație : Funcția $f:[0,1] \to R$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \cap Q \\ 1-x, & x \in [0,1] \setminus Q \end{cases}$ nu este integrabilă.

Demonstrație : Aplicând raționamentul de la aplicația **3.2.10**, pentru funcțiile continue g:[0, 1]$\to R$, g(x)=x, respectiv h:[0, 1]$\to R$, h(x)=1-x, obținem: $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 h(x)dx = \frac{1}{2}$. Deci nu putem trage nici o concluzie. Dar aplicând acelaşi raționament pntru restricțiile funcțiilor g, respectiv h la intervalul $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, obținem: $\int_0^{1/2} g(x)dx = \frac{1}{8}$ și $\int_0^{1/2} h(x)dx = \frac{3}{8}$. Folosind observația de la consecința 3.2.6, deducem că funcția f nu este integrabilă pe [0, 1].

3.3. Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann

Definiția : O mulțime $A \subset R$ se numeşte mulțime neglijabilă (sau de măsură Lebesgue nulă) dacă: pentru orice $\varepsilon > 0$, există un şir $(I_n)_n$ de intervale mărginite, de numere reale astfel încât: $\sum_{n=0}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon$ şi $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$, unde $l(I_n)$ reprezintă lungimea obşnuită a intervalului I_n.

Se poate arăta că mulțimile neglijabile au proprietățile:

i) Dacă $A \subset R$ este finită (în particular A=∅) atunci A este negliabilă.
ii) Dacă B este neglijabilă şi $A \subset B$, atunci A este neglijabilă.

iii) Dacă $(A_n)_{n\in N}$ este un şir de mulţimi neglijabile, atunci $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ este neglijabilă. De exemplu, orice mulţime cel mult numărabilă este neglijabilă (în particular N, Z, Q sunt mulţimi neglijabile)

3.3.1 **<u>Teoremă</u>** : (Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann)

Fie $f:[a,b]\to R$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) funcţia f este integrabilă Riemann
2) funcţia f este mărginită şi mulţimea D_f a punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă.

3.3.2. **<u>Observaţie</u>** foarte utilă în aplicaţii: Deducem din T 3.3.1 că dacă funcţia $f:[a,b]\to R$ este mărginită pe compactul [a, b] şi are un număr finit de puncte de discontinuitate, atunci funcţia f este integrabilă pe [a, b].

3.3.3. **<u>Consecinţă</u>** : Dacă $f:[a,b]\to R$ este continuă pe [a, b], atunci f este integrabilă.

<u>Demonstraţie</u> : Evident funcţia f este mărginită (teorema lui Weierstrass) şi mulţimea punctelor de discontinuitate este vidă, deci neglijabilă.

3.3.4 **<u>Consecinţă</u>** : Dacă $f:[a,b]\to R$ este integrabilă, atunci şi funcţia $|f|:[a,b]\to R$ este integrabilă pe [a, b] şi $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ (*)

<u>Demonstraţie</u> : Deoarece funcţia f este integrabilă, rezultă că f este mărginită, deci şi $|f|$ este mărginită. Avem $D_{|f|}\subset D_f$, iar D_f este neglijabilă, deci şi $D_{|f|}$ este neglijabilă. Relaţia (*) se găseşte în toate manualele de matematică, de aceea vom omite demonstraţia.

3.3.5 **<u>Observaţie</u>** : Reciproca nu este adevărată. Funcţia *f*: $[0,1]\to R$, $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in Q\\ 1, & x\in R\setminus Q\end{cases}$ nu este integrabilă, dar $|f|=1,\ \forall\ x\in[0,1]$ este integrabilă.

3.3.6. **<u>Consecinţă</u>** : Dacă $f:[a,b]\to R$ este integrabilă, iar $[c,d]\subset[a,b]$, atunci $g=f\big|_{[c,d]}$ este funcţie integrabilă.

<u>Demonstraţie</u> : Din *f* mărginită, rezultă g mărginită. Avem $D_g\subset D_f$, iar D_f este neglijabilă; deci D_g este neglijabilă. Atunci g este integrabilă.

3.3.7. <u>Consecință</u> : Dacă $f, g : [a,b] \to R$ sunt integrabile pe [a, b], atunci funcția $h : [a,b] \to R$, $h = \alpha f + \beta g$ este integrabilă pe [a, b], pentru orice $\alpha, \beta \in R$.

<u>Demonstrație</u> : Dacă f, g sunt integrabile pe [a, b], atunci sunt mărginite pe [a, b] şi deci funcția h este mărginită. Cum funcțiile f şi g sunt integrabile, rezultă că mulțimile D_f , respectiv D_g sunt neglijabile şi prin urmare $D_{\alpha f} \cup D_{\beta g}$ este neglijabilă. Cum

$D_h \subset D_{\alpha f} \cup D_{\beta g}$, rezultă că D_h este neglijabilă.

3.3.8. <u>Observație</u> : Reciproca nu este adevărată. Fie $f : [a,b] \to R$, $f(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [a,b] \cap Q \\ -1, \ x \in [a,b] \setminus Q \end{cases}$ şi $g : [a,b] \to R$, $g(x) = \begin{cases} -1, \ x \in [a,b] \cap Q \\ 1, \ x \in [a,b] \setminus Q \end{cases}$. Constatăm că $f + g : [a,b] \to R, (f+g)_{(x)} = 0, \forall\, x \in [a,b]$ este integrabilă, dar f este neintegrabilă.

3.3.9. <u>Consecință</u> : Dacă $f, g : [a,b] \to R$ sunt integrabile pe [a, b], atunci $f \cdot g$ este integrabilă pe [a, b].

3.3.10. <u>Observație</u> : Reciproca nu este adevărată. Funcția $f : [a,b] \to R$, $f(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [a,b] \cap Q \\ -1, \ x \in [a,b] \setminus Q \end{cases}$ nu este integrabilă pe [a, b], dar $f_2 : [a,b] \to R$, $f^2(x) = 1, \quad \forall\, x \in [a,b]$ este integrabilă.

3.3.11. <u>Consecință</u> : Dacă f, g sunt integrabile pe [a, b] şi dacă f^g este definită pe [a, b], atunci f^g este integrabilă pe [a, b].

3.3.12. <u>Consecință</u> : Dacă f este integrabilă pe [a, b], $f(x) \neq 0$ pentru orice x $\in [a,b]$ şi dacă $\dfrac{1}{f}$ este mărgintă, atunci $\dfrac{1}{f}$ este integrabilă pe [a,b].

3.3.13. **<u>Observație</u>** : Prin compunerea a două funcții integrabile nu se obține întotdeauna o funcție integrabilă. Considerăm funcția lui Riemann, $f:[0,1]\to R$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1]\setminus Q \ sau \ x=0\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q},\ (p,q)=1,\ q\in N^*\end{cases}$ .s

Dacă $g:[0,1]\to\{0,1\}$, $g(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\in(0,1]\end{cases}$ am arătat în **3.2.7** şi respectiv în **3.2.9** că cele două funcții sunt integrabile pe [0, 1]. Fie $h:[0,1]\to R$, $h=g\circ f$. Avem: $h(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1]\setminus Q \ sau \ x=0\\ 1, & x\in[0,1]\cap Q\end{cases}$, funcție care nu este integrabilă.

3.3.14. **<u>Observație</u>** : Compunerea $h=g\circ f$ dintre o funcție integrabilă f şi o funcție continuă g este o funcție integrabilă. ([4]).

Bibliografie

1. Aramă L., Moroza T., Culegere de probleme de calcul diferențial şi integral, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967
2. Andrica D., Berinde V., Concursul interjudețean de matematică, “Grigore Moisil”, Editura Cub Press, Baia Mare
3. Becheanu M. şi colaboratori, Olimpiade de matematică, 1990-1996, Editura Gil, Zalău, 1997
4. Burtea M., Burtea G., Matematică, clasa a XII-a, Editura Carminis, Piteşti, 2001
5. Crăciun C., Asupra unor operații cu funcții integrabile, G.M. 2/1988
6. Ganga M., Teme şi probleme de matematică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981
7. Konerth O., În legătură cu integrabilitatea funcțiilor de “tip Dirichlett”, G.M. 3/1985
8. Mortici C., 600 de probleme, Editura Gil, 2001
9. Nicolescu M., Dinculeanu N., Marcus S., Analiză matematică, E.D.P., Bucureşti, 1962
10. Muntean I., Asupra primitivității şi integrabilității funcțiilor continue, G.M.A. 4/1981
11. Sirețchi Gh., Calcul diferențial şi integral, Vol I, II, E.D.P., Bucureşti, 1985

Probleme rezolvate

R3.4.1 a) Să se arate că există funcții integrabile care nu admit primitive.

b) Să se arate că există funcții care au primitive, dar care nu sunt integrabile.

Soluție :

a) Funcția $f:[-1,1]\to R,\ f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ are un singur punct de discontinuitate, x = 0. Din observația 3.3.2 deducem că *f* este integrabilă. Cum $f([-1,1])=\{-1,0,1\}$, deci imaginea nu este interval, deducem că funcția *f* nu are proprietatea lui Darboux. Prin urmare, nu are primitive.

b) Considerăm funcțiile

$g:[-1,1]\to R,\ g(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ şi

$G:[-1,1]\to R,\ G(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. Se verifică că G este derivabilă pe [-1,1] şi $G'(x)=g(x),\quad \forall\quad x\in[-1,1]$, deci G este primitivă pentru g.

Avem: $g\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)=-2\sqrt{2n\pi}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)=-\infty$. Deci g nu este nemărginită pe [-1,1]. Prin urmare, g nu este integrabilă.

R3.4.2 Dacă funcția $f:[a,b]\to R$ este integrabilă pe [a, b], atunci funcția sin *f* este integrabilă pe [a, b].

Soluție :

Funcția sin *f* este mărginită, iar mulțimea discontinuităților este aceeaşi cu a discontinuităților lui *f*, deci neglijabilă.

R3.4.3 Fie $f,g:[a,b]\to R$ două funcții integrabile pe [a, b], iar $h:[a,b]\to R$, $h(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[a,b]\cap Q\\ g(x), & x\in[a,b]\setminus Q\end{cases}$. Atunci *h* integrabilă $\Leftrightarrow f(x)=g(x)$, în toate punctele de continuitate ale lui *f* şi ale lui g.

Soluție :

Fie A, B mulțimea discontinuităților lui *f*, respectiv g. din teorema T 3.3.1 rezultă că A şi B sunt mulțimi neglijabile şi că *f* şi g sunt funcții mărginite.

"$\Rightarrow$" Fie $x_0\in[a,b]\setminus A\cup B$ şi să presupunem că $f(x_0)\neq g(x_0)$, spre exemplu $f(x_0)>g(x_0)$. Atunci există $\delta>0$ astfel încât $f(x)>g(x)$, pentru orice $x \in [a,b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \overset{not}{=} J$. Deducem că h este discontinuă pe intervalul J. Contradicție cu h este integrabilă pe [a, b], deci şi pe J. Atunci $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in [a,b] \setminus A \cup B$.

"$\Leftarrow$" Fie $x_0 \in [a,b] \setminus A \cup B$. Arătăm că dacă $f(x_0) = g(x_0)$, atunci h este continuă în x_0. Vom folosi definiția cu vecinătăți a continuității unei funcții într-un punct, adică vom arăta că: $\forall$ V o vecinătate a lui $h(x_0)$, $\exists$ U vecinătate a lui x_0, astfel încât pentru orice $x \in U \cap [a,b]$ avem $h(x) \in V$. Fie V o vecinătate a lui $h(x_0) = f(x_0) = g(x_0)$. Cum f este continuă în x_0, $\exists$ U_1 vecinătate a lui x_0, astfel încât $\forall\ x \in U_1 \cap [a,b]$, avem $f(x) \in V$; analog $\exists$ U_2 vecinătate a lui x_0, astfel încât $\forall\ x \in U_2 \cap [a,b]$ avem $g(x) \in V$. Luând $U = U_1 \cap U_2$, care este vecinătate a lui x_0, observăm $h(x) \in V$, pentru orice $x \in U \cap [a,b]$. Într-adevăr: dacă $x \in (Q \cap U) \cap [a,b] \Rightarrow h(x) = f(x) \in V$, iar dacă $x \in (R \setminus Q) \cap U \cap [a,b]$, atunci $h(x) = g(x) \in V$.

<u>Observație</u> : Deducem că:

Dacă funcțiile $f, g : [a,b] \to R$ sunt continue pe [a, b] şi $f \neq g$, atunci funcția $h : [a,b] \to R$, $h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b] \cap Q \\ g(x), & x \in [a,b] \setminus Q \end{cases}$ nu este integrabilă pe intervalul [a,b].

R3.4.4 Fie $f : [a,b] \to R$ o funcție integrabilă. Dacă f este egală cu o constantă λ pe o mulțime A densă în [a, b], atunci $\int_a^b f(x)dx = \lambda(b-a)$.

<u>Soluție</u> :

Fie $\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ o diviziune oarecare a intervalului [a, b] cu $\|\Delta\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Cum A este densă în [a, b], $\exists\ \xi_i \in A \cap [x_{i-1}, x_i]$, $\forall\ i = \overline{1,n}$.

Atunci: $\sigma_{\Delta n}(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(x_1 - x_{i-1}) = \lambda(b-a)$.

Atunci: $\lambda(b-a) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i) = \int_a^b f(x)dx$.

R3.4.5 Fie $f : [0,1] \to R$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}, & x = \dfrac{1}{n},\ n \in N^* \\ 0, & x \neq \dfrac{1}{n},\ n \in N^* \end{cases}$. Să se arate că f este integrabilă pe [0, 1] şi să se calculeze $\int_0^1 f(t)dt$.

Soluție :

Mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției *f* este neglijabilă, deci funcția este integrabilă. Aplicând concluzia problemei R3.4.4, obținem că $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

R3.4.6 Fie a<b numere reale , iar *f*, g: [a, b] două funcții cu proprietățile:

a) Funcția *f* admite primitive și este mărginită superior

b) Pentru orice x, y $\in$ [a, b], x<y avem

$$g(y) - g(x) \geq (y - x) \sup_{t \in (x,y)} f(t).$$

Să se arate că g este integrabilă.

Soluție :

Considerăm F: $[a,b] \to R$, primitivă pentru *f* și x, y $\in$ [a, b], cu x<y. Rezultă că există c $\in (x, y)$:

$F(y) - F(x) = (y - x) f(c) \leq (y - x) \sup_{t \in [x,y]} f(t) \leq g(y) - g(x)$, adică:

$F(y) - g(y) \leq F(x) - g(x)$. Prin urmare, funcția $h: [a,b] \to R$, $h = F - g$ este descrescătoare, deci integrabilă.

Funcția F fiind derivabilă, este integrabilă. Cum F este integrabilă și h este integrabilă, rezultă că $g = F - h$ este integrabilă.

R3.4.7 Să se arate că funcția $f : [0,1] \to R$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

este integrabilă pe [0, 1].

Soluție :

Legea funcției *f* este:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{x} - n, \ \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} - 2, \ \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} - 1, \ \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Fie $\Delta = (0 = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = 1)$ o diviziune oarecare a intervalului [0, 1]. Arătăm că $S_{(f,\Delta)} - s_{(f,\Delta)} < \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$, este arbitrar. Pot apărea două situații:

a) $\dfrac{1}{n+1} < x_k < \dfrac{1}{n}, \quad \dfrac{1}{n+1} < x_{k+1} < \dfrac{1}{n}$

b) $\dfrac{1}{n+1} < x_k < \dfrac{1}{n}, \quad \dfrac{1}{n} < x_{k+1} < \dfrac{1}{n-1}$.

În cazul a)

$$M_k - m_k = f(x_k) - f(x_{k+1}) = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1} \cdot x_k} < \frac{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)(n+1)^2}{1} = \frac{n+1}{n}.$$

Atunci: $S_{(f,\Delta)} - s_{(f,\Delta)} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(M_k - m_k\right)\left(x_{k+1} - x_k\right) \le \sum_{k=0}^{n-1}\left(M_k - m_k\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) <$

$< \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{n+1}{n} \cdot \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} \quad \to 0$, când $n \to \infty$.

În cazul b) $M_k - m_k = 1$, iar $x_{k+1} - x_k < \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2}{(n-1)(n+1)}$. Obținem:

$$S_{(f,\Delta)} - s_{(f,\Delta)} \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \frac{2n}{(n-1)(n+1)} \to \quad 0, \text{ când } n \to \infty.$$

Din a) şi b), pe baza criteriului de integrabilitate Darboux, deducem că funcția f este integrabilă.

R3.4.8 Fie a, b $\in R$, cu $a < b$, iar $f : [a,b] \to R$ o funcție integrabilă cu $\int_a^b f(x)dx \neq 0$. Arătați că există o diviziune $\Delta = \left(a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\right)$ a lui [a,b] astfel încât: $\int_a^{x_1} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = ... = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$.

Vom demonstra mai întâi următoarea:

<u>Lemă</u> : Dacă $f : [a,b] \to R$ este integrabilă, atunci funcția F: $[a,b] \to R$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ este continuă.

Într-adevăr: f integrabilă $\Rightarrow$ f mărginită: $m \le f(x) \le M$, $\forall\, x \in [a,b]$.

Atunci: $m(x - x_0) \le F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \le M\,(x - x_0)$.

Obținem că $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$, deci F continuă.

<u>Soluția problemei</u> :

Fie $k \in \{1,2,...,n-1\}$. Este suficient să arătăm că există $x_k \in (a,b)$, $k = \overline{1, n-1}$ astfel încât: $\int_a^{x_k} f(x)dx = \dfrac{k}{n} f(x)dx$. Considerăm funcția

$g:[a,b]\to R$, $g(x)=\int_a^x f(t)dt-\dfrac{k}{n-k}\int_x^b f(t)dt$. Rezultă pe baza lemei că g este continuă. Dar $g(a)\cdot g(b)=\dfrac{-k}{n-k}I^2<0$, unde $I=\int_a^b f(x)dx$. Atunci există $c\in(a,b)$astfel încât $g(c)=0$. Fie $x_k=c$. Deci: $\int_a^{x_k} f(t)dt=\frac{k}{n-k}\left(I-\int_a^{x_k} f(t)dt\right)$, de unde obținem: $\int_a^{x_k} f(t)dt=\frac{k}{n}\int_a^b f(t)dt$.

R3.4.9 Fie $f:[0,1]\to R$ integrabilă Riemann, astfel încât $f(x)=\dfrac{1}{2}\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right]$, $\forall\, x\in[0,1]$. Demonstrați că f este constantă.

Soluție :

Avem: $f\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left[f\left(\dfrac{x}{4}\right)+f\left(\dfrac{x+2}{4}\right)\right]$

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x+1}{4}\right)+f\left(\frac{x+3}{4}\right)\right].$$

Prin inducție obținem că: $f(x)=\dfrac{1}{2^n}\left[f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)+f\left(\dfrac{x+1}{2^n}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{x+2^n-1}{2^n}\right)\right]$, $\forall\, n\in N^*$. Considerăm diviziunea $\Delta_n=\left(0,\dfrac{1}{2^n},\dfrac{2}{2^n},\ldots,\dfrac{2^n-1}{2^n},1\right)$, cu $\|\Delta_n\|=\dfrac{1}{2^n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ şi punctele intermediare $\xi_i=\dfrac{x+2^i-1}{2^n}$. Trecând la limită, obținem: $f(x)=\int_0^1 f(t)dt=$constant.

R3.4.10 Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{1\le i<j\le n}\cos\dfrac{i}{n}\cdot\cos\dfrac{j}{n}$.

Soluție :

Avem egalitatea:

$\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{1\le i<j\le n}\cos\dfrac{i}{n}\cdot\cos\dfrac{j}{n}=\dfrac{1}{2n^2}\left[\left(\sum\limits_{k=1}^n\cos\dfrac{k}{n}\right)^2-\sum\limits_{k=1}^n\cos^2\frac{k}{n}\right]$. Dar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^n\cos\frac{k}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\cos\frac{k}{n}\right)^2=\left(\int_0^1\cos x\,dx\right)^2=\sin^2 1.$$

Pe de altă parte, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1\cos^2 x\,dx=0$.

Deci : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}\cos\frac{i}{n}\cdot\cos\frac{j}{n}=\frac{\sin^2 1}{2}$.

R3.4.11 Fie $f:[0,1]\to R$ o funcție derivabilă cu derivata integrabilă pe [0, 1]. Să se arate că: $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\frac{f(0)-f(1)}{2}$.

