Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. aprilie 2009

METODA VECTORIALĂ ÎN GEOMETRIE

prof. Andrei - Octavian Dobre

Această metodă poate fi descrisă după cum urmează:

Fiind dată o problemă de geometrie, după explicitarea şi reprezentarea grafică a configuraţiei geometrice la care se referă, se fixează un punct numit origine, se introduc vectorii de poziţie ai celorlalte puncte şi oricare alţi vectori ce se pot considera. Se transcrie ipoteza problemei în formă vectorială, formă care se transformă prin metode algebrice până, prin revenire la forma geometrică, obţinem concluzia dorită. Subliniem că avem în vedere în primul rând probleme al căror enunţ nu conţine referiri la vectori. În soluţie vectorii au rol auxiliar. Punctul origine se poate alege oricum şi se poate schimba pe parcursul rezolvării. Uneori este bine să-l alegem particular, legat de configuraţie. Alteori este de preferat să-l considerăm arbitrar (în spaţiu, chiar dacă problema este plană) pentru a păstra simetriile în calcule.

Metoda vectorială trebuie introdusă numai după ce s-au predat toate operaţiile cu vectori pentru că acestea se aplică în combinaţie.

De obicei soluţiile vectoriale dau mai mult decât concluzia ce se urmăreşte pentru că din interpretarea geometrică a unei relaţii vectoriale obţinem informaţii în legătură cu mărimile, direcţiile şi sensurile vectorilor în discuţie. Aceste informaţii pot contribui la rezolvarea altor probleme şi trebuie exploatate pentru a câştiga timp.

Înainte de predarea acestei metode se impune o pregătire prin care se completează proprietăţile operaţiilor cu vectori date mai sus pentru obişnuirea elevilor cu transcrierea vectorială a unor aspecte geometrice şi cu traducerea în geometrie a relaţiilor cu vectori. Schiţăm conţinutul unei asemenea pregătiri:

- Amintim că doi vectori nenuli $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari dacă $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, $\vec{u} = \mu\vec{v}$ $(\mu = 1/\lambda)$.

Vectorul nul este coliniar cu orice vector. Dacă $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ şi $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, atunci $\vec{v} = \lambda\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ cu O, A, B coliniare şi $|\lambda| = \frac{OB}{OA}$. Reciproc, date fiind trei puncte coliniare O, A, B, introducând vectorii $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ şi $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, putem scrie $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ cu $|\lambda| = \frac{OB}{OA}$. Dacă O este între A şi B, atunci λ este negativ. El este pozitiv sau zero pentru alte poziţii ale lui O în raport cu A şi B.

- Dacă doi vectori nenuli $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt necoliniari, atunci o egalitate de forma $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{O}$ implică $\lambda = \mu = 0$. Altfel ei ar fi coliniari.

- Amintim că dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sunt trei vectori nenuli coplanari atunci oricare dintre ei se scrie ca o combinaţie liniară faţă de ceilalţi. De aici rezultă că dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sunt vectori nenuli şi necoplanari, o relație de forma $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{O}$ implică $\lambda=\mu=\nu=0$ pentru că, în caz contrar, ei ar fi coplanari.

- Fie trei puncte necoliniare A,B,C. Avem evident $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{O}$. Rezultă că dacă $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sunt trei vectori nenuli şi necoliniari încât $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{O}$, atunci cu reprezentanți ai lor se poate contrui un triunghi. Aşadar, lungimile acestor vectori satisfac inegalitățile triunghiulare corespunzătoare.
- Fie A,B,M trei puncte coliniare cu $A\neq B$. Putem deci scrie $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{MB}$ cu $|k|=\dfrac{MA}{MB}, k\neq -1$. Vom spune că M împarte segmentul (AB) în raportul $k\neq -1$. Observăm că $M\in[AB)$ dacă şi numai dacă $k\geq 0$. Fie un punct fixat O în spațiu. Putem scrie $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$ şi, după un calcul simplu, obținem:

Punctul M împarte segmentul (AB) în raportul $k\neq -1$ dacă şi numai dacă are loc egalitatea:

(1) $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}}{1+k}$, oricare ar fi O.

Pentru $k=1$, M devine mijlocul segmentului (AB).

- Amintim că doi vectori sunt perpendiculari dacă şi numai dacă produsul lor scalar este zero. Reținem şi egalitatea

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

care se obține uşor din $BC=OC-OB$ etc.

Continuăm prin a stabili unele consecințe imediate ale considerațiilor de mai sus

1. Fie AA',BB',CC' medianele unui triunghi ABC. Folosind (1) cu $O=A, k=1$, obținem

(3) $\overrightarrow{AA'}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$,

care prin adunare conduc la

(4) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{O}$.

