MATRICI, SIRURI SI ECUATII PELL

#

Determinarea şirurilor date prin sisteme recursive

Fie şirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ definite prin sistemul de relaţii de recurenţă:

(1) $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}$, unde $n \in \mathbf{N}$ iar a, b, c, d, x_0, y_0 sunt numere reale date.

Sistemul (1) poate fi scris sub formă matriceală astfel:

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ sau (2) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \forall n \geq 0$, unde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Dând , în relaţia (2), lui n valorile 0,1,2,...,n-1 obţinem:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \ldots = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Deci $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \forall n \geq 0$ şi problema revine acum la aflarea formei generale a lui A^n.

Observaţii 1.4.1.:

1. Dacă $\Delta = (TrA)^2 - 4\det A \leq 0$, atunci metoda expusă aici devine eficientă pentru aflarea şirurilor $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$;
2. Pentru a calcula A^n se poate folosi ecuaţia caracteristică:

$$A^2 - TrA \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2,\ A \in M_2(\mathbf{R}).$$

Back

#

Determinarea şirurilor date prin recurenţe omografice

Definiţie 1.4.2.: Funcţia f: $\mathbf{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, a, b, c, $d \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$, se numeşte **funcţie omografică**, iar $M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se numeşte **matricea ataşată funcţiei** f.

Proprietate 1.4.3.: Dacă f şi g sunt funcţii omografice, atunci pe mulţimea $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$ pe care sunt definite funcţiile $f \circ g$ şi $f^n = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n \ ori}, n \in \mathbf{N}^*$, funcţiile $f \circ g$ şi f^n sunt omografice şi avem relaţiile:

$$M_{f \circ g} = M_f \cdot M_g,$$

$$M_{f^n} = (M_f)^n, n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstraţie:

Fie $f\colon \mathbf{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbf{R}$, $g\colon \mathbf{R} - \left\{-\frac{d'}{c'}\right\} \to \mathbf{R}$,

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, g(x) = \dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}$ funcţii omografice şi $M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $M_g = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ matricele ataşate celor două funcţii.

Atunci, pe mulţimea $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$, pe care există compunerea $f \circ g$, avem:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{ag(x)+b}{cg(x)+d} = \frac{a \cdot \dfrac{a'x+b'}{c'x+d'} + b}{c \cdot \dfrac{a'x+b'}{c'x+d'} + d} = \frac{(aa'+bc')x+ab'+bd'}{(ca'+dc')x+cb'+dd'},$$

tot o funcţie omografică şi

$$M_{f \circ g} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = M_f \cdot M_g.$$

Egalitatea a doua se demonstrează prin inducţie matematică.

Definiţie 1.4.4.: Un şir recurent definit printr-o recurenţă de forma $x_{n+1} = f(x_n)$, unde f este o funcţie omografică, se numeşte **recurenţă omografică**.

Observaţia 1.4.5.: Ca recurenţa să definească un şir e necesar ca $cx_n + d \neq 0, \forall n \in \mathbf{N}$.

Proprietate 1.4.6.: Dacă $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \geq 0$, atunci

$$x_n = f^n(x_0), \text{ unde } f^n(x_0) = (\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n \ ori})(x_0)$$

Demonstrație:

Pentru demonstrație se folosește metoda inducției matematice.

Într-adevăr, fie f: $\mathbf{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Dacă $x_{n+1} = f(x_n)$,

rezultă $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}, \forall n \geq 0$ și atunci $x_1 = f(x_0) = \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d}$, adică lui x_1 i se

atașează matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, iar

$$x_2 = f(x_1) = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = \frac{a \cdot \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d} + b}{c \cdot \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d} + d} = \frac{(a^2 + bc)x_0 + b(a+d)}{c(a+d)x_0 + bc + d^2} \text{ și}$$

$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$, adică lui x_2 i se atașează matricea A^2.

Presupunând că lui $x_n = \frac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n}$ i se asociază matricea

$A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, avem

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{ax_n + b}{cx_n + d} = \frac{a \cdot \frac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n} + b}{c \cdot \frac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n} + d} = \frac{(aa_n + bc_n)x_0 + (ab_n + bd_n)}{(ca_n + dc_n)x_0 + (cb_n + dd_n)} \text{ și}$$

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_n + bc_n & ab_n + bd_n \\ ca_n + dc_n & cb_n + dd_n \end{pmatrix},$$

obținem că lui x_{n+1} i se asociază matricea A^{n+1}.

Rezultă că $x_n = \frac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n}$ și căruia i se asociază matricea

$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$.

Deci, pentru a calcula pe x_n în funcție de x_0, este suficient să calculăm pe A^n.