<u>Soluție</u> :

Fie $\Delta=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n-1}{n},1\right)$ o diviziune a intervalului [0, 1]. Notăm $M_k=\sup\left\{f'(x)\,\middle|\,x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\right\}$, $m_k=\inf\left\{f'(x)\,\middle|\,x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\right\}$, k=1, 2, …, n.

Atunci: $E_n=$

$$n\left[\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=n\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=$$

$=n\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx\right]$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $\left[x,\frac{k}{n}\right]$, există $c_k(x)\in\left(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right)$ astfel încât $f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)=\left(x-\frac{k}{n}\right)f'(c_k(x))$. Atunci:

$E_n=n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)f'(c_k(x))dx$. Dar $m_k\le f'(u_k(x))\le M_k$ deci $-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}M_k\le E_n\le-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}m_k$. Trecând la limită, obținem:

$-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx\le\lim\limits_{n\to\infty}E_n\le-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx$. Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty}E_n=\frac{f(0)-f(1)}{2}$.

4. Metode de calcul a integralelor definite

Pentru început vom reaminti câteva teoreme utile în calculul integralelor definite.

4.1. Metode de integrare a funcţiilor

4.1.1. Teoremă (Formula de integrare prin părţi)

Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ sunt două funcţii derivabile, cu derivate continue, atunci

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

4.1.2. Teoremă (Formula de schimbare de variabilă)

Fie $[a,b]\xrightarrow{\varphi}J\xrightarrow{f}\mathbf{R}$ (J interval din $\mathbf{R}$) două funcţii cu proprietăţile:

1) f este continuă pe J

2) φ este derivabilă, cu derivata continuă pe $[a,b]$.

Atunci

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \tag{4.1.1}$$

4.1.3. Observaţie. a) Dacă $[a,b]\xrightarrow{\varphi}[c,d]\xrightarrow{f}\mathbf{R}$ sunt două funcţii cu proprietăţile:

1') f este continuă pe $[c,d]$

2') φ este bijectivă, φ şi φ^{-1} derivabile cu derivate continue,

atunci

$$\int_a^b f(\varphi(t))dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)(\varphi^{-1})'(x)dx$$

Această egalitate se mai numeşte şi a doua formulă de schimbare de variabilă.

b) Datorită formulei Leibniz-Newton toate schimbările de variabilă prezentate la primitive se pot aplica şi la calculul integralei definite.

4.1.4. Propoziţie. Fie $\alpha\in(0,\infty]$ şi $f:(-\alpha,\alpha)\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă. Atunci avem:

(i) $\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx, (\forall)a,b\in(-\alpha,\alpha)$

În particular: $\int_0^a f(-x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx, (\forall)a\in(-\alpha,\alpha)$

(ii) Dacă f pară atunci $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

(iii) Dacă *f* impară atunci $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Demonstrație. (i) Se face substituția $t = -x$.

(ii) din (i) $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$, de unde

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

(iii) din (i) $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$, de unde

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$.

4.1.5. Corolar. Fie $\alpha \in (0,\infty]$ și $f : (-\alpha,\alpha) \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci

(i) Dacă *f* pară $\Rightarrow \int_{-a}^{a} xf(x)dx = 0, (\forall) a \in (-\alpha,\alpha)$

(ii) Dacă *f* impară $\Rightarrow \int_{-a}^{a} xf(x)dx = 2\int_{0}^{a} xf(x)dx, (\forall) a \in (-\alpha,\alpha)$

(iii) Dacă *f* arbitrară $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x^2)dx = 2\int_{0}^{a} f(x^2)dx$ și

$\int_{-a}^{a} xf(x^2)dx = 0, (\forall) a \in (-\alpha,\alpha)$

Demonstrație. (i) Dacă *f* este pară rezultă că funcția *xf* este impară, deci conform Propoziției 4.1.4 $\int_{-a}^{a} xf(x) = 0$.

(ii) Se procedează ca la (i).

(iii) Rezultă din (i) și (ii) ținând seama că funcția $f(x^2)$ (respectiv $xf(x^2)$) este pară (respectiv impară).

4.1.6. Exemplu. $(\forall) a \in \mathbf{R}$ avem:

$$\int_{-a}^{a} \cos x dx = 2\int_{0}^{a} \cos x dx, \quad \int_{-a}^{a} \sin x dx = 0, \quad \int_{-a}^{a} x^{2n+1} \cos x dx = 0 .$$

4.1.7. Propoziție. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci avem:

(i) *f* periodică de perioadă $T \Leftrightarrow \int_{x}^{x+T} f(t)dt = c$ (constantă), $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

(ii) Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) Orice primitivă a lui *f* este periodică de perioadă *T*.

b) *f* este periodică de perioadă *T*.

c) $\int_{x}^{x+T} f(t)dt = 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$

Demonstrație. (i) ($\Rightarrow$) din ipoteză $f(x+T) = f(x), (\forall) x \in \mathbf{R}$. Evident avem:

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_x^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{x+T} f(t)dt, (\forall)x \in \mathbf{R} \qquad (4.1.2)$$

Cu schimbarea de variabilă $t = \theta + T$, $\theta \in [0,T]$, ultima integrală devine:

$$\int_T^{x+T} f(t)dt = \int_0^x f(\theta + T)d\theta = \int_0^x f(\theta)d\theta, (\forall)x \in \mathbf{R} \qquad (4.1.3)$$

Din (4.1.2) şi (4.1.3) rezultă

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_x^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \int_0^T f(t)dt, (\forall)x \in \mathbf{R}$$

($\Leftarrow$) Presupunem că $\int_x^{x+T} f(t)dt = c, (\forall)x \in \mathbf{R}$ şi fie *F* o primitivă a lui *f*. Atunci din formula Leibniz-Newton $c = F(x+T) - F(x), (\forall)x \in \mathbf{R}$, deci prin derivare obţinem:

$$f(x+T) - f(x) = F'(x+T) - F'(x) = 0, (\forall)x \in \mathbf{R},$$

prin urmare *f* este periodică de perioadă *T*.

(ii) Să observăm că orice primitivă a lui *f* este periodică de perioadă *T* $\Leftrightarrow (\exists)g$ o primitivă a lui *f*, periodică de perioadă T $\Leftrightarrow$ funcţia $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \in \mathbf{R}$ este periodică de perioadă *T*.

a) $\Rightarrow$ c) Dacă a) este adevărat, atunci *F* este periodică de perioadă *T*, deci conform formulei Leibniz-Newton avem:

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = F(x+T) - F(x) = 0, (\forall)x \in \mathbf{R}$$

c) $\Rightarrow$ b) rezultă din (i).

b) $\Rightarrow$ a) Dacă *f* este periodică de perioadă *T* avem:

$$(F(x+T) - F(x))' = f(x+T) - f(x) = 0, (\forall)x \in \mathbf{R}$$

deci $(\exists)c \in \mathbf{R}$ astfel încât $F(x+T) - F(x) = c, (\forall)x \in \mathbf{R}$. Atunci

$$c = F(0+T) - F(0) = \int_0^T f(t)dt = 0, \quad \text{deci} \quad F(x+T) = F(x), (\forall)x \in \mathbf{R},$$

deci *F* este periodică de perioadă *T*.

4.1.8. Propoziţie. Fie $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă *T*. Atunci

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x)dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx$$

Demonstraţie. $(\forall)t \in \mathbf{R}_+ (\exists)n = n(t) \in \mathbf{N}$ şi $a = a(t) \in [0,T]$ astfel încât $t = nT + a$, deci $\int_0^t f(x)dx = \int_0^{nT} f(x)dx + \int_{nT}^t f(x)dx$. Evident avem

$$\int_0^{nT} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)dx,$$

deci cu schimbarea de variabilă $x = \theta + kT$, $\theta \in [0,T]$ deducem:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(x)dx = \int_0^T f(\theta + kT)d\theta = \int_0^T f(\theta)d\theta,$$

deci $\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$. În fine, cu schimbarea de variabilă $x = \theta + nT$, $\theta \in [0,T]$ deducem

$$\int_{nT}^{t} f(x)dx = \int_0^{t-nT} f(\theta + nT)d\theta = \int_0^a f(\theta)d\theta,$$

deci

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(x)dx = \frac{n(t)}{t}\int_0^T f(x)dx + \frac{1}{t}\int_0^{a(t)} f(x)dx \qquad (4.1.4)$$

Cum avem:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{T + \frac{a(t)}{n(t)}} = \frac{1}{T} \qquad (4.1.5)$$

şi

$$\frac{1}{t}\left|\int_0^{a(t)} f\right| \le \frac{1}{t}\int_0^{a(t)} |f| \le \frac{1}{t}\int_0^T |f|, (\forall)t \in \mathbf{R}_+^*,$$

rezultă

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^{a(t)} f(x)dx = 0. \qquad (4.1.6)$$

Din (4.1.4), (4.1.5) şi (4.1.6) rezultă că $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$.

4.1.9. Corolar. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă *T*. Atunci

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(xt)dx = \frac{b-a}{T}\int_a^T f(x)dx, (\forall)a,b \in \mathbf{R}.$$

Demonstraţie. Punem $xt = y$ şi obţinem:

$$\int_a^b f(xt)dx = \frac{1}{t}\int_{at}^{bt} f(y)dy = b\left(\frac{1}{tb}\int_0^{tb} f(y)dy\right) - a\left(\frac{1}{ta}\int_0^{ta} f(y)dy\right).$$

Trecem mai departe la limită $t\to\infty$ ţinând cont de Propoziţia 4.1.8.

4.1.10. Propoziţie. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f: I \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Atunci $(\forall)J \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $\varphi,\psi: J \to I$ două funcţii derivabile, rezultă că funcţia $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt, x \in J$ este derivabilă şi avem relaţia:

$$F'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x), (\forall)x \in J$$

Demonstraţie. Fie $g(y) := \int_a^y f(t)dt, y \in I$ unde *a* este fixat în *I*. Atunci *g* este derivabilă şi avem $g'(y) = f(y), (\forall)y \in I$. Evident putem scrie:

$$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{a} f(t)dt+\int_{a}^{\psi(x)} f(t)dt=-g(\varphi(x))+g(\psi(x)),(\forall)x\in J\,,$$

deci

$$F'(x)=-g'(\varphi(x))\varphi'(x)+g'(\psi(x))\psi'(x)=$$
$$=-f(\varphi(x))\varphi'(x)+f(\psi(x))\psi'(x),(\forall)x\in J$$

4.1.11. Corolar. Fie $I\subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f:I\to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Atunci $(\forall)J\subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $\varphi:J\to I$ o funcţie derivabilă, rezultă că funcţia $F(x)=\int_{a}^{\varphi(x)} f(t)dt,\ x\in J$ este derivabilă şi avem

$$F'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x),(\forall)x\in J\,.$$

Bibliografie

[1] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral*, vol. I şi II, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[2] V. Arsinte, *Probleme elementare de calcul integral*, Ed. Univ. Bucureşti, 1995.

[3] D. Buşneag, I. Maftei, *Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor*, Ed. Scrisul Românesc, 1983.

[4] Gh. Schneider, *Culegere de probleme de analiză matematică pentru clasele XI-XII*, Ed. Hyperion, 1997.

Probleme rezolvate

(i) **Calculul integralei definite folosind relații de recurență**

R4.2.1. Fie $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, n \in \mathbf{N}$. Să se demonstreze că:

(i) $I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}, (\forall) k \geq 2, k \in \mathbf{N}$

(ii) $I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}; \quad I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ unde

$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)$. $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k)$, $k \in \mathbf{N}^*$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} I_{2n} = 0$

(iv) $I_{n+1} \leq I_n, (\forall) n \geq 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} C_{2n}^n \sqrt{n\pi} = 1$ (formula lui Wallis)

Soluție. (i) prin părți $I_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k x dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^{k-1} x (\cos x)' dx =$

$= -\sin^{k-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (k-1) \sin^{k-2} x \cos^2 x dx =$

$= \int_0^{\pi/2} (k-1) \sin^{k-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (k-1) I_{k-2} - (k-1) I_k$, de unde

$I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}$.

(ii) Dând valorile pare pentru k de la 2 la $2n$ în egalitatea de la (i) vom obține relațiile:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2$$

....

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}.$$

Înmulțind membru cu membru obținem

$$I_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$$

Analog dând valorile impare pentru k de la 1 la $2n+1$ obținem cealaltă egalitate.

(iii) Fie șirul $a_n = I_{2n} \frac{2}{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} > 0$ și cum $2k-1 < 2k, k = \overline{1,n}$

rezultă că $a_n < 1$, deci şirul $(a_n)_n$ este mărginit. Cum $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$ rezultă că şirul este descrescător, prin urmare convergent.

Fie $b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ... \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot 1 > \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} = a_n$ rezultă că

$a_n^2 < a_n \cdot b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ... \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n} = \frac{3}{8n}$, rezultă că $0 < a_n < \sqrt{\frac{3}{8n}}$ şi conform criteriului cleştelui rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} I_{2n} = 0$.

(iv) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $0 \le \sin x \le 1$, deci

$0 \le \sin^{2k+1} x \le \sin^{2k} x \le \sin^{2k-1} x \le 1$, de unde $I_{2k+1} \le I_{2k} \le I_{2k-1}, (\forall) k \ge 1$. Rezultă că $I_{n+1} \le I_n, (\forall) n \ge 1$. Avem $1 \le \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}(2n+1)$ şi $I_{2n} \le I_{2n-1}$ adică

$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2} \le \frac{1}{2n} \,|\cdot (2n+1)$ rezultă că

$1 \le \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2} \cdot \frac{\pi}{2}(2n+1) \le \frac{2n+1}{2n}$. Trecând la limită şi aplicând criteriul cleştelui avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$.

(v) $\frac{1}{4^n} C_{2n}^n \sqrt{n\pi} = \frac{1}{(2^n)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sqrt{n\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \sqrt{n\pi} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sqrt{n\pi} =$

$= \sqrt{\frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2} \cdot n\pi} = \sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n-1}}}$ şi conform (iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} C_{2n}^n \sqrt{n\pi} = 1$.

R4.2.2. Să se stabilească o relaţie de recurenţă pentru integrala

$$I_n = \int_0^1 x^{2n} \sqrt{1-x^2 dx}, (\forall) n \in \mathbf{N}$$

şi să se calculeze valoarea sa.

Soluţie. $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Facem substituţia $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$ şi $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$. Aşadar

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}$$

Aplicând formula de integrare prin părţi avem:

$$I_n = \int_0^1 x^{2n-1} (x\sqrt{1-x^2}) dx = -\frac{1}{3} x^{2n-1} (1-x^2)^{3/2} \Big|_0^1 + \frac{2n-1}{3} \int_0^1 x^{2n-2} (1-x^2)^{3/2} dx =$$

$$=\frac{2n-1}{3}\left(\int_0^1 x^{2n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx-\int_0^1 x^{2n}\sqrt{1-x^2}\,dx\right)=\frac{2n-1}{3}(I_{n-1}-I_n)$$

de aici $I_n=\frac{2n-1}{2n+2}I_{n-1}$. Dând valori lui n obținem succesiv:

$$I_1=\frac{1}{4}I_0,\ I_2=\frac{3}{6}I_1,\ I_3=\frac{5}{8}I_2,\dots,I_n=\frac{2n-1}{2n+2}I_{n-1}.$$

Înmulțind relațiile între ele membru cu membru obținem:

$$I_n=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

(ii) Identități deduse prin integrare

R4.2.3. a) Să se calculeze în două moduri integrala

$$\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n\,dx,\quad m,n\in\mathbf{N}$$

şi de aici, să se deducă identitatea:

$$\frac{1}{m+1}C_n^0-\frac{1}{m+2}C_n^1+\frac{1}{m+3}C_n^2-\dots+(-1)^n\frac{1}{m+n+1}C_n^n=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

b) Să se arate că $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ şi apoi să se calculeze suma $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!(p+1)\dots(p+k+1)}$.

c) Să se arate că $\int_0^1(1-x^2)^n\,dx=\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n}}{(2n+1)!}$ şi apoi să se stabilească identitatea:

$$C_n^0-\frac{C_n^1}{3}+\frac{C_n^2}{5}-\frac{C_n^3}{7}+\dots+\frac{(-1)^nC_n^n}{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Soluție. a) Calculăm mai întâi prin părți:

$$I_{m,n}=\int_a^b(x-a)^m(b-x)^n\,dx=$$

$$=-\frac{1}{n+1}(x-a)^m(b-x)^{n+1}\Big|_a^b+\frac{m}{n+1}\int_a^b(x-a)^{m-1}(b-x)^{n+1}\,dx$$

adică $I_{m,n}=\frac{m}{n+1}I_{m-1,n+1},(\forall)m,n\in\mathbf{N}$ de unde

$$I_{m,n}=\frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n+m}I_{0,m+n}=\frac{m!n!}{(m+n)!}I_{0,m+n}$$

Dar $I_{0,m+n}=\int_0^b(b-x)^n\,dx=\frac{(b-a)^{m+n+1}}{m+n+1}$ de unde

$$I_{m,n}=\frac{m!n!(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \tag{4.2.1}$$

Făcând schimbarea de variabilă $x-a=t$ şi dezvoltând după binomul lui Newton, calculăm în al doilea mod integrala $I_{m,n}$. Deci:

$$I_{m,n}=\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n\,dx=\int_0^{b-a} t^m(b-a-t)^n\,dt \overset{b-a=d}{=}$$

$$=\int_0^d t^m(C_n^0 d^n - C_n^1 d^{n-1}t+\ldots+(-1)^n C_n^n t^n)dt=$$

$$=d^{m+n+1}\left(\frac{1}{m+1}C_n^0-\frac{1}{m+2}C_n^1+\frac{1}{m+3}C_n^2+\ldots+(-1)^n\frac{1}{m+n+1}C_n^n\right)$$

Egalând rezultatele obţinute în cele două moduri obţinem identitatea cerută.

b) Aplicăm a) pentru $a=0, b=1$ şi obţinem

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!(p+1)\ldots(p+k+1)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k p!}{(n-k)!(p+k+1)!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!k!}\frac{p!k!}{(p+k+1)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k C_n^k\int_0^1 x^p(1-x)^k\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{n!}\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^p(1-x)^k\right)dx=$$

$$=\frac{1}{n!}\int_0^1 x^p[1-(1-x)]^n\,dx=\frac{1}{n!}\int_0^1 x^{n+p}\,dx=\frac{1}{(n+p+1)n!}$$

c) Folosind a) pentru $a=-1, b=1$ şi $m=n$ conform (4.2.1)

$\displaystyle\int_{-1}^1 (1-x^2)^n\,dx=\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!}$, de unde

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1(1-x^2)^n\,dx=\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Pe de altă parte dezvoltând $(1-x^2)^n$ după binomul lui Newton avem:

$$\int_{-1}^1(1-x^2)^n\,dx=\int_{-1}^1\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k x^{2k}\right)dx=C_n^0-\frac{C_n^1}{3}+\frac{C_n^2}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{C_n^n}{2n+1}$$

şi egalând rezultatele obţinem identitatea cerută.

(iii) Calculul integralei definite utilizând proprietăţile funcţiei de integrate (paritate, periodicitate, etc.)