Aşadar, cu medianele unui triunghi se poate construi un triunghi (laturile lui satisfac inegalitățile triunghiulare).

2. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi E,F mijloacele diagonalelor AC şi BD, respectiv. Avem, succesiv, $2\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC},\ 2\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD},\ 2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$. Dacă $\overrightarrow{EF}=\vec{O}$, atunci E coincide cu F, cu alte cuvinte, diagonalele patrulaterului convex $ABCD$ se înjumătățesc. Dar $\overrightarrow{EF}=\vec{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow ABCD$ paralelogram şi obținem:

Diagonalele unui patrulater convex se înjumătățesc dacă şi numai dacă este paralelogram.

3. Fie un triunghi ABC şi AA',BB',CC' medianele sale. Medianele AA' şi BB' se intersectează într-un punct G dacă şi numai dacă există numerele reale λ şi μ diferite de -1 încât $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OA'}}{1+\lambda}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OB'}}{1+\mu}$, cu O arbitrar în spațiu. Proprietatea lui A' şi B' de a fi mijloacele laturilor $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{CA}$, respectiv, conduce la

$$\frac{2\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)}{1+\lambda}=\frac{2\overrightarrow{OB}+\mu\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right)}{1+\mu}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{1+\lambda}-\frac{\mu}{1+\mu}\right)\overrightarrow{OA}+\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}-\frac{2}{1+\mu}\right)\overrightarrow{OB}+\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}-\frac{\mu}{1+\mu}\right)\overrightarrow{OC}=\vec{O}.$$

Vectorii $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ sunt necoplanari. Egalând cu zero coeficienții lor în relația de mai sus, obținem un sistem de trei ecuații cu două necunoscute, care este compatibil, cu soluție unică $\lambda=\mu=2$. Aşadar medianele AA' şi BB' se intersectează într-un punct G al cărui vector de poziție este

(5) $$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}.$$

Expresiile anterioare ale lui $\overrightarrow{OG}$ sugerează să scriem (5) în forma

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OC}+2\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}}{2}=\frac{\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC'}}{1+3}.$$

Deci G se află şi pe mediana CC', împărțind segmentul CC' în raportul $k=2$. Concluzie:

Medianele unui triunghi sunt concurente într-un punct aflat pe fiecare din ele la 2/3 de vârf şi 1/3 de bază.

Formula (5) ne spune că $\overrightarrow{OG}$ este media aritmetică a vectorilor $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$. Ce interpretare geometrică putem da punctului R cu proprietatea că $\overrightarrow{OR}$ este media aritmetică a vectorilor de poziție a patru puncte necoplanare A,B,C,D? Scriem proprietatea lui $\overrightarrow{OR}$ în forma $2\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}+\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$ şi deci R este mijlocul segmentului ce uneşte mijloacele mulchiilor opuse (AB) şi (CD) în tetraedrul $ABCD$. Dreapta EF se numeşte bimediană a tetraedrului $ABCD$. Alte două exprimări similare ale lui $\overrightarrow{OR}$ conduc la concluzia:

Bimedianele unui tetraedru sunt concurente într-un punct care este mijlocul fiecărui segment de bimediană interior tetraedrului.

Considerațiile asupra lui $\overrightarrow{OG}$ ne sugerează să gândim $4=1+3$ şi să exprimăm $\overrightarrow{OR}$ în forma $\overrightarrow{OR}=\frac{1}{1+3}\left(\overrightarrow{OA}+3\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{3}\right)=\frac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OA'}}{1+3}$, unde A' este centrul de greutate al feței BCD. Aşadar, R se află pe segmentul AA', numit şi mediană a tetraedrului $ABCD$, la 3/4 de vârf şi 1/4 de bază. Dreapta AA' se numeşte de asemenea mediană. Aranjări similare pentru $\overrightarrow{OR}$ conduc la proprietatea:

Medianele unui tetraedru sunt concurente într-un punct situat pe fiecare din ele la 3/4 de vârf şi 1/4 de bază.

Punctul R se numeşte centrul de greutate al tetraedrului $ABCD$.

4. Fie un patrulater convex $ABCD$ şi M, N mijloacele laturilor AB şi CD, respectiv. Să se demonstreze că $2MN\le AD+BC$ şi să se identifice situația de egalitate. Problema nu aminteşte de vectori. Totuşi, o relație între vectori de forma

(6) $$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC},$$

ne-ar conduce la soluție, deoarece putem scrie $2|\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}|\le|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{BC}|$ care este chiar inegalitatea de demonstrat. Rămâne să demonstrăm (6). Avem: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$ şi $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$, egalități care prin adunare membru cu membru dau chiar (6) având în vedere ipoteza: $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.