Observație 1.4.7.: Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ poate fi definit cu anumite condiții asupra termenului inițial x_0. Din expresiile matricei A^n deducem condițiile de existență a șirului recurent $c_n x_0 + d_n \neq 0, \forall n \in \mathbf{N}$ sau

$$x_0 \neq -\frac{d_n}{c_n}, n \in \mathbf{N}.$$

Se determină mulțimea $S = \left\{ -\frac{d_n}{c_n} \middle| n \in N \right\}$ și atunci condiția este $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \mathrm{S}$.

Back

#

Ecuații diofantice de tip Pell

Fie $d \in \mathbf{N}$, $d \geq 2$ un număr liber de pătrate ($\sqrt{d} \notin \mathbf{Q}$).

Definiție 1.4.8.: Ecuația diofantică $P: x^2 - dy^2 = 1$, unde $x, y \in \mathbf{Z}$ se numește **ecuația lui Pell.**

În cele ce urmează vom rezolva în numere întregi ecuația lui Pell.

Observație 1.4.9.:

1). Perechile (–1, 0), (1, 0) sunt soluții ale ecuație P și se numesc **soluții banale**.

2). Dacă (x, y) este soluție a ecuației P, atunci și $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ sunt soluții ale ecuației.

Deci, pentru a rezolva ecuația lui Pell, este suficient să-i aflăm soluțiile în mulțimea numerelor naturale $((x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}, (x, y) \neq (1,0))$.

Fie perechea $(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ căreia îi atașăm matricea $A_{x,y} = \begin{pmatrix} x & dy \\ y & x \end{pmatrix}$ pentru care $\det A_{x,y} = x^2 - dy^2 = 1$. Dacă notăm cu S_P mulțimea soluțiilor ecuației lui Pell, atunci $(x, y) \in S_P$ dacă și numai dacă $\det A_{x,y} = 1$, iar $(x, y) \neq (1,0)$ dacă și numai dacă $A_{x,y} \neq I_2$.

Dacă $(x_0, y_0) \in S_P$, $(x_0, y_0) \neq (1,0)$, atunci $\det A_{x_0,y_0} = 1$, de unde rezultă $\det A^n_{x_0,y_0} = 1$.

Fie $A^n_{x_0,y_0} = \begin{pmatrix} x_n & dy_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$ cu $x_n^2 - dy_n^2 = 1$ și dacă $A^{n+1}_{x_0,y_0} = \begin{pmatrix} x_{n+1} & dy_{n+1} \\ y_{n+1} & x_{n+1} \end{pmatrix}$, atunci

$$A^{n+1}_{x_0,y_0} = A^n_{x_0,y_0} \cdot A_{x_0,y_0} = \begin{pmatrix} x_n & dy_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 & dy_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0x_n + dy_0y_n & d(y_0x_n + x_0y_n) \\ y_0x_n + x_0y_n & x_0x_n + dy_0y_n \end{pmatrix}$$

iar

$$\det A^{n+1}_{x_0,y_0} = \det(A^n_{x_0,y_0} \cdot A_{x_0,y_0}) = \det A^n_{x_0,y_0} \cdot \det A_{x_0,y_0} = 1.$$

Rezultă $x_{n+1} = x_0x_n + dy_0y_n$

$y_{n+1} = y_0x_n + x_0y_n$ sau

(1) $x_n = x_0x_{n-1} + dy_0y_{n-1}$

(1') $y_n = y_0x_{n-1} + x_0y_{n-1}, n \geq 1$, cu x_0, y_0 dați astfel încât $(x_0, y_0) \neq (1,0)$.

Dacă $(x_0, y_0) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, atunci și $(x_n, y_n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, cu alte cuvinte, dacă (x_0, y_0) este soluție a ecuației Pell, atunci și (x_n, y_n) este soluție a ecuației Pell.

Relațiile de recurență (1) și (1') pot fi scrise marticeal

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & dy_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \text{ sau}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & dy_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$ iar de aici, folosind ecuația caracteristică pentru aflarea lui $\begin{pmatrix} x_0 & dy_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}^n$, rezultă:

$$(*) \quad \begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^{n+1} + \left(x_0 - y_0\sqrt{d}\right)^{n+1}\right] \\ y_n &= \frac{1}{2\sqrt{d}}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^{n+1} - \left(x_0 - y_0\sqrt{d}\right)^{n+1}\right], n \geq 0, \end{aligned}$$

și luând soluția (x_0, y_0) minimă nebanală (cu x_0 minim dacă și numai dacă y_0 minim) obținem că

$$S_P \subset \{(-1,0), (1,0), (x_n, y_n), (-x_n, y_n), (x_n, -y_n), (-x_n, -y_n)\} = S.$$

Vom arăta reciproca, $S \subset S_P$.