R4.2.4. Fie $f:[x_0-r,x_0+r]\to\mathbf{R}$ continuă, cu proprietatea că:

$$af(x_0+x)+bf(x_0-x)=c,(\forall)x,\quad |x|\le r,\quad a,b\in\mathbf{R}^*,\quad c\in\mathbf{R}$$

Atunci: a) $\int_{x_0-r}^{x_0+r}f(x)dx=\dfrac{2cr}{a+b},\quad a+b\neq 0$

b) $\int_{x_0-r}^{x_0+r}f(x)dx=\dfrac{c}{a}r+\dfrac{a-b}{a}\int_{x_0}^{x_0+r}f(x)dx$

Soluție. Fie $\varphi,\psi:[-r,r]\to[x_0-r,x_0+r]$, $\varphi(t)=x_0+t$, $\psi(t)=x_0-t$. Cum $f:[x_0-r,x_0+r]\to\mathbf{R}$ e continuă, putem aplica schimbarea de variabilă

a) $\int_{x_0-r}^{x_0+r}f(x)dx=\int_{\varphi(-r)}^{\varphi(r)}f(x)dx=\int_{-r}^{r}f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_{-r}^{r}f(x_0+t)dt=$

$$=\int_{-r}^{r}\left(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}f(x_0-t)\right)dt=\frac{2cr}{a}-\frac{b}{a}\int_{-r}^{r}f(x_0-t)dt=\frac{2cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{-r}^{r}f(\psi(t))\psi'(t)dt=$$

$$=\frac{2cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{\psi(-r)}^{\psi(r)}f(x)dx=\frac{2cr}{a}-\frac{b}{a}\int_{x_0-r}^{x_0+r}f(x)dx,$$ de unde $\int_{x_0-r}^{x_0+r}f(x)dx=\dfrac{2cr}{a+b}$.

b) $\int_{x_0-r}^{x_0+r}f(x)dx=\int_{x_0-r}^{x_0}f(x)dx+\int_{x_0}^{x_0+r}f(x)dx$. Dar

$$\int_{x_0-r}^{x_0}f(x)dx=\int_{\varphi(-r)}^{\varphi(0)}f(x)dx=\int_{-r}^{0}f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_{-r}^{0}f(x_0+t)dt=$$

$$=\int_{-r}^{0}\left[\frac{c}{a}-\frac{b}{a}f(x_0-t)\right]dt=\frac{c}{a}r-\frac{b}{a}\int_{-r}^{0}f(x_0-t)dt=\frac{c}{a}r+\frac{b}{a}\int_{-r}^{0}f(\psi(t))\psi'(t)dt=$$

$$=\frac{c}{a}r+\frac{b}{a}\int_{\psi(-r)}^{\psi(0)}f(x)dx=\frac{c}{a}r+\frac{b}{a}\int_{x_0+r}^{x_0}f(x)dx.$$

De aici

$$\int_{x_0-r}^{x_0+r}f(x)dx=\frac{c}{a}r+\frac{b}{a}\int_{x_0+r}^{x_0}f(x)dx+\int_{x_0}^{x_0+r}f(x)dx=\frac{c}{a}r+\frac{a-b}{a}\int_{x_0}^{x_0+r}f(x)dx$$

R4.2.5. Funcția $f:[a-r,a+r]\to\mathbf{R}$ se numeşte a-pară dacă

$$f(a+x)=f(a-x),(\forall)x\quad\text{cu}\quad |x|\le r. \tag{4.2.2}$$

respectiv a-impară dacă

$$f(a+x)=-f(a-x),(\forall)x\quad\text{cu}\quad |x|\le r \tag{4.2.3}$$

a) Dacă f este continuă să se arate că:

$$\int_{a-r}^{a+r}f(x)dx=\begin{cases}2\int_{a}^{a+r}f(x)dx, & \text{daca}\quad f\quad\text{este}\quad a-\text{para}\\ 0, & \text{daca}\quad f\quad\text{este}\quad a-\text{impara}\end{cases}$$

b) În plus, produsul (câtul) a două funcții de a-parități diferite este o funcție a-impară, respectiv produsul (câtul) a două funcții de aceeaşi a-paritate este o funcție a-pară.

Soluție. a) Dacă f este a-pară, atunci aplicând rezultatul de la R4.2.4 pentru $x_0:=a, a:=1, b:=-1, c=0$ obținem rezultatul dorit.

Dacă *f* este *a*-impară, atunci aplicând R4.2.4 pentru $x_0 := a, a := 1,$ $b := 1, c = 0$ obținem rezultatul dorit.

b) Fie *f, g a*-pare, adică $f(a+x) = f(a-x), g(a+x) = g(a-x)$. rezultă $(f\cdot g)(a+x) = f(a+x)g(a+x) = f(a-x)g(a-x) = (f\cdot g)(a-x)$, deci $f\cdot g$ este *a*-pară. Analog se arată şi celelalte cazuri.

R4.2.6. Calculați $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x - \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx, n \in \mathbf{N}$.

Soluție. Fie $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\sin^n x - \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}$.

Avem $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f(x)$, de unde notând $t = \frac{\pi}{4} - x$ obținem $f\left(\frac{\pi}{4} - t\right) + f\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = 0, \quad |t| < \frac{\pi}{4}$ şi deci *f* este $\frac{\pi}{4}$-impară, deci conform R4.2.5 avem $\int_0^{\pi/2} f(x)dx = 0$.

R4.2.7. Fie $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin(\sin x)$ şi $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Să se arate că $(\forall) n \in \mathbf{N}$: $\int_0^{2n\pi} h(x)dx = \frac{n(\pi^2 - 8)}{4}$.

Soluție. Cum $g(x + 2k\pi) = \arcsin(\sin(x + 2k\pi)) = \arcsin(\sin x) = g(x)$ şi $f(x + 2k\pi) = f(x)$ rezultă că şi *h* este periodică de perioadă principală 2π. Explicitând pe *g* şi *h* pe intervalul $[0, 2\pi]$ avem:

$$g(x) = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \pi - x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \\ x - 2\pi, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \pi - x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \sin x, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Rezultă că $\int_0^{2n\pi} h(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} h(x)dx = n\int_0^{2\pi} h(x)dx =$

$$= n\left(\int_0^{\pi/2} xdx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin xdx\right) =$$

$$= n\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{(\pi - x)^2}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{n(\pi^2 - 8)}{4}$$

(iv) Alte tehnici particulare de schimbare de variabilă

R4.2.8. Calculați $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\mathrm{tg}x)dx$.

Soluție. Facem schimbarea de variabilă $t = \frac{\pi}{4} - x$, $dx = -dt$.

Dacă $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$, $\quad x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$, de unde

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\mathrm{tg}x)dx = -\int_{\pi/4}^{0} \ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{tg}x}\right)dx = \int_0^{\pi/4} [\ln 2 - \ln(\mathrm{tg}x+1)]dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\mathrm{tg}x)dx$$

Aşadar $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\mathrm{tg}x)dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

R4.2.9. a) Fie $a > 1$, $\quad f : \left[\frac{1}{a}, a\right] \to \mathbf{R}$ continuă, astfel încât

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = k, (\forall) x \in \left[\frac{1}{a}, a\right]$$

Să se calculeze $\int_{1/a}^{a} \frac{(x+1)f(x)}{x\sqrt{x^2+1}}dx$.

b) Calculați $\int_{1/2}^{1} \frac{(x+1)\mathrm{arctg}x}{x\sqrt{x^2+1}}dx$.

Soluție. a) Facem schimbarea de variabilă $t = \frac{1}{x}$, $\quad dx = -\frac{1}{t^2}dt$, dacă $x = \frac{1}{a} \Rightarrow t = a, x = a \Rightarrow t = \frac{1}{a}$. Deci

$$I = \int_{1/a}^{a} \frac{(x+1)f(x)}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \int_a^{1/a} \frac{\left(\frac{1}{t}+1\right)f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} \cdot \frac{-1}{t^2}dt = \int_{1/a}^{a} \frac{(t+1)f\left(\frac{1}{t}\right)}{t\sqrt{t^2+1}}dt =$$

$$= \int_{1/a}^{a} \frac{(t+1)(k-f(t))}{t\sqrt{t^2+1}}dt = k\int_{1/a}^{a} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + k\int_{1/a}^{a} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}} - I$$

De aici

$$I = \frac{k}{2}\left(\int_{1/a}^{a} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + \int_{1/a}^{a} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}\right) = k\left(\ln(a+\sqrt{1+a^2}) - \ln\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right)$$

b) Se observă că $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ pentru $x>0$, rezultă că pentru $a=2$ avem:

$$\int_{1/2}^{1}\frac{(x+1)\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{\pi}{2}\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

R4.2.10. Calculați $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^3 x dx}{e^x+1}$.

Soluție. Facem schimbarea de variabilă $t=-x, dx=-dt$, dacă $x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}$. Avem aşadar

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^3 x}{e^x+1}dx=-\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\frac{\cos^3(-t)}{e^{-t}+1}dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{e^t\cos^3 t}{e^t+1}dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 t dt-I$$

Rezultă că

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 t dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2 x)(\sin x)' dx=\frac{1}{2}\left(\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{2}{3}$$

R4.2.11. Calculați $\int_0^{\pi}\frac{(x+1)\sin x}{2-\sin^2 x}dx$.

Soluție. $I=\int_0^{\pi}\frac{(x+1)\sin x}{2-\sin^2 x}dx=I_1+I_2$, unde $I_1=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{2-\sin^2 x}dx$ şi $I_2=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx$. Avem

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{2-\sin^2 x}dx=-\int_0^{\pi}(\pi-x-\pi)\frac{\sin(\pi-x)}{2-\sin^2(\pi-x)}dx=\\&=-\int_0^{\pi}(\pi-x)\frac{\sin(\pi-x)}{2-\sin^2(\pi-x)}dx+\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{2-\sin^2(\pi-x)}dx=\\&=-\int_0^{\pi}t\frac{\sin t dt}{2-\sin^2 t}+\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x dx}{2-\sin^2 x}=-I_1+\pi I_2\end{aligned}$$

deci $I_1=\frac{\pi}{2}I_2$, dar

$$I_2=-\int_0^{\pi}\frac{(\cos x)' dx}{1+\cos^2 x}=-\operatorname{arctg}(\cos x)\Big|_0^{\pi}=-\operatorname{arctg}(-1)+\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{2}$$

Deci $I=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}$.

5. Şiruri şi Integrala Riemann

Studiul convergenţei şirurilor început în clasa a XI-a necesită o revenire la studiul convergenţei acelor şiruri în care intervine integrala definită. Chiar dacă modul de abordare şi teoremele utilizate au fost studiate în cls. A XI-a, în noul context putem identifica noi clase de şiruri convergente.
Pe de altă parte, acest tip de probleme au fost propuse în ultimii ani la concursurile şi olimpiadele şcolare.

5.1. Calculul limitelor unor şiruri utilizând integrala definită

În acest paragraf ne propunem să calculăm limitele unor şiruri al căror termen general este definit printr-o sumă Riemann sau printr-o generalizare a acesteia.
Pentru rezolvarea acestei probleme reamintim criteriul de integrabilitate cu şiruri:

5.1.1. Teoremă

Fie $f:[a,b]\to R$ o funcţie. f este integrabilă dacă şi numai dacă $\forall(\Delta_n)_{n\geq 1}\subset \mathrm{D}[a,b]$, cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$ şi $\forall(\xi^n)_{n\geq 1}$ un şir de sisteme de puncte intermediare, cu ξ^n asociat lui $\Delta_n, n\geq 1$, şirul sumelor Riemann $(\sigma(f;\Delta_n,\xi^n))_{n\geq 1}$ este convergent.

În aceste condiţii echivalente, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(f;\Delta_n,\xi^n)=\int_a^b f(x)dx$.

5.1.2. Consecinţă

Fie $f:[a,b]\to R$ o funcţie integrabilă. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx$$

În particular, dacă $a=0$ şi $b=1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$

Demonstraţie

Pentru orice $n\geq 1$, fie Δ_n diviziunea echidistantă definită de punctele

$x_k^n=a+k\frac{b-a}{n}$, $k=\overline{0,n}$.

$x_k^n-x_{k-1}^n=\frac{b-a}{n}\Rightarrow \|\Delta_n\|=\frac{b-a}{n}\to 0$, când $n\to\infty$.

În fiecare interval $\left[x_{k-1}^n, x_k^n\right]$ alegem punctul intermediar la una din extremităţi : $\xi_k^n = x_k^n$.

Suma Riemann corespunzătoare este :

$$\sigma(f;\Delta_n,\xi^n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Din faptul că *f* este integrabilă rezultă, conform Teoremei 5.1.1,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(f;\Delta_n,\xi^n) = \int_a^b f(x)dx .$$

În continuare vom prezenta un rezultat care permite calculul limitelor unor şiruri de o formă mai generală.

5.1.3. Teoremă

Fie $f,g:[a,b]\to R$ integrabile Riemann, $\Delta_n = (x_0{}^n, x_1{}^n, ..., x_{k_n}{}^n)$, $\Delta_n \in D[a,b]$, $n\in N^*$, $\|\Delta_n\|\to 0$ când $n\to\infty$. Pentru orice $\alpha_i^n \in \left[m_i^n(f), M_i^n(f)\right]$ şi pentru orice $\beta_i^n \in \left[m_i^n(g), M_i^n(g)\right]$, $i=\overline{1,k_n}$ (unde $m_i^n(f) = \min\limits_{x\in[x_{i-1}^n, x_i^n]} f(x)$, $M_i^n(f) = \max\limits_{x\in[x_{i-1}^n, x_i^n]} f(x)$), şirul $a_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n}\alpha_i^n\beta_i^n\left(x_i^n - x_{i-1}^n\right)$ converge spre $\int_a^b f(x)g(x)dx$

Demonstraţie

Fie $I = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

$$|I-a_n| \le \left|I - \sum_{i=1}^{k_n} f\left(x_i^n\right)g\left(x_i^n\right)\left(x_i^n - x_{i-1}^n\right)\right| + \left|\sum_{i=1}^{k_n} f\left(x_i^n\right)\left[g\left(x_i^n\right) - \beta_i^n\right]\left(x_i^n - x_{i-1}^n\right)\right| +$$

$$\left|\sum_{i=1}^{k_n}\beta_i^n\left[f\left(x_i^n\right) - \alpha_i^n\right]\left(x_i^n - x_{i-1}^n\right)\right|$$

fg integrabilă Riemann $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1\in N^*$ astfel încât $\forall n\ge N_1$,

$$\left|I - \sum_{i=1}^{k_n}(fg)\left(x_i^n\right)\left(x_i^n - x_{i-1}^n\right) < \frac{\varepsilon}{3}\right| \qquad (1)$$

Pentru $\varepsilon>0$, $\exists N_2\in N^*$ astfel încât $\forall n\ge N_2$.

$$\left|\sum_{i=1}^{k_n} f\left(x_i^n\right)\left[g\left(x_i^n\right)-\beta_i^n\right]\left(x_i^n-x_{i-1}^n\right)\right| \le \max_{x\in[a,b]} f(x)\cdot\left[S\left(g,\Delta_n\right)-s\left(g,\Delta_n\right)\right] <$$

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)\cdot\frac{\varepsilon}{3\cdot\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)}=\frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

Analog, pentru $\varepsilon>0$, $\exists N_3\in N^*$ astfel încât $\forall n\ge N_3$,

$$\left|\sum_{i=1}^{k_n}\beta_i^n\left[f\left(x_i^n\right)-\alpha_i^n\right]\left(x_i^n-x_{i-1}^n\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3} \quad (3)$$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow |a_n-I|<\varepsilon$, $\forall n\ge N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$

5.1.4. Consecință

Fie $f,h:[a,b]\to R$, *f* integrabilă Riemann, *h* derivabilă cu derivata integrabilă, $\Delta_n=(x_0^n,x_1^n,...,x_{k_n}^n)\in D[a,b]$, $n\in N^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$.

Pentru orice $\alpha_i^n\in\left[m_i^n(f),M_i^n(f)\right]$, şirul $a_n=\sum\limits_{i=1}^{k_n}\alpha_i^n\left[h\left(x_i^n\right)-h\left(x_{i-1}^n\right)\right]$

converge către $\int_a^b f(x)\cdot h'(x)dx$.

Demonstrație

Aplicăm Teorema lui Lagrange funcției *h* pe $\left[x_{i-1}^n,x_i^n\right]$:

$\exists c_i^n\in\left(x_{i-1}^n,x_i^n\right)$ astfel încât $h\left(x_i^n\right)-h\left(x_{i-1}^n\right)=h'\left(c_i^n\right)\cdot\left(x_i^n-x_{i-1}^n\right)$.

În Teorema 5.1.3 luăm $g:=h'$, $\beta_i^n=h'\left(c_i^n\right)$

Următorul rezultat dă o condiție suficientă ca un şir de diviziuni să aibă norma tinzând la zero.

5.1.5. Propoziție

Fie $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ o funcție strict crescătoare şi surjectivă, $\Delta_n=\left(a,\varphi\left(a+\frac{b-a}{n}\right),...,\varphi\left(a+k\frac{b-a}{n}\right),...,b\right)\in D[a,b]$, $n\in N^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$.

Demonstrație

φ este uniform continuă pe $[a,b]$

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall\, x_1, x_2 \in [a,b]$ cu $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$
$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$. $\exists\, N_0 \in N$ astfel încât $\forall\, n \geq N_0$, $\dfrac{b-a}{n} < \delta_\varepsilon \Rightarrow$
$\left|\varphi\left(x_i^n\right) - \varphi\left(x_{i-1}^n\right)\right| < \varepsilon \Rightarrow \|\Delta_n\| < \varepsilon$
Deci $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N_0 \in N$ astfel încât $\forall\, n \geq N_0$, $\|\Delta_n\| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$.

5.1.6. Exemple

1) Dacă $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, $\varphi = \dfrac{x}{2-x}$, atunci $\varphi'(x) = \dfrac{2}{(2-x)^2} > 0$, deci φ este strict crescătoare şi se verifică uşor că φ este surjectivă. Conform Propoziţiei 5.1.6, $\Delta_n = \left(0, \dfrac{1}{2n-1}, ..., \dfrac{k}{2n-k}, ..., \dfrac{n}{2n-n}\right)$, $n > 0$, este un şir de diviziuni neechidistante cu $\|\Delta_n\| \to 0$

2) Funcţia $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, $\varphi(x) = tg\dfrac{\pi x}{4}$ este strict crescătoare şi surjectivă, deci $\Delta_n = \left(0, tg\dfrac{\pi}{4n}, ..., tg\dfrac{k\pi}{4n}, ..., tg\dfrac{n\pi}{4n}\right)$ este un şir de diviziuni cu $\|\Delta_n\| \to 0$

5.2. Şiruri ai căror termeni generali conţin integrala definită

5.2.1. Propoziţie

Dacă funcţia $f : [1, +\infty) \to R$ este monotonă şi mărginită, atunci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = f(1) + f(2) + ... + f(n) - \int_1^n f(x)dx$ este convergent.

Demonstraţie

În cazul în care *f* este descrescătoare avem
$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} \left[f(n+1) - f(x)\right]dx \leq 0$. Deci $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

Demonstrăm că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx\right] + f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left[f(k) - f(x)\right]dx + f(n).$$

Ţinând seama de monotonia lui *f* şi de faptul că *f* este mărginită inferior rezultă că $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior.

Analog pentru *f* crescătoare.

5.2.2. Observații

În condițiile propoziției 5.2.1 avem:

1) Şirul $\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)_{n\geq 1}$ este convergent dacă şi numai dacă şirul $\left(\int_1^n f(x)dx\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

2) Dacă $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx = +\infty$ atunci $\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{\int_1^n f(x)dx} = 1$

5.2.3. Exemple:

1) Şirul $(c_n)_{n\geq 1}$, $c_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n$, este convergent

2) Fie $\alpha \in R$. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}$ este convergent dacă şi numai dacă $\alpha > 1$

3) $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\cdot\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}$, unde $\alpha\in(0,1)$

5.2.4. Propoziție

Fie $f:[a,b]\to R$ o funcție derivabilă, cu derivata integrabilă. Dacă considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general

$a_n = \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(k-\lambda)\frac{b-a}{n}\right)$, unde $\lambda\in[0,1]$, atunci $(na_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim_{n\to\infty} na_n = \left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(b-a)\left[f(b)-f(a)\right]$.

Demonstrație

Fie $\Delta_n = \left(x_0^n, x_1^n, ..., x_n^n\right)\in D[a,b]$, $x_k^n = a+\frac{k}{n}(b-a)$ şi $y_k^n = a+(k-\lambda)\frac{b-a}{n}$, $\overline{k=1,n}$. Atunci $a_n = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}^n}^{x_k^n} f(t)dt - \sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n} f\left(y_k^n\right) = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}^n}^{x_k^n}\left(f(t)-f(y_k^n)\right)dt$

Aplicând Teorema lui Lagrange pe fiecare interval de capete *t* şi y_k^n, rezultă că există c_k^n între *t* şi y_k^n şi deci în $\left(x_{k-1}^n, x_k^n\right)$ cu

$a_n = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}^n}^{x_k^n}(t-y_k) f'\left(c_k^n\right)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}^n}^{y_k^n}\left(t-y_k^n\right)f'\left(c_k^n\right)dt + \sum_{k=1}^{n}\int_{y_k^n}^{x_k^n}\left(t-y_k^n\right)f'\left(c_k^n\right)dt$.(1)

Cum f' este integrabilă, rezultă că f' este mărginită, deci există
$m_k^n = \inf_{t\in\left[x_{k-1}^n, x_k^n\right]} f'(t)$; $M_k^n = \sup_{t\in\left[x_{k-1}^n, x_k^n\right]} f'(t) \in R$, $\overline{k=0,n}$.