În general, $|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$ cu egalitate pentru $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ coliniari şi de acelaşi sens. Aşadar, situația de egalitate este $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{BC}$ coliniari şi de acelaşi sens, cu alte cuvinte, dacă $ABCD$ devine trapez de baze $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{BC}$, situație în care $\overrightarrow{MN}$ devine linie mijlocie. Aşadar, egalitatea ne dă proprietatea:

Lungimea liniei mijlocii a unui trapez este media aritmetică a lungimilor bazelor sale.

În cazul trapezului, egalitatea (6) ne spune că $\overrightarrow{MN}$ este coliniar cu $\overrightarrow{AD}$ (evident şi cu $\overrightarrow{BC}$). Acest fapt conduce la proprietatea:

Linia mijlocie a trapezului este paralelă cu bazele.

Pentru $D=A$ obținem triunghiul ABC şi proprietățile de mai sus au loc pentru linia mijlocie în triunghi. Notăm că inegalitatea propusă are loc şi în situația în care (AB) şi (DC) sunt două segmente necoplanare. Demonstrația vectorială nu a făcut uz de coplanaritatea punctelor A,B,C,D. În consecință, obținem:

Suma laturilor bimedianelor unui tetraedru este mai mică decât suma muchiilor tetraedrului.

5. Fie un paralelogram $ABCD$. Avem evident $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$. Prin înmulțire scalară obținem $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AD}^2$ şi deci $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}\Leftrightarrow|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$. Aşadar avem:

Într-un paralelogram diagonalele sunt perpendiculare dacă şi numai dacă laturile sale sunt congruente.

Am obținut astfel o caracterizare a rombului. Aceleaşi egalități vectoriale, prin ridicare la pătrat şi adunare conduc la

(7) $\quad AC^2+BD^2=2\left(AB^2+AD^2\right)$.

6. Să se afle locul geometric al punctelor M cu proprietatea că unghiul $A\hat{M}B$ este drept, A, B puncte fixe distincte. Fie O mijlocul (fix) al segmentului (AB). Rezultă $2\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ şi prin ridicare scalară la pătrat $4\overrightarrow{MO}^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2\Leftrightarrow 2MO=AB$. Aşadar, (MO) are lungime constantă $\frac{1}{2}AB$, şi deci locul geometric este cercul de diametru AB.

Aceeaşi configurație. Se cere locul lui M încât $MA^2+MB^2=k^2$ (constant). Fie din nou mijlocul O al segmentului (AB). Teorema medianei pentru MO ne dă: $4MO^2=2k^2-AB^2$ şi, deci pentru $2k^2>AB^2$ locul geometric este un cerc de centru O şi rază $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-AB^2}$, pentru $2k^2=AB^2$ locul geometric se reduce la punctul O, iar pentru $2k^2<AB^2$ devine mulțimea vidă.

7. Să se arate că înălțimile unui triunghi sunt concurente. Într-un triunghi ABC, fie H intersecția înălțimilor AA_1 şi BB_1 cu $A_1\in BC$ şi $B_1\in AC$. Punctul H există pentru că în caz contrar punctele A,B,C devin coliniare. Introducem vectori şi exprimăm ipoteza în forma $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Combinând aceste egalităţi cu relaţia (2) scrisă pentru $O = H$, obţinem $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, deci *H* este şi pe înălţimea din *C*.

8. Fie un tetraedru $ABCD$. Relaţia (2) cu $O = D$ se scrie $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ şi, evident că dacă două produse scalare din această egalitate devin zero, al treilea este, de asemenea, zero. Aşadar, obţinem:

Dacă într-un tetraedru două perechi de muchii opuse sunt mutual perpendiculare, atunci şi a treia pereche de muchii opuse are aceeaşi proprietate.

BIBLIOGRAFIE

1. Girard G. ş.a., *Geometrie vectorială. Geometrie afină*, Colecţia ALEF0, Vol. II, Bucureşti, EDP, 1973.
2. Miron R., *Introducere vectorială în geometria analitică plană*, Bucureşti, EDP, 1970.
3. Moise E., Downs F., *Geometrie*, Bucureşti, EDP, 1983.
4. Pop Ioan, *Curs de geometrie analitică*, Iaşi, Univ. "Al. I. Cuza", 1992.
5. Simionescu Gh. D., *Noţiuni de algebră vectorială şi aplicaţii în geometrie*, Bucureşti, Ed. Tehnică, 1982.
6. Udrişte C., Tomuleanu V., *Geometrie analitică. Manual pentru clasa a XI-a*, Bucureşti, EDP, 1981.