Dacă $(x, y) \in S \cap \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $(x, y) \neq (1,0)$, definim $B = A_{x,y}$ și $B_1 = A^{-1} \cdot B$ cu $A_{x_0,y_0} = \begin{pmatrix} x_0 & dy_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}$, unde (x_0, y_0) este soluția minimă. Rezultă $\det B_1 = 1$ și $B_1 = \begin{pmatrix} x' & dy' \\ y' & x' \end{pmatrix}$, unde $\begin{cases} x' = x_0x - dy_0y \\ y' = -y_0x + x_0y \end{cases}$, din care se deduce că $x' < x, y' < y$ dacă $(x, y) \neq (1,0)$ și $(x', y') \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Continuând găsim $B_2 = A^{-1} \cdot B_1, B_3 = A^{-1} \cdot B_2$, ..., $B_k = A^{-1} \cdot B_{k-1} = I_2$ și mergând înapoi rezultă $A_{x,y} = A^{k-1}_{x_0,y_0}$, adică $(x, y) \in S_P$.

Exemplu 1.4.10.: Să se afle soluţia generală în **Z** x **Z** a ecuaţiei diofantice $x^2 - 2y^2 = 1$.

Fie $(x_0, y_0) = (3,2)$ soluţia pozitivă minimă a ecuaţiei, diferită de soluţiile banale $(1,0)$ şi $(-1,0)$.

Ecuaţia dată are deci o infinitate de soluţii date de (*) în care vom înlocui $x_0 = 3, y_0 = 2$ şi $d = 2$.

Obţinem:

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(3-2\sqrt{2}\right)^{n+1}\right], n \geq 0, \text{iar}$$

$$S_P = \left\{(\pm x_n, \pm y_n) \middle| n \in N\right\} \cup \left\{(\pm 1, 0)\right\}.$$

Observaţie 1.4.11.: Soluţiile ecuaţiei Pell, pot fi utilizate în aproximarea radicalilor numerelor naturale care nu sunt pătrate perfecte. Într-adevăr, dacă $(x_n, y_n)_{n\geq 1}$ sunt soluţii ale ecuaţiei $x^2 - dy^2 = 1$, atunci

$$x_n - y_n\sqrt{d} = \frac{1}{x_n + y_n\sqrt{d}} \text{ deci}$$

$$\frac{x_n}{y_n} - \sqrt{d} = \frac{1}{y_n(x_n + y_n\sqrt{d})} < \frac{1}{\sqrt{d}\,y_n^2} < \frac{1}{y_n^2},$$ de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \sqrt{d}$, adică fracţiile $\frac{x_n}{y_n}$ aproximează pe $\sqrt{d}$ cu o eroare mai mică decât $\frac{1}{y_n^2}$.

Ecuaţia $ax^2 - by^2 = 1$, $(a, b \in \mathrm{N}^*)$.

Observaţie 1.4.12.: Această ecuaţie este mai generală decât ecuaţia lui Pell, $x^2 - dy^2 = 1$.

Proprietate 1.4.13.: Dacă $ab = k^2, k \in \mathrm{N}, k > 1$, atunci ecuaţia $ax^2 - by^2 = 1$ nu are soluţii în numere naturale.

Demonstrație:

Într-adevăr, presupunem că ecuația dată ar avea o soluție în numere naturale (x_0, y_0), atunci $ax_0^2 - by_0^2 = 1$, adică a și b sunt prime între ele. Urmează că egalitatea $ab = k^2$ implică $a = k_1^2, b = k_2^2$, unde $k_1k_2 = k, k_1, k_2 \in \mathbf{N}^*$.

Ecuația devine $k_1^2x^2 - k_2^2y^2 = 1$ sau $(k_1x - k_2y)(k_1x + k_2y) = 1$, adică $1 < k_1x + k_2y = k_1x - k_2y = 1$, ceea ce este imposibil.

Vom numi **rezolventa Pell** a ecuației $ax^2 - by^2 = 1$, ecuația $u^2 - abv^2 = 1$ și vom demonstra următoarea:

Proprietate 1.4.14.: Dacă ecuația $ax^2 - by^2 = 1$, are o soluție nebanală în numere naturale, atunci ea are o infinitate de soluții în numere naturale.

Demonstrație:

Fie (x_0, y_0), $x_0, y_0 \in \mathbf{N}^*$ o soluție a ecuației $ax^2 - by^2 = 1$. Deoarece ab nu este pătrat perfect, conform teoremei demonstrate mai sus, rezultă că rezolventa Pell are o infinitate de soluții în numere naturale, date de formulele (*).