Pe $\left[x_{k-1}^n, y_k^n\right]$, cum $t - y_k^n \le 0$, rezultă că:

$$M_k^n\left(t-y_k^n\right) \le f'\left(c_k^n\right)\left(t-y_k^n\right) \le m_k^n\left(t-y_k^n\right) \qquad (2)$$

iar pe $\left[y_k^n, x_k^n\right]$, cum $t - y_k^n \ge 0$, avem:

$$m_k^n\left(t-y_k^n\right) \le f'\left(c_k^n\right)\left(t-y_k^n\right) \le M_k^n\left(t-y_k^n\right) \qquad (3)$$

Din (1), (2) şi (3) rezultă că:

$$\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}^n}^{y_k^n} \left(t-y_k^n\right) M_k^n dt + \sum_{k=1}^n \int_{y_k^n}^{x_k^n} \left(t-y_k^n\right) m_k^n dt \le a_n \le$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}^n}^{y_k^n} \left(t-y_k^n\right) m_k^n dt + \sum_{k=1}^n \int_{y_k^n}^{x_k^n} \left(t-y_k^n\right) M_k^n dt$$ şi efectuând calculele obținem:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int_{y_k^n}^{x_k^n} \left(x_k^n - y_k^n\right)^2 m_k^n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(x_{k-1}^n - y_k^n\right)^2 M_k^n \le a_n \le$$

$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(x_k^n - y_k^n\right)^2 M_k^n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(x_{k-1}^n - y_k^n\right)^2 m_k^n$, şi cum $y_k^n - x_{k-1}^n = \frac{(b-a)(1-\lambda)}{n}$ şi

$x_k^n - y_k^n = \frac{\lambda(b-a)}{n}$, $\overline{k=1,n}$ rezultă că:

$$\frac{(b-a)\lambda^2}{2}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n m_k^n\right) - \frac{(b-a)(1-\lambda)^2}{2}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n M_k^n\right) \le na_n \le$$

$$\frac{(b-a)\lambda^2}{2}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n M_k^n\right) - \frac{(b-a)(1-\lambda)^2}{2}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n m_k^n\right) \qquad (4)$$

Dar $s_n(f') = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n m_k^n \to \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$, când $n \to \infty$

Şi $S_n(f') = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n M_k^n \to \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$, când $n \to \infty$

Trecând la limită în (4) şi ținând cont de şirurile care majorează şi minorează, rezultă că şirul $(na_n)_{n\ge1}$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(b-a)\left[f(b) - f(a)\right].$$

Alegând $\lambda = \frac{1}{2}$ în propoziția 5.2.4. se obține $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. În aceste condiții se pune prolema convergenței şirului $\left(n^2 a_n\right)_{n\in N}$. Are loc următorul rezultat:

5.2.5. Propoziție [2, pg. 177]

Fie $f:[a,b]\to R$ o funcție de două ori derivabilă, cu derivata a doua integrabilă. Dacă considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)$, atunci $(n^2 a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \frac{1}{24}(b-a)^2\left[f'(b)-f'(a)\right]$

5.2.6. Exemple:

1) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\right)=\frac{3}{4}$

2) $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{4n}{4n^2+\left(2k-1\right)^2}\right)=\frac{1}{32}$

Soluție: Se consideră funcția $f:[0,1]\to R$, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ şi se aplică propozițiile 5.2.4. şi 5.2.5.

Bibliografie

[1] Gh. Sirețchi, „Calcul diferențial şi integral”, vol. I şi II, Ed. Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985

[2] V. Arsinte: „Probleme elementare de calcul integral”, Ed. Univ. Bucureşti, 1995

[3] C. Mortici: „600 de probleme”, Edi. GIL Zalău, 2001

[4] A. Magdaş, I. Magdaş: „Calculul limitelor unor şiruri utilizând integrala definită”, Didactica Matematicii, vol. 12, pg. 87-92

[5] V. Pop: „Evaluarea prin şiruri a unor serii”, Argument, Revista de matematică a Colegiului Național Gh. Şincai, Baia-Mare, 5/2003

Probleme rezolvate

1) Să se calculeze limitele următoarelor şiruri:

a) $x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(n+n)}, n \geq 2$

b) $x_n = \frac{1}{n^2}\left(3e^{\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{n}} + 5e^{\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{n}} + ... + (2n-1)e^{\frac{\sqrt{(n-1)\cdot n}}{n}}\right)$

Soluție

a) $x_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)...(n+n)}{n^n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)...\left(1+\frac{n}{n}\right)}$.

$\ln x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$. Folosind consecința 5.1.2 avem:

$\lim_{n\to\infty}\ln x_n = \int_0^1 \ln(1+x)dx = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx =$

$\ln 2 - \left(x - \ln(1+x)\right)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1 = \ln\frac{4}{e} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{4}{e}$

b) Considerăm $f, g : [0,1] \to R$, $f(x) = x, g(x) = e^x$.

Alegem $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n}\right)$, $\|\Delta_n\| \to 0$; $x_i^n = \frac{i}{n}$

$\alpha_i^n = f\left(\frac{x_{i-1}^n + x_i^n}{2}\right)$, $\beta_i^n = g\left(\sqrt{x_{i-1}^n \cdot x_i^n}\right)$, $i = \overline{1,n}$

$x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n}e^{\frac{\sqrt{i(i-1)}}{n}} - \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}^n + x_i^n}{2}\cdot e^{\sqrt{x_{i-1}^n \cdot x_i^n}} - \frac{1}{n^2} =$

$2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^n \beta_i^n \left(x_i^n - x_{i-1}^n\right) - \frac{1}{n^2}$.

Folosind Teorema 5.1.3, obținem:

$\lim_{n\to\infty} x_n = 2\int_0^1 xe^x dx = 2\left(xe^x - e^x\right)\Big|_0^1 = 2$

2) Să se arate că $\forall\, n \in N^*$, ecuația $\frac{1}{\sqrt{nx+1}} + \frac{1}{\sqrt{nx+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{nx+n}} = \sqrt{n}$ are o soluție unică $x = x_n$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$ (L. Panaitopol, Naț., 1994)

Soluție

Pentru orice $n \in N^*$, definim $f_n : [0,\infty) \to R$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x+\frac{k}{n}}}$. Ecuația din enunț se scrie $f_n(x) = n$. Pentru *n* fixat avem

$f_n(x)-n>1+1+...+1-n=n-n=0$ şi $\lim_{n\to\infty} f_n(x)-n=-n<0$ deci $\exists\, x_n\in(0,\infty)$ astfel încât $f_n(0)=n$ (proprietatea lui Darboux). Soluția x_n este unică deoarece f_n este strict descrescătoare. Vom arăta că $\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{9}{16}$.

Obținerea limitei este sugerată de forma ecuației $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_n+\frac{k}{n}}}=1$ care conduce la ecuația în l următoare:

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{l+t}}dt=1$ cu soluție unică $l=\frac{9}{16}$.

Fie $\mu>0$. Pentru orice $n\in N^*$ notăm: $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16}+\mu+\frac{k}{n}}}$ şi

$b_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16}-\mu+\frac{k}{n}}}$ (se ia şi $\mu<\frac{9}{16}$). Atunci $\lim_{n\to\infty} a_n=s<1$ şi $\lim_{n\to\infty} b_n=t>1$

$s=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16}+\mu+t}}dt=2\left(\sqrt{\frac{25}{16}+\mu}-\sqrt{\frac{9}{16}+\mu}\right)$ şi

$t=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16}-\mu+t}}dt=2\left(\sqrt{\frac{25}{16}-\mu}-\sqrt{\frac{9}{16}-\mu}\right)$.

$\exists\, n(\mu)\in N$ astfel încât $\forall\, n\ge n(\mu)$ să avem $a_n<1<b_n$, adică

$\frac{1}{n}f_n\left(\frac{9}{16}+\mu\right)<\frac{1}{n}f_n\left(x_n\right)<\frac{1}{n}f_n\left(\frac{9}{16}-\mu\right)$, deci $\frac{9}{16}-\mu<x_n<\frac{9}{16}+\mu$.

Cum μ este arbitrar (de mic), obținem $\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{9}{16}$.

3) Fie $f:[0,\infty)\to R$ o funcție periodică, de perioadă 1, integrabilă pe $[0,1]$. Pentru un şir $\left(x_n\right)_{n\ge 0}, x_0=0$, strict crescător şi nemărginit cu $\lim_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)=0$, notăm $r(n)=\max\left\{k \mid x_n\le n\right\}$.

a) Să se arate că: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{r(n)}\left(x_k-x_{k-1}\right)f(x_k)=\int_0^1 f(x)dx$

b) Utilizând eventual rezultatul de la punctul a), demonstrați că:

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\ln k)}{k}=\int_0^1 f(x)dx$ (Etapa finală, 2001)

Soluție

a) Avem $a_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{p-1<x_k\le p}\left(x_{k+1}-x_k\right)f\left(x_k\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}s_p$.

Cu Cesaro-Stolz avem: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$

$s_n = \sum_{n-1<x_k\le n}\left(x_{k+1}-x_k\right)f(x_k) = \sum_{0<x_k-(n-1)\le 1}\left(y_{k+1}-y_k\right)f(y_k)$, cu $y_k = x_k-(n-1)$,

reprezintă suma Riemann asociată funcției *f* şi diviziunii $(y_k)_{r(n-1)<k\le r(n)}$ a intervalului $[0,1]$, a cărei normă tinde la 0.

Prin urmare, $\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 f(x)dx$

b) Pentru $x_n = \ln n$, rezultă că $z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\left[e^n\right]}\ln\frac{k+1}{k}f(\ln k) \to I = \int_0^1 f(x)dx$.

Avem $\lim_{n\to\infty} s_{[\ln n]} = I$, deci $\frac{1}{[\ln n]}\sum_{k=1}^{\left[e^{[\ln n]}\right]}\ln\frac{k+1}{k}f(\ln k) \to I \Rightarrow$

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{\left[e^{[\ln n]}\right]}\ln\frac{k+1}{k}f\left(\ln k\right) \to I$$

Apoi

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}f\left(\ln k\right) = \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{\left[e^{[\ln n]}\right]}\ln\frac{k+1}{k}f\left(\ln k\right) + \frac{1}{\ln n}\sum_{k=\left[e^{[\ln n]}\right]+1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}f\left(\ln k\right)$$

şi arătăm că $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=\left[e^{[\ln n]}\right]+1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}f\left(\ln k\right) = 0$

Cu $M = \sup\left|f(x)\right|$, avem:

$$\left|\sum_{k=\left[e^{[\ln n]}\right]+1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}f(\ln k)\right| \le M\sum_{k=\left[e^{[\ln n]}\right]+1}^{n}\ln\frac{k+1}{k} = M\ln\frac{n}{\left[e^{[\ln n]}\right]+1} \to 0$$

Deci

$$\left|\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right)f\left(\ln k\right)\right| \le M\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right) = M\frac{1+\ldots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+1\right)}{\ln n} \to 0$$

6. Teoreme de medie. Inegalități integrale

La această temă ne propunem să familiarizăm cititorii cu teoremele de medie ale calculului integral, care spre deosebire de cele ale calculului diferențial sunt mai puțin cunoscute.

6.1. Teoreme de medie ale calculului integral

6.1.1. Teoremă (Prima formulă de medie). Fie $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ două funcții integrabile cu $g(x) \geq 0, (\forall) x \in [a,b]$. Atunci există $\lambda \in [m, M]$, unde $m := \inf f([a,b])$ și $M := \sup f([a,b])$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lambda \int_a^b g(x)dx \tag{6.1.1}$$

În particular, dacă $g(x) = 1$ avem

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda(b-a) \tag{6.1.1'}$$

Demonstrație. Evident avem $m \leq f \leq M$ deci $mg \leq fg \leq Mg$ și deci

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

(i) Dacă $\int_a^b g(x)dx = 0$, atunci $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ deci putem lua λ orice număr din $[m, M]$.

(ii) Dacă $\int_a^b g(x)dx > 0$, atunci $\lambda := \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \in [m, M]$ și avem (6.1.1).

6.1.2. Corolar. Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă nenegativă. Atunci există $c \in [a,b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \tag{6.1.2}$$

În particular, dacă $g(x) = 1$ avem

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c) \tag{6.1.2'}$$

Demonstrație. Din teorema 6.1.1 există $\lambda \in [m, M]$ astfel încât să avem (6.1.1). Întrucât f este continuă, există $x_0, x_1 \in [a,b]$ astfel încât $f([a,b]) = [f(x_0), f(x_1)] = [m, M]$, deci $\lambda \in f([a,b])$ și deci există $c \in [a,b]$ astfel încât $f(c) = \lambda$.

6.1.3. Observație. Fie $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă. Atunci numărul $\lambda := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se numeşte valoarea medie a lui *f* pe $[a,b]$.

6.1.4. Teoremă. (A doua formulă de medie). Fie $f,g:[a,b]\to \mathbf{R}$ două funcții integrabile cu *g* monotonă. Atunci există $c\in[a,b]$ astfel încât:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx$$

Demonstrație. Presupunem $g\ge 0$, g monoton descrescătoare şi fie $n\in\mathbf{N}$ şi $\Delta_n := (a=x_0,x_1,...,x_n=b)$ cu $x_k = a+\frac{k}{n}(b-a)$. Notăm

$$\alpha_i := \frac{1}{x_i - x_{i-1}}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx,\quad i=\overline{1,n} \tag{6.1.3}$$

Din prima formulă de medie avem $m_i(f)\le\alpha_i\le M_i(f)$ şi deci conform teoremei 5.1.3.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \alpha_i g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

Fie $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $x\in[a,b]$. Atunci avem:

$$\alpha_i(x_i - x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt = \int_a^{x_i} f(t)dt - \int_a^{x_{i-1}} f(t)dt = F(x_i)-F(x_{i-1})$$

$$L_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i)-F(x_{i-1})) =$$

$$=\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})F(x_i) - \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})F(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)F(x_i) =$$

$$= g(x_{n-1})F(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(g(x_{i-1})-g(x_i))F(x_i)$$

Notând $M:=\sup F([a,b])$, $m:=\inf F([a,b])$ şi ținând seama că $g(x_{n-1})\ge 0$ şi $g(x_{i-1})-g(x_i)\ge 0, (\forall) i=\overline{1,n}$ rezultă

$$L_n \le g(x_{n-1})M + \sum_{i=1}^{n-1}(g(x_{i-1})-g(x_i))M = Mg(a)$$

şi analog $L_n \ge mg(a)$, deci

$$m \le \frac{1}{g(a)}L_n \le M \tag{6.1.4}$$

Cum $\lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b f(x)g(x)dx$ din (6.1.4) rezultă că

$$m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M .$$

Funcția F fiind continuă, avem $F([a,b]) = [m,M]$, deci există $c \in [a,b]$ astfel încât $F(c) = \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x)dx$ şi deci

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx .$$

Revenind la cazul general, presupunem g monoton descrescătoare arbitrară şi fie $h = g - g(b)$. Atunci $h \geq 0$ şi h monoton descrescătoare, deci din raționamentul făcut rezultă că există $c \in [a,b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = h(a)\int_a^c f(x)dx$$

şi deci

$$\int_a^b (f(x)g(x) - f(x)g(b))dx = (g(a) - g(b))\int_a^c f(x)dx$$

de unde

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx .$$

6.1.5. Corolar. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ două funcții integrabile astfel încât g este monoton descrescătoare şi nenegativă. Atunci există $c \in [a,b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx \tag{6.1.5}$$

6.1.6. Observații. A doua formulă de medie se mai numeşte teorema Bonnet-Weierstrass.

6.1.7. Problemă rezolvată. Fie $f_0 : [0,1] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă şi f_{n+1} primitiva lui f_n pe intervalul [0,1], care se anulează în origine, $n \in \mathbf{N}$. Dacă $f_{1982}(1) = \frac{1}{1983!}$, să se demonstreze că există $x_0 \in [0,1]$ astfel încât $f_0(x_0) = x_0$.

(T. Andreescu, et. finală 1983)

Soluție. Din enunț avem că

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

Din $f_{1982}(1) = \frac{1}{1983!}$ rezultă $\int_0^1 f_{1981}(t)dt = \int_0^1 \frac{t^{1982}}{1982!}dt$ sau $\int_0^1 \left(f_{1981}(t) - \frac{t^{1982}}{1982!} \right) dt = 0$. Conform primei formule de medie există $x_{1981} \in [0,1]$

astfel ca $f_{1981}(x_{1981}) - \frac{(x_{1981})^{1982}}{1982!} = 0$. De aici rezultă că $\int_0^x \left(f_{1980}(t) - \frac{t^{1981}}{1981!} \right) dt = 0$ şi aplicând încă o dată formula de medie obţinem că există $x_{1980} \in [0, x_{1981}]$ astfel ca $f_{1980}(x_{1980}) - \frac{(x_{1980})^{1981}}{1981!} = 0$. Se repetă raţionamentul şi se deduce că există $x_0 \in [0, x_1]$ astfel ca $f_0(x_0) = \frac{x_0}{1!}$.

6.1.8. Problemă rezolvată. Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă. Să se arate că:

1) pentru fiecare $\alpha \in (0,1)$ există cel puţin un element $c \in (a,b)$ astfel ca

$$\alpha \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

2) dacă f este continuă pe (a,b) şi $\int_a^b f(x)dx \neq 0$ atunci pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ există n puncte distincte $x_1, x_2, ..., x_n$ din intervalul (a,b) astfel ca:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{n(b-a)}{1/f(x_1) + 1/f(x_2) + ... + 1/f(x_n)}$$

(T. Precupanu, et. finală, 1989)

Soluţie. 1) Fie $F : [a,b] \to \mathbf{R}$, $F(t) = \int_a^t f(x)dx - \alpha \int_a^b f(x)dx$. Deoarece f este integrabilă, rezultă că F este continuă pe $[a,b]$. Cum $F(a) = -\alpha \int_a^b f(x)dx$, $F(b) = (1-\alpha)\int_a^b f(x)dx$ se deduce că

$$F(a)F(b) = \alpha(\alpha - 1)\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2.$$

Se disting două cazuri:

a) Dacă $\int_a^b f(x)dx \neq 0$ atunci din $\alpha \in (0,1)$ rezultă $F(a)F(b) < 0$. Funcţia F fiind continuă există $c \in (a,b)$ astfel încât $F(c) = 0$ sau

$$\alpha \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

b) Dacă $\int_a^b f(x)dx = 0$, atunci luând $c = b \in (a,b]$ se obţine

$$\alpha \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

2) Pentru fiecare $k = 1,2,...,n-1$, numerele $\alpha_k = k/n \in (0,1)$ şi conform cu 1), există $c_k \in (a,b]$ astfel încât

$$(k/n)\int_a^b f(x)dx=\int_a^{c_k} f(x)dx \qquad (*)$$

Se obţine astfel un şir $(c_k)_{1\le k\le n-1}$ de numere reale distincte din intervalul (a,b) pentru că $\int_a^b f(x)dx\neq 0$.

Numerele $c_1,c_2,...,c_{n-1}$ sunt distincte deoarece dacă pentru un $k=1,2,...,n-1$ s-ar obţine $c_k=c_{k+1}$, atunci din (*) rezultă

$$\frac{k}{n}\int_a^b f(x)dx=\frac{k+1}{n}\int_a^b f(x)dx \quad \text{sau} \quad \int_a^b f(x)dx=0,$$

contrar cu ipoteza.

Să presupunem că $c_k<c_{k+1}$ pentru orice $k=1,2,...,n-2$. Atunci

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx=\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx-\int_a^{c_k} f(x)dx=\frac{1}{n}\int_a^b f(x)dx \qquad (**)$$

Notând $c_0=a$, $c_n=b$ conform teoremei de medie pentru orice $k=0,1,...,n-1$, există $x_{k+1}\in(c_k,c_{k+1})$ astfel ca

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx=(c_{k+1}-c_k)f(x_{k+1})$$

şi ţinând seama de (**) rezultă

$$(c_{k+1}-c_k)f(x_{k+1})=\frac{1}{n}\int_a^b f(x)dx,$$

de unde

$$c_{k+1}-c_k=\frac{1}{nf(x_{k+1})}\int_a^b f(x)dx \qquad (***)$$

deoarece $f(x_k)\neq 0$, având $\int_a^b f(x)dx\neq 0$.

Adunând relaţiile (***) pentru $k=0,1,...,n-1$ se deduce

$$b-a=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{nf(x_{k+1})}\int_a^b f(x)dx$$

iar de aici se obţine imediat relaţia dorită.

6.1.9. Problemă rezolvată. Fie $f:\mathbf{R}\to[0,\infty)$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă 1. Să se arate că:

a) $\int_a^{a+1} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$, pentru orice $a\in\mathbf{R}$

b) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)f(nx)dx=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$

(C. Mortici, Et. judeţeană, 2002)

Soluție. a) $\int_a^{a+1} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^{a+1} f(x)dx =$

$= \int_{a+1}^1 f(t-1)dt + \int_0^{a+1} f(x)dx = \int_{a+1}^1 f(x)dx + \int_0^{a+1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$.

b) Fie $I_n = \int_0^1 f(x)f(nx)dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)f(nx)dx$. Cum $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$, aplicând teorema de medie pentru fiecare integrală din sumă, obținem existența unui $c_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, astfel încât

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)f(nx)dx = f(c_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{n} f(c_k)\int_{k-1}^{k} f(x)dx = \frac{1}{n} f(c_k)\int_0^1 f(x)dx.$$

Atunci $I_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(c_k)\right)\int_0^1 f(x)dx$ și cum $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(c_k)$ este suma Riemann a lui f asociată diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right)$ cu punctele intermediare $(c_k)_{k=\overline{1,n}}$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} I_n = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$.

6.2. Inegalități integrale remarcabile

6.2.1. Propoziție (Inegalitatea lui Cebâşev). Fie $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ două funcții monotone şi de sens contrar. Atunci

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx \tag{6.2.1}$$

Demonstrație. Înlocuind eventual f şi g cu $-f$ şi $-g$ respectiv, putem presupune f monoton crescătoare şi g monoton descrescătoare. Punem $\alpha := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Avem $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$ conform primei teoreme de medie.

Fie $c = \{\sup x \in [a,b]; f(x) \leq \alpha\}$. Atunci $(\forall) x \in [a,c]$ avem $\alpha \geq f(x)$ şi $g(x) \geq g(c)$, deci

$$(\alpha - f(x))g(x) \geq (\alpha - f(x))g(c) \tag{6.2.2}$$

Analog $(\forall) x \in [c,b]$ avem $\alpha \leq f(x)$ şi $g(x) \leq g(c)$, deci are loc şi în acest caz inegalitatea (6.2.2).

Aşadar

$$\int_a^b(\alpha - f(x))g(x)dx = \int_a^c(\alpha - f(x))g(x)dx + \int_c^b(\alpha - f(x))g(x)dx \geq$$
$$\geq \int_a^c(\alpha - f(x))g(c)dx + \int_c^b(\alpha - f(x))g(c)dx = g(c)\left[\alpha(a-b) - \int_a^b f(x)dx\right] = 0 .$$

De aici $\int_a^b(\alpha - f(x))g(x)dx \geq 0$ care conduce la inegalitatea (6.2.1).

Observații. (i) Egalitatea în relația (6.2.1) se obține atunci când una din funcțiile *f* sau *g* este constantă, cu excepția, eventual, a unei mulțimi numărabile de puncte.

(ii) Inegalitatea lui Cebâşev poate fi dată mai general astfel:

$$\left(\int_a^b p(x)dx\right)\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right) \geq \left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)dx\right), \qquad (6.2.3)$$

unde $f,g:[a,b] \in \mathbf{R}$ sunt două funcții de aceeaşi monotonie, iar $p:[a,b] \to (0,\infty)$ este o funcție integrabilă.

6.2.3. Propoziție (Inegalitatea lui Young). Fie $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcție continuă, strict crescătoare astfel încât $f(0)=0$. Atunci $(\forall)a \geq 0$ şi $b \in \operatorname{Im} f$ avem inegalitatea:

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \qquad (6.2.4)$$

Demonstrație. Vom da o justificare geometrică a inegalității din enunț. Fie G_f graficul funcției *f* şi S_1 (respectiv S_2) regiunile din plan cuprinse între G_f, axa *Ox* şi dreapta $x=a$ (respectiv G_f, axa *Oy* şi dreapta $y=b$) (fig. 6.1).

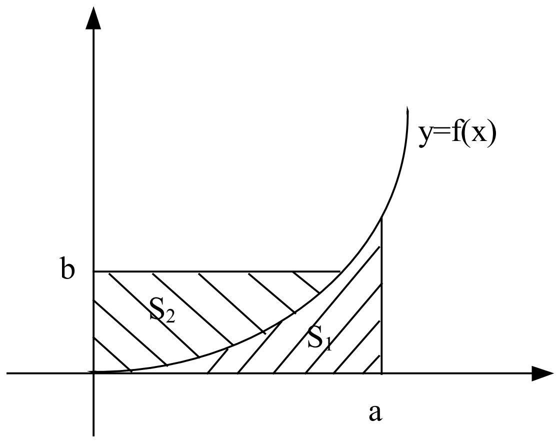


Fig. 6.1

Evident avem: $ab \le ariaS_1 + ariaS_2$ şi cum $ariaS_1 = \int_0^a f(x)dy$ şi $ariaS_2 = \int_0^b f^{-1}(y)dy$, inegalitatea (6.2.4) este adevărată. Egalitatea se obține pentru $b = f(a)$.

6.2.4. Corolar. Fie $a,b \in \mathbf{R}$ şi $p,q > 0$ astfel încât $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Atunci avem:

$$|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} \tag{6.2.5}$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $|a|^p = |b|^q$.

Demonstrație. În inegalitatea (6.2.4) înlocuim $a := |a|$, $b := |b|$, $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^{p-1}$ şi se obține inegalitatea (6.2.5). Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $f(|a|) = |b|$ ceea ce este echivalent cu $|a|^p = |b|^q$.

6.2.5. Propoziție (Inegalitatea lui Hölder). Fie $f,g:[a,b] \to \mathbf{R}$ două funcții integrabile şi $p,q > 0$ cu $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Atunci avem inegalitatea:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \tag{6.2.6}$$

Demonstrație. Dacă $\int_a^b |f(x)|^p\,dx = 0$ sau $\int_a^b |g(x)|^p\,dx = 0$ atunci $|f|$ sau $|g|$ este nulă aproape peste tot şi deci $\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx = 0$, prin urmare inegalitatea (6.2.6) devine egalitate.

Presupunem $\int_a^b |f(x)|^p\,dx > 0$ şi $\int_a^b |g(x)|^q\,dx > 0$ şi fie

$$\alpha := \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}} \quad \text{şi} \quad \beta := \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}}.$$

Utilizând inegalitatea (6.2.5) obținem:

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q},$$

de unde prin înlocuire şi apoi prin integrare se obține (6.2.6).

6.2.6. Corolar (Inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz). Fie $f,g:[a,b] \to \mathbf{R}_+$ două funcții integrabile. Atunci avem:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \tag{6.2.7}$$

Demonstrație. În (6.2.6) luăm $p = q = 2$.

6.2.7. Observație. În inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem egalitate doar dacă *f* sau *g* sunt nule aproape peste tot sau există $k \in \mathbf{R}$ astfel încât $f = kg$.

Deci dacă

$$\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

atunci *f* sau *g* sunt nule aproape peste tot sau există $k \in \mathbf{R}$ astfel încât $f = kg$.

Într-adevăr, presupunând contrariul, ar rezulta că pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$, $f + \lambda g$ nu este nulă aproape peste tot, deci

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 dx > 0, (\forall)\lambda \in \mathbf{R}$$

De aici deducem că

$$\lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx > 0, (\forall)\lambda \in \mathbf{R}$$

Ca urmare trinomul de gradul doi în λ trebuie să ia valori pozitive pe **R**, deci Δ<0, ceea ce implică

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 < \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

contradicție cu ipoteza.

6.2.8. Corolar. Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă și $p, q > 0$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci avem:

$$\int_a^b |f(x)| dx \le (b-a)^{1/q} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Demonstrație. În (6.2.6) luăm $g(x) = 1$.

6.2.9. Notă istorică. Inegalitatea (6.2.7) a fost stabilită pentru prima dată în 1859 de către V. I. Buniakowski. H. Schwarz o utilizează în lucrările sale din 1884. Numele lui A. Cauchy apare datorită faptului că forma algebrică a inegalității se găsește pentru prima dată în lucrările acestuia, iar între cele două inegalități distanța nu este prea mare.

6.2.10. Propoziție (Inegalitatea lui Minkowski).

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ două funcții integrabile și $p \ge 1$. Atunci avem inegalitatea:

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{1/p} \quad (6.2.8)$$

Demonstrație. Dacă $p=1$ sau $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx=0$ inegalitatea (6.2.8) este evidentă. Presupunem deci $p>1$ şi $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx>0$. Evident avem:

$$|f(x)+g(x)|^p \le |f(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{p-1}+|g(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{p-1}$$

Din inegalitatea lui Holder (Propoziția 6.2.5) rezultă:

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx \le \int_a^b |f(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx+$$

$$+\int_a^b |g(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \le$$

$$\le\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}+$$

$$+\left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}=$$

$$=\left[\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right]\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/q},$$

unde $(p-1)q=p$. Prin împărțire cu $\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/q}$ obținem inegalitatea (6.2.8).

6.2.11. Corolar. Fie $f,g:[a,b]\in \mathbf{R}_+$ două funcții integrabile. Atunci avem:

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx\right)^{1/2}\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{1/2} \qquad (6.2.9)$$

Demonstrație. În inegalitatea (6.2.8) luăm $p=2$.

6.2.12. Propoziție (Inegalitatea lui Jensen). Fie $f:[a,b]\to[\alpha,\beta]$ o funcție integrabilă şi $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ o funcție convexă continuă. Atunci:

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b (\varphi\circ f)(x)dx. \qquad (6.2.10)$$

Demonstrație. Funcția *f* fiind integrabilă şi φ continuă, rezultă că $\varphi\circ f$ este integrabilă. Atunci conform consecinței 5.1.2 avem:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\to\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (6.2.11)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\varphi\circ f)\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\to\frac{1}{b-a}\int_a^b (\varphi\circ f)(x)dx \qquad (6.2.12)$$

Pe de altă parte φ fiind convexă, avem:

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\varphi\circ f)\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right), (\forall) n \ge 1$$

de unde, trecând la limită şi ţinând cont de (6.2.11) şi (6.2.12) se obţine inegalitatea dorită.

6.2.13. Corolar. Fie $I, J \subseteq \mathbf{R}$ două intervale, $f: I \to J$ o funcţie local integrabilă, în particular *f* continuă şi $\varphi: J \to \mathbf{R}$ o funcţie convexă continuă. Atunci $(\forall) a, b \in I$, $a < b$, avem

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b (\varphi\circ f)(x)dx.$$

6.2.14. Corolar. Fie $I, J \subseteq \mathbf{R}$ două intervale, $f: I \to J$ o funcţie local integrabilă, în particular *f* continuă şi $\varphi: J \to \mathbf{R}$ o funcţie de două ori derivabilă cu $\varphi'' \ge 0$ (respectiv $\varphi'' \le 0$). Atunci $(\forall) a, b \in I$, $a < b$ avem:

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \le (\text{respectiv} \ge) \frac{1}{b-a}\int_a^b (\varphi\circ f)(x)dx$$

Demonstraţie. Dacă $\varphi'' \ge 0$ (respectiv $\varphi'' \le 0$) atunci φ este convexă (respectiv φ este concavă). Aplicăm mai departe Corolarul 6.2.13.

6.2.15. Corolar. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f: I \to \mathbf{R}$ o funcţie local integrabilă strict pozitivă. Atunci $(\forall) a, b \in I$, $a < b$ avem

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \tag{6.2.13}$$

şi

$$\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge (b-a)^2\left(\int_a^b f(x)dx\right)^{-1} \tag{6.2.14}$$

Demonstraţie. Aplicăm Corolarul 6.2.14 pentru *f* şi funcţia concavă (respectiv convexă) $\varphi(x) = \ln x$, $x > 0$ (respectiv $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$).

6.2.16. Corolar. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f: I \to \mathbf{R}$ o funcţie local integrabilă nenegativă. Atunci $(\forall) a, b \in I$, $a < b$ şi $1 < p < +\infty$ (respectiv $0 < p < 1$) avem:

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^p \le (\text{respectiv} \ge) \frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(x)dx \tag{6.2.15}$$

Demonstraţie. Aplicăm Corolarul 6.2.14 pentru *f* şi funcţia concavă (respectiv convexă) $\varphi(x) = x^p$, $x > 0$, unde $1 < p < \infty$ (respectiv $0 < p < 1$).

6.2.17. Problemă rezolvată. Să se arate că pentru orice funcție continuă $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ are loc inegalitatea:

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)dx \geq \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(x)dx\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} xf(x)dx\right)^2 .$$

Precizați funcțiile *f* pentru care inegalitatea de mai sus devine egalitate.

(Dorian Popa, et. finală, 1997)

Soluție. Dacă *f* este pară, atunci $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0$ şi inegalitatea din enunț devine

$$\int_0^1 f^2(x)dx \geq \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \tag{1}$$

iar dacă *f* este impară, ea devine

$$\int_0^1 f^2(x)dx \geq 3\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 \tag{2}$$

Inegalitățile (1) şi (2) se deduc imediat din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz (6.2.7) considerând $g(x)=1$ pentru inegalitatea (1) şi $g(x)=x$ pentru inegalitatea (2).

Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ o funcție continuă şi $f_1, f_2:[-1,1]\to\mathbf{R}$,

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}, \qquad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Evident f_1 este pară, f_2 este impară şi $f=f_1+f_2$. Cum funcția $f_1 f_2$ este impară, atunci:

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)dx = \int_{-1}^{1} f_1^2(x)dx + \int_{-1}^{1} f_2^2(x)dx = 2\left(\int_0^1 f_1^2(x)dx + \int_0^1 f_2^2(x)dx\right) \tag{3}$$

şi

$$\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(x)dx\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} xf(x)dx\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} f_1(x)dx\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} xf_2(x)dx\right)^2 =$$

$$= 2\left[\left(\int_0^1 f_1(x)dx\right)^2 + 3\left(\int_0^1 xf_2(x)dx\right)^2\right] \tag{4}$$

Din (3) şi (4) inegalitatea din enunț devine:

$$\int_0^1 f_1^2(x)dx + \int_0^1 f_2^2(x)dx \geq \left(\int_0^1 f_1(x)dx\right)^2 + 3\left(\int_0^1 xf_2(x)dx\right)^2 ,$$

evident adevărată din (1) şi (2).

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $f=\lambda g$, $\lambda\in\mathbf{R}$ de unde obținem $f_1(x)=a$, $f_2(x)=bx$ cu $a,b\in\mathbf{R}$, deci $f(x)=a+bx$, $x\in[-1,1]$.

6.2.18. Problemă rezolvată. Fie $f,g:\mathbf{R}\to(0,\infty)$ două funcții continue şi crescătoare. Atunci există $c_1,c_2\in[a,b]$, $a<b$, $a,b\in\mathbf{R}$ astfel încât

$$f(c_1)g(c_2)\le\frac{\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx}{2(b-a)}$$

(M. Ganga)

Soluție. Deoarece f şi g au aceeaşi monotonie, atunci conform inegalității lui Cebâşev avem:

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)\le(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \qquad (1)$$

iar de aici prin inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz

$$\int_a^b f(x)g(x)dx\le\sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)}\le\left(\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\right) \qquad (2)$$

Prima formulă de medie ne asigură că există $c_1,c_2\in[a,b]$ astfel ca:

$$\int_a^b f(x)dx=f(c_1)(b-a) \quad \text{şi} \quad \int_a^b g(x)dx=f(c_2)(b-a) \qquad (3)$$

Din (1), (2) şi (3) obținem inegalitatea dorită.

Bibliografie

[1] Gh. Sirețchi, *Calcul diferențial şi integral*, vol. I şi II, Ed. Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[2] M. Ganga, *Teme şi probleme de matematică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1991.

[3] I. C. Miu, *Câteva probleme de matematică*, Craiova, 1994.

[4] V. Săseanu, S. Bârsan, *Teoremele de medie din analiza matematică*, Ed. Radical, 1997.

[5] V. Arsinte, *Probleme elementare de calcul integral*, Ed. Universității, Bucureşti, 1995.

[6] C. Mortici, *600 de probleme*, Ed. Gil, Zalău, 2001.

7. Aplicații ale calculului integral

7.1. Calculul ariilor

În acest paragraf vom reaminti formula de calcul a ariei subgraficului unei funcții continue și pozitive pe care o vom folosi apoi la calculul de arii cuprinse între două curbe. O aplicație extrem de interesantă o constituie formula lui Stirling pe care o vom prezenta la finalul acestui paragraf.

7.1.1. Teoremă. [1] Fie $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ o funcție continuă și pozitivă. Atunci $\Gamma_f \overset{def}{=} \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$ numit subgraficul lui *f* are arie și

$$aria(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)dx \qquad (7.1.1)$$

7.1.2. Consecință. Fie $f,g:[a,b]\to \mathbf{R}$ două funcții continue astfel încât $f(x)\le g(x), (\forall)x\in[a,b]$. Atunci mulțimea

$$\Gamma_{f,g} \overset{def}{=} \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid a\le x\le b, f(x)\le y\le g(x)\} \quad \text{(fig. 7.1)}$$

are arie și

$$aria(\Gamma_{f,g})=\int_a^b (g(x)-f(x)dx \qquad (7.1.2)$$

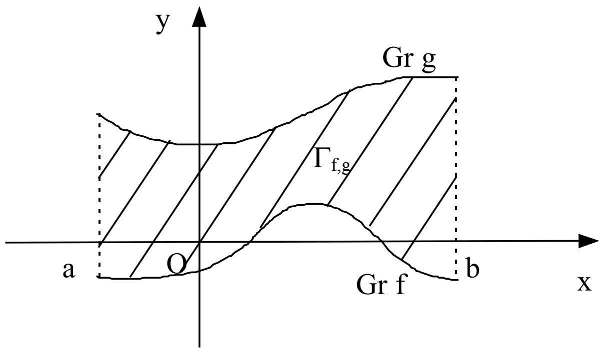


Fig. 7.1

7.1.3. Observații. (i) În general, dacă $f,g:[a,b]\to \mathbf{R}$ sunt funcții continue, iar $\Gamma_{f,g}$ este mulțimea cuprinsă între graficele celor două funcții, atunci $\Gamma_{f,g}$ are arie și

$$aria(\Gamma_{f,g})=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx \qquad (7.1.3)$$

(ii) Dacă suprafaţa plană este mărginită de curbe în care *x* apare ca funcţie de *y*, formula (7.1.2) se păstrează cu singura diferenţă că vom integra în raport cu *y*, în loc de *x* (fig. 7.2).

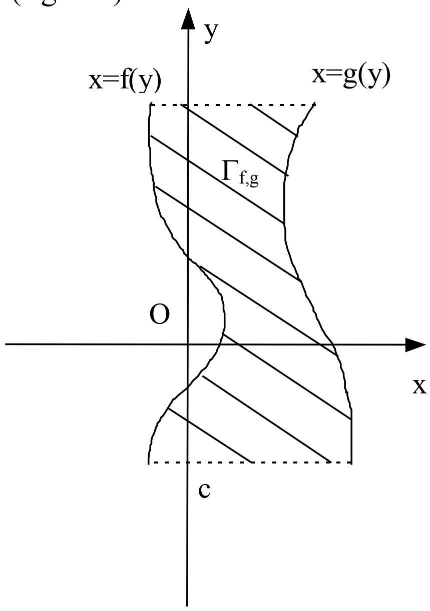


Fig. 7.2

Deci

$$aria(\Gamma_{f,g}) = \int_c^d (g(y) - f(y))dy \qquad (7.1.4)$$

7.1.4. Exerciţii rezolvate

a) Să se calculeze aria cuprinsă între graficele funcţiilor $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - x$ şi $g(x) = 2x^2 - 2$.

b) Să se determine aria mulţimii cuprinsă între parabola de ecuaţie $y^2 = x$ şi dreapta de ecuaţie $x - y - 1 = 0$.

c) Fie $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{(x)}{x}$, unde (*x*) este distanţa de la *x* la cel mai apropiat întreg. Să se calculeze aria subgraficului cuprins între *n* şi *n*+1, $n \in \mathbf{N}^*$.

Soluţie. a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1, 2\}$.