Notăm cu (u_n, v_n), $n \in \mathbf{N}$, soluția generală a rezolventei Pell $u^2 - abv^2 = 1$. Atunci $(x_n, y_n), n \in \mathbf{N}$, unde $x_n = x_0u_n + by_0v_n$, $y_n = y_0u_n + ax_0v_n$ sunt soluții ale ecuației $ax^2 - by^2 = 1, \forall n \in \mathbf{N}$, deoarece
$ax_n^2 - by_n^2 = a(x_0u_n + by_0v_n)^2 - b(y_0u_n + ax_0v_n)^2 = (ax_0^2 - by_0^2)(u_n^2 - abv_n^2) = 1, \forall n \in$ $\mathbf{N}$, adică ecuația $ax^2 - by^2 = 1$ are o infinitate de soluții.

Proprietate 1.4.15. Soluția generală a ecuației $ax^2 - by^2 = 1$ este $(x_n, y_n), n \in \mathbf{N}$, unde $x_n = Au_n + bBv_n$, $y_n = Bu_n + aAv_n$, (u_n, v_n), $n \in \mathbf{N}$, fiind soluția generală a rezolventei Pell, iar (A,B), $A, B \in \mathbf{N}$, cea mai mică soluție a ecuației considerate.

Demonstrație:

Am arătat mai sus, că dacă (u_n, v_n), $n \in \mathbf{N}$, este soluția generală a rezolventei Pell, atunci $(x_n, y_n), n \in \mathbf{N}$, sunt soluții ale ecuației $ax^2 - by^2 = 1$.

Reciproc, arătăm că dacă $(x_n, y_n), n \in \mathbf{N}$, sunt soluții ale ecuației $ax^2 - by^2 = 1$, atunci (u_n, v_n), $n \in \mathbf{N}$, unde $u_n = aAx_n - bBy_n, v_n = Bx_n - Ay_n$, sunt soluții ale rezolventei Pell, $u^2 - abv^2 = 1$.

Într-adevăr
$u_n^2 - abv_n^2 = (aAx_n - bBy_n)^2 - ab(Bx_n - Ay_n)^2 = (aA^2 - bB^2)(ax_n^2 - by_n^2) = 1, \forall n \in$ $\mathbf{N}$, propoziția fiind astfel demonstrată.

În cazul particular $b = 1$, metoda expusă mai sus oferă rezolvarea ecuației $dx^2 - y^2 = 1$, pe care o vom numi **ecuația Pell conjugată**.

Prin urmare, soluția generală a ecuației Pell conjugate este $(x_n, y_n), n \in \mathbf{N}$, unde:

$$x_n = Au_n + Bv_n, y_n = Bu_n + DAv_n,$$

(A,B) fiind cea mai mică soluție a ecuației $Dx^2 - y^2 = 1$, iar (u_n, v_n), $n \in \mathbf{N}$ soluțiile ecuației lui Pell $u^2 - dv^2 = 1$.

Observație 1.4.16.: Șirurile $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ definite recursiv prin relațiile de mai sus, verifică identitatea $y_n = \left[\sqrt{d}x_n\right], \forall n \in \mathbf{N}$.

Într-adevăr, $(x_n, y_n), n \in \mathbf{N}$ fiind soluția generală a ecuației Pell conjugate, $dx^2 - y^2 = 1$, avem $\left(\sqrt{d}x_n + y_n\right)\left(\sqrt{d}x_n - y_n\right) = 1$.

Dar $x_n, y_n \in \mathbf{N}^*$, $\forall n \in \mathbf{N}$ și deci $\sqrt{d}x_n + y_n > 1$. Prin urmare $0 < \sqrt{d}x_n - y_n < 1$, de unde

$y_n < \sqrt{d}x_n < y_n + 1$, adică $y_n = \left[\sqrt{d}x_n\right], \forall n \in \mathbf{N}$.

Exemplu 1.4.17.: Să se afle soluția generală în $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ a ecuației $6x^2 - 5y^2 = 1$.

Cea mai mică soluție a ecuației este (1,1). Rezolventa Pell este ecuația $u^2 - 30v^2 = 1$, care are cea mai mică soluție (11,2). Ținând seama de (*), găsim soluția generală a rezolventei Pell (u_n, v_n), $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 11u_n + 60v_n$, $v_{n+1} = 11v_n + 2u_n, u_1 = 11, v_1 = 2$.

Folosind ultima proprietate demonstrată, obținem soluția generală a ecuației $6x^2 - 5y^2 = 1$, $(x_n, y_n), n \in \mathbf{N}$, $x_n = u_n + 5v_n, y_n = u_n + 6v_n$, iar forma explicită este (din (*)):

$$x_n = \frac{6+\sqrt{30}}{12}(11+2\sqrt{30})^n + \frac{6-\sqrt{30}}{12}(11-2\sqrt{30})^n,$$

$$y_n = \frac{5+\sqrt{30}}{12}(11+2\sqrt{30})^n + \frac{5-\sqrt{30}}{12}(11-2\sqrt{30})^n.$$

Back