De aici $aria(\Gamma_{f,g}) = \int_{-1}^{2} | f(x) - g(x) | dx$.

Întrucât $f(x) \ge g(x) \Leftrightarrow x \in [-1,1] \cup [2,\infty)$ rezultă că:

$$aria(\Gamma_{f,g}) = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x)dx + \int_{1}^{2} (g(x) - f(x))dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}(x^3 - 2x^2 - x + 2)dx + \int_{1}^{2}(-x^3 + 2x^2 + x - 2)dx = \frac{37}{12}$$

b) Pentru a determina punctele în care parabola intersectează dreapta, se rezolvă sistemul $\begin{cases} y^2 = x \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ şi se obţin soluţiile $x_1 = (3-\sqrt{5})/2$, $y_1 = (1-\sqrt{5})/2$ şi $x_2 = (3+\sqrt{5})/2$, $y_2 = (1+\sqrt{5})/2$ (fig. 7.3).

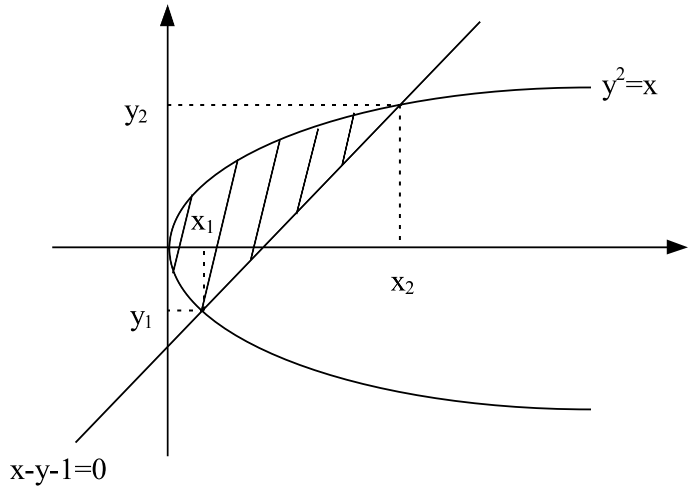


Fig. 7.3

Pentru a calcula mai uşor aria haşurată, vom exprima pe x ca funcţie de y şi se obţin două funcţii $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(y) = y^2$ şi $g(y) = y + 1$. Avem

$$aria(\Gamma_{f,g}) = \int_{y_1}^{y_2}(g(y) - f(y))dy = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

Observaţie. Aria se poate calcula şi în raport cu x astfel:

$$A = 2\int_{0}^{x_1}\sqrt{x}dx + \int_{x_1}^{x_2}(\sqrt{x} - x + 1)dx = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-n}{x}, & x \in \left[n, n+\dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{n+1-x}{x}, & x \in \left[n+\dfrac{1}{2}, n+1\right] \end{cases}$

Avem aşadar

$$S_n = aria(\Gamma_{f/[n,n+1]}) = \int_{n}^{n+\frac{1}{2}}\frac{x-n}{x}dx + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1}\frac{n+1-x}{x}dx = \ln\frac{n^n(n+1)^{n+1}}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}}$$

7.1.4. Formula lui Stirling

Să se arate că $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!e^n}\sqrt{2n\pi}=1$.

Soluție. Fie $a_n=\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{2n\pi}}$, $n\geq 1$. Evident avem:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1.$$

Funcția $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$ fiind convexă ($f''(x)>0,(\forall)x>0$) rezultă (fig. 7.4)

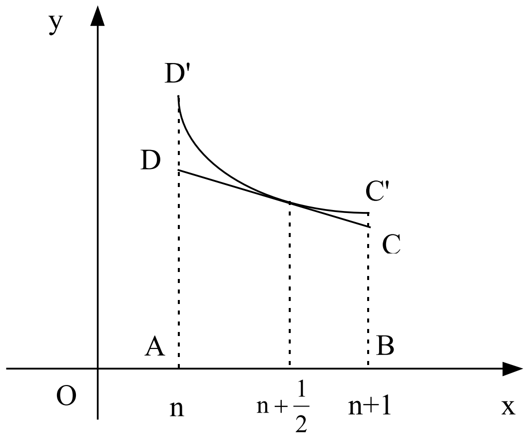


Fig. 7.4

deci întrucât

$$A(n,0);B(n+1,0);C\left(n+1,\frac{4n}{(2n+1)^2}\right);$$
$$D\left(n,\frac{4n+4}{(2n+1)^2}\right);C'\left(n+1,\frac{1}{n+1}\right);D'\left(n,\frac{1}{n}\right)$$

avem:

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) \tag{7.1.4}$$

Înmulțind (7.1.4) cu $n+\frac{1}{2}$ şi scăzând 1, obținem:

$$0<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)-1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

deci

$$0 < \ln\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

de unde

$$0 < \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k}}\right) < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \\ + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)$$

de unde rezultă imediat:

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+k}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)}, (\forall) n, k \geq 1 \qquad (7.1.5)$$

Din (7.1.5) rezultă că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător, şi întrucât este minorat de zero, este convergent. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$. Fixăm în (7.1.5) $n \geq 1$ şi trecem la limită după *k*, $k \to \infty$, obţinem:

$$1 \leq \frac{a_n}{a} \leq e^{\frac{1}{4n}} < e, (\forall) n \geq 1 \qquad (7.1.6)$$

Din (7.1.5) rezultă că $a > 0$. Atunci avem:

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2} \cdot \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4n\pi}}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}} \cdot \frac{e^{-2n}}{e^{-2n}} \cdot \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{C_{2n}^n \sqrt{n\pi}} = 1$$

(am ţinut seama de formula lui Wallis R4.2.1).

7.2. Calculul volumelor

În acest paragraf vom reaminti formula de calcul a volumelor corpurilor de rotaţie şi vom da o formulă de calcul a volumului cu ajutorul secţiunilor transversale.

7.2.1. Teoremă. [1] Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă şi pozitivă. Atunci corpul $C_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x), x \in [a,b]\}$ obţinut prin rotirea graficului funcţiei *f* în jurul axei *Ox* are volum şi:

$$vol(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)dx \qquad (7.2.1)$$

7.2.2. Corolar. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ două funcţii continue şi pozitive, $f(x) \le g(x), (\forall) x \in [a,b]$. Atunci corpul obţinut prin rotirea suprafeţei plane limitate de curbele $y = f(x)$, $y = g(x)$ şi dreptele $x = a$ şi $x = b$ în jurul axei Ox are volum şi

$$vol(C_{f,g}) = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) dx . \qquad (7.2.2)$$

7.2.3. Observaţie. Pentru a calcula volumul corpului generat de suprafaţa plană limitată de curbele $x = f(y)$, $x = g(y)$ $(0 \le f(y) \le g(y)$, $(\forall) y \in [c,d])$ şi dreptele $y = c$ şi $y = d$ în jurul axei *Oy* vom folosi formula (7.2.2) cu singura diferenţă că vom integra în raport cu *y* în loc de *x*. Deci

$$vol(C_{f,g}) = \pi \int_c^d (g^2(y) - f^2(y)) dy \qquad (7.2.3)$$

7.2.4. Exemplu. Se consideră regiunea determinată de parabola $y^2 = 2px$ şi dreptele $x = 0$ şi $x = a$. Să se determine volumul corpului obţinut prin rotirea acestei regiuni plane în jurul axelor *Ox* şi *Oy*.

Soluţie. (fig. 7.5) $vol(C_{Ox}) = \pi \int_0^a 2pxdx = \pi a^2 p$

$$vol(C_{Oy}) = \pi \int_0^{\sqrt{2pa}} \left(\frac{y^2}{2p} \right)^2 dy = \frac{\pi a^2 \sqrt{2pa}}{5}$$

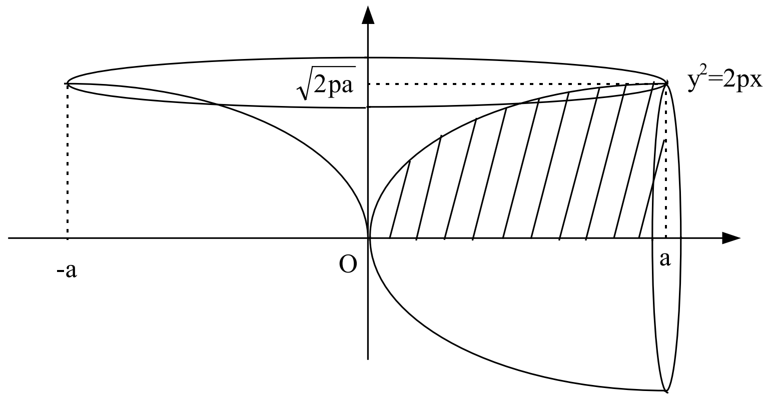


Fig. 7.5

Pentru a putea aplica formula (7.2.3) este necesar să exprimăm pe *x* ca funcţii de *y*. De multe ori acest lucru este dificil de făcut. Formula următoare dă posibilitatea calculării volumului unui corp obţinut prin rotirea în jurul unei axe, integrând de-a lungul unui interval al celeilalte axe.

7.2.5. Teoremă. [2] Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}_+$ continuă; $a, b \ge 0$. Atunci volumul corpului obţinut prin rotirea suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei *f*, dreptele $x = a$ şi $x = b$ în jurul axei *Oy* are volum şi

$$vol(C_{f,Oy}) = \int_a^b 2\pi x f(x)dx \tag{7.2.4}$$

Demonstrație. Fie $\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < ... < x_{p_n}^n = b)$, $n \in \mathbf{N}$ un şir de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ şi $c_k^n = \dfrac{x_{k-1}^n + x_k^n}{2}$ mijlocul intervalului $[x_{k-1}^n, x_k^n]$ (fig. 7.6).

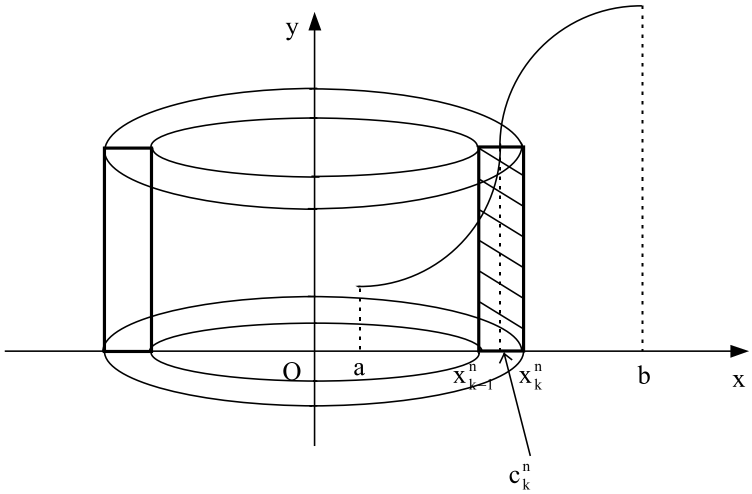


Fig. 7.6

Volumul corpului obținut prin rotirea dreptunghiului $[x_{k-1}^n, x_k^n] \times [0, f(c_k^n)]$ este $vol(D_k^n) = \pi[(x_k^n)^2 - (x_{k-1}^n)^2] f(c_k^n) = 2\pi c_k f(c_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n)$ şi

$\sum\limits_{k=1}^{p_n} vol(D_k^n) = 2\pi \sum\limits_{k=1}^{p_n} c_k^n f(c_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) \int_a^b 2\pi x f(x)dx$. Întrucât

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{p_n} vol(D_k^n) = vol(C_{f,Oy})$ obținem $vol(C_{f,Oy}) = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$.

7.2.6. Observație. Volumul corpului obținut prin rotirea suprafeței plane limitate de curba $x = f(y)$, dreptele $y = c$ şi $y = d$, $0 \le c \le d$ în jurul axei *Ox* este:

$$vol(C_{f,Ox}) = \int_c^d 2\pi y f(y)dy \tag{7.2.5}$$

7.2.7. Problemă rezolvată. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea suprafeței plane limitate de curba $y = 2x - x^2$, dreptele $x = 0$ şi $x = 1$.

a) în jurul axei *Oy*

b) şi curba $y = x$ în jurul axei *Oy*

c) şi curba $y = x$ în jurul dreptei $x = 1$.

Soluție. a) $vol(C_{Oy}) = \int_0^1 2\pi x(2x - x^2)dx = \dfrac{5\pi}{6}$ (fig. 7.7a)

Se observă că formula (7.2.3) nu se poate aplica în acest caz întrucât din $y = 2x - x^2$ nu putem exprima pe x ca funcție de y.

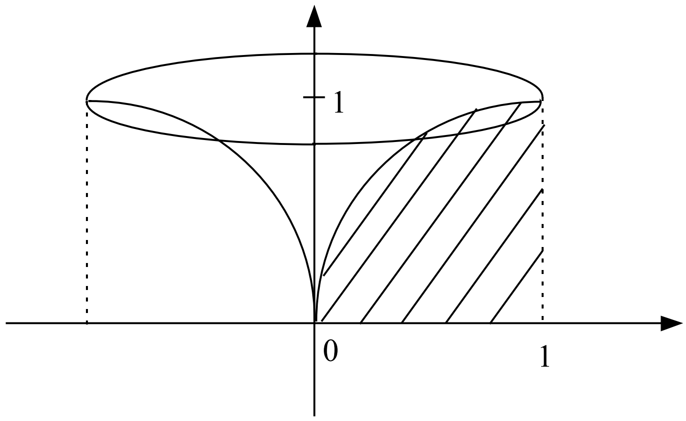


Fig. 7.7.a)

b) $vol(C) = \int_0^1 2\pi x(f(x) - g(x))dx$, unde $f(x) = 2x - x^2$ şi $g(x) = x$ (fig. 7.6b)

$$vol(C) = \int_0^1 2\pi x(x - x^2)dx = \frac{\pi}{6}$$

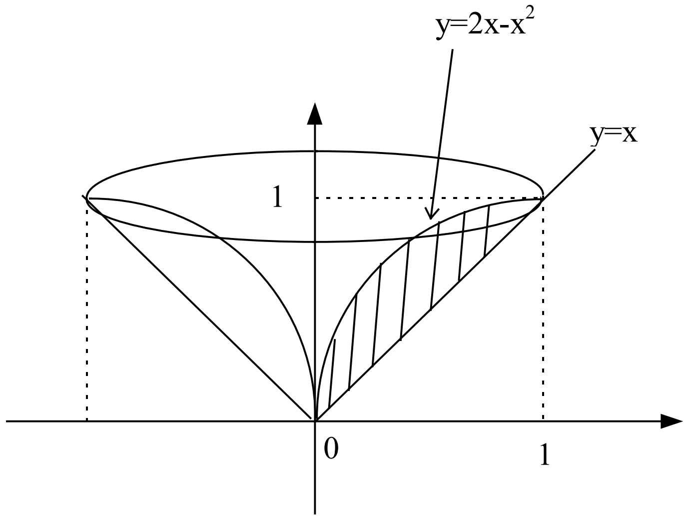


Fig. 7.7.b)

c) Volumul corpului de calculat este acelaşi cu volumul corpului obţinut prin rotirea suprafeţei plane limitate de curbele $y = f(1-x)$ şi $y = g(1-x)$ în jurul axei Oy. Deci

$$vol(C_{x=1}) = \int_0^1 2\pi x(f(1-x) - g(1-x))dx = \frac{\pi}{6}$$

În continuare vom da o formulă de calcul a volumelor după secţiuni transversale, formulă care se poate utiliza şi la calculul volumelor corpurilor care nu sunt de rotaţie.

7.2.8. Teoremă. [3] Fie C un corp geometric care raportat la un sistem de axe de coordonate se găseşte între planele $x = a$ şi $x = b$ (fig. 7.8). Dacă toate planele perpendiculare pe axa Ox intersectează corpul C după o suprafaţă de secţiune a cărei arie $S(x)$ este o funcţie continuă de variabilă x, atunci volumul corpului C este:

$$vol(C) = \int_a^b S(x)dx \tag{7.2.6}$$

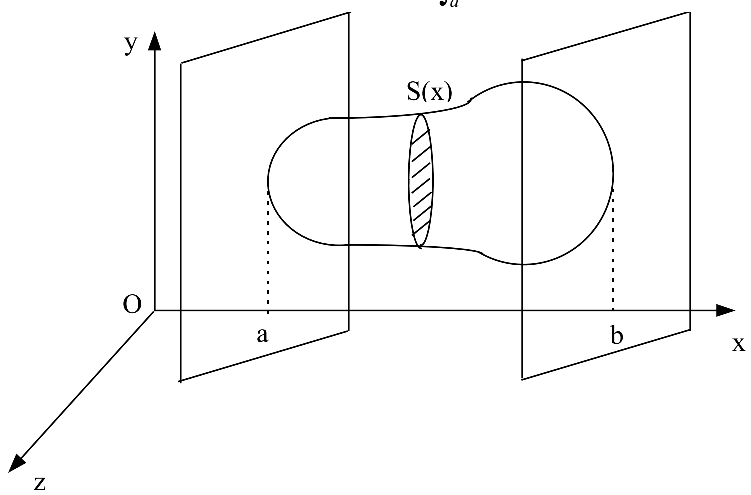


Fig. 7.8

Demonstraţie. Fie $\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < ... < x_{p_n}^n = b)$, $n \in \mathbf{N}$ un şir de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$ şi

$$v_n = \sum_{k=1}^{p_n} s_k^n (x_k^n - x_{k-1}^n), \quad \text{unde} \quad s_k^n = \inf_{x\in[x_{k-1}^n, x_k^n]} S(x) \quad \text{şi}$$

$$V_n = \sum_{k=1}^{p_n} S_k^n (x_k^n - x_{k-1}^n), \quad \text{unde} \quad S_k^n = \sup_{x\in[x_{k-1}^n, x_k^n]} S(x)$$

De aici avem $v_n \le vol(V) \le V_n$ şi făcând $n \to \infty$, obţinem

$$vol(C) = \int_a^b S(x)dx .$$

7.2.9. Observație. Aplicând formula (7.2.6) corpurilor de rotație obținute prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox (fig. 7.9), regăsim formula (7.2.1), întrucât $S(x) = \pi f^2(x)$.

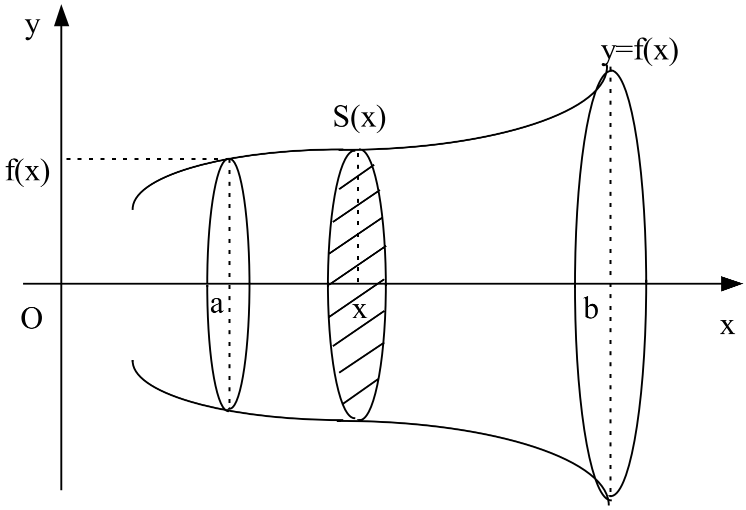


Fig. 7.9

7.2.10. Notă istorică. În secolul XVII au fost pentru prima dată sistematizate metodele geometrice care au permis calcularea de arii şi volume. Bonaventura Cavalieri (1598-1647), elev al lui Galilei, a descoperit că dacă două regiuni plane au aceeaşi lățime şi aceeaşi secțiune transversală în fiecare punct (fig. 7.10) atunci regiunile au aceeaşi arie. Principiul lui Cavalieri "Corpurile cu aceleaşi secțiuni transversale şi aceeaşi înălțime au acelaşi volum" rezultă imediat din Teorema 7.2.8 pentru că aria secțiunilor transversale este aceeaşi în acest caz. Acest principiu, pe care Cavalieri nu l-a demonstrat niciodată, a fost numit astfel de matematicienii care i-au urmat.

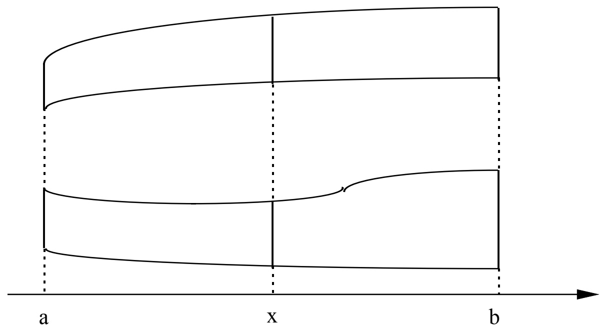


Fig. 7.10

Bibliografie

[1] Gh. Sirețchi, *Calcul diferențial şi integral*, vol. I şi II, Ed. Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[2] Finney, Thomas, Demana, Waits, *Calculus – Graphical, Numerical, Algebraic*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

[3] * * * *Mică enciclopedie matematică,* traducere, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1980.

[4] V. Arsinte, *Probleme elementare de calcul integral*, Ed. Univ. Bucureşti, 1995.

[5] A. Magdaş, S. Ursu, G. Lobonț, I. Diaconu, *Matematică, manual pentru clasa a XII-a*, Ed. Studium, 2002.

Probleme rezolvate

1) Un cilindru de rază 3 este secționat de un plan care trece prin centrul bazei şi formează cu aceasta un unghi de 45°. Să se găsească volumul corpului obținut.

2) (O nouă formulă de calcul a volumului tetraedrului). Dacă *ABCD* este un tetraedru cu $AB = a$, $CD = b$, $m\angle(AB,CD) = \alpha$ şi *d* este distanța dintre dreptele *AB* şi *CD*, atunci:

$$V_{[ABCD]} = \frac{1}{6}abd\sin\alpha \qquad (7.2.7)$$

Soluție. 1) Secționând corpul cu un plan perpendicular pe axa *Ox* se obține un dreptunghi de arie $S(x) = 2x\sqrt{9-x^2}$, $x \in [0,3]$ (fig. 7.11).

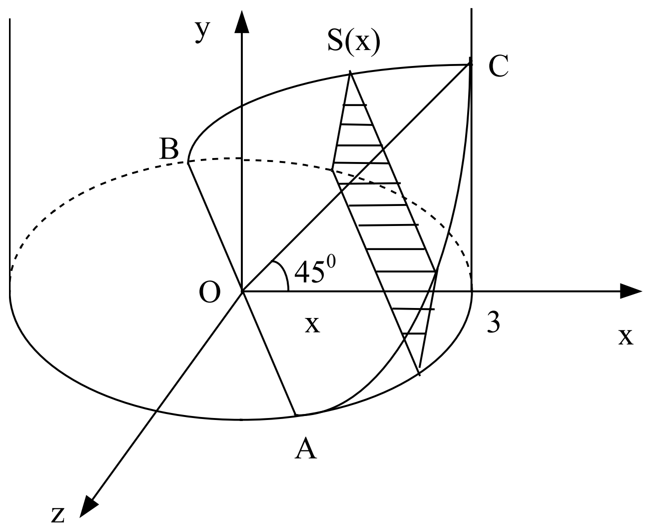


Fig. 7.11

$S(x)$ este o funcție continuă de *x*, deci

$$V = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx = -\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big|_0^3 = 18 .$$

2) Vom considera un plan α_x, $x \in (0,d)$ paralel cu *AB* şi *CD*. Atunci planul de secțiune va fi un paralelogram [*MNPQ*] cu $MQ \parallel AB$, $NP \parallel AB$, $QP \parallel CD$ şi $MN \parallel CD$ (fig. 7.12).

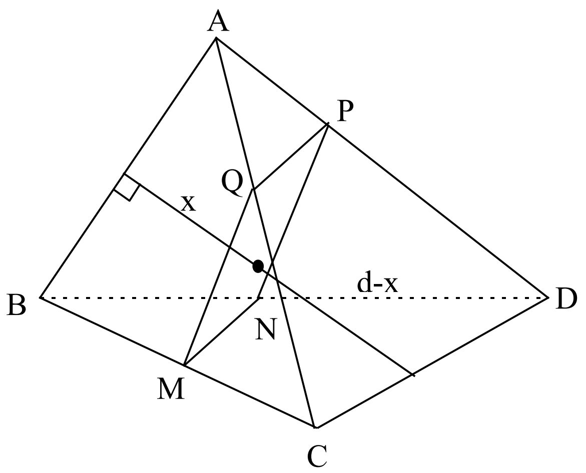


Fig. 7.12

Avem $V_{[ABCD]} = \int_0^d S_{[MNPQ]} dx = \int_0^d MN \cdot MQ \sin \alpha dx$. Întrucât

$$\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = \frac{x}{d} \quad \text{şi} \quad \frac{MQ}{AB} = \frac{MC}{BC} = \frac{d-x}{d}$$

obținem că

$$V_{[ABCD]} = \int_0^d \frac{xb}{d} \cdot \frac{(d-x)a}{d} \sin \alpha dx = \frac{ab \sin \alpha}{d^2} \int_0^d x(d-x)dx = \frac{abd \sin \alpha}{6}.$$

Observații. a) Dacă $AB \perp CD$, formula (7.2.7) devine: $V = \frac{1}{6} abd$.

b) Formula (7.2.7) este utilă şi pentru calculul distanței dintre două drepte, încadrând cele două drepte ca muchii opuse într-un tetraedru.

8. Ecuații diferențiale şi integrale

Teoria ecuațiilor diferențiale a apărut în secolul al XVII-lea odată cu lucrările matematicienilor G.W. Leibniz (1646-1716) şi Isaac Newton (1647-1722) legate de dezvoltarea calculului integral şi diferențial.

Dezvoltarea teoriei ecuațiilor diferențiale a fost impulsionată de numeroasele sale aplicații în domenii cum ar fi: matematica, fizica, chimia, geofizica, biofizica, biologie, metrologie etc.

8.1. Ecuații diferențiale de ordin întâi şi doi

8.1.1. Definiție. O ecuație de forma

$$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,\ n \in \mathbb{N}, \qquad (1)$$

se numeşte **ecuație diferențială de ordinul *n***. Prin soluție a ecuației diferențiale (1) înțelegem orice funcție $\varphi : I \to \mathbb{R}$, I interval din $\mathbb{R}$, funcție ce are derivate până la ordinul *n* şi care satisface relația (1) pentru orice $x \in I$.

8.1.2. Definiție. O ecuație diferențială de tipul

$$y^{(n)}(x)F(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \qquad (2)$$

se numeşte **ecuație diferențială sub formă normală**.

8.1.3. Definiție. O ecuație diferențială de forma

$$y' = p(x) \cdot y + q(x), \qquad (3)$$

unde $p, q : I \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue pe intervalul *I*, se numeşte **ecuație diferențială de ordinul I**.

8.1.4. Definiție. O funcție $\varphi : I \to \mathbb{R}$ este o soluție a ecuației (3) dacă φ este derivabilă pe intervalul *I* şi $\varphi'(x) = p(x) \cdot \varphi(x) + q(x)$, $(\forall)\ x \in I$.

8.1.5. Teoremă. *Orice soluție a ecuației diferențiale (3) este de forma*

$$y(x) = e^{P(x)} \cdot \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} q(s) \cdot e^{-P(s)}\, ds \right], \qquad (4)$$

unde $x_0 \in I$ este arbitrar, $y_0 = y(x_0)$ iar P este o primitivă pentru p, primitivă ce se anulează în punctul x_0.

Demonstrație. Fie $x_0 \in I$ un număr fixat şi *P* o primitivă pentru funcția *p*, primitivă ce se anulează în x_0, adică $P(x) = \int_{x_0}^{x} p(u)\, du$. Înmulțind ambii membri ai ecuației (3) cu $e^{-P(x)} > 0$ obținem:

$$y'(x) \cdot e^{-P(x)} - p(x) \cdot e^{-P(x)} = q(x) \cdot e^{-P(x)},\ (\forall)\ x \in I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(y(x)\cdot e^{-P(x)}\right) = q(x)\cdot e^{-P(x)},\ (\forall)\ x\in I.$$

Rezultă prin integrare

$$y(x)\cdot e^{-P(x)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} q(s)\cdot e^{-P(s)}ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-P(s)}\cdot\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(s)\cdot e^{-P(s)}\,ds\right),$$

adică are loc concluzia din teoremă.

Reciproc, prin calcul direct, se arată că orice funcție ce verifică relația (4) este soluție pentru ecuația diferențială (3).

8.1.6. Observație. În probleme concrete, pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale de tipul (3), este indicat să urmăm calea de demonstrație din Teorema 8.1.5. Să mai observăm că formula (4) exprimă soluția ecuației diferențiale (3) care satisface condiția inițială $y(x_0) = y_0$.

8.1.7. Observații. a) Dacă $p(x)=0$, atunci ecuația diferențială (3) devine $y' = q(x)$, $(\forall)\ x\in I$. Soluția acestei ecuații este

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} q(s)\,dx + c,\ c\in\mathbb{R}\ \text{ arbitrar.} \qquad (5)$$

b) Dacă $q(x)=0$ și $p(x)=a=$ const., atunci ecuația diferențială (3) devine $y' = a\cdot y$, numită și **ecuație diferențială de ordinul I liniară, omogenă și cu coeficienți constanți**. Din Teorema 8.1.5 deducem că soluția acestei ecuații este:

$$y(x) = c\cdot e^{ax}, \qquad (6)$$

unde $c\in\mathbb{R}$ este o constantă arbitrară.

c) Dacă $p(x)=a\in\mathbb{R}^*$ și $q(x)=b\in\mathbb{R}^*$, atunci ecuația diferențială (3) devine

$$y' = a\cdot y + b\ ,$$

numită și **ecuație diferențială de ordinul I liniară, neomogenă și cu coeficienți constanți.** Soluția acestei ecuații (vezi Teorema 8.1.5) este:

$$y(x) = -\frac{b}{a} + c\cdot e^{a\cdot x},\ c\in\mathbb{R}\ .$$

8.1.8. Exemplu. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale:

$$y'(x) = 2^{x+2} + 3\cdot 6^{x},\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Soluție. Soluția ecuației date este, conform relației (5):

$$y(x)=c+\int_{x_0}^{x}(2^{s+2}+3\cdot 6^s)\,ds=c+\left(\frac{2^{s+2}}{\ln 2}+3\cdot\frac{6^s}{\ln 6}\right)\Bigg|_{x_0}^{x}=\frac{2^{x+2}}{\ln 2}+\frac{3\cdot 6^x}{\ln 6}+\alpha,\ (\forall)\,x\in\mathbb{R}$$

unde $\alpha\in\mathbb{R}$ este o constantă arbitrară.

8.1.9. Exemplu. Să se determine soluția ecuației diferențiale

$$y'=-3\cdot y(x),\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Soluție. În conformitate cu relația (6) avem

$$y(x)=c\cdot e^{-3x},\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}\ ,$$

unde $c\in\mathbb{R}$ arbitrar.

8.1.10. Exemplu. Să se determine mulțimea soluțiilor ecuației diferențiale

$$y'=-\frac{2}{x}\cdot y+x^3,\ (\forall)\ x\in I \text{ unde } I\subset(-\infty,0) \text{ sau } I\subset(0,\infty) \text{ este interval.}$$

Soluție. Ecuația dată este ecuație diferențială de ordinul I având $p(x)=-\dfrac{2}{x}$ și $q(x)=x^3,\ x\in I$. Fie

$$P(x)=\int_{x_0}^{x}-\frac{2}{x}\,dx=-2\ln|x|\Big|_{x_0}^{x}=-2(\ln|x|-\ln|x_0|)=-\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)^2$$

$x_0,x\in I$, o primitivă pentru p, primitivă ce se anulează în punctul x_0. Din Teorema 8.1.5 obținem:

$$y(x)=\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-2}\left[y(x_0)+\int_{x_0}^{x}s^3\cdot\frac{s^2}{x_0^2}\,ds\right]=\frac{x_0^2}{x^2}\left[y(x_0)+\frac{1}{x_0^2}\cdot\frac{s^6}{6}\right]\Bigg|_{x_0}^{x}=$$

$$=\frac{x_0^2\cdot y(x_0)}{x^2}+\frac{x^4}{6}+\frac{x_0^4}{6x^2}=\frac{x^4}{6}+\frac{1}{x^2}\cdot c,\ (\forall)\ x\in I\ ,$$

unde $c\in\mathbb{R}$ este o constantă arbitrară.

8.1.11. Definiție. O ecuație diferențială de forma

$$y''+a(x)\cdot y'+b(x)\cdot y=f(x),\ (\forall)\ x\in I \qquad (7)$$

unde $I\subset\mathbb{R}$ este interval iar $f,a,b:I\to\mathbb{R}$ sunt funcții continue pe *I*, se numește **ecuație diferențială liniară de ordinul II**. Dacă funcția *f* este identic nulă, atunci ecuația se numește **omogenă**, iar în caz contrar, ecuația se numește **neomogenă**. Funcțiile *a* și *b* se numesc coeficienții ecuației,

8.1.12. Propoziție. Dacă $y_1,y_2,\dots,y_p\ \ (p\in\mathbb{N}^*)$ sunt soluții ale ecuației diferențiale liniare omogene de ordinul II atunci, funcția

$$y=c_1\cdot y_1+c_2\cdot y_2+\dots+c_p\cdot y_p,$$

unde $c_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,p}$ sunt numere arbitrare, este soluție a aceleiași ecuații.

Demonstrație. Într-adevăr, funcția *y* este de două ori derivabilă pe *I* şi

$$y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = \left(\sum_{i=1}^{p} c_i \cdot y_i\right)^{//} + a(x)\cdot\left(\sum_{i=1}^{p} c_i \cdot y_i\right)^{/} + b(x)\cdot\sum_{i=1}^{p} c_i \cdot y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} c_i \cdot (y_i'' + a(x)y_i' + b(x)y_i) = 0,$$

deoarece fiecare termen din sumă este egal cu zero.

8.1.13. Definiție. Funcțiile $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, sunt **liniar independente** dacă din $\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0$, $(\forall)\ x \in I$, rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Dacă există $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0$, $(\forall)\ x \in I$, atunci funcțiile y_1 şi y_2 se numesc **liniar dependente**.

Facem precizarea că această definiție se poate extinde pentru un număr finit de funcții.

8.1.14. Definiție. Dacă funcțiile $y_1, y_1 : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe intervalul *I*, atunci determinantul

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

se numeşte **determinantul Wronski**[1] sau **wronskianul** funcțiilor y_1, y_2.

8.1.15. Propoziție. Dacă funcțiile derivabile y_1, y_2 sunt liniar dependente pe *I*, atunci $W(y_1, y_2) = 0$.

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că $(\exists)\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0$, $(\forall)\ x \in I$. Derivând această relație obținem sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0 \\ \alpha_1' y_1' + \alpha_2' y_2' = 0. \end{cases}$$

Cum acest sistem liniar omogen are soluția (α_1, α_2) nebanală, rezultă că $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0$, adică $W(y_1, y_2) = 0$.

8.1.16. Propoziție. Dacă y_1, y_2 sunt soluții liniar independente pe *I* ale ecuației liniare omogene de ordinul II, atunci

$$W(y_1, y_2) \neq 0,$$

pentru orice $x \in I$.

---

[1] Josef Wronski (1778-1853) matematician polonez care a introdus pentru prima dată acest determinant

8.1.17. Teoremă. *Dacă* $y_1, y_1 : I \to \mathbb{R}$ *,* $I \subset \mathbb{R}$ *interval, sunt soluții ale ecuației liniare omogene de ordinul II şi dacă* $W(y_1, y_2) \neq 0$ *pe I, atunci soluția generală a acestei ecuații este*

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 ,$$

unde c_1*,* c_2 *sunt constante reale arbitrare.*

8.1.18. Observație. Dacă y_0 este o soluție a ecuației liniare neomogene de ordinul II cu transformarea $z = y - y_0$, reducem ecuația la ecuația omogenă

$$z'' + a(x) \cdot z' + b(x) \cdot z = 0 \ .$$

Demonstrație. Într-adevăr, dacă y_0 este soluție rezultă $z + y_0$ soluție $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (z + y_0)'' + a(x) \cdot (z + y_0) + b(x) \cdot (z + y_0) = 0 \overset{y_0 \text{ soluție}}{\Leftrightarrow} z'' + a(x) \cdot z' + b(x) \cdot z = 0 \ ,$$

ceea ce trebuie demonstrat.

8.1.19. Definiție. O ecuație diferențială de forma

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = c, \ \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R} \ , \tag{8}$$

se numeşte **ecuație diferențială de ordinul II cu coeficienți constanți**.

8.1.20. Observație. Pentru rezolvarea ecuației (8) se consideră ecuația omogenă

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0 . \tag{9}$$

Se scrie ecuația caracteristică, ataşată

$$r^2 + a \cdot r + b = 0$$

şi se determină rădăcinile r_1, r_2 ale acestei ecuații.

Se cunoaşte următorul rezultat dat de propoziția:

8.1.21. Propoziție. Dacă r_1, r_2 sunt rădăcinile ecuației caracteristice, atunci avem

(i) $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2 \Rightarrow$ soluția generală a ecuației (9) este $y_0(x) = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x}$ cu $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) $r_1 = r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ soluția generală a ecuației (9) este $y_0(x) = (c_1 \cdot x + c_2) \cdot e^{r_1 x}$, cu $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(iii) $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0 \Rightarrow$ soluția generală a ecuației (9) este $y_0(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \cdot \sin(\beta x))$, unde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8.1.22. Teoremă. Fie ecuația diferențială de ordinul II cu coeficienți constanți şi omogenă:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = f(x), \ x \in I, \ (I \text{ interval din } \mathbb{R}), \tag{10}$$

$a, b \in \mathbb{R}$ iar $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă. Atunci rezultă că soluția generală a ecuației (1) este

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x), \ (\forall) \ x \in I \ ,$$

unde y_0 este soluţia generală a ecuaţiei omogene iar y_p este o soluţie particulară a ecuaţiei (10).

Demonstraţie. Demonstrăm că $y = y_0 + y_p$ este soluţie $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (y_0 + y_p)'' + a(y_0 + y_p)' + b(y_0 + y_p) = f(x),\ (\forall)\ x \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y_0'' + ay_0' + by_0) + y_p'' + ay_p' + by_p = f(x),\ (\forall)\ x \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_p'' + ay_p' + by_p = f(x),\ (\forall)\ x \in I,\ ,$$

ceea ce este adevărat.

Reciproc, dacă z este soluţie pentru ecuaţia (10), rezultă $z'' + az' + bz = f(x),\ (\forall)\ x \in I$ şi cum $y_p'' + ay_p' + by_p = f(x),\ (\forall)\ x \in I$, scăzând ultimele egalităţi, avem $(z - y_p)'' + a(z - y_p)' + b(z - y_p) = 0$, adică $z - y_p$ este soluţie a ecuaţiei omogene. Deducem că $z - y_p = y_0$ şi aceasta este echivalentă cu $z = y_0 + y_p$. Cu aceasta demonstraţia este încheiată.

8.1.23. Observaţie. Găsirea unei soluţii particulare pentru ecuaţia (10) nu este întotdeauna simplă. Totuşi, aceasta poate fi găsită prin aşa zisa metodă a coeficienţilor nedeterminaţi, în următoarele cazuri:

a) Dacă $f(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot P_n(x),\ x \in \mathbb{R}$, unde P_n este o funcţie polinomială de grad n şi dacă α nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice $r^2 + a \cdot r + b = 0$, atunci căutăm o soluţie particulară $y_p = e^{\alpha \cdot x} \cdot Q_n(x),\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$, unde $Q_n(x)$ este o funcţie polinomială de grad n, ai cărui coeficienţi trebuie determinaţi. Dacă α este rădăcină a ecuaţiei caracteristice $r^2 + a \cdot r + b = 0$, atunci se caută soluţii de forma $y_p(x) = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_n(x),\ x \in \mathbb{R}$, unde r este ordinul de multiplicitate al rădăcinii α.

b) Dacă $f(x) = e^{\alpha \cdot x}(P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x)$ şi dacă $\alpha \pm i\beta$ nu sunt rădăcini ale ecuaţiei caracteristice, atunci căutăm soluţii y_p de forma: $y_p(x) = e^{\alpha \cdot x}[R_q(x)\cos \beta x + S_q(x)\sin \beta x]$, unde $R_q(x)$ şi $S_q(x)$ sunt polinoame de grad $q = \max\{n, m\}$ ai căror coeficienţi trebuie determinaţi. Dacă $\alpha \pm i\beta$ sunt rădăcini ale ecuaţiei caracteristice, atunci luăm

$$y_p(x) = x \cdot e^{\alpha \cdot x}[R_q(x)\cos \beta x + S_q(x)\sin \beta x].$$

c) Pentru alte cazuri se poate utiliza aşa zisa metodă a variaţiei constantelor (metoda lui Lagrange). Această metodă va fi exemplificată în exemplul următor.

8.1.24. Exemplu. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y'' + \omega^2 y = f(x),$$

$x \in I \subset \mathbb{R}$ interval, *f* continuă pe *I* şi ω = *constant*, $\omega \neq 0$.

Soluție. Ecuația omogenă $y'' + \omega^2 y = 0$ are ecuația caracteristică $r^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow r_1 = \omega \cdot i,\ r_2 = -\omega \cdot i$. Rezultă că $y_1 = \cos \omega x$ şi $y_2 = \sin \omega x$ sunt soluțiile pentru aceasta şi $y_0 = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constante arbitrare. Căutăm o soluție particulară y_p pentru ecuația dată, de forma

$$y_p = c_1(x) \cdot \cos \omega x + c_2(x) \cdot \sin \omega x .$$

Avem:

$$y_p' = c_1'(x) \cos \omega x + c_2'(x) \sin \omega x - c_1(x) \cdot \omega \cdot \sin \omega x + c_2(x) \cdot \omega \cdot \cos \omega x .$$

Punem condiția $c_1'(x) \cos \omega x + c_2'(x) \sin \omega x = 0$. Din aceasta se deduce

$$y_p'' = -c_1'(x) \cdot \omega \sin \omega x + c_2'(x) \omega \cos \omega x - \omega^2 \cdot c_1(x) \cos \omega x - \omega^2 \cdot c_2(x) \cdot \sin \omega x .$$

Cum y_p verifică ecuația dată, rezultă $-c_1'(x) \cdot \omega \sin \omega x + c_2'(x) \omega \cos \omega x = f(x)$. În acest mod se obține sistemul

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos \omega x + c_2'(x) \sin \omega x = 0 \\ -c_1'(x) \sin \omega x + c_2'(x) \cos \omega x = \dfrac{f(x)}{\omega} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -\dfrac{1}{\omega} f(x) \cdot \sin \omega x \\ c_2'(x) = \dfrac{1}{\omega} f(x) \cdot \cos \omega x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1(x) = k_1 - \dfrac{1}{\omega} \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s) \sin(\omega s)\, ds \\ c_2(x) = k_2 + \dfrac{1}{\omega} \cdot \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s) \cos(\omega s)\, dx,\ x_0 \in I,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} . \end{cases}$$

Ca urmare, soluția generală a ecuației date este

$$y = y_0 + y_p = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x + k_1 \cos \omega x - \frac{1}{\omega} \cos \omega x \cdot \int_{x_0}^{x} f(s) \sin(\omega s) dx +$$

$$+ k_2 \cdot \sin \omega x + \frac{1}{\omega} \sin \omega x \cdot \int_{x_0}^{x} f(s) \cos(\omega s) ds =$$

$$= \alpha_1 \sin \omega x + \alpha_2 \cos \omega x - \frac{1}{\omega} \cos \omega x \cdot \int_{x_0}^{x} f(s) \sin(\omega s) ds + \frac{1}{\omega} \sin \omega x \cdot \int_{x_0}^{x} f(s) \cos(\omega s) ds$$

8.2. Ecuații diferențiale cu variabile separabile

8.2.1. Definiție. O ecuație diferențială de forma

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{1}$$

unde $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, $g : J \to \mathbb{R}$, J interval, sunt funcții continue se numeşte **ecuație diferențială cu variabile separabile**.

8.2.2. Observație. Ecuația diferențială (1) poate fi scrisă sub forma

$\dfrac{y'}{g(y)} = f(x)$ pentru valori ale lui y pentru care $g(y) \neq 0$,

adică $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$. Integrând ambii membrii ai acestei egalități se obține

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + c,\ (c \in \mathbb{R}),$$

care este o familie de curbe ce depinde de constanta *c*, familie care poartă numele de **soluția generală** a ecuației (1).

Cazuri particulare ale ecuației diferențiale (1):

i) Ecuații diferențiale de ordinul I liniare omogene: $y' = f(x) \cdot y$.

Soluția: $y(x) = c \cdot e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$, $c-$ constanta arbitrară.

ii) Ecuații diferențiale de ordinul I liniare, omogene, cu coeficienți constanți: $y' = a \cdot y$, $a-$ constantă reală arbitrară.

Soluția: $y(x) = c \cdot e^{ax}$, $x \in \mathbb{R}$, $c-$ constantă reală arbitrară

Punem în evidență în continuare anumite **clase de ecuații diferențiale**:

A. Ecuații diferențiale de forma: $y' = f(x)$, $x \in I$.

Soluția. $y(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, $c-$constantă reală arbitrară

B. Ecuații diferențiale de ordinul I neomogene, cu coeficienți constanți:

Forma generală: $y' = a \cdot y + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Soluția: $y(x) = -\dfrac{b}{a} + c \cdot e^{ax}$, $x \in \mathbb{R}$, $c-$ constantă reală arbitrară

C. Ecuații omogene în sensul lui Euler:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),\ x \neq 0,\ f : I \to \mathbb{R} \text{ continuă}$$

Cu substituția $\dfrac{y}{x} = u$, adică $y = x \cdot u$, ecuația dată se transformă în $u + x \cdot u' = f(u)$, care este o ecuație cu variabile separabile.

D. Ecuația lui Bernoulli

Forma generală: $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $P, Q : I \to \mathbb{R}$ funcții continue.

Cazurile $\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$ au fost puse în evidență. Pentru $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, cu substituția $u = y^{1-\alpha}$, ecuația lui Bernoulli se transformă în

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot u' + P(x) \cdot u = Q(x)$$

care reprezintă o ecuație diferențială liniară neomogenă.

C. Ecuația lui Riccati

Forma generală: $y' + P(x) \cdot y + Q(x) \cdot y^2 = R(x)$, unde P, Q, R sunt funcții continue pe intervalul I.

Bibliografie

1. **Marius Burtea, Georgeta Burtea,** *Elemente de analiză matematică. Algebră superioară*, Editura Carminis, Pitești
2. **Gheorghe Micula, Paraschiva Pavel,** *Ecuații diferențiale și integrale prin probleme și exerciții*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1989
3. **G. Moroşanu,** *Ecuații diferențiale. Aplicații*, Editura Academiei, vol. III, București, 1989
4. **M. Roşculeț, G. Toma şi alții,** *Probleme de analiză matematică*, Editura Tehnică, București, 1993

Probleme rezolvate

R8.3.1. Să se determine soluțiile mărginite pe axa reală a ecuației

$$y' = 2x(y+\pi).$$

Soluție. Se observă că $y=-\pi$ este soluție mărginită. Presupunem în continuare că $y \neq -\pi$. Ecuația dată fiind cu variabile separabile, se poate transforma în felul următor

$$\frac{dy}{dx} = 2x\cdot(y+\pi) \Rightarrow \frac{dy}{y+\pi} = 2x\,dx \Rightarrow \ln|\,y+\pi\,| = x^2 + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+\pi = \pm e^{x^2+c_1},\ c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = -\pi + e^{x^2+c_1} \text{ sau } y = -\pi - e^{x^2+c_1},\ c_1 \in \mathbb{R}.$$

Acestea nu convin deoarece nu sunt mărginite pe $\mathbb{R}$. Unica soluție este $y=-\pi$

R8.3.2. Determinați soluția ecuației diferențiale $y' = \dfrac{x}{y}$ dacă $y(0)=4$.

Soluție. Ecuația dată este cu variabile separabile. Avem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = x\,dx \Rightarrow \int y\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - x^2 = c,\ c \in \mathbb{R} \text{ (ecuația unei hiperbole echilaterale).}$$

Deoarece $y(0)=4$, obținem $c=16$, deci $y^2 - x^2 = 16 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2+16}$. Cum $y(0)=4$, deducem că $y=\sqrt{x^2+16}$.

R8.3.3. Să se rezolve ecuația $x^3 \cdot y' \cdot \sin y = 2$ ştiind că $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Soluție. Din relația dată rezultă $x \neq 0$, $\sin y \neq 0$. Fiind o ecuație cu variabile separabile, avem

$$x^3 \cdot \frac{dy}{dx}\sin y = 2 \Rightarrow \sin y\,dy = \frac{2}{x^3}dx \Rightarrow \int \sin y\,dy = \int \frac{2}{x^3}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cos y = -\frac{1}{x^2} + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{x^2} - c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Folosind ultima relație şi $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \dfrac{\pi}{2}$, obținem $c=0$, deci

$$\cos y = \frac{1}{x^2} \tag{1}$$

Deoarece $\cos y \in [-1,1]$, avem $\dfrac{1}{x^2} \in [-1,1] \Rightarrow x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$, de unde obținem că $x \in (-\infty,-1]$ sau $x \in [1,\infty)$ deoarece $x \in I$ şi *I* este interval din $\mathbb{R}$.

Cazul $x \in (-\infty, -1]$ se exclude (y este definită spre $+\infty$). Din (1) avem $y = \pm \arccos \frac{1}{x^2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ şi, utilizând ipoteza $\left(\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{\pi}{2} \right)$, deducem $k = 0$, adică $y = \pm \arccos \frac{1}{x^2}$.

$y = -\arccos \frac{1}{x^2}$ nu este soluție pentru că $\lim_{x\to\infty} \left(\arccos \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{\pi}{2}$, contradicție cu ipoteza. Aşadar $y = \arccos \frac{1}{x^2}$, $(\forall)\ x \in (1, \infty)$ este unica soluție a ecuației propuse spre rezolvare ($x = 1$ a fost exclus pentru ca funcția y să fie derivabilă pe I).

R8.3.4. Determinați mulțimea soluțiilor ecuației

$$x \cdot y' - y = (x + y)\ln\left(\frac{x+y}{x} \right).$$

Soluție. Este necesar ca $x \neq 0$ şi $\frac{x+y}{x} > 0$. Ecuația se poate scrie sub forma

$$y' = \frac{y}{x} + \left(1 + \frac{y}{x}\right)\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right).$$

Cu substituția $\frac{y}{x} = z$, $y' = z + x \cdot z'$, aceasta devine

$$z' \cdot x + z = z + (1+z)\ln(1+z) \Leftrightarrow z' \cdot x = (1+z)\ln(1+z) \qquad (1)$$

Se observă că $z = 0$ este soluție. Pentru $z \neq 0$, $z > -1$ obținem

$$\frac{dz}{dx} \cdot x = (1+z)\ln(1+z) \Rightarrow \frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)} = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int \frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)} = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|\ln(1+z)\right| = \ln|x| + \ln\alpha,\ \alpha > 0 \Rightarrow \left|\ln(1+z)\right| = \alpha \cdot |x|,\ \alpha > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(1+z) = \pm\alpha x,\ \alpha > 0 \Rightarrow \ln(1+z) = c \cdot x,\ c \in \mathbb{R}^* \Rightarrow 1 + z = e^{c\cdot x},\ c \in \mathbb{R}^*$$

$\Rightarrow z = -1 + e^{cx}$, $c \in \mathbb{R}^*$ care verifică relația (1). Cum $z = 0$ este soluție, deducem că $z = -1 + e^{cx}$, $x \in \mathbb{R}^*_+$ sau $x \in \mathbb{R}^*_-$ şi $c \in \mathbb{R}$ arbitrar, sunt soluțiile ecuației (1).

Aşadar, soluțiile ecuației date sunt: $y = x(-1 + e^{cx})$, $x \in (-\infty, 0)$ sau $x \in (0. +\infty)$ şi $c \in \mathbb{R}$.

R8.3.5. Rezolvați ecuația diferențială $y^{(4)} + y^{(3)} = 0$.

Soluție. Fie $y^{(3)}(x) = z(x)$, $x \in I$. Ecuația devine

$$z' + z = 0 \Leftrightarrow z(x) = c_1 \cdot e^{-x},\ x \in \mathbb{R},\ c_1 \in \mathbb{R} \text{ parametru arbitrar.}$$

Deci

$$y'''(x) = c_1 e^{-x} \Rightarrow y''(x) = -c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \Rightarrow y'(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x + c_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = -c_1 \cdot e^{-x} + c_2 . \frac{x^2}{2} + c_3 \cdot x + c_4,\ x \in \mathbb{R} \text{ şi } c_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,4}$$

reprezintă soluţiile ecuaţiei date.

R8.3.6. Fie ecuaţia $y' = y^2 + f(x)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă, f periodică de perioadă T, $T > 0$. Să se arate că dacă y_1, y_2 sunt două soluţii diferite, periodice de perioadă T, pentru ecuaţia Riccati considerată, atunci

$$\int_0^T (y_1(t) + y_2(t))\, dt = 0 .$$

Soluţie. Din y_1, y_2 soluţii, rezultă că y_1 şi y_2 sunt funcţii derivabile şi $y_1' = y_1^2 + f(x)$, $y_2' = y_2^2 + f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$. De aici rezultă

$$y_1' - y_2' = y_1^2 - y_2^2 \Leftrightarrow (y_1 - y_2)' = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) \Rightarrow \frac{(y_1 - y_2)'}{y_1 - y_2} = y_1 + y_2 .$$

Integrăm şi obţinem:

$$\int_o^T \frac{(y_1(t) - y_2(t))'}{y_1(t) - y_2(t)} dt = \int_0^T (y_1(t) + y_2(t))\, dt \Rightarrow \ln\left|y_1(t) - y_2(t)\right|\Big|_0^T = \int_0^T (y_1(t) + y_2(t))\, dt \Rightarrow$$

$$\ln\left|y_1(T) - y_2(T)\right| - \ln\left|y_1(0) - y_2(0)\right| = \int_0^T (y_1(t) + y_2(t))\, dt .$$

De aici, deoarece $y_1(T) = y_1(0)$ şi $y_2(T) = y_2(0)$, obţinem $\int_0^T (y_1(t) + y_2(t))\, dt = 0$.

R8.3.7. Să se determine soluţiile ecuaţiei integrale

$$y(x) = \int_0^x y(t)\, dt + e^x ,$$

ştiind că y este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. Din relaţia dată şi ipoteză, deducem că y este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$. Prin derivare obţinem $y'(x) = y(x) + e^x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$. Aceasta este o ecuaţie diferenţială de ordinul I. Utilizând Teorema 8.1.5 obţinem

$$y(x) = e^x \left(y_0 + \int_0^x e^s \cdot e^{-s}\, ds \right) = e^x (y_0 + x),\ y_0 \in \mathbb{R} \text{ constanţă arbitrară.}$$

Înlocuind în ecuația integrală dată, găsim $y_0 = 1$, deci $y(x) = e^x(1+x)$, $x \in \mathbb{R}$ este unica funcție convenabilă.

R8.3.8. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale

$$y' = \sqrt{1-\sin x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Soluție. Funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-\sin x}$ fiind continuă pe $\mathbb{R}$, admite primitive. Ea este periodică cu perioada principală $T_0 = 2\pi$. Pentru $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$,

$$f(x) = \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2} = \left|\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right| = \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}$$

și $F_0(x) = -2\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}$ este o primitivă a restricției $f\big|_{\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]}$. Va rezulta că funcția $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(x) = F_0(x - 2k\pi) + k\left(F_0\left(\frac{5\pi}{2}\right) - F_0\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

pentru orice $x \in \left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, este o primitivă a lui *f*.

Deoarece $F_0\left(\frac{5\pi}{2}\right) - F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sqrt{2}$ și $\cos k\pi = (-1)^k$, $k \in \mathbb{Z}$, obținem că

$$F(x) = 2\cdot(-1)^{k+1}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) + 4k\sqrt{2}\,,$$

pentru orice $x \in \left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, este o primitivă a lui *f*.

Aşadar,

$$y(x) = c + 2\cdot(-1)^{k+1}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) + 4k\sqrt{2}\,,$$

$x \in \left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, unde $c \in \mathbb{R}$ este arbitrar.

R8.3.9. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y'' + y' - 6y = 2\cos 2x - 10\sin 2x\,.$$

Soluție. Pentru ecuația omogenă $y'' + y' - 6y = 0$, ecuația caracteristică $r^2 + r - 6 = 0$ are rădăcinile $r_1 = -3$ ºi $r_2 = 2$. Soluția generală a ecuației omogene este $y_0 = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Căutăm o soluție particulară y_p pentru ecuația neomogenă, sub forma $y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$. Avem:

$$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x,\ y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x.$$

Atunci

$$y_p'' + y_p' - 6y_p = (-10A - 2B)\sin 2x + (-10B + 2A)\cos 2x \overset{\text{ip.}}{=} 2\cos 2x - 10\sin 2x,$$

$(\forall)\ x \in \mathbb{R}$. Din sistemul $\begin{cases} -10A - 2B = -10 \\ 2A - 10B = 2 \end{cases}$, obținem $A = 1,\ B = 0$. Așadar, soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-3x} + \sin 2x,$$

$(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ şi $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ constante arbitrare.

R8.3.10. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y' \cdot \cos x + y \cdot \sin x = \cos^2 x.$$

Soluție. Observăm că $y = 0$ nu este soluție. Ecuația dată este de ordinul I și cu coeficienți variabili. Fie ecuația omogenă

$$y'\cos x + y\sin x = 0 \Rightarrow y'\cos x = -y\sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx}\cos x = -y\sin x \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|c| \Rightarrow |y| = |c| \cdot |\cos x| \Rightarrow y_0 = c \cdot \cos x,\ c \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Aceasta verifică ecuația omogenă pentru $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ și orice constantă reală c. Utilizăm metoda variației constantelor pentru a găsi o soluție particulară a ecuației date.

Fie $y_p = c(x) \cdot \cos x$. Rezultă $y_p'(x) = c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x$. Punând condiția ca aceasta să verifice ecuația dată, obținem

$$c'(x) \cdot \cos^2 x - C(x) \cdot \sin x \cdot \cos x + c(x)\cos x \cdot \sin x = \cos^2 x,$$

adică $c'(x) \cdot \cos^2 x = \cos^2 x$.

Convine $c'(x) = 1$, de unde $c(x) = x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ parametru.

Așadar, $y = (x + \alpha) \cdot \cos x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ și $\alpha \in \mathbb{R}$, reprezintă soluția generală a ecuației date.

R8.3.11. Fie funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(0, \infty)$. Să se arate că dacă există limita finită $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) + f'(x)) = A$, atunci există limitele $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Soluție. Notăm $z(x) = f(x) - A$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}(z'(x) + z(x)) = 0$, adică $z'(x) + z(x) = \alpha(x)$ cu

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0\,. \tag{1}$$

Deoarece $(e^x\cdot z(x))'=e^x\cdot\alpha(x)$, atunci

$$e^x\cdot z(x)=\int_1^x e^t\cdot\alpha(t)\,dt+c\,.$$

Pentru $x=1$, obținem $c=e\cdot z(1)$ și din relația anterioară, găsim

$$z(x)=e^{1-x}\cdot z(1)+\int_1^x e^{t-x}\cdot\alpha(t)\,dt\,.$$

Fie $\varepsilon>0$ arbitrar. Există $N=N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ astfel încât $\left|\alpha(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)\ t\le N$.

Atunci, pentru $x>N$ avem

$$\begin{aligned}\left|z(x)\right|&\le e^{1-x}\cdot\left|z(1)\right|+\int_1^N e^{t-x}\,dt+\frac{\varepsilon}{2}\int_N^x e^{t-x}dt\le\\&\le e^{-x}\cdot(e\cdot\left|z(1)\right|+M\cdot e^N)+\frac{\varepsilon}{2}\le e^{-x}\cdot c_0+\frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ x\ge N\,,\end{aligned}$$

unde $M=\sup\limits_{t\ge1}\left|\alpha(t)\right|$.

Există $N_1\ge N$ astfel încât $e^{-x}\cdot c_0<\frac{\varepsilon}{2}$ pentru $x\ge N_1$. Prin urmare, $\left|z(x)\right|<\varepsilon$ pentru $x\ge N_1$. Rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}z(x)=0$, de unde obținem $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$.

Tiparul executat prin comanda nr. 546, 2003, la
CARTPRINT Baia Mare, cod 4800
cartier Săsar, str. Victoriei nr. 146
tel./fax: 0262/218923